

國立臺灣大學管理學院財務金融學研究所

碩士論文

Graduate Institute of Finance

College of Management

National Taiwan University

Master Thesis

隨機波動度 Heath-Jarrow-Morton 模型下  
之利率衍生性商品評價

Pricing Interest Rate Derivatives in  
Heath-Jarrow-Morton Model with Stochastic Volatility

譚立暉

Lap Fai, Tam

指導教授：李賢源 博士 石百達 博士

Advisor: Shyan Yuan, Lee, Ph.D., Pai Ta, Shih, Ph.D.

中華民國九十九年六月

June, 2010

# 國立臺灣大學碩士學位論文

## 口試委員會審定書

隨機波動度 Heath-Jarrow-Morton 模型下  
之利率衍生性商品評價

Pricing Interest Rate Derivatives in  
Heath-Jarrow-Morton Model with Stochastic  
Volatility

本論文係譚立暉 (R97723058) 在國立臺灣大學財務金融學研究所完成之碩士學位論文，於民國九十九年六月十七日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

(簽名)

(指導教授)

系主任、所長

(簽名)



## 謝辭

終於，要寫這論文的最後部份了。

首先，感激我家人的支持與鼓勵，從啟蒙至今二十多年，直至研究所畢業，讓我無顧慮地安心完成學業。

我同樣非常感謝兩位指導教授，李賢源老師和石百達老師。在李老師指導下，我不只得到豐富的學術和實務知識，也學會了很多人生大道理。石老師亦師亦友的教導，不厭其煩地陪我討論到晚上。我也很感謝兩位老師在我日常生活中的幫助。也非常謝謝在研究室同學們的支持和鼓勵，特別是同窗兼室友文讓，給我不少論文的建議，也常常幫我買午餐。

最後要謝謝我的女朋友 Amy 的支持和耐心，在我這兩年研究所生活裡的不斷鼓勵和包容，即使在交換學生時也常常寄明信片給我。



立暉

二零一零年六月

台北

## 摘要

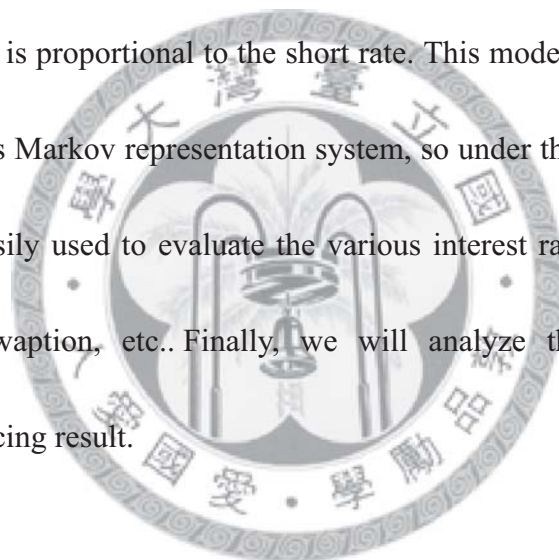
本文提供了一個靈活的多因子隨機波動度 Heath–Jarrow–Morton 模型，此模型讓遠期利率與其波動度具有相關性，且有  $N$  個隨機因子會影響利率結構，另有額外  $N$  個隨機因子會影響波動度(及利率衍生性商品)。此模型改進了 Trolle and Schwartz (2009) 的模型，讓利率波動度與短期利率(short rate)水準有正比關係。此模型能夠轉換成有限狀態變數(finite number of state variables)的馬可夫表現(Markov representation)系統，故能輕易地使用蒙地卡羅模擬法來評價各種利率衍生性產品，如利率上限選擇權、利率交換選擇權等。最後我們會分析各參數對評價結果的影響。

**關鍵詞：**Heath–Jarrow–Morton 模型、隨機波動度、狀態依賴波動度、蒙地卡羅模擬法、利率上限選擇權



## Abstract

This article provides a flexible stochastic volatility multi-factor Heath–Jarrow–Morton term structure model, which allows forward rate correlative with its volatility, and there are  $N$  random factors affect the interest rate structure, while additional  $N$  random factors would affect volatilities (and also interest rate derivatives). This model improves the Trolle and Schwartz (2009) model, so that interest rate volatility is proportional to the short rate. This model can be converted into a finite-state variables Markov representation system, so under this model, Monte Carlo simulation can be easily used to evaluate the various interest rate derivatives, such as interest rate cap, swaption, etc.. Finally, we will analyze the impact of various parameters on the pricing result.



**Keywords:** Heath–Jarrow–Morton model, Stochastic volatility, State dependent volatility, Monte Carlo simulation, Caps

# 目 錄

口試委員會審定書 .....	i
謝辭 .....	iii
摘要 .....	iv
Abstract.....	v
目 錄 .....	vi
圖目錄 .....	vii
表格目錄 .....	vii
一、 簡介 .....	1
1. 文獻回顧 .....	1
2. 研究動機 .....	2
二、 模型設定 .....	3
1. 遠期利率之動態過程 .....	3
2. 短期利率之動態過程 .....	6
3. 零息債券之動態過程 .....	7
4. 利率上限選擇權 (Interest Rate Cap).....	8
三、 數值例子 .....	9
1. 蒙地卡羅模擬法 .....	9
2. 評價零息債券賣權 .....	10
3. 評價利率上限選擇權 .....	12
四、 更一般化的模型 .....	14
五、 總結 .....	15
附錄 .....	16
A. 定理 1.之證明 .....	16
B. 定理 2.之證明 .....	17

C. AJD 和 LQJD 條件 .....	18
參考文獻 .....	21

## 圖目錄

圖 1 駝峰形波動度 .....	3
圖 2 $\sigma_i$ 變動對零息債券賣權價格的影響 .....	11
圖 3 模擬 10000 次後， $P(T_c, T)$ 落在不同區域的直方圖 .....	12
圖 4 遠期利率曲線上下平行移動對利率上限選擇權價格的影響 .....	13
圖 5 $\rho$ 對利率上限選擇權價格的影響 .....	14



## 表格目錄

表格 1 $\sigma_i$ 變動對零息債券賣權價格的影響 .....	11
表格 2 遠期利率曲線上下平行移動對利率上限選擇權價格的影響 .....	13
表格 3 $\rho$ 對利率上限選擇權價格的影響 .....	14



# 一、 簡介

## 1. 文獻回顧

Heath, Jarrow and Morton (1992) (簡稱 HJM) 推出後，對利率模型研究有非常大的貢獻。第一，它是一個遠期利率曲線模型(forward rate curve model)，利率曲線會受到無套利條件(no arbitrage condition)所限制；第二，它能夠很容易地擴充到多因子模型，來捕捉不同的市場特性；第三，它能夠涵蓋大部份的傳統模型，如 Vasicek (1977)、Cox-Ingersoll-Ross (1985)、Ho and Lee (1986) 和 Hull and White (1990) 等都是 HJM 的子集合。

HJM 模型在無套利條件(no arbitrage condition)下，遠期利率的漂浮項(drift term)是被波動度(volatility term)唯一決定的。所以波動度的設定，成為了 HJM 模型最重要的研究對象。近年不少研究均針對 HJM 的波動度作探討，希望能捕捉市場實況的資訊，並盡可能得到評價衍生性商品的封閉解。例如 Bhar and Chiarella (1997) 考慮了波動度與短期利率成正比關係，Mercurio and Moraleda (2000)和(2001)考慮了波動度的駝峰現象，Collin-Dufresne and Goldstein (2003)和 Trolle and Schwartz (2009)考慮隨機波動度，利用 Duffie, Pan and Singleton (2000)的 Affine Jump-Diffusions 得出評價利率商品的封閉解。

另外，Collin-Dufresne and Goldstein (2002)、Heidari and Wu (2003)和 Li and Zhao (2006)發現利率衍生性商品受某些隨機因子影響，但這些因子並不影響利率期間結構，所以稱它為非利率期限結構隨機因子(unspanned stochastic volatility factor; USV factor)。Andersen and Benzoni (2008)亦發現真實利率波動度會受 USV 因子影響。

