

國立臺灣大學管理學院財務金融學系

碩士論文

Department of Finance

College of Management

National Taiwan University

Master Thesis

隨機回復率架構下之擔保債權憑證評價模型比較

The Comparison of CDO Pricing With Stochastic Recovery Rate



Wang, Chun-Kai

指導教授：李賢源 博士

Advisor: Shyan Lee, Ph.D.

中華民國 98 年 7 月

July, 2009

謝辭

師長的協助及同學的陪伴，是完成此篇論文及研究所課業的兩大要素。首先，由衷感激指導教授李賢源老師，李老師帶給我們的不僅及於論文上的指導，也使我们學習到一種實事求是的嚴謹態度，以及做事和求學問的自律，此外老師對教學的熱情和了解並解決問題的執著，也對我產生深厚的影響。老師的諄諄教誨，不論學術研究上或行為處事上，我將永遠銘記於心。

誠摯感謝兩位口試委員—江彌修教授及謝承熹教授，兩位教授所給予我的寶貴建議和指導使得本篇論文更加完善。也是由於江老師幾年前的一門課，才讓我有機會初探金融工程的領域，江老師那時對七人小班級的認真教導，我仍然印象深刻；謝老師甚至逐字逐句的研讀我的論文，並告訴我筆誤之處，如此認真態度，我更是萬分感謝。

此外，也要對於那些在我論文上提供協助的同學們，以及陪伴我完成論文的好伙伴，獻上我的感激。財工組的育誠、健忠和宇正同學，感謝你們提供我數學方面的指導；亞蘭學姊和正修，感謝你們安排每次開會時間及地點；國企所知己威孝，感謝你和我一起完成論文的那段既辛苦又有趣時光，雖然我們互相無法於對方的研究主題表示意見；也感謝在研究所學習過程中，成為我學習榜樣的同學、失落時給予鼓勵的同學、對我生涯規劃提供建議的同學和提供我新思維的同學；當然還要感謝女朋友 Ruby，以成熟的態度，陪著我南征北討經歷大大小小的事，並從旁提供協助，更成為我精神上的支柱。

最後，感謝我的父母親，無時無刻在背後默默支持著我，扮演著我最強而有力的後盾。再次感謝各位對我付出。未來，我將恪遵老師的指導與教誨，並秉持兢兢業業和擇善固執的心態，期望能為金融發展和秩序上貢獻一己之力。

王俊凱 謹誌於

台灣大學財務金融研究所

中華民國九十八年七月

摘要

2007 年起，由於次級房貸事件爆發，以及接踵而至之信用危機及經濟衰退，使許多信用衍生性商品之信用利差大幅攀升，造成在標準市場模型 (One Factor Gaussian Copula) 的架構下無法求取 Base Correlation，特別是 CDX.NA.OG [15, 30%] 以及 iTraxx Europe [12, 22%] 兩優先批次證券。Base Correlation 為市場參與者在計算避險係數和結算損益之重要參數，若無法求取將不利於信用衍生性商品之流動性。

Amraoui and Hitier (2008) 提出改變回復率之做法來改善標準市場模型，在 One Factor Gaussian Copula 模型中，將回復率 (Recovery Rate) 由原本固定常數改為系統因子之一函數，隨系統因子之水準不同而改變，而 Amraoui and Hitier 發現改進後的模型能夠降低 Base Correlation 之水準，並且減少 Negative Delta 之現象。目前 Amraoui and Hitier 模型廣為實務上所接受使用，唯仍然建立於 Gaussian 分配之架構下。本篇論文建立於 Amraoui and Hitier 對回復率之假設，以 Student t 分配來取代原本 Gaussian 分配，試圖建立一擔保抵押債權之評價模型，來和 Amraoui and Hitier 模型比較其優劣。在本論文中，首先求算不同模型在參數改變下之評價結果，來探討不同評價模型之特性，接著以 Base Correlation 及 Correlation Skew 兩個面相來比較不同模型，進而尋求更完整且實用之信用衍生性商品評價模型。

關鍵字：Base Correlation、合成型擔保債權憑證、信用指數、隨機回復率、Factor copula model

Abstract

Since mid-2007, the outburst of subprime crisis and the consecutive credit crunch as well as economic recession have led to the recent widening in super-senior spreads, which pushed the base correlation to its limits that can be allowed under One Factor Gaussian Copula (OFGC) model. Base correlation is mainly used by market practitioners in calculating hedge ratio, mark-to-market profit and loss and the spreads of bespoke tranches. Hence, the inability to calibrate base correlation could have seriously negative impact on credit market.

Amraoui and Hitier (2008) proposed a new method to enhance OFGC model by modeling the recovery rate as a deterministic function of the systematic risk. The new model can reduce the levels of base correlation for each tranches and the number of negative deltas for super senior tranche (ex: CDX.NA.IG 15-30% tranche), yet it has been built under the framework of Gaussian distribution.

In this paper, we replace Gaussian distribution with Student-t distribution under the stochastic recovery rate model proposed by Amraoui and Hitier (2008). In our study, we look into the parameter sensitivities of the two models and then compare the two models in terms of the results of pricing and base correlation.

Keywords: Base correlation, Collateralized Debt Obligations, Credit index, Factor copula model , Stochastic recovery rate.

目錄

第一章	前言	9
第二章	信用衍生性商品暨市場概況	11
2.1	信用違約交換	11
2.2	擔保債權憑證	13
2.3	合成型擔保債權憑證	17
2.4	信用違約交換指數	18
2.5	Base Correlation 架構之限制	23
第三章	文獻回顧	25
3.1	信用風險模型	25
3.2	擔保債權憑證之評價	28
3.3	違約回復率之設定	30
第四章	模型介紹	32
4.1	One Factor Gaussian Copula Model	33
4.2	One Factor Student t Copula Model	35
4.3	擔保債權憑證之評價	37
4.4	隨機回復率	39
4.5	Base Correlation : JPMorgan Method	47
第五章	實證分析	51
5.1	模型評價比較	51
5.2	Base Correlation 比較	60
第六章	結論	62
	參考文獻	63

圖目錄

圖一、信用違約交換合約架構.....	11
圖二、擔保債權憑證(CDO)架構圖.....	13
圖三、CDO 批次證券結構及屬性.....	14
圖四、合成型債權擔保憑證(Synthetic CDO)之架構.....	18
圖五、CDX 和 iTraxx super senior 之相關係數.....	23
圖六、首次通過時間模型.....	26
圖七、違約率和平滑 GDP 成長率之關係.....	38
圖八、 $\rho = 30\%$, $R_i^{\min} = 0\%$ 條件違約機率和違約回復率之水準.....	41
圖九、 $\rho = 60\%$, $R_i^{\min} = 0\%$ 條件違約機率和違約回復率之水準.....	42
圖十、 $\rho = 60\%$, $R_i^{\min} = 10\%$ 條件違約機率和違約回復率之水準.....	42
圖十一、 $\rho = 60\%$, $R_i^{\min} = 40\%$ 條件違約機率和違約回復率之水準.....	43
圖十二、OFGC 及 Amaraoui-Hitier 下條件損失分配.....	44
圖十三、Amaraoui-Hitier Model 不同違約相關係數下之條件損失分配.....	46
圖十四、Base Tranche 示意圖.....	47
圖十五、 $[0, 3\%]$ 在不同回復率設定下各模型評價結果.....	53
圖十六、 $[3, 7\%]$ 在不同回復率設定下各模型評價結果.....	53
圖十七、 $[7, 10\%]$ 在不同回復率設定下各模型評價結果.....	54
圖十八、 $[10, 15\%]$ 在不同回復率設定下各模型評價結果.....	54
圖十九、 $[15, 30\%]$ 在不同回復率設定下各模型評價結果.....	55
圖二十、 $[30, 100\%]$ 在不同回復率設定下各模型評價結果.....	55
圖二十一、 $[0, 3\%]$ 不同相關係數下各模型評價結果.....	56
圖二十二、 $[3, 7\%]$ 不同相關係數下各模型評價結果.....	57

圖二十三、[7, 10%]不同相關係數下各模型評價結果.....	57
圖二十四、[10, 15%]不同相關係數下各模型評價結果.....	58
圖二十五、[15, 30%]不同相關係數下各模型評價結果.....	58
圖二十六、[30, 100%]不同相關係數下各模型評價結果.....	59
圖二十七、不同模型下各批次證券之 Base Correlation.....	60



表目錄

表格一、債權擔保憑證 (CDO) 之型態.....	15
表格二、信用指數 CDX.NA.IG 規格.....	19
表格三、信用指數 iTraxx Europe 規格.....	20
表格四、2008/06/27 iTraxx Europe Serious 9 5 年期之報價.....	22
表格五、2008/06/27 CDX.NA.IG9 5 年期之報價.....	22
表格六、Krekel's model 回復率設定.....	30
表格七、不同圖形違約相關性 ρ 及違約回復率下界之設定.....	42
表格八、評價資料.....	51
表格九、不同 Factor Copula 模型評價結果 ($\rho = 30\%$, $R_{\min} = 0\%$)	52
表格十、不同 Factor Copula 模型評價結果 ($\rho = 60\%$, $R_{\min} = 0\%$)	52
表格十一、不同 Copula 模型評價結果 ($\rho = 30\%$, $R_{\min} = 10\%$)	53
表格十二、不同 Copula 模型評價結果 ($\rho = 30\%$, $R_{\min} = 20\%$)	53
表格十三、2008/06/27 5 年 CDX.NA.IG9 之市場報價.....	60
表格十四、不同模型下各批次證券之 Base Correlation	60

第一章 前言

在信用衍生性商品市場上，由於 One Factor Gaussian Copula (OFGC) 模型在應用上相當簡易，且評價速度快，近年來實務上大多以此模型來評價債權擔保憑證 (Collateralized Debt Obligation)，故 OFGC 模型又被稱為標準市場模型。但在此模型中，債權資產間之違約相關性為一參數，需外生給定，傳統上以歷史資料來求取相關係數代入模型中進行評價，卻發現模型價格和市場報價有所誤差，如同選擇權商品評價時，以標的資產歷史波動度 (Volatility) 代入 Black-Schole 模型中所產生與市場報價不符之問題。因此 McGinty and Ahluwalia (2004) 提出以 Base Correlation 之概念來改善模型，以市場所觀測各批次證券之報價來反推違約相關性，作為市場對於未來違約相關性之預期，此方法類似 Black-Schole 求取隱含波動度 (Implied Volatility) 的想法。Base Correlation 除了反應市場的預期之外，還可用於評價客製化 (Bespoke) 批次證券，以及計算避險系數 (Delta)。

然而在 2007 年起，接連發生次貸風暴 (Sub-prime Crisis)、美國三家主要投資銀行 (BearSterns、Lehman Brothers 和 Merrill Lynch) 因操作房地產抵押貸款證券化商品及信用衍生性商品失當而接連破產倒閉，引發全球性信用危機 (Credit Crunch)，使信用衍生性商品市場產生巨幅波動，某些交易較活絡之批次證券甚至無法求取 Base Correlation，如 CDX.NA.IG [15, 30%] 及 iTraxx Europe S9 [12, 22%] 等優先批次證券，進而造成避險參數和損益 (mark to market profit and loss) 無法計算。探討其原因，主要是因為在使用標準市場模型時，對於違約回復率 (Recovery Rate) 之假設過於簡單所致。目前市場上在評價信用指數商品及信用違約交換契約，皆假設回復率固定為歷史平均數，例如優先未擔保 (Senior Unsecured) 債券回復率通常設為 40%，但根據歷史資料顯示，回復率和總體經濟情況存在正向關係，即當公司於景氣好時違約，其回復率較高；在景氣差時發生倒閉，回復率較低。因此在評價上，需將此現象考慮於模型之中。Amraoui and Hitier (2008) 提出一套方法，在 OFGC 的架構下做延伸，將回復率由固定常數改變成隨系統因子改變之隨

機項，並發現此做法能夠有效降低各批次證券之 Base Correlation，並且消除在計算 Super Senior Tranche 時所產生 Negative Delta 不符直覺之結果。由於 Amraoui and Hitier 對回復率之設定符合經濟直覺，並且有效改善 OFGC 模型之缺點，目前廣為實務界上所接受並採用，唯模型仍建立於 Gaussian 分配的假設之下。

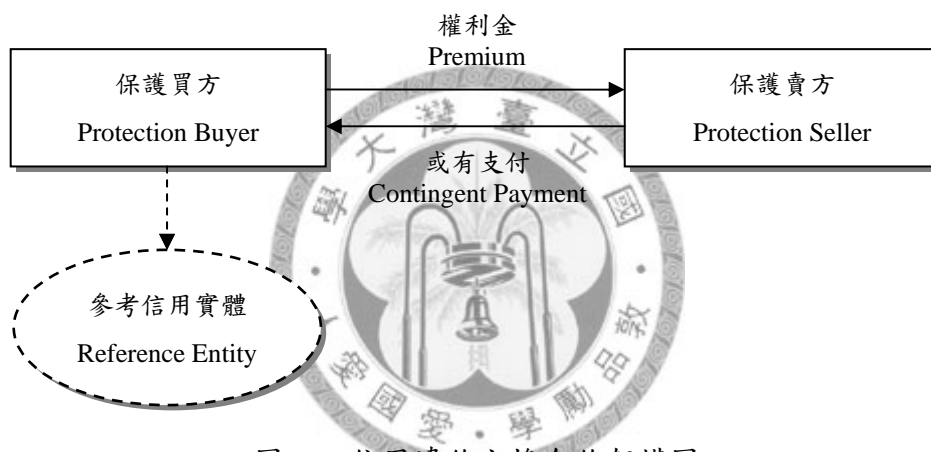
本篇論文試圖以 Student t 分配來取代 Gaussian 分配，來彌補後者無法捕捉極端損失之情形，並配合 Amraoui and Hitier 對違約回復率之設定，來比較替換之後的模型和 Amraoui and Hitier 之模型在評價上，以及求算 Base Correlation 之差異。

本論文之編排順序如下：第二章簡單介紹信用衍生性商品暨市場概況，以及標準市場模型（One Factor Gaussian Copula）應用上所面臨之問題。第三章為文獻回顧，分成信用風險模型、債權擔保憑證之評價，以及違約回復率三個子章節。第四章為模型介紹，首先介紹 Factor Copula 在 Gaussian 和 Student t 兩分配下之架構，接下來介紹擔保債權憑證評價之流程。本章節第三部份敘述 Amraoui and Hitier 改變回復率之作法，以及分析回復率在不同相關係數及系統因子下之水準。本章節最後介紹目前市場上較常用之求取 Base Correlation 方式：JPMorgan Method。第五章為實證分析，第一部份比較傳統市場模型、Amraoui and Hitier 模型在 Gaussian 分配和 Student t 分配三種模型在不同參數設定下之評價結果；第二部份比較不同模型下 Base Correlation 之差異。第六章為結論，總結本論文之發現以未來研究方向。

第二章 信用衍生性商品暨市場概況

2.1 信用違約交換 (Credit Default Swap)

信用違約交換為一由保護買方 (Protection Buyer) 及保護賣方 (Protection Seller) 雙方簽訂之合約，在合約所訂立的期限內，針對參考信用實體 (Reference Entity) 可能發生的違約事件提供擔保，其性質類似保險合約，保護買方需在契約期間內，定期支付保護賣方定額之權利金 (Premium)，當參考標的發生違約時，保護賣方需支付保護買方違約損失。



圖一、信用違約交換合約架構圖

信用違約交換在違約時處理方式可分為現金交割 (Cash Settlement) 及實務交割 (Physical Settlement) 兩種。如採現金交割，則保護賣方需支付實際違約時的損失給保護買方；採實務交割進行結算，保護賣方需支付名目本金予保護買方，而此時保護買方則需交付參考信用實體 (Reference Entity)。在違約時交割程序完成後，信用違約交換合約終止。信用違約交換之契約期間通常為 1 年至 10 年間。

根據沈大白與凌志銘¹ (2006)，International Swaps and Derivatives Association (ISDA) 在 2003 年將信用事件 (Credit Event) 主要定義為以下六大類：

¹ 沈大白、凌志銘 (2006)，「信用違約交換評價之實研究—TCRI 信用評等資訊之應用」，《金融風險管理季刊》，51-52 頁

1. 破產 (Bankruptcy) :

- 解散 (因事業合併、結合或併購除外) ;
- 無法清償債務或於司法或行政程序或訴訟中以書面承認無法於到期日償還債務 ;
- 已和債權人或為債權人之利益轉讓, 債務達成協議或合解 ;
- 依破產法或其他類似法律之規定, 向法院申請或已申請進入破產、解散或清算程序 ;
- 決議解散由政府接管或清算 ;
- 為信用連結公司或其全部資產尋求或指派破產管理人、清算人等類似職務者 ;
- 有擔保債權人占有信用連結公司部份或主要部分之財產, 就該等財產予以強制執行、扣押、查封或進行其他法律程序。

2. 無法支付 (Failure to Pay) : 於寬限期間屆滿或視為屆滿後, 信用連結公司未能依約付款, 且其一宗或數宗債務之累計金額不低於付款規定 (Payment Requirement) 所定金額。

