

國立臺灣大學工學院土木工程學系

碩士論文

Department of Civil Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis



最佳化演算法應用於薄殼結構之主應力線加勁設計

Application of Optimization Algorithm  
in Design for Principal Stress Line Stiffeners  
Attached to Thin Shell Structures

陳俊廷

Chun-Ting Chen

指導教授：呂良正 教授

Advisor: Prof. Liang-Jenq Leu

中華民國 111 年 7 月

July, 2022



國立臺灣大學碩士學位論文

口試委員會審定書

National Taiwan University Master Thesis  
Oral Examination Committee Approval



最佳化演算法應用於薄殼結構之主應力線加勁設計

Application of Optimization Algorithm in Design for Principal  
Stress Line Stiffeners Attached to Thin Shell Structures

本論文係陳俊廷(R09521227)在國立臺灣大學土木工程學系結構工程組  
完成之碩士學位論文，於民國 111 年 7 月 27 日承下列考試委員審查通  
過及口試及格，特此證明。

Chun-Ting Chen (R09521227) completed this master thesis at the  
Department of Civil Engineering Structural Engineering on July 27, 2022  
and passed the oral examination reviewed by the following examination  
committee members.

口試委員 Oral examination committee members :

呂良正  
(指導教授 Advisor)

A handwritten signature in black ink.

黃仲偉

A handwritten signature in blue ink.

宋裕祺

A handwritten signature in blue ink.

郭世榮

A handwritten signature in black ink.

系主任

謝尚賢

A handwritten signature in blue ink.





## 致謝

能夠在短短一年的時間內完成這篇論文，要感謝的人實在太多，若沒有大家的幫助以及陪伴，無法想像這一年將如何坎坷。雖說大恩不言謝，容我於論文的正文開始之前感謝各位幫助過我的人們，聊表心意。

首先最感謝的肯定是呂良正 恩師，老師教給我的不僅只於研究上的幫助，更多的是之後在職場上做人處事的道理，老師對於教學以及工作所投入的熱忱，總是讓人印象深刻，同時也感染了我，未來必須認真的對待自己的事業，方能有所建樹。也非常感謝老師的信任，交給了我許多案子以及助教課程，讓我能多方探索與學習。

本研究內容部分參考自學長姐們歷年來的研究內容，且過程中受到許多的恩惠，說自己是站在巨人的肩膀上也不為過。謝謝二博學長不只攬下了整個研究室的大小事、時常給予研究建議、更介紹了許多厲害的大學長姐們，讓我在遇到問題時有人可以詢問；感謝可葳、孟笙、承憲學長，願意抽空給予我許多職涯上的建議；感謝鈺翔、穎君、啟聰學長姐的照顧，使我們的能順利接軌碩士生活，並且透過聆聽學長姐們每週專業的報告，找出適合自己的研究方向，尤其感謝鈺翔學長，工作之餘仍然樂意協助我，讓我於研究上少走了許多歪路。

升上碩二後，逐漸繁忙，巨大的壓力也隨之而來，所幸有各位優質學弟妹的陪伴，讓碩二的日子依舊多采多姿。感謝智傑不僅提供了許多實務上的工程知識，更賦予了整個研究室在食物上的豐富選擇，讓我們不用花心思愁正餐要吃甚麼，可以全心投入研究；感謝權恩為研究室帶來了許多歡笑，凝聚了研究室的感情，期待學弟之後的研究成果，莫忘選擇機器學習的初衷；感謝采霏幫忙審稿此論文，祝福學妹之後能在調諧質量阻尼器領域中有所成就；感謝鈺庭帶領我們奪下了組際盃的籃球冠軍，學妹的研究絕對能更加完善本團隊的最佳化設計流程；感謝家成，名義上的學弟實際上的學長，時常和我討論研究，也協助我處理助教課程的



事宜，相信學弟之後一定能成為土木業界的接案王。

感謝同屆的研究好夥伴：牧軒、懷寬，這兩年來的相互照應、共同成長、一起認真做研究，如此的革命情感造就了感情最好的一屆，祝福大家在未來都能過上自己嚮往的生活，也希望之後能定期相聚，不要再只是隨口說說。也要感謝身邊的摯友們，不論是偶爾相約聚餐或者出遊，就像是充電般，總能帶給了我更多的能量，讓我在短暫休息後，以百分之兩百的精力專心投入研究。

最後要感謝的是最重要的家人們，謝謝父母提供了我衣食無缺的生活，讓我在做研究的同時，不用煩惱生活上瑣碎的雜務；謝謝阿公阿嬤每天的照顧，讓我回到家時總是有吃不完的零食；謝謝我哥，時常和我討論未來的方向，讓我對未來充滿期待；也謝謝身邊所有的親戚們，大大豐富了我的生活。

除了上述所提到的人們，在這兩年的期間，亦受到太多的幫助，在這邊就不一一介紹。大家的幫忙對我而言意義重大，銘記於心，待有能力之時，必當報恩以行。



## 摘要

近年來隨著設計與分析工具的進步，建築師擁有更為多樣的設計選擇，其中形狀複雜且承載能力佳的薄殼結構成為了許多建築物的外型首選。本研究透過自由曲面建構技術，結合有限元素分析以及最佳化理論，推出一系列薄殼結構最佳化設計流程，供予建築師以及結構工程師們參考，以利設計出兼顧力學性質以及視覺美感之最佳薄殼結構。

對於大跨度之薄殼結構，為提高結構勁度，除了幾何形狀最佳化設計之外，須給予其額外之加勁輔助結構，因此加勁方式的設計至關重要。本研究著重於薄殼結構附屬加勁梁之最佳化設計，尤其以加勁梁之配置為重。以主應力線之走向作為加勁梁之分布依據，透過多種最佳化演算法，結合整體結構之尺寸最佳化，於固定體積下設計出具有最高勁度之薄殼結構。

於眾多聞名的薄殼結構中，選擇位於美國新澤西州 (New Jersey) 的聖阿洛伊修斯教堂 (The Church of St. Aloysius) 作為案例，根據本研究之薄殼結構最佳化設計流程進行設計以及探討。將現行規範之限制以及載重組合納入考量。比較該案例之初始結構與最佳化設計之結果，應證了本研究之薄殼結構最佳化設計確實能於兼顧現行規範以及美學觀感的同時，大幅提升結構之力學表現。

**關鍵字：**薄殼結構、肋梁、自由曲面、非均勻有理 B 樣條、主應力線、結構最佳化、形狀最佳化、尺寸最佳化、基因演算法、序列最小二乘規劃法、有限元素法、計算流體力學





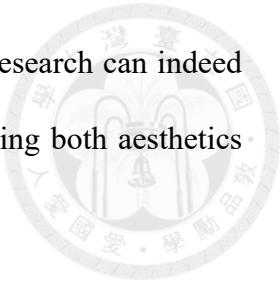
# Abstract

In recent years, thin-shell structures with complex shapes are extensively used in civil and architectural engineering due to the efficient load-carrying capacity. However, most of the thin-shell structures are designed on the basis of architects' aesthetic point of view, rather than the mechanical performance. Therefore, this research demonstrates an optimal thin-shell structure design method that integrates free-form surface technology with finite element method and optimization theory in considering of both aesthetics and mechanical behaviors.

Large-span shells generally require not only optimal geometric design but also additional support to improve the stiffness of the structures. Hence, it is crucial to decide the way to fortify the structures. This research focuses on the optimization of the ribs attached to the thin-shell structures, with particular emphasis on the layout of the ribs. The distribution of the ribs is based on the orientation of the principal stress lines which demonstrate the paths of stress flow. In the optimization process, a variety of optimization algorithms are combined to retrieve the optimal thin-shell structures with the highest stiffness.

To verify the optimization method, this research chooses The Church of St. Alioy-sius in New Jersey, USA, as a case study. Comparing the analysis results between the initial structure and the optimal design while taking the limitations of current codes and load combinations into account, the stiffness of the structure has significantly improved.

It shows that the optimal thin-shell structure design method by this research can indeed enhance the mechanical performance of the structure while considering both aesthetics and the limitations of the current codes.

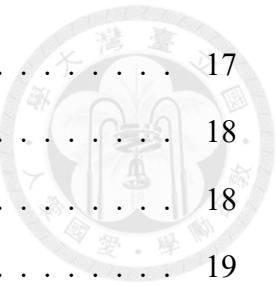


**Keywords:** Thin-shell structure, Rib, Free-form surface, NURBS, Principal stress line, Structural optimization, Shape optimization, Size optimization, Genetic algorithm, SLSQP, Finite element method, CFD

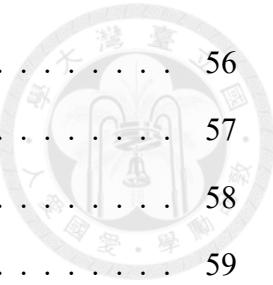


# 目錄

	Page
口試委員審定書	i
致謝	iii
摘要	v
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
目錄	ix
圖目錄	xiii
表目錄	xv
<b>第一章 緒論</b>	<b>1</b>
1.1 研究動機 . . . . .	1
1.2 文獻回顧 . . . . .	2
1.3 研究內容 . . . . .	5
<b>第二章 模型架構與最佳化理論</b>	<b>7</b>
2.1 前言 . . . . .	7
2.2 程式語言與分析軟體選擇 . . . . .	7
2.3 自由曲面之建構 . . . . .	7
2.3.1 NURBS 介紹 . . . . .	8
2.4 主應力線之生成演算法 . . . . .	9
2.4.1 模型之元素選擇 . . . . .	9
2.4.2 特徵值分析 . . . . .	11
2.4.3 向量場內插 . . . . .	12
2.4.4 主應力生成 . . . . .	13
2.5 最佳化問題 . . . . .	16



2.6	結構最佳化	17
2.6.1	形狀最佳化	18
2.6.2	尺寸最佳化	18
2.7	最佳化方法介紹	19
2.7.1	全域搜尋之最佳化方法	19
2.7.2	區域搜尋之最佳化方法	20
<b>第三章</b>	<b>薄殼之最佳設計</b>	<b>21</b>
3.1	前言	21
3.2	程式架構	22
3.3	案例探討	24
3.3.1	不同控制點參數對應之形狀最佳化結果	24
3.3.2	不同控制點及元素數量之最佳化結果	29
3.4	小結	33
<b>第四章</b>	<b>加勁梁之最佳設計</b>	<b>35</b>
4.1	前言	35
4.2	加勁梁生成流程	36
4.2.1	主應力線之繪製	36
4.2.2	加勁梁之建構	36
4.3	加勁梁設計流程	38
4.3.1	加勁梁之選擇	38
4.3.2	尺寸最佳化	41
4.4	案例探討	42
4.4.1	模型建構	42
4.4.2	加勁梁設計	45
4.5	小結	51
<b>第五章</b>	<b>實際薄殼結構之最佳化設計</b>	<b>53</b>
5.1	前言	53
5.2	案例介紹	53



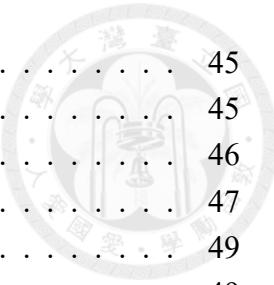
5.3	設計限制	56
5.4	設計載重	57
5.5	風力模擬	58
5.5.1	計算流體力學分析	59
5.5.2	流場驗證	59
5.6	實際設計	61
5.6.1	形狀最佳化設計	61
5.6.2	風載重模擬	62
5.6.3	加勁梁最佳化設計	66
5.7	小結	69
<b>第六章</b>	<b>結論與未來展望</b>	<b>71</b>
6.1	結論	71
6.2	未來展望	72
<b>參考文獻</b>		<b>73</b>





# 圖目錄

1.1	Michell Cantilever (Rozvany (1998)) . . . . .	3
1.2	自由曲面之主應力線加勁過程示意圖 (Li <i>et al.</i> (2017)) . . . . .	3
2.1	沙漏現象示意圖 . . . . .	11
2.2	節點與任意點之向量內插示意圖 . . . . .	12
2.3	流線建構之示意圖 (簡孟笙 (2019)) . . . . .	13
2.4	RK4 數值積分示意圖 . . . . .	15
2.5	(a) 傳統設計方法與 (b) 結構最佳化方法之差異 (Arora (2017)) . . . . .	17
3.1	薄殼結構最佳化流程圖 . . . . .	21
3.2	以 NURBS 曲面控制結構形狀示意圖 (Espath <i>et al.</i> (2011)) . . . . .	23
3.3	形狀最佳化程式架構 . . . . .	23
3.4	[例題一] 起始形狀示意圖 . . . . .	24
3.5	Restaurante Submarino 結構攝影圖 . . . . .	25
3.6	[例題一] 初始網格示意圖 . . . . .	25
3.7	[例題一] 控制點擺放方式示意圖 . . . . .	26
3.8	[例題一] 不同控制點對應之網格分布 . . . . .	27
3.9	[例題二] 起始形狀示意圖 . . . . .	30
3.10	[例題二] 控制點擺放方式示意圖 . . . . .	30
3.11	[例題二] 目標函數收斂圖 . . . . .	33
4.1	薄殼結構最佳化流程圖 . . . . .	35
4.2	主應力線生成之程式架構示意圖 . . . . .	37
4.3	薄殼與加勁梁之示意圖 . . . . .	37
4.4	基因演算法之參數示意圖 . . . . .	38
4.5	以基因演算法進行加勁梁設計之流程圖 . . . . .	39
4.6	輪盤法示意圖 . . . . .	39
4.7	Crossover 以及 Mutation 之示意圖 . . . . .	40
4.8	設計變數(斷面尺寸)示意圖 . . . . .	41
4.9	[例題三] 起始形狀示意圖 . . . . .	42
4.10	[例題三] 控制點擺放示意圖 . . . . .	43
4.11	[例題三] 各節點之主應力方向 . . . . .	44
4.12	[例題三] 主應力線示意圖 . . . . .	44



4.13 [例題三] 加勁梁分布示意圖	45
4.14 [例題三] 加勁梁之貢獻度分析結果	45
4.15 [例題三] 加勁梁篩選及尺寸最佳化迭代圖	46
4.16 [例題三] 不同數量之加勁梁最佳設計	47
4.17 [例題三] 加勁梁之區間選擇之限制示意圖	49
4.18 [例題三] 區間選擇限制範例圖	49
4.19 [例題三] 增加新限制之 5 組加勁梁最佳化設計	50
5.1 The Church of St. Aloysius 結構攝影圖	54
5.2 [例題四] 初始模型建立	54
5.3 [例題四] 模型與實際結構之對照圖	55
5.4 [例題四] 控制點示意圖	55
5.5 <建築技術規則建築構造編第 26 條> 之屋頂活載重規範	58
5.6 不同雷諾數之流場分析驗證	60
5.7 半圓拱頂結構之風壓分布驗證	60
5.8 文獻、ASCE7-05、以及 CFD 模擬之風壓分布圖	61
5.9 [例題四] 來風方向示意圖	63
5.10 [例題四] 方向一：流場建立範例圖	63
5.11 [例題四] 方向一：流場分析結果範例圖	64
5.12 [例題四] 方向一：結構受風壓範例圖	64
5.13 [例題四] 風壓分布結果	65
5.14 [例題四] 加勁梁分布示意圖	66
5.15 [例題四] 加勁梁最佳化設計結果	66



## 表目錄

2.1 ABAQUS 常見元素種類表 . . . . .	10
3.1 [例題一] 初始形狀分析結果 . . . . .	28
3.2 [例題一] 最佳化形狀分析結果 . . . . .	29
3.3 [例題二] 不同控制點數量之初始形狀分析結果 . . . . .	31
3.4 [例題二] 不同控制點數量之形狀最佳化結果 . . . . .	31
3.5 [例題二] 不同元素數量之最佳化形狀結果 . . . . .	32
4.1 [例題三] 最佳化形狀分析結果 . . . . .	43
4.2 [例題三] 不同數量之加勁梁最佳化結果比較 . . . . .	48
4.3 [例題三] 區間選擇限制與否之最佳化設計比較 . . . . .	50
5.1 [例題四] 初始形狀與最佳化形狀分析結果 . . . . .	62
5.2 [例題四] 加勁梁最佳化設計之分析結果 . . . . .	67
5.3 [例題四] 本研究與孫鈺翔 (2021) 之最佳化設計結果比較 . . . . .	68





# 第一章 緒論

## 1.1 研究動機

隨著時代的演進，各式各樣的結構設計以及分析商用軟體不斷推陳出新，現代的設計者們因此擁有了更多的設計方案。除了傳統相互正交的梁柱構架系統之外，以自由多變、形狀複雜著稱的自由曲面 (Free-form surface) 也成為了許多薄殼結構的外型首選。

如今世界上已經存在了不少的薄殼結構，這些建築的外型大多是由設計師根據其對於美學的主觀見解而設計，儘管會使用結構軟體分析以確保使用上的安全，但對於結構性能以及經濟成本來說卻未必是最佳化的設計。本研究欲透過最優化理論和參數化設計，結合有限元素法 (Finite Element Method)，藉由一系列的設計流程，例如：改變結構的形狀、選擇加勁梁的配置、以及調整斷面尺寸等，期望能在特定的目標與限制之下，設計出力學表現最佳的結構。

本研究試圖推出一套完善的薄殼結構最優化設計流程，讓工程師與設計師們能以此為參照，幫助其更有效率的進行結構設計以及檢核，進而真正設計出兼顧美學、力學、並且符合經濟效益的建築結構。



## 1.2 文獻回顧

隨著自由曲面的應用日漸普及，建構的方式越趨多樣。從較早期Bézier (1968)提出的貝茲曲線 (Bézier Curve)，逐漸演進為均勻 B 樣條 (Uniform B-spline)，於Santoro (1970) 詳細介紹，再到由Versprille (1975) 提出，現今最普遍使用的非均勻有理 B 樣條 (Non-Uniform Rational B-Splines, NURBS) 曲線，每種方法各有其控制曲線形狀的特性，而將這些方法的維度提高成二維，即可決定曲面之幾何形狀，本研究選擇以 NURBS 進行自由曲面之建構與設計。

自由曲面技術結合最佳化理論，於近十年開始發展應用於薄殼結構的設計上。最初的完整設計流程由Kegl and Brank (2006) 提出，透過貝茲曲線搭配上最佳化設計以建構出結構的曲面，應用於桁架加勁之結構物；Espath *et al.* (2011) 使用NURBS 對不同初始形狀之平板結構進行形狀最佳化設計，取得線性及非線性之最佳化的結果，以此作為殼結構最佳化設計之依據；Ikeya *et al.* (2016) 則是選擇了不同於參數控制的形式，透過計算當前形狀的梯度函數，來決定下一步的幾何形狀，搭配上殼厚度的尺寸最佳化，以此流程進行結構最佳化，從而得到最低結構順從度 (Structural Compliance) 的形狀。

變斷面對於結構最佳化的重要性，已於相關文獻得到驗證。Ismail and Mueller (2021) 對於具有變換斷面之加勁樓板進行形狀最佳化，目標函數為最小化結構的總蘊含能量 (Embodied Energy)。其研究的概念與尺寸最佳化非常近似。本研究亦有參考其方向，對於薄殼結構進行固定體積下的尺寸最佳化，調度薄殼與加勁梁之體積分配，使得整體結構擁有最佳的斷面尺寸。

主應力線應用的演進，Michell (1904) 曾針對網柵結構的力學性質為發想，推導出許多著名的桁架結構解析解，其中最經典的案例為單點載重之輕量桁架懸臂梁結構，被稱為 Michell Cantilever (如圖 1.1)。近代的學者Rozvany (1998) 對於該結構的解析解做進一步的驗證，得出了其在材料輕量化下有著最佳的勁度表現，印證出 Michell Cantilever 與主應力線的密切關係。

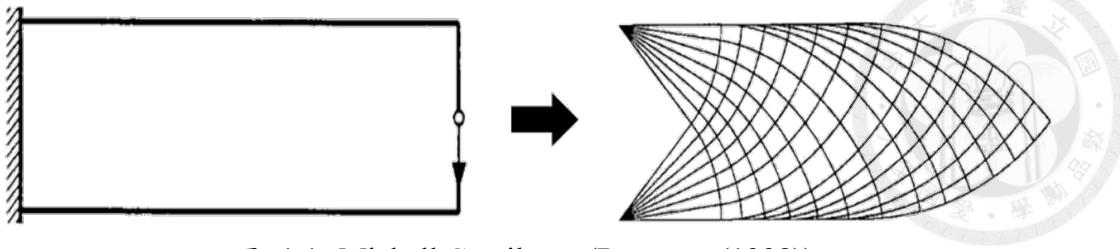


圖 1.1: Michell Cantilever (Rozvany (1998))

關於結構物沿著主應力線建構加勁梁，是否能有效提升整體勁度之問題，Li *et al.* (2017) 對於特定形狀的薄殼結構沿著主應力線方向加勁（如圖 1.2），在總體積固定的限制之下，加勁後的薄殼整體勁度上升，應力集中現象減少，且最大位移也獲得了改善。除了該自由曲面的案例之外，亦有研究著重於平板結構的主應力線加勁之探討。Halpern *et al.* (2013) 使用其開發的主應力線生成工具與義大利結構設計師 Pier Luigi Nervi 所設計之樓版結構進行比對，驗證了該真實案例與主應力線佈置具高度擬合性，也代表了主應力線運用在真實工程的可行性與可靠性。

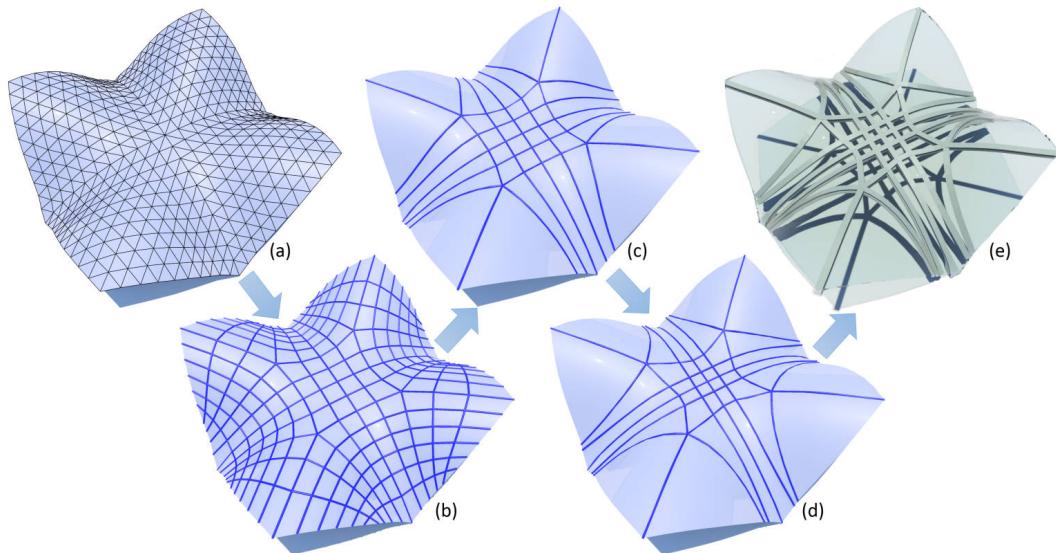


圖 1.2: 自由曲面之主應力線加勁過程示意圖 (Li *et al.* (2017))

關於實際存在的薄殼結構之最佳化設計，Tomás and Martí (2010) 以西班牙著名薄殼結構 Universal Oceanographic Park 為案例，Marino *et al.* (2016) 則是選擇麻省理工學院的禮堂，以貝茲曲線模擬其幾何形狀。兩者同樣是將真實的結構物形狀設為初始值，並對其進行形狀最佳化設計，直至找出最佳的幾何模型。參照上述的概念，本研究將針對實尺寸的薄殼結構進行結構設計，搭配合適的演算法以及法規限制，在特定的目標函數下，設計出最佳的結構。

