

國立臺灣大學工學院機械工程學研究所

碩士論文

Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis



結合非線性力的旋轉式雙自由度壓電能量採集器分析

Analysis of a Rotational Nonlinear Two-degree-of-
freedom Piezoelectric Energy Harvester

李翔宇

Xiangyu Li

指導教授：蘇偉儁 博士

Advisor: Wei-Jiun Su, Ph.D.

中華民國 110 年 1 月

Jan, 2021

國立臺灣大學碩士學位論文

口試委員會審定書

結合非線性力的旋轉式雙自由度壓電能量採集器分析

Analysis of a Rotational Nonlinear Two-degree-of-freedom

Piezoelectric Energy Harvester

本論文係李翔宇君 (R07522643) 在國立臺灣大學機械工程學系完成之碩士學位論文，於民國 110 年 01 月 25 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

蘇偉僑

(簽名)

(指導教授)

舒貽忠

舒貽忠

陳蓉珊

陳蓉珊

蘇偉僑


蘇偉僑

系主任

林錦群

(簽名)

誌謝



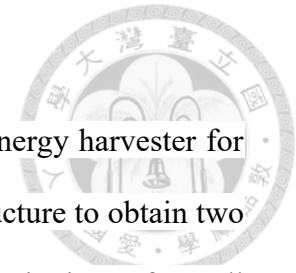
首先最想要感謝的是蘇偉儒教授長期對我的指導和包容，在研究工作陷入困難時，蘇教授總會給與適當的指點讓我茅塞頓開，此外還給與我一個寬鬆的環境以自主安排研究進展和享受研究中的樂趣，因為轉專業導致的知識匱乏教授也予以理解和幫助。其次感謝我的父母，予以我經濟上的幫助讓我專心完成學業；當我遇到委屈時也是父母耐心聽我的埋怨，幫助我調整自己。還要感謝實驗室的學長：文波、奕康、奕傑、紹增、文宇、佳翰、書群，他們總願意無私地給與我幫助，特別要感謝奕傑學長在幾何非線性模型構建上的研究和傳授，給我以很大的幫助；感謝實驗室的同儕：振廷、宗祥、麒翔、郁婷以及實驗室的學弟妹：子洋、雨融等，一路上非常感謝能夠遇到你們。不論是什麼事情至少我自己是問心無愧的，雖然還是有很多遺憾。最後感謝台灣大學機械工程學系，願意錄取我給我以讀研的機會去提升自己和思考未來，希望台大和機械工程係能夠越來越好。

摘要

本論文提出一種用於旋轉環境的雙自由度壓電能量收集器。收集器設計為折返樑結構以獲得低頻下頻率相近的兩個共振頻峰值的效果。模型上本文放寬傳統古典樑假設中的小位移振動的限制，以幾何非線性的模型來探討旋轉環境大位移振動下發電電壓之頻響與頻寬的數值解。研究中首先考慮改變折返樑結構參數對發電效率的影響。特別研究了當上升模態，即共振頻率隨轉速提升而上升的模態，其共振頻率先於和後於模態轉向（mode veering）發生的兩種情況下的電壓掃頻結果，並取得接近現實情況的模擬結果。為使系統頻寬拓寬，實驗還使用兩種非線性外力作用：一種藉由機械檔板的碰撞產生非線性脈衝力來改變系統剛性；另一種藉由磁力以非接觸的方式來改變系統的剛性。最後，對比實驗結果與模型數值擬合結果，探討其現象。研究發現，引入非線性力在大部分情況下對雙自由度系統的共振頻寬拓展效果顯著，在一些條件下情況則不夠理想，並且普遍存在發電效率下降的情況。

關鍵字：幾何非線性、旋轉運動、壓電能量收集、雙自由度、擋板非線性、磁力非線性

ABSTRACT



This thesis proposes a two-degree-of-freedom piezoelectric energy harvester for rotational excitations. The harvester is based on a cut-out beam structure to obtain two close resonant frequencies. In this model, we remove the limitation of small displacement vibration in the traditional classical beam theory, and use a geometric nonlinear model to obtain the numerical results of the frequency response and bandwidth of the generating voltage under large-displacement vibration in a rotating environment. First, we discuss the effect of different structure parameters in energy harvesting efficiency. Besides, we investigate the frequency sweeping results when the resonant frequency of the up mode, which is the case when the resonant frequency increases with the rotation speed, occurs before and after mode veering. The simulation results match the experiment results well. This study uses two types of nonlinear external force to broaden the bandwidth: the mechanical stopper which generates a nonlinear impulse force to change the rigidity of the system by colliding; the magnetic force which changes the rigidity of the system in a non-contact way. Finally, we discuss the phenomenon by compare the experimental results with the simulations. In conclusion, the nonlinear force is effective in bandwidth expanding of our two-degree-of-freedom piezoelectric energy harvester in most situations, while not so well in some other conditions. The decreasing of power generation efficiency is universal.

Keywords: geometric nonlinearity, rotational motion, piezoelectric energy harvester, two-degree-of-freedom, Impact-based nonlinearity, magnetic nonlinearity

目錄

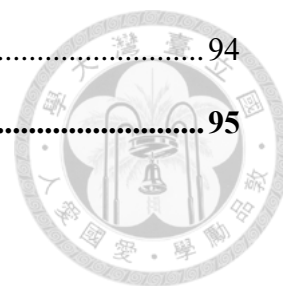


誌謝.....	i
摘要.....	ii
ABSTRACT.....	iii
目錄.....	iv
圖目錄.....	vii
表目錄.....	x
Chapter 1 緒論.....	1
1.1 前言.....	1
1.2 文獻回顧.....	2
1.3 研究動機與方法.....	8
1.4 論文架構.....	9
Chapter 2 壓電理論.....	10
2.1 壓電效應.....	10
2.2 壓電本構方程式.....	12
Chapter 3 旋轉壓電折返樑模型.....	14
3.1 旋轉壓電折返樑力學模型.....	15
3.1.1 強迫振動方程.....	15
3.1.2 模態分析.....	24
3.1.3 正規化處理.....	27
3.2 旋轉壓電折返樑電學模型.....	32
3.3 數值計算和模態處理.....	34
Chapter 4 非線性模型.....	37
4.1 脈衝非線性模型.....	38
4.1.1 機械擋模型.....	38



4.1.2	脈衝模型	39
4.2	磁力非線性模型	44
4.2.1	磁力模型	44
4.2.2	系統模型	46
Chapter 5	實驗設計.....	49
5.1	原型設計	49
5.2	實驗儀器	52
5.3	實驗流程	55
5.3.1	基底激振實驗	55
5.3.2	旋轉環境實驗	57
Chapter 6	驗證與討論	59
6.1	壓電材料簡化假設	59
6.2	旋轉折返樑模型驗證	62
6.2.1	旋轉折返基樑驗證	62
6.2.2	結構參數調節影響與驗證	65
6.3	擋板非線性模型驗證	74
6.3.1	擋板驗證	74
6.3.2	主樑末端擋板模型驗證	75
6.3.3	副樑末端擋板模型驗證	79
6.4	磁力非線性模型驗證	82
6.4.1	磁鐵模型驗證	82
6.4.2	主樑末端磁力模型驗證	83
6.4.3	副樑末端磁力模型驗證	88
Chapter 7	結論與未來展望	93
7.1	結論	93

7.2	未來展望	94
參考文獻.....		95



圖目錄



圖 1.1 幾何結構優化式採集器.....	3
圖 1.2 多模態採集器.....	3
圖 1.3 非線性採集器.....	4
圖 1.4 蒲公英狀多方向壓電振動能量採集器[24]；	5
圖 1.5 旋轉式復合梁.....	5
圖 1.6 旋轉式採集器.....	7
圖 1.7 旋轉式雙自由度折返樑系統能量採集器示意圖.....	8
圖 2.1 極化處理.....	10
圖 2.2 壓電效應.....	11
圖 3.1 四段折返樑系統坐標系圖.....	15
圖 3.2 樑單位體連續性受力示意.....	17
圖 3.3 壓電折返樑耦合部分橫截面示意圖.....	19
圖 3.4 單位長度樑角度與位移偏移關係示意.....	21
圖 3.5 壓電材料等效電路.....	32
圖 3.6 折返樑轉速與自然頻率關係變化.....	35
圖 3.7 模態轉向區域折返樑轉速與自然頻率關係變化.....	35
圖 3.8 模態轉向區域折返樑轉振動形狀變化.....	35
圖 3.9 上升模態先於和後於模態轉向到達旋轉共振頻.....	36
圖 4.1 旋轉折返樑脈衝非線性能量採集器.....	37
圖 4.2 副樑末端振動偏移示意.....	41
圖 4.3 旋轉折返樑磁力非線性能量收集器.....	44
圖 4.4 方形磁鐵坐標示意圖.....	45
圖 5.1 實驗原型設計.....	50
圖 5.2 旋轉測試平台.....	51

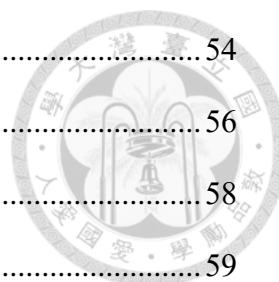


圖 5.3 實驗儀器.....	54
圖 5.4 基底激振實驗配置圖.....	56
圖 5.5 旋轉環境實驗配置圖.....	58
圖 6.1 壓電薄膜結構組成示意圖[51].....	59
圖 6.2 壓電薄膜簡化示意圖.....	60
圖 6.3 折返樑幾何結構.....	62
圖 6.4 旋轉折返樑基樑 A 共振頻模擬圖與實驗圖.....	64
圖 6.5 旋轉折返樑基樑 A 模擬實驗比較圖.....	65
圖 6.6 旋轉折返樑改變主樑樑長 L	67
圖 6.7 旋轉折返樑改變主樑長度 L 模擬實驗比較圖.....	67
圖 6.8 旋轉折返樑改變 $M_1 = 3.5\text{ g}$ 共振頻模擬圖與實驗圖.....	69
圖 6.9 旋轉折返樑改變主樑末端質量塊 M_1 模擬實驗比較圖.....	69
圖 6.10 旋轉折返樑改變主樑末端質量塊模擬實驗比較圖.....	70
圖 6.11 旋轉折返樑改變副樑末端質量塊 M_2	71
圖 6.12 旋轉折返樑改變副樑末端質量塊模擬實驗比較圖.....	72
圖 6.13 擋板 A (主樑擋板) 掃頻共振頻實驗模擬對比.....	75
圖 6.14 擋板 B (副樑擋板) 掃頻共振頻實驗模擬對比.....	75
圖 6.15 旋轉折返樑基樑 B 共振頻模擬圖與實驗圖.....	77
圖 6.16 旋轉折返樑基樑 B 模擬實驗比較圖.....	77
圖 6.17 旋轉折返樑主樑末端擋板系統在不同碰撞間距下實驗圖.....	78
圖 6.18 旋轉折返樑主樑末端擋板系統在不同碰撞間距下模擬圖.....	78
圖 6.19 旋轉折返樑主樑末端擋板系統正反掃實驗模擬比較圖.....	79
圖 6.20 旋轉折返樑副樑末端擋板系統在不同碰撞間距下實驗圖.....	80
圖 6.21 旋轉折返樑副樑末端擋板系統在不同碰撞間距下模擬圖.....	80
圖 6.22 旋轉折返樑副樑末端擋板系統正反掃實驗模擬比較圖.....	81

圖 6.23 兩顆磁鐵之磁力模型驗證.....	82
圖 6.24 4*4*4 mm與5*5*5 mm兩顆磁鐵在 X 方向偏移5 mm情況之磁力模型 驗證.....	83
圖 6.25 旋轉折返樑主樑末端磁力系統在不同磁鐵間距下實驗圖.....	84
圖 6.26 旋轉折返樑主樑末端磁力系統在不同磁鐵間距下模擬圖.....	85
圖 6.27 旋轉折返樑主樑末端磁力系統正反掃實驗模擬比較圖.....	85
圖 6.28 旋轉折返樑主樑末端磁力系統位能圖.....	88
圖 6.29 旋轉折返樑副樑末端磁力系統在不同磁鐵間距下實驗圖.....	89
圖 6.30 旋轉折返樑副樑末端磁力系統在不同磁鐵間距下模擬圖.....	90
圖 6.31 旋轉折返樑副樑末端磁力系統正反掃實驗模擬比較圖.....	90
圖 6.32 旋轉折返樑副樑末端磁力系統位能圖.....	92

表目錄

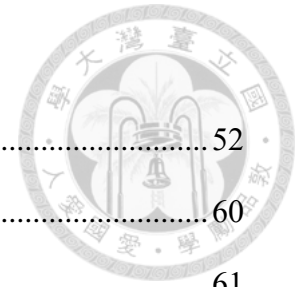


表 5.1 實驗儀器.....	52
表 6.1 DT1-028K/L 官方參數.....	60
表 6.2 DT1-028K/L 簡化後參數.....	61
表 6.3 旋轉折返樑基基底樑 A 參數.....	63
表 6.4 旋轉折返樑基基底樑 A 數值模擬參數修正.....	64
表 6.5 旋轉折返樑對比不同樑長的參數修正.....	66
表 6.6 不同樑長 L 對發電面積比較.....	68
表 6.7 旋轉折返樑對比不同主樑末端質量塊 M_1 的參數修正.....	68
表 6.8 不同主樑末端質量 M_1 對發電面積比較.....	70
表 6.9 旋轉折返樑對比不同副樑末端質量塊 M_2 的參數修正.....	70
表 6.10 不同副樑末端質量 M_2 對發電面積比較.....	72
表 6.11 擋板 A (主樑擋板) 與擋板 B (副樑擋板) 參數.....	74
表 6.12 旋轉折返樑基基底樑 B 參數.....	76
表 6.13 不同主樑末端擋板間距對發電面積的比較.....	79
表 6.14 不同副樑末端擋板間距對發電面積的比較.....	81
表 6.15 旋轉折返樑主樑末端磁力系統參數修正.....	83
表 6.16 不同主樑末端磁鐵間距對發電面積的比較.....	86
表 6.17 旋轉折返樑副樑末端磁力系統參數修正.....	89
表 6.18 不同副樑末端磁鐵間距對發電面積的比較.....	90