## 2. 研究動機

最近的文獻提出不少關於利率波動度的特性：第一，利率波動度的確是隨機的。第二，利率波動度含有重要的非利率期限結構資訊<sup>1</sup>。第三，短期利率和它的波動度具有負相關的現象。第四，非條件(unconditional)波動度結構具有駝峰形(hump-shaped)現象。

針對第三點，Andersen and Lund (1997)和 Ball and Torous (1999)擴充且驗證 Chan et al. (1992)的短期利率模型

$$dr(t) = \kappa_1 (\mu_1 - r(t)) dt + \sqrt{\nu(t)} r(t)^\gamma dW_1(t) \quad (1)$$

$$d \log \nu(t) = \kappa_2 (\mu_2 - \log \nu(t)) dt + \sigma dW_2(t) \quad (2)$$

$W_1(t)$  和  $W_2(t)$  獨立。他們發現相對利率波動度和利率呈現負相關的關係；絕對利率波動和利率呈現正相關的關係。而且，Andersen and Lund (1997)估計出  $\gamma = 0.544$ ，而 Ball and Torous (1999)估計出  $\gamma = 0.754$  均與 Chan et al. (1992)的實證結果相符。

Trolle and Schwartz (2009)提出一個靈活的多因子 HJM 模型，且非條件波動度有駝峰現象，並受 USV 因子影響：

$$df(t, T) = \mu_f(t, T) dt + \sum_{i=1}^N \sigma_{f,i}(t, T) \sqrt{\nu_i(t)} dW_i^Q(t) \quad (3)$$

$$d\nu_i(t) = \kappa_i (\theta_i - \nu_i(t)) dt + \sigma_i \sqrt{\nu_i(t)} \left( \rho_i dW_i^Q(t) + \sqrt{1 - \rho_i^2} dZ_i^Q(t) \right) \quad (4)$$

$i = 1, \dots, N$ ，其中  $\sigma_{f,i}(t, T) = (\alpha_{0,i} + \alpha_{1,i}(T-t)) e^{-\gamma_i(T-t)}$ ， $dW_i^Q(t)$  和  $dZ_i^Q(t)$  是獨立的標準布朗運動。此設定符合(i) 波動度是隨機的；(ii) 波動度具有 USV 因子；(iii) 非條件波動度有駝峰現象(如圖 1，隨機因子對不同天期的遠期利率影響程度不同，短天期及長天期受影響較小，而中期受影響較大)。而且能利用 Bhar and Chiarella (1997)的轉換，讓此動態過程符合 Duffie, Pan and Singleton (2000) (簡稱 DPS)提出

<sup>1</sup> 詳見 Collin-Dufresne and Goldstein (2002)、Heidari and Wu (2003)、Casassus, Collin-Dufresne, and Goldstein (2005)和 Li and Zhao (2006)。

的 Affine Jump-Diffusions (簡稱 AJD) 的條件，能獲得債券選擇權評價公式的封閉解 (closed form solution)。由於為了要符合 AJD，所以 Trolle and Schwartz (2009) 放棄了波動度與  $r(t)$  的遞增關係。故本文針對此問題作改良，令波動度  $\sigma = \sigma(t, T, v(t), r(t))$ ，讓波動度同時受 USV 因子和當時的利率水準  $r(t)$  的直接影響，我們稱它為狀態依賴波動度 (state dependent volatility)。

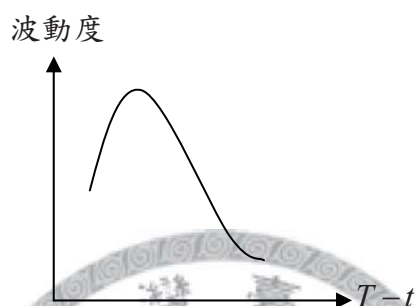


圖 1 駝峰形波動度

本文模仿 Trolle and Schwartz (2009) 的設定，探討更一般化 HJM 利率模型之特性，以及評價結果。

本文的架構如下：第一節為簡介；第二節描述我們的隨機波動度遠期利率模型，並推導出各變數的動態過程 (diffusion)；第三節將展示模型的數值結果；第四節會介紹更一般化的模型，並與其他模型作比較；最後一節是結論。

## 二、模型設定

### 1. 遠期利率之動態過程

我們定義  $f(t, T)$  為在  $t$  時點觀察， $T$  時點借 (或貸) 的瞬間遠期利率 (instantaneous forward interest rate)。其動態過程設定如下：

$$df(t, T) = \mu_f(t, T) dt + \sum_{i=1}^N \sigma_{f,i}(t, T) \sqrt{v_i(t)} \sqrt{r(t)} dW_i^Q(t) \quad (5)$$

$$dv_i(t) = \kappa_i(\theta_i - v_i(t))dt + \sigma_i\sqrt{v_i(t)}\left(\rho_i dW_i^Q(t) + \sqrt{1-\rho_i^2} dZ_i^Q(t)\right) \quad (6)$$

$i=1, \dots, N$ ，其中  $dW_i^Q(t)$  和  $dZ_i^Q(t)$  是在風險中立測度(risk neutral measure)Q 下的獨立標準布朗運動； $r(t) = f(t, t)$  是瞬間短期利率(short rate 或 instantaneous spot rate)。此模型是具隨機波動度的 HJM 模型，我們稱  $v_i(t)$  為**隨機波動因子**<sup>2</sup>。其優點如下：(i) 具有隨機波動度；(ii)  $N$  個因子(利率結構因子  $dW_i^Q(t)$ )會影響利率結構，另有額外  $N$  個因子(非影響利率期限結構隨機波動度因子  $dZ_i^Q(t)$ )會影響波動度(故亦影響利率衍生性商品)；(iii) 遠期利率的非條件波動度與當期利率水準  $r(t)$  成正比；(iv) 允許  $f(t, T)$  與  $v_i(t)$  具有相關性。

根據 HJM (1992)，在無套利條件下，(1)中的漂浮項需符合：

$$\mu_f(t, T) = \sum_{i=1}^N v_i(t) r(t) \sigma_{f,i}(t, T) \int_t^T \sigma_{f,i}(t, u) du \quad (7)$$

在一般情況下， $f(t, T)$  和  $r(t)$  並不會是馬可夫(Markovian)過程，不管在求解或是模擬的過程裡都是一大障礙。所以不少文獻針對 HJM 的馬可夫性質作研究，Carverhill (1994) 和 Jeffrey (1995) 提供了充份必要條件，Ritchken and Sankarasubramanian (1995)、Bhar and Chiarella (1997)、Bhar, Chiarella, El-Hassan and Zheng (2000)、Chiarella and Kwon (2001)、Björk and Svensson (2001) 和 Björk, Landén and Svensson (2004) 均對 HJM 的有限維馬可夫過程轉換作探討。Bhar and Chiarella (1997) 指出，若波動度期間結構呈  $\sigma_{f,i}(t, T) = p_n(T-t)e^{-\gamma_i(T-t)}$  ( $p_n(\tau)$  代表  $n$  次多項式)，則 HJM 模型能轉換成有限狀態變數(finite number of state variables)的系統，且波動度結構有時間齊一性(time-homogeneous)的性質。若  $n=2$ ，則

$$\sigma_{f,i}(t, T) = (\alpha_{0i} + \alpha_{1i}(T-t))e^{-\gamma_i(T-t)}, \quad (8)$$

<sup>2</sup>  $v_i(t)$  是 Cox-Ingersoll-Ross 過程，具有平均數復歸(mean reverting)特性，詳見 Heston (1993) 的股價隨機波動度模型。

且  $\frac{\alpha_{1i}}{\alpha_{0i}} > \gamma_i$ ，則波動度會呈現駝峰形結構。接下來我們將使用(8)式作為(5)式中的