最佳化相關的文獻大多使用該團隊自行撰寫的分析程式，本研究團隊對於自行撰寫最佳化程式並與商業分析軟體結合使用亦行之有年，連嘉玟 (2017) 參考Zuo and Xie (2015)，以程式語言 Python 連接有限元素軟體 ABAQUS，透過 ABAQUS 提供的 Python 程式語言 API 介面 (Application Programming Interface)，並將建模以及最佳化的指令擴充至程式之中；林享樑 (2018) 將其程式架構延伸，導入多樣的曲面建構函式及結合 SIMP 演算法與曲面拓樸最佳化，並將計算流體力學 (Computational Fluid Dynamics) 分析套用於薄殼結構之設計；簡孟笙 (2019) 開發主應力線生成演算法；林家萱 (2020) 引入了多層次最佳化演算法；孫鈺翔 (2021) 擴充了不同形狀之自由曲面的建模方式。本研究沿用團隊之程式概念，使用 NURBS 建構模型之幾何曲面、主應力線的生成與加勁、以及其他相關功能之指令，並且於設計流程之中導入不同的最佳化演算法，搭配有限元素軟體 ABAQUS 進行分析，著重於主應力線加勁梁的分布配置，進一步實現薄殼結構的最佳化設計。



### 1.3 研究內容

本研究推出一套完善之薄殼結構最佳化設計流程，於各章節依序介紹所使用之理論、設計方法、並且以實際案例設計作為示範。下列為各章節之內容概述：

**第一章：**闡述本研究之動機、背景、以及參考文獻。

**第二章：**介紹研究使用之工具、方法以及相關之理論，包含自由曲面建構、NURBS 曲面、主應力線生成、以及最佳化問題。

**第三章：**介紹最佳化設計流程前半部，包含自由曲面之建構以及形狀最佳化。著重於不同設計參數對於形狀最佳化結果之影響。

**第四章：**介紹最佳化設計流程後半部，包含主應力線生成、加勁梁設計、以及尺寸最佳化。著重於加勁梁之最佳選擇。

**第五章：**使用完整之最佳化設計流程，搭配現有之規範，針對實際存在之結構物進行最佳化設計，比較前後之勁度差異。

**第六章：**結論與未來展望，總結研究結果並且提出未來可以深入探討之方向。





## 第二章 模型架構與最佳化理論

### 2.1 前言

本章節旨在探討此研究所使用之分析工具、方法、和其背後之理論，包含了：如何透過設計參數與基底函數以建構出自由曲面、主應力線的生成方式及其背後原理、最佳化理論與結構最佳化之種類、以及本研究所使用的最佳化問題之數學模型。

### 2.2 程式語言與分析軟體選擇

本研究選擇了有限元素軟體 ABAQUS 為分析工具，並透過了 ABAQUS 所提供的 API 介面 (Application Programming Interface)，直接以程式語言 Python 進行建模及分析之操作。主程式架構則是沿續本研究團隊的連嘉玟 (2017)、林享樑 (2018)、簡孟笙 (2019)、林家萱 (2020)、孫鈺翔 (2021) 所編撰之程式碼，並對其進行改寫與擴充。詳細的程式架構將於後續之章節介紹。

### 2.3 自由曲面之建構

當今的工業設計中經常會運用到自由曲面，例如機翼、車殼、以及薄殼結構的外型等等。自由曲面無法透過簡單的函數表達，由於其複雜性與不規則性，得藉由已知的點位以多段的函數或參數方程式擬合而成。

常見的幾種數學幾何建模方式有：三次仿樣曲線 (Cubic Spline)、貝茲曲線 (Bézier Curve)、B 樣條 (B-Spline)、非均勻有理 B 樣條 (Non-Uniform Rational B-Splines, NURBS) 等。其中的 NURBS 在處理解析函數和建立模型形狀上有著極

大靈活性與準確性，計算速度快且數值穩定，因此最為廣泛運用，使用者僅需透過少量的參數與控制點，即可以勾勒出想要的曲線或曲面。本研究選擇以 NURBS 作為建構薄殼結構的工具，透過設定、調整少量的參數與控制點，便可以對曲面形狀進行編輯。

### 2.3.1 NURBS 介紹

NURBS 曲線為 B-Spline 曲線 (Gordon and Riesenfeld (1974)) 的擴充版本，藉由為每個控制點導入了不同的權重值，使曲線能有更多元的幾何形狀能。建構 NURBS 曲線所需的變數包含：控制點 (Control Point) 的數量、座標 (Coordinate) 與對應之權重 (Weight)、曲線之節點向量 (Knot Vector)、以及其多項式階數 (Degree of Polynomial)，其數學定義如下：

$$\mathbf{C}(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i}, \quad u \in [a, b] \quad (2.1)$$

式 (2.1) 的  $N_{i,p}$  為基底函數 (式 (2.2)、式 (2.3))，由一節點向量  $\mathbf{U}$ (式 (2.4)) 控制，其中的  $m + 1$  為節點數， $p$  為曲線的多項式階數， $w_i$  為權重， $\mathbf{P}_i$  為控制點座標， $n$  為控制點個數。

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.2)$$

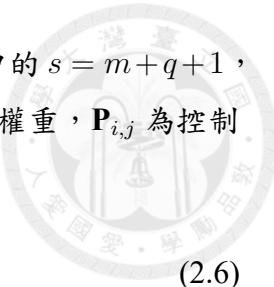
$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{U} = \{a, \dots, a, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, b, \dots, b\}_{1 \times (m+1)} \quad (2.4)$$

將 NURBS 曲線擴充成 NURBS 曲面，需額外定義一組由  $u$  方向  $p$  階以及  $v$  方向  $q$  階組成之二元向量。NURBS 曲面之數學定義如下：

$$\mathbf{S}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}}, \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (2.5)$$

式 (2.5) 中的  $N_{i,p}$  與  $N_{j,q}$  分別為透過節點向量  $\mathbf{U}$ (式 (2.6)) 與  $\mathbf{V}$ (式 (2.7)) 控制之基底



函數，式(2.6)中的 $r = n+p+1$ ， $r+1$ 為 $u$ 向節點數，式(2.7)中的 $s = m+q+1$ ， $s+1$ 為 $v$ 向節點數， $p$ 與 $q$ 為曲面兩方向之多項式階數， $w_{i,j}$ 為權重， $\mathbf{P}_{i,j}$ 為控制點座標， $n$ 與 $m$ 為 $u$ 向與 $v$ 向之控制點個數。

$$\mathbf{U} = \{0, \dots, 0, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, 1, \dots, 1\}_{1 \times (r+1)} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{V} = \{0, \dots, 0, v_{q+1}, \dots, v_{s-q-1}, 1, \dots, 1\}_{1 \times (s+1)} \quad (2.7)$$

## 2.4 主應力線之生成演算法

透過前述 NURBS 方法建構出薄殼結構的幾何曲面後，藉由有限元素分析得到各點的應力值，再經由本研究團隊所開發的後處理方法將離散的應力轉換為連續的主應力線 (Principal Stress Line)，以此作為加勁梁分布之根據。本章節將會詳細介紹主應力線生成之過程與方法。

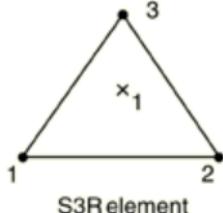
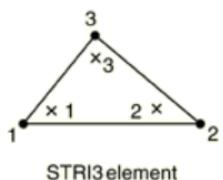
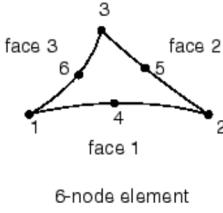
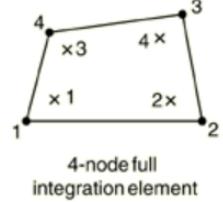
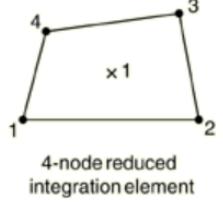
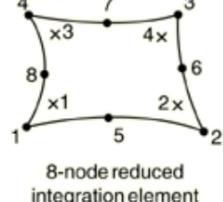
### 2.4.1 模型之元素選擇

使用有限元素軟體 ABAQUS 執行分析前，需要為所建構的結構模型選擇適當的元素 (Element) 種類。ABAQUS 常用元素種類與介紹如表 2.1 所示，本研究之分析對象為大跨度之薄殼結構，為了控制運算成本選擇減縮積分 (Reduced Integration) 殼元素 (Shell Element) 而非全積分 (Full Integration)，並且考量到薄殼結構的應變不大，因此最終採用四邊形的小應變減縮積分殼元素 S4R5 作為主要之元素。

由於使用減縮積分元素，須顧及沙漏控制 (Hourglass Control) 是否過度。圖 2.1 為殼結構的沙漏現象 (Hourgassing) 示意圖，有別於全積分元素 (S4)，當減縮積分元素 (S4R5) 受到彎矩時，隨著元素變形，兩條可視化虛線的長度和角度都沒有變化，此時若不加以控制，元素積分點的應力和應變都為零，不會產生應變能，換句話說，在這個情況下該元素毫無勁度可言。為了避免沙漏現象之發生，系統會導入實際上不存在的勁度。當沙漏控制過度時，便會影響到能量的平衡，因此必須檢核人工應變能 (Artificial Strain Energy) 小於總應變能之 5%，該分析才具參考價值。



表 2.1: ABAQUS 常見元素種類表

Element Type	Description	Figure
B31	2-node first-order beam.	
S3R	3-node triangular general-purpose shell, finite membrane strains (identical to element S3).	
STRI3	3-node triangular facet thin shell.	
STRI65	6-node triangular thin shell, using five degrees of freedom per node.	
S4	4-node general-purpose shell, finite membrane strains.	
S4R5	4-node thin shell, reduced integration with hourglass control, using five degrees of freedom per node.	
S8R5	8-node doubly curved thin shell, reduced integration, using five degrees of freedom per node.	

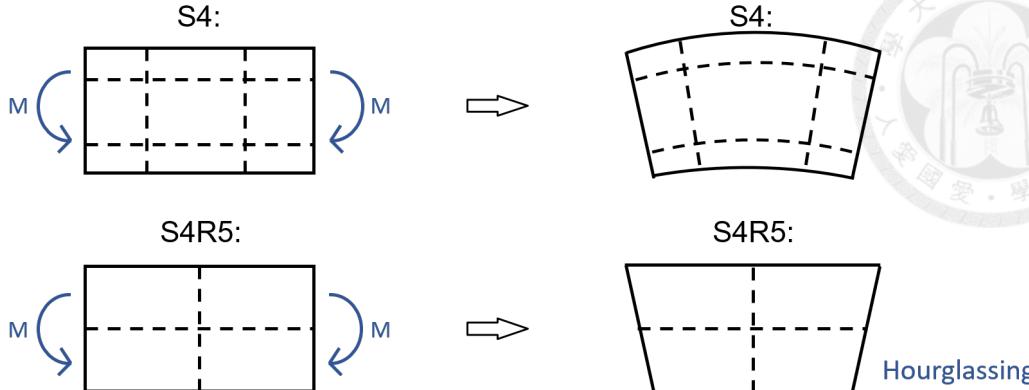


圖 2.1: 沙漏現象示意圖

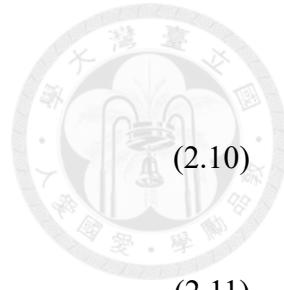
## 2.4.2 特徵值分析

建構模型並且執行分析後，可以得到各元素積分點的應力值；接著透過 ABAQUS 內建的後處理，對積分點的應力值進行內、外插以及平均，藉此得到各個節點的應力值及方向。由於本研究使用的殼元素屬於面內應力 (In-plane Stress) 元素，經過二維或三維模型的分析與後處理，得到各節點的  $\sigma_{xx}$ 、 $\sigma_{yy}$ 、與  $\tau_{xy}$ ，再根據柯西應力張量 (Cauchy Stress Tensor) 定義，進一步使用二階張量去表示，如式 (2.8)。其中  $\mathbf{n}$  為某假想面之單位向量， $\mathbf{T}^{(n)}$  為通過該假想面的應力張量， $\sigma_{ij}$  則由該點應力狀態之應力值所定義，如式 (2.9)。

$$\mathbf{T}^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad or \quad T_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j \quad (2.8)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

對於任意柯西應力張量，必存在一特定角度  $\theta$ ，使  $i \neq j$  時  $\sigma_{ij} = 0$ ； $i = j$  時  $\sigma_{ij} \neq 0$ ，此時式 (2.9) 中的  $\boldsymbol{\sigma}$  可化為對角矩陣 (Diagonal Matrix)，而這個特定角度  $\theta$  即為主應力方向。若將主應力方向以一單位向量  $\mathbf{n}$  表示，與此  $\mathbf{n}$  垂直之平面稱為主應力面，將柯西應力張量投影至該平面上即可得到正向應力  $\lambda$ ，數學表示式如式 (2.10)。透過該式 (2.10) 執行特徵值分析，其中  $\lambda$  為柯西應力張量之特徵值，即該節點的主應力； $\mathbf{n}$  為特徵向量，即對應的主應力方向，概念如式 (2.11)，可將任



意節點的應力狀態轉換成主應力之數值與方向。

$$\mathbf{T}^{(n)} = \sigma_n \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n} \quad \text{or} \quad T_i^{(n)} = \lambda n_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.10)$$

$$\sigma_{ij} n_j - \lambda n_i = (\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j \quad (2.11)$$

本研究使用殼元素，柯西應力張量大小為  $2 \times 2$ ，故經過特徵值分析後可以得到兩個特徵值與其對應的特徵向量，根據大小排列，分別為最大與最小主應力 ( $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ ) 以及其方向 ( $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ )。

### 2.4.3 向量場內插

將模型中各節點的應力狀態通過章節 2.4.2 的特徵值分析與平均處理後，僅能得到各節點的最大、最小主應力向量。為建立完整之流線型主應力線，任意非節點位置的主應力方向也是至關重要的。本研究採用拉格朗日插值法 (Lagrange Interpolation)，任意點的主應力方向可以由四周節點內插而得，示意圖如圖 2.2。

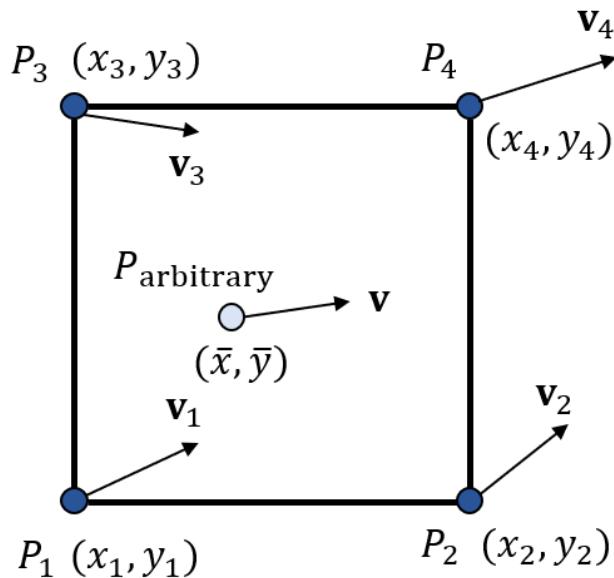


圖 2.2: 節點與任意點之向量內插示意圖

拉格朗日插值法的數學表達式如式 (2.12)，其中  $N_i(x, y)$  為  $i$  節點之形狀函數， $v_{ix}$  和  $v_{iy}$  分別為  $i$  節點主應力向之  $x$ 、 $y$  分量， $(\bar{x}, \bar{y})$  為元素內任意點座標，

$v_x$  與  $v_y$  則為該任意點之主應力方向的  $x$ 、 $y$  分量，最終得到的  $\mathbf{v}$  即為所求之任意點的主應力方向。

$$\begin{aligned}
 N_1(x, y) &= \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \frac{y - y_4}{y_1 - y_4}, & N_2(x, y) &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \frac{y - y_3}{y_2 - y_3}, \\
 N_3(x, y) &= \frac{x - x_4}{x_3 - x_4} \frac{y - y_2}{y_3 - y_2}, & N_4(x, y) &= \frac{x - x_3}{x_4 - x_3} \frac{y - y_1}{y_4 - y_1}, \\
 \Rightarrow v_x &= \sum_{i=1}^4 N_i(\bar{x}, \bar{y}) v_{ix}, & v_y &= \sum_{i=1}^4 N_i(\bar{x}, \bar{y}) v_{iy} \\
 \Rightarrow \mathbf{v} &= v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

#### 2.4.4 主應力生成

透過前兩小節之後處理方法，得到節點與任意點的主應力向量後，下一步是建構出數條以主應力方向為切線方向的主應力線。本研究參考簡孟笙 (2019) 建立流線 (Stream Line) 的概念 (如圖 2.3)，任意點之方向向量為經過該點之流線的切線方向以式 (2.13) 表示。式 (2.14) 的物理意義為將速度場積分回位移場，將此概念延伸，以主應力向量比作速度場，主應力流線則比作位移場，透過積分主應力向量以得到相應的流線場，即為主應力線。

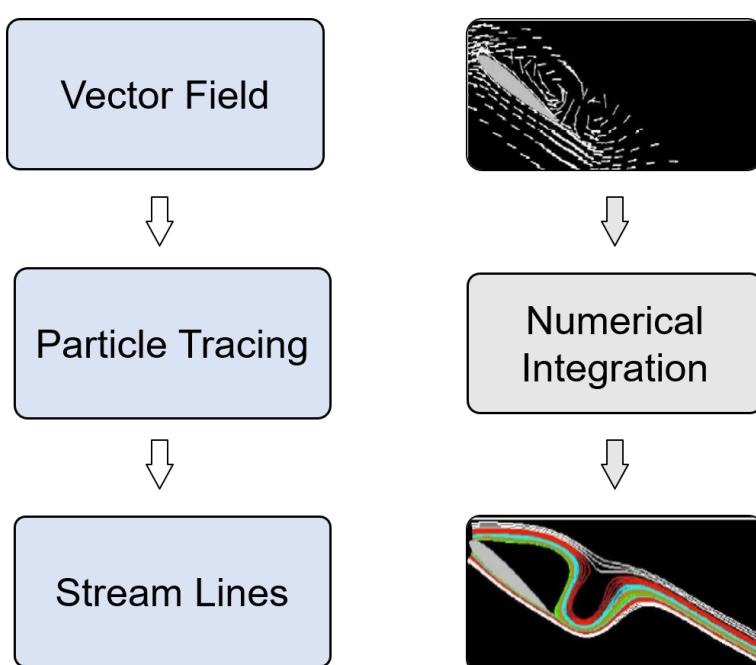


圖 2.3: 流線建構之示意圖 (簡孟笙 (2019))



$$\frac{dp}{dt} = v(p(t), t) \quad (2.13)$$

$$p(t + \Delta t) = p(t) + \int_t^{t+\Delta t} v(p(t), t) dt \quad (2.14)$$

透過給定每條主應力線的起始點、積分步長、與積分終點，即可繪製出該條主應力線，又根據任意點所讀取的主應力向量為最大或最小主應力，可以分別畫出最大與最小主應力線；由於主應力的物理性質，兩種應力軌跡會彼此正交。為建構出完整的主應力線，採用數值積分以模擬出近似解，常見的離散向量數值積分方式有：一階精度的 Euler Method、二階精度的 2<sup>nd</sup> Order Runge-Kutta Method(又稱為 Improved Euler Method)、以及四階精度的 4<sup>nd</sup> Order Runge-Kutta Method (RK4)，這些方式的概念均可以用泰勒展開式來解釋。本研究延續簡孟笙 (2019) 之研究，選用精度為四階，累積誤差、以及積分正確性均較為優勢的 4<sup>nd</sup> Order Runge-Kutta Method 作為數值分析之工具。

4<sup>nd</sup> Order Runge-Kutta Method 為常見且高精度的流線生成之數值積分方法，數學表示式如式 (2.15)， $\mathbf{p}_i$  為起始點， $\Delta s$  為步長。首先沿著起始點之速度方向  $\mathbf{v}_i$  走  $\frac{1}{2}$  步長得到第一暫時點  $\mathbf{p}_{i+1}^1$  與所對應之速度方向  $\mathbf{v}_{i+1}^1$ ，接著再回起始點並沿速度方向  $\mathbf{v}_{i+1}^1$  走  $\frac{1}{2}$  步長得到第二暫時點  $\mathbf{p}_{i+1}^2$  與所對應之速度方向  $\mathbf{v}_{i+1}^2$ ，再來同樣回到起始點並且沿速度方向  $\mathbf{v}_{i+1}^2$  走 1 步長得到第三暫時點  $\mathbf{p}_{i+1}^3$  與所對應之速度方向  $\mathbf{v}_{i+1}^3$ 。最後再根據泰勒展開式推導得到的係數 (1 : 2 : 2 : 1)，作為這些速度方向之權重係數，從起始點  $\mathbf{p}_i$  沿著這些速度方向的加權加總移動，即可得到下一點  $\mathbf{p}_{i+1}$ ；不斷迭代直到繪製完成該條主應力線，示意圖如下 (圖 2.4)：

$$\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{p} + \frac{1}{6} \Delta s (\mathbf{v}_i + 2\mathbf{v}_{i+1}^1 + 2\mathbf{v}_{i+1}^2 + \mathbf{v}_{i+1}^3) \quad (2.15)$$

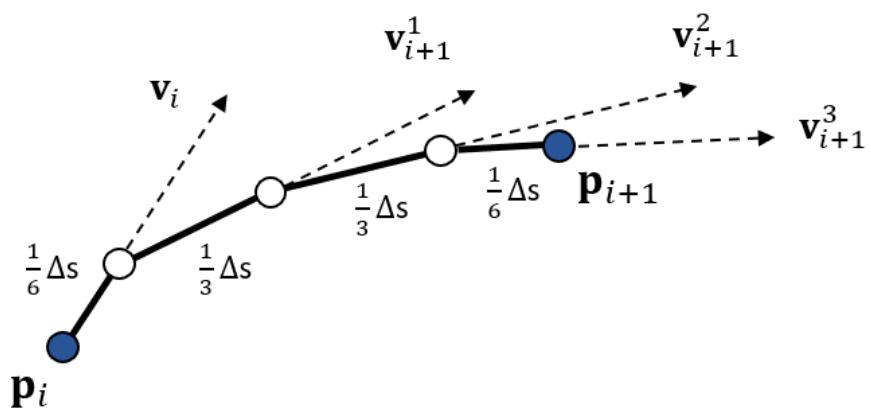
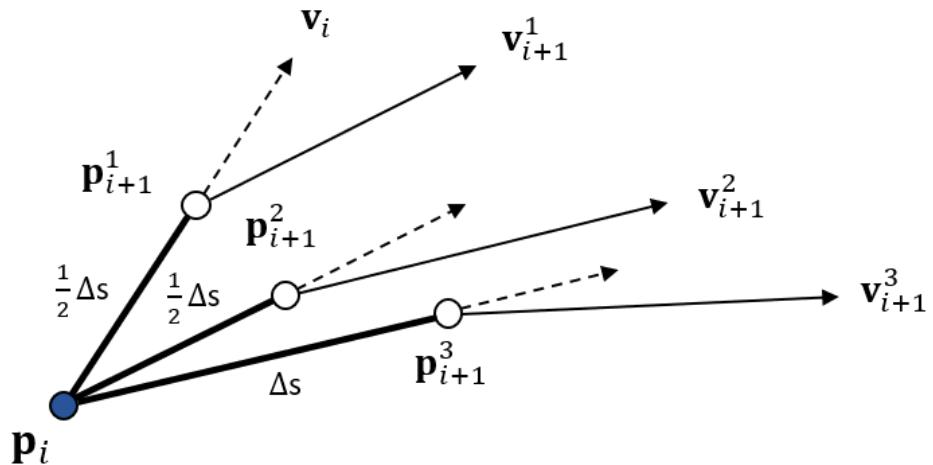


圖 2.4: RK4 數值積分示意圖



## 2.5 最佳化問題

最佳化，顧名思義是指從所有可行解之中，找出最佳的結果。探討最佳化問題時，根據問題本身，需要滿足多種複雜的數學條件。為了統一描述最佳化的問題與條件限制，Arora 於 1989 將最佳化問題以標準形式的方程式組進行描述，其定義如下：

尋找一組  $n$  維的設計變數 (Design Variables  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ )，在給定設計變數可調動的上、下範圍限制之下，滿足等式限制條件 (Equality Constraints) 和不等式限制條件 (Inequality Constraints)，使得目標函數 (Objective Function) 達到最大值 (Maximize) 或最小值 (Minimize)。上述之定義可以用下列數學描述式表達：