3. 債務違約 (Obligation Default) : 參考債務仍正常支付本息, 但信用連結公司或其相關機構之參考債務發生違約或其他類似之情況或事件, 進而導致參考債務於原定到期及應還款的期限之前得依所定契約以宣告到期及還款, 或未能在付款到期日 (在任何適用之通知要求或寬限期生效後) 接契約付款。此條款係為確保所有債務處於相同地位。

4. 債務加速到期 (Obligation Acceleration) : 類似「債務／相互違約」, 參考債務仍正常支付本息, 但信用連結公司或其相關機構的其他債務發生違約或類似之情事, 使參考債務被終止債務或須提前清償, 此條款如同相互違約係為使參考資產與參考債務 (標的借款合同與其他類似條件之債務) 有相同的優先權。

5. 拒絕或延期償付 (Repudiation/Moratorium) : 意指信用連結公司單方面地在任

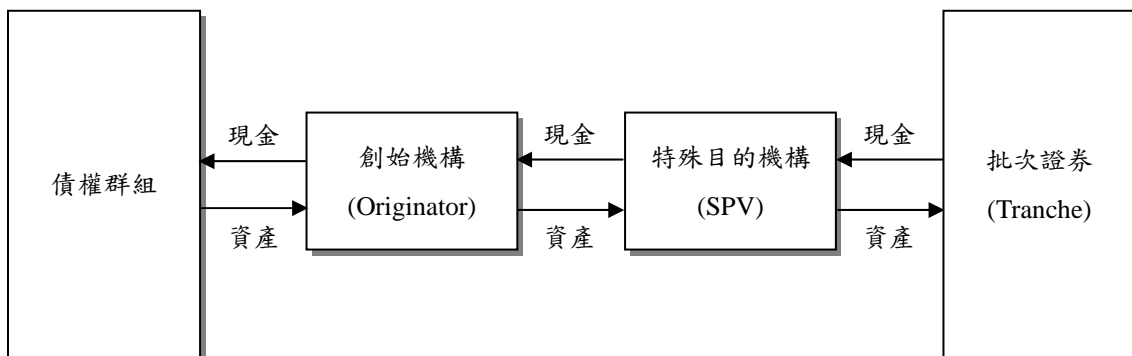
何重大方面拒絕、否認任何債務義務之合法性或有效性而拒絕或延期支付任何款項。

6. 債務重整 (Restructuring)：債務人因發生財務困難，與債權人重新協商將債務減免、展期或重新規劃後，債權人之權益因債務人申請債務重整而發生損失之情形。

透過信用違約交換，保護買方將能在沒有實質移轉 (Physical Transfer) 資產的情況下，降低資產負債表上之具有違約風險資產之信用風險，並達成保護買方在租稅及會計上的目的。信用違約交換雖然有規避信用風險之目的，但卻可能增加對手風險 (Counterparty Risk)，例如當參考信用實體發生違約事件時，保護賣方卻未能支付保護買方違約損失之情況。

2.2 擔保債權憑證 (Collateralized Debt Obligation: CDO)

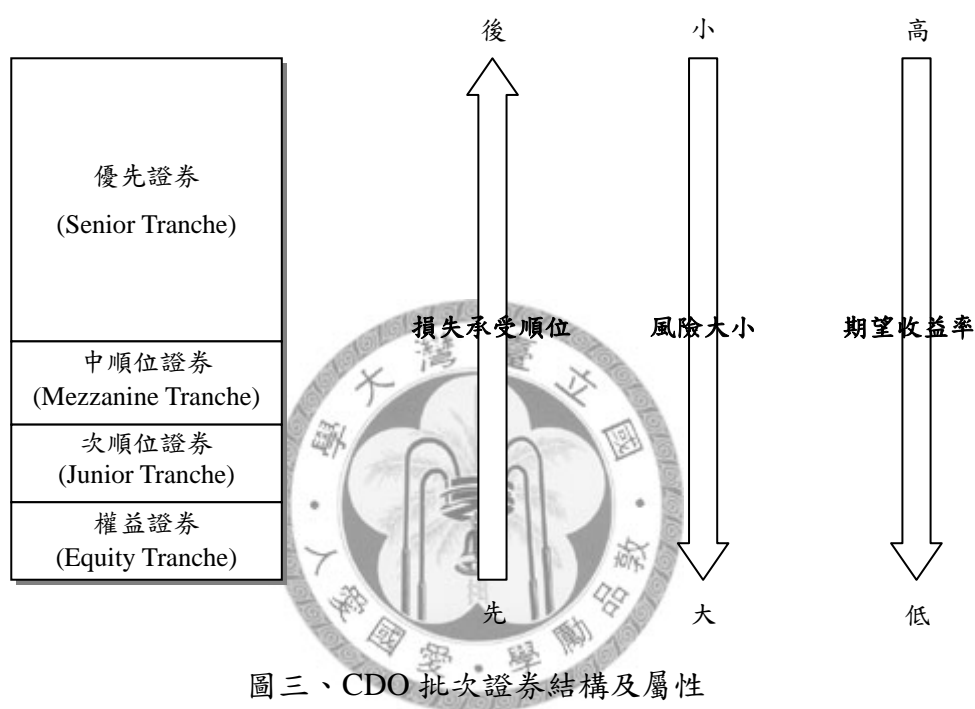
擔保債權憑證為近年來相當重要的一項資產證券化 (Asset Backed Securities: ABS) 商品，是由一創始機構 (Originator)，透過特殊目的機構 (Special Purpose Vehicle: SPV) 所發行，將一群組之具有違約風險之債權資產或固定收益證券所產生之現金流量加以重新分配，包裝成信用品質不同之批次證券 (Tranche)，由於各批次證券享有不同之收益率，且承擔違約損失之先後順序也不同，故可滿足不同風險偏好之投資者。



圖二、擔保債權憑證 (CDO) 架構圖

如同信用違約交換 (CDS)，擔保債權憑證之投資者，亦即批次證券持有者

(Tranche Holder) 每期收取固定權利金 (Premium)，然而當債權群組發生違約時，批次證券之持有者必須承擔損失。擔保債權憑證之批次證券依受償優先順序及吸收損失優先順序之不同，通常可分為以下幾種等級：權益證券² (Equity Tranche)、次順位證券 (Junior Tranche)、中順位證券 (Mezzanine Tranche)、優先證券 (Senior Tranche)，其承受違約損失之先後順序及收益率高低如下圖所示：



傳統擔保債權憑證商品之產生，主要是由於近年來美國持續維持低利率政策來刺激景氣，造成金融機構存放款利率降低，並且使利差縮小，許多金融機構為了提高獲利並且降低信用風險，遂將其帳面上所持有債權資產（例如：企業放款）以證券化 (Securitization) 的方式出售，如以一來便可收回貸放出去的資金並再次將此金額借出。透過擔保債權憑證所產生之槓桿 (leverage) 效果，金融機構將可增加其放款收入，提高資金運用效率及獲利能力，並且提高資本適足率 (Capital

²當債權群組有違約事件發生時，權益證券 (Equity Tranche) 將優先承受損失，相對地，也因權益證券之所承受之信用風險最大，其所享有之收益率最高。但在實務上，由於權益證券之風險過大，通常缺乏投資者願意購買，故由發行機構自行保留，並承受違約損失，此作法亦稱之為擔保債權憑證之信用增強措施 (Credit Enhancement)。

Adequacy)。

依照債權資產群組 (Asset Pool) 性質之不同，CDO 又可分成以下幾種型態：

表格一、債權擔保憑證 (CDO) 之型態

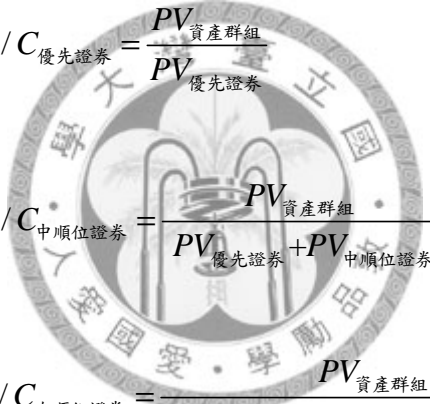
名稱	債權群組類型
<p>Mortgage-Backed Securities CDO (MBS-CDO)</p>	<p>不動產抵押貸款證券所組成，其中又可區分為住宅抵押貸款證券化 CDO (Residential Mortgage-Backed Securities CDO: RMBS-CDO)和商用不動產抵押貸款證券化 CDO (Commercial Mortgage-Backed Securities CDO: CMBS-CDO)。</p>
<p>Collateralized Loan Obligation (CLO)</p>	<p>債權資產群組以銀行之企業放款所組成 (Commercial Loans)，依風險高低還可區分成 High Yield³ CLO 和 Investment Grade CLO。</p>
<p>Collateralized Bond Obligation (CBO)</p>	<p>以企業所發行之公司債為債權資產群組。和 CLO 相同，因發行公司及債券本身之信用評等來區分，可分為 High Yield CBO 和 Investment Grade CBO。</p>
<p>Emerging Market Sovereign debt CDO</p>	<p>以新興市場 (國家) 之主權債券為擔保品之 CDO</p>
<p>Project Finance Debt CDO</p>	<p>專案計劃所發行之債券為債權資產，例如高速鐵路建設、機場興建 BOT 案。</p>

³ High Yield 高收益之債權資產系指信用評等在 Standard and Poor's BBB、Moody's Baa3 及 Fitch BBB 等級以下 (含) 之債權資產。

為了保護投資者，傳統擔保債權憑證通常在契約上設計幾種檢測條件，要求除了權益證券（Equity Tranche）之外的其他批之證券必須滿足其所設定之條件，否則擔保債權憑證之結構就必須做適當調整，直到每個批次證券滿足所設條件為止，其中最常見的檢測條件有：

1. 超額擔保測試（Overcollateralization Tests）

目的在衡量債權群組之總面值是否大於批次證券之發行面值（超額擔保比率是否大於 100%），若債權群組之總面值大於某批次證券發行額，表示此批次證券能容忍債權群組中某些資產發生違約，而仍不致生損失。超額擔保比率定義如下：



$$O/C_{\text{優先證券}} = \frac{PV_{\text{資產群組}}}{PV_{\text{優先證券}}}$$

$$O/C_{\text{中順位證券}} = \frac{PV_{\text{資產群組}}}{PV_{\text{優先證券}} + PV_{\text{中順位證券}}}$$

$$O/C_{\text{次順位證券}} = \frac{PV_{\text{資產群組}}}{PV_{\text{優先證券}} + PV_{\text{中順位證券}} + PV_{\text{次順位證券}}}$$

其中 PV_i 為 i 之面額（Par Value）

若超額擔保測試不滿足最低之設定水準時，則需將債權資產中之部份出售以提前償還批次證券之本息，直到批次證券之最低超額擔保水準皆被滿足為止。

2. 利息涵蓋測試（Interest Coverage Tests）

利息涵蓋測試基本上在衡量由債權資產所產生之利息收入是否足以支應批次證券之利息，作為批次證券信用品質參考依據之一。利息涵蓋比率定義如下：

$$I/C_{\text{優先證券}} = \frac{PV_{\text{資產群組}} \times WAC \times 0.25 - FEES \times 0.25}{PV_{\text{優先證券}} \times C_{\text{優先證券}} \times 0.25}^4$$

$$I/C_{\text{中順位證券}} = \frac{PV_{\text{資產群組}} \times WAC \times 0.25 - FEES \times 0.25}{(PV_{\text{優先證券}} \times C_{\text{優先證券}} + PV_{\text{中順位證券}} \times C_{\text{中順位證券}}) \times 0.25}$$

$$I/C_{\text{次順位證券}} = \frac{PV_{\text{資產群組}} \times WAC \times 0.25 - FEES \times 0.25}{(PV_{\text{優先證券}} \times C_{\text{優先證券}} + PV_{\text{中順位證券}} \times C_{\text{中順位證券}} + PV_{\text{次順位證券}} \times C_{\text{次順位證券}}) \times 0.25}$$

其中 WAC: Weighted Average Coupon 為債權資產加權平均利率

C_i : 批次證券*i*之利率

其中 PV_i 為*i*之面額 (Par Value)

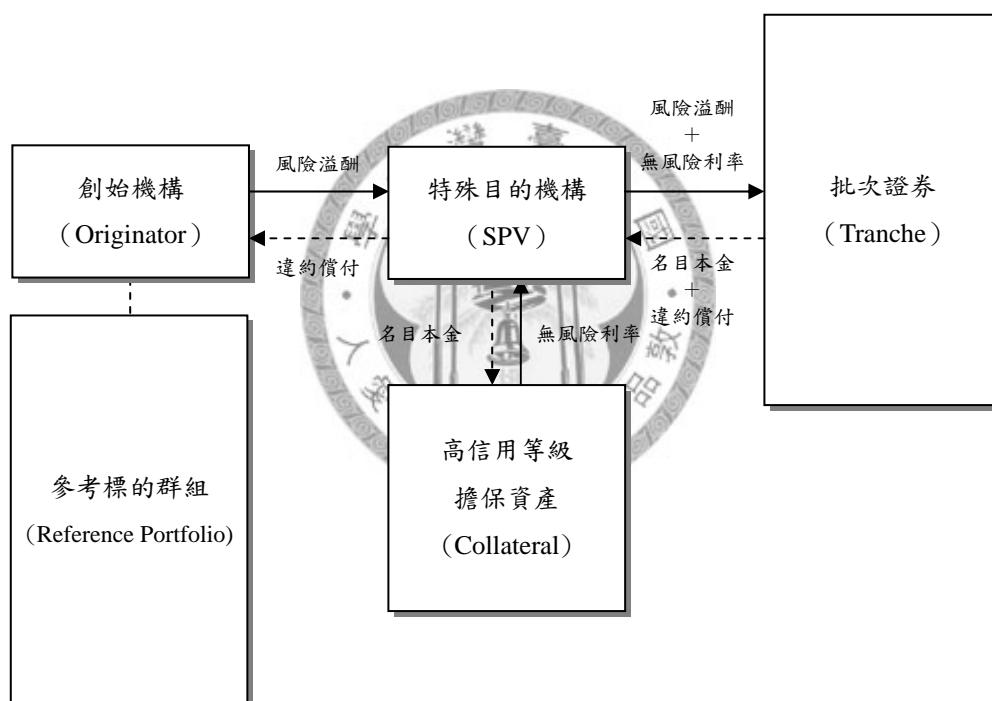
2.3 合成型擔保債權憑證 (Synthetic Collateralized Debt Obligation)

合成型擔保債權憑證為傳統擔保債權憑證之衍生，其契約架構和傳統型相似，唯一之差異在於創始機構並非將債權資產以真實出售之方式移轉給特殊目的機構 (SPV)，而是和特殊目的機構簽訂信用違約交換合約 (Credit Default Swap)，以創始機構之債權資產群組為參考標的 (Reference Entity)。特殊目的機構無須將投資人投資批次證券之資金交付給創始機構，而是將此金額投資於高信用評等 (例：無風險資產) 資產，並做為信用違約交換之抵押品 (Collateral)，來保障信用違約交換之保護買方，即創始機構。近年來擔保債權憑證快速成長，主要是因合成型 CDO 之發行量大增所致。相較於傳統型 CDO，合成型 CDO 提供發行者暨投資者以下幾項優點：

1. 合成型 CDO 基本上不牽涉實體債權資產之移轉，在契約訂定程序上較為方便快捷，成本也較低廉。

⁴CDO 通常為每季 (quarter) 付息一次，故將年化之收益率乘以 0.25，於每季測試利息涵蓋比率。若批次券付息頻率為半年，則將 0.25 更改成為 0.5。

2. 合成型 CDO 之債權資產群組為信用違約交換而非實體債權資產，可將信用違約交換之存續期間設定和批次證券相等，如此可消除現金流入和現金流出不配合之情形，也可省去當債權資產於批次證券之到期日前到期，所提前回收之本金需要再投資（Reinvestment）的情況。
3. 對於投資者而言，部份支持（Partial Funded）之投資合成型 CDO 之批次證券並不必然需支付全部面額，例如投資面額為 US\$1,000,000 之次順位證券，可能僅需交付 US\$200,000 做為擔保，因此投資者可享有槓桿效果來提高投資報酬率。



圖四、合成型債權擔保憑證（Synthetic CDO）之架構

2.4 信用違約交換指數（Credit Default Swap Index）

信用違約交換指數為一標準化契約，由市場上流動性最高之信用違約交換組成。信用違約交換市場之買賣雙方可以信用違約交換指數為參考標的，簽訂合成型擔保債權憑證合約，藉以滿足投資及規避信用風險之目的。近年來信用違約交換指數衍生性商品之發行，已成為投資銀行獲利的主要來源之一；另一方面，投

資信用違約交換指數之批次證券，亦成為避險基金提高基金報酬率之一項主要工具。接下來，本小節將介紹兩項目前最活絡的兩項信用違約交換指數：CDX 和 iTraxx。

1. CDX

CDX⁵指數為一信用指數家族之總稱，由最具流動性之信用違約交換所組成，涵蓋北美地區及新興市場許多不同產業。CDX 家族中最主要的信用指數為有下列幾種系列：CDX North American Investment Grade (125⁶)、CDX North American Investment Grade High Volatility (30 個在 CDX IG 指數中波動程度最大者)、CDX North American High Yield High Beta (30)、North American Emerging Markets (15)、North American Emerging Market Diversified (40)。