$\sigma_{f,i}(t, T)$ 。

**定理 1.** 根據(5)、(7)和(8)， $f(t, T)$ 可表示成：

$$f(t, T) = f(0, T) + \sum_{i=1}^N \beta_{x_i}(T-t)x_i(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^6 \beta_{\phi_{j,i}}(T-t)\phi_{j,i}(t) \quad (9)$$

其中

$$\beta_{x_i}(\tau) = (\alpha_{0i} + \alpha_{1i}\tau e^{-\gamma_i\tau}) e^{-\gamma_i\tau} \quad (10)$$

$$\beta_{\phi_{1,i}}(\tau) = \alpha_{1i} e^{-\gamma_i\tau} \quad (11)$$

$$\beta_{\phi_{2,i}}(\tau) = \frac{\alpha_{1i}}{\gamma_i} \left( \frac{1}{\gamma_i} + \frac{\alpha_{0i}}{\alpha_{1i}} \right) (\alpha_{0i} + \alpha_{1i}\tau) e^{-\gamma_i\tau} \quad (12)$$

$$\beta_{\phi_{3,i}}(\tau) = - \left[ \frac{\alpha_{0i}\alpha_{1i}}{\gamma_i} \left( \frac{1}{\gamma_i} + \frac{\alpha_{0i}}{\alpha_{1i}} \right) + \frac{\alpha_{1i}}{\gamma_i} \left( \frac{\alpha_{1i}}{\gamma_i} + 2\alpha_{0i} \right) \tau + \frac{\alpha_{1i}^2}{\gamma_i} \tau^2 \right] e^{-2\gamma_i\tau} \quad (13)$$

$$\beta_{\phi_{4,i}}(\tau) = \frac{\alpha_{1i}^2}{\gamma_i} \left( \frac{1}{\gamma_i} + \frac{\alpha_{0i}}{\alpha_{1i}} \right) e^{-\gamma_i\tau} \quad (14)$$

$$\beta_{\phi_{5,i}}(\tau) = - \frac{\alpha_{1i}}{\gamma_i} \left( 2\alpha_{0i} + \frac{\alpha_{1i}}{\gamma_i} + 2\alpha_{1i}\tau \right) e^{-2\gamma_i\tau} \quad (15)$$

$$\beta_{\phi_{6,i}}(\tau) = \frac{-\alpha_{1i}^2}{\gamma_i} e^{-2\gamma_i\tau} \quad (16)$$

狀態變數為：

$$dx_i(t) = -\gamma_i x_i(t) dt + \sqrt{v_i(t)} \sqrt{r(t)} dW_i^Q(t) \quad (17)$$

$$d\phi_{1,i}(t) = (x_i(t) - \gamma_i \phi_{1,i}(t)) dt \quad (18)$$

$$d\phi_{2,i}(t) = (v_i(t)r(t) - \gamma_i \phi_{2,i}(t)) dt \quad (19)$$

$$d\phi_{3,i}(t) = (v_i(t)r(t) - 2\gamma_i \phi_{3,i}(t)) dt \quad (20)$$

$$d\phi_{4,i}(t) = (\phi_{2,i}(t) - \gamma_i \phi_{4,i}(t)) dt \quad (21)$$

$$d\phi_{5,i}(t) = (\phi_{3,i}(t) - 2\gamma_i\phi_{5,i}(t))dt \quad (22)$$

$$d\phi_{6,i}(t) = (2\phi_{5,i}(t) - 2\gamma_i\phi_{6,i}(t))dt \quad (23)$$

起始條件為  $x_i(0) = \phi_{1,i}(0) = \phi_{2,i}(0) = \phi_{3,i}(0) = \phi_{4,i}(0) = \phi_{5,i}(0) = \phi_{6,i}(0) = 0$ 。

證明：參見附錄 A。

從定理 1. 可見，增加  $7 \times N$  個狀態變數，使模型能表示成馬可夫表現(Markov representation)。其中  $\phi_{1,i}(t), \dots, \phi_{6,i}(t)$  是局部確定的(locally deterministic)，它們負責收集  $x_i(t)$  和  $v_i(t)$  的歷史資訊，所以我們稱為“輔助的”狀態變數。因為模型有馬可夫性質，所以我們在使用蒙地卡羅模擬法(Monte Carlo simulation method)去評價複雜的利率商品時會比較容易。

## 2. 短期利率之動態過程

在(5)式中，短期利率  $r(t)$  是  $f(t, T)$  的其中一個狀態變數，所以我們推導出  $r(t)$  的動態過程：

**定理 2.**  $t$  時點之短期利率  $r(t)$  動態過程為：

$$dr(t) = \left[ \frac{\partial}{\partial t} f(0, t) + \sum_{i=1}^N \left( \gamma_i f(0, t) - \gamma_i r(t) + \alpha_{1i} x(t) + \sum_{j=1}^6 D_{j,i} \phi_{j,i}(t) \right) \right] dt + \sum_{i=1}^N \alpha_{0i} \sqrt{v_i(t)} r(t) dW_i^Q(t) \quad (24)$$

其中

$$D_{1,i} = 0 \quad (25)$$

$$D_{2,i} = \frac{\alpha_{1i}^2 + \alpha_{0i} \alpha_{1i} \gamma_i}{\gamma_i^2} \quad (26)$$

$$D_{3,i} = \frac{\alpha_{0i}^2 \gamma_i^2 - \alpha_{1i}^2 - \alpha_{0i} \alpha_{1i} \gamma_i}{\gamma_i^2} \quad (27)$$

$$D_{4,i} = \frac{\alpha_{0i}\alpha_{1i}\gamma_i^2 + \alpha_{1i}^2\gamma_i - \alpha_{1i}^2 - \alpha_{0i}\alpha_{1i}\gamma_i}{\gamma_i^2} \quad (28)$$

$$D_{5,i} = 2\alpha_{0i}\alpha_{1i} - \frac{\alpha_{1i}^2}{\gamma_i} \quad (29)$$

$$D_{6,i} = \alpha_{1i}^2 \quad (30)$$

證明：參見附錄 B。

在(24)式中，我們發現 $r(t)$ 具有平均數復歸的特性，漂浮項會有力量讓 $r(t)$ 回到平均值。這裡的平均值是修正後的遠期利率，會隨著時間而改變。另外，短期利率波動度也會與當期的利率水準成正比。此兩特性都類似於 Cox-Ingersoll-Ross (1985)。

### 3. 零息債券之動態過程

定義 $P(t, T)$ 為 $t$ 時點觀察， $T$ 時點到期之零息債券，則

$$\begin{aligned} P(t, T) &\equiv \exp\left\{-\int_t^T f(t, u) du\right\} \\ &= \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp\left\{\sum_{i=1}^N B_{x_i}(T-t)x_i(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^6 B_{\phi_{j,i}}(T-t)\phi_{j,i}(t)\right\} \end{aligned} \quad (31)$$