Chapter 1 緒論



1.1 前言

隨著社會的發展，人類對環境保護的意識不斷加強，同時對穩定的不間斷電力的需求促使人類去開發清潔、環保、可靠、廉價的新能源。人類已經使用了以風能、水、潮汐能、地熱和太陽能等形式的能量收集技術來解決宏觀上的能源需求；在微觀能量收集領域，人們的目光則集中在機械能，生物能和熱能等環境中比較常見的能量上。其中振動能量是環境中最常見也最容易浪費掉的一種，將振動能轉化為電能為微觀能量收集提供了一個解決思路。根據發電原理不同，振動能量收集可以分為靜電式、電磁式與壓電式。其中，電磁式能量收集的輸出電壓較低而靜電式則需要施加輸入電壓和電流[1]；相比較而言壓電式能量收集有著能量轉換效率高、結構簡單等優點而受到廣泛地研究和關注。同時，無線感測器技術和超低功率的電子設備技術（MEMS）的發展對電池的壽命，穩定性和便攜性都提出了更高的要求，壓電能量收集的技術特點則為其提供了強有力的支援。目前，壓電技術應用前景廣闊，如微型發電機、運動鞋、心臟起搏器、健康監測設備[2]、工業設備健康監測、風能和海洋能收集等都有壓電能量收集裝置的身影。近些年來，旋轉環境下的能量收集愈發得到重視，與傳統的垂直能量收集相比，旋轉系統體現出較為明顯的幾何非線性，受到離心力和剪切力影響較大，一些精細的理論會將科氏力（Coriolis effect），扭轉（torsion），幾何截面形狀，離心硬化效應（Centrifugal stiffening effect）組合納入考慮[3]。目前旋轉壓電能量收集系統在風力渦輪機，工業風扇和蒸汽輪機都有較多應用。



1.2 文獻回顧

壓電材料根據電壓與應變方向之間的方向關係分為 31 式和 33 式，Lee 等人 [4] 比較了兩種模式的輸出功率，認為 31 模式下的性能優於 33 模式下的性能；Kim 等人 [5] 則認為，對於 MEMS，當叉指電極 (IDE) 的寬度介於 8-20 μm 之間時，33 模式的 MEMS 有著更高的電壓和功率。

歐拉-伯努利樑理論是各種研究中最基本的理論，由於它忽略了橫向剪切形變和旋轉慣性效應，因此低估了旋轉系統中樑的擾度 (deflections)，高估了系統的自然頻率 (natural frequency) [3]。經典的樑理論放寬了歐拉-伯努利樑的第二個假設，它允許樑在變形時橫截面不保持平面。在此基礎上，加入了橫向剪切形變的鐵木辛柯模型對樑寬厚比較小的厚樑的運動預測更為準確。大多數旋轉樑的理論在處理橫截面的問題時均加入了特定的假設補充以簡化計算，但也因此不適用於複合結構的樑。Chandiramani 和 Librescu [6] 構建了一種精樑理論用於橫截面形狀不均勻或複合結構的樑，討論了橫向剪切、翹曲 (warpings)、離心力、科氏力等非典型力的影響。除了各式各樣的有關理論模型的優化理論，拓寬採集頻寬的工作也是壓電能量收集研究的重點。頻寬對最終的發電功率有著重要的影響，為了提升壓電收集的頻寬，前人在壓電能量收集系統上進行很多優化。常見的優化方法包括幾何結構的優化、多模態法、引入非線性項、多方向收集、外接電路等。

懸臂樑是壓電能量收集中最常見的幾何結構，有著振動幅度大共振頻低等優點，Erturk 和 Inman [7, 8] 對傳統壓電懸臂樑的能量收集有著全面完整的理論模型推導和實驗結果驗證；Roundy [9] 指出由於結構優勢，錐形樑比矩形樑可以提供更多的能量輸出；Sharpes 等人 [10] 使用之字形結構以通過降低懸臂結構的剛度來降低共振頻率；Kim 等人分別在 [11] 和 [12] 中分析和實驗了在不同壓力下工作的壓電圓膜的幾何參數和電極配置對能量收集的影響；Kim 等人 [13] 設計的鉸式可在週期性條件 (100–200 Hz) 下以 100 N 左右的力收集壓電能量。

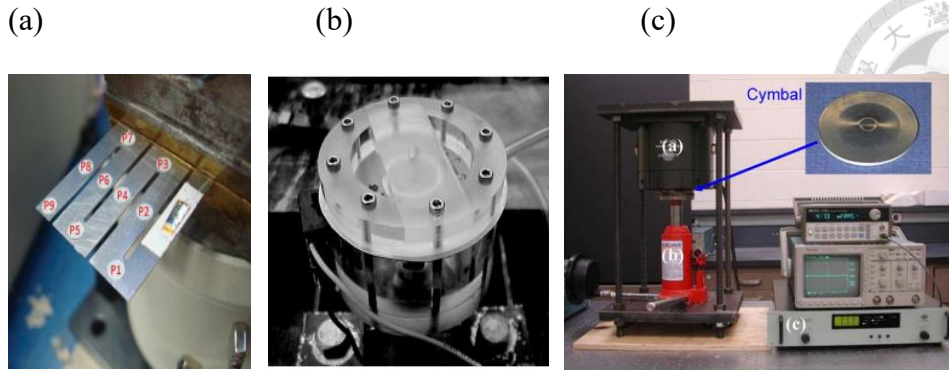


圖 1.1 幾何結構優化式採集器

(a)之字形樑[10]；(b) 壓電圓膜[12]；(c) 鈹式樑[13]；

多模態法主要通過增加系統的共振模態的方法，以增加頻寬。Tang 和 Zuo [14]提出並分析了一種將質量塊與換能器和彈簧串聯連接在一起的雙質量振動能量收集器使其具有較寬的頻寬並證明該收集器比傳統的單質量振動能量收集器能夠收集更多的能量；Kim 等人[15]和 Hu 等人[16]分別提出了基於兩階段折疊和三階段折疊懸臂的多質量多彈簧壓電振動能量收集器，指出使用非對稱間隙結構可以進一步提高能量轉換效率；Wu 等人[17]分析了雙自由度折返樑結構主副樑在不同尺寸比例下振動的變化規律；Toyabur 等人[18]提出了一種與四個壓電元件並聯彈簧橋結構，可以在 10-20 Hz 的範圍內獲得四個峰值。

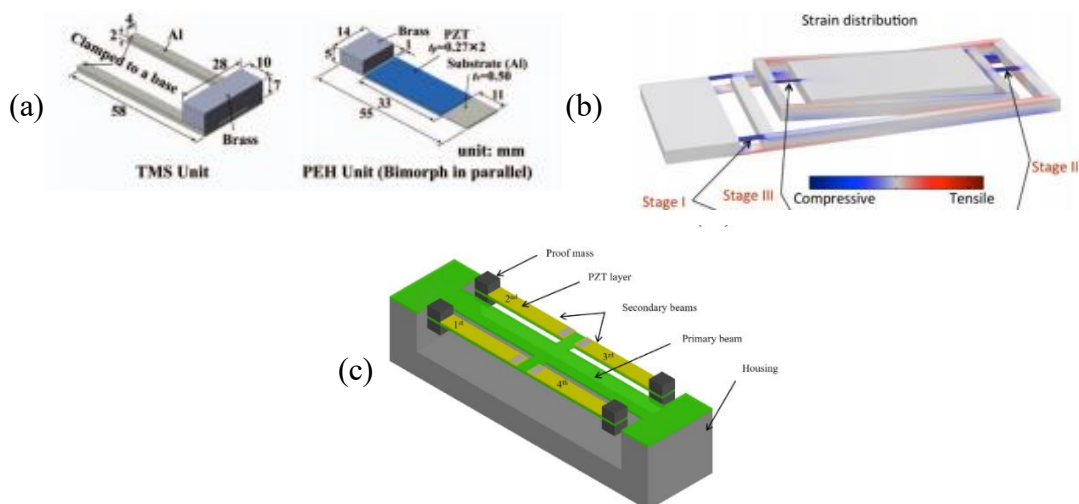


圖 1.2 多模態採集器

(a)兩段式折疊懸臂樑[15]；(b) 三段式折疊懸臂樑[16]；(c)彈簧橋[18]；

非線性可以從系統固有的特徵引入，Triplett 和 Quinn [19]研究了壓電的本構關係導致的非線性。相比系統固有特徵，外部引入的非線性效果往往更加顯著，常見的如磁力，擋板等。Masana 和 Daqaq [20]利用磁力和擋板機械力為振動系統引入非線性力；Liu 等人[21]通過加入擋板來達到降低共振頻的目的；Fan 等人[22]通過對壓電懸臂樑同時引入一對擋板和對稱的磁力來限制樑的最大偏轉，使之工作頻寬增加了 54%，輸出功率增加了 253%。

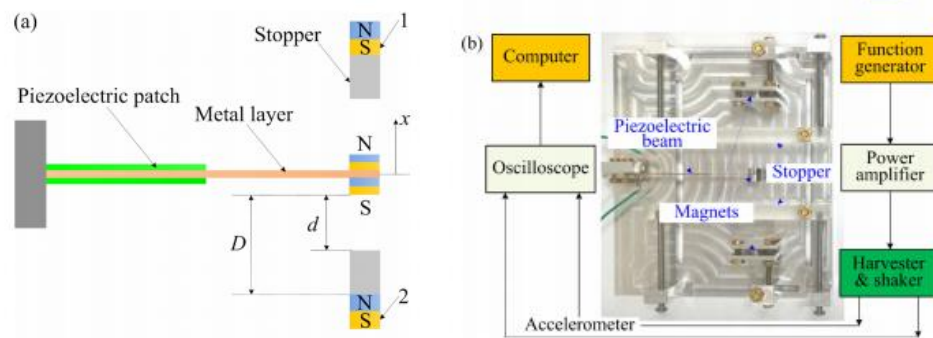


圖 1.3 非線性採集器

對稱磁力擋板壓電系統[20]；

在實際生活中振動可能來自各個方向，增加不同採集方向具有增強能量收集功率的現實意義。Su 和 Zu [23]提出了一種三向壓電能量收集器，能夠從三個正交方向的較寬頻寬中收集振動能量；Chen 等人[24]提出了一種蒲公英狀的多方向壓電振動能量採集器可以在不同的激勵下收穫相對更多的能量，但從各個方向上獲得的能量則更少。

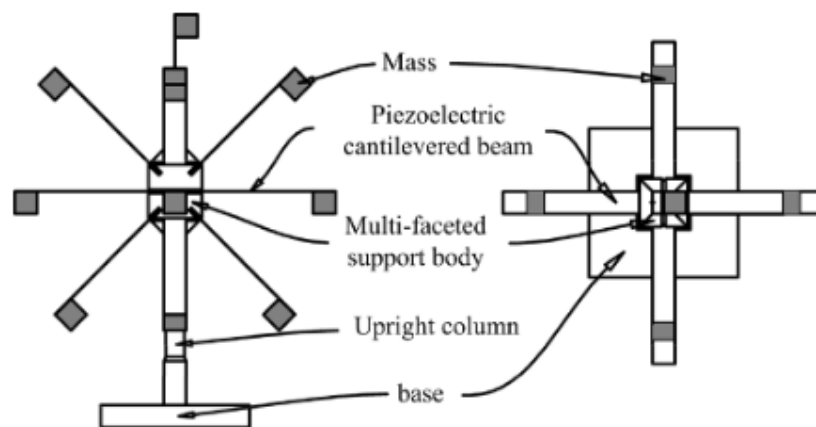


圖 1.4 蒲公英狀多方向壓電振動能量採集器[24]；

相比一般的振動環境，旋轉環境下的振動振幅更大，樑在旋轉中產生了較大的軸向力和橫向偏轉，因此常常會體現出幾何非線性的現象。因此，有關旋轉條件下的研究絕大部分會集中在理論模型的優化和擬合上。1988 年，Yigit 等人[25]推導出旋轉懸臂樑完全耦合的非線性運動方程，並以數值解研究其波形；Gu 和 Livermore [26]以實驗驗證旋轉環境離心力對系統的被動調頻的作用；Hsu [27]構建了旋轉懸臂樑末端質量塊結構的有限元素模型並以實驗結果驗證其準確性；Turhan 和 Bulut [28]以雙自由度模型研究旋轉平面的非線性振動，認為系統硬軟化條件與固有頻率的穩定性之間存在聯繫；Minguet 和 Dugundji [29]進行了大擾度下複合材料樑旋轉的實驗和分析；Chandra 和 Chopra 研究了旋轉複合箱形樑[30]和工字樑[31]的振動特性。