CDX 信用指數定期每半年更新一次，更新日期 (Roll Date) 分別在三月及九月，指數內個別信用違約交換之違約觸發條件設定為 ISDA 所定義之破產 (Bankruptcy) 和無法支付 (Failure to Pay)。接下來僅就目前交易量最大之 CDX.NA.IG 來做更詳細的說明，其指數規格如下表所示。

表格二、信用指數 CDX.NA.IG 規格

信用指數名稱	CDX.NA.IG
組成成份	125 家投資級等級公司之信用違約交換，以相同之權重（每個成份權重為 0.8%）所組成
產業別	民生消費 (Consumer) 工業 (Industrials) 金融 (Financials)

⁵ CDX 及 iTraxx 所有系列信用指數皆由 Markit Group 所編製並擁有。

⁶ 括弧中之數字為信用指數之成份個數。

	能源 (Energy) 電信 (TMT)
發行日暨更新日	每年 3/20 及 9/20 更新指數且以更新後之成份發行新指數系列
發行期間	3、5、7、10 年
標準批次證券	[0, 3%]、[3, 7%]、[7, 10%]、[10, 15%]、 [15, 30%]、[30, 100%]

此外 CDX.NA.IG 信用指數旗下仍有六個子指數 (Sector-index)，分別是五個產業別個別編製成一個指數，以及此 125 家信用違約交換之報價中取 30 家波動程度最大者，編製成為 CDX.NA.IG.HV。子指數仍為每年 3/20 及 9/20 更新指數且以更新後之成份發行新指數系列；但在到期日方面，子指數僅發行到期日為 5 年期及 10 年期兩種信用指數。本論文即以 CDX.NA.IG 為研究對象。

2. iTraxx

iTraxx 亦為一信用指數家族之總稱，由歐洲地區及亞洲地區最具流動性之信用違約交換所組成不同之信用指數，其主要信用指數有：Markit iTraxx Europe (125)、Markit iTraxx Europe HiVol (30 個在 iTraxx Europe 指數中波動程度最大者)、Markit iTraxx Europe Crossover (50)。

iTraxx 信用指數仍為每六個月更新 (Rolling) 一次，更新日期為每年 3/20 和 9/20，同時以更新之成份發行新的指數系列。接下來將簡單介紹目前 iTraxx 最為活躍的信用指數系列：Markit iTraxx Europe。

表格三、信用指數 iTraxx Europe 規格

信用指數名稱	Markit iTraxx Europe
組成成份	125 家投資級等級公司之信用違約交

	換，以相同之權重（每個成份權重為0.8%）所組成
產業別	汽車（Autos） 民生消費（Consumers） 金融（Financials） 工業（Industrials） 能源（Energy） 電信（TMT）
發行日暨更新日	每年 3/20 及 9/20 更新指數且以更新後之成份發行新指數系列
發行期間	3、5、7、10 年
標準批次證券	[0, 3%]、[3, 6%]、[6, 9%]、[9, 12%]、[12, 22%]、[22, 100%]

iTraxx Europe 信用指數旗下有三個子指數，分別是 iTraxx Europe Non-Financial（由 iTraxx Europe 指數中 100 家非金融業之信用違約交換組成）、iTraxx Europe Senior Financials 及 iTraxx Europe Sub Financials（分別由 25 家金融機構之信用違約交換所組成）。子指數仍為每年 3/20 及 9/20 更新指數且以更新後之成份發行新指數系列；但在到期日方面，子指數僅發行到期日為 5 年期及 10 年期兩種信用指數。

以 Markit 信用違約交換指數作為參考實體之批次證券所提供之優點有：

1. 具交易效率（Trading Efficiency）：參與者能夠快速進行大額交易且能透過交易系統確認交易。
2. 具流動性（Liquidity）：不論在任何市場情況下，皆擁有眾多 dealers 能帶來足夠流動性。
3. 市場接受度（Market Acceptance）高：Markit 之信用指數目前已成為市場上最

重要之信用風險參考指標 (Benchmark)。

4. 標準化 (Standardization)：信用指數規格高度標準化，亦為促進商品流動性之主因之一。
5. 透明度 (Transparency) 高：每系列信用指數之批次證券於每日均有報價。

CDX 和 iTraxx 信用指數之報價和各批次證券之報價方式如下：指數之信用價差為成份信用違約交換之簡單平均；權益證券 ([0, 3%]之批次證券)之報價為首次支付費用(Up-front Fee)，而每期之信用價差固定為500個基準點(Basis Point)；其餘批次證券之信用價差則以基準點報價。

表格四、2008/06/27 iTraxx Europe Serious 9 5 年期之報價

信用指數	iTraxx Europe 9 5Y
信用指數價差	105bp
[0, 3%]	33% 1/4 + 500bp
[3, 6%]	396.5bp
[6, 9%]	250bp
[9, 12%]	171bp
[12, 22%]	83.5bp

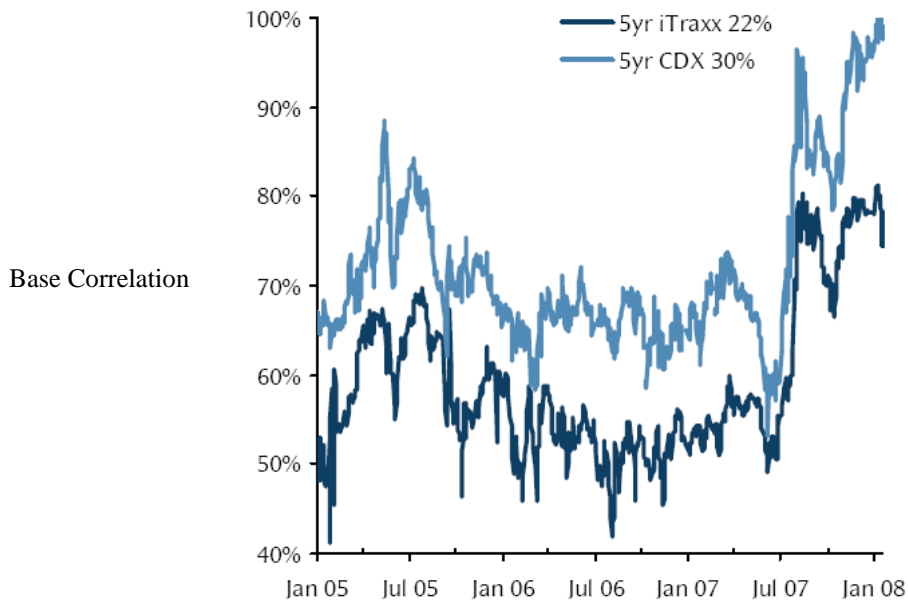
表格五、2008/06/27 CDX.NA.IG9 5 年期之報價

信用指數	CDX.NA.IG9 5Y
信用指數價差	148bp
[0, 3%]	58% 3/4 + 500bp
[3, 7%]	566bp
[7, 10%]	307.5bp
[10, 15%]	169bp
[15, 30%]	101bp

2.5 Base Correlation 架構之限制

自 2007 年起，信用指數商品 CDX 和 iTraxx 之 Super Senior Tranche 信用利差大幅攀升，這使得在 Base Correlation 架構下回推出來的 Base Correlation 幾乎達到理論之上界 100%，特別是 CDX.NA.IG 的優先批次證券[15, 30%]，若無法求取批次證券之 Base Correlation，則無法對客製化批次證券訂價，也無法計算避險參數以及淨損益，進而導致信用衍生性商品流動性降低。

圖五、CDX 和 iTraxx super senior 之 Base Correlation



資料來源：Barclays Capital

另外，使用標準市場模型（OFGC）亦產生另一項不合乎直覺之結果，那就是優先批次證券（iTraxx [12, 22%]和 CDX.NA.IG [15, 30%]之優先批次證券）之單一 CDS 避險比例（Single name delta）在某些信用利差水準下為負數（Negative delta），這表示一持有優先批次證券之投資人（protection seller）必須再賣出某單一資產之 CDS（sell protection）來達成避險目的。Negative delta 主要是由於 Base Correlation Skew⁷ 過高，特別在優先批次證券之 Base Correlation 高時，因此若要消除此不合理

⁷ Correlation Skew 定義為兩個 Base Tranche 之 Base Correlation 相減之差額，例如批次證券[15, 30%]之 Correlation 等於[0, 30%]和[0, 15%]兩 Base Tranche 之 Base Correlation 相減。

情況，就需依賴學者和業界持續改善信用衍生性商品評價模型，使修正後之模型所求算之 Base Correlation 下降並且同時使 Correlation Skew 降低。



第三章 文獻回顧

3.1 信用風險模型

信用風險模型發展至今，主要可區分成兩類：一、結構式模型（structured form model）；二、縮減式模型（reduced form model）。

結構式模型最早由 Merton (1974)所提出，其所隱含的基本概念，就是當一家公司的資產價值低於負債價值時，即表示違約事件發生，這種假設也是任何一種結構式模型的基礎。也因為違約與否和公司價值有關，結構式模型又被稱為公司價值模型（firm-value model）。結構式模型運用 Black and Scholes 選擇權評價的概念，將公司價值視為標的物價格，負債面值視為履約價格。假設在 t 時間點時公司總價值 $A(t)$ 包含股東權益價值和一到期日為 T 之零息債券，面值為 K ，則在到期日 T 時之公司價值為：


$$\text{Max}\{A(T) - K, 0\}$$

違約時點隨機變數 τ ：

$$\tau = \begin{cases} T, & \text{if } V(t) < K \\ \infty, & V(t) \geq K \end{cases}$$

Merton 並假設公司價值服從幾何布朗運動（Geometric Brownian Motion）

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = rdt + \sigma dW(t)$$

其中 μ 為公司資產之期望報酬率， σ 為公司價值之波動度， $W(t)$ 為風險中立下之標準布朗運動。

這種對公司資產變動過程的假設和 Black-Scholes 選擇權評價模式中對股價隨機過程相同，故可利用選擇權評價模式得出公司價值 $A(t)$ 在到期日時低於 K 的機率，

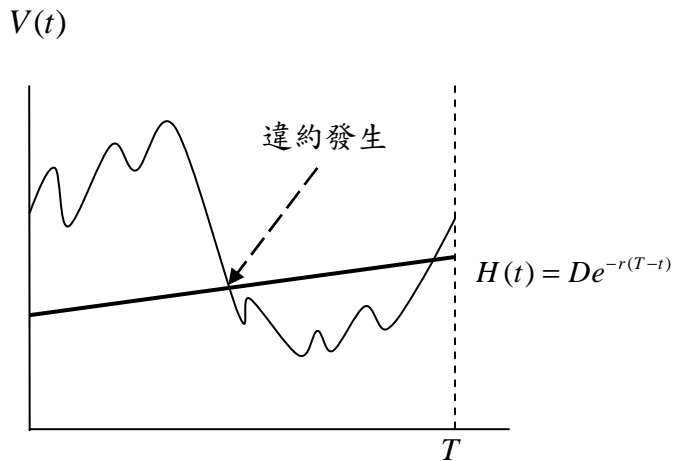
即風險中立下之違約機率 (risk neutral default probability)

$$\begin{aligned} P(V(t) < K) &= \Phi\left(\frac{\ln K - \ln A(t) - (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\ &= N(-d_2) \end{aligned}$$

其中 $d_2 = \frac{\ln A(t) - \ln K + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$, Φ 為標準常態累積分配。

Merton 模型的易於了解，但卻有以下幾項缺點：首先，Merton 模型受限於歐式選擇權概念，只能在到期日 T 時判斷公司是否違約。若是公司價值在到期日前低於債券價值，而在到期日時又回復到債券面額之上，則不被視為違約事件，因此在 Merton 模型下，違約機率有被低估的可能性；另外，將公司負債簡化成零息債券 (zero-coupon bond)，也與實際情況不相符。

Black and Cox (1976) 將 Merton 模型延伸，提出首次通過時間模型 (first passing time model) 來修正 Merton 歐式選擇權的限制，以向下出局之障礙選擇權 (down-and-out barrier option) 來描述公司價值，此時違約事件可發生於到期日前之任一時點，假設公司價值在到期日前觸及違約門檻 (default threshold) 則表示違約，如下圖六所示而違約門檻 $H(t) = De^{-r(T-t)}$ 會隨著時間經過而遞增。對於利率設定亦可套用各種隨機利率模型，放寬 Merton 對利率不變的假設。



圖六、首次通過時間模型

在首次通過時間模型下，違約時點 τ 設定如下：

$$\tau = \inf \{s \geq t \mid V(s) \leq K\}$$

利用反射原理 (reflection principle) 和布朗運動 (Brownian motion) 的性質，在到期日 T 前違約的機率為：

$$P(\tau \leq T \mid \tau > t) = \Phi(h_1) + \exp\left\{2\left(r - \frac{\sigma_V^2}{2}\right) \ln\left(\frac{K}{V(t)}\right) \frac{1}{\sigma_V^2}\right\} \Phi(h_2)$$

$$\text{其中 } h_1 = \frac{\ln\left(\frac{K}{e^{r(T-t)}V(t)}\right) + \frac{\sigma_V^2(T-t)}{2}}{\sigma_V\sqrt{T-t}}, \quad h_2 = h_1 - \sigma_V\sqrt{T-t}$$

Geske(1984)使用複合式選擇權 (compound option) 的概念來評價公司債及不同時點之公司違約機率，其主要假設為將違事件視為一連串的或有事件 (contingent events)，並且放寬 Merton 對公司債的假設，假設公司債為付息債券，並將付息之公司債視為一連串的零息債券。Longstaff and Schwartz (1995)結構式模型中加入隨機利率模型，將利率變動所產生的風險納入信用風險模型中。近期的結構式模型

開始納入跳躍過程 (jump process)，但缺乏解析式可追蹤性 (analytic tractability)。Zhou (2001)在 Longstaff and Schwartz (1995)模型中加入跳躍過程的設定，但模型需要密集計算 (computation intensive)。Huang and Huang (2002)年提出一套具有解析式可追蹤性而便於應用之跳躍模型，將違約事件可為一 surprise，因為跳躍過程不可被預期時，股價變動過程不再連續。

縮減式模型最早是由 Jarrow and Turnbull (1995)所提出，由於違約事件的發生符合稀少事件且具有離散可數的特性，滿足卜瓦松分配 (Poisson distribution) 的性質，因此縮減式模型主要理論建立於卜瓦松過程 (Poisson process)，並假設違約時間服從指數分配 (exponential distribution)。和結構式模型不同的是縮減式模型不將違約視為受資產價格決定之模型內生變數，而是假設違約為一外生變數，可利用違約交換信用利差 (CDS spread) 反求出違約強度 (default intensity) 和隱含違約機率，此種設定的好處在於簡化違約事件，只看違約事件發生與否，忽略造成違約事件的定義。Jarrow, Lando and Turnbull (1997)以時間同質 (time-homogeneous) 的馬可夫鏈 (Markov Chain) 建立信用評等移轉矩陣，來描述一公司之信用評等之轉移過程，進行求算不同信用評等所隱含之違約機率。Duffie and Singleton (1999)放寬 Jarrow and Turnbull (1995)對回收率 (recovery rate) 只發生於到期日之假設，評價時視風險中立之期望損失率為外生變數，也受到無風險利率的影響。Jarrow and Yu (2001) 則在是開始分析不同公司間信用風險相關性對違約造成的影響，在衡量個別公司的信用風險時，必須考量因為其他風險相關公司的違約而產生信用風險跳躍的狀況，以計算不同公司因為自身的信用風險以及與其他公司間之信用風險相關總和後，所構成該公司特定之信用風險。

3.2 擔保債權憑證 (CDO) 之評價

在評價擔保債權憑證 (Collateralized Debt Obligation) 時，最重要的就是合理描述債權資產間之違約相關係數。Li (2000)將違約相關係數定義為債權資產存活時間之相關係數，並且利用 Gaussian Copula 函數將個別公司債權資產之邊際違約機率

分配轉換成資產群組之聯合違約機率分配。Li 又以債權資產間報酬之相關係數來取代存活時間相關係數，來簡化分析並且提升Copula函數在信用風險模型之應用價值。

Vasicek (2002)以具有條件獨立 (conditional independence) 特性的One Factor Gaussian Copula Model來建立投資組合違約機率分配。在因子模型下，公司資產價值受到系統因子和個別因子影響，兩兩公司資產價值的相關性為固定值，債權群組之聯合機率分配之維度由影響資產價值之系統風險因子個數來決定，而非債權群組中之資產個數。另外，在給定系統風險因子時，個別公司之邊際違約機率分配是互相獨立的。

由條件獨立假設所發展出的評價模型，一般稱之為半解析式 (semi-analytic) 模型，其共同點為應用條件違約機率建構債權群組之條件損失分配 (conditional loss distribution)，再對系統因子積分來得到非條件損失分配 (unconditional loss distribution)，這類模型包括Laurent and Gregory (2003)、Andersen et al. (2003)和Hull and White (2004)。Laurent and Gregory (2003)運用了One Factor Approach，配合Gaussian和Clayton copula建立了聯合機率分配，和Vasicek模型做比較，此模型放寬了對於資產組合同質性的假設，並在無套利的假設下，用於評價一籃子違約交換 (Basket Default Swaps) 和擔保債權憑證 (CDO) 的公平溢酬 (fair spread)。