其中

$$B_{x_i}(\tau) = \frac{\alpha_{1i}}{\gamma_i} \left( \left( \frac{1}{\gamma_i} + \frac{\alpha_{0i}}{\alpha_{1i}} \right) (e^{-\gamma_i\tau} - 1) + \tau e^{-\gamma_i\tau} \right) \quad (32)$$

$$B_{\phi_{1,i}}(\tau) = \frac{\alpha_{1i}}{\gamma_i} (e^{-\gamma_i\tau} - 1) \quad (33)$$

$$B_{\phi_{2,i}}(\tau) = \left( \frac{\alpha_{1i}}{\gamma_i} \right)^2 \left( \frac{1}{\gamma_i} + \frac{\alpha_{0i}}{\alpha_{1i}} \right) \left( \left( \frac{1}{\gamma_i} + \frac{\alpha_{0i}}{\alpha_{1i}} \right) (e^{-\gamma_i\tau} - 1) + \tau e^{-\gamma_i\tau} \right) \quad (34)$$

$$B_{\phi_{3,i}}(\tau) = -\frac{\alpha_{1i}}{\gamma_i^2} \left( \left( \frac{\alpha_{1i}}{2\gamma_i^2} + \frac{\alpha_{0i}}{\gamma_i} + \frac{\alpha_{0i}^2}{2\alpha_{1i}} \right) (e^{-2\gamma_i\tau} - 1) + \left( \frac{\alpha_{1i}}{\gamma_i} + \alpha_{0i} \right) \tau e^{-2\gamma_i\tau} + \frac{\alpha_{1i}}{2} \tau^2 e^{-2\gamma_i\tau} \right) \quad (35)$$

$$B_{\phi_{4,i}}(\tau) = \left( \frac{\alpha_{1i}}{\gamma_i} \right)^2 \left( \frac{1}{\gamma_i} + \frac{\alpha_{0i}}{\alpha_{1i}} \right) (e^{-\gamma_i\tau} - 1) \quad (36)$$

$$B_{\phi_{s,i}}(\tau) = -\frac{\alpha_{1i}}{\gamma_i^2} \left( \left( \frac{\alpha_{1i}}{\gamma_i} + \alpha_{0i} \right) (e^{-2\gamma_i\tau} - 1) + \alpha_{1i}\tau e^{-2\gamma_i\tau} \right) \quad (37)$$

$$B_{\phi_{0,i}}(\tau) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_{1i}}{\gamma_i} \right)^2 (e^{-2\gamma_i\tau} - 1) \quad (38)$$

用 Itô Lemma 展開，則  $P(t, T)$  的動態過程為

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r(t)dt + \sum_{i=1}^N B_{x_i}(T-t) \sqrt{v_i(t)r(t)} dW_i^Q(t) \quad (39)$$

#### 4. 利率上限選擇權 (Interest Rate Cap)

利率上限選擇權是由一系列不同到期日的利率買權(caplets)組合而成，下面將會介紹利率買權之評價方法。

在風險中立測度下，考慮一利率買權，以 3 個月之 LIBOR 作為參考利率，單利計算，名目本金 1 元， $t$  是買權簽約時點，生效期間為  $t_0$  到  $t_1$ ，利率上限為  $x$ 。

令  $\Delta t \equiv t_1 - t_0$ ，以  $L$  代表  $t_0$  時 3 個月之 LIBOR，則買權持有人在  $t_1$  得到

$\max\{L - x, 0\} \times \Delta t$ 。已知  $P(t_0, t_1) = 1/(1 + L\Delta t)$ ，所以

$$\begin{aligned} \max\{L - x, 0\} \times \Delta t &= \max\left\{ \frac{1 - P(t_0, t_1)}{P(t_0, t_1)\Delta t} - x, 0 \right\} \times \Delta t \\ &= \max\left\{ \frac{1}{P(t_0, t_1)} - (1 + x\Delta t), 0 \right\} \\ &= \max\left\{ \frac{1}{P(t_0, t_1)} - k, 0 \right\} \end{aligned}$$

其中  $k \equiv 1 + x\Delta t$ 。所以利率買權在  $t$  時的價格為



$$\begin{aligned}
& E_t^Q \left[ e^{-\int_t^1 r(s) ds} \max \{L - x, 0\} \times \Delta t \right] \\
&= E_t^Q \left[ e^{-\int_t^1 r(s) ds} \max \left\{ \frac{1}{P(t_0, t_1)} - k, 0 \right\} \right] \\
&= k \times E_t^Q \left[ e^{-\int_t^1 r(s) ds} \max \left\{ \frac{1}{k} - P(t_0, t_1), 0 \right\} \right]
\end{aligned}$$

所以，利率買權相當於  $k$  單位歐式債券賣權，其標的資產為  $P(t, t_1)$ ，執行價為  $\frac{1}{k}$ ，到期日為  $t_0$ 。

在附錄 C 中，我們把此隨機微分方程組(SDE system) (6)、(17)–(23)和(39)列出來<sup>3</sup>，並不符合 DPS 定義之 Affine Jump-Diffusion model(簡稱 AJD)，亦不符合 Leippold and Wu (2002)或 Cheng and Scaillet (2007)提出之 Linear-Quadratic Jump-Diffusion model(簡稱 LQJD)，所以無法套用他們的利率買權評價方法。雖然如此，但此模型具有馬可夫性質，能夠有效率地使用蒙地卡羅模擬法來評價各種利率衍生性商品。所以接下來我們將會用此方法來評價債券賣權和利率上限選擇權。

### 三、 數值例子

本節將會利用前面推導出的債券動態過程(31)，用蒙地卡羅模擬法，評價債券賣權和利率上限選擇權。我們將會使用單因子模型來計算(即  $N=1$ )。

#### 1. 蒙地卡羅模擬法

我們參考 Chiarella, Clewlow and Musti (2005)的做法，在風險中立測度  $Q$  之下，一歐式賣權以零息債券  $P(t, T)$  作為標的資產，到期日為  $T_C$ ， $0 \leq T_C \leq T$ ，執行價格

<sup>3</sup> 參見 Trolle and Schwartz (2009) Proposition 2.。

為  $K$ 。則此賣權在  $t$  時點價值為：

$$\text{Put}(t, T_C, T) = E_t^Q \left[ \exp\left(-\int_t^{T_C} r(s) ds\right) \cdot \max\{K - P(T_C, T), 0\} \right]。 \quad (40)$$

我們把  $T_C$  切成  $N_C$  等分， $\Delta t_C = \frac{T_C}{N_C}$ ，我們重複模擬  $\Pi$  次，所以賣權價值為

$$\text{Put}_{\text{MC}}(t, T_C, T) = \frac{1}{\Pi} \sum_{i=1}^{\Pi} \left[ \exp\left(-\sum_{j=0}^{n-1} r_i(j\Delta t_C) \Delta t_C\right) \cdot \max\{K - P_i(n_C \Delta t_C, T), 0\} \right]。 \quad (41)$$

同樣，買權亦能用類似方法來評價。接下來我們將用此方法來評價債券賣權。為了增加準確性，我們使用了 1. Antithetic-variates 方法來加快蒙地卡羅的收斂速度；  
2. Milstein scheme 來降低 SDE 離散化的誤差(參見 Glasserman (2004) p.343)。

## 2. 評價零息債券賣權

給定一零息債券，面額 100 元，到期日  $T=1$ 。以此債券作為標的資產之歐式賣權，到期日是  $T_C=0.5$ ，執行價格為  $K=98.5$ 。給定以下參數：

$$\alpha_0 = 0.0302, \alpha_1 = 0.0879, \gamma = 0.3341, \rho = 0.4615, \kappa = 2.1476, \sigma = 0.3325$$

$$v(0) = 0.7542, \theta = 0.7542$$

我們使用 Nelson and Siegel (1989) 的遠期利率曲線：

$$f(t, T) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\gamma_1(T-t)} + \beta_2 (T-t) e^{-\gamma_2(T-t)} \quad (42)$$

其中  $\beta_0 = 0.0053, \beta_1 = 0.0169, \beta_2 = 0.0079, \gamma_1 = 0.0585, \gamma_2 = 0.0585$ 。我們重複模擬

$P(t, T)$  10000 次，即  $\Pi = 10000$ 。

首先，我們觀察  $\sigma_i$  的變動對賣權價格的影響。我們改變  $\sigma_i = 0, 1, \dots, 10$ ，其餘參數保持不變<sup>4</sup>。從圖 2 及表格 1，對於此組參數，我們可以看出賣權價格隨著  $\sigma_i$