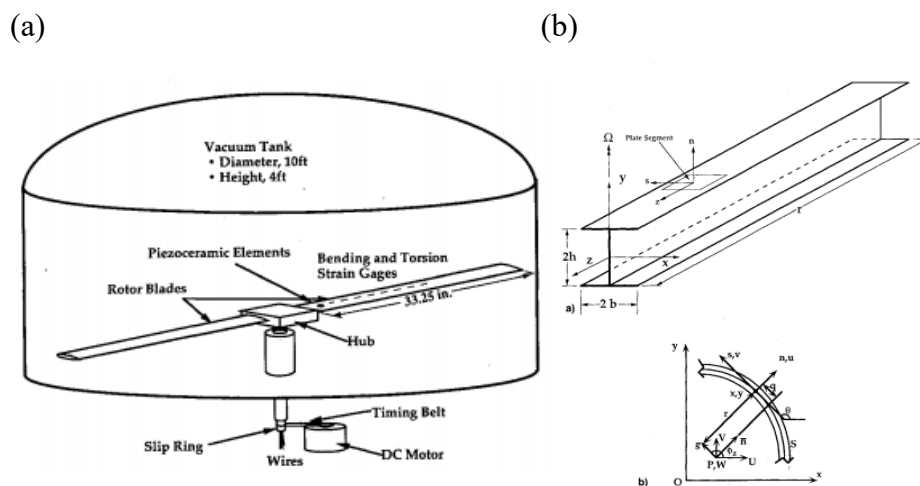
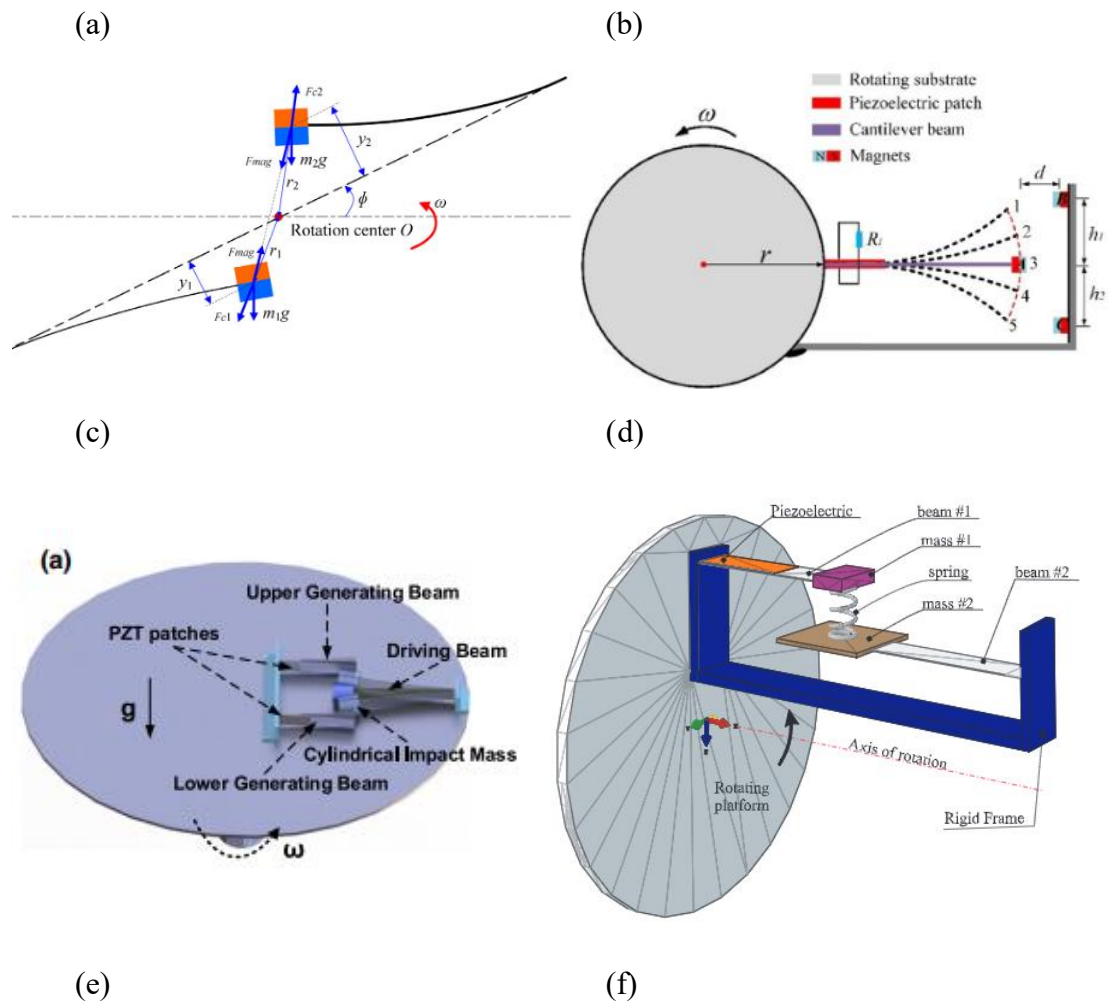


圖 1.5 旋轉式複合梁

(a)旋轉複合箱型樑[30]；(b)旋轉工字樑[31]；

除了理論研究的相關工作，旋轉環境常常會與非線性力法、多模態法等方法相互結合以期得到更好的結果。磁鐵因其非接觸性和易於假設的特點而最常出現，Li 等人[32]給出了結合末端磁力的懸臂樑旋轉能量收集器的理論模型和實驗驗證；Zou [33]研究了一種雙自由度的結合磁力的朝內樑旋轉能量收集器，兩顆磁鐵附著在朝內梁自由端，在振動過程中往復地相互作用；Guo 等人[34]在懸臂樑

末端和延伸處固定位置分別安裝兩顆磁鐵，研究其電壓輸出和磁鐵間距的最佳距離；Mei 等人[35]在此基礎上再添加一顆磁鐵，使兩顆磁鐵對稱於樑末端的兩側，形成三穩態的壓電能量收集系統；Fang 等人[36]對旋轉朝內樑的兩側安置擋板，考慮離心軟化作用對系統的影響，並在[37]進一步研究該系統的特性和優勢；Febbo 等人[38]提出了一種新式旋轉平面外式的壓電能量收集器，它以彈簧連接朝外梁和朝內梁的末端質量塊，通過將該梁附接到旋轉輪轂上可以達到無線監控系統能量的效果；Ramezanpour 等人[39]提出系統不旋轉，外部激勵的磁鐵旋轉的陣列式架構；Xie 等人[40]同樣改變了激振的方式，以旋轉的雙磁鐵的磁力激勵雙穩態的彎曲樑發生振動，獲得 6-14 Hz 區間較寬的頻響；Sadeqi 等人[41]以兩隻彈簧連接樑兩端的質量塊獲得旋轉環境下雙模態的電壓，並且通過改變彈簧剛性實現對兩個模態共振頻的調節。



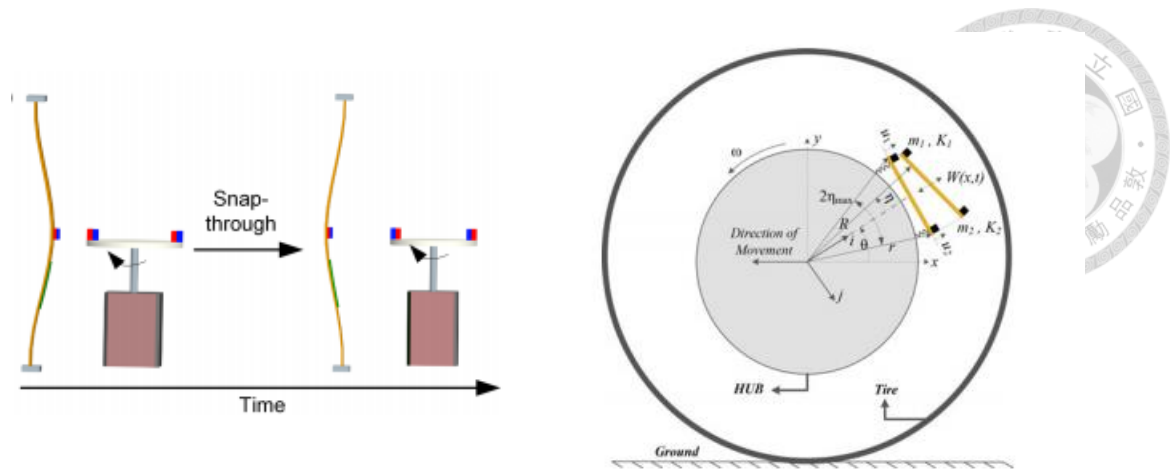


圖 1.6 旋轉式採集器

(a)雙自由度朝內樑磁力旋轉能量收集器[33]；(b)三穩態旋轉壓電能量收集器[35]；(c)旋轉朝內樑擋板系統[36]；(d)旋轉平面外旋轉能量收集器[38]；(e)旋轉雙穩態彎曲樑能量收集器[40]；(f)基于輪胎嵌入的耦合結構能量收集器[41]；

在本文中，將以四段式的折返梁幾何結構為基礎，置於旋轉環境中，綜合以多模態法和引入非線性力的方法達到拓寬頻寬的效果，希望藉此獲得低頻下相互連接的雙模態寬頻效果。

1.3 研究動機與方法

傳統的懸臂樑壓電能量採集器有著發電頻響窄的缺陷，並且發電共振頻位置較難改變，從而無法得到便於使用的壓電能量。本論文通過折返樑的結構特性，引入低頻下系統的第二模態，旋轉的特性又將兩個共振頻進一步拉近得到較寬的頻響。在此基礎上引入非線性力，進一步拓寬頻響。由於通常情況下旋轉環境下樑系統的振動幅度大，本文放寬經典薄樑理論裡小位移振動的假設，引入幾何非線性模型去研究該配置下壓電能量收集器和引入非線性的擋板脈衝力、磁力作用的能量收集器的頻響、頻寬以及最終的功率輸出。

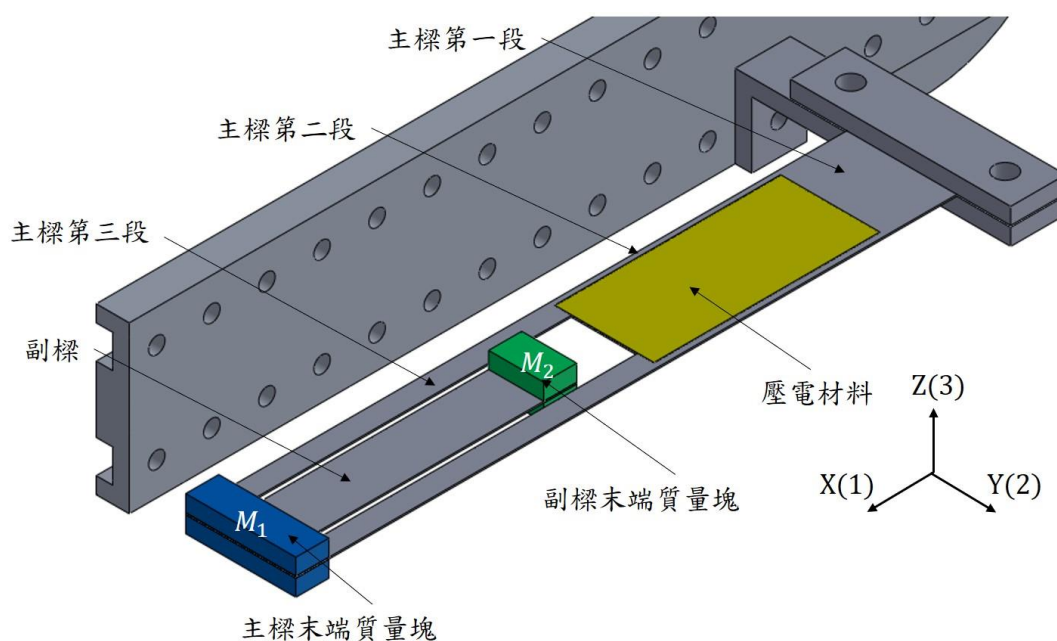


圖 1.7 旋轉式雙自由度折返樑系統能量採集器示意圖

1.4 論文架構

本文分七個章節：

第一章：緒論部分，介紹該領域的研究背景，回顧相關的文獻與研究，提出研究動機與方法。

第二章：壓電理論簡介與本構方程式。

第三章：旋轉折返樑幾何非線性模型的推導。

第四章：引入非線性力，對非線性力進行建模，在第三章基礎上得到非線性系統的旋轉折返樑壓電能量採集器發電效果的數值解。

第五章：實驗設計，介紹實驗使用的器材和實驗的流程。

第六章：驗證與討論，通過實驗獲得的數據可視化地驗證理論模型，並探討理論無法覆蓋到的實際問題。

第七章：總結研究得到的結果，提出問題和猜想，進行未來展望。



Chapter 2 壓電理論



2.1 壓電效應

壓電效應是介電材料中一種機械能與電能互換的現象。根據機械能與電能的轉換方向不同分為正壓電效應與負壓電效應。該現象最早由居裡兄弟于 1880 年發現。壓電材料會有壓電效應是因為晶格內原子間的特殊排列方式。為了更好得觀察壓電效應，往往會對材料進行預先的極化處理。在未經極化處理時，晶格的電偶極矩方向是無序散亂的（圖 2.1(a)）。在外電場作用下，電介質內部沿電場方向產生感應偶極矩，原本隨機方向的電荷移動為有序的同方向排列（圖 2.1(b)），該排列方向也稱極化方向。

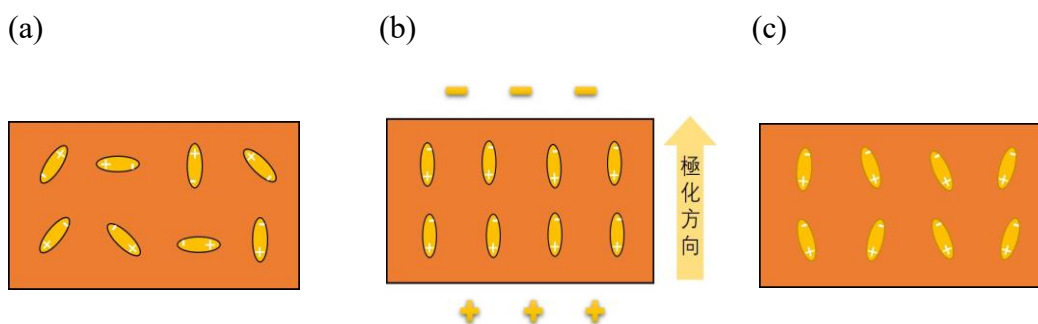


圖 2.1 極化處理

(a)極化前；(b)極化過程；(c)極化後；

當對極化後的材料施加物理壓力時，材料內的電偶極矩會因壓縮而變短，此時壓電材料會為抵抗這種變化而在表面產生等量的正負電荷以保持原狀。這種因為形變而產生的電極化的現象稱為正壓電效應（圖 2.2(a)）；當對極化後的材料表面施加電場時，因為電場作用電偶極矩會被拉長，此時壓電材料為抵抗變化會在沿電場方向伸長。這種通過電場作用而產生的機械形變的過程稱為逆壓電效應（圖 2.2(b)）。