Hull and White (2004)在條件獨立的假設下，提出兩種近似債權群組損失分配函數 (loss distribution function) 的演算方法。第一種方法是利用遞迴法 (recursive method)，計算出各時點下每個標的資產的違約機率分配來建構損失分配，可用於評價 CDO 分券，但必須假設債權群組中每個資產擁有相同權重及回復率；第二種方法為機率倒桶法 (probability bucketing method)，允許各個債權資產擁有不同的權重和回復率，先建構條件預期損失之後，再將各條件預期損失對系統因子加以積分，則可求出非條件損失分配函數 (unconditional loss distribution)。

Gill et al. (2004)將結構式模型和蒙地卡羅法 (Monte Carlo Simulation) 結合來

模擬投資組合的信用違約機率分配，並利用債權群組公司之評等與 Fitch 所建立之 CDO 違約矩陣求算不同信用評等之違約門檻，此法受到信用評等機構 Fitch 所採用，又稱 VECTOR 模型。黃裕烈（2006）將 KMV 模型和 Copula 函數做連結，先以結構式模型法估出個別債權資產之違約機率，再利用 Copula 函數來描述 CDO 債權資產群組間的違約相關性，在風險中立的架構下，求算 CDO 批次證券的公平溢酬。

3.3 違約回復率（Recovery Rate）之設定

Andersen and Sidenius (2004)首次試圖在 copula model 架構下，將回復率（recovery rate）由固定水準，更改成會隨系統因子（common factor）改變而變動的隨機項。Andersen and Sidenius 將回復率設定成為系統因子和債權資產個別因子（idiosyncratic factor）的函式，數值介於 0 到 1 之間。此模型考慮了違約機率和回復率，透過系統因子聯結產生之相共相關性（codependence），並視此為導致極端損失情形的重要因子。然而，Andersen and Sidenius 的模型設定過於一般化且未明確探討回復率和系統因子的對應關係（mapping）。

Martin Krekel (2008)延伸 standard Gaussian copula model，設定回復率為外生給定（exogenously specified），不由系統因子水準來決定。Krekel 模型要求外生給定一回復率之分配，但必須滿足單一契約信用違約交換的評價條件，亦即對於任一給定之回復率分配，其期望值需等於 40%，舉例如下表所示。

表格 六、Krekel's model 回復率設定

	回復率	機率	回復率×機率
回復率分配	60%	40%	24%
	40%	30%	12%
	20%	20%	4%
	0%	10%	0%
		期望值	40%

Krekel 模型主要的缺點在於回復率可設定成任意型態，這將引入更多參數至

模型中，在校正參數上將更困難。

Amraoui and Hitier (2008)將回復率設定成系統因子確定函數 (deterministic function)，將個別債權資產之回復率範圍界定在 100%和設定之最小水準之間，並受系統因子及違約相關性所影響。和 Krekel model 相同，亦要求回復率之期望值需等於 40%，才能和傳統 Single Name CDS 評價一致。



第四章 模型介紹

在本章節，首先介紹 Factor Copula Model。Factor Copula Model 屬靜態模型 (static model) 之一種，假設單一債權資產的價值為一隨機變數，並同時由兩種因子所影響：系統因子 (common factor) 和債權資產個別因子 (idiosyncratic factor)，當資產價值低於違約門檻 (Default Threshold)，即表示違約事件發生，因此資產價值又稱之為違約 (代理) 變數 (Default Driver or Default Latent Variable)，一般式表示如下：

$$x_i = \sqrt{\rho}Z + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_i$$

其中 x_i 為債權資產 i 之違約變數，亦可解釋為資產價格

Z 代表系統因子， $Z \sim N(0,1)$

ε_i 表示債權資產個別因子， $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} N(0,1)$

Z 和 ε_i 是互相獨立的

ρ 表示兩兩債權資產間之相關係數，範圍在 $[-1, 1]$ 之間

對於一債權資產群組，其兩兩資產間之違約相關性則由個別資產價值和系統因子之相關性來連結，在給定系統因子水準時，債權資產間之違約事件視為獨立。對於違約變數、系統因子及個別因子分配假設的不同，則有不同 Factor Copula 之型態。目前較常用的 Factor Model 有以下幾種型式：

- Gaussian Copula model;
- Student-t copula;
- Random factor loading (RFL) model;
- Exponential model;
- Logistic model;

- Variance Gamma (VG) model;
- Inverse Gaussian (IG) model;
- Normal Inverse Gaussian model

目前仍以 Gaussian Copula model 最為業界常用，主要原因是 Gaussian distribution 下處理違約機率分配相當方便快捷，缺點為無法捕捉厚尾 (fat-tail) 的現象，導致模型本身可能低估極端事件發生的可能性。改善此現象最方便的方法改變對系統因分配的假設，如 Student-t、Gamma 或是 Normal Inverse Gaussian 等來取代 Gaussian 分配之假設，本研究即試圖運用 Gaussian Copula 及 Student-t Copula 來比較模型在評價上和校正係數上之異同。

4.1 One Factor Gaussian Copula Model (OFGC)

假設債權資產群組中有 N 個資產，每個債權資產的價值以 x_i 來表示，則債權資產的價值可以下列式子表示：

$$x_i = \sqrt{\rho}Z + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_i \quad i=1, \dots, N \quad (1)$$

One Factor Gaussian Copula Model 下兩債權資產間的相關係數推導如下：

$$\begin{aligned} Cov(x_i, x_j) &= Cov(\sqrt{\rho}Z + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_i, \sqrt{\rho}Z + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_j) \\ &= \rho Cov(Z, Z) \\ &= \rho \end{aligned} \quad (2)$$

由於系統因子 Z 和個別因子 ε_i 皆服從高斯 (常態) 分配，又系統因子 Z 為唯一影響債權資產價值之共同因子，故此模型被稱之為 One Factor Gaussian Copula (OFGC) Model。

OFGC Model 中，假設債權資產價值 x_i 小於違約門檻 C_i 時，代表違約事件發生。根據 Duffie and Singleton(1999)，應用縮減式模型對違約機率的定義，在某一時點 t

前，債權資產的風險中立違約機率（risk-neutral default probability）

$$P(\tau_i < T) = 1 - \exp\left(-\int_0^T \lambda_i(u) du\right) \quad (3)$$

$$\lambda_i = \frac{S_i}{1 - R_i} \quad (4)$$

其中 S_i 為信用違約交換（Credit Default Swap）之信用價差（credit spread）

R_i 為回復率（recovery rate）

λ_i 為資產 i 之違約強度（default intensity）

另外在此模型中，某債權資產發生違約的時點，和債權資產價值 x_i 低於違約門檻（threshold）之等價，意即某債權資產在某一特定時點前違約的機率，和此債權資產之價值低於違約門檻的機率，具有一對一關係（percentile to percentile）

$$P(\tau_i \leq T) = P(x_i \leq C_i) = \Phi(C_i) \quad (5)$$

$$\Rightarrow C_i = \Phi^{-1}(P(\tau_i \leq T))$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 為高斯分配之分配函數（CDF）

$\Phi^{-1}(\cdot)$ 為高斯分配之反函數

單一債權資產 i 的條件違約機率為：

$$P(\tau_i \leq T | Z) = P(x_i \leq C_i | Z)$$

$$= P(\sqrt{\rho}Z + \sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_i \leq C_i | Z)$$

$$= P(\varepsilon_i \leq \frac{C_i - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho^2}} | Z)$$

$$= \Phi\left(\frac{C_i - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \quad (6)$$

$$= \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(P(\tau_i \leq T)) - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

⁸ $P(\cdot)$ 為風險中立下之機率（risk-neutral probability）

上式即為在系統因子 Z 給定於某一水準時，單一債權資產的條件違約機率。由於因子 Z 和 ε_i 相互獨立，因此單一債權資產的條件違約機率亦互相獨立。在此獨立的假設之下，債權群組的聯合條件違約機率為個別資產條件違約機率之乘積，表示如下：

$$P(\varepsilon < T | Z) = \prod_{i=1}^N P_i(\varepsilon_i < T | Z) \quad (7)$$

最後再對系統因子積分，則可得各時間點下債權群組的聯合違約機率分配：

$$P(\varepsilon < T) = \int_Z P(\varepsilon < T | Z) = \int_Z \prod_{i=1}^N P_i(\varepsilon_i < T | Z) f(Z) dZ \quad (8)$$

其中 $f(Z)$ 為系統因子 Z 之 pdf (probability density function)

4.2 One Factor Student-t Copula Model⁹

One Factor T copula Model 為 One Factor Gaussian Copula 的一種延伸，仍假設影響債權資產價值之系統因子 Z 和個別因子 ε_i 皆服從標準常態分配，並互相獨立，但資產價值服從 Student-t 分配，則債權群組內單一資產價值可表示為：

$$x_i = \sqrt{v/\chi_v} (\sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_i) \quad i=1, \dots, N \quad (9)$$

$$Z = \frac{Y}{\sqrt{\frac{\chi_v}{v}}}$$

其中 v 為 Student-t 分配之自由度 (degree of freedom)

χ_v 為自由度為 v 之卡方分配 (χ^2 distribution) 隨機變數

Y 和 ε_i 為相互獨立之標準常態分配

Z 為系統因子，服從自由度為 v 之 Student t 分配。

⁹ 參見 The Definitive Guide to CDOs – Market, application, valuation and hedging 書中第 268 至 270 頁 Student-t copula 之內容。編者為 Gunter Meissner。

和 Hull and White (2004) 不同的，是此模型不將系統因子和個別因子分別視為獨立 Student t 分配，而是將整個違約變數視為單變量之 t 分配，自由度為 ν 。

單一債權資產之違約機率為：

$$\begin{aligned} P(\tau_i \leq T) &= Q(x_i \leq C_i) = t_\nu(C_i) \\ &\Rightarrow C_i = t_\nu^{-1}(P(\tau_i < T)) \end{aligned} \quad (10)$$

$t_\nu^{-1}(\cdot)$ 為 Student-t 分配函數之反函數

單一債權資產 i 之條件違約機率為：

$$\begin{aligned} P(\tau_i \leq T | Y, \chi_\nu) &= Q(x_i \leq C_i | Y, \chi_\nu) \\ &= P(\sqrt{\nu/\chi_\nu}(\sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_i) \leq C_i | Y, \chi_\nu) \\ &= P(\varepsilon_i \leq \frac{\sqrt{\chi_\nu/\nu}C_i - \sqrt{\rho}Y}{\sqrt{1-\rho}} | Y, \chi_\nu) \\ &= \Phi\left(\frac{\sqrt{\chi_\nu/\nu}C_i - \sqrt{\rho}Y}{\sqrt{1-\rho}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{(\sqrt{\chi_\nu/\nu})C_i - \sqrt{\rho}Y}{\sqrt{1-\rho}}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

值得注意的是，此時條件違約機率決定於常態隨機變數 Y 和卡方變數 χ_ν 兩個維度 (two dimensions)，在 Student-t copula model 下，在求算債權群組聯合違約機率時，必須對卡方隨機變數 χ_ν 和標準常態分配 Y 執行雙重積分，故在運用上不如 Gaussian Copula 來的方便快速。Student-t model 之債權群組聯合違約機率如下：

$$P(\varepsilon < T) = \iint_{\chi_\nu, Y} P(\varepsilon < T | \chi_\nu, Y) = \iint_{\chi_\nu, Y} \prod_{i=1}^N P_i(\varepsilon_i < T | \chi_\nu, Y) f_\nu(\chi) f(Y) d\chi, dy$$

其中 $f_\nu(\chi)$ 為自由度為 ν 的卡方分配 pdf

$f(Y)$ 為標準常態分配 pdf

4.3 擔保債權憑證 (Collateralized Debt Obligation) 之評價

所謂評價擔保債權憑證，即是求算在風險中立條件下，擔保債權憑證各批次證券 (tranche) 的公平信用利差 (fair spread)，這必須先求出各批次證券信用利差收入現值 (premium leg) 和違約支出現值 (default leg)，最後再求算一個合理的信用價差，使得此時信用利差收入之現值和違約支出之現值完全相等，亦即淨現值為零。

為求出各批次證券之公平信用利差，首先我們必須先求得債權群組之損失分配。為了與稍後章節在分析方法上之一致性，本章節以 Vasicek (1987) 所提出之 Homogeneous Large Portfolio 的概念來求取債權組損失分配之漸近分配。假設系統因子服從常態分配 (Gaussian Distribution)，給定在某系統因子水準 Z 下，債權資產群組累積至 t 時點時發生違約佔總債權資產名目本金之百分比為：

$$P(t, z) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(C(t)) - \sqrt{\rho}z}{\sqrt{1-\rho}}\right) \quad (12)$$

違約損失之百分比為：

$$L(t, z) = P(t, z) \cdot (1 - \bar{R}) \quad (13)$$

其中 \bar{R} 為回復率

而損失賠付起始點為 K_1 ，賠付終止點為 K_2 之批次證券 (記為 $[K_1, K_2\%]$) 在 t_n 時點下之條件期望損失為：

$$L_{K_1, K_2}(t, z) = \min[\max[L(t, z), 0], K_2 - K_1] \quad (14)$$

其中 K_1 為批次證券 j 之違約損失賠付起始點 (attachment pont)

K_2 為批次證券 j 之違約損失賠付終止點 (detachment pont)

$K_2 - K_1$ 即為批次證券 j 的厚度 (thickness)

接下來求取批次證券 $[K_1, K_2\%]$ 在 t_i 時點下之期望損失比率

$$EL_{K_1, K_2}(t_i) = \sum_{z \in Z} w(z) \cdot L_{K_1, K_2}(t_i, z) \quad (15)$$

$$EL_{K_1, K_2}(t_i) = \begin{cases} 1 & EL(t_i) \geq K_2 > K_1 \\ \frac{EL(t_i) - K_1}{K_2 - K_1} & K_2 > EL(t_i) > K_1 \\ 0 & K_2 > K_1 > EL(t_i) \end{cases} \quad (16)$$

其中 $z \in Z = \{-5, -4.9, -4.8, \dots, 4.8, 4.9, 5\}$

$$w(z) = 0.1 \cdot \frac{d\Phi(z)}{dz}$$

擔保債權憑證 (CDO) 之保護買方 (protection buyer) 會在每個付息日 t_i 支付信用利差 (credit spread) 給保護賣方 (protection seller)。此信用利差為批次證券本金之百分比，而批次證券本金將會在承受損失後而減少，其期望本金可能狀況如下：

$$Q_{K_1, K_2}(t_i) = \begin{cases} 1 & EL(t_i) \leq K_1 \\ \frac{K_2 - K_1 - EL_{K_1, K_2}(t_i)}{K_2 - K_1} & K_1 < EL(t_i) \leq K_2 \\ 0 & K_2 < EL(t_i) \end{cases} \quad (17)$$

$Q_{K_1, K_2}(t_i)$ 又被稱之為批次證券在到期日為 t_i 之存活比率或存活機率 (survival probability)。批次證券期望收益現值 (premium leg)：

$$S_{K_1, K_2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) B(t_i) Q_{K_1, K_2}(t_i) \quad (18)$$

其中 S_{K_1, K_2} 為批次證券之信用利差

$t_i - t_{i-1}$ 為兩付息日之應計期間，以年 (360 天) 為單位

另一方面，我們必須求出批次證券在每個付息時間點 t 之邊際違約損失和之折現值，

其定義為兩付息日之存活比率之差，稱為 default leg。

$$\sum_{i=1}^n B(t_i)[Q_{K_1, K_2}(t_{i-1}) - Q_{K_1, K_2}(t_i)] \quad (19)$$

其中 $B(t_i)$ 為到期時間點為 t_i 之無風險折現因子

每個 CDO 批次證券的公平信用利差 S_j ，必須使期望收益現值（premium leg）

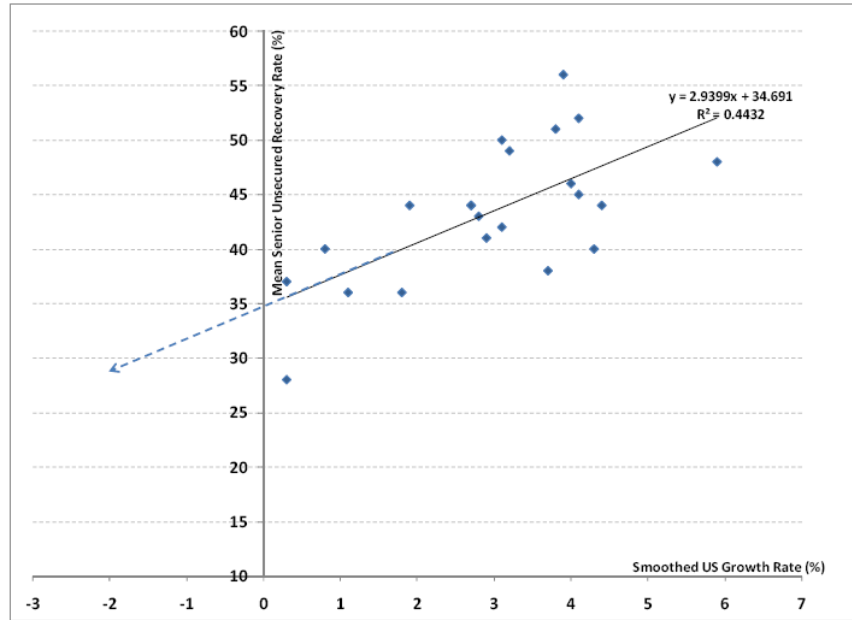
等於期望損失現值（default leg）：

$$\begin{aligned} S_{K_1, K_2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) B(t_i) Q_{K_1, K_2}(t_i) &= \sum_{i=1}^n B(t_i)[Q_{K_1, K_2}(t_{i-1}) - Q_{K_1, K_2}(t_i)] \\ \Rightarrow S_{K_1, K_2} &= \frac{\sum_{i=1}^n B(t_i)[Q_{K_1, K_2}(t_{i-1}) - Q_{K_1, K_2}(t_i)]}{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) B(t_i) Q_{K_1, K_2}(t_i)} \end{aligned} \quad (20)$$

4.4 隨機回復率（Stochastic Recovery Rate）

在 One factor Gaussian Copula 的架構下，Amraoui and Hitier (2008) 將違約回復率由傳統固定常數的假設，改變成為一系統因子的函數。此回復率設定的基礎在於當景氣情況好時，個別公司發生違約時，其可回收之金額較高；而當景氣情況較差時，個別公司若因違約而倒閉，因為資產清算價格較低，故違約回復率較低。Amraoui and Hitier (2008) 將違約回復率設定為一個隨系統因子不同而改變之變動值，將更符合實際情況，例如 2008 年 Lehman Brothers 破產倒閉時，Lehman Brothers 所發行之債券回復率則由原先 40% 降至 30%，再降至最後的 8.625%。此外，根據 Credit Derivative Research LLC，經驗法則顯示當美國 GDP 成長率衰退 1%，平均回復率將下降 3%，證實回復率的確會受到景氣狀況所影響，故在評價信用衍生性商品時，應將此情況考慮在評價模型中。

圖七、違約率和平滑 GDP 成長率之關係



資料來源：Credit Derivatives Research LLC.