<sup>4</sup> 若對所有的  $i$ ， $\sigma_i = 0$ ，則退化為非隨機波動度模型。

越大而越貴。在圖 3，我們比較  $\sigma_i = 0$  和  $\sigma_i = 5$  兩組參數，不同模擬路徑下的

$P(T_C, T)$  的次數直方圖(可以把它看成是機率分配圖)，發現當  $\sigma_i$  較大，會令

$P(T_C, T)$  的分配呈現厚尾現象， $P(T_C, T)$  落入價內(<98.5)的機率變大，所以賣權價

格越貴。這與 Black-Scholes 模型下股票選擇權價格與  $\sigma$  成正比的概念類似。

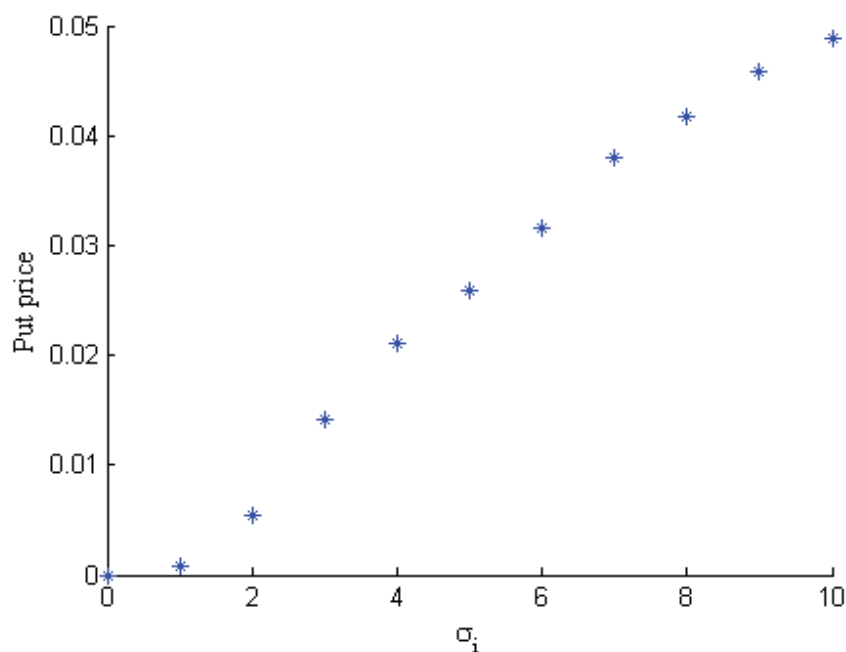


圖 2  $\sigma_i$  變動對零息債券賣權價格的影響

表格 1  $\sigma_i$  變動對零息債券賣權價格的影響

	$\sigma_i$					
	0	2	4	6	8	10
Put Price	$<10^{-5}$	0.0055	0.0211	0.0316	0.0418	0.0488
標準差	$<10^{-4}$	0.0003	0.0008	0.0011	0.0014	0.0017

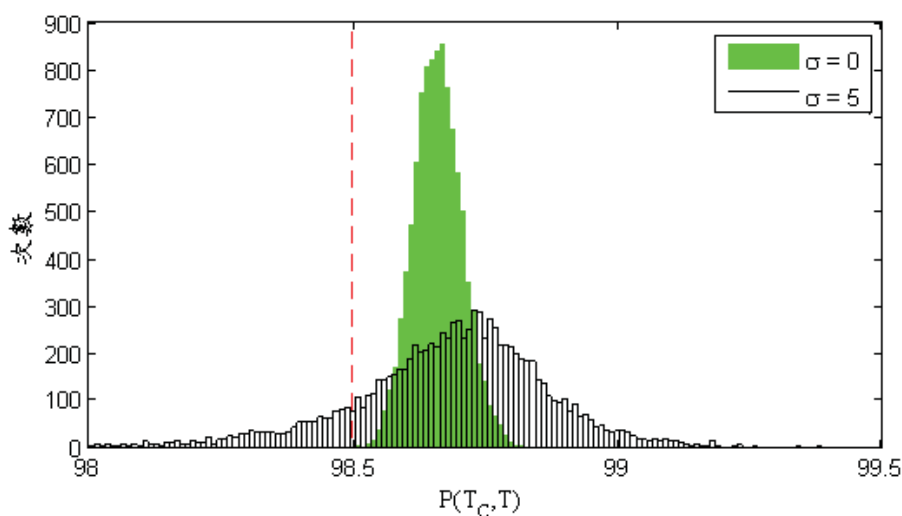


圖 3 模擬 10000 次後， $P(T_C, T)$  落在不同區域的直方圖

### 3. 評價利率上限選擇權

接下來我們評價利率上限選擇權，考慮一個三年期的利率上限選擇權，每季付息一次(Tenor = 1/4 年)，利率上限為 2%。我們上下平行移動遠期利率曲線(用(42)式加  $x\%$ )，其餘參數與上一節相同，模擬 5000 次，觀察利率上限選擇權價格的改變。觀察圖 4 及表格 2，一如我們預期，利率上限選擇權與股票選擇權具有相同的特性：(i) 價格是  $x$  的凸函數；(ii) 在深度價內，價格幾乎是  $x$ (或股價)的線性遞增函數；(iii) 在深度價外，價格幾乎是零。

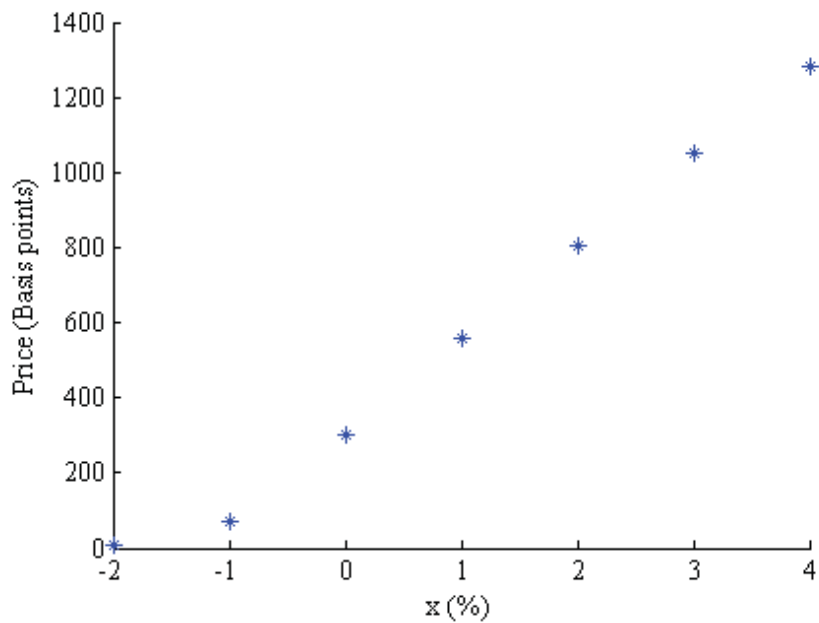


圖 4 遠期利率曲線上下平行移動對利率上限選擇權價格的影響

表格 2 遠期利率曲線上下平行移動對利率上限選擇權價格的影響

	x						
	-2%	-1%	0%	1%	2%	3%	4%
Cap Price (Basis points)	6.93	71.36	301.28	560.04	809.26	1053.97	1289.46
標準差	0.04	0.26	0.31	0.44	0.50	0.54	0.56

接著我們測試  $\rho$  對利率上限選擇權價格的影響，保持其他參數不變，改變  $\rho$ 。我們分別以利率上限  $\text{Cap} = 2\%$ 、 $3\%$ 和  $4\%$ ，模擬 5000 次，從表格 3 和圖 5 得知，在單因子模型下， $\rho$  與價格有一定的相關性。但正相關或負相關，需視乎參數以及此選擇權的價內程度。這也顯示出  $\rho$  在此模型裡的重要性，代表此模型能捕捉非利率期限結構隨機因子的影響力。