Min. or Max.:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.16)$$

Subject to:

$$h_i(\mathbf{x}) = h_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.17)$$

$$g_j(\mathbf{x}) = g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (2.18)$$

$$(x_{min})_k \leq x_k \leq (x_{max})_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.19)$$

其中式 (2.16) 的  $f(\mathbf{x})$  為目標函數，式 (2.17) 的  $h(\mathbf{x})$  為等式約束，式 (2.18) 的  $g(\mathbf{x})$  為不等式約束， $p$  與  $q$  則分別為前述等式與不等式之約束值，式 (2.19) 的  $(x_{max})_k$  與  $(x_{min})_k$  為  $n$  個設計變數中，第  $k$  個設計變數  $x_k$  之上下限。

最佳化問題可以根據有無約束作為分類依據，若最佳化問題沒有約束，則稱為無束制最佳化問題 (Unconstrained Optimization Problem)；相反地，若最佳化問題有約束，則稱為束制最佳化問題 (Constrained Optimization Problem)。工程上的最佳化問題往往需要考量到多個面向，除了最基本的物理約束之外，經濟成本、施作可行性等也都需要納入考量，因此多屬於束制最佳化問題。

若目標函數與限制條件皆為設計變數的線性方程式，則該最佳化問題稱之為線性規劃問題 (Linear Programming Problem)；若其中含有設計變數的非線性方程式，則歸類為非線性規劃問題 (Nonlinear Programming Problem)，結構最佳化大多

屬於非線性規劃問題。由於這類問題中各個方程式的解析式 (Analytic Form) 較難求得，加上目標函數的極值位置難以預測，早期常用的變分法 (Variational Method) 並不完全適用於結構最佳化問題 (Kamat (1993))；現今在處理結構最佳化問題時，會根據該問題之目標函數特性，選擇相對適合的數值方法 (Numerical Method)。

## 2.6 結構最佳化

結構最佳化與傳統設計方法的差異如圖 2.5 所示，最主要的差別在於設計結構的變數 (例如：柱斷面大小、鋼筋等) 時，傳統方法是經由專業軟體分析完畢後，再根據設計者的經驗進行參數調整；最佳化則是透過演算法之理論，搭配專業軟體進行迭代，以達到最終的收斂。相較於傳統的設計，結構最佳化可以節省人力運算的成本以及人為錯誤的風險，具有更為穩定且有效率的優勢。

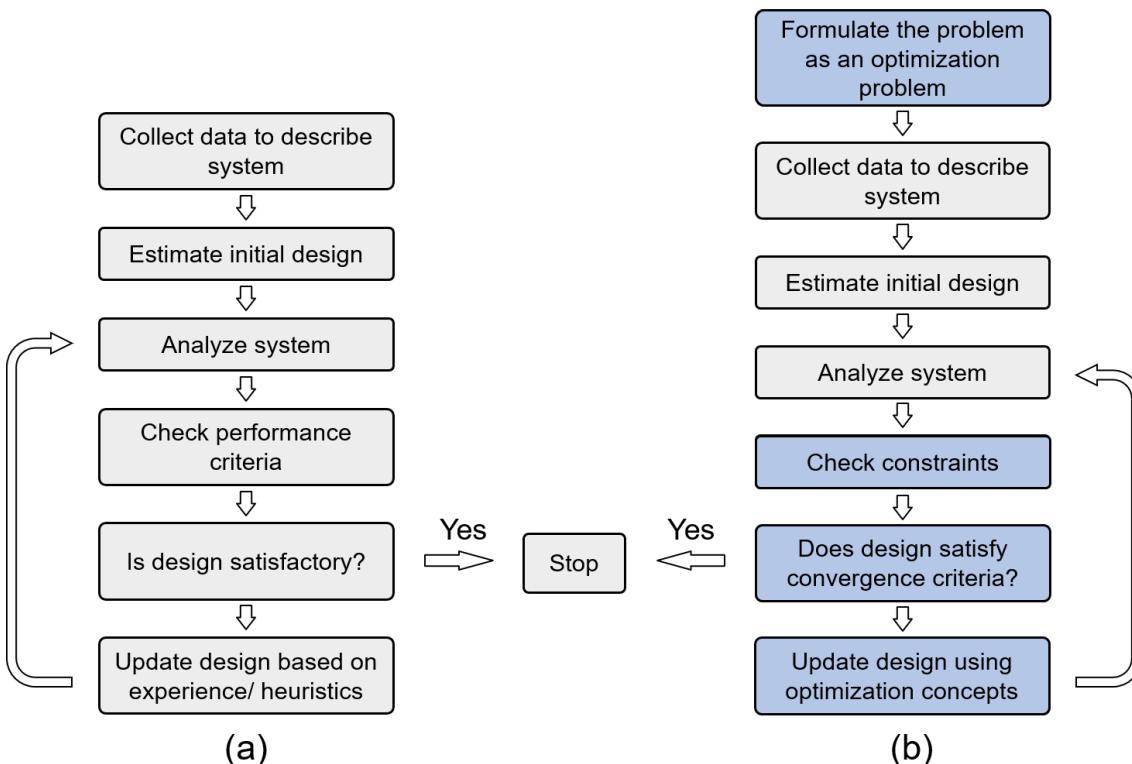


圖 2.5: (a) 傳統設計方法與 (b) 結構最佳化方法之差異 (Arora (2017))

圖 2.5(b) 為求解最佳化設計之基本流程，首先必須清楚定義該結構的最佳化問題：目標結構的分析模型、最佳化問題的設計變數、限制條件、和目標函數。下一步為系統分析，包含了有限元素分析與最佳化分析兩大步驟，每一次的最佳

化分析將會提供一組設計變數，依此設計變數建立新的模型後進行分析，重複迭代直至目標函數收斂，此時即為該結構最佳化問題之最佳結果。

結構最佳化設計根據執行方式又細分為三大領域：形狀最佳化 (Shape Optimization)、尺寸最佳化 (Size Optimization)、與拓樸最佳化 (Topology Optimization)。三者的設計流程相似，皆如前一段落所描述。但其設計概念並不相同，因此問題的設計變數與相對應的演算法也有所差異。本研究選擇以尺寸最佳化與形狀最佳化作為主要的設計概念，搭配上加勁梁的配置最佳化，整合成一套完善的結構最佳化設計流程。

### 2.6.1 形狀最佳化

形狀最佳化為透過改變結構的幾何形狀，直到找出最佳的目標函數解，常見之目標函數為結構順從度 (Compliance)。形狀最佳化適用於不少結構系統中，常應用於桁架結構與版殼結構的設計。本研究團隊透過 2.2 節介紹的自由曲面建模方法，構建出薄殼結構的外型，藉由控制點、向量、以及基底函數等控制參數加以描述，並且通過改變控制點的位置座標，針對薄殼結構的幾何形狀進行改動，目標函數為結構順從度乘以總體積，於固定體積之下最小化該結構之目標函數，意即最大化單位體積之勁度。

### 2.6.2 尺寸最佳化

尺寸最佳化為透過改變結構的尺寸，例如：梁、柱、版的斷面，直至找出最佳的目標函數解，多為體積或重量的最小化。尺寸最佳化常應用於桁架結構的斷面配置，越重要的桿件分配越多的材料，反之則分配較少，使得材料的分配最有效率。本研究則是透過改變薄殼的厚度與每根加勁梁的斷面尺寸，逐步調整材料的分配，搭配上材料強度、位移、和挫屈等限制式，目標函數為結構順從度乘以總體積，於固定體積之下最小化該結構之目標函數，意即最大化單位體積之勁度。



## 2.7 最佳化方法介紹

結構最佳化自 1980 年代開始發展，至今已經存在許多種分析方法，依據各自的特性與優缺點，適用於相對應的問題。最佳化方法根據搜尋區域的不同，可以分為兩大類：全域搜尋 (Global Search) 與區域搜尋 (Local Search)。

### 2.7.1 全域搜尋之最佳化方法

本研究選用之全域搜尋最佳化方法為 John Holland (1962) 與其研究團隊所創造的基因演算法 (Genetic Algorithm, GA)。此方法是依據 Charles Darwin (1859) 提出的物競天擇，適者生存，不適者淘汰生物演化法則而來，受到生物模擬技術的啟發，重複執行類似於生物學中的遺傳與進化機制，包含了選擇 (Selection)、交配 (Crossover)、突變 (Mutation) 等步驟，搭配上機率的概念，適用於複雜系統的自我適應與優化。

基因演算法透過多點搜尋，首先將變數轉換成二進制的數列，稱為染色體 (Chromosome)，而染色體中的每個字元稱為基因 (Gene)，接著選擇數個初始變數，多個變數形成的多條染色體稱之為族群 (Population)，根據初始變數代入適應函數 (Fitness Function) 的結果對於最佳化目標的適應性，執行上述選擇、交配、與突變等模擬生物遺傳的步驟，以求達到全域最佳解 (Global Optimal Solution)。

雖然相比於單點搜尋的最佳化方法，基因演算法採多點搜尋，因此計算量通常比較大；然而若適應函數為多峰分布，採用傳統的單點搜尋較容易陷入局部最佳解 (Local Optimal Solution)，而基因演算法因為同時處理族群中的多個個體，較容易避開局部最佳解之盲區，找到搜尋空間中的全域最佳解。



## 2.7.2 區域搜尋之最佳化方法

區域搜尋最佳化方法大多根據數學規劃法，給予設計變數的初始數值，計算每一次迭代過程中的微小擾動量  $\Delta \mathbf{x}^{(k)}$ ，包含了步長  $\alpha_k$  與方向  $\mathbf{d}^{(k)}$  兩部分，以得到新的設計變數  $\mathbf{x}^{(k+1)}$ ，其中的  $k$  為第  $k$  次的迭代。基於上述機制，勘查最佳化目標，也就是目標函數之數值，於設計範圍內之起伏變化，並且逐步收斂至最佳解。

若該最佳化問題受到限制條件的約束，稱為束制最佳化 (Constrained Optimization)；反之則稱為非約束最佳化 (Unconstrained Optimization)。當某組設計變數違背了限制條件時，束制最佳化會以懲罰函數 (Penalty Function) 調整目標函數值。懲罰函數通常不採用定值，而是透過距離約束條件的遠近決定，超過限制條件越多者，其懲罰函數越大，這種浮動的懲罰函數形式，稱之為動態懲罰函數 (Dynamic Penalty Function)。

本研究選用之區域搜尋最佳化方法為循序二次規劃法 (Sequential Quadratic Programming, SQP) 中的序列最小二乘規劃法 (Sequential Least Squares Programming Optimization Algorithm, SLSQP)，改良牛頓法 (Newton's Method) 計算二次微分效率較低之問題，將複雜之非線性限制條件拆解為多組計算相對簡單的二次規劃子問題。



## 第三章 薄殼之最佳設計

### 3.1 前言

本研究生成之薄殼結構最佳化主要流程如圖 3.1，此章節將會詳細介紹此流程前半段之程式架構，包含了模型建構以及形狀最佳化，並且透過兩個投影形狀為圓形之薄殼結構例題作為參考範例，探討不同建模參數所帶來之形狀最佳化結果影響。

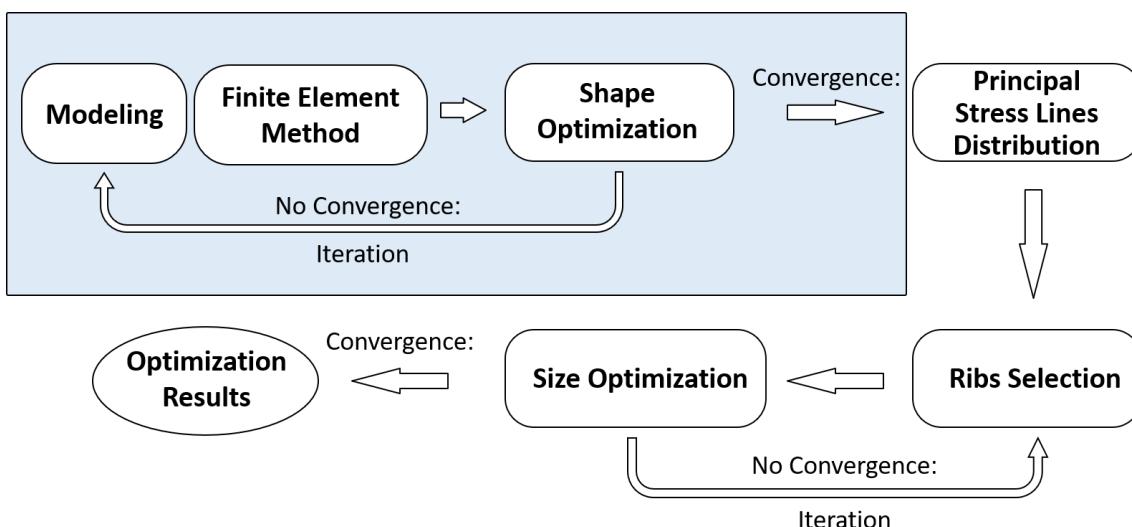


圖 3.1: 薄殼結構最佳化流程圖



## 3.2 程式架構

有限元素軟體 ABAQUS 的適用範圍包含了線性與非線性的材料分析、碰撞接觸、結構破壞、以及多種場域問題。因此本研究選擇 ABAQUS 為建模與分析之工具，並透過了 ABAQUS 所提供的 API 介面 (Application Programming Interface)，以程式語言 Python 進行編撰，編撰之程式內容根據 ABAQUS 的介面可大致劃分為：零件 (Part)、材料性質 (Property)、組裝 (Assembly)、分析步驟 (Step)、交互關係 (Intersection)、載重與邊界條件 (Load)、網格劃分 (Mesh)、分析工作 (Job)、可視化 (Visualization) 等模組。

形狀設計之程式架構可分為初始模型設計與形狀最佳化。初始模型設計是根據結構之實際狀態以建構出符合其形狀、尺寸、與材料性質之模型，接著透過 ABAQUS 的網格劃分 (Mesh) 功能將其切分成大量的元素 (Element)，再模擬該結構的支承條件與受力情形，至此即完成初始模型之建立。

下一步驟為該結構之形狀最佳化，由於本研究僅對於結構的不同位置之高度進行最佳化設計，並不會改變其投影面積與形狀，因此形狀最佳化調整的對象為結構物的高程座標。考慮到網格劃分後的結構物之節點數量眾多，數以千計甚至數以萬計，將各節點的高程座標全數作為變數是不切實際的，因此本研究使用章節 2.3.1 所介紹的 NURBS 曲面建構方法以控制結構物之形狀，如圖 3.2，其優點為：僅需要使用少量的控制點 (Control Point)，取其高程座標作為形狀最佳化之變數，可以降低大量的運算成本；同時由於 NURBS 曲面的特性，也可以設計出更具流線外觀的連續幾何曲面。

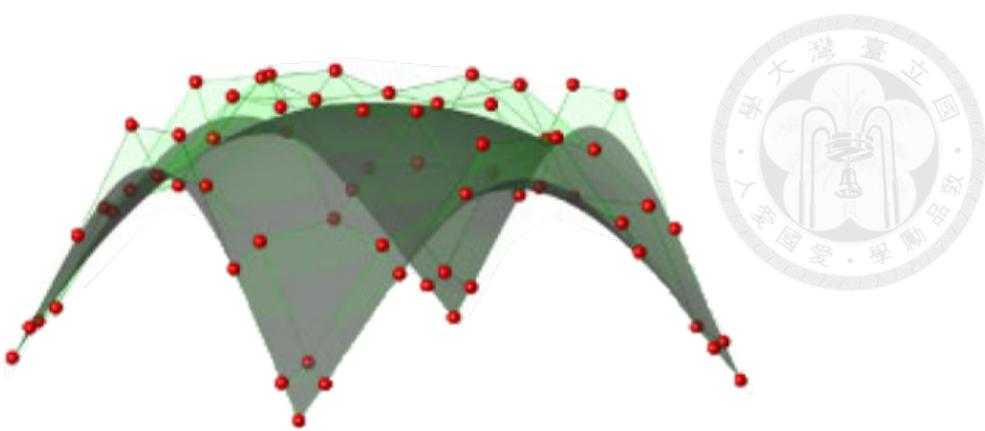


圖 3.2: 以 NURBS 曲面控制結構形狀示意圖 (Espath *et al.* (2011))

以 NURBS 曲面來控制結構之形狀變化，首先引入第三方模組庫 nurbs，接著設定 NURBS 曲面所需之參數，包含了控制點座標、 $u$  向  $p$  階與  $v$  向  $q$  階之二元節點向量，不同參數會造就不一樣的形狀最佳化結果，將於後面章節 3.3 透過圓形例題進行詳細探討。設定完 NURBS 曲面之參數後，於外部 (Python 端) 進行曲面的幾何形狀之計算，並且將計算完之座標投影到 ABAQUS 模型的各元素節點座標，藉此達成以 NURBS 曲面之控制點對整個結構之幾何形狀進行控制。

成功使用 NURBS 曲面的控制點座標對整個結構之幾何形狀進行控制後，即可開始進行形狀最佳化。本研究的形狀最佳化程式架構參考本研究團隊 (2017~2020) 的流程，如圖 3.3，大致可區分為：初始模型之建立、有限元素分析、與最佳化分析。由於幾何形狀的變化為連續變化，適合區域搜尋之最佳化演算法，因此本研究所選擇之形狀最佳化演算法為章節 2.7.2 中所介紹之序列最小二乘規劃法 (SLSQP)，引入 Python 的 SciPy 之中 optimize 模組內建的 SLSQP，設計變數為 NURBS 曲面之控制點高程座標，目標函數為結構順從度乘以總體積，於固定體積之下最小化該結構之目標函數，意即最大化單位體積之勁度。

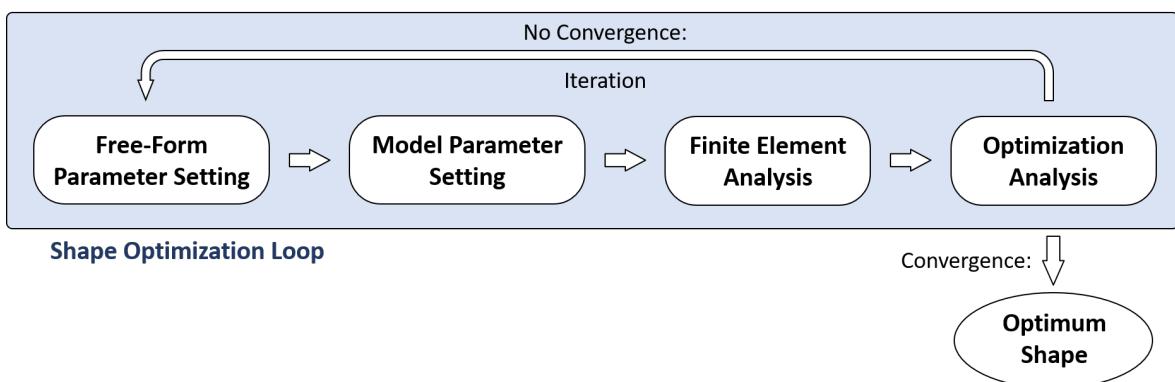


圖 3.3: 形狀最佳化程式架構



### 3.3 案例探討

本節選用了兩個起始形狀同為圓形，但不同跨度之結構案例作為範本，展示本研究推出之薄殼結構設計流程前半段的可行性與最佳化結果之可靠度，並且探討不同參數對於自由曲面的建構以及形狀最佳化的過程與結果所帶來之影響。可調動的參數包括 NURBS 的控制點數量、座標、 $u$  向  $p$  階與  $v$  向  $q$  階之節點向量與階數、以及 ABAQUS 建模時的網格劃分密集程度等，將於後面小節逐步介紹。

#### 3.3.1 不同控制點參數對應之形狀最佳化結果

第一個圓形薄殼結構案例(例題一)結構示意圖如圖 3.4，設計靈感參考坐落於西班牙瓦倫西亞海洋公園 (L’Oceanogràfic) 中的餐廳建築 (Restaurante Submarino) 外觀(如圖 3.5)。例題一的初始形狀為一直徑為 10 公尺之圓形薄殼平版，版厚為 38.2 公分，總體積為 30 立方公尺，圓版四周由八個鉸支承 (Pin Support) 束制，材料性質如下：楊氏模數 (Young’s Modulus) 為 30 GPa、柏松比 (Poisson’s Ratio) 為 0.3、密度為 2500 公斤/每立方公尺。

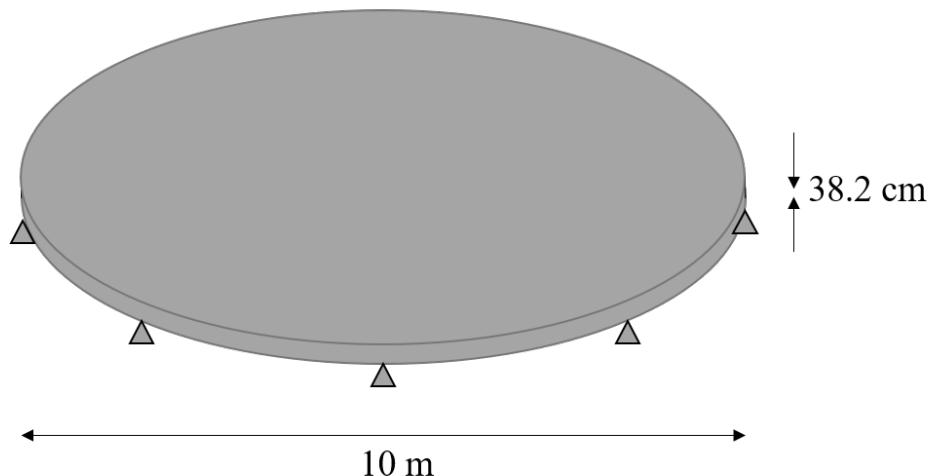


圖 3.4: [例題一] 起始形狀示意圖



圖 3.5: Restaurante Submarino 結構攝影圖

本研究首先比較不同控制點擺放方式之影響，將圓版的半徑劃分成 20 個網格，圓周劃分成 128 個網格，共 2560 個元素，網格劃分示意圖如下圖 3.6。使用 160 個控制點以建構整個薄殼結構之幾何形狀，由於該結構的 1/16 對稱之特性，僅需以 1/16 圓之扇形區域的控制點高程座標作為設計變數，即可清楚描述結構外型之曲面。

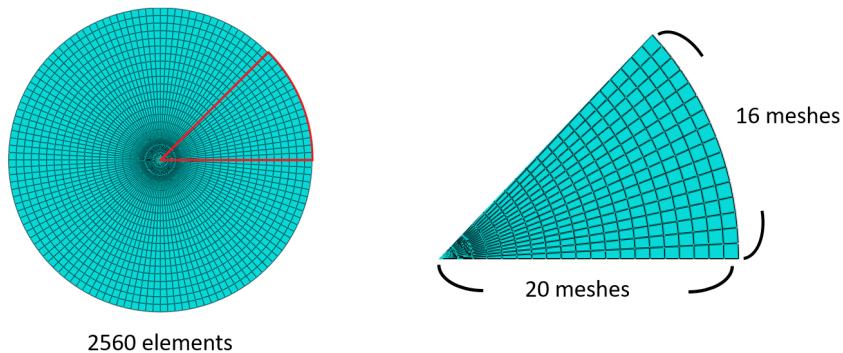


圖 3.6: [例題一] 初始網格示意圖

選擇了三組不同的控制點擺放方式，控制點示意圖如圖 3.7。圖 3.7 中由上到下依序為第一、第二、第三組控制點擺放方式，僅畫出 1/8 對稱之控制點位置，紅色控制點為鉸支承處；藍色控制點為形狀最佳化演算法所調整高程座標之對象，換句話說，藍色控制點的高程座標為設計變數；黑色控制點則為剩餘控制點，由藍色控制點根據 1/16 對稱的特性所控制。第一組控制點有 15 個設計變數，採用連續取半徑中間點之方式擺放；第二組一樣是 15 個設計變數，採較為均勻之方式擺放；第三組擺放方式則是考慮到第二組最內圈的控制點彼此相距過近，因此改成僅由 12 個設計變數控制，不再將圓心之控制點高程作為設計變數，最內圈也由原先的 3 個設計變數縮減為 1 個，其餘控制點擺放方式同第二組，由於圓心的高程座標不再是設計變數，靠近圓中心區域的高程改以周圍加權平均而得。