Amaroui and Hitier (2008)將違約回復率設定如下：

$$(1 - R_i(z)) = (1 - R_i^{\min}) \frac{\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i^{\min}) - \sqrt{\rho_i} Z}{\sqrt{1 - \rho_i}}\right)}{\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{\rho_i} Z}{\sqrt{1 - \rho_i}}\right)} \quad (21)$$

或

$$R_i(z) = 1 - (1 - R_i^{\min}) \frac{\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i^{\min}) - \sqrt{\rho} z}{\sqrt{1 - \rho}}\right)}{\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{\rho} z}{\sqrt{1 - \rho}}\right)} \quad (22)$$

其中 R_{\min} 為個別資產 i 違約回復率之下界，為模型之參數

$R_i(z)$ 為個別資產 i 之違約回復率，為系統因子 Z 之函數

為使新違約回復率模型和傳統單一資產信用違約交換 (Single Name CDS) 或

信用指數 (CDX) 評價一致，則需經過適當校正，使新模型設定下之期望損失和傳統 One Factor Gaussian Copula Model 相同。新模型設定之期望違約損失下：

$$\begin{aligned}
 E^Q[(1-R_i(z))1_{\tau_i < T}] &= E^Q[(1-R_i^{\min}) \frac{\Phi(\frac{\Phi^{-1}(p_i^{\min})-\sqrt{\rho}z}{\sqrt{1-\rho}})}{\Phi(\frac{\Phi^{-1}(p_i)-\sqrt{\rho}z}{\sqrt{1-\rho}})} \Phi(\frac{\Phi^{-1}(p_i)-\sqrt{\rho}z}{\sqrt{1-\rho}})] \\
 &= E^Q[(1-R_i^{\min}) \Phi(\frac{\Phi^{-1}(p_i^{\min})-\sqrt{\rho}z}{\sqrt{1-\rho}})] \\
 &= (1-R_i^{\min}) p_i^{\min} \tag{23}
 \end{aligned}$$

原 One Factor Gaussian Copula 模型下之期望違約損失為：

$$\begin{aligned}
 E^Q[(1-R_i)1_{\tau_i < T}] &= E^Q[(1-\bar{R}) \Phi(\frac{\Phi^{-1}(p_i)-\sqrt{\rho}z}{\sqrt{1-\rho}})] \\
 &= (1-\bar{R}) p_i \tag{24}
 \end{aligned}$$

令(3)式和(4)式相等，即使 Amaraoui and Hitier (2008)模型之期望違約損失相等於傳統 One Factor Gaussian Copula 下之期望違約損失，因此可得新模型之校正式：

$$p_i^{\min} = \frac{(1-\bar{R})}{(1-R_i^{\min})} p_i \tag{25}$$

另外，Amaraoui-Hitier (2008)模型中，條件違約機率和傳統 One Factor Gaussian Copula 之設定相同並未改變，即：

$$E^Q[1_{\tau_i < t} | Z = z] = N(\frac{\Phi^{-1}(p_i)-\sqrt{\rho}z}{\sqrt{1-\rho}}) \tag{26}$$

而條件期望損失則為：

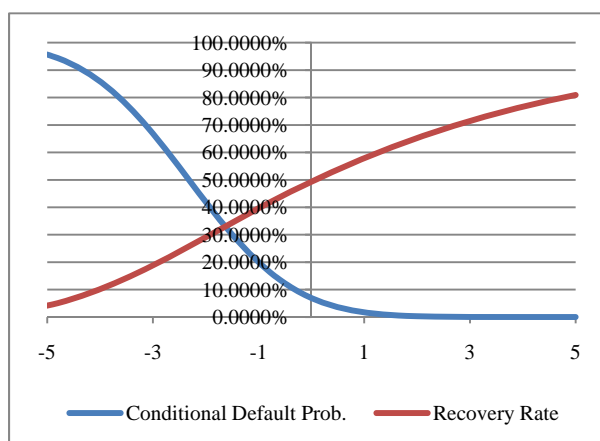
$$\begin{aligned}
E^Q[(1-R_i(z))1_{t_i < t} | Z = z] &= (1-R_i^{\min}) \frac{\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i^{\min}) - \sqrt{\rho}z}{\sqrt{1-\rho}}\right)}{\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{\rho}z}{\sqrt{1-\rho}}\right)} \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{\rho}z}{\sqrt{1-\rho}}\right) \\
&= (1-R_i^{\min}) \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i^{\min}) - \sqrt{\rho}z}{\sqrt{1-\rho}}\right) \tag{27}
\end{aligned}$$

由(21)或(22)式可知，違約回復率受到系統因子 z 、相關係數 ρ 以及回復率下界 R_i^{\min} 之影響。下面四張圖形(圖一至圖四)分別表示在不同相關係數 ρ 和回復率下界 R_i^{\min} 設定下，條件違約機率(Conditional Default Probability) (式 26) 和違約回復率(Recovery Rate) (式 21) 在不同系統因子 z 下之水準。

表格七、不同圖形違約相關性 ρ 及違約回復率下界之設定

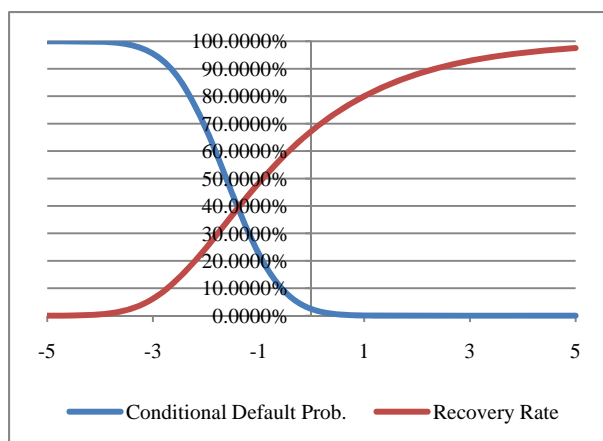
圖形	八	九	十	十一
ρ	30%	60%	60%	60%
R_i^{\min}	0%	0%	10%	40%

圖八、 $\rho = 30\%$, $R_i^{\min} = 0\%$ 條件違約機率和違約回復率之水準



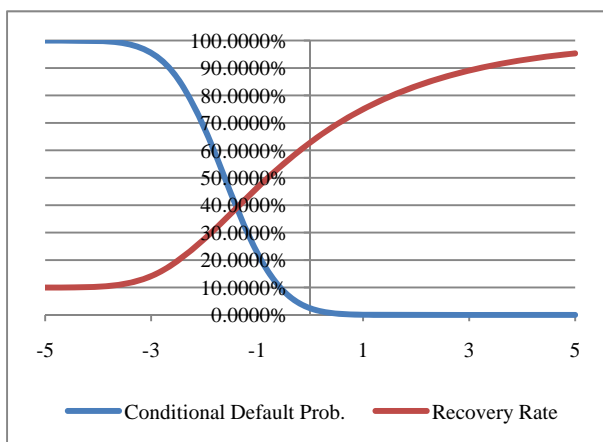
由圖八可看出，違約回復率和景氣情況具有正向關係，當景氣極端低迷時(系統因子 $z = -5$)，違約回復率水準相對較低；反之，當景氣極好時，違約回復率趨較高。

圖九、 $\rho = 60\%$, $R_i^{\min} = 0\%$ 條件違約機率和違約回復率之水準



在圖九中，違約回復率形態並未改變，但和圖一(違約相關性 $\rho = 30\%$)比較，我們發現，當違約相關性增加，違約回復率在景氣情況變化時的變動幅度較大，即違約回復率斜率較陡；另外，條件違約率在違約相關性較高時，變動幅度亦較大。

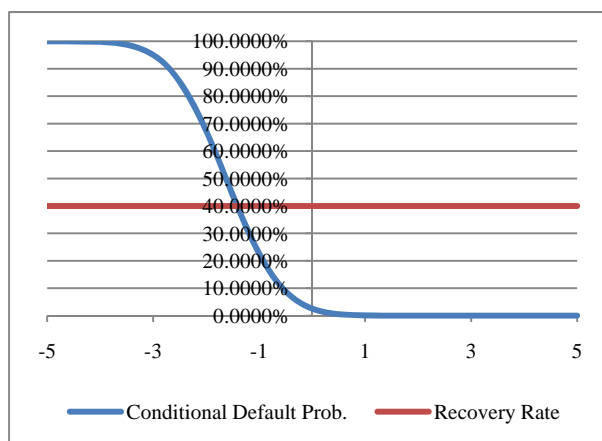
圖十、 $\rho = 60\%$, $R_i^{\min} = 10\%$ 條件違約機率和違約回復率之水準



在圖十中，當違約回復率下界設定為 10%時，即使在景氣情況最差的狀態下，

違約回復率仍有 10% 的水準。在此設定下，違約回復率之數值介於 [10%, 100%] 之間。

圖十一、 $\rho = 60\%$, $R_i^{\min} = 40\%$ 條件違約機率和違約回復率之水準



最後討論當違約回復率下界為 40% 的情況。當 $R_i^{\min} = 40\%$ ，我們發現違約回復率將保持固定，不受系統因子影響而改變，如同傳統評價模型將違約回復率假設成固定(例如 40%)。換言之，當 $R_i^{\min} = 40\%$ 時，Amarouï and Hitier (2008) 隨機回復率模型將退化成傳統 One Factor Gaussian Copula Model。

而在 Student t 分配下，其模型架構亦相同。由 (25) 校正式來得到一新違約機率 p_i^{\min} ，條件違約機率和回復率設定為固定常數下之 Student t Copula 模型相同，如下列 (28) 式

$$\mathbf{E}^Q[1_{\tau_i < t} | Y = y, \mathcal{X}_v = x_v] = \Phi\left(\frac{\sqrt{x_v/v} t_v^{-1}(p_i) - \sqrt{\rho} y}{\sqrt{1-\rho}}\right) \quad (28)$$

回復率為

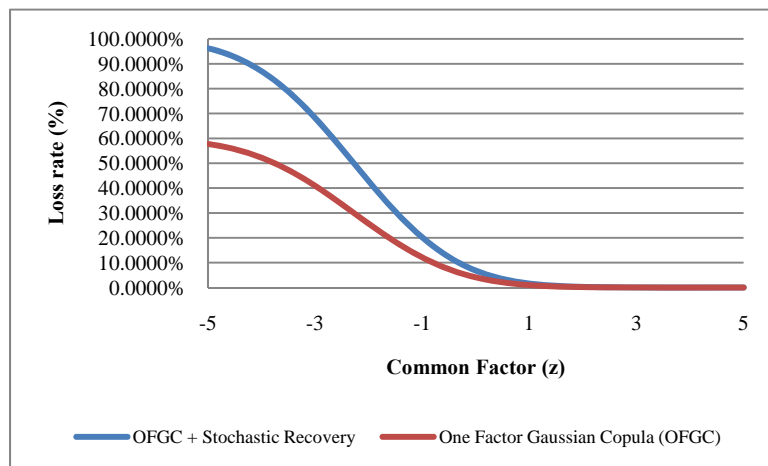
$$1 - R(y, \chi_v) = (1 - R_i^{\min}) \frac{\Phi\left(\frac{\sqrt{x_v/vt_v^{-1}}(p_i^{\min}) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right)}{\Phi\left(\frac{\sqrt{x_v/vt_v^{-1}}(p_i) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right)} \quad (29)$$

條件期望損失為

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}^Q[(1 - R_i(y, x_v))1_{\tau_i < t} | Y = y, \chi_v = x_v] \\ &= (1 - R_i^{\min}) \frac{\Phi\left(\frac{\sqrt{x_v/vt_v^{-1}}(p_i^{\min}) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right)}{\Phi\left(\frac{\sqrt{x_v/vt_v^{-1}}(p_i) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right)} \Phi\left(\frac{\sqrt{x_v/vt_v^{-1}}(p_i) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right) \quad (30) \\ &= (1 - R_i^{\min}) \Phi\left(\frac{\sqrt{x_v/vt_v^{-1}}(p_i^{\min}) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right) \end{aligned}$$

本章節接下來將探討考慮隨機違約回復率後，依照 One Factor Gaussian Copula 模型所計算出的違約損失分配，並和傳統 One Factor Gaussian Copula 模型所做比較。圖十二分別表示在不同景氣狀況下，加入隨機回復率之新模型和傳統模型條件損失水準(兩模型中違約回復率皆設為 $\rho = 30\%$ ，隨機回復率之下界 $R_i^{\min} = 0\%$)

圖十二、OFGC 及 Amaraoui-Hitier 下條件損失分配

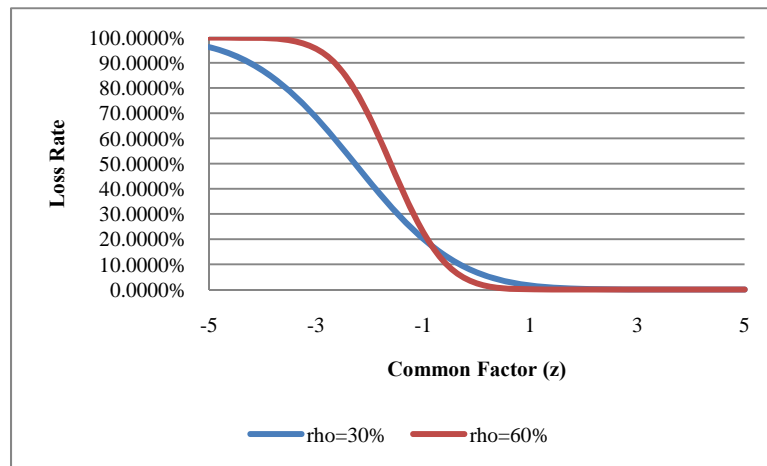


(One Factor Gaussain Copula 之參數 $\rho=30\%$; 違約回復率下界 $R_i^{\min} = 0\%$)

在圖十二，可發現新模型中資產群組中違約損失較傳統模型下高出許多，特別是在景氣狀況差時(系統因子較低)。這是由於新模型下，違約回復率會隨景氣情狀而改變，當景氣較差時，違約回復率低，故違約損失較高；而在傳統模型下，不論景氣好壞，違約回復率皆固定於 40%，故在景氣最差的狀況下，違約損失比率至多也只趨近於資產總額之 60%。

另外比較新模型在不同違約相關性 ρ 水準下的條件損失分配，為求分析一致性，我們將以圖八($\rho=30\%$, $R_i^{\min} = 0\%$)和圖九($\rho=60\%$, $R_i^{\min} = 0\%$)來做比較。在下圖十三，可看出當資產群組之違約相關係數較低時，在經濟環境差時的違約損失較低；而經濟環境好轉時，違約損失卻較違約相關係數較高之設定下高，此現象是透過違約回復率的水準不同來反映。如圖八，違約相關係數為 30%，在系統因子為 1 時，個別資產違約回復率約為 58.46%；而違約相關係數為 60% 時，相同系統因子下之違約回復率則為 80%，如圖九所示。此違約回復率之差異將可解釋為何在景氣情況較好時，違約相關性較高，違約損失則較低。反之，在景氣狀況較差時(如 $z=-3$)，違約相關性較高($\rho=60\%$)所獲得之回復率較低，約為 6.16%(見圖二)；而違約相關係數 $\rho=30\%$ ，違約回復率為 18.42%。這顯示違約相關性較高，資產群組違約損失則較高。