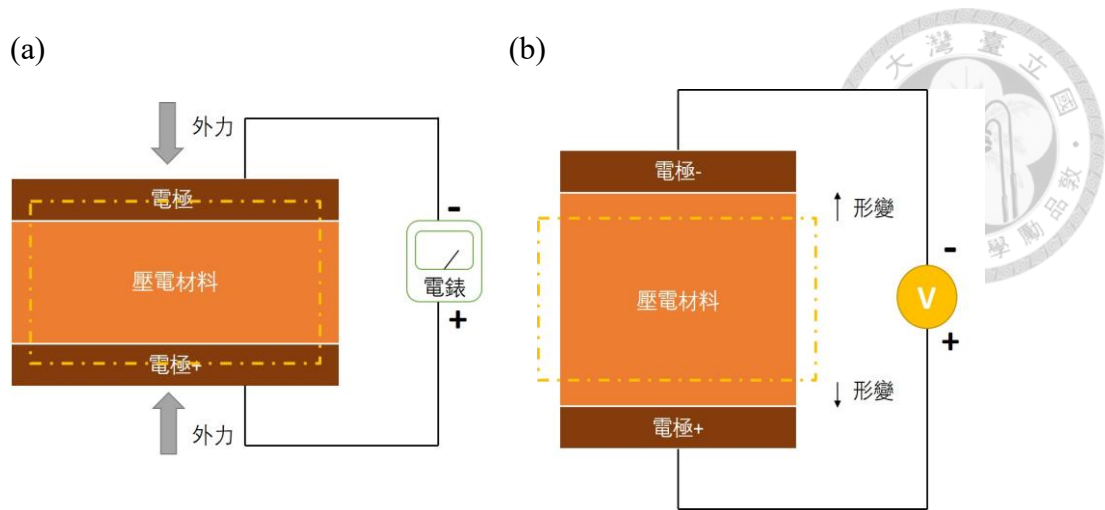


圖 2.2 壓電效應

(a)正壓電效應；(b)逆壓電效應；

在壓電材料中這兩種效應一般是同時存在的，在一些運用正壓電效應的場合如果忽視逆壓電效應的存在將會導致熱力學的不一致性[42]。



2.2 壓電本構方程式

壓電材料的線型本構方程式[43]描述的是壓電材料在應力場與電場的作用下的關係。考慮到本文所用到的方程式形式為 d-form，可表示為如下形式：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^E & d^t \\ d & \varepsilon^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

其中， \mathbf{S} 、 \mathbf{D} 、 \mathbf{T} 、 \mathbf{E} 表示應變、電位移、應力、電場。 s 、 d 、 ε 代表柔度矩陣、壓電常數矩陣、介電常數矩陣。上標 E 、 T 表示該常數在固定電場和固定應力下量測所得。上標 t 表示轉置矩陣。

對於壓電材料， s^E 有 21 個參數， d 與 d^t 有 18 個參數， ε^T 有 6 個參數，將其展開，並以壓電材料的對稱性消去部分參數得壓電材料的線型本構方程式 d-form 的展開式：

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{12}^E & s_{22}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{13}^E & s_{13}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 & d_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & \varepsilon_{11}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^T & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

本文以 Euler-Bernoulli 樑理論為基礎，不考慮平面外的力；又因為本文使用的壓電材料模型認為材料的電極平面與極化方向垂直，則公式(2.2)可進一步簡化為：

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & d_{31} \\ d_{31} & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

對(2.3)進行變形：

$$\begin{bmatrix} s_{11}^E & 0 \\ -d_{31} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -d_{31} \\ 0 & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

這樣就得到了應力與電位移的 e-form :

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & -e_{31} \\ e_{31} & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

其中， $\varepsilon_{33}^S = \varepsilon_{33}^T - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E}$ 。



Chapter 3 旋轉壓電折返樑模型



本章對旋轉環境下固定轉速的帶有兩個末端質量塊的折返樑的理論模型進行受力分析，得到幾何非線性模型下旋轉折返樑系統的運動方程。

其中，折返樑的結構如圖 3.1 所示，它由主樑和副樑以及兩個末端質量塊構成，並在主樑第二段黏以壓電片，其中主樑按其結構不同可分為三段，加上線型的副樑，折返樑由四段構成。根據 Su 和 Zu [44]，在相同的配置下，主副樑的夾角越大，兩共振頻越接近，因此折返樑這樣設計有著理論上的共振頻拉近的最優效果，同時為了盡可能避免平面外運動之扭轉的影響，沒有採用主副樑分離的雙樑結構 (Cut-out Beam)，這可使樑結構的長寬比大大增加，從而減少可能的平面外的振動之影響。

模型上，本文假設折返樑樑系統滿足 Euler-Bernoulli 樑理論，但放寬其小位移振動之假設以滿足旋轉環境下大位移振動之需要。Euler-Bernoulli 樑理論假設：

(1) 橫截面在其自己的平面中是無限剛性的；(2) 樑的橫截面在變形後保持平面；(3) 橫截面保持垂直於樑的變形軸[45]。此外，假設折返樑結構的長寬比足夠大，不考慮平面外之振動與扭轉。對旋轉環境，假設其旋轉速度固定，不考慮旋轉角加速度與科氏力。更細化的假設與考慮可參見之後的章節。



3.1 旋轉壓電折返樑力學模型

首先，建立旋轉坐標系統。參照圖 3.1，以旋轉軸中心建立相對坐標系，以樑固定端的樑的中性軸為 X 軸，以垂直於旋轉平面的方向為 Y 軸，以旋轉平面裡垂直於樑固定端的樑的中性軸方向為 Z 軸。定義樑的單位元在 X、Y、Z 軸方向時間為 t 的相對位移為 $u_i(x_i, t)$ 、 $v_i(x_i, t)$ 、 $w_i(x_i, t)$ （下標 $i=1,2,3,4$ 表示第 i 段樑， $x_i \in (0, L_i)$ ）。由於假設不存在旋轉平面外的振動，故 $v_i(x_i, t) = 0$ 。

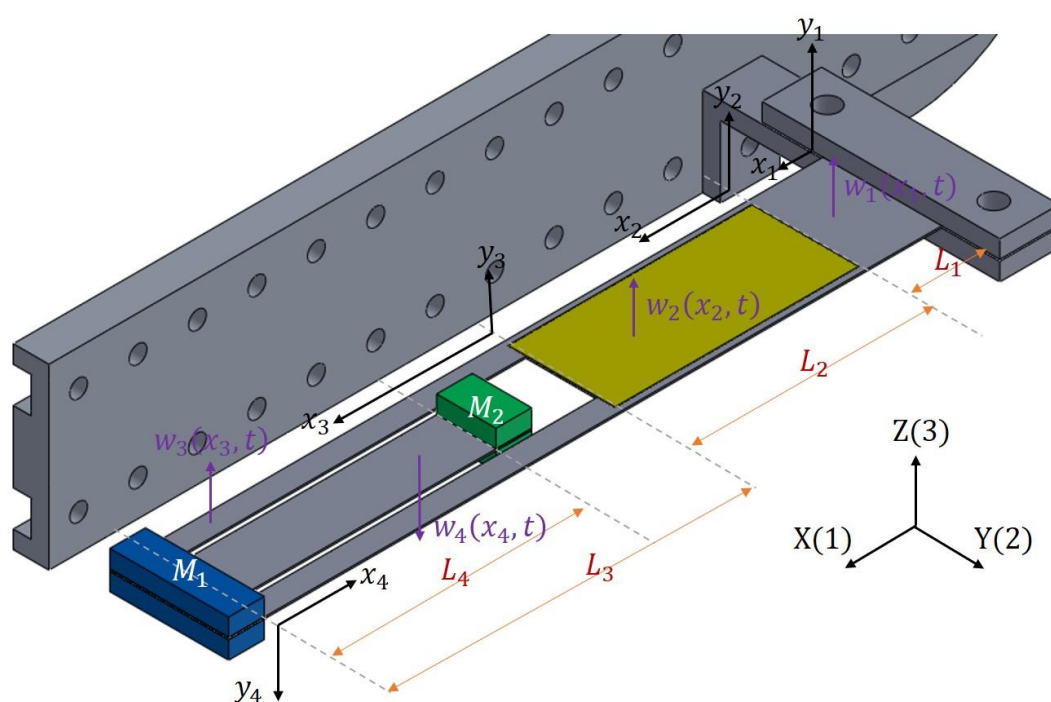


圖 3.1 四段折返樑系統坐標系圖

3.1.1 強迫振動方程

接下來，本文使用幾何非線性的方法推導折返樑系統的強迫振動方程式。本文的幾何非線性模型在強迫振動方程的構建上很大程度參考了黃奕傑[46]的模型結構。該理論方法與經典的強迫振動方程不同之處在於力學推導時考慮了軸向力與軸向位移對振動方程的影響。

參考圖 3.2，將靜力平衡分解為垂直和平行與旋轉半徑方向的側向（Z）和軸向（X）力平衡：

軸向力平衡：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_i} [F_i \cos(\alpha_i(x_i, t))] - \frac{\partial}{\partial x_i} [Q_i \sin(\alpha_i(x_i, t))] \\ &= -m_i \left[\frac{\partial^2 u_i(x_i, t)}{\partial t^2} - \Omega^2 (u_i(x_i, t) - x_i - R_i) \right] + m_i g \cos \Omega t \\ & i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_4} [F_4 \cos(\alpha_4(x_4, t))] - \frac{\partial}{\partial x_4} [Q_4 \sin(\alpha_4(x_4, t))] \\ &= -m_4 \left[\frac{\partial^2 u_4(x_4, t)}{\partial t^2} - \Omega^2 (u_4(x_4, t) - x_4 - R_4) \right] - m_4 g \cos \Omega t \end{aligned} \quad (3.2)$$

側向力平衡：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_i} [F_i \sin(\alpha_i(x_i, t))] + \frac{\partial}{\partial x_i} [Q_i \cos(\alpha_i(x_i, t))] \\ &= -m_i \left[\frac{\partial^2 w_i(x_i, t)}{\partial t^2} - \Omega^2 w_i(x_i, t) \right] - m_i g \sin \Omega t \\ & i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_4} [F_4 \sin(\alpha_4(x_4, t))] + \frac{\partial}{\partial x_4} [Q_4 \cos(\alpha_4(x_4, t))] \\ &= -m_4 \left[\frac{\partial^2 w_4(x_4, t)}{\partial t^2} - \Omega^2 w_4(x_4, t) \right] + m_4 g \sin \Omega t \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中， F 為 \hat{t} 方向上單位面積受力， Q 為 \hat{n} 方向上單位面積受力， α 為單位樑在振動中的角度偏移， Ω 為旋轉環境之固定轉速， $R_1 = R$ ， $R_2 = R + L_1$ ， $R_3 = R + L_1 + L_2$ ， $R_4 = -(R + L_1 + L_2 + L_3)$ 表示數學意義之旋轉半徑， m_i 為樑的線密度質量。這是樑的連續性受力平衡，如圖 3.2 所示。



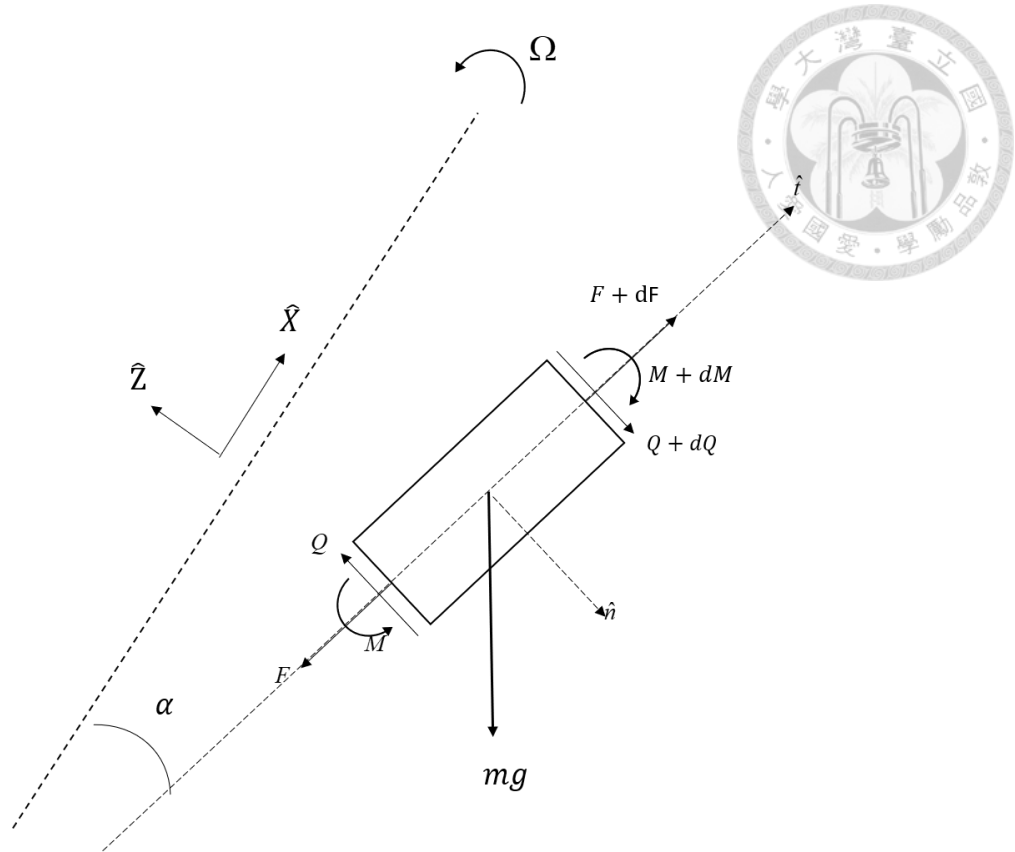


圖 3.2 樑單位體連續性受力示意

接著，列出各段樑連接處的邊界力平衡：

主樑連接處力平衡：

$$\begin{aligned}
 & -F_i \cos(\alpha_i(L_i, t)) + Q_i \sin(\alpha_i(L_i, t)) \\
 & = -F_{i+1} \cos(\alpha_{i+1}(0, t)) + Q_{i+1} \sin(\alpha_{i+1}(0, t))
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

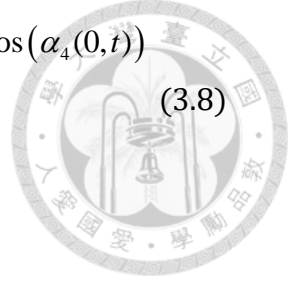
$$\begin{aligned}
 & -F_i \sin(\alpha_i(L_i, t)) - Q_i \cos(\alpha_i(L_i, t)) \\
 & = -F_{i+1} \sin(\alpha_{i+1}(0, t)) - Q_{i+1} \cos(\alpha_{i+1}(0, t))
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$i = 1, 2$