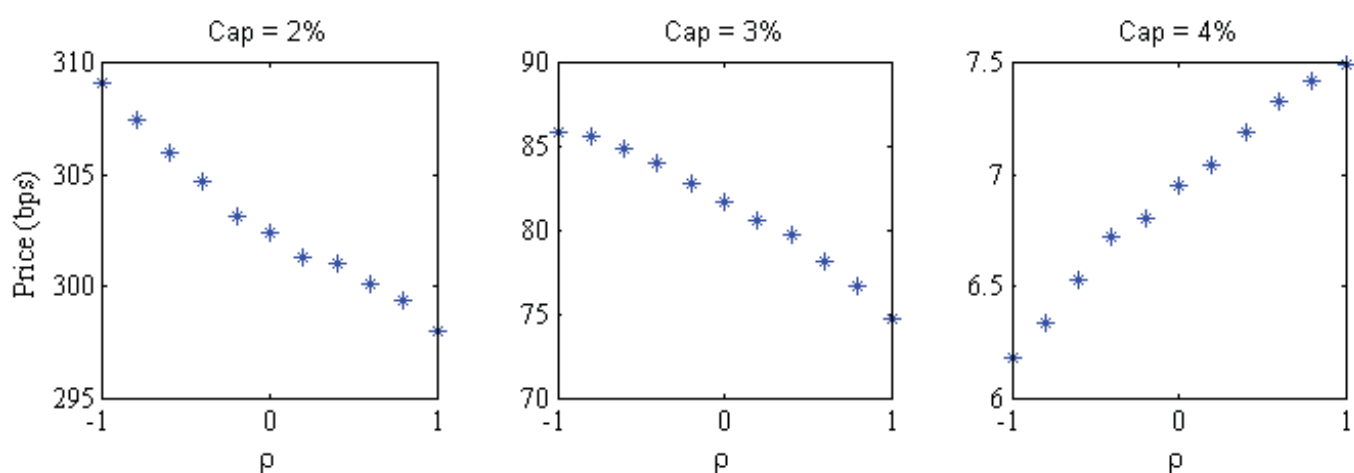


圖 5  $\rho$  對利率上限選擇權價格的影響

表格 3  $\rho$  對利率上限選擇權價格的影響

**Cap = 2%**

	$\rho$					
	-1	-0.6	-0.2	0.2	0.6	1
Cap Price(bps)	309.2	307.0	303.0	301.3	300.1	297.9
標準差	0.403	0.414	0.403	0.398	0.386	0.366

**Cap = 3%**

	$\rho$					
	-1	-0.6	-0.2	0.2	0.6	1
Cap Price(bps)	85.88	84.94	82.83	80.60	78.14	74.71
標準差	0.304	0.317	0.327	0.336	0.333	0.341

**Cap = 4%**

	$\rho$					
	-1	-0.6	-0.2	0.2	0.6	1
Cap Price(bps)	6.176	6.529	6.810	7.042	7.326	7.494
標準差	0.087	0.101	0.114	0.125	0.130	0.142

#### 四、更一般化的模型

我們可以把第二節裡(5)式擴充，把波動度裡面的  $\sqrt{r(t)}$  改為  $r(t)^2$ ，把  $\sqrt{v(t)}$  改

為  $v(t)^\delta$  (其中  $\lambda, \delta > 0$ )，讓  $\lambda$  和  $\delta$  成為可估計的參數。

$$df(t, T) = \mu_f(t, T)dt + \sum_{i=1}^N \sigma_{f,i}(t, T) v_i(t)^\delta r(t)^\lambda dW_i^Q(t) \quad (43)$$

若  $\delta = \frac{1}{2}$ ， $\lambda = 0$ ，則模型退化成 Trolle and Schwartz (2009)；若  $\delta = 0$ ， $N = 1$ ，

則退化成 Bhar and Chiarella (1997)的 HJM 模型。

## 五、 總結

目前已經有非常多文章探討 HJM 模型下的定價議題，而議題主要是(i) 模型的可操作性(包括有沒有封閉解，以及數值方法的計算速度)；(ii) 模型對市場特性的捕捉能力。我們改良現有的模型，讓模型具有以下特性：1. 多因子的 HJM 遠期利率模型；2. 此模型有  $N$  個因子會影響利率結構，另有額外  $N$  個因子會影響波動度和利率衍生性商品；3. 波動率與短期利率有正比關係；4. 非條件波動度呈駝峰狀；5. 利率及債券的狀態變數符合一個馬可夫的過程，因此我們在使用蒙地卡羅法去評價複雜的利率商品時會比較容易計算。

本模型最大優點是讓利率波動度與短期利率有正比關係，這與 Chan et al. (1992)的實證結果相符。我們稱之為狀態依賴波動度。本模型雖無法符合 DSP (2000) 的 AJD 或 Cheng and Scaillet (2007)的 LQJD 之條件，但我們能透過轉換成有限狀態變數的馬可夫過程，讓我們用蒙地卡羅模擬法時更有效率。本模型只考慮無風險的利率期限結構(公債利率)，但我們可以擴充它為跳躍模型，讓遠期利率除了受連續的布朗運動影響，亦會受不連續的跳動所影響，用以捕捉風險性利率(如公司債利率)在信用事件時的劇烈跳動。

## 附錄

### A. 定理 1.之證明

給定(8)式，則(7)式：

$$\begin{aligned} \mu_f(t, T) = & \sum_{i=1}^N \sqrt{v_i(t)} r(t) \left[ \frac{\alpha_{0i} \alpha_{1i}}{\gamma_i} \left( \frac{1}{\gamma_i} + \frac{\alpha_{0i}}{\alpha_{1i}} \right) (e^{-\gamma_i(T-t)} - e^{-2\gamma_i(T-t)}) - \left( \frac{\alpha_{0i} \alpha_{1i}}{\gamma_i} \right) (T-t) e^{-2\gamma_i(T-t)} \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_{1i}^2}{\gamma_i} \left( \frac{1}{\gamma_i} + \frac{\alpha_{0i}}{\alpha_{1i}} \right) (T-t) (e^{-\gamma_i(T-t)} - e^{-2\gamma_i(T-t)}) - \left( \frac{\alpha_{1i}^2}{\gamma_i} \right) (T-t)^2 e^{-2\gamma_i(T-t)} \right] \end{aligned}$$

所以，

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \mu_f(s, T) ds + \sum_{i=1}^N \int_0^t \sigma_{f,i}(s, T) \sqrt{v_i(t)} r(t) dW_i^Q(s)$$

$$= f(0, T) + \sum_{i=1}^N \beta_{x_i}(T-t) x_i(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^6 \beta_{\phi_{j,i}}(T-t) \phi_{j,i}(t)$$

$$x_i(t) = \int_0^t \sqrt{v_i(t)} r(t) e^{-\gamma_i(t-s)} dW_i^Q(s)$$

$$\phi_{1,i}(t) = \int_0^t \sqrt{v_i(t)} r(t) (t-s) e^{-\gamma_i(t-s)} dW_i^Q(s)$$

$$\phi_{2,i}(t) = \int_0^t \sqrt{v_i(t)} r(t) e^{-\gamma_i(t-s)} ds$$

$$\phi_{3,i}(t) = \int_0^t \sqrt{v_i(t)} r(t) e^{-2\gamma_i(t-s)} ds$$

$$\phi_{4,i}(t) = \int_0^t \sqrt{v_i(t)} r(t) (t-s) e^{-\gamma_i(t-s)} ds$$

$$\phi_{5,i}(t) = \int_0^t \sqrt{v_i(t)} r(t) (t-s) e^{-2\gamma_i(t-s)} ds$$

$$\phi_{6,i}(t) = \int_0^t \sqrt{v_i(t)} r(t) (t-s)^2 e^{-2\gamma_i(t-s)} ds$$

把各變數套用 Itô's Lemma 即可得(17)–(23)。



## B. 定理 2.之證明

模仿 Bhar and Chiarella (1997) Appendix 3.的計算過程，從(9)式，

$$r(t) = f(t, t) = f(0, t) + \sum_{i=1}^N \beta_x(0) x_i(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^6 \beta_{\phi_{j,i}}(0) \phi_{j,i}(t)$$