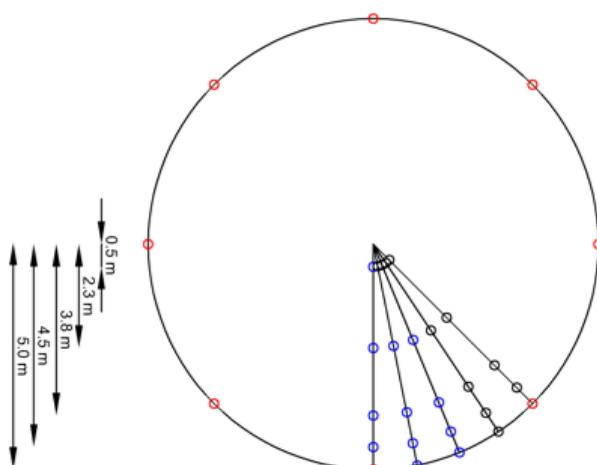
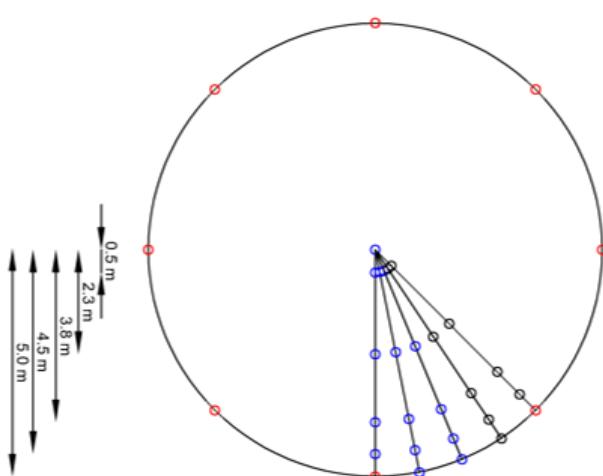
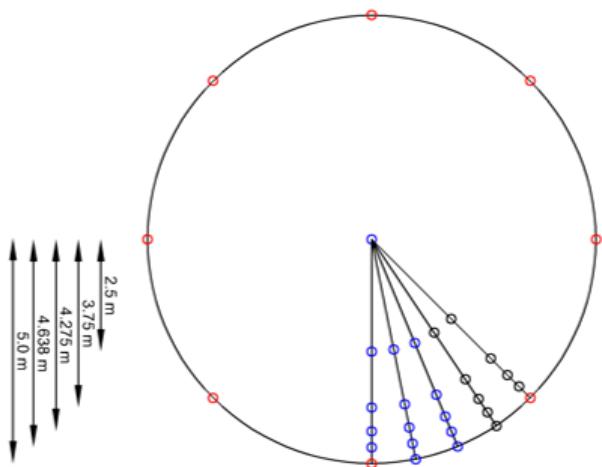


圖 3.7: [例題一] 控制點擺放方式示意圖

NURBS 曲面之  $u$  向  $p$  階與  $v$  向  $q$  階選擇三階曲線。由於本例題屬於點支承，因此支承處附近容易產生應力集中現象，為提升網格品質與分析準確性，本研究參考孫鈺翔 (2021) 所提出之 NURBS 網格生成法，藉由選擇適當的 NURBS 二元節點向量，細化支承附近的網格。此外，不同的控制點擺放方式也會影響網格的分布，下圖 3.8 為例題一起始形狀之網格示意圖，左邊為第一組控制點對應到之網格分布，右邊則為第二、第三組控制點所對應之網格分布，觀察圖片可以發現：兩者靠近邊界的網格分布皆比較細緻，靠近中心點之網格則較為粗糙，目的是能更有效率的配置元素；相互比較之下，第一組控制點對應之網格分布在邊界處更為細緻，這是受到控制點擺放位置影響，第一組控制點普遍更靠近邊界所致。

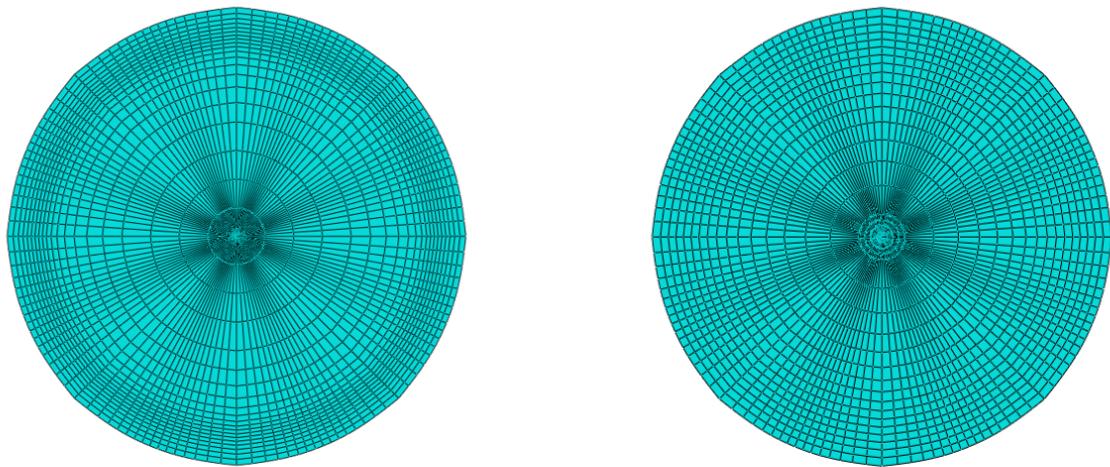


圖 3.8: [例題一] 不同控制點對應之網格分布

僅考慮材料自重的情況下，分別將這三組結構進行形狀最佳化，總體積固定為 30 立方公尺。初始形狀與最佳化形狀之分析結果分別如表 3.1、表 3.2 所示，由左到右分別為第一、第二、第三組控制點之對應結果。首先觀察表 3.1 起始形狀之分析結果，由於第二、第三組控制點在 ABAQUS 的建模方式相同，因此數據一樣；而第一組控制點則因為不同的網格分布，造成分析結果的些微不同，兩者之間的誤差不到 0.1%，故不太會影響結果，同時也可以相互驗證該建模的正確性。表 3.2 結果顯示，相比於原始的平面圓型薄版，經過最佳化演算法迭代出最佳形狀後的薄殼之目標函數降低了約 96%，該結構的最大位移也從原先的 2.5 毫米降至約 0.07 毫米。

三組不同控制點進行形狀最佳化後，收斂成類似的幾何形狀。其中第二組之目標函數最低，相較第三組之分析結果低了約 1.5%，這結果是可以預期的，因為第二組和第三組唯一的差別在於它的自由程度更高，因此能執行出更多的可能性；第二組比第一組低了約 1.4%，推測主要原因為：第一組的控制點分布過於集中在靠建邊界處，導致了結構中央部分的形狀變化自由度略低。三者既能收斂成類似的幾何形狀，目標函數的最大差異也僅為 1.5%，顯示了這些 NURBS 的參數雖然能影響結構最佳化後的形狀與數據，只要設定的參數數值在合理範圍內，最佳化結果對於此類參數之設定並不敏感。

表 3.1: [例題一] 初始形狀分析結果

Case 1	CP 1-1	CP 1-2	CP 1-3
Figure			
Degree	3	3	3
Variable	15	15	12
$V$ ( $\text{m}^3$ )	30	30	30
$C$ ( $\text{N} \times \text{m}$ )	902.56	901.68	901.68
$CV$ ( $\text{N} \times \text{m}^4$ )	27076.94	27050.66	27050.66
$u_{\max}$ (m)	0.0025	0.0025	0.0025
$u_{\text{ave}}$ (m)	0.0010	0.0014	0.0014

表 3.2: [例題一] 最佳化形狀分析結果

Case 1	CP 1-1	CP 1-2	CP 1-3
Figure			
Degree	3	3	3
Variable	15	15	12
$V (\text{m}^3)$	30	30	30
$C (\text{N} \times \text{m})$	34.40	33.90	34.42
$CV (\text{N} \times \text{m}^4)$	1031.70	1016.98	1032.52
$u_{\max} (\text{m})$	$7.271 \times 10^{-5}$	$6.857 \times 10^{-5}$	$6.215 \times 10^{-5}$
$u_{\text{ave}} (\text{m})$	$4.617 \times 10^{-5}$	$5.173 \times 10^{-5}$	$5.087 \times 10^{-5}$

### 3.3.2 不同控制點及元素數量之最佳化結果

本研究下一步為探討不同的控制點數量以及網格密度對應之形狀最佳化結果，使用一大跨度之圓形薄殼結構(例題二)作為範例。圖 3.9 為該結構起始形狀之示意圖，其跨度為 110 公尺，初始厚度為 1.14 公尺，總體積為 10803 立方公尺；圓版四周由八個鉸支承束制；材料性質同例題一：楊氏模數為 30 GPa、柏松比為 0.3、密度為 2500 公斤/每立方公尺。首先固定元素數量為 16000，以兩組不同數量之控制點擺放方式進行比較，如圖 3.10。左、右圖分別為第一組、第二組控制點擺放方式。第一組總共有 160 個控制點(每 1/8 圓之扇形區域擁有 25 個控制點)，參考例題一之第三組控制點擺放方式，圖中的 12 個藍色控制點高程座標為設計變數；第二組則將控制點數量提升為 256 個(每 1/8 圓之扇形區域擁有 40 個控制點)，共 21 個設計變數。在考慮自重的情況下分別對兩組不同控制點數量之模型進行形狀最佳化，固定總體積，最佳化前後之分析如表 3.3、表 3.4 所示。觀察最佳化後兩者之目標函數差異，誤差為 1.2%，不需使用過多的控制點即可以達到近似的結構勁度以及幾何形狀。考慮到設計變數的數量與運算成本為正相關，取第一組控制點，12 個設計變數進行網格劃分的收斂性分析探討。

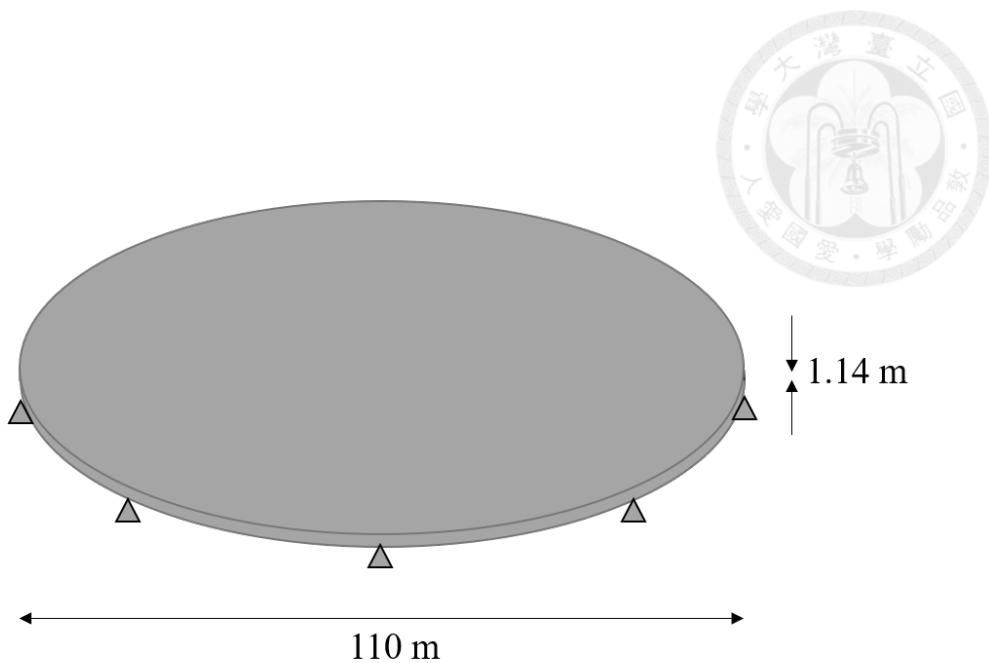


圖 3.9: [例題二] 起始形狀示意圖

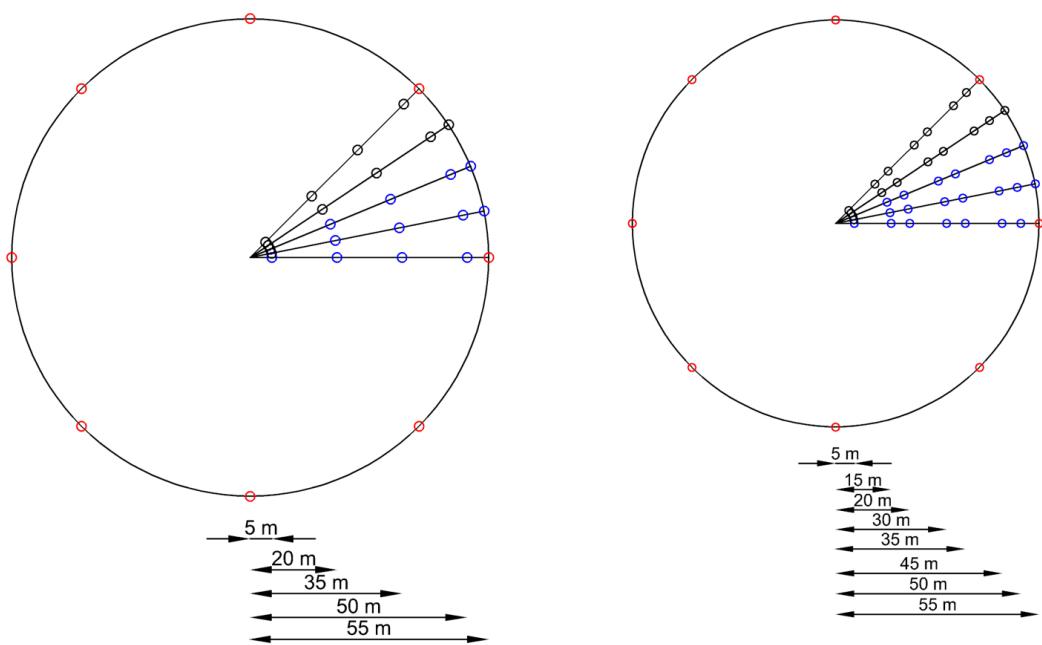


圖 3.10: [例題二] 控制點擺放方式示意圖

表 3.3: [例題二] 不同控制點數量之初始形狀分析結果

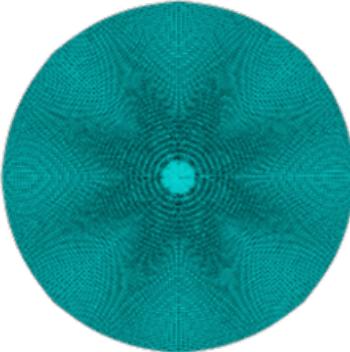
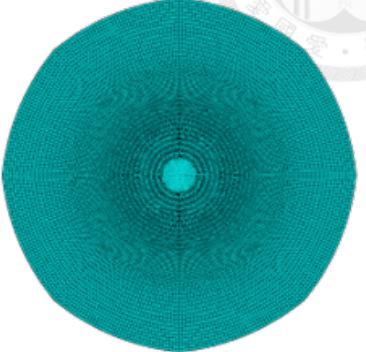
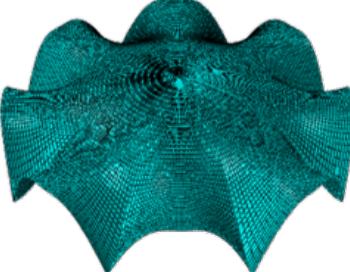
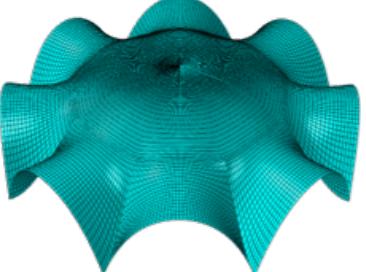
Case 2	CP 2-1	CP 2-2
Figure		
Variable	12	21
$V$ ( $\text{m}^3$ )	10803	10803
$C$ ( $\text{N} \times \text{m}$ )	$1.028 \times 10^9$	$1.023 \times 10^9$
$CV$ ( $\text{N} \times \text{m}^4$ )	$1.111 \times 10^{13}$	$1.105 \times 10^{13}$
$u_{\max}$ (m)	5.71	5.62
$u_{\text{ave}}$ (m)	3.58	3.70

表 3.4: [例題二] 不同控制點數量之形狀最佳化結果

Case 2	CP 2-1	CP 2-2
Figure		
Variable	12	21
$V$ ( $\text{m}^3$ )	10803	10803
$C$ ( $\text{N} \times \text{m}$ )	$3.491 \times 10^6$	$3.449 \times 10^6$
$CV$ ( $\text{N} \times \text{m}^4$ )	$3.772 \times 10^{10}$	$3.726 \times 10^{10}$
$u_{\max}$ (m)	0.013	0.013
$u_{\text{ave}}$ (m)	0.011	0.011

於 ABAQUS 建立初始模型時，以不同網格密集程度進行劃分，劃分成 2560、10240、16000、以及 41472 個元素，於自重的情況下分別進行形狀最佳化以探討不同元素數量之收斂性。結果如表 3.5。觀察表 3.5 可以得知，四種不同元素數量的曲面都會收斂至相似的幾何形狀，並且隨著網格的細緻度提高，元素量較多時，該例題的結構順從度會略微上升，主要原因為：網格粗糙時，較難處理複雜的應力傳遞，會造成勁度的高估。換句話說，網格劃分得越密集，勁度分析結果會越準確，但也會花費更多的運算成本。圖 3.11 為不同元素數量對應之目標函數整理，可以觀察到元素數量與目標函數呈現正相關，不過隨著元素數量增多，目標函數變化幅度縮減，逐漸收斂。劃分成 10240 元素之模型與劃分成 41472 元素的模型相比，誤差僅為 1.7%。根據上述分析結果，本研究的網格劃分密集程度採用中間值，不過於粗糙或者精緻，使分析具可靠性的同時也兼顧運算的成本。

表 3.5: [例題二] 不同元素數量之最佳化形狀結果

Case 2	2560 Elements	10240 Elements	16000 Elements	41472 Elements
Figure				
$V$ (m <sup>3</sup> )	10803	10803	10803	10803
$C$ (N × m)	$3.307 \times 10^6$	$3.473 \times 10^6$	$3.491 \times 10^6$	$3.533 \times 10^6$
$CV$ (N × m <sup>4</sup> )	$3.572 \times 10^{10}$	$3.752 \times 10^{10}$	$3.772 \times 10^{10}$	$3.816 \times 10^{10}$
$u_{\max}$ (m)	0.013	0.013	0.013	0.013
$u_{\text{ave}}$ (m)	0.0010	0.010	0.011	0.011

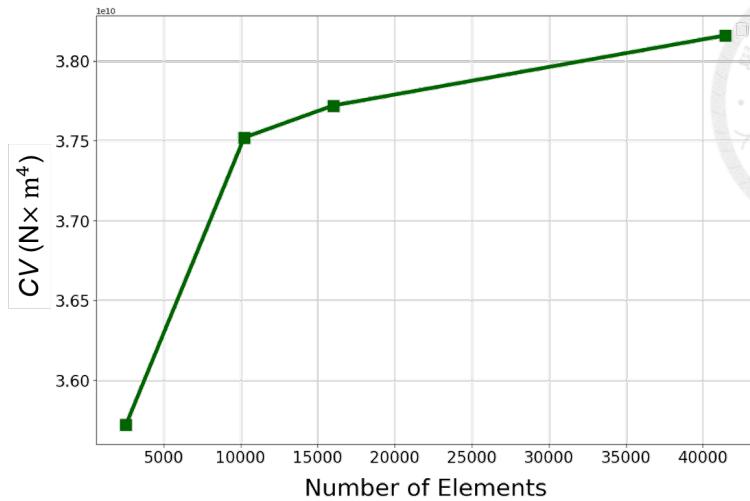


圖 3.11: [例題二] 目標函數收斂圖

### 3.4 小結

本章節首先介紹了本研究設計之薄殼結構最佳化流程前半段步驟之程式架構，分為模型建構以及形狀最佳化方法。章節 3.3.1 展示了不同 NURBS 參數數值對於最佳化結果之差異，著重於控制點擺放方式，不同的結構適合不同的參數設計，只要這些參數數值位於合理範圍內，對於最佳化結果造成的誤差不大。章節 3.3.2 則探討了不同控制點數量與網格密度對於分析結果之影響，雖然控制點數量越多，能給予幾何曲面更為自由的變化；網格劃分越精細，分析結果越為準確，但適量的控制點以及元素數量即可以達到近似的結果以及分析的準確性，同時節省大量的運算成本。





## 第四章 加勁梁之最佳設計

### 4.1 前言

此章將會詳細介紹薄殼結構最佳化主要流程之後半段內容，如圖 4.1 所示，包含了主應力線生成、加勁梁設計、選擇，以及整體結構之尺寸最佳化。透過一投影形狀為方形之薄殼結構例題作為參考範例，探討加勁梁的配置對於整體結構的最佳化結果所帶來之提升。

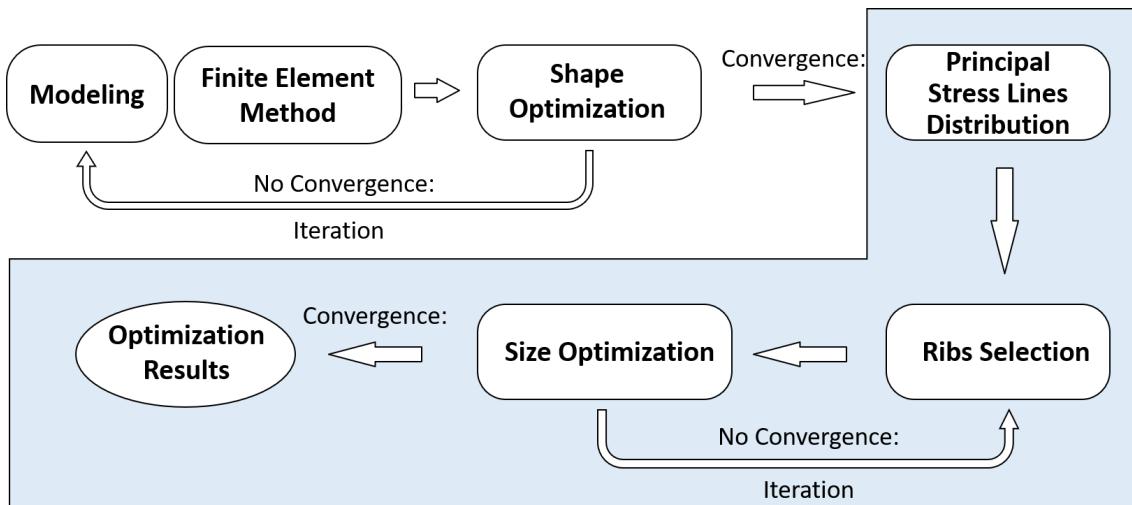


圖 4.1: 薄殼結構最佳化流程圖



## 4.2 加勁梁生成流程

本研究選擇以薄殼之主應力線方向作為加勁梁的分布依據，結合 ABAQUS 分析之結果以及於 Python 端進行之後處理，描繪出薄殼的主應力線並且建構成為加勁梁。

### 4.2.1 主應力線之繪製

薄殼結構物透過形狀最佳化設計調整成結構順從度最低的形狀後，以最佳形狀在自重的情況下進行有限元素分析，得到薄殼各元素節點的各層應力分布，ABAQUS 預設之殼元素層數為三層，分別為最外層（上層）、中層、以及內層（下層），參考本研究團隊孫鈺翔（2021）之研究結果，選擇殼元素中層的應力進行後續處理。依照章節 2.4 介紹之方式，由 Python 端依序進行特徵值分析、離散向量內插、與 RK4 數值積分等後處理，得到薄殼元素的主應力線，主應力線繪製之主要程式架構如圖 4.2，值得注意的是，主應力線的數量是由使用者所決定，為了能在後續步驟中找到最佳的配置，本研究於此步驟描繪出大量且密集的主應力線。