主樑末端力平衡：

$$\begin{aligned}
 & -F_3 \cos(\alpha_3(L_3, t)) + Q_3 \sin(\alpha_3(L_3, t)) - F_4 \cos(\alpha_4(0, t)) + Q_4 \sin(\alpha_4(0, t)) \\
 & = -Mt_3 \left[\frac{\partial^2 u_3(L_3, t)}{\partial t^2} - \Omega^2 (u_3(L_3, t) - L_3 - R_3) \right] + Mt_3 g \cos \Omega t
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
& -F_3 \sin(\alpha_3(L_3, t)) - Q_3 \cos(\alpha_3(L_3, t)) - F_4 \sin(\alpha_4(0, t)) - Q_4 \cos(\alpha_4(0, t)) \\
& = Mt_3 \left[\frac{\partial^2 w_3(L_3, t)}{\partial t^2} - \Omega^2 w_3(L_3, t) \right] - Mt_3 g \sin \Omega t
\end{aligned} \tag{3.8}$$



副樑末端力平衡：

$$\begin{aligned}
& -F_4 \cos(\alpha_4(L_4, t)) + Q_4 \sin(\alpha_4(L_4, t)) + Mt_4 g \cos \Omega t \\
& = -Mt_4 \left[\frac{\partial^2 u_4(L_4, t)}{\partial t^2} - \Omega^2 (w_4(L_4, t) - L_4 - R_4) \right]
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
& -F_4 \sin(\alpha_4(L_2, t)) - Q_4 \cos(\alpha_4(L_4, t)) - Mt_4 g \sin \Omega t \\
& = Mt_4 \left[\frac{\partial^2 w_4(L_4, t)}{\partial t^2} - \Omega^2 w_4(L_4, t) \right]
\end{aligned} \tag{3.10}$$

其中， $Mt_1 = Mt_2 = 0$ ，考慮主樑之一二段有一個不佔據空間的質量為 0 的質量塊，方便後續公式處理； $Mt_3 = M_1$ 、 $Mt_4 = M_2$ 分別為主副樑末端質量塊的質量。由力矩平衡：

$$\begin{aligned}
& \Sigma M_i = I_i \alpha_i \\
& M_i + dM_i - M_i - P_i \times dw_i + Q_i \times dx_i = m_i I_i dx_i \ddot{\theta}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

其中 M 為彎矩， I 為截面積慣性矩，接下來推導截面彎矩：

$$M_2(x_1, t) = -\int_{h_a}^{h_b} T_2^s b_s y dy - \int_{h_b}^{h_c} T_2^p b_p y dy \tag{3.12}$$

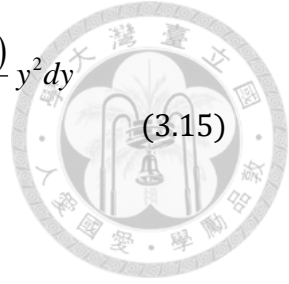
$$M_i(x_i, t) = -\int_{-\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}} T_i^s b_s y dy \tag{3.13}$$

$$i = 1, 3, 4$$

其中，上標 s 和 p 分別代表樑本身與附著的壓電材料， T 為截面應力。根據壓電本構方程式的推導結果式(2.3)：

$$S_1^p = s_{11}^E T_1^p + d_{31} E_3 \tag{3.14}$$

其中， $s_{11}^E = \frac{1}{E_p}$ ， $E_3 = -\frac{v(t)}{h_p}$ ，因此兩段樑之彎矩可以表示為：



$$M_2(x_2, t) = \int_{h_c}^{h_b} Y_s b_s \frac{\partial^2 w_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} y^2 dy + \int_{h_b}^{h_a} Y_p b_p \frac{\partial^2 w_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} y^2 dy - \int_{h_b}^{h_a} v(t) Y_p b_p \frac{d_{31}}{h_p} y dy \quad (3.15)$$

$$M_i(x_i, t) = \int_{-\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}} E_s b_s \frac{\partial^2 w_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} y^2 dy \quad (3.16)$$

$i = 1, 3, 4$

其中， y 表示任意位置到中性軸的距離， b_s 、 h_s 為樑自身的寬度與厚度， b_p 、 h_p 為壓電材料的寬度與厚度， h_a 為中性軸到樑自身底部的數值距離， h_b 為中性軸到自身頂部的數值距離， h_c 為中性軸到壓電材料頂部的數值距離，可參考圖 3.3 示意的幾何關係。考慮到樑與附著的壓電材料是復合的，因此中性軸存在偏移：

$$h_a = -\frac{h_p^2 + 2h_p h_s + nh_s^2}{2nh_s + 2h_p}$$

$$h_b = \frac{nh_s^2 - h_p^2}{2nh_s + 2h_p} \quad (3.17)$$

$$h_c = \frac{h_p^2 + 2h_p h_s + nh_s^2}{2nh_s + 2h_p}$$

其中 $n = \frac{Y_s b_s}{Y_p b_p}$ 為壓電復合樑的轉換因數。

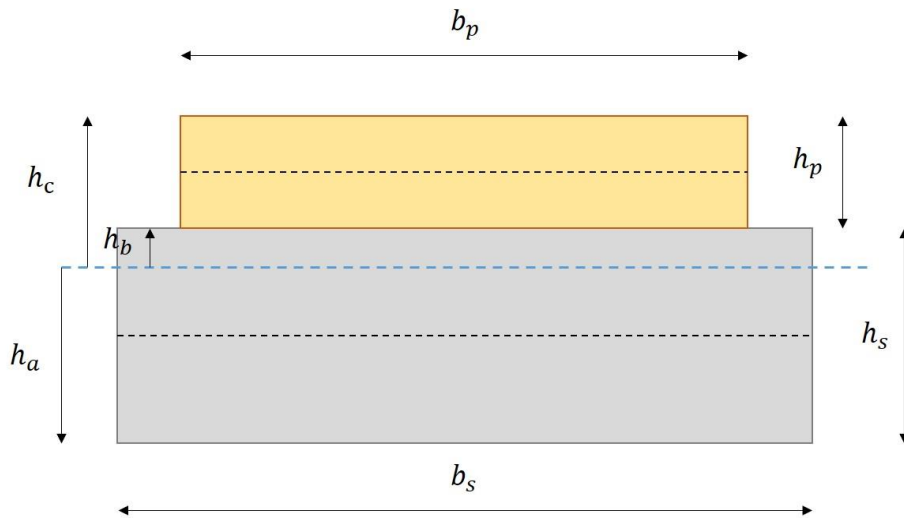


圖 3.3 壓電折返樑耦合部分橫截面示意圖

結合幾何非線性的曲率半徑(3.23)將截面彎矩代入方程(3.11)後得到



$$\begin{aligned}
 Q_i &= -\frac{\partial M_i}{\partial x_i} + P_i \frac{\partial w_i(x_i, t)}{\partial x_i} + m_i I_i \frac{\partial^3 w_i(x_i, t)}{\partial t^2 \partial x_i} \\
 &= -\frac{\partial^2 Y I_i \alpha_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} + P_i \frac{\partial w_i(x_i, t)}{\partial x_i} + m_i I_i \frac{\partial^3 w_i(x_i, t)}{\partial t^2 \partial x_i} \\
 &= -Y I_i \left[\frac{\partial^3 w_i(x_i, t)}{\partial x_i^3} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 w_i(x_i, t)}{\partial x_i^3} \left(\frac{\partial w_i(x_i, t)}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\partial w_i(x_i, t)}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 w_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} \right)^2 \right] \\
 &\quad + P_i \frac{\partial w_i(x_i, t)}{\partial x_i} + m_i I_i \frac{\partial^3 w_i(x_i, t)}{\partial t^2 \partial x_i}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

其中， P_i 為離心力作用， $P_i = f_{c_i}(x_i)\Omega^2$ ，其獲得過程參考(3.27)。

接下來考慮偏移角度的三角函數和側向位移的幾何關係。簡化單位元元長度樑模型如圖 3.4，根據幾何關係有：

$$u_i(x_i, t) = \int_0^{x_i} 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\partial w_i(s, t)}{\partial s} \right)^2} ds \approx \int_0^{x_i} \left(\frac{\partial w_i(s, t)}{\partial s} \right)^2 ds \tag{3.19}$$

$$\sin(\alpha(x_i, t)) = \frac{\partial w_i(x_i, t)}{\partial x_i} \tag{3.20}$$

$$\cos(\alpha(x_i, t)) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i(x_i, t)}{\partial x_i} \right)^2 \tag{3.21}$$

$$\alpha(x_i, t) \approx \frac{dw_i(x_i, t)}{ds} \tag{3.22}$$

曲率為：

$$\kappa = \frac{d\alpha}{ds} \approx \frac{\frac{d^2 w}{ds^2}}{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{ds} \right)^2} = \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{1}{2} \frac{d^2 w}{ds^2} \left(\frac{dw}{ds} \right)^2 \tag{3.23}$$

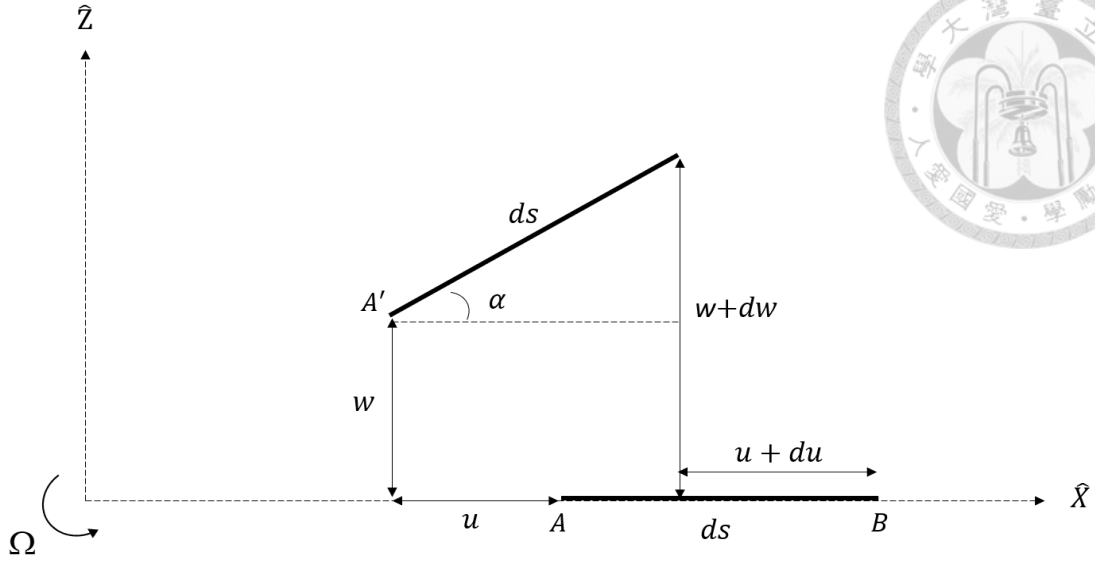


圖 3.4 單位長度樑角度與位移偏移關係示意

對等式(3.1)(3.2)從 x_i 到 L_i 積分後代入主副樑末端側向力平衡等式(3.5)(3.7)，獲得

F_i 與 Q_i 的關係：

$$F_i(x_i, t) = \frac{1}{\cos(\alpha_i(x_i, t))} \{ Q_i \sin(\alpha_i(x_i, t)) + [fc_i(x_i) + fc_{i+1}(0)] \Omega^2 - [fg_i(x_i) - fg_{i+1}(0)] \cos \Omega t + fn_i(x_i, t) + fn_{i+1}(0, t) \} \quad (3.24)$$

$i=1, 2$

$$F_3(x_3, t) = \frac{1}{\cos(\alpha_3(x_3, t))} \{ Q_3 \sin(\alpha_3(x_3, t)) + [fc_3(x_i) - fc_4(0)] \Omega^2 - [fg_3(x_3) + fg_4(0)] \cos \Omega t + fn_3(x_3, t) - fn_4(0, t) \} \quad (3.25)$$

$$F_4(x_4, t) = \frac{1}{\cos(\alpha_4(x_4, t))} [Q_4 \sin(\alpha_4(x_4, t)) + fc_4(x_4) \Omega^2 + fg_4(x_4) \cos \Omega t + fn_4(x_4, t)] \quad (3.26)$$

其中

$$fc_i(x_i) = \left[m_i \int_s^{L_i} (x_i + R_i) dx_i + Mt_i (L_i + R_i) \right] \quad (3.27)$$

$$fg_i(x_i) = \left[(L_i - x_i) m_i + Mt_i \right] g \quad (3.28)$$



$$\begin{aligned}
 fn_i(x_i, t) &= m_i \int_s^{L_i} \left[\frac{\partial^2 u_i(x_i, t)}{\partial t^2} - \Omega^2 u_i(x_i, t) \right] ds \\
 &\quad + Mt_i \left[\frac{\partial^2 u_i(L_i, t)}{\partial t^2} - \Omega^2 u_i(L_i, t) \right] \\
 i &= 1, 2, 3, 4
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

$fc_i(x_i)\Omega^2$ 為離心力產生的項， $fg_i(x_i)\cos\Omega t$ 為重力的軸向分力產生的項， $fn_i(x_i, t)$ 為慣性的軸向分力產生的項。將 F_i 與 Q_i 的關係式(3.24)(3.25)(3.26)代回前面主副樑末端軸向力平衡式(3.6)(3.8)(3.10)獲得折返樑系統在縱向平面的強迫振動方程式為：