利用 Itô's Lemma，

$$\begin{aligned} dr(t) &= \left[ \frac{\partial}{\partial t} f(0, t) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t v_i(u) r(u) \sigma_i(u, t) \int_u^t \sigma_i(u, y) dy du \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^N \int_0^t \sqrt{v_i(u) r(u)} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_i(u, t) dW_i^Q(u) \right] dt + \sum_{i=1}^N v_i(t) r(t) \sigma_i(t, t) dW_i^Q(t) \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial t} f(0, t) + \sum_{i=1}^N \int_0^t v_i(u) r(u) \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sigma_i(u, t) \int_u^t \sigma_i(u, y) dy \right] du \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^N \int_0^t \sqrt{v_i(u) r(u)} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_i(u, t) dW_i^Q(u) \right] dt + \sum_{i=1}^N v_i(t) r(t) \sigma_i(t, t) dW_i^Q(t) \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial t} f(0, t) + \sum_{i=1}^N \int_0^t v_i(u) r(u) \left( \alpha_{li} e^{-\gamma_i(t-u)} - \gamma_i (\alpha_{0i} + \alpha_{li} (t-u)) e^{-\gamma_i(t-u)} \right) \int_u^t \sigma_i(u, y) dy du \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^N \int_0^t v_i(u) r(u) \sigma_i(u, t)^2 du \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^N \int_0^t \sqrt{v_i(u) r(u)} \left( \alpha_{li} e^{-\gamma_i(t-u)} - \gamma_i (\alpha_{0i} + \alpha_{li} (t-u)) e^{-\gamma_i(t-u)} \right) dW_i^Q(u) \right] dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \alpha_{0i} \sqrt{v_i(t) r(t)} dW_i^Q(t) \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial t} f(0, t) + \sum_{i=1}^N \left( \gamma_i f(0, t) - \gamma_i r(t) + \alpha_{li} x(t) + \sum_{j=2}^6 D_{j,i} \phi_{j,i}(t) \right) \right] dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \alpha_{0i} \sqrt{v_i(t) r(t)} dW_i^Q(t) \end{aligned}$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial T} \sigma_i(t, T) = \alpha_{li} e^{-\gamma_i(T-t)} - \gamma_i (\alpha_{0i} + \alpha_{li} (T-t)) e^{-\gamma_i(T-t)},$$

$D_{j,i}$  如(25) – (30)式所示。

## C. AJD 和 LQJD 條件

### Linear-Quadratic Jump-Diffusion 的定義

Cheng and Scaillet (2007) 定義  $n$  維狀態向量  $\mathbf{X}(t)$  (即  $n$  個狀態變數) 的 Linear-Quadratic Jump-Diffusion (LQJD) 為：

$$d\mathbf{X}(t) = \mu(\mathbf{X}(t), t)dt + \sigma(\mathbf{X}(t), t)dW(t) + d\mathbf{J}(t)$$

其中：

- (i)  $\mathbf{W}(t)$  是標準  $n$  維布朗運動矩陣；
- (ii)  $\mathbf{J}(t)$  是跳躍過程， $d\mathbf{J}(t)$  是獨立增量(independent increments)，其跳躍大小的分配是  $\Pi(dy, t)$ ，到達強度(arrival intensity)是  $\lambda(\mathbf{X}(t), t)$ ；

- (iii)  $(\varepsilon, F, P)$  是其機率空間， $(\mathbf{W}, \mathbf{J})$  適應於 (adapt to) 域流(filtration)  $\{F_t\}_{t \geq 0}$ 。

且  $\mu(\mathbf{X}(t), t)$ 、 $\sigma(\mathbf{X}(t), t)$ 、 $\Omega(\mathbf{X}(t), t) = \sigma(\mathbf{X}(t), t)\sigma(\mathbf{X}(t), t)^T$  和  $\lambda(\mathbf{X}(t), t)$  皆符合 regularity conditions (參見 DPS (2000))，並必需能寫成

$$\aleph(\mathbf{X}(t), t) = \frac{1}{2} \mathbf{X}^T \mathbf{\Lambda}_{\aleph}(t) \mathbf{X} + b_{\aleph}^T(t) \mathbf{X} + c_{\aleph}(t)$$

$$\mathbf{\Lambda}_{\aleph} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\aleph} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}_{\aleph}$  維度等於二次形式(quadratic form)的狀態變數個數。

我們可以把  $\mathbf{X}(t)$  和  $b_{\aleph}$  寫成

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}(t) \\ \underline{\mathbf{X}}(t) \end{bmatrix}, \quad b_{\aleph} = \begin{bmatrix} k_{\aleph} \\ l_{\aleph} \end{bmatrix}$$

所以  $\aleph(\mathbf{X}(t), t)$  能夠表示為

$$\aleph(\mathbf{X}(t), t) = \underbrace{l_{\aleph}^T(t) \underline{\mathbf{X}}}_{\text{線性部份}} + \underbrace{\frac{1}{2} \bar{\mathbf{X}}^T \mathbf{A}_{\aleph}(t) \bar{\mathbf{X}} + k_{\aleph}^T(t) \bar{\mathbf{X}} + c_{\aleph}(t)}_{\text{二次部份}}$$

所以此形式稱為 Linear-Quadratic (LQ) 函數(即  $\underline{\mathbf{X}}(t)$  的線性函數， $\mathbf{X}(t)$  的二次函數)。

用  $LQ_m^q(n)$  表示  $n$  因子的 LQJD 模型，其中  $q$  個  $\mathbf{X}(t)$  的元素(至少出現一次)是二次形式(即  $\bar{\mathbf{X}}(t)$  維度是  $q$ )， $m$  個  $\underline{\mathbf{X}}(t)$  的元素出現在  $\lambda$  或  $\Omega$ 。我們定義  $\mathbf{X}(t)$  的擴充轉換(extended transform)為

$$\phi(g; \mathbf{X}, t, T) = E \left[ \exp \left( - \int_t^T R(\mathbf{X}(s), s) ds \right) e^{g(\mathbf{X}(t), t)} \mid F_t \right]。$$

在  $LQ_m^q(n)$  下，

$$g(\mathbf{X}(t), t) = l(t)^T \underline{\mathbf{X}} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{X}}^T \mathbf{A}(t) \bar{\mathbf{X}} + k(t) \bar{\mathbf{X}} + c(t)$$

其中  $\mathbf{A}(t)$  是  $\text{rank} = q$  的對稱矩陣。與之前的模型比較，當  $q = n$  時，則會退化成 Leippold and Wu (2002) 的 Quadratic Gaussian (QG) 模型；當  $q = 0$  時，則會退化成 DPS (2000) 的 ADJ。

### Linear-Quadratic Jump-Diffusion 的限制條件

$g(\mathbf{X}(t), t)$  和  $R(\mathbf{X}(t), t)$  皆為  $\mathbf{X}(t)$  的 LQ 函數， $LQ_m^q(n)$  模型必需符合以下三個

限制條件：

1.  $\mathbf{J}(t)$  的前  $q$  個元素皆為零。
2.  $\mathbf{X}(t)$  的漂浮項為

$$\mu(\mathbf{X}, t) = \begin{bmatrix} \bar{\mu}(\bar{\mathbf{X}}(t), t) \\ \underline{\mu}(\bar{\mathbf{X}}(t), \underline{\mathbf{X}}(t), t) \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

其中(a)  $\bar{\mu}(\bar{\mathbf{X}}(t), t)$  必須為  $\bar{\mathbf{X}}(t)$  的線性函數；(b)  $\underline{\mu}(\bar{\mathbf{X}}(t), \underline{\mathbf{X}}(t), t)$  是  $\mathbf{X}(t)$  的 LQ 函數。

3. 相關矩陣

$$\Omega(\mathbf{X}, t) = \begin{bmatrix} \bar{\Omega}(t) & \tilde{\Omega}(\bar{\mathbf{X}}, t) \\ \tilde{\Omega}(\bar{\mathbf{X}}, t)^T & \underline{\Omega}(\mathbf{X}, t) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