圖十三、Amaraoui-Hitier Model 不同違約相關係數下之條件損失分配



4.5 Base Correlation: JPMorgan Method

Base Correlation 可用於評價 Bespoke Tranche。Base correlation 的計算有兩種方式，分別為 Lehman Brother's Compound Correlation 和 JPMorgan Base Correlation，其中 JPMorgan Base Correlation 為目前業界最常使用的方法。本章節將介紹 JPMorgan Base Correlation。

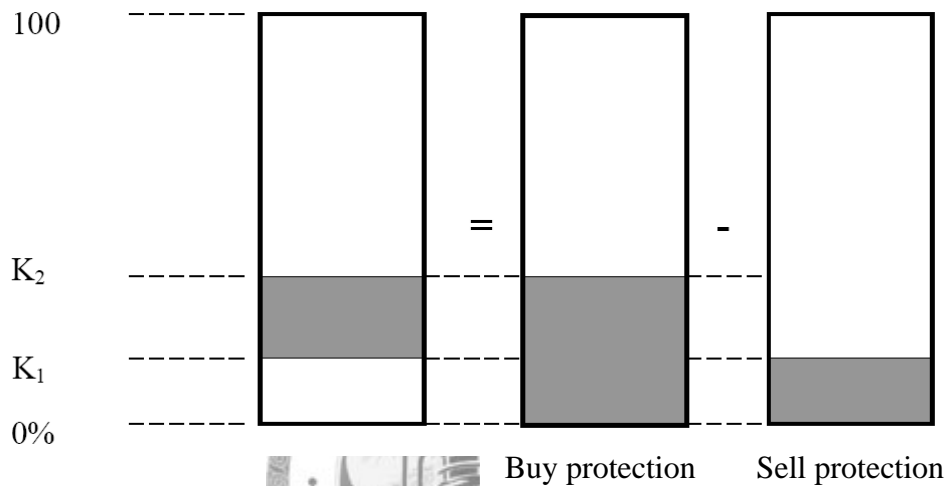
JPMorgan Base Correlation 是運用 Homogeneous Large Pool Gaussian Copula Model 的概念，其假設如下：

1. 債權資產群組中每個資產具有同質性 (homogeneity)，兩兩資產間具有相同的違約相關係數、違約機率和回復率。
2. 債權資產群組的個數足夠大。
3. 違約機率分配建構於 Gaussian Copula Model。
4. 每一個批次證券皆可求出一個具代表性的 Base Correlation。

上述的假設的優點為：(1) 我們不須債權群組中每個標的物的信用違約交換利差 (CDS spread) 和個別回復率；(2) 資產群組個數足夠大的假設將使個別風險可被分散掉，並且能快速求得各分券隱含相關係數；(3) 在 Factor Model 下，資產間相關性由單一因子來解釋，使我們可應用市場價格資訊回推各分券隱含相關係數。

Base Correlation 架構背後所隱含的概念是每個批次證券視為兩個部位相反的 base

tranche 所組成，首先定義 base tranche 為一個損失賠付起始點（attachment）為 0，損失賠付終止點為 K 的權益證券。假設一批次證券的損失賠付起始點和終止點分別為 K_1 和 K_2 （記為 $[K_1, K_2\%]$ ），則此批次證券可被視為由一個買進（buy protection） $[0, K_2\%]$ 的 base tranche，並且賣出（sell protection）一個 $[0, K_1\%]$ 的 base tranche 所組成，如下圖所表示：



圖十四、Base Tranche 示意圖

Base correlation 的求算必須使用拔靴法（bootstrapping），在計算步驟上需先利用市場上的報價資訊，求出第一個 base tranche 的 base correlation，即 equity tranche 的隱含相關係數，再依序求算出第二個及以後 base tranches 之隱含相關係數。Base Correlation 計算步驟如下：

1. 求算權益證券（equity tranche）的 base correlation ρ_{K_1} ，即找出一相關係數水準，使權益證券之現值為零。

$$PV_{tranche}(0, K_1, S_{0, K_1}, \rho_{K_1}) = 0$$

$$\begin{aligned}
& PV_{tranche}(0, K_1, U_{0, K_1}, S_{0, K_1}, \rho_{K_1}) \\
&= U_{0, K_1} + S_{0, K_1} PV_{premium}(0, K_1, \rho_{K_1}) - S_{0, K_1} PV_{protection}(0, K_1, \rho_{K_1}) \quad (28) \\
&= U_{0, K_1} + S_{0, K_1} \sum_{i=1}^N Q_{0, K_1}(t_i)(t_i - t_{i-1})B(t_i) - \sum_{i=1}^M [Q_{0, K_1}(t_{i-1}) - Q_{0, K_1}(t_i)]B(t_i)
\end{aligned}$$

其中 U_{0, K_1} 為權益證券之首次支付費用 (upfront fee)

JPMorgan 求取每個 base tranche 存活機率 $Q_{0, K_1}(t_i)$ 之方法如下。首先，先計算出各 base tranche 在到期日 T 時之 survival rate：

$$\begin{aligned}
Q_{0, K_1}(T) &= \left(1 + \frac{\text{survival rate}}{4}\right)^{-4T} \\
\Rightarrow \text{survival rate} &= \left[\left(\frac{1}{Q_{0, K_1}(T)}\right)^{\frac{1}{4T}} - 1\right] \times 4
\end{aligned}$$

其中 $Q_{0, K_1}(t) = 1 - \frac{E_{\rho_{K_1}}[\min[\max(L(t), 0), K_1]]}{K_1}$

得到 survival rate 後，即可求出此 base tranche 在各時點 t_i 之存活機率：

$$Q_{0, K_1}(t_i) = \left(1 + \frac{\text{survival rate}}{4}\right)^{-4t_i}$$

在(28)式中，由於 K_1 、 U_{0, K_1} 及 S_{0, K_1} 可由市場上獲得，在符合無套利假設和風險

中立機率測度下，可反推出權益證券之 base correlation ρ_{0, K_1} 。

2. 令下一個批次證券為兩個 base tranches 之組合：

$$\begin{aligned}
& PV_{tranche}(K_1, K_2, S_{K_1, K_2}, \rho_{K_1}, \rho_{K_2}) \\
&= PV_{tranche}(0, K_2, S_{K_1, K_2}, \rho_{K_2}) - PV_{tranche}(0, K_1, S_{K_1, K_2}, \rho_{K_1}) \quad (29) \\
&= S_{K_1, K_2} [PV_{premium}(0, K_2, \rho_{K_2}) - PV_{protection}(0, K_2, \rho_{K_2})] \\
&\quad - S_{K_1, K_2} [PV_{premium}(0, K_1, \rho_{K_1}) - PV_{protection}(0, K_1, \rho_{K_1})]
\end{aligned}$$

(29)式可改寫成

$$S_{K_1, K_2} \sum_{i=1}^n Q_{K_1, K_2}(t_i) B(t_i) - \sum_{i=1}^n [Q_{K_1, K_2}(t_{i-1}) - Q_{K_1, K_2}(t_i)] B(t_i) \quad (30)$$

其中

$$Q_{K_1, K_2}(t) = 1 - \frac{E_{\rho_{K_2}}[\min[\max(L(t), 0), K_2]] - E_{\rho_{K_1}}[\min[\max(L(t), 0), K_1]]}{K_2 - K_1} \quad (31)$$

同理，另式(30)為零，由市場上所獲得的 S_{K_1, K_2} 和步驟一所求出之 ρ_{0, K_1} ，可推出

第二個 base tranche 之 base correlation ρ_{0, K_2} 。

3. 同樣運用重覆步驟 2 的方法，便可求出每個批次證券之 base correlation。



第五章 實證分析

本章節一開始將利用 Copula Model，配合 Gaussian 及 Student-t distribution 假設下，來評價合成型擔保債權憑證，並比較兩種分配下結果之不同，另外也將調整 Student-t 分配之自由度和 A-H model 之回復率下界來分析結果之差異。

接下來，將利用市場上標準信用指數各批次證券之報價資訊來回推 Base correlation，探討在不同 factor model 下 Base correlation 的差異，是否能改善 correlation skew 的情況，亦或能有效降低各批次證券 base correlation 之水準，以減少無法評價客製化批次證券 (bespoke tranche) 之情況發生。

5.1 模型評價比較

首先比較在不同違約相關係數設定下，不同 Copula 模型之評價結果，以探討模型之特性。本研究選用以下三種 Copula 模型來做比較：

1. One Factor Gaussian Copula (OFGC)
2. Amaraoui-Hitier Model (A-H)
3. Amaraoui-Hitier Model + Student-t Copula¹⁰ (A-H+T)

表格八、評價資料

商品名稱	CDX NA IG9 5 years
評價日	2008/6/27
到期日	2012/12/20
指數信用利差(Spread)	148bp ¹¹
傳統模型違約回復率(\bar{R})	40%
A-H Model 違約回復率下界(R_{\min})	0%
每年付息次數	4
無風險利率	1.5%

¹⁰ 方法 3 建立於 Amaraoui and Hitier (2008)之模型架構下，唯將 Gaussian 分配之假設以 Student-t 假設來取代，簡記為 A-H+T。

¹¹ bp 為 basis point 之縮寫，代表 0.01%。

表格九、不同 Factor Copula 模型評價結果 ($\rho = 30\%$, $R_{\min} = 0\%$)

模型 \ 批次證券	[0, 3%]	[3, 7%]	[7, 10%]	[10, 15%]	[15, 30%]	[30, 100%]
OFGC	64.38% ¹²	1304.59	682.08	364.88	98.71	1.86
A-H	58.27%	1141.66	630.91	372.89	129.61	6.84
A-H+T(3)	33.18%	808.12	553.75	398.56	207.82	26.30
A-H+T(6)	44.17%	940.19	590.45	393.63	177.42	16.56
A-H+T(10)	49.42%	1010.78	606.82	388.13	161.22	12.59
A-H+T(30)	55.18%	1097.09	624.08	379.01	141.59	8.69

表格十、不同 Factor Copula 模型評價結果 ($\rho = 60\%$, $R_{\min} = 0\%$)

模型 \ 批次證券	[0, 3%]	[3, 7%]	[7, 10%]	[10, 15%]	[15, 30%]	[30, 100%]
OFGC	35.72%	854.51	586.91	418.55	213.16	17.98
A-H	27.61%	696.50	492.19	365.95	209.78	38.25
A-H+T(3)	15.34%	555.43	424.75	339.97	223.50	57.59
A-H+T(6)	20.93%	618.60	455.26	352.83	218.51	48.56
A-H+T(10)	23.51%	649.16	469.64	358.66	215.94	44.61
A-H+T(30)	26.25%	683.00	485.26	364.73	212.82	40.46

由表格九及十可以發現，A-H Model 將回復率改變成為和受系統因子影響之隨機項，使[10, 15%]、[15, 30%]及[30, 100%]之公平溢酬大於傳統 One Factor Gaussian Copula (OFGC) 所評價出來之結果，無論在高及低相關係數之設定下，這表示 A-H Model 能夠改善 Gaussian Copula 無法描述極端損失之情形；在 A-H Model 下加入 Student-t 分配，更加重對極端損失之衡量。另外，Student-t 之自由度越大，評價結果則越來越靠近 Gaussian 分配下之 A-H Model，符合統計上 Student-t 分配在自由度越來大時，其分配將越來越近似常態 (Gaussian) 之結論。

接下來，我們將比較在不同回復率下界 R_{\min} 之設定下，各種模型之評價結果。

¹² [0, 3%]權益證券為公平溢酬為首次支付費用 (Up-front Fee)

表格十一、不同 Copula 模型評價結果 ($\rho = 30\%$, $R_{\min} = 10\%$)

模型 \ 批次證券	[0, 3%]	[3, 7%]	[7, 10%]	[10, 15%]	[15, 30%]	[30, 100%]
OFGC	60.07%	1201.53	657.48	382.04	129.10	5.86
A-H	59.48%	1173.31	640.05	372.41	124.40	5.61
A-H+T(3)	36.67%	840.94	565.57	398.77	197.10	20.30
A-H+T(6)	46.45%	976.93	604.69	396.35	170.85	13.50
A-H+T(10)	51.36%	1043.97	618.45	389.16	154.64	10.20
A-H+T(30)	56.67%	1125.15	632.90	378.64	135.53	7.10

表格十二、不同 Copula 模型評價結果 ($\rho = 30\%$, $R_{\min} = 20\%$)

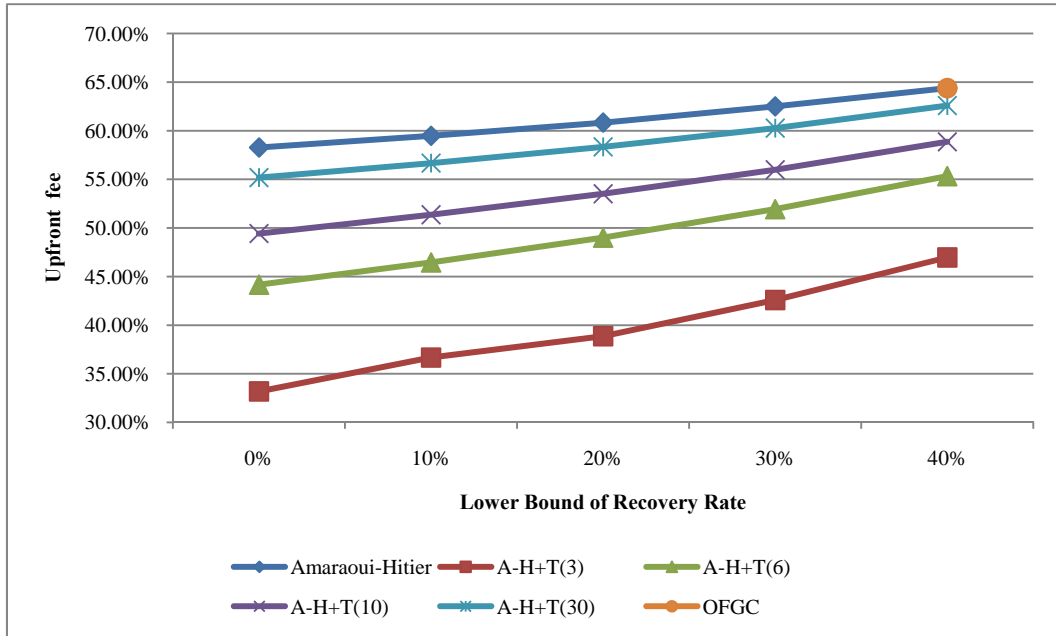
模型 \ 批次證券	[0, 3%]	[3, 7%]	[7, 10%]	[10, 15%]	[15, 30%]	[30, 100%]
OFGC	61.31%	1230.14	666.59	379.54	120.99	4.51
A-H	60.84%	1211.48	650.07	371.18	117.97	4.33
A-H+T(3)	38.87%	895.05	590.65	407.58	190.54	15.80
A-H+T(6)	49.00%	1025.43	623.50	400.08	162.88	10.40
A-H+T(10)	53.52%	1088.67	634.33	391.02	146.77	7.90
A-H+T(30)	58.34%	1164.43	645.63	378.89	128.31	5.50

綜觀表格九、十一及十二，可得改變回復率下界（相關係數固定為 30%）之各批次證券評價結果如下：

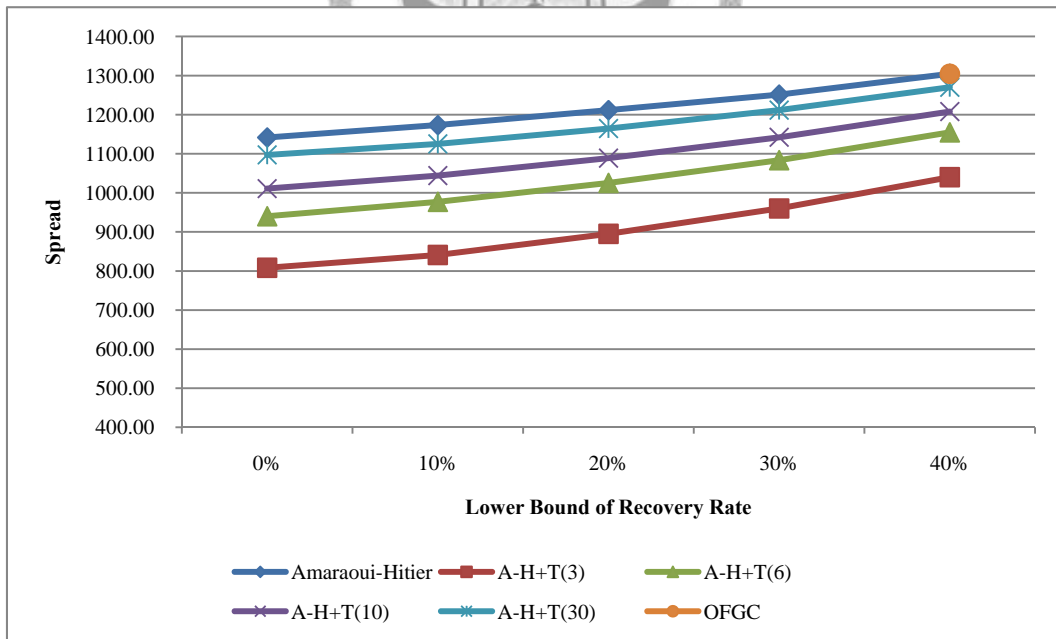
1. 在任何 A-H 架構下之評價模型，[0, 3%]、[3, 7%]、[7, 10%] 批次證券之公平溢酬皆和回復率下界成正向關係，當回復率下界上升，公平溢酬上升（見圖 15、16、17）；而 [15, 30%] 及以上之優先批次證券之公平溢酬則和回復率下界成反向關係，當回復率下界上升，公平溢酬則下降。（見圖 19、20）。
2. [10, 15%] 批次證券對於回復率下界之改變不敏感，而 T 分配當自由度大於 3 時，此順位批次證券之公平溢酬有時隨回復率下界上升而增加，有時下降。（圖 18）
3. 當 A-H Model 之回復率下界設定為 40% 時，各批次證券評價結果和 One Factor Gaussian Copula 相同，表示 A-H Model 可收斂至 OFGC，當回復率下界設為 40