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{\partial^4 w_i(x_i, t)}{\partial x_i^4} + \frac{\partial \left[\frac{\partial w_i(x_i, t)}{\partial x_i} \frac{\partial \left(\frac{\partial w_i(x_i, t)}{\partial x_i} \frac{\partial^2 w_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} \right)}{\partial x_i} \right]}{\partial x_i} \right\} \\
 & + m_i \left[\frac{\partial^2 w_i(x_i, t)}{\partial t^2} - \Omega^2 w_i(x_i, t) \right] - AF_i \frac{\partial^2 w_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} \\
 & = m_i g \sin \Omega t \\
 & i = 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{\partial^4 w_4(x_4, t)}{\partial x_4^4} + \frac{\partial \left[\frac{\partial w_4(x_4, t)}{\partial x_4} \frac{\partial \left(\frac{\partial w_4(x_4, t)}{\partial x_4} \frac{\partial^2 w_4(x_4, t)}{\partial x_4^2} \right)}{\partial x_4} \right]}{\partial x_4} \right\} \\
 & + m_4 \left[\frac{\partial^2 w_4(x_4, t)}{\partial t^2} - \Omega^2 w_4(x_4, t) \right] - AF_4 \frac{\partial^2 w_4(x_4, t)}{\partial x_4^2} \\
 & = -m_4 g \sin \Omega t
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

其中，代表軸向受力的 AF 表示為：

$$\begin{aligned}
 AF_i(x_i, t) &= [fc_i(x_i) + fc_{i+1}(0)]\Omega^2 - [fg_i(x_i) - fg_{i+1}(0)]\cos\Omega t \\
 &\quad + [fn_i(x_i, t) + fn_{i+1}(0, t)] \\
 i &= 1, 2
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$AF_3(x_3, t) = [fc_3(x_3) - fc_4(0)]\Omega^2 - [fg_3(x_3) + fg_4(0)]\cos\Omega t + [fn_3(x_3, t) - fn_4(0, t)] \quad (3.33)$$

$$AF_4(x_4, t) = fc_4(x_4)\Omega^2 + fg_4(x_4)\cos\Omega t + fn_4(x_4, t) \quad (3.34)$$

此即旋轉折返樑之幾何非線性的強迫振動方程式。接下來給出運動方程的邊界條件。主樑的固定端邊界條件為：

$$\begin{aligned} w_1(0, t) &= 0 \\ \left. \frac{\partial w_1(x_1, t)}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} &= 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

主樑各段的連續條件為：

$$w_i(L_i, t) = w_{i+1}(0, t) \quad (3.36)$$

$$\left. \frac{\partial w_i(x_i, t)}{\partial x_i} \right|_{x_i=L_i} = \left. \frac{\partial w_{i+1}(x_{i+1}, t)}{\partial x_{i+1}} \right|_{x_{i+1}=0} \quad (3.37)$$

$$YI_i \left. \frac{\partial^2 w_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} \right|_{x_i=L_i} = YI_{i+1} \left. \frac{\partial^2 w_{i+1}(x_{i+1}, t)}{\partial x_{i+1}^2} \right|_{x_{i+1}=0} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} & YI_i \left[\frac{\partial^3 w_i(x_i, t)}{\partial x_i^3} \left(\frac{\partial w_i(x_i, t)}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} \right)^2 \frac{\partial w_i(x_i, t)}{\partial x_i} + \frac{\partial^3 w_i(x_i, t)}{\partial x_i^3} \right] \\ & - AF_i(x_i) \frac{\partial w_i(x_i, t)}{\partial x_i} + Mt_i g \sin \Omega t - Mt_i \left[\frac{\partial^2 w_i(x_i, t)}{\partial t^2} - \Omega^2 w_i(x_i, t) \right] \Bigg|_{x_i=L_i} \\ & = YI_{i+1} \frac{\partial^2 w_{i+1}(x_{i+1}, t)}{\partial x_{i+1}^2} - AF_{i+1}(x_{i+1}) \frac{\partial w_{i+1}(x_{i+1}, t)}{\partial x_{i+1}} \Bigg|_{x_{i+1}=0} \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$i = 1, 2$$

主樑與副樑的連續條件為：

$$w_3(L_3, t) = -w_4(0, t) \quad (3.40)$$

$$\left. \frac{\partial w_3(x_3, t)}{\partial x_3} \right|_{x_3=L_3} = \left. \frac{\partial w_4(x_4, t)}{\partial x_4} \right|_{x_4=0} \quad (3.41)$$

$$YI_3 \frac{\partial^2 w_3(x_3, t)}{\partial x_3^2} \Big|_{x_3=L_3} + I_{M_3} \frac{\partial^3 w_3(x_3, t)}{\partial t^2 \partial x_3} \Big|_{x_3=L_3} = YI_4 \frac{\partial^2 w_4(x_4, t)}{\partial x_4^2} \Big|_{x_4=0} \quad (3.42)$$

$$YI_3 \left[\frac{\partial^3 w_3(x_3, t)}{\partial x_3^3} \left(\frac{\partial w_3(x_3, t)}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_3(x_3, t)}{\partial x_3^2} \right)^2 \frac{\partial w_3(x_3, t)}{\partial x_3} + \frac{\partial^3 w_3(x_3, t)}{\partial x_3^3} \right] - AF_3(x_3) \frac{\partial w_3(x_3, t)}{\partial x_3} + Mt_3 g \sin \Omega t - Mt_3 \left[\frac{\partial^2 w_3(x_3, t)}{\partial t^2} - \Omega^2 w_3(x_3, t) \right] \Big|_{x_3=L_3} \quad (3.43)$$

$$= -YI_4 \frac{\partial^2 w_4(x_4, t)}{\partial x_4^2} + AF_4(x_4) \frac{\partial w_4(x_4, t)}{\partial x_4} \Big|_{x_4=0}$$

副樑的邊界條件為：

$$YI_4 \left[\frac{\partial^3 w_4(x_4, t)}{\partial x_4^3} \left(\frac{\partial w_4(x_4, t)}{\partial x_4} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_4(x_4, t)}{\partial x_4^2} \right)^2 \frac{\partial w_4(x_4, t)}{\partial x_4} + \frac{\partial^3 w_4(x_4, t)}{\partial x_4^3} \right] \quad (3.44)$$

$$- AF_4 \frac{\partial w_4(x_4, t)}{\partial x_4} - Mt_4 g \sin \Omega t - Mt_4 \left(\frac{\partial^2 w_4(x_4, t)}{\partial t^2} - \Omega^2 w_4(x_4, t) \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 w_4(x_4, t)}{\partial x_4^2} \Big|_{x_4=L_4} = 0 \quad (3.45)$$

注意，這裡轉動慣量 I_{M_i} 和固定轉速 Ω 沒有任何關係，它是以轉動慣量來模擬樑系統末端質量塊受旋轉產生的振動的慣性影響。其中，

$$I_{M_i} = M_i I_i \ddot{\alpha}_i(x_i, t) \Big|_{x_i=L_i} \approx M_i I_i \frac{\partial^3 w_i(x_i, t)}{\partial x_i \partial t^2} \Big|_{x_i=L_i} \quad (3.46)$$

由於獲得轉動慣量 I_{M_i} 需要用到 w_i ，而獲得 w_i 的邊界條件又用到轉動慣量 I_{M_i} ，因此本文假設每個 I_{M_i} 為固定值，先通過取 $I_{M_i}=0$ 獲得初步的 w_i ，再以獲得的 w_i 求解每個轉動慣量 I_{M_i} 作為最終結果的計算的固定值來獲得最終的 w_i 。

3.1.2 模態分析

接下來進行模態分析。模態分析中參考 Shaker [36] 的方法，去掉方程(3.30) (3.31)的阻尼、外力、非線性項，於是振動方程變為：



$$\begin{aligned}
 & YI_i \frac{\partial^4 w_i(x_i, t)}{\partial x_i^4} - [fc_i(x_i) + fc_{i+1}(0)] \Omega^2 \frac{\partial^2 w_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} \\
 & + m_i \left(\frac{\partial^2 w_i(x_i, t)}{\partial t^2} - \Omega^2 \frac{\partial w_i(x_i, t)}{\partial x_i} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

$i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
 & YI_3 \frac{\partial^4 w_3(x_3, t)}{\partial x_3^4} - [fc_3(x_3) - fc_4(0)] \Omega^2 \frac{\partial^2 w_3(x_3, t)}{\partial x_3^2} \\
 & + m_3 \left(\frac{\partial^2 w_3(x_3, t)}{\partial t^2} - \Omega^2 \frac{\partial w_3(x_3, t)}{\partial x_3} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}
 & YI_4 \frac{\partial^4 w_4(x_4, t)}{\partial x_4^4} - fc_4(x_4) \Omega^2 \frac{\partial^2 w_4(x_4, t)}{\partial x_4^2} \\
 & + m_4 \left(\frac{\partial^2 w_4(x_4, t)}{\partial t^2} - \Omega^2 \frac{\partial w_4(x_4, t)}{\partial x_4} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

由於樑的振動實際為無窮多的模態的疊加，而每個模態又對應與一個自然頻率 ω 。用分離變數法考慮對第 j 個模態，代入模態座標將方程分離為空間坐標 $\phi_{ij}(x_i)$ 與時間坐標 $\eta_j(t)$ 兩個部分。

$$w_i(x_i, t) = \sum_{j=1}^n \phi_{ij}(x_i) \eta_j(t) \tag{3.50}$$

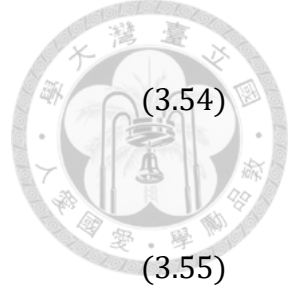
代入(3.47)(3.48)(3.49)後整理得：

$$\begin{aligned}
 & YI_i \phi_{ij}'''(x_i) - [fc_i(x_i) + fc_{i+1}(0)] \Omega^2 \phi_{ij}''(x_i) - m_i (\omega_j^2 + \Omega^2) \phi_{ij}(x_i) = 0 \\
 & i = 1, 2
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

$$YI_3 \phi_{3j}''''(x_3) - [fc_3(x_3) - fc_4(0)] \Omega^2 \phi_{3j}''(x_3) - m_3 (\omega_j^2 + \Omega^2) \phi_{3j}(x_3) = 0 \tag{3.52}$$

$$YI_4 \phi_{4j}''''(x_4) - fc_4(x_4) \Omega^2 \phi_{4j}''(x_4) - m_4 (\omega_j^2 + \Omega^2) \phi_{4j}(x_4) = 0 \tag{3.53}$$

由於 $fc_i(x_i)$ 非常數，無法繼續後續處理，為了計算上的需求對其做方均根處理並簡化：



$$\overline{fc}_i = \sqrt{\frac{\int_0^{L_i} [fc_i(x_i) + fc_{i+1}(0)]^2 dx_i}{L_i}} \quad (3.54)$$

$i=1,2$

$$\overline{fc}_3 = \sqrt{\frac{\int_0^{L_3} [fc_3(x_3) - fc_4(0)]^2 dx_i}{L_3}} \quad (3.55)$$

$$\overline{fc}_4 = \sqrt{\frac{\int_0^{L_4} fc_4(x_4)^2 dx_4}{L_4}} \quad (3.56)$$

這樣，式(3.51)(3.52)(3.53)就改寫為

$$YI_i \phi_{ij}''''(x_i) - \overline{fc}_i \Omega^2 \phi_{ij}''(x_i) - m_i (\omega_j^2 + \Omega^2) \phi_{ij}(x_i) = 0 \quad (3.57)$$

$i=1,2,3,4$

$$\ddot{\eta}_j(t) + \omega_j^2 \eta_j(t) = 0 \quad (3.58)$$

對於該四階微分方程，它的解 $\phi_{ij}(x_i)$ 滿足：

$$\phi_{ij}(x_i) = A_{ij} \cosh(a_{ij}x_i) + B_{ij} \sinh(a_{ij}x_i) + C_{ij} \cos(b_{ij}x_i) + D_{ij} \sin(b_{ij}x_i) \quad (3.59)$$

$$\eta_j(t) = \alpha \cos(\omega_j t) + \beta \sin(\omega_j t) \quad (3.60)$$

其中，

$$a_{ij} = \sqrt{\frac{-k_i^2 + \sqrt{k_i^4 + 4l_{ij}^4}}{2}}$$

$$b_{ij} = \sqrt{\frac{k_i^2 + \sqrt{k_i^4 + 4l_{ij}^4}}{2}} \quad (3.61)$$

$$k_i^2 = -\frac{\overline{fc}_i \Omega^2}{YI_i}$$

$$l_{ij}^4 = \frac{m_i (\omega_j^2 + \Omega^2)}{YI_i}$$

對邊界條件同樣分離參數，於是主樑固定端條件變為：

$$\phi_j(0) = 0 \quad (3.62)$$

$$\phi_j'(0) = 0 \quad (3.63)$$

主樑各段之間的連續條件變為：

$$\phi_{ij}(L_i) = \phi_{i+1,j}(0) \quad (3.64)$$

$$\phi'_{ij}(L_i) = \phi'_{i+1,j}(0) \quad (3.65)$$

$$YI_i \phi''_{ij}(L_i) = YI_{i+1} \phi''_{i+1,j}(0) \quad (3.66)$$

$$YI_i \phi''_{ij}(L_i) - \overline{fc}_i \phi'_{ij}(L_i) + Mt_i (\omega_j^2 + \Omega^2) = YI_{i+1} \phi''_{i+1,j}(0) - \overline{fc}_{i+1} \phi'_{i+1,j}(0) \quad (3.67)$$

$i=1,2$

主樑與副樑之連續條件變為：

$$\phi_{3j}(L_3) = -\phi_{4j}(0) \quad (3.68)$$

$$\phi'_{3j}(L_3) = \phi'_{4j}(0) \quad (3.69)$$

$$YI_3 \phi''_{3j}(L_3) - I_{M_3} \omega_j^2 \phi'_{3j}(L_3) = YI_4 \phi''_{4j}(0) \quad (3.70)$$

$$YI_3 \phi''_{3j}(L_3) - \overline{fc}_3 \phi'_{3j}(L_3) + Mt_3 (\omega_j^2 + \Omega^2) = -[YI_4 \phi''_{4j}(0) - \overline{fc}_4 \phi'_{4j}(0)] \quad (3.71)$$

副樑末端邊界條件變為：

$$YI_4 \phi''_{4j}(L_4) - I_{M_4} \omega_j^2 \phi'_{4j}(L_4) = 0 \quad (3.72)$$

$$YI_4 \phi''_{4j}(L_4) - \overline{fc}_4 \phi'_{4j}(L_4) + Mt_4 (\omega_j^2 + \Omega^2) = 0 \quad (3.73)$$