其中(a)  $\bar{\Omega}(t)$  是  $t$  的確定函數(deterministic function)；(b)  $\underline{\Omega}(\mathbf{X}, t)$  是  $\mathbf{X}$  的 LQ 函數；(c)  $\tilde{\Omega}(\bar{\mathbf{X}}, t)$  是  $\bar{\mathbf{X}}(t)$  的線性函數。

### 本模型的動態過程

不失一般性下，考慮  $N=1$  情形。模仿 Collin-Dufresne and Goldstein (2003) 的做法，其評價公式需要 11 個狀態變數，把它們寫成向量：

$\mathbf{Y} \equiv [\ln P(t, T_0), \ln P(t, T_1), v, r, x, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6]^T$ ，則其 SDE 為

$$\begin{bmatrix} d \ln P_0 \\ d \ln P_1 \\ dv \\ dr \\ dx \\ d\phi_1 \\ d\phi_2 \\ d\phi_3 \\ d\phi_4 \\ d\phi_5 \\ d\phi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N B_{x_i} (T_0 - t)^2 v r \\ r - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N B_{x_i} (T_1 - t)^2 v r \\ \kappa(\theta - v) \\ f(0, t) + \alpha_0 x + \sum_{j=2}^6 D_j \cdot \phi_j \\ -\gamma x \\ x - \gamma \phi \\ rv - \gamma \phi_2 \\ rv - 2\gamma \phi_3 \\ \phi_2 - \gamma \phi_4 \\ \phi_3 - 2\gamma \phi_5 \\ 2\phi_5 - 2\gamma \phi_6 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} B_{x_1} (T_0 - t) \sqrt{v r} \\ B_{x_1} (T_1 - t) \sqrt{v r} \\ \sigma \sqrt{v} \rho \\ \sqrt{v r} \\ \sqrt{v r} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma \sqrt{v} \sqrt{1 - \rho^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW^Q(t) \\ dZ^Q(t) \end{bmatrix}$$

這裡以  $P_i$  代表  $P(t, T_i)$ 。從上式可知，雖然  $\mathbf{Y}$  是馬可夫過程，但其漂流項並非  $\mathbf{Y}$  的線性函數，所以不能使用 DPS (2000) 的 ADJ 評價公式。然後，我們觀察 LQJD 的定義，則  $q = 2(\bar{\mathbf{X}}(t) = [v, r]^T)$ ，但  $\bar{\Omega}(t)$  並不是  $t$  的確定函數(deterministic function)，所以  $\mathbf{Y}$  並不符合 LQJD 的限制條件，所以亦無法使用 Cheng and Scaillet (2007) 的評價公式。

## 參考文獻

- Andersen, T. G., and L. Benzoni, 2008. Do Bonds Span Volatility Risk in the U.S. Treasury Market? A Specification Test for Affine Term Structure Models, *SSRN eLibrary*.
- Andersen, T. G., and J. Lund, 1997. Estimating continuous-time stochastic volatility models of the short-term interest rate, *Journal of Econometrics* 77, 343-377.
- Ball, C. A., and W. N. Torous, 1999. The Stochastic Volatility of Short-Term Interest Rates: Some International Evidence, *The Journal of Finance* 54, 2339-2359.
- Bhar, R., and C. Chiarella, 1997. Transformation of Heath-Jarrow-Morton models to Markovian systems, *The European Journal of Finance* 3, 1 - 26.
- Bhar, R., C. Chiarella, N. El-Hassan, and X. Zheng, 2000. The reduction of forward rate dependent volatility HJM models to Markovian form: Pricing European bond options, *Journal of Computational Finance* 3, 47.
- Björk, T., C. Landén, and L. Svensson, 2004. Finite-dimensional Markovian realizations for stochastic volatility forward-rate models, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 460, 53-83.
- Björk, T., and L. Svensson, 2001. On the Existence of Finite-Dimensional Realizations for Nonlinear Forward Rate Models, *Mathematical Finance* 11, 205-243.
- Carverhill, A., 1994. When is the short rate Markovian?, *Mathematical Finance* 4, 305-312.
- Chan, K. C., G. A. Karolyi, F. A. Longstaff, and A. B. Sanders, 1992. An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate, *The Journal of Finance* 47, 1209-1227.
- Cheng, P., and O. Scaillet, 2007. Linear-Quadratic Jump-Diffusion Modeling,

*Mathematical Finance* 17, 575-598.

Chiarella, C., L. Clewlow, and S. Musti, 2005. A volatility decomposition control variate technique for Monte Carlo simulations of Heath Jarrow Morton models, *European Journal of Operational Research* 161, 325-336.

Chiarella, C., and O. K. Kwon, 2001. Forward rate dependent Markovian transformations of the Heath-Jarrow-Morton term structure model, *Finance and stochastics* 5, 237.

Clifford, A. B., and N. T. Walter, 1999. The Stochastic Volatility of Short-Term Interest Rates: Some International Evidence, *Journal of Finance* 54, 2339-2359.

Collin-Dufresne, P., and R. S. Goldstein, 2002. Do Bonds Span the Fixed Income Markets? Theory and Evidence for Unspanned Stochastic Volatility, *The Journal of Finance* 57, 1685-1730.

Collin-Dufresne, P., and R. S. Goldstein, 2003. Generalizing the Affine Framework to HJM and Random Field Models, *SSRN eLibrary*.

Cox, J. C., J. E. Ingersoll, Jr., and S. A. Ross, 1985. A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica* 53, 385-407.

Duffie, D., J. Pan, and K. Singleton, 2000. Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusions, *Econometrica* 68, 1343-1376.

Glasserman, P., 2004. *Monte Carlo methods in financial engineering*(Springer, New York).

Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton, 1992. Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation, *Econometrica* 60, 77-105.

Heidari, M., and L. Wu, 2003. Are Interest Rate Derivatives Spanned by the Term Structure of Interest Rates?, *Journal of Fixed Income* 13, 75-86.

Heston, S. L., 1993. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with

- Applications to Bond and Currency Options, *The Review of Financial Studies* 6, 327-343.
- Ho, T. S. Y., and S.-B. Lee, 1986. Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims, *The Journal of Finance* 41, 1011-1029.
- Hull, J., and A. White, 1990. Pricing Interest-Rate-Derivative Securities, *The Review of Financial Studies* 3, 573-592.
- Jeffrey, A., 1995. Single Factor Heath-Jarrow-Morton Term Structure Models Based on Markov Spot Interest Rate Dynamics, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* 30, 619-642.
- Leippold, M., and L. Wu, 2002. Asset Pricing under the Quadratic Class, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 37, 271-295.
- Li, H., and F. Zhao, 2006. Unspanned Stochastic Volatility: Evidence from Hedging Interest Rate Derivatives, *The Journal of Finance* 61, 341-378.
- Li, H., and F. Zhao, 2006. Unspanned Stochastic Volatility: Evidence from Hedging Interest Rate Derivatives, *The Journal of Finance* 61, 341-378.
- Mercurio, F., and J. M. Moraleda, 2000. An analytically tractable interest rate model with humped volatility, *European Journal of Operational Research* 120, 205-214.
- Mercurio, F., and J. M. Moraleda, 2001. A family of humped volatility models, *The European Journal of Finance* 7, 93 - 116.
- Nelson, C. R., and A. F. Siegel, 1987. Parsimonious Modeling of Yield Curves, *The Journal of Business* 60, 473-489.
- Ritchken, P., and L. Sankarasubramanian, 1995. Volatility structures of forward rates and the dynamics of the term structure, *Mathematical Finance* 5, 55-72.
- Trolle, A. B., and E. S. Schwartz, 2009. A General Stochastic Volatility Model for the Pricing of Interest Rate Derivatives, *Rev. Financ. Stud.* 22, 2007-2057.
- Vasicek, O., 1977. An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of*

*Financial Economics* 5, 177-188.