### 4.2.2 加勁梁之建構

得到密集且大量的主應力線的分布之後，透過 ABAQUS 的 Wire 功能，沿著主應力線分布建立新的零件（Part），即為加勁梁結構體，選用元素為 B31(2-Node-First-Order Beam Element)，並透過該軟體的交互關係（Intersection）模組中的 Tie Constraint 指令將其與結構之外殼結合。考慮到實用性以及施工可行性，選擇將其加勁於薄殼之表面下方，參考圖 4.3 所示，至此已將全部沿主應力線方向之加勁梁建構於薄殼之下。

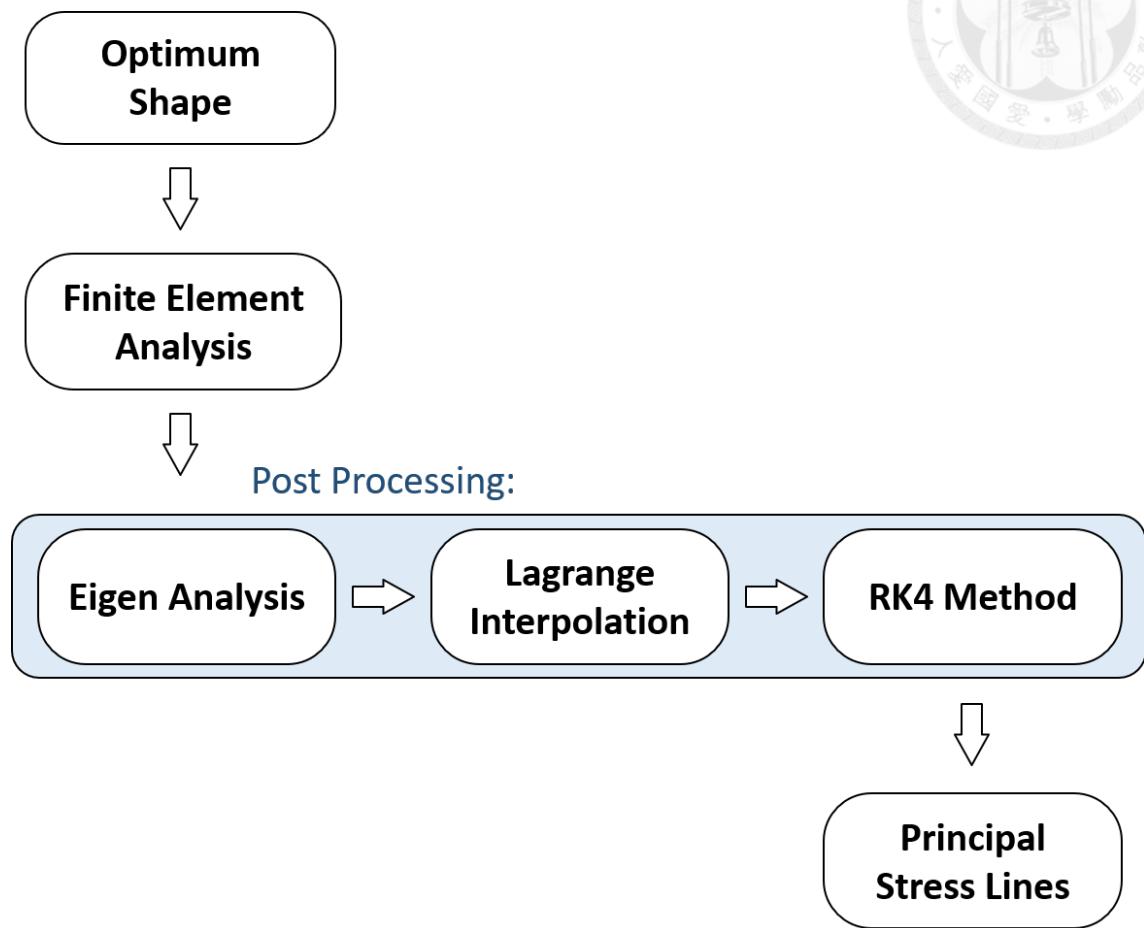


圖 4.2: 主應力線生成之程式架構示意圖

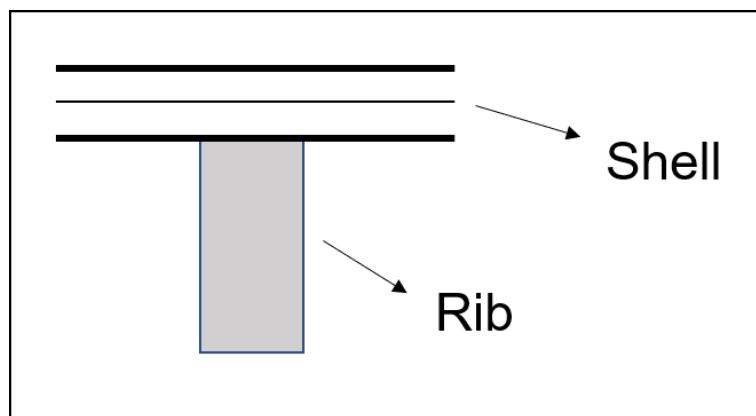


圖 4.3: 薄殼與加勁梁之示意圖



## 4.3 加勁梁設計流程

延續前面小節 4.2.1 以及 4.2.2，為了能找到最佳的配置，本研究事先描繪出大量且密集的主應力線，並且沿著全部主應力線進行加勁梁之建構。下一步驟為加勁梁最佳化設計，包括了加勁梁的數量、選擇、以及整體結構(含薄殼與加勁梁)之尺寸最佳化，目標函數為結構順從度乘以總體積，於固定體積之下選擇具有最低目標函數之加勁梁組合以及結構尺寸。由於加勁梁彼此之間的搭配組合眾多且不同的搭配會對應不同的最佳化尺寸，窮舉出所有可能性並且分別進行尺寸最佳化是不切實際的。為求出最佳設計，本研究選擇以基因演算法進行全域搜尋，首先挑選出數組加勁梁配置並且對其進行整體結構的尺寸最佳化，再依據這些配置的尺寸最佳化後之結果進行基因演算法之演化、迭代，逐步找出整體結構的最佳設計。

### 4.3.1 加勁梁之選擇

透過章節 2.7.1 介紹之基因演算法，對加勁梁進行配置最佳化。所使用之基因演算法各項參數意義參考圖 4.4，每一串由 1 與 0 所構成之二進制數列(即為染色體)代表著一組加勁梁之配置，染色體中的每一個 0 與 1 字元(即為基因)，代表著該編號的加勁梁是否保留。圖 4.4 為例，該族群一共有四根染色體，每一根染色體由六個基因構成，代表著這一次的迭代內，共進行了 4 次加勁梁的配置，在六組梁 (#1~#6) 之中進行搭配選擇，Case 1 捨棄了所有的加勁梁、Case 2 保留了所有的加勁梁、Case 3 則是選擇了 #1、#2、以及 #6 加勁梁進行搭配，以此類推。

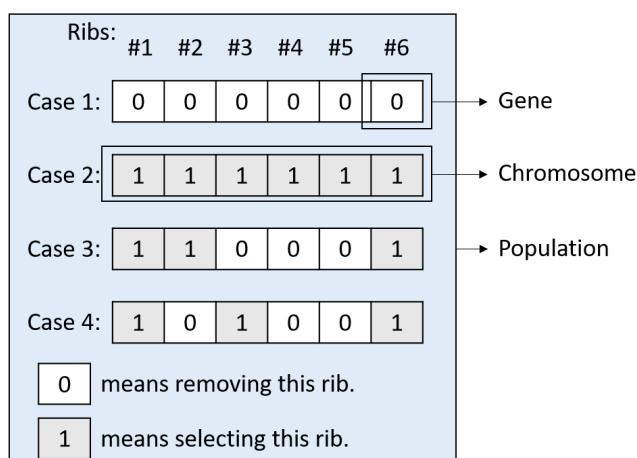


圖 4.4: 基因演算法之參數示意圖

本研究之基因演算法流程圖如圖 4.5，由於沿主應力線分布所生成之加勁梁數量眾多，若不事先設立選擇的依據，則如大海撈針，難以找到最佳配置。因此，在初次迭代的模型配置選擇上，輔以輪盤法 (Roulette Wheel Selection) 之概念 (如圖 4.6，其概念為：結果越佳者，越容易被選到)，訂定出選擇的機率標準：單位體積分配到越多應變能之加勁梁，視為高貢獻度，有較高的機率在第一輪迭代中被選上。首先對該完整結構 (包含薄殼與全部的加勁梁) 進行第一次分析，讀取每一組加勁梁之單位體積所分配到之應變能，作為決定該加勁梁於首輪被選用之機率的依據，以式 (4.1) 表達。其中  $i$  為對應之加勁梁編號， $C_i$  表示該梁的貢獻度 (Contribution)， $P_i$  則代表著該梁於首輪被選用之機率。

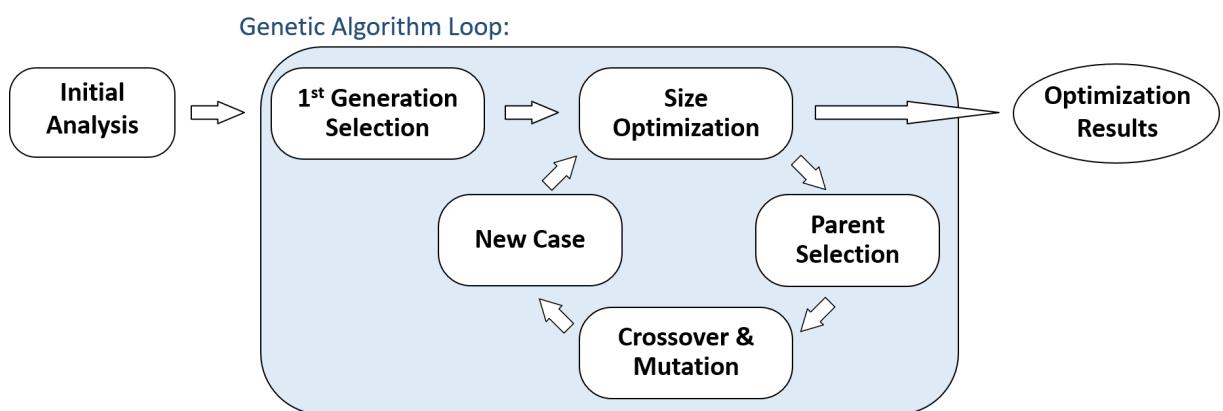


圖 4.5: 以基因演算法進行加勁梁設計之流程圖

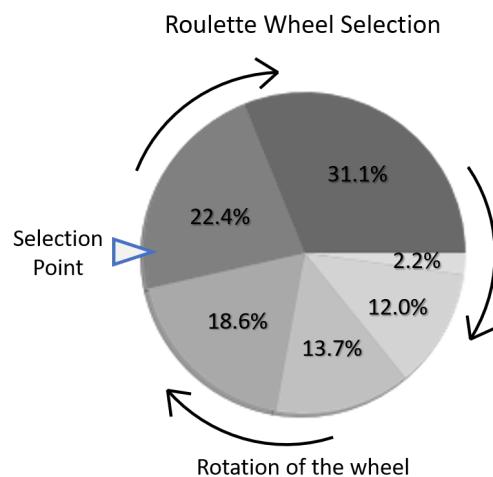


圖 4.6: 輪盤法示意圖

$$P_i = \frac{C_i}{C_{Total}}, \quad \text{where } C_i = \frac{\text{Energy}_i}{\text{Volume}_i} \quad (4.1)$$

取得各加勁梁被選上之機率後，即可以根據設定的族群 (Population) 大小執行首輪迭代，分別對於不同加勁梁配置之模型進行尺寸最佳化，並且以各組模型對應之結果 (稱為計算適應度，Fitness) 作為下一輪迭代之父代選擇依據，同樣透過輪盤法，目標函數越低者越容易被選為父代，以式 (4.2) 表示，式中  $j$  為該次迭代中第  $j$  組加勁梁配置之模型， $C_j \times V$  代表該模型經過尺寸最佳化後之計算適應度 (結構順從度乘以體積)， $n$  為族群大小， $P_j$  則代表該模型被選為下一次迭代中父代的機率。接著進行基因演算法之核心步驟：交配 (Crossover) 與突變 (Mutation)，過程如圖 4.7 所示。透過 Crossover 與 Mutation，配對出全新的加勁梁組合，也就是子代，再對子代進行下一輪的尺寸最佳化。重複執行上述步驟直到達成設定的步數，並從中選出最佳的加勁梁配置與整體尺寸設計。

$$P_j = \frac{\left(\frac{1}{C_j \times V}\right)^2}{\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{C_j \times V}\right)^2} \quad (4.2)$$

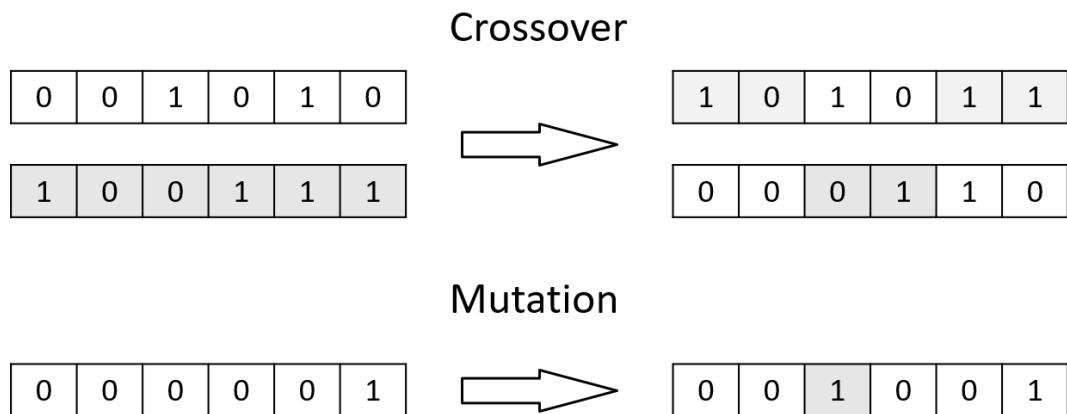


圖 4.7: Crossover 以及 Mutation 之示意圖



### 4.3.2 尺寸最佳化

本研究的尺寸最佳化步驟位於基因演算法的迭代迴圈之中(參考圖 4.5)，由於尺寸變化同形狀變化，皆屬於連續的變化，適合梯度類型之最佳化演算法，故選擇之演算法為章節 2.7.2 中所介紹之序列最小二乘規劃法(SLSQP)。設計變數為薄殼與每一組加勁梁獨立之斷面尺寸，參考圖 4.8。考慮到當設計變數太多時，會大幅提高運算成本，所以固定梁的長寬比值為 2，如式(4.3)；由於總體積固定且已選定加勁梁之組合，可以由總體積扣除加勁梁之體積後除以表面積以求得薄殼之厚度，如式(4.4)，將設計變數縮減為各個加勁梁之梁深扣除殼厚(圖 4.8 中之  $h'$ )；換句話說，設計變數之數量即為加勁梁之組數。考量到若使用所有載重組合的分析結果作為目標函數將會過於耗時，外加經驗上幾乎都是由僅有自重之載重情形進行控制，因此本研究選擇以僅考慮自重之情形進行有限元素分析得到的結構順從度乘以體積作為最佳化之目標函數，並且在演算法中加入限制，每次尺寸最佳化的迭代過程都會檢核所有載重組合之情形。需檢核的限制式可分為：結構尺寸限制、材料強度限制、位移限制、以及彈性挫屈限制，由於本例題並無加入法規限制，於章節 5 之實際案例設計中詳細介紹。

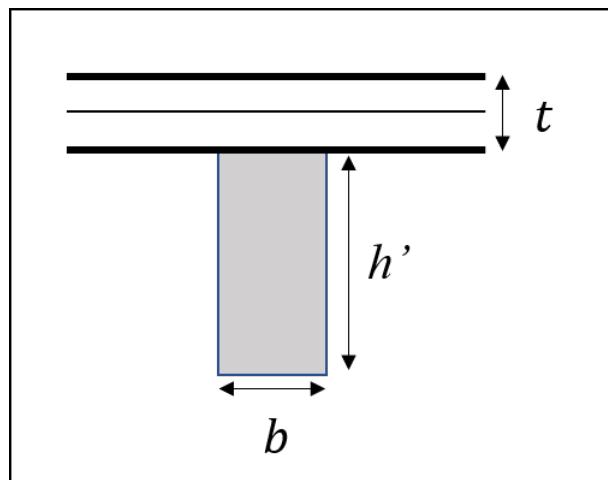


圖 4.8: 設計變數(斷面尺寸)示意圖

$$b = \frac{h'}{2} \quad (4.3)$$

$$t = \frac{V_{\text{total}} - V_{\text{ribs}}}{A_{\text{shell}}} \quad (4.4)$$



## 4.4 案例探討

本章節選用一起始形狀為方形之薄殼結構作為範例，展示本研究建議的薄殼結構設計流程後半段之成果，並且探討不同的加勁梁數量以及選擇機制對於設計結果之影響。

### 4.4.1 模型建構

方形案例(例題三)初始結構示意圖如圖 4.9，邊長 100 公尺之正方形平板，版厚為 60 公分，總體積為 6000 立方公尺；四個角落由鉸支承 (Pin Support) 束制；其材料性質：楊氏模數 (Young's Modulus) 為 30 GPa、柏松比 (Poisson's Ratio) 為 0.3、密度為 2500 公斤/每立方公尺。

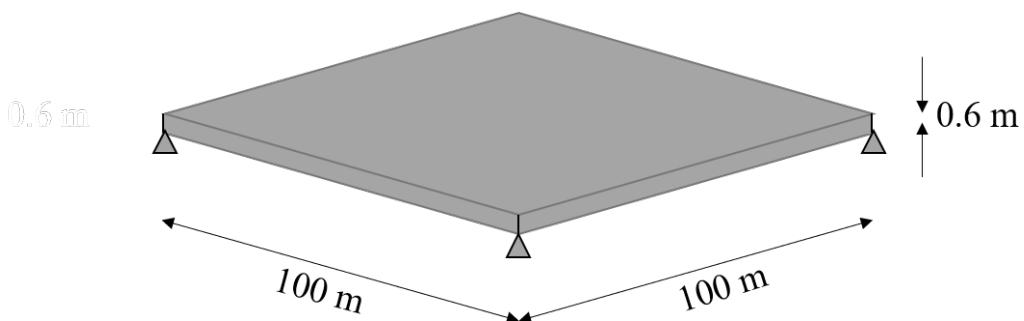


圖 4.9: [例題三] 起始形狀示意圖

首先對例題三進行章節 3 介紹之形狀最佳化，根據該章節之結論，將例題三的元素數量設定為 1600 個。控制點的擺放方式如圖 4.10，控制點數量共 64 個，其中 9 個控制點之高程座標為設計變數。紅色控制點為鉸支承處；藍色控制點之高程座標為設計變數；黑色控制點則是由藍色控制點根據 1/8 對稱的特性所控制；擺放位置則參考孫鈺翔 (2021) 的方形模型之控制點位探討，選擇收斂性最佳的連續取中點之擺放方式。形狀最佳化的條件同章節 3 的例題一、例題二，僅考慮自重情形，最佳化之限制式為總體積固定 (6000 立方公尺)。初始形狀與最佳化形狀之分析結果如表 3.1 所示，可以觀察到：透過形狀最佳化流程，目標函數大幅降低，僅為原先的 0.07%。

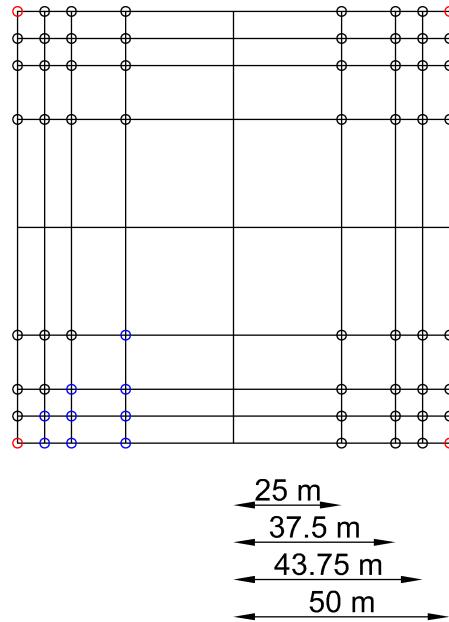


圖 4.10: [例題三] 控制點擺放示意圖

表 4.1: [例題三] 最佳化形狀分析結果

Case 3	Initial Shape	Optimum Shape
Figure		
$V$ ( $\text{m}^3$ )	6000	6000
$C$ ( $\text{N} \times \text{m}$ )	$6.716 \times 10^9$	$4.519 \times 10^6$
$CV$ ( $\text{N} \times \text{m}^4$ )	$4.030 \times 10^{13}$	$2.712 \times 10^{10}$
$u_{\max}$ (m)	63.20	0.038
$u_{\text{ave}}$ (m)	39.16	0.029

取得案例三之最佳化形狀後，即可以透過有限元素分析取得各節點的應力數值與方向，經由特徵值分析得到各節點的最大、最小主應力向量，如圖 4.11 所示，再經由拉格朗日內插法以及與 RK4 數值積分等方法，將各節點之主應力向量構成 33 組主應力線，如圖 4.12。透過章節 4.2.2 之方法，於薄殼之下表面建構出沿著主應力線分布的加勁梁，加勁梁之分布情形可以參考圖 4.13 所示。

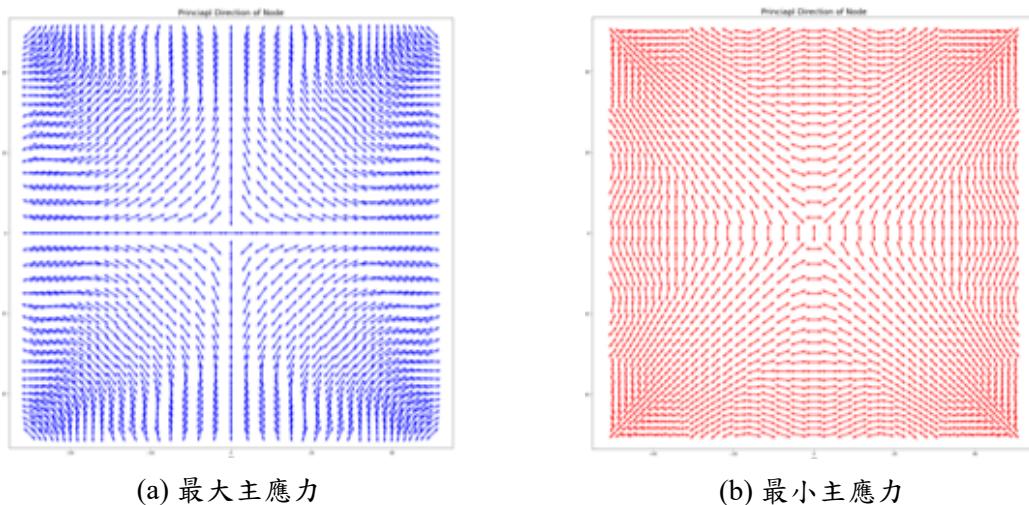


圖 4.11: [例題三] 各節點之主應力方向

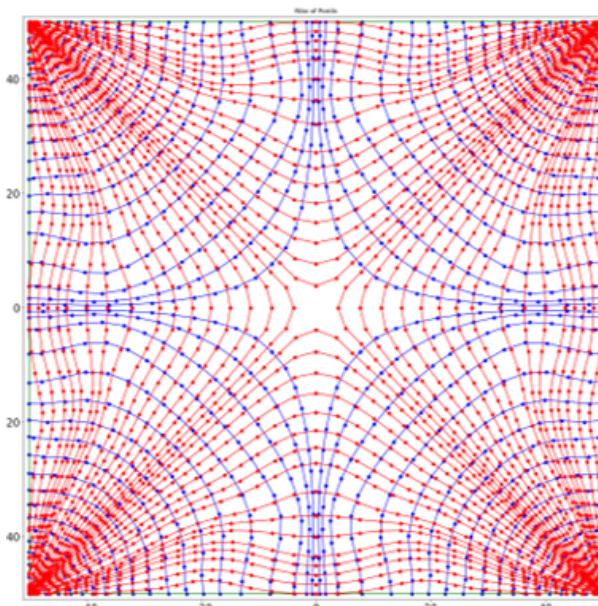


圖 4.12: [例題三] 主應力線示意圖

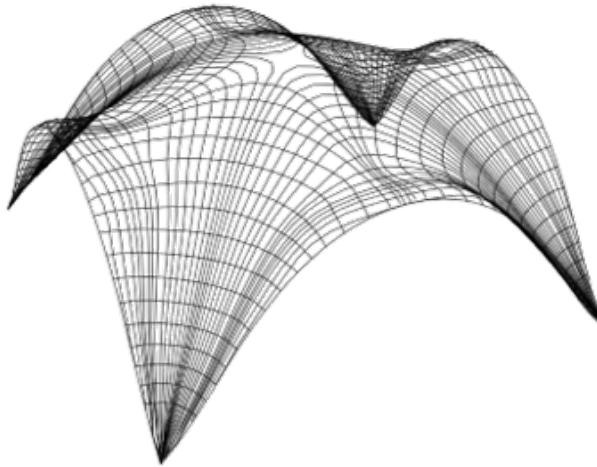
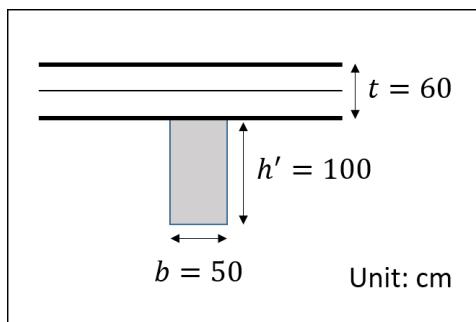