時。

圖十五、[0, 3%]在不同回復率設定下各模型評價結果($\rho = 30\%$)¹³

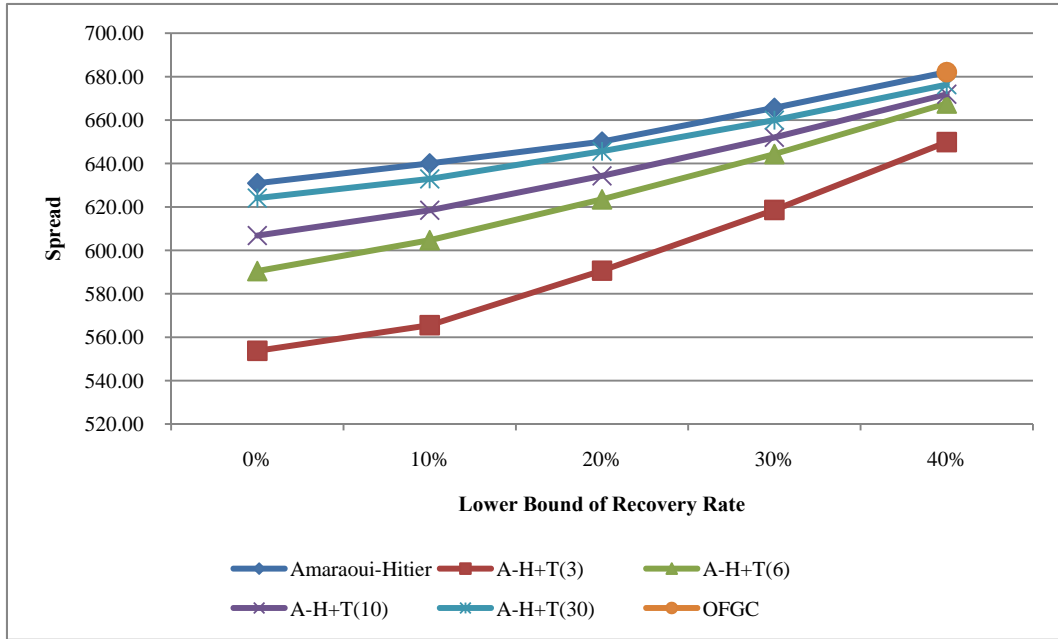


圖十六、[3, 7%]在不同回復率設定下各模型評價結果($\rho = 30\%$)

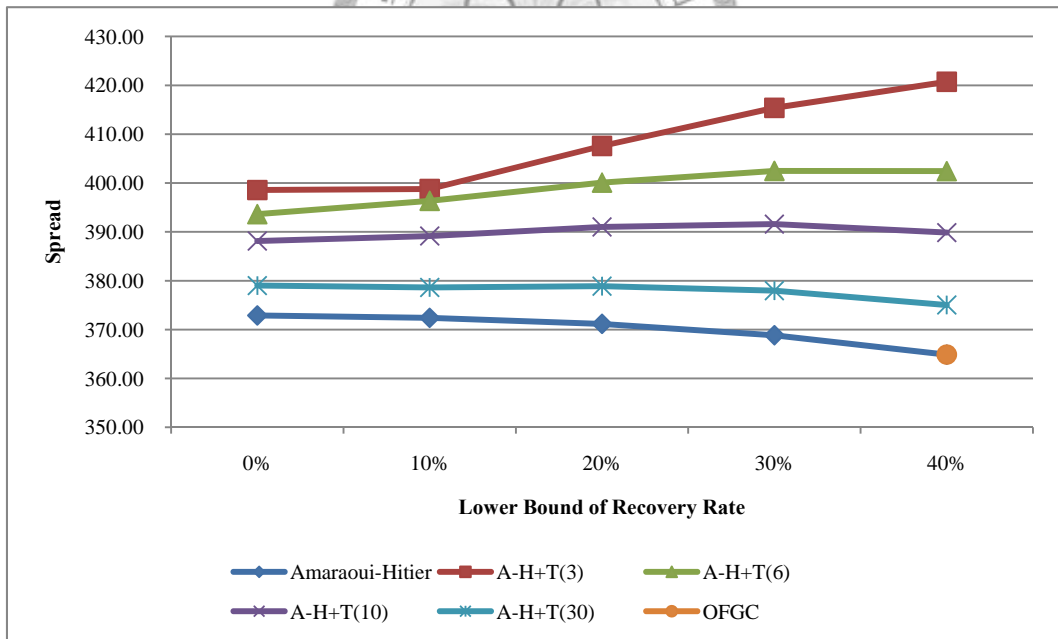


¹³ 對於傳統 One Factor Gaussian Copula (OFGC)，僅列出當回復率固定為 40% 的情況來做比較。

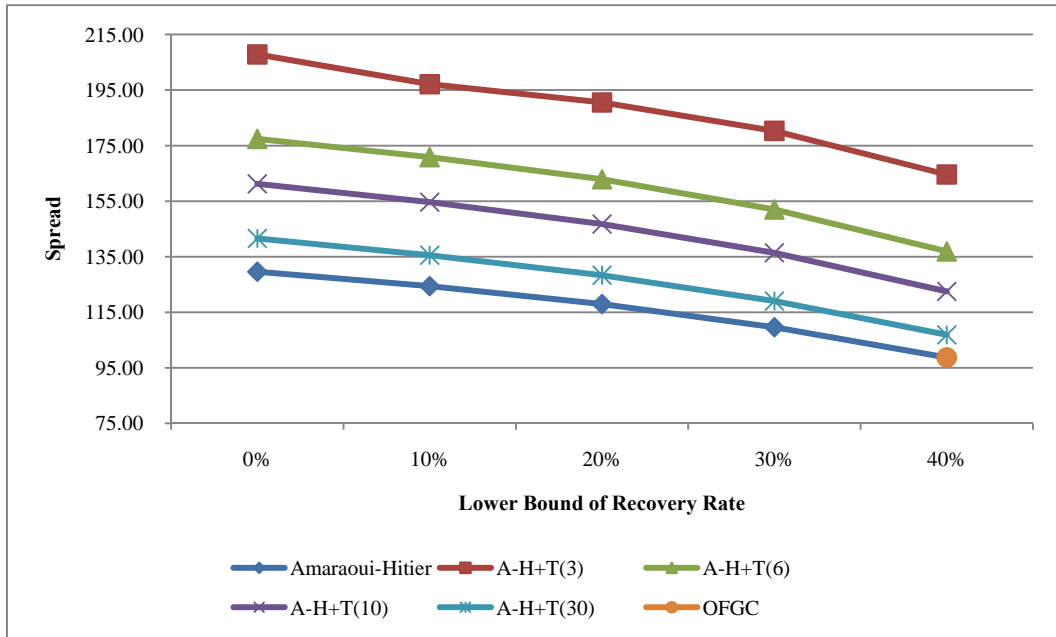
圖十七、[7, 10%]在不同回復率設定下各模型評價結果($\rho = 30\%$)



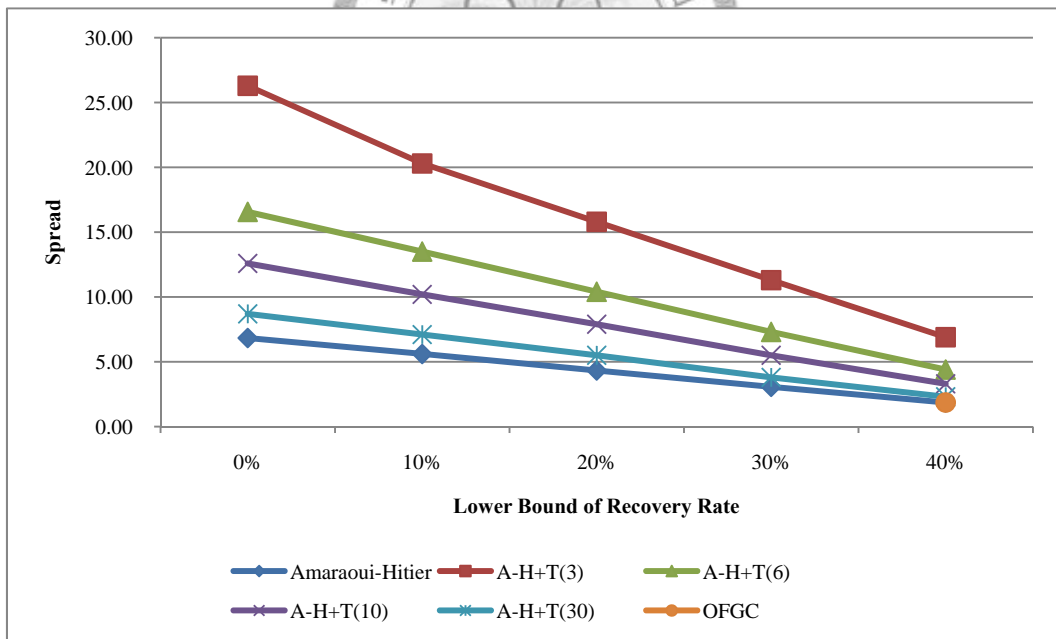
圖十八、[10, 15%]在不同回復率設定下各模型評價結果($\rho = 30\%$)



圖十九、[15, 30%]在不同回復率設定下各模型評價結果($\rho = 30\%$)



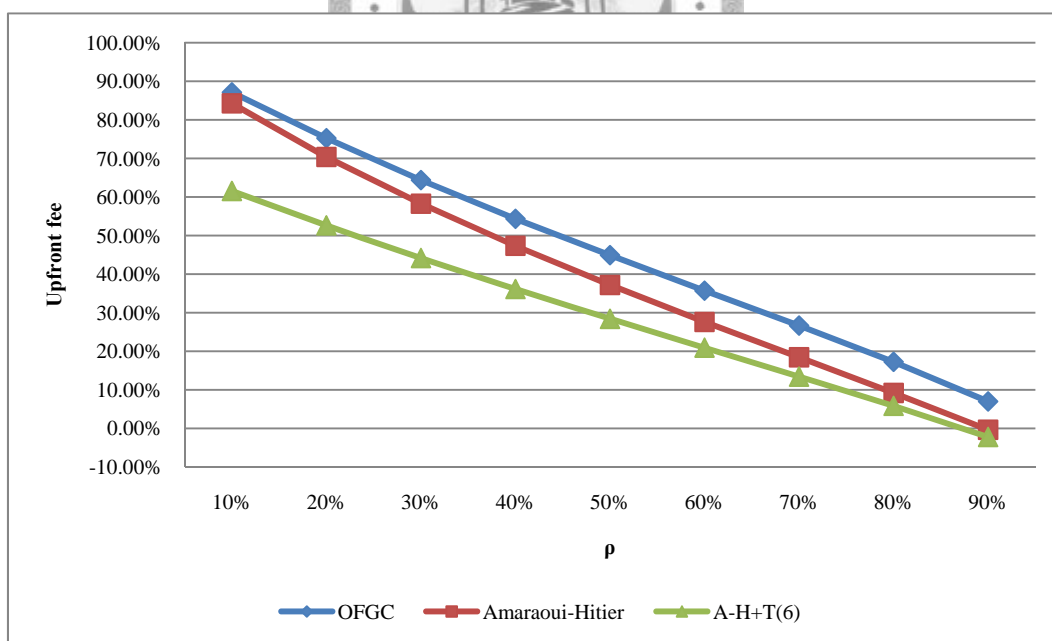
圖二十、[30, 100%]在不同回復率設定下各模型評價結果($\rho = 30\%$)



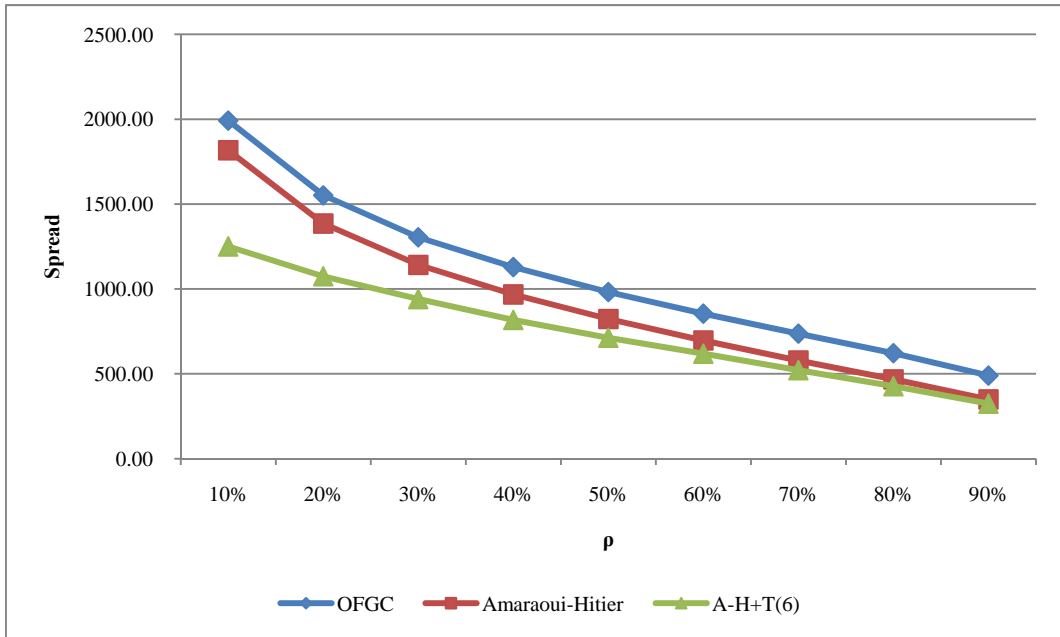
接下來比較在不同相關係數下，各種模型之評價結果。結果發現當相關係數提高時，[0, 3%]及[3, 7%]批次證券不論在何種模型下，公平信用利差皆為遞減，這是因為提高相關係數，債權資產同時違約及不違約的機率增加，使原風險較高

之權益證券及次順位證券違約損失期望值降低，優先受償證券損失期望值增加；而[30, 100%]之公平價差則因相關係數增加，使極端損失情況增加，故公平信用利差上升；[7, 10%]批次證券在 A-H 加入 T 分配下，公平信用利差隨相關係數上升而下降，而 OFGC 和 A-H 模型下則先升後降；[10, 15%]、[15, 30%]兩批次證券公平溢酬亦先升後降，不同處為 A-H+T 模型之評價結果相對較穩定，且公平信用利差最高時所對應的相關係數，隨模型可描述極端損失之程度增加而下降。這是因為若模型分配本身無法捕捉極端損失，則僅能透過提高相關係數來描述厚尾情況。[10, 15%]及[15, 30%]兩批次證券在中相關係數水準時風險最大，相關係數過高（極端損失增加），風險移至優先證券；相關係數過低，風險轉至權益證券及次順位批次證券承受。A-H+T 模型本身最能捕捉極端損失，故相關係數水準最低；反之，OFGC 最無法捕捉極端損失，故相關係數最高。