將式(3.59)(3.60)代入式(3.57)求解即可獲得固定轉速 Ω 下的模態函數 $\phi_{ij}(x_i)$ 、自然頻率 ω_j 。需要注意的是，除了模態處理這一步對函數進行了方均根處理進行妥協以完成模態處理的工作，後續的處理和計算為保證準確性並不會再使用方均根，雖然會帶來一些模態函數的誤差，但根據奕傑學長的工作[46]，該誤差對總體影響不大。

3.1.3 正規化處理

將運動方程以矩陣乘積形式表示為：



$$MN=0 \quad (3.74)$$

N 是模態函數之係數 A_{ij} 、 B_{ij} 、 C_{ij} 、 D_{ij} ，M 為邊界條件連續條件對應於 N 的項。

該矩陣方程有解之必要條件為 $\det(M)=0$ ，為求解該矩陣還需確定其係數，於是使用正交條件：

$$\sum_{i=1}^4 \left\{ \int_0^{L_i} \phi_{ik}(x_i) m_i \phi_{ij}(x_i) dx_i + \phi_{ik}(x_i) M t_i \phi_{ij}(x_i) \Big|_{x_i=L_i} + \left[\frac{d\phi_{ik}(x_i)}{dx_i} I_{M t_i} \frac{d\phi_{ij}(x_i)}{dx_i} dx_i \right] \right\} = \delta_{jk} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_0^{L_i} \frac{d\phi_{ik}(x_i)}{dx_i} [f c_i(x_i) + f c_{i+1}(0)] \Omega^2 \frac{d\phi_{ij}(x_i)}{dx_i} dx_i \right\} \\ & + \int_0^{L_3} \frac{d\phi_{3k}(x_3)}{dx_3} [f c_3(x_3) - f c_4(0)] \Omega^2 \frac{d\phi_{3j}(x_3)}{dx_3} dx_3 \\ & + \int_0^{L_4} \frac{d\phi_{4k}(x_4)}{dx_4} f c_4(x_4) \Omega^2 \frac{d\phi_{4j}(x_4)}{dx_4} dx_4 \\ & + \sum_{i=1}^4 \left\{ \int_0^{L_i} \frac{d^2\phi_{ik}(x_i)}{dx_i^2} Y I_i \frac{d^2\phi_{ij}(x_i)}{dx_i^2} dx_i + \left[\frac{d\phi_{ik}(x_i)}{dx_i} I_{M t_i} \frac{d^2\phi_{ij}(x_i)}{dx_i^2} dx_i \right] \right. \\ & \left. - \Omega^2 \left[\int_0^{L_i} \phi_{ik}(x_i) m_i \phi_{ij}(x_i) dx_i + \phi_{ik}(x_i) M t_i \phi_{ij}(x_i) \Big|_{x_i=L_i} \right] \right\} \\ & = \omega_j^2 \delta_{jk} \end{aligned} \quad (3.76)$$

其中， $\delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{if } j \neq k \\ 1 & \text{if } j = k \end{cases}$ 為 Dirac delta 函數。至此，模態函數與其自然頻率已經

全部解出。於是將沒有剔除非線性項的運動方程式和邊界條件以模態函數(3.50)

取代，以正交條件化簡整理得：

$$\begin{aligned} & M b_{jk} \ddot{\eta}_i(t) + \left\{ K b_{jk} + (K s_{jk} - M b_{jk}) \Omega^2 - K g_{jk} \cos \Omega t \right\} \eta_i(t) \\ & + \left(R s_{jk} - \frac{1}{2} \Omega^2 K n_{jk} \right) \eta_i^3(t) + K n_{jk} \left[\eta_i(t) \dot{\eta}_i^2(t) + \eta_i^2(t) \ddot{\eta}_i(t) \right] \\ & = F_j \sin \Omega t \end{aligned} \quad (3.77)$$

此即折返樑系統的力學振動方程式，其中，

$$M b_{jk} = \sum_{i=1}^4 \int_0^{L_i} \phi_{ik}(x_i) m_i \phi_{ij}(x_i) dx_i + \phi_{ik}(x_i) M t_i \phi_{ij}(x_i) \Big|_{x_i=L_i} \quad (3.78)$$



$$Kb_{jk} = \sum_{i=1}^4 \int_0^{L_i} \frac{d^2\phi_{ik}(x_i)}{dx_i^2} YI_i \frac{d^2\phi_{ij}(x_i)}{dx_i^2} dx_i \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} Ks_{jk} = & \sum_{i=1}^2 \int_0^{L_i} \frac{d\phi_{ik}(x_i)}{dx_i} [fc_i(x_i) + fc_{i+1}(0)] \frac{d\phi_{ij}(x_i)}{dx_i} dx_i \\ & + \int_0^{L_3} \frac{d\phi_{3k}(x_3)}{dx_3} [fc_3(x_3) - fc_4(0)] \Omega^2 \frac{d\phi_{3j}(x_3)}{dx_3} dx_3 \\ & + \int_0^{L_4} \frac{d\phi_{4k}(x_4)}{dx_4} fc_4(x_4) \Omega^2 \frac{d\phi_{4j}(x_4)}{dx_4} dx_4 \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} Kg_{jk} = & \sum_{i=1}^2 \int_0^{L_i} \frac{d\phi_{ik}(x_i)}{dx_i} [fg_i(x_i) - fg_{i+1}(0)] \frac{d\phi_{ij}(x_i)}{dx_i} dx_i \\ & + \int_0^{L_3} \frac{d\phi_{3k}(x_3)}{dx_3} [fg_3(x_3) + fg_4(0)] \Omega^2 \frac{d\phi_{3j}(x_3)}{dx_3} dx_3 \\ & - \int_0^{L_4} \frac{d\phi_{4k}(x_4)}{dx_4} fg_4(x_4) \Omega^2 \frac{d\phi_{4j}(x_4)}{dx_4} dx_4 \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$Rs_{jk} = \sum_{i=1}^4 \int_0^{L_i} \frac{\partial\phi_{ik}(x_i, t)}{\partial x_i} YI_i \frac{\partial\phi_{ij}(x_i, t)}{\partial x_i} \frac{\partial \left(\frac{\partial\phi_{ij}(x_i, t)}{\partial x_i} \frac{\partial^2\phi_{ij}(x_i, t)}{\partial x_i^2} \right)}{\partial x_i} dx_i \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} Kn_{jk} = & \sum_{i=1}^2 \int_0^{L_i} \frac{d\phi_{ik}(x_i)}{dx_i} [\overline{fn}_i(x_i) + \overline{fn}_{i+1}(0)] \frac{d\phi_{ij}(x_i)}{dx_i} dx_i \\ & + \int_0^{L_3} \frac{d\phi_{3k}(x_3)}{dx_3} [\overline{fn}_3(x_3) - \overline{fn}_4(0)] \Omega^2 \frac{d\phi_{3j}(x_3)}{dx_3} dx_3 \\ & + \int_0^{L_4} \frac{d\phi_{4k}(x_4)}{dx_4} \overline{fn}_4(x_4) \Omega^2 \frac{d\phi_{4j}(x_4)}{dx_4} dx_4 \end{aligned} \quad (3.83)$$

$\overline{fn}_i(x_i)$ 為 $fn_i(x_i, t)$ 函數實數的部分。

$$\begin{aligned} F_j = & \sum_{i=1}^3 \left[\int_0^{L_i} \phi_{ij}(x_i) g dx_i + \phi_{ij}(L_i) Mt_i g \right] - \int_0^{L_4} \phi_{4j}(x_4) g dx_4 \\ & - \phi_{4j}(x_4) Mt_4 g \Big|_{x_i=L_i} \end{aligned} \quad (3.84)$$

其中， Mb_{jk} 、 Kb_{jk} 、 Ks_{jk} 、 Kg_{jk} 、 Rs_{jk} 、 Kn_{jk} 、 F_j 以其物理意義代表質量、剛性、應力硬化、重力、剛性非線性、慣性非線性、外力的作用項。

由正交條件知

$$Mb_{jk} = \delta_{jk} \quad (3.85)$$

$$\frac{Kb_{jk} + (Ks_{jk} - Mb_{jk})\Omega^2}{Mb_{jk}} = \omega_j^2 \delta_{jk} \quad (3.86)$$



於是(3.77)化簡為：

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_i(t) + \omega_j^2 \left(1 - \frac{Kg_{jk} \cos \Omega t}{Kb_{jk} + (Ks_{jk} - Mb_{jk})\Omega^2} \right) \eta_i(t) + \left(Rs_{jk} - \frac{1}{2} \Omega^2 Kn_{jk} \right) \eta_i^3(t) \\ + Kn_{jk} \left[\eta_i(t) \dot{\eta}_i^2(t) + \eta_i^2(t) \ddot{\eta}_i(t) \right] = F_j \sin \Omega t \end{aligned} \quad (3.87)$$

理想的情況下我們希望得到一個結構的完整的模態集，實際應用中這既不可能也不必要。實際上並非所有的模態對響應的貢獻都是相同的，相比低頻來說，高階模態的影響較小。對實際結構而言，我們感興趣的往往是它的前幾階模態，更高的模態常常被捨棄。這樣儘管會造成一點誤差，但頻響函數的矩陣階數會大大減小，使工作量大為減小。這種處理方法稱為模態截斷。

對於折返樑系統，由於本文設計之初有意加大樑的長寬比，因此第三模態(扭轉)及之後的模態對應的自然頻率與前兩個模態對應的自然頻率相距甚遠，折返樑系統的研究一般只考慮兩個模態，即 $j=k=2$ ，對於理想的完全正交化的情況應該有：

$$Kb_{12} = Kb_{21} = Ks_{12} = Ks_{21} = Kg_{12} = Kg_{21} = Rs_{12} = Rs_{21} = Kn_{12} = Kn_{21} = 0 \quad (3.88)$$

但由於兩個模態之間耦合糾纏的一些特性，導致這些係數在一些極端情況下（尤其是兩個旋轉共振頻相距非常近的情況下）並不為 0，這是因為當兩個模態相交的頻率附近，模態之間發生耦合，最終效果是多模態共同作用下造成的，這是模態截斷處理本身所帶來的弊端，可能導致最終的結果在兩模態之間的部分不完全準確。進行數值計算時取：



$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} Kb_1 \\ Kb_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Kb_{11} \\ Kb_{22} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} Ks_1 \\ Ks_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Ks_{11} \\ Ks_{22} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} Kg_1 \\ Kg_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Kg_{11} \\ Kg_{22} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} Rs_1 \\ Rs_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Rs_{11} \\ Rs_{22} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} Kn_1 \\ Kn_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Kn_{11} \\ Kn_{22} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

這樣有：

$$\begin{aligned}
 \omega_i^2 &= Kb_i + (Ks_i - Mb_i)\Omega^2 \\
 i &= 1, 2
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

於是運動方程改寫為：

$$\begin{aligned}
 \ddot{\eta}_i(t) + (\omega_i^2 - Kg_i \cos \Omega t)\eta_i(t) + \left(Rs_i - \frac{1}{2}\Omega^2 Kn_i \right) \eta_i^3(t) \\
 + Kn_i \left[\eta_i(t) \dot{\eta}_i^2(t) + \eta_i^2(t) \ddot{\eta}_i(t) \right] = F_i \sin \Omega t \\
 i = 1, 2
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

或寫作：

$$\begin{aligned}
 \ddot{\eta}_i(t) + (Kb_i + (Ks_i - Mb_i)\Omega^2 - Kg_i \cos \Omega t)\eta_i(t) + \left(Rs_i - \frac{1}{2}\Omega^2 Kn_i \right) \eta_i^3(t) \\
 + Kn_i \left[\eta_i(t) \dot{\eta}_i^2(t) + \eta_i^2(t) \ddot{\eta}_i(t) \right] = F_i \sin \Omega t \\
 i = 1, 2
 \end{aligned} \tag{3.92}$$

通常反共振點的頻率和旋轉第一、第二共振頻距離較遠時這種方法獲得的解要更準確。但對共振頻的位置關係要求比較高，不適用於所有情況。至此，折返樑系統的力學模型的推導完全結束。



3.2 旋轉壓電折返樑電學模型

在模型上，考慮樑壓材料為一個電流源 $i_p(t)$ 與一個電容 C_p 並聯組成， R 為電路系統之電阻。

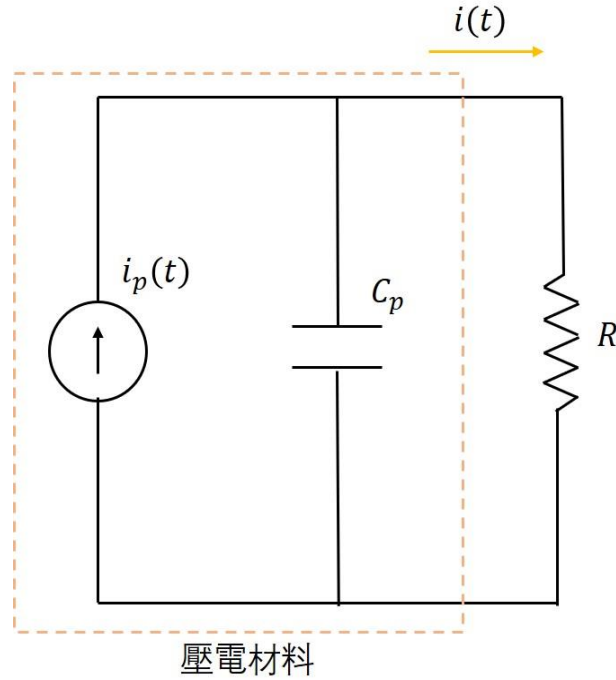


圖 3.5 壓電材料等效電路

根據 Euler-Bernoulli Beam 理論，折返樑為薄樑，只考慮 1 方向 (X 方向) 的應力與應變、3 方向 (Z 方向) 的電場。則根據壓電本構方程式(2.3)壓電材料的電位移可表示為：

$$\begin{aligned} D_3(x_2, t) &= e_{31} S_1^p(x_2, t) + \epsilon_{33}^S E_3(t) \\ &= -e_{31} h_{pc} \frac{\partial^2 w_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} - \epsilon_{33}^S \frac{v(t)}{h_p} \end{aligned} \quad (3.93)$$