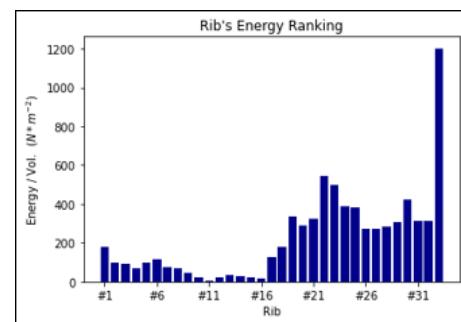
圖 4.13: [例題三] 加勁梁分布示意圖

#### 4.4.2 加勁梁設計

建構完 33 組加勁梁後，下一步驟為加勁梁的選擇以及整體結構的最佳化。首先給定該結構一初始斷面尺寸(殼厚 60 公分，梁深扣除殼厚 100 公分，梁寬 50 公分)並且藉由有限元素分析得到每一組加勁梁的貢獻度(單位體積之應變能)，如圖 4.14，其中貢獻度最高者是位處結構邊界之加勁梁。



(a) 初始斷面體積



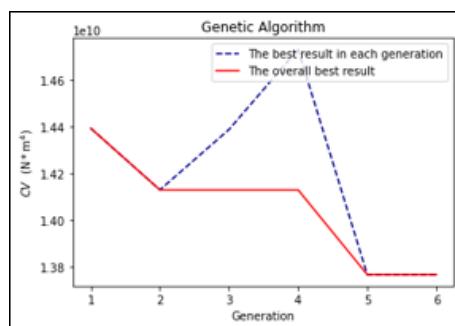
(b) 初始加勁梁之貢獻度

圖 4.14: [例題三] 加勁梁之貢獻度分析結果

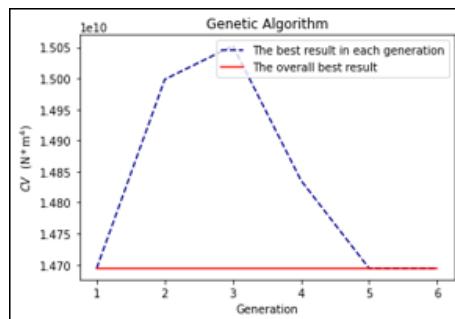
得到貢獻度之後，即可依章節 4.3.1 所介紹之流程，於固定總體積為 6000 立方公尺之限制下進行加勁梁組合挑選。若同時考慮所有數量的加勁梁之組合情況，共有  $2^{33}$  種排列組合，明顯過多，難以達到收斂，加上考量到施工的可行性，故本研究分別將加勁梁的數量設定為：5 組、7 組、以及 9 組，探討不同數量之加勁梁經作最佳設計後之結果差異。基因演算法的參數設定如下：族群大小為 10；總迭代次數為 6；交換率 (Crossover Rate) 定為 0.8；突變率 (Mutation Rate) 定為 0.2；同時為了避免過早收斂，在選擇父代時額外增加一限制：兩個親代不能來自於同

一條染色體。此外，考慮到實用性與施工可行性，給予該結構之斷面尺寸限制：薄殼之厚度需大於 10 公分、以及設計變數(各梁深扣除殼厚的長度， $h'$ )的最小容忍值為 50 公分。

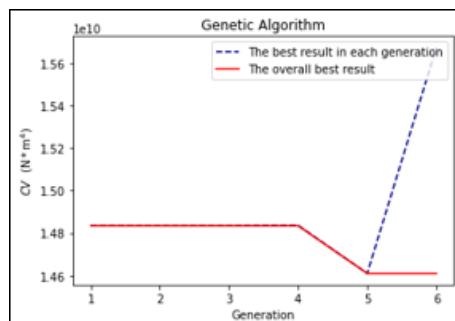
加勁梁的篩選以及尺寸最佳化迭代過程如圖 4.15 所示，其中藍色虛線為每一輪迭代中的最佳解，紅色實線則為整體的最佳結果。透過折線圖可以觀察到：除了 7 組加勁梁的最佳結果出現於第一輪迭代，其餘兩組的結果都有逐漸變更好的趨勢，代表本研究之基因演算法應用具有足夠的可靠度。



(a) 5 組加勁梁之迭代



(b) 7 組加勁梁之迭代

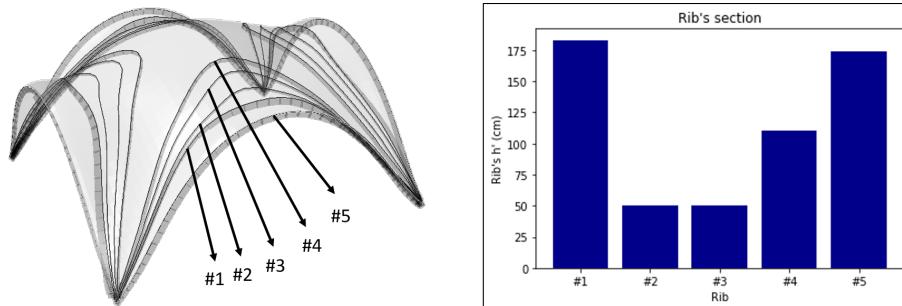


(c) 9 組加勁梁之迭代

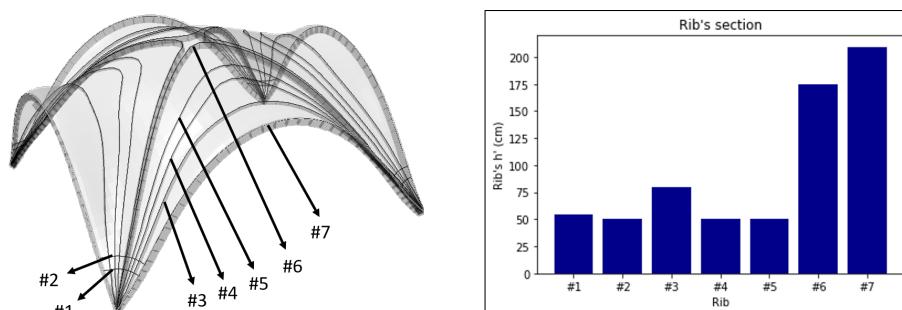
圖 4.15: [例題三] 加勁梁篩選及尺寸最佳化迭代圖



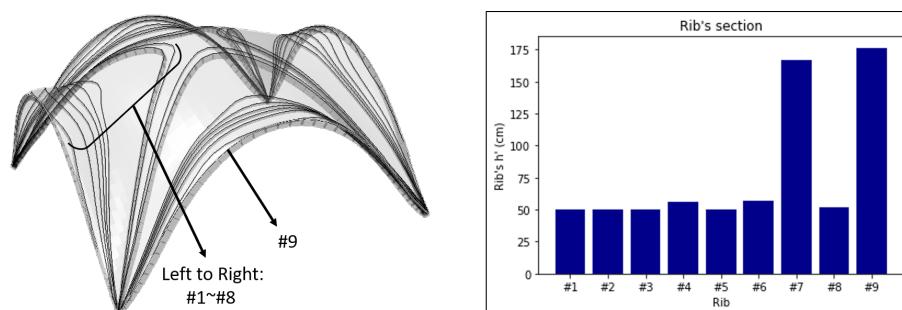
圖 4.16(a)、(b)、(c) 分別為 5 組、7 組、9 組加勁梁數量之最佳化設計結果，左圖為選取到的加勁梁組合，右圖為該組合的加勁梁最佳尺寸配置。三組對應之結果詳列於表 4.2。



(a) 5 組加勁梁之最加設計



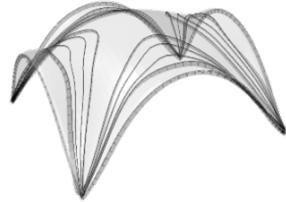
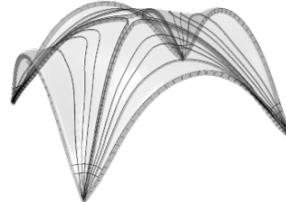
(b) 7 組加勁梁之最加設計



(c) 9 組加勁梁之最加設計

圖 4.16: [例題三] 不同數量之加勁梁最佳設計

表 4.2: [例題三] 不同數量之加勁梁最佳化結果比較

Case 3	Number of Ribs = 5	Number of Ribs = 7	Number of Ribs = 9
Figure			
$t_{\text{shell}}$ (cm)	30.56	27.75	30.31
$V_{\text{shell}}$ ( $\text{m}^3$ )	3726	3384	3696
$V_{\text{ribs}}$ ( $\text{m}^3$ )	2274	2616	2304
$V_{\text{total}}$ ( $\text{m}^3$ )	6000	6000	6000
$C$ ( $\text{N} \times \text{m}$ )	$2.294 \times 10^6$	$2.449 \times 10^6$	$2.435 \times 10^6$
$CV$ ( $\text{N} \times \text{m}^4$ )	$1.376 \times 10^{10}$	$1.469 \times 10^{10}$	$1.461 \times 10^{10}$
$u_{\max}$ (m)	0.045	0.036	0.033
$u_{\text{ave}}$ (m)	0.019	0.018	0.019

觀察表 4.2 之數據，例題三透過基因演算法以及尺寸最佳化之設計流程後，於同樣的體積下，其目標函數比起形狀最佳化之純薄殼結構（表 4.1）低了將近 50%。對比三組不同加勁梁數目之最佳化結果，當加勁梁的數量為 5 組時，對應之目標函數最低，低了另外兩組約 6%。考量到若加勁梁的分布過於稀疏，不利於視覺上的平衡，因此本研究不考慮更低數量的加勁梁配置，選擇以五組作為後續所有案例的加勁梁數量。此外，讀取迭代過程中每一次的分析數據後，得知邊界的加勁梁對於提升結構的勁度極為重要，因此本研究於後續的案例分析中，額外加入一限制：選擇加勁梁時，位於邊界之加勁梁固定會被選到。

由表 4.2 以及圖 4.16(a) 可以注意到：雖然此由五組加勁梁所加勁的薄殼結構擁有最低的目標函數，但其加勁梁之分布過於密集，不論是就實務或是美觀上皆較為不利。因此本研究於最佳化設計的過程中額外加入兩個限制：不能同時選到相鄰的兩組加勁梁、以及根據該結構物的形狀與跨度，事先劃分好區域，每個區域至多只能選到一組加勁梁。圖 4.17 為例題三之區域劃分示意圖，該結構之跨度為 100 公尺，加勁梁數量為 5 組，將跨度之一半劃分為 5 個區域，以梁之中間點位置作為評斷標準，每個區間最多只能選擇一加勁梁。圖 4.18(a)、(b) 分別為符合區間選擇限制與否之範例圖。

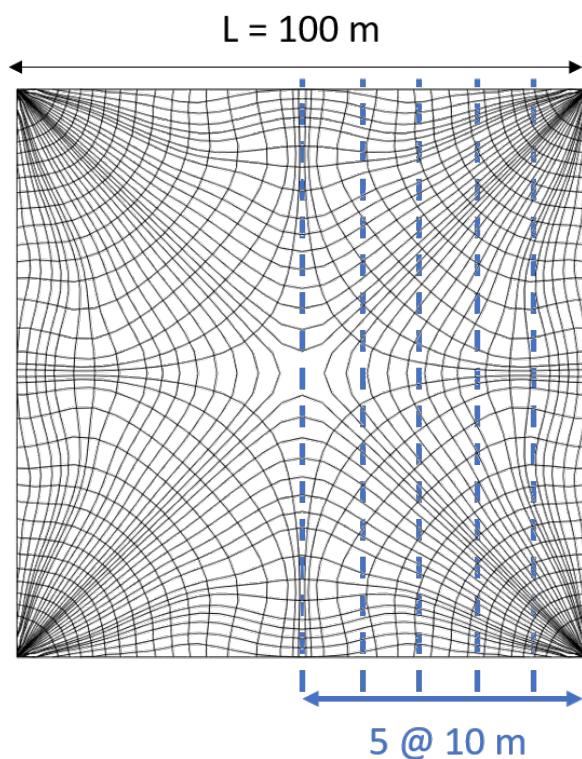
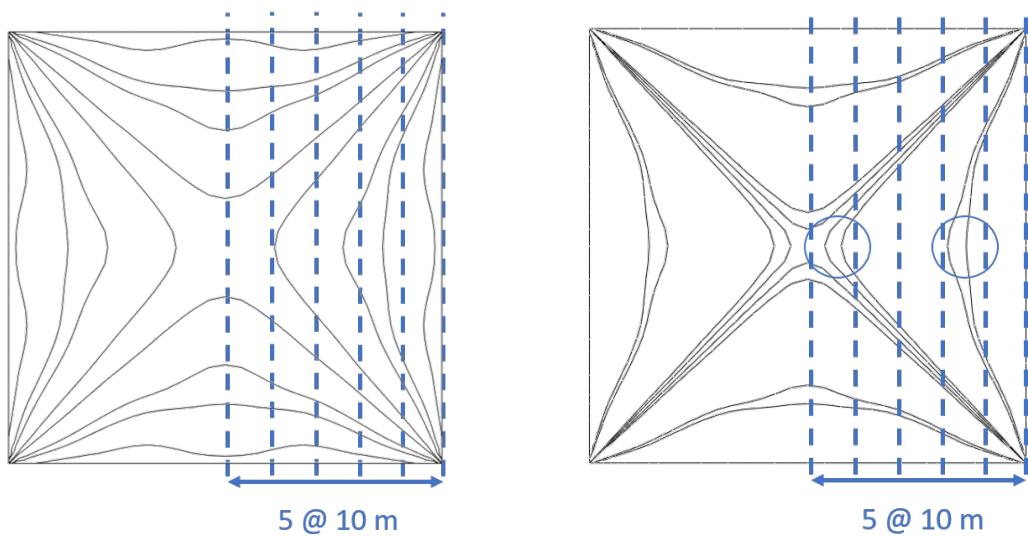


圖 4.17: [例題三] 加勁梁之區間選擇之限制示意圖



(a) 符合限制之範例

(b) 不符合限制之範例

圖 4.18: [例題三] 區間選擇限制範例圖

加入上述額外之限制，再次對例題三進行最佳化設計。加勁梁選擇以及尺寸最佳化設計結果如圖 4.19。比較增加限制前後之最佳化設計，如表 4.3 所示，加入區間選擇限制式後，目標函數比沒限制時高出約 6%，最大位移少了 9 毫米。考慮到視覺的平衡性與施工的可行性，本研究選擇以加入區間選擇限制之最佳化設計結果作為本案例之最佳設計。

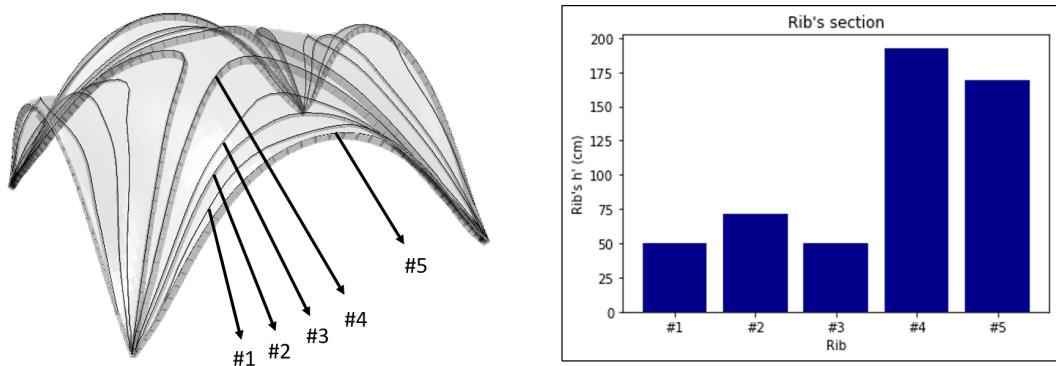


圖 4.19: [例題三] 增加新限制之 5 組加勁梁最佳化設計

表 4.3: [例題三] 區間選擇限制與否之最佳化設計比較

Case 3	Optimum Result (Lowest CV)	Optimum Design
Figure		
$t_{\text{shell}}$ (cm)	30.56	30.38
$V_{\text{shell}}$ ( $\text{m}^3$ )	3726	3704
$V_{\text{ribs}}$ ( $\text{m}^3$ )	2274	2296
$V_{\text{total}}$ ( $\text{m}^3$ )	6000	6000
$C$ ( $\text{N} \times \text{m}$ )	$2.294 \times 10^6$	$2.432 \times 10^6$
$CV$ ( $\text{N} \times \text{m}^4$ )	$1.376 \times 10^{10}$	$1.459 \times 10^{10}$
$u_{\max}$ (m)	0.045	0.036
$u_{\text{ave}}$ (m)	0.019	0.019



## 4.5 小結

本章節介紹了薄殼結構最佳化之設計流程後半段內容，著重於加勁梁組合的選擇以及其對應的尺寸最佳化，結合兩種最佳化演算法之特性，在近乎無窮的可能性之中設計出最佳的薄殼結構，兼顧結構之勁度、施工之可行性、以及視覺之美觀。搭配上章節 3 之最佳化設計前半段流程，提出一套標準化的自由曲面薄殼結構之構建以及最佳化設計之方法。





## 第五章 實際薄殼結構之最佳化設計

### 5.1 前言

現今世界已經存在許多以自由曲面作為外觀之薄殼結構，其建築物的用途廣泛，大至舉世聞名的歌劇院、萬人齊聚的球場，小至公車站的遮雨棚、河濱公園裡的裝置藝術等。大多數薄殼結構的幾何外型是由建築師依據其過去的經驗以及主觀的審美感所設計，因此以力學性質的角度上，也許不是最佳化之設計。本章節將針對已經存在於世的薄殼結構進行本研究所提出之最佳化設計流程，將實際設計結構時會檢核的因素納入考量，包含了現行規範以及施工可行性；透過實尺寸的自由曲面建構、加勁梁之設計、以及整體結構之尺寸調整，嘗試設計出更具結構安全性能，同時也保留其自由曲面外型之美感的薄殼結構。

### 5.2 案例介紹

本章節之薄殼結構案例(例題四)參考孫鈺翔(2021)，選擇位於美國新澤西州(New Jersey)的聖阿洛伊修斯教堂(The Church of St. Aloysius)，該教堂的實際攝影圖如圖 5.1。經由教堂公開的設計圖比例尺以及其合作之木材公司(Unalam)之作品集內容，得知該教堂的投影形狀為邊長 40 公尺之正方形，高度為 16 公尺，結構表面則是以雙曲線設計。

根據上述之結構實尺寸，以及教堂所公開之立面圖，透過 NURBS 曲面建構方式模擬出近似的結構外型(圖 5.2、圖 5.3)，網格劃分為 10000 個元素，無從取得該教堂的薄殼厚度實尺寸，故將初始厚度定為 0.3 公尺，體積為 572 立方公尺。本例題的四周由六個鉸支承(Pin Support)束制，由於其 1/4 對稱之特性，控制點以等距離之擺放方式，參考圖 5.4，圖中紅色控制點為鉸支承處；藍色控制點的高程



座標為設計變數；黑色控制點則是由藍色控制點根據  $1/4$  對稱的特性所控制。材料性質如下：楊氏模數 (Young's Modulus) 為  $30 \text{ GPa}$ 、柏松比 (Poisson's Ratio) 為  $0.3$ 、密度為  $2500 \text{ 公斤/每立方公尺}$ 。