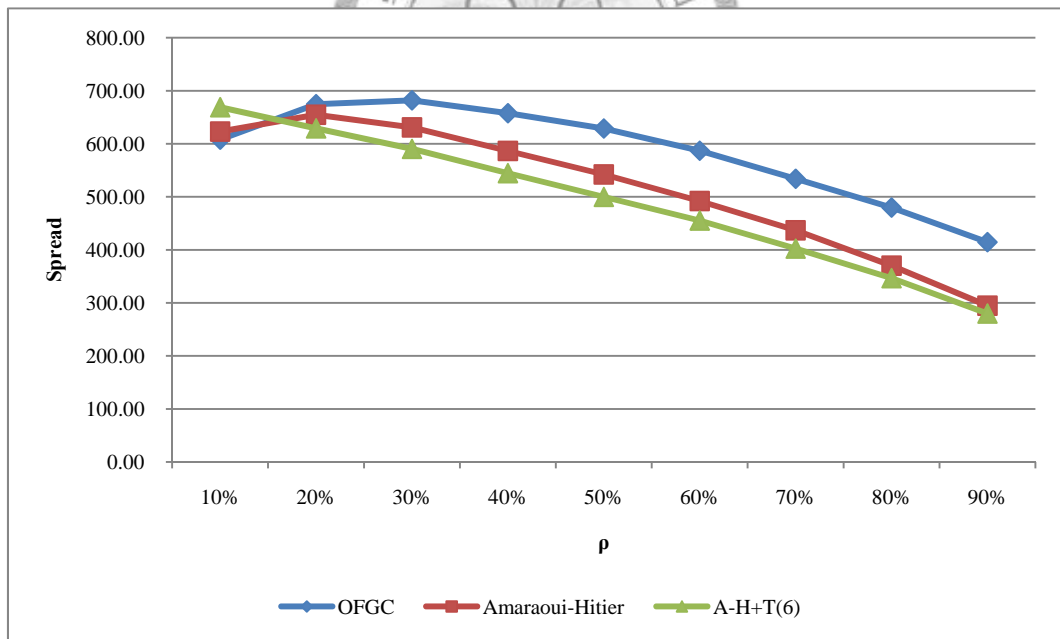
圖二十一、[0, 3%]不同相關係數下各模型評價結果



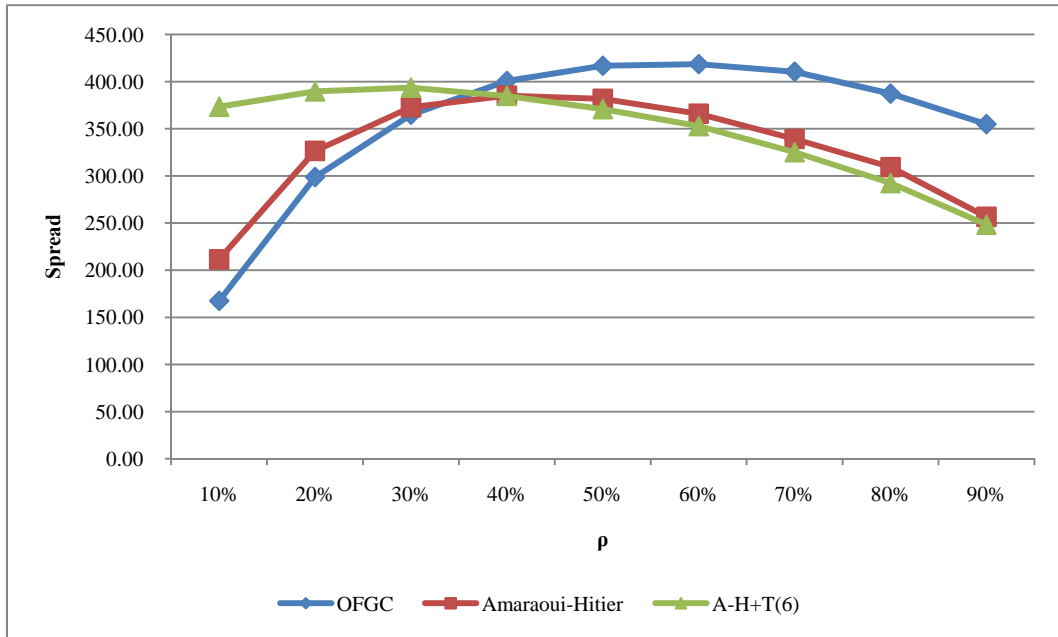
圖二十二、[3, 7%] 不同相關係數下各模型評價結果



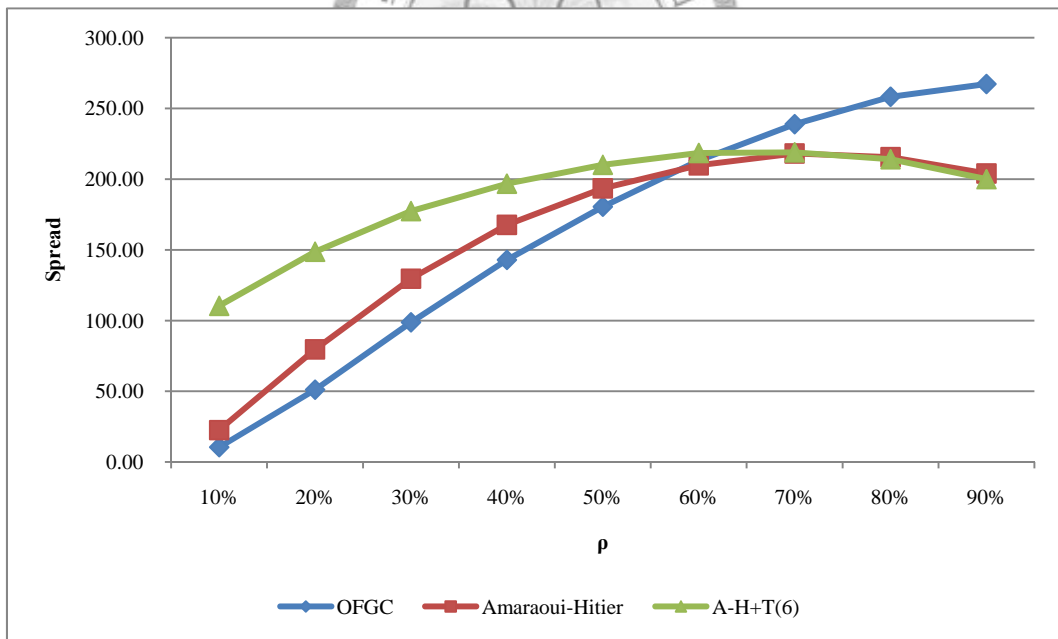
圖二十三、[7, 10%] 不同相關係數下各模型評價結果



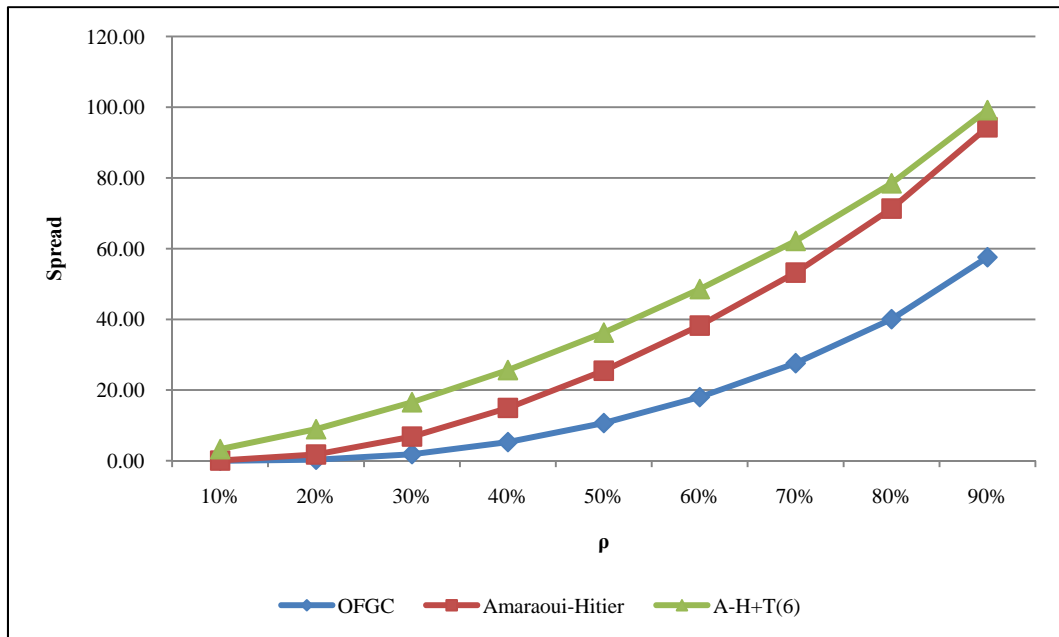
圖二十四、[10, 15%] 不同相關係數下各模型評價結果



圖二十五、[15, 30%] 不同相關係數下各模型評價結果



圖二十六、[30, 100%]不同相關係數下各模型評價結果



5.2 Base Correlation 比較

本小節利用 A-H Model 對回復率的設定，並比較在 Gaussian 及不同自由度下之 Student-t 分配，各批次證券之 Base Correlation 計算結果。在資料選取上，以 2008/06/27 5 年 CDX.NA.IG9 之市場報價為研究目標，當日資料如下：

表格十三、2008/06/27 5 年 CDX.NA.IG9 之市場報價

批次證券	市場報價
[3, 7%]	58% 3/4 + 500bp
[7, 10%]	566bp
[10, 15%]	307.5bp
[15, 30%]	169bp
[30, 100%]	101bp

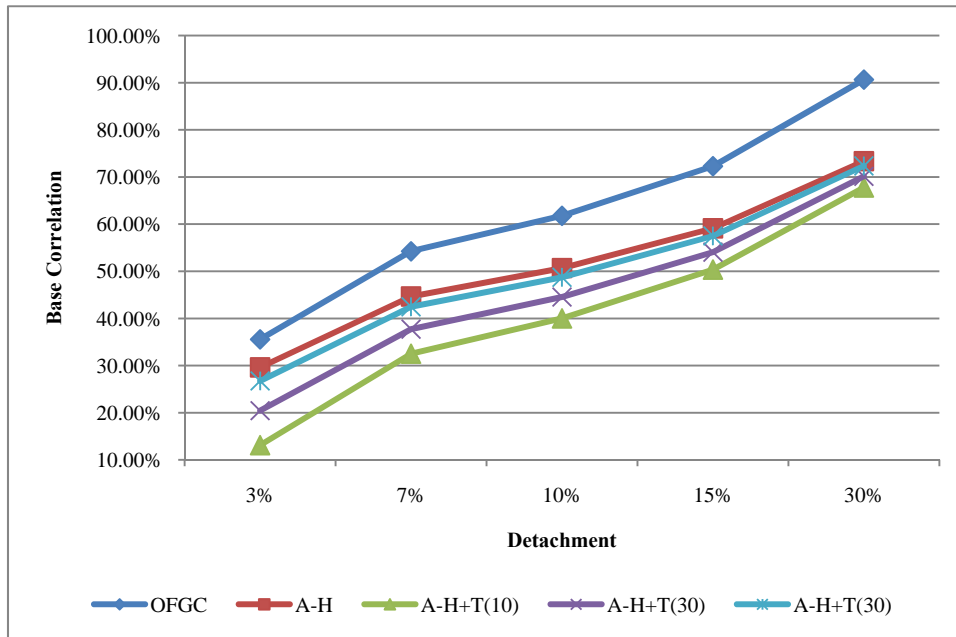
Base Correlation 計算結果如下表：

表格十四、不同模型下各批次證券之 Base Correlation

	3%	7%	10%	15%	30%
OFGC	35.56%	54.25%	61.76%	72.29%	90.66%

A-H	29.61%	44.65%	50.68%	59.12%	73.36%
A-H+T(3)	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
A-H+T(6)	13.10%	32.51%	40.00%	50.37%	67.79%
A-H+T(10)	20.43%	37.73%	44.54%	54.06%	70.14%
A-H+T(30)	26.74%	42.48%	48.73%	57.50%	72.36%

圖二十七、不同模型下各批次證券之 Base Correlation



觀察 Base Correlation 之結果，可發現改用 Student t 分配時，除自由為 3 時無法求算 Base Correlation 之外，其他自由度下皆可明顯降低各批次證券之 Base Correlation，尤其當自由度較小時，且更重要的是 Student t 分配並不改變原先 Base Correlation 之結構，代表 Student t 分配所計算之 Base Correlation 能保有原來 Gaussian 之特性，並大幅改善 Base Correlation 易逼近甚至時常超過 100% 之缺點。

第六章 結論

本篇論文主要是採用 Amraoui and Hitier (2008)對回復率之設定，並套用不同自由度之 Student t 分配來比較和原模型 (Gaussian Distribution) 之異同。本研究發現當回復率下界提高時，A-H model 在 Gaussian 分配下和 Student t 分配下之評價結果有所差異。當 Student t 分配自由度較小時，厚尾情況較嚴重，也表示極端損失之期望值增加，使優先順位證券之公平溢酬上升，而權益證券及其他次順位證券公平溢酬降低。另外，當回復率下界上升時，[0, 3%]、[3, 7%]、[7, 10%] 批次證券之公平溢酬上升，然而 [10, 15%] 及 [30, 100%] 之公平溢酬則下降，這是因為提高模型中之回復率下界時，極端損失期望值降低，使優先順位之批次證券公平溢酬降低；但在債權資產總期望損失不變之下，權益證券及次順位批次證券之期望損失必將提高，導致公平溢酬上升。相關係數敏感度比較上，套用 Student t 分配之 A-H 模型評價結果對於相關係數之敏感度最低，這是因為 T 分配本身較能夠描述極端損失情形，而相關係數之改變對批次證券期望損失影響較小。

至於 Base Correlation，本研究發現以 Student t 分配來求算，能夠大幅降低 Base Correlation，自由度越小（唯仍需大於 3），Base Correlation 下降幅度越大，將能消除更多優先批次證券無法求取 Base Correlation 的情況，並且不會改變原先 Base Correlation 的結構，故應使用較能描述極端損失之自由小的 Student t 分配，但仍需注意自由度太小之 t 分配亦可能不適用於目前市場資料，在本研究中（使用 2008/06/27 CDX.NA.IG9 之市場報價），自由度至少需為 6 及以上，才可求算 Base Correlation。

未來研究方向將嘗試在 A-H model 架構下，試搭配其他分配型態進行研究，來探討各分配下 Base Correlation 之結構，並且運用目前市場資料來求算各種分配之最適參數，以找出最適合目前市場之信用風險模型及其模型參數。

參考文獻

- [1] 盧琬靖，2007年7月，擔保債權憑證之評價－探討批次證券之槓桿效果，台灣大學財務金融所碩士論文
- [2] 吳柏樟，2007年7月，在 Factor Copula 模式下擔保債權憑證 (CDO) 之評價，台灣大學財務金融所碩士論文
- [3] 陶亞蘭，2008年7月，擔保債權憑證隱含違約相關性之研究－以台灣為例，台灣大學財務金融所碩士論文
- [4] Li, D. X., 2000, "On Default Correlations: a Copula Function Approach", *Journal of Fixed Income*, 9, pp. 43-54.
- [5] Ahluwalia, R. and L. McGinty, 2004, "A Model for Base Correlation Calculation", JPMorgan, *Credit Derivatives Strategy*.
- [6] Amato, J. and J. Gyntelberg, 2005, "CDS Index Tranches and the Pricing of Credit Risk", *BIS Quarterly Review*, pp.73-87.
- [7] Duffie, D. and K. Singleton, 1999, "Modeling Term Structures of Defaultable Bonds", *Review of Financial Studies* 12, pp. 687-720.
- [8] Burtschell, X., Gregory and J. Laurent, 2005, "A Comparative Analysis of CDO Pricing", Working Paper, BNP Parisbas.
- [9] Elizabel, A., 2006, "Credit Risk Model I: Default Correlaiton in Intensity Models", CEMFI Working Paper No. 0605.
- [10] Elizabel, A. 2006, "Credit Risk Models II: Structural Models", CEMFI Working Paper No. 0605.
- [11] Jarrow, R., D. Lando and S. Turnbull, 1997, "A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads", *Review of Finance Studies*, pp. 481-523.
- [12] Hull, J. and A. White, 2004, "Valuation of a CDO and Nth to Default CDS without Monte Carlo Simulation", *Journal of Derivatives*, 12(2) (Winter), pp. 8-23.

- [13] Altman, E., A. Resti and A. Sironi, 2004, “Default Recovery Rates in Credit Risk Modelling: A Review of the Literature and Empirical Evidence”, Economic Notes by Banca Monte dei Paschi di Siena SpA. Pp. 183-208.
- [14] Laurent, J.-P. and J. Gregory, 2005, “Basket Default Swaps, CDOs and Factor Copulas”, The Journal of Risk, 7(4), pp. 103-122.
- [15] O’Kane, D. and M. Livesey, 2004, “Base Correlation Explained”, Lehman Brothers.
- [16] Kakodkar, N., S. Galiani, J. Jonsson and A. Gallo, 2006, Credit Derivatives Handbook 2006-Vol.2, Merrill Lynch.
- [17] Andersen, L. and J. Sidenius, 2004/5, “Extensions of the Gaussian Copula: Random Recovery and Random Factor Loadings”, The Journal of Credit Risk, 1(1), pp. 29-70.
- [18] Krekel, M., 2008, “Pricing distressed CDOs with Base Correlation and Stochastic Recovery”, UniCredit Markets & Investment Banking.
- [19] Ech-Chatbi C., 2008, “CDS and CDO Pricing with Stochastic Recovery”
- [20] Amaroui, S. and S. Hitier, 2008, “Optimal Stochastic Recovery for Base Correlation”
- [21] Prampolini, A. and M. Dinnis, 2009, “CDO Mapping with Stochastic Recovery”, HSH Nordbank AG.
- [22] Walker, M. B., 2008, “The Static Hedging of CDO Tranche Correlation Risk”, Working Paper, University of Toronto.
- [23] Meissner, G., 2008, “The Definitive Guide to CDOs- Market, Application, Valuation and hedging”, Risk books.
- [24] Leeming, M., (ed.) 2008, “Base Correlation Limits”, Barclays Capital.
- [25] Kakodkar, A., (ed.) 2009, “Coping with The Copula”, Merrill Lynch.