圖 5.1: The Church of St. Aloysius 結構攝影圖

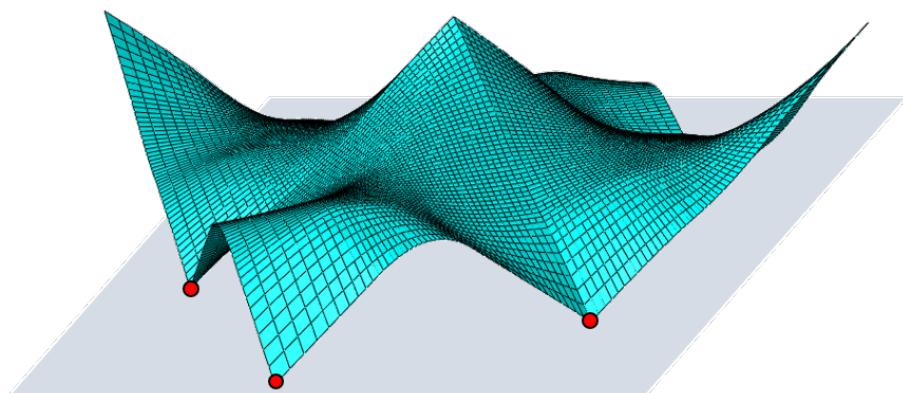


圖 5.2: [例題四] 初始模型建立

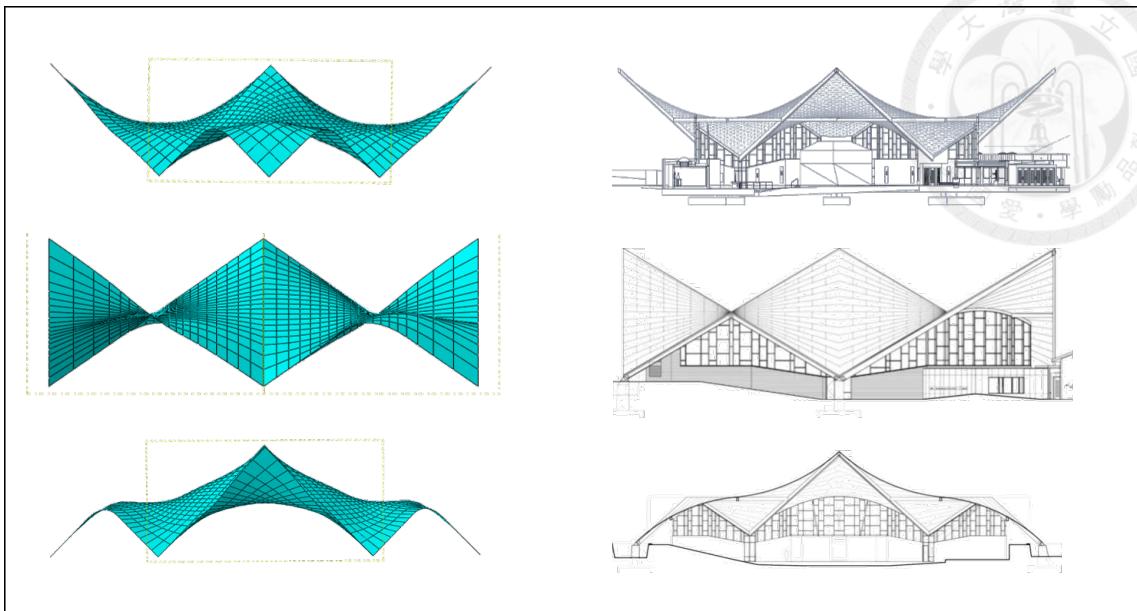


圖 5.3: [例題四] 模型與實際結構之對照圖

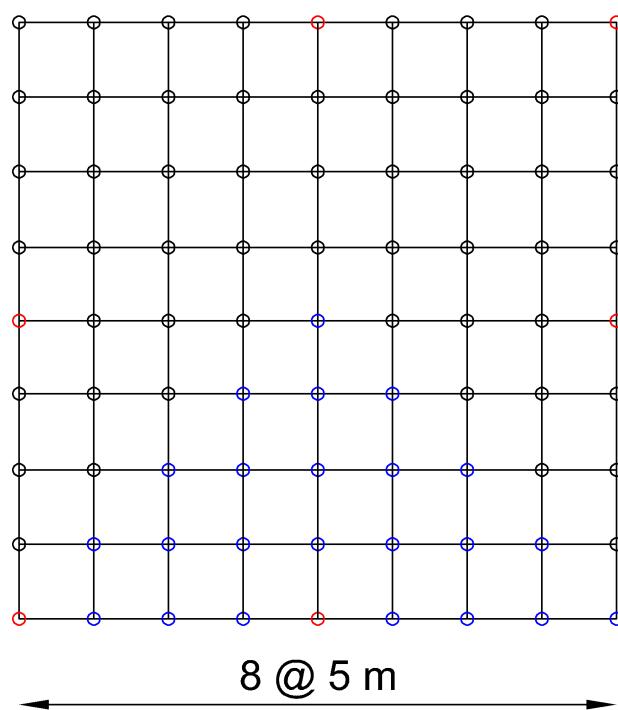


圖 5.4: [例題四] 控制點示意圖



## 5.3 設計限制

對於薄殼結構設計，限制條件可分為結構尺寸限制、強度限制、位移限制、以及彈性挫屈限制。尺寸限制方面，參考我國〈混凝土結構設計規範〉第二章的T型梁構造與欄柵版構造之相關限制：肋梁之寬度( $b$ )不得小於10公分、深度( $h$ )不得大於其最小寬度( $b_{min}$ )之3.5倍；除了規範限制外，本研究考量到施工可行性與合理性，限制薄殼的厚度( $t$ )不得小於10公分、以及梁深扣除殼厚( $h'$ )不得低於30公分，上述之限制以式(5.1)、式(5.2)、式(5.3)、式(5.4)表示。

$$b \geq 10 \text{ cm} \quad (5.1)$$

$$h \leq 3.5 \times b_{min} \quad (5.2)$$

$$t \geq 10 \text{ cm} \quad (5.3)$$

$$h' \geq 30 \text{ cm} \quad (5.4)$$

結構的強度限制方面，於最終極限狀態(Ultimate Limit State, ULS)，限制結構物之最大拉應力與最大壓應力不能超過材料強度。例題四之材料為混凝土，抗壓強度為30 MPa(式(5.5))；由於實際在設計局部受張應力之結構時，不會以混凝土作為唯一材料，故使用鋼纖維混凝土(Steel Fiber Reinforced Concrete, SFRC)之抗拉強度進行檢核，參考 Abrishambaf *et al.* (2013) 之實驗結果，設定為4.3 MPa(式(5.6))。考慮到本結構為點支承，分析時會於支承附近產生應力集中的現象，若強迫所有元素之應力皆符合此強度將過於嚴格，因此本研究容許0.5%的元素超出材料強度。最大位移部分，參考我國〈混凝土結構設計規範〉第二章之容許計算撓度表格，於使用性極限狀態(Serviceability Limit State, SLS)，不能超過規範的撓度容許值，限制式如式(5.7)，其中 $l$ 為結構物之跨度。

$$\sigma_{t,max} \leq 3 \text{ MPa} \quad (5.5)$$

$$\sigma_{c,max} \leq 30 \text{ MPa} \quad (5.6)$$

$$\delta \leq \frac{l}{360} \quad (5.7)$$

關於彈性挫屈限制，我國於〈混凝土結構設計規範〉第十二章薄殼與摺版之中，提及薄殼結構須考慮結構挫屈影響，然而該規範並未明確訂定出一個必須遵守之最小挫屈值，因此本研究參考他國之挫屈限制規範。由於混凝土的相關規範較少會考慮到彈性挫屈值，而鋼結構之相關規範大多對此有著詳細的限制，因此本研究參考歐盟鋼結構規範 (Eurocode3) 以及香港鋼結構設計規範，歐盟鋼結構規範中，要求彈性挫屈值不得小於 3；香港鋼結構設計規範則是限制挫曲值不得小於 5，選擇較為保守的香港鋼結構設計規範之挫屈值限制作為本研究之挫屈值限制式，以式 (5.8) 表示。

$$\lambda_{\min} \geq 5 \quad (5.8)$$

## 5.4 設計載重

設計載重的部分，參考我國〈混凝土結構設計規範〉第二章分析與設計中，提供的設計載重組合。對於薄殼結構之設計，影響較大的載重種類為自重 ( $D$ )、屋頂活載重 ( $L_r$ )、以及風載重 ( $W$ )，搭配上述規範提供之設計載重組合，本研究於最終極限狀態 (ULS) 針對下列三種載重組合 (式 (5.9)、式 (5.10)、式 (5.11)) 進行最佳化設計與檢核，檢核對象包含了結構的材料強度以及彈性挫屈限制。

$$U = 1.4D \quad (5.9)$$

$$U = 1.2D + 1.6L_r + 0.8W \quad (5.10)$$

$$U = 1.2D + 0.5L_r + 1.6W \quad (5.11)$$

此外，於結構設計時必須考慮於使用性極限狀態 (SLS) 的最大位移，本研究採用之使用性載重組合如式 (5.12)：

$$S = 1.0L_r \quad (5.12)$$

於 ABAQUS 建模時，自重 ( $D$ ) 與屋頂活載重 ( $L_r$ ) 的模擬操作容易，直接於該軟體的載重與邊界條件 (Load) 模組中設定即可，操作方式不做贅述，其中活載重的數值參考〈建築技術規則建築構造編第 26 條〉所提供的屋頂水平投影面之最低活載重表格 (如圖 5.5)，例題四的水平投影載重面積為 1600 平方公尺，故將活載重設定為 60 公斤重/每平方公尺，約為 600 Pa。此規範提供的最低活載重為水平投影面之活載重，而本研究將 600 Pa 之活載重平均施加於結構體表面，採取更為保守的設計方式。薄殼結構的風載重 ( $W$ ) 模擬則較為困難，需透過計算流體力學 (Computational Fluid Dynamics, CFD) 分析獲得，將於章結 5.5 介紹本研究使用之風力模擬方法，並且驗證其可靠性。

〈建築技術規則建築構造編第二十六條〉

屋頂度	載重面積 (m <sup>2</sup> )		
	<20	20~60	>60
平頂			
1/6坡頂	100	80	60
1/8拱頂			
1/6~1/2坡頂	80	70	60
1/8~3/8拱頂			
>1/2坡頂	60	60	60
>3/8拱頂			

Unit: kgf/m<sup>2</sup>

圖 5.5: 〈建築技術規則建築構造編第 26 條〉之屋頂活載重規範

## 5.5 風力模擬

風力作用於薄殼結構上的影響難以預測，若擅自忽略可能會造成設計的不保守，進而影響結構使用之安全。有三種取得結構物之風壓分布的方法，第一種為參考耐風設計規範所訂定之風壓，然而耐風規範大多僅提供形狀簡單的屋頂或拱形結構其風壓分布之參考值，趨於複雜的結構難以適用。第兩種方式為風洞實驗 (Wind Tunnel Test)，然而在進行最佳化設計時，結構物形狀會隨著迭代發生改變，若對於每一次迭代之結構體皆進行實體建模以及風洞實驗，將過於耗時。因此本研究採取第三種方式：計算流體力學分析 (CFD)，透過電腦數值分析方法來計算流體力學的守恆方程式，求出近似真實流體力學的現象藉此模擬實際風壓分布之情況。



### 5.5.1 計算流體力學分析

本研究選擇以 ABAQUS 作為計算流體力學 (CFD) 之分析工具，採用雷諾平均維斯-斯托克斯 (Reynolds Averaged Navier-Stokes, RANS) 方法，將風場內的不穩定漩渦簡化為一紊流模型 (Turbulence Model)。首先須建構一實心模型作為風場，並且從此風場中挖除欲分析之結構形狀，輸入風場之材料性質以及邊界條件後，經由紊流分析取得該風場中各個位置之風力分布，再透過 ABAQUS 提供的 Load Mapping 功能將其轉換成結構物表面所受之風力。詳細的建模過程以及風場的參數設計可以參考本研究團隊林享樑 (2018) 章節 6.2 之介紹。

### 5.5.2 流場驗證

為驗證本研究透過 ABAQUS 的 CFD 分析獲得之風壓分布是否合理，對比 Cheng and Fu (2010) 針對半圓球拱頂進行風洞實驗之結果。該文獻共進行了三組實驗，本研究選擇對象為直徑 1.2 公尺半圓拱頂之紊流實驗進行比對，環境參數為一大氣壓、攝氏 25 度之空氣性質：密度為 1.184 公斤/每立方公尺、黏滯係數為  $2 \times 10^6$  帕秒 ( $\text{Pa} \times \text{s}$ )、紊流強度為 25%；入風風速則由文獻提供之不同雷諾數根據式 (5.13) 所推得，式中  $Re$  為雷諾數、 $\rho$  為流體密度 (Fluid Density)、 $u$  為流體速度 (Flow Velocity)、 $\mu$  為流體動力粘度 (Flow Dynamic Viscosity)、 $L$  為特徵長度 (Characteristic Length)。

$$Re = \frac{\rho u L}{\mu} \quad (5.13)$$

本研究的各雷諾數之流場分析對應文獻之實驗結果如圖 5.6 所示，觀察到使用 CFD 分析之結果與風洞實驗的最大以及最小風壓係數非常接近，風壓分布也相互吻合：迎風面承受主要壓力，中心承受拉力，背風面則是承受些微壓力。此外，對比雷諾數為  $2 \times 10^6$  的情況下 (入風風速為 28.15 公尺/每秒)，該半圓拱頂沿直徑方向之風壓係數分布 (圖 5.7(a) 為文獻透過風洞實驗而得之風壓係數分布，圖 5.7(b) 為本研究透過 CFD 分析獲得之風壓係數分布)，趨勢極為相近，仰角 0° 至 40° 為主要受壓區，於仰角 90° 附近受到最大的拉應力。參考 ASCE7-05 規範中球形屋頂規定之最小荷載，迎風面最小風壓係數為 0.8，中心最小風壓係數為 -1.2，背風面風壓係數則為 0.0。將文獻、規範、以及 CFD 分析之風壓係數並列比較，如圖 5.8，三者之風壓分布結果皆非常近似，應證了 CFD 分析之可靠性。

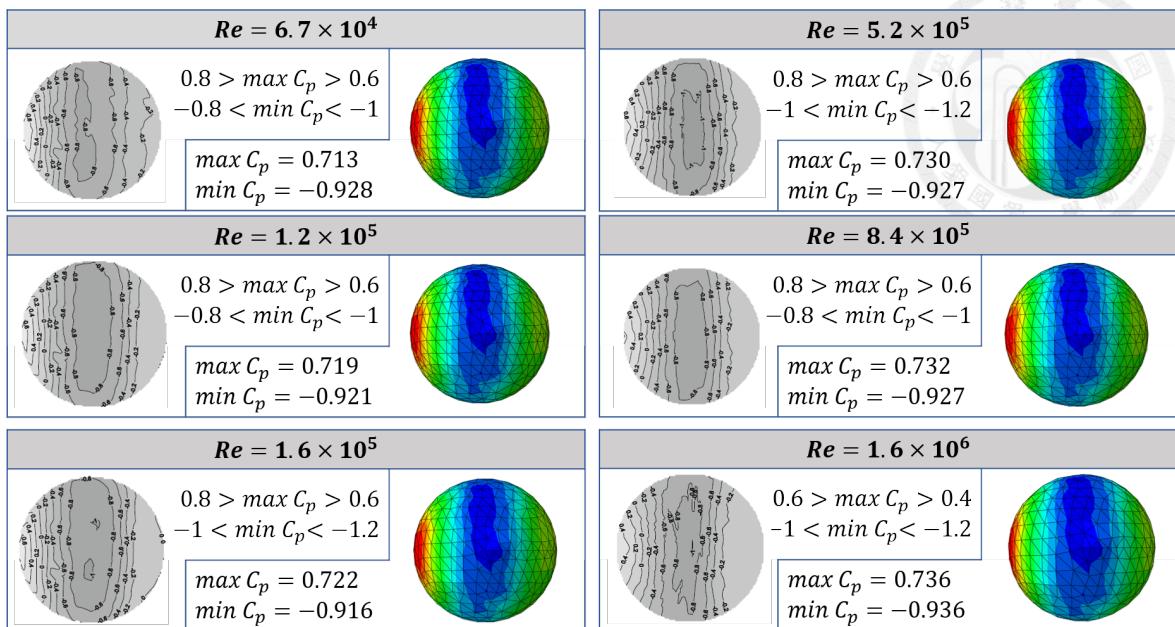
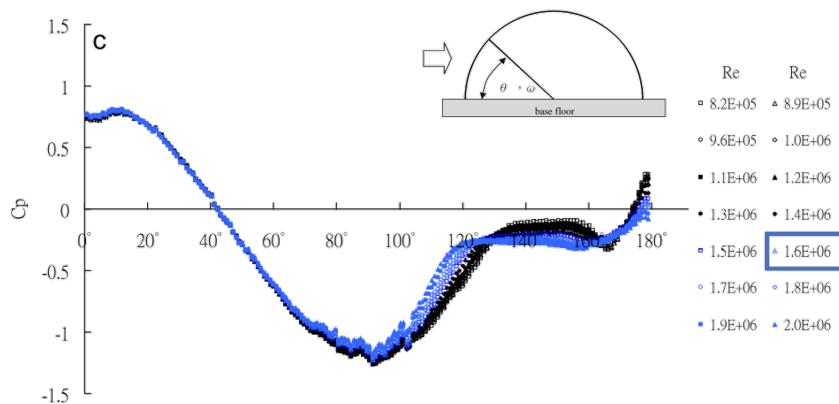
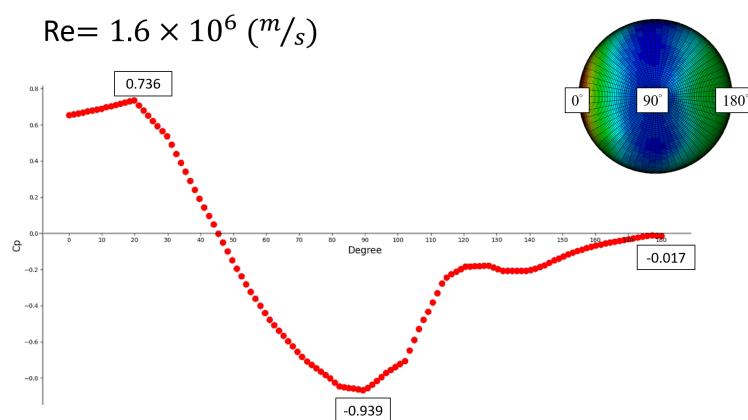


圖 5.6: 不同雷諾數之流場分析驗證



(a) 風洞實驗之風壓係數分布結果 (Cheng and Fu (2010))



(b) CFD 分析之風壓係數分布結果

圖 5.7: 半圓拱頂結構之風壓分布驗證

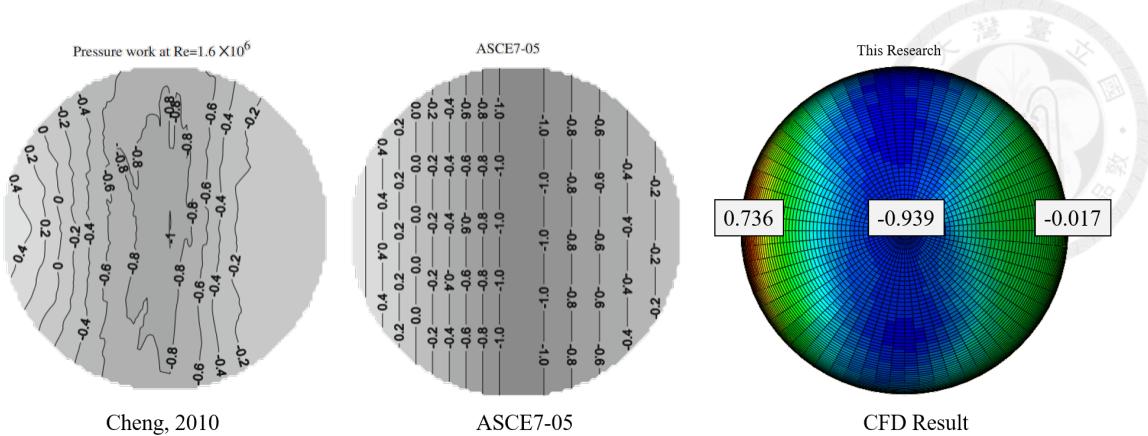


圖 5.8: 文獻、ASCE7-05、以及 CFD 模擬之風壓分布圖

## 5.6 實際設計

將上述限制式以及載重組合納入實際案例之設計考量，透過章節 3、章節 4 所介紹之薄殼最佳化設計流程對例題四進行最佳化設計，目標函數為結構順從度乘以總體積，於固定體積之下最小化該結構之目標函數，意即最大化單位體積之勁度。

### 5.6.1 形狀最佳化設計

首要步驟為形狀最佳化。經由本研究之數據發現：當設計載重為  $U = 1.4D$  組合時，所造成之合力最大，意即  $U = 1.4D$  為控制目標函數之載重組合。考慮到若於每次形狀最佳化迭代時進行風力分析，由於形狀會發生改變，必須於每次的迭代都進行 CFD 分析以得到該形狀對應的風壓分布，過於耗費時力，因此本研究僅以自重之載重組合進行形狀最佳化，再於後續的步驟將所有載重組合之結果納入設計的限制式中。

初始形狀與最佳化形狀之分析結果於表 5.1 所示，結構的高度由原本的 16 公尺降為 13.5 公尺，殼厚約 28 公分，表 5.1 中的最大撓度為使用性載重組合 ( $S = 1.0L_r$ ) 下的數值，其餘欄位皆為  $U = 1.4D$  之結果。經由形狀最佳化設計後，於固定體積下，目標函數下降 35%，換算成勁度則是提升 56%；最大張應力 ( $\sigma_{t,max}$ ) 超過材料強度之元素比例也從原先的 0.12% 降至的 0.04%。

表 5.1: [例題四] 初始形狀與最佳化形狀分析結果

Case 4	Initial Shape	Optimum Shape
Figure		
$V(\text{m}^3)$	572	572
$CV(\text{N} \times \text{m}^4)$	$4.975 \times 10^7$	$3.188 \times 10^7$
$u_{\max} (\text{m})$	$1.3 \times 10^{-3}$	$3.5 \times 10^{-4}$
$\sigma_{t,\max} (\text{MPa})$	5.89	5.69
$\text{Ele}_{\text{exceed}} (\%)$	0.12	0.04
$\sigma_{c,\max} (\text{MPa})$	22.22	21.29
$\text{Ele}_{\text{exceed}} (\%)$	0.00	0.00
$\lambda_{\min}$	28.74	24.00

### 5.6.2 風載重模擬

設計出例題四的最佳化形狀後，即可透過 CFD 分析取得該形狀對應之風壓分布。由於此結構為 1/4 對稱，應分析之風功角範圍為  $90^\circ$ ，本研究取三個具代表性之角度做分析，來風方向示意圖如圖 5.9 所示；環境參數為一大氣壓、攝氏 25 度之空氣性質：密度為 1.184 公斤/每立方公尺、黏滯係數為  $2 \times 10^{-5}$  帕秒 ( $\text{Pa} \times \text{s}$ )、紊流強度為 25%；入風風速參考〈建築物耐風設計規範及解說〉臺北的基本設計風速 42.5 公尺/每秒。接著執行 CFD 分析所需之流程，包含了流場建立、有限元素分析、以及將流場之風壓轉移至薄殼表面上，選擇方向一之模擬過程為示範，如圖 5.10、圖 5.11、圖 5.12。三個來風方向分別對應之風壓結果參考圖 5.13 所示。

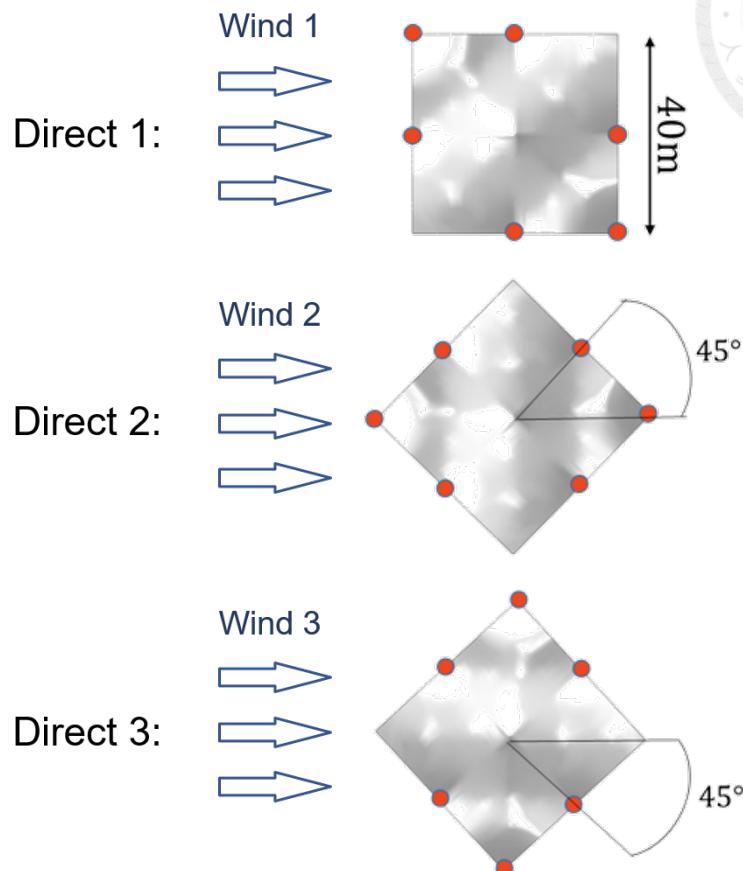


圖 5.9: [例題四] 來風方向示意圖

Fluid properties (25°C, 1 atm):

$$\rho = 1.184 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

$$\text{viscosity} = 2 \times 10^{-5} \text{ (Pa} \times \text{s)}$$

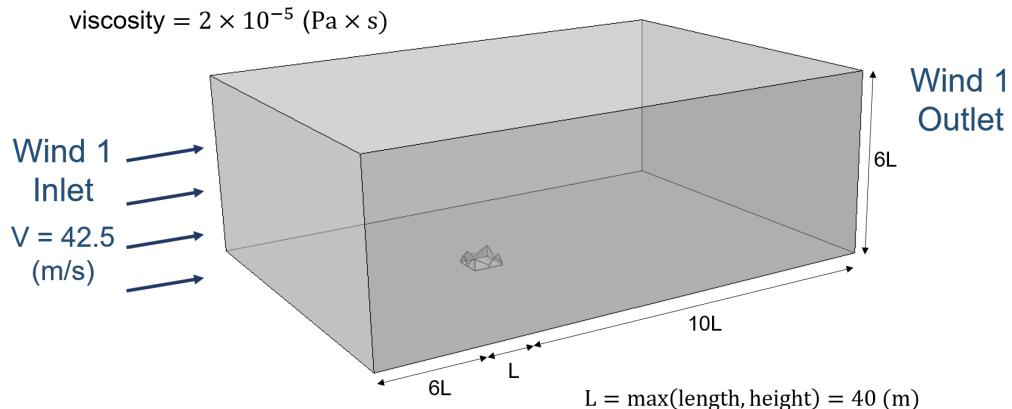


圖 5.10: [例題四] 方向一：流場建立範例圖

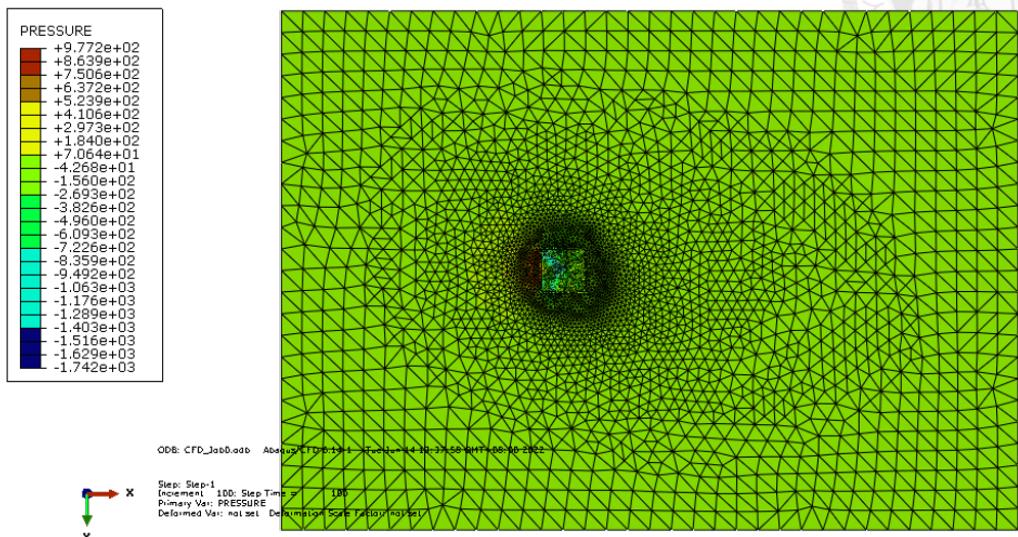


圖 5.11: [例題四] 方向一：流場分析結果範例圖

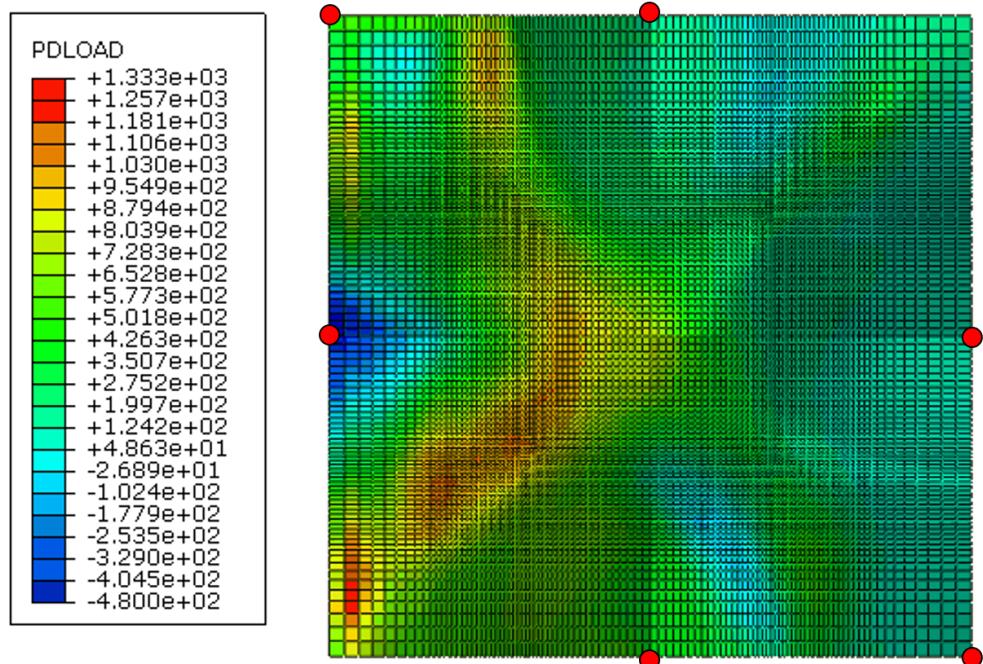


圖 5.12: [例題四] 方向一：結構受風壓範例圖

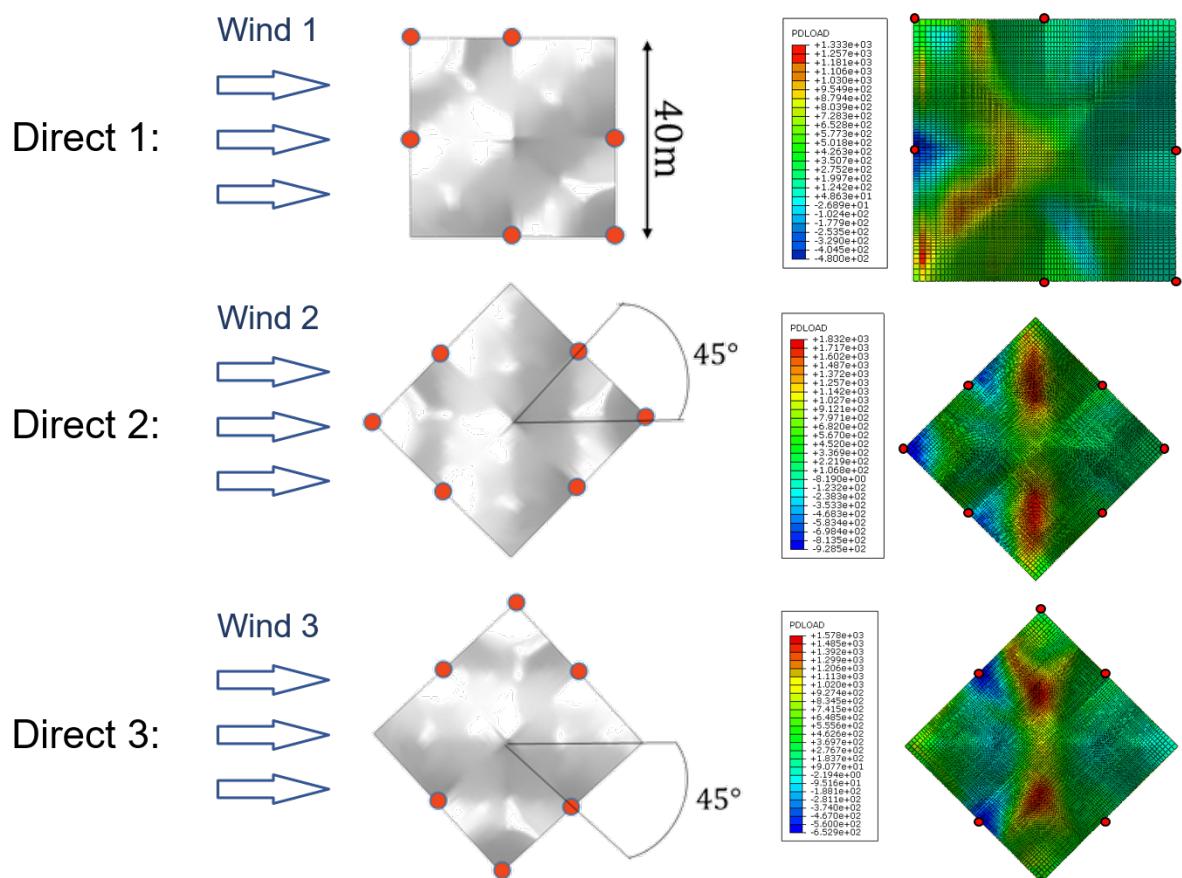


圖 5.13: [例題四] 風壓分布結果



### 5.6.3 加勁梁最佳化設計

下一步驟為加勁梁的最佳化設計，包含了加勁梁的建構、篩選、以及尺寸最佳化。根據例題四之最佳化形狀，執行主應力線的描繪以及加勁，所建構之加勁梁分布如圖 5.14 所示，共有 32 組主應力線加勁梁。由於  $U = 1.4D$  為控制本例題目標函數之載重組合，因此以該組載重進行分析而得到之結構順從度乘以體積作為最佳化設計之目標函數，並且於每一次迭代之中，檢核結構於所有載重組合下是否皆符合規範。

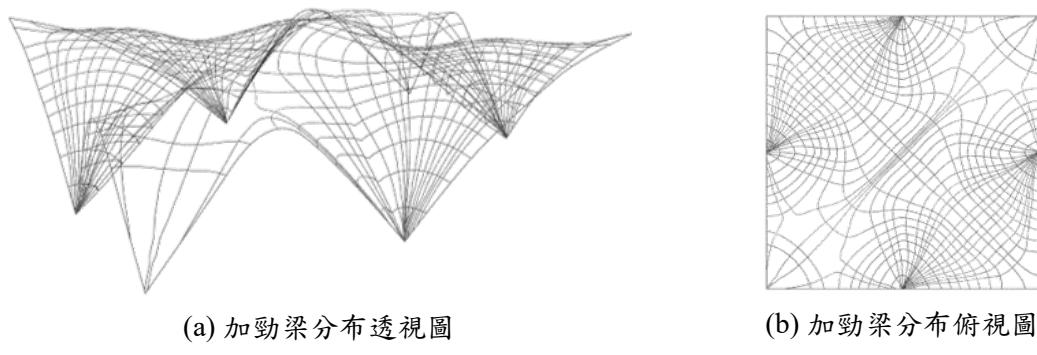


圖 5.14: [例題四] 加勁梁分布示意圖

最佳化設計結果如圖 5.15，各組加勁梁之深度扣除殼厚 ( $h'$ ) 顯示於右圖之柱狀圖，薄殼厚度約為 18 公分，分析結果詳列於表 5.2。表格欄位中列在數值右方的載重組合為控制該參數之載重，整體設計由挫屈值進行控制；最大張應力、最大壓應力、以及最大位移皆符合本例題之限制式。和形狀最佳化之結果相比（表 5.1），目標函數下降 54%，換算成勁度提升 118%；和初始結構相比，目標函數總共下降 71%，意即勁度提升 240%。

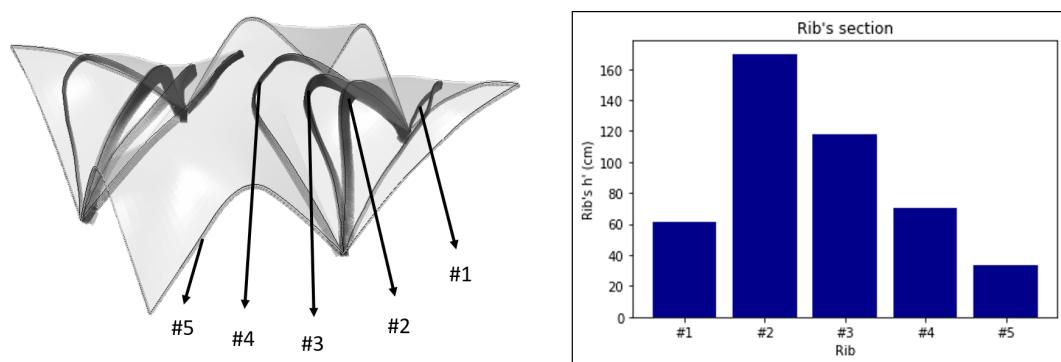


圖 5.15: [例題四] 加勁梁最佳化設計結果

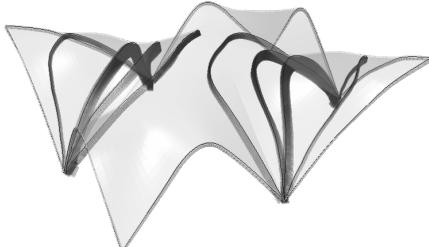
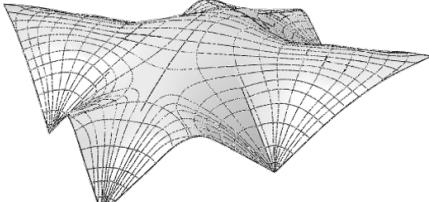


表 5.2: [例題四] 加勁梁最佳化設計之分析結果

Case 4	Best Result
Figure	
$t_{\text{shell}}$ (cm)	17.86
$V_{\text{shell}}$ ( $\text{m}^3$ )	355
$V_{\text{ribs}}$ ( $\text{m}^3$ )	217
$V_{\text{total}}$ ( $\text{m}^3$ )	572
$CV$ ( $\text{N} \times \text{m}^4$ )	$1.462 \times 10^7$ ( $U = 1.4D$ )
$u_{\max}$ (m)	$4 \times 10^{-4}$ ( $S = 1.0L_r$ )
$\sigma_{t,\max}$ (MPa)	4.07 ( $U = 1.2D + 0.5L_r + 1.6W_3$ )
$\text{Ele}_{\text{exceed}}$ (%)	0.00
$\sigma_{c,\max}$ (MPa)	11.02 ( $U = 1.2D + 1.6L_r + 1.6W_3$ )
$\text{Ele}_{\text{exceed}}$ (%)	0.00
$\lambda_{\min}$	5.00 ( $U = 1.2D + 1.6L_r + 0.8W_1$ )

將此最終設計結果與本研究團隊孫鈺翔 (2021) 針對同樣實際案例之研究結果進行比對，參考表 5.3。孫鈺翔 (2021) 沿其描繪的所有主應力線進行加勁梁的建構，共建構 33 組加勁梁，尺寸最佳化之設計變數為加勁梁統一的尺寸斷面 (梁寬  $b$ ) 與梁深 ( $h$ ) 以及薄殼之厚度 ( $t$ )。透過表 5.3 觀察到：經由基因演算法搭配各組加勁梁與薄殼之斷面尺寸最佳化進行加勁梁的最佳化設計後，該薄殼結構僅需以 5 組不同尺寸之加勁梁進行加勁，比起使用 33 組相同尺寸之加勁梁進行加勁，其力學表現更好：同樣體積之下結構順從度相差 5%，意即勁度提升了 6%。

表 5.3: [例題四] 本研究與孫鈺翔 (2021) 之最佳化設計結果比較

Case 4	Best Result	孫鈺翔 (2021)
Figure		
$t_{\text{shell}}$ (cm)	17.86	15.00
$V_{\text{shell}}$ ( $\text{m}^3$ )	355	298
$V_{\text{ribs}}$ ( $\text{m}^3$ )	217	274
$V_{\text{total}}$ ( $\text{m}^3$ )	572	572
$CV$ ( $\text{N} \times \text{m}^4$ )	$1.462 \times 10^7$ ( $U = 1.4D$ )	$1.547 \times 10^7$ ( $U = 1.4D$ )
$u_{\max}$ (m)	$4 \times 10^{-4}$ ( $S = 1.0L_r$ )	$5 \times 10^{-3}$ ( $S = 1.0L_r$ )
$\sigma_{t,\max}$ (MPa)	4.07 ( $U = 1.2D + 0.5L_r + 1.6W_3$ )	3.25 ( $U = 1.4D$ )
$\text{Ele}_{\text{exceed}}$ (%)	0.00	0.00
$\sigma_{c,\max}$ (MPa)	11.02 ( $U = 1.2D + 1.6L_r + 1.6W_3$ )	10.56 ( $U = 1.4D$ )
$\text{Ele}_{\text{exceed}}$ (%)	0.00	0.00
$\lambda_{\min}$	5.00 ( $U = 1.2D + 1.6L_r + 0.8W_1$ )	13.27 ( $U = 1.2D + 1.6L_r + 0.8W_2$ )



## 5.7 小結

本章節以美國新澤西州的聖阿洛伊修斯教堂為最佳化設計之對象，進行本研究之薄殼結構最佳化設計流程，搭配現有規範之限制以及載重組合，使最終設計結果更貼近實務。經過一連串的設計程序，該結構物的勁度提升效果非常顯著，應證了本研究之形狀設計、主應力線加勁梁之選擇、以及整體尺寸最佳化之成效。





## 第六章 結論與未來展望

### 6.1 結論

本研究延續本研究團隊近年來對於主應力線於結構最佳化設計應用之探討，著重於主應力線加勁梁之配置最佳化，以及將尺寸最佳化納入考量，推出一套完善的薄殼結構最佳化設計流程。文章依序介紹了 NURBS 曲面與最佳化之理論、自由曲面之建構、形狀最佳化、主應力線生成、加勁梁之建構與選擇、以及尺寸最佳化，更透過對於一實際存在之薄殼結構案例進行此最佳化設計，應證本設計方法之可行性與可靠度。

首先探討了不同參數對於自由曲面之控制效果。以本研究之例題一為例，使用了三種不同的控制點擺放方式，分別進行形狀最佳化後之目標函數最大差異為 1.5%，且薄殼會收斂至近乎相同的幾何外型，表示控制點的擺放方式對於形狀最佳化之結果並不敏感，只要擺放方式合理，誤差則不大。控制點的數量越多，能給予曲面更自由的變化空間，以例題二的不同數量的設計變數之比較結果為例，取 21 個控制點高程座標作為設計變數，其目標函數比起 12 個設計變數降低了約 1.2%；網格劃分的越細密，分析的結果越趨準確，同樣以例題二為例，將結構劃分為不同數量之元素，其中 10240 個元素之模型相較於 41472 個元素之模型，目標函數之誤差值為 1.7%。雖然控制點與元素之數量越多，能設計出更為複雜之曲面，並且分析更為準確，但若考量到運算成本與效率，適當的控制點數量以及元素數量即可以達到相似的結果，兼顧分析的正確性與運算成本。

主應力線加勁梁的部分，有別於本研究團隊過去沿所有主應力線進行加勁之方式，本研究加入了篩選之流程。透過基因演算法程式對於加勁梁進行篩選，結合尺寸最佳化，設計出最佳的加勁梁配置以及其對應的最佳尺寸。透過此步驟，使該薄殼結構能夠以較少的加勁梁數量，於固定體積之下擁有更高的勁度。以本

研究選擇之實際案例(例題四)為例，搭配現有規範的限制以及載重組合，透過此種最佳化方法進行結構設計，相較於形狀最佳化之結果，最終的結構之勁度提升了118%，和本研究模擬之初始結構相比則提升了240%；若和本研究團隊過去之結構最佳化結果進行比對，於同樣體積之下，僅使用5組不同尺寸加勁梁作為薄殼結構之加勁材，結構整體的勁度相較於過去以33組同尺寸之加勁梁進行加勁，提升了6%，顯示了本設計方法能有效的提高薄殼結構於固定體積下之結構整體勁度。

## 6.2 未來展望

本研究的設計步驟為：先設計薄殼之形狀，再建構主應力線加勁梁。若之後於主應力線加勁梁的最佳化設計程式架構之中，再次導入形狀的調整步驟，也許能夠讓結構擁有更高的勁度。此外，本研究設計的薄殼結構，材料性質皆為混凝土，若後續以更為多樣的結構材料進行最佳化設計，結合不同材料之優點與特性，相得益彰，不論從力學性質、視覺效果、以及經濟效益的角度上皆能有再進一步的突破。

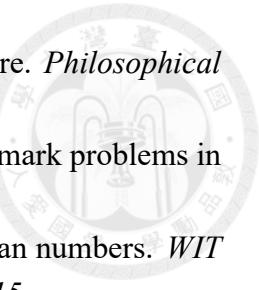
本研究之最佳化設計是以程式語言Python於後端操作有限元素軟體ABAQUS進行結構的建模與分析，並且引入模組庫nurbs對於自由曲面之幾何形狀進行控制，使用者須理解原始碼之運作方式，以及NURBS函式庫中各項參數之意義，才有辦法進行合理的操作。倘若將此原始碼開發成使用者介面，結合商業繪圖軟體，讓使用者能直接輸入必要的參數，並且能及時得到該組參數對應之視覺化效果，對於設計者將更為友善，也能促進更複雜多樣的幾何形狀之生成。

另外，若能結合分析結果與3D列印技術，建構出最佳設計結果的實體縮尺模型，並且透過實驗得到不同主應力線加勁梁組合之力學性質，藉此比較實驗數據以及模擬分析之結果，驗證本研究推出之薄殼結構最佳化設計的可靠性。



## 參考文獻

- Abrishambaf, A., Barros, J. A., & Cunha, V. M. (2013). Relation between fibre distribution and post-cracking behaviour in steel fibre reinforced self-compacting concrete panels. *Cement and Concrete Research*, 51, 57–66.
- Arora, J. (2017). *Introduction to optimum design*. Elsevier.
- Bézier, P. (1968). How renault uses numerical control for car body design and tooling. *Paper SAE 6800010*.
- Cheng, C., & Fu, C. (2010). Characteristic of wind loads on a hemispherical dome in smooth flow and turbulent boundary layer flow. *Journal of wind engineering and industrial aerodynamics*, 98(6-7), 328–344.
- Espath, L., Linn, R. V., & Awruch, A. (2011). Shape optimization of shell structures based on nurbs description using automatic differentiation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 88(7), 613–636.
- Gordon, W. J., & Riesenfeld, R. F. (1974). B-spline curves and surfaces. In *Computer aided geometric design* (pp. 95–126). Elsevier.
- Halpern, A. B., Billington, D. P., & Adriaenssens, S. (2013). The ribbed floor slab systems of pier luigi nervi. In *Proceedings of iass annual symposia* (Vol. 2013, pp. 1–7).
- Ikeya, K., Shimoda, M., & Shi, J.-X. (2016). Multi-objective free-form optimization for shape and thickness of shell structures with composite materials. *Composite Structures*, 135, 262–275.
- Ismail, M. A., & Mueller, C. T. (2021). Minimizing embodied energy of reinforced concrete floor systems in developing countries through shape optimization. *Engineering Structures*, 246, 112955.
- Kamat, M. P. (1993). Structural optimization: Status and promise. *NASA STI/Recon Technical Report A*, 93, 30075.
- Kegl, M., & Brank, B. (2006). Shape optimization of truss-stiffened shell structures with variable thickness. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195(19-22), 2611–2634.
- Li, W., Zheng, A., You, L., Yang, X., Zhang, J., & Liu, L. (2017). Rib-reinforced shell structure. In *Computer graphics forum* (Vol. 36, pp. 15–27).
- Marino, E., Salvatori, L., Orlando, M., & Borri, C. (2016). Two shape parametrizations for structural optimization of triangular shells. *Computers & Structures*, 166, 1–10.



- Michell, U. (1904). The limits of economy of material in frame structure. *Philosophical Magazine*, 8, 589–597.
- Rozvany, G. (1998). Exact analytical solutions for some popular benchmark problems in topology optimization. *Structural optimization*, 15(1), 42–48.
- Santoro, E. (1970). Representation of uniform b-spline curve by eulerian numbers. *WIT Transactions on Information and Communication Technologies*, 15.
- Tomás, A., & Martí, P. (2010). Shape and size optimisation of concrete shells. *Engineering Structures*, 32(6), 1650–1658.
- Versprille, K. J. (1975). *Computer-aided design applications of the rational b-spline approximation form*. Syracuse University.
- Zuo, Z. H., & Xie, Y. M. (2015). A simple and compact python code for complex 3d topology optimization. *Advances in Engineering Software*, 85, 1–11.
- 內政部營建署 (2018)。建築物耐風設計規範及解說。
- 內政部營建署 (2021)。建築技術規則建築構造編。
- 內政部營建署 (2021)。混凝土結構設計規範。
- 中華民國風工程學會 (2016)。風工程理論及應用。
- 林享樑 (2018)。具自由曲面薄殼結構最佳化設計。國立臺灣大學工學院土木工程學系碩士論文。
- 林家萱 (2020)。曲面結構多層次最佳化。國立臺灣大學工學院土木工程學系碩士論文。
- 香港屋宇署 (2011)。香港鋼結構設計規範
- 孫鈺翔 (2021)。以 Python 整合有限元素軟體 ABAQUS 應用主應力線於版殼最佳化設計。國立臺灣大學工學院土木工程學系碩士論文。
- 連嘉玟 (2017)。以 Python 整合有限元素軟體 ABAQUS 於版殼結構最佳化。國立臺灣大學工學院土木工程學系碩士論文。
- 簡孟笙 (2019)。主應力線應用於結構最佳化設計。國立臺灣大學工學院土木工程學系碩士論文。