其中 $h_{pc} = \frac{h_p + h_c}{2}$ 。於是

$$\begin{aligned} q(t) &= \int_A D_3 n dA \\ &= \int_0^{L_2} \left(-e_{31} h_{pc} \frac{d^2 w_2(x_2, t)}{dx_2^2} - \epsilon_{33}^S \frac{v(t)}{h_p} \right) b_p dx_2 \end{aligned} \quad (3.94)$$

由歐姆定律

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} \\
 &= -e_{31} h_{pc} b_p \int_0^{L_2} \frac{\partial^3 w_2(x_2, t)}{\partial x_2^2 \partial t} dx_2 - \frac{\epsilon_{33}^s b_p L_2}{h_p} \frac{dv(t)}{dt}
 \end{aligned} \tag{3.95}$$



又 $v(t) = i(t)R$ ，以式(3.50)對 $w_2(x_2, t)$ 展開得

$$Cp\dot{v}(t) + \frac{1}{R_i} v(t) + \sum_{i=1}^2 \theta_i \dot{\eta}_i(t) = 0 \tag{3.96}$$

其中， ζ_i 為阻尼係數， θ_i 為力電耦合項，

$$\theta_i = e_{31} h_{pc} b_p \left. \frac{d\phi_i(x_2)}{dx_2} \right|_{x_2=L_p} \tag{3.97}$$

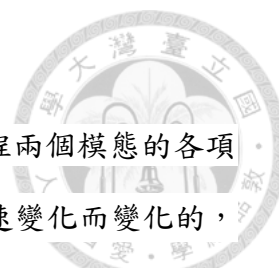
假設阻尼與自然頻率成正比，參考 Erturk [47] 的方法對力學運動方程(3.91)加入力電耦合項和阻尼係數項得到折返樑系統的力電耦合振動方程式為：

$$\begin{aligned}
 &\ddot{\eta}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{\eta}_i(t) + (\omega_i^2 - Kg_i \cos \Omega t) \eta_i(t) + \left(Rs_i - \frac{1}{2} \Omega^2 Kn_i \right) \eta_i^3(t) \\
 &+ Kn_i \left[\eta_i(t) \dot{\eta}_i^2(t) + \eta_i^2(t) \ddot{\eta}_i(t) \right] + \theta_i v(t) = F_i \sin \Omega t
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

整理得折返樑系統的力電耦合振動方程組：

$$\begin{cases}
 \ddot{\eta}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{\eta}_i(t) + (\omega_i^2 - Kg_i \cos \Omega t) \eta_i(t) + \left(Rs_i - \frac{1}{2} \Omega^2 Kn_i \right) \eta_i^3(t) \\
 + Kn_i \left[\eta_i(t) \dot{\eta}_i^2(t) + \eta_i^2(t) \ddot{\eta}_i(t) \right] + \theta_i v(t) = F_i \sin \Omega t \\
 Cp\dot{v}(t) + \frac{1}{R_i} v(t) + \sum_{i=1}^2 \theta_i \dot{\eta}_i(t) = 0
 \end{cases} \quad i = 1, 2 \tag{3.99}$$

至此，折返樑系統的力電耦合模型的推導完全結束。



3.3 數值計算和模態處理

由於本文的討論內容基於旋轉環境，而旋轉環境中運動方程兩個模態的各項參數（列如本文中 Kb_i 、 Ks_i 、 Kg_i 、 Rs_i 、 Kn_i 、 θ_i ）都是隨轉速變化而變化的，但對全域參數進行求解會大大拖累計算的準確性和速度。因此，本文在計算區間（一般為包含兩個旋轉共振頻之前後約 10Hz 區間）平均計算 50 個節點的各項參數，在獲得節點參數後再對節點進行插值處理，假設相鄰節點之間的變化是線型的，獲得與而後的 ODE15s 計算相同密度的參數，這種做法可以在保證一定準確性的基礎上兼顧旋轉頻率對全域參數得改變與數值計算的較高精度。

本文研究的折返樑結構有意識地使兩個模態旋轉共振頻相距較近，希望藉此獲得雙峰和後續非線性力對雙峰頻寬的拓展。根據 Lima [48]對旋轉單樑的研究結果，當兩模態相互靠近時，模態並不會如圖 3.6(a)那樣相交，而是如圖 3.6(b)的趨勢發生轉向。這種轉向不是計算的先後關係產生的，如果對靠近區間密集取點拉近後（圖 3.7）觀察到兩個模態並無交點，而是擦身而過，Lima [48]稱這種現象為“Veer”。如果以數值計算對特征方程的結果繪製兩個模態在模態轉向點附近的模態形狀，會發現第一模態的振型由上升模態的振型逐漸轉向下降模態的振型，而第二模態則由下降模態的振型逐漸轉向上升模態的振型。介於中間的振型既非典型的上升模態振型也非下降模態的振型，而是多個模態耦合的振型，因此之前將模型簡化為兩個模態的處理方式就會和這段區間產生模型不匹配的誤差。

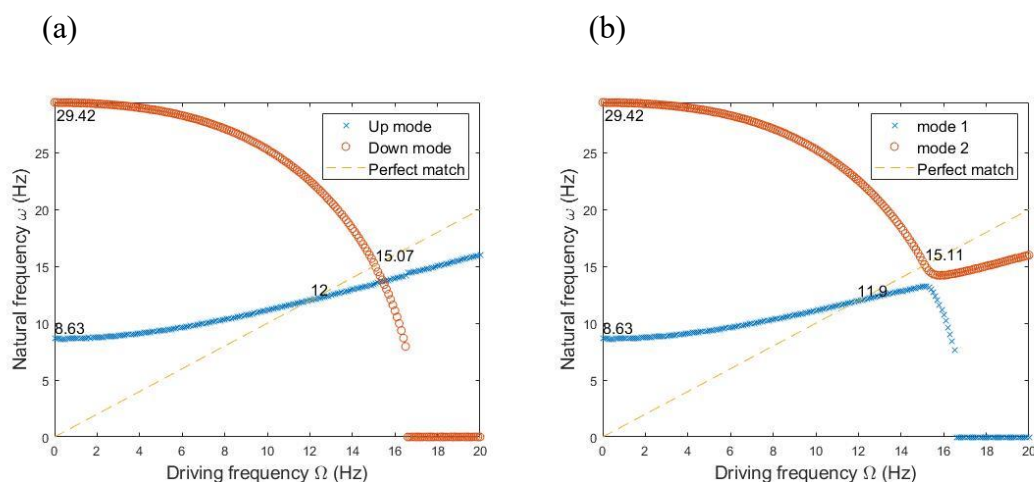




圖 3.6 折返樑轉速與自然頻率關係變化

(a) 模態交錯；(b) 模態轉向；

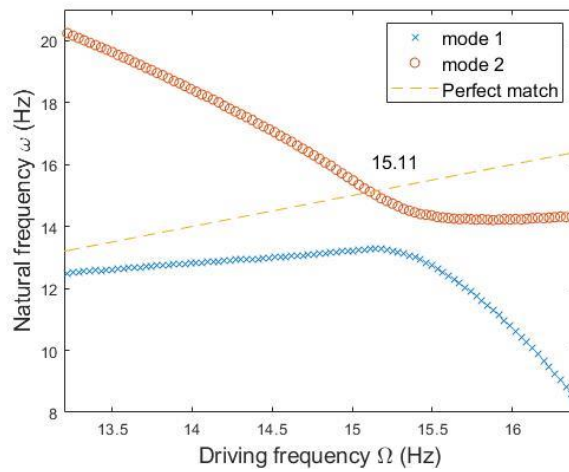


圖 3.7 模態轉向區域折返樑轉速與自然頻率關係變化

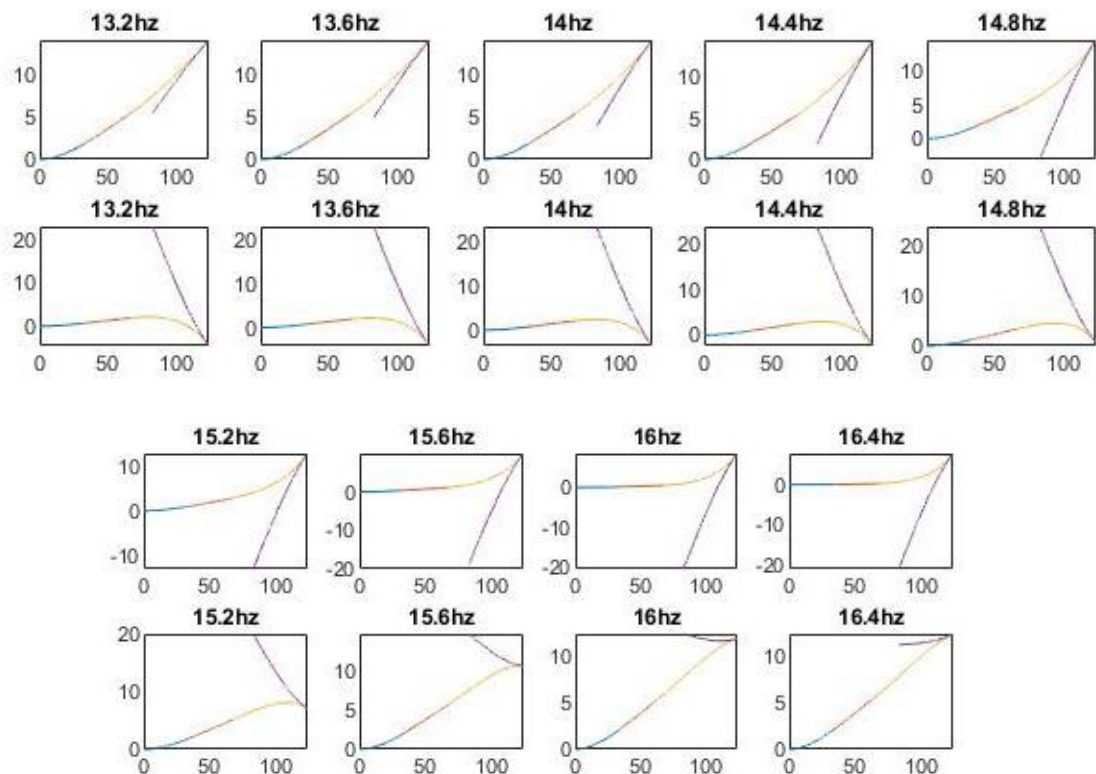


圖 3.8 模態轉向區域折返樑轉振動形狀變化

由於模態轉向的存在，本文考慮對模態進行兩種劃分方式：隨頻率上升或下降呈現上升或下降趨勢的上升模態下降模態（圖 3.6(a)），他們的振型總體一致；

實際情況中先後發生的第一模態第二模態(圖 3.6(b)),他們的振型會發生轉變。

由於存在兩種模態劃分方式,在進行計算時就要考慮哪種劃分更為合理。乍看起來,將振型相同的模態歸類在同一方程求解無疑更合理,但是這樣做會改變原有的模態轉向,導致反共振點消失,從實際模擬結果來看第二共振頻電壓結果太小,也和實驗結果有出入。因此,本文認為多模態處理的過程就是讓反共振點前後的模態顯現和隱去,雖然模態轉向讓高頻和低頻的振型不一致,但實際中發揮主要作用的卻只有兩者之一,另一部分則在對應的區間趨於 0,與實際振型如何無關。通常情況下上升模態會先於下降模態出現(這也是本文實驗中絕大多數的情況),但也會出現下降模態先於上升模態出現的情況(本文副樑末端磁力實驗),這種情況下模態發生交換,下降模態成為第一模態而上升模態成為第二模態,因此相關參數也需要進行交換,這種不同情況的不同處理方式之必要性和詳細電壓反饋可以參考 6.4.4 節實驗中的情況。

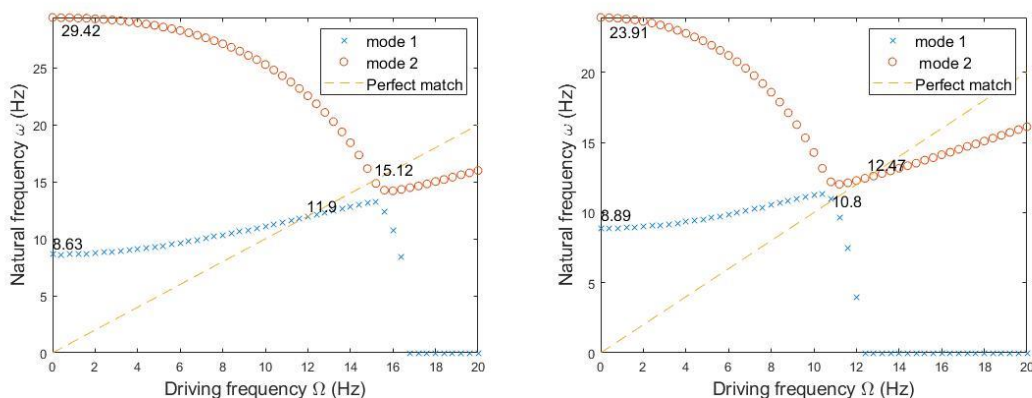


圖 3.9 上升模態先於和後於模態轉向到達旋轉共振頻

在數值計算區間的問題上,以 0.01s 為時間間隔,考慮 100 秒勻速完成旋轉頻率的變化,但實際實驗中出於手動操作控制器控制轉速和觀測記錄數據的需要,顯然無法準確實現 100 秒勻速掃頻這一點。

Chapter 4 非線性模型

本文對四段式折返梁進行實驗後發現，兩個共振頻的峰值之間往往存在反共振點，在反共振點附近較低的電壓反饋不利於頻寬和發電效率的提升(6.2.1 節)。如果進一步拉近兩個模態，使上升下降模態發生共振的次序出現交換，則兩個共振頻的峰值會削減為單一峰值，更加不利於發電功率的提升(6.2.3 節)。因此考慮使用引入非線性力的方法為共振區間提供額外的硬化效果，希望進而改善兩個共振頻的峰值之間的低電壓反饋，進而達到拓寬頻寬的效果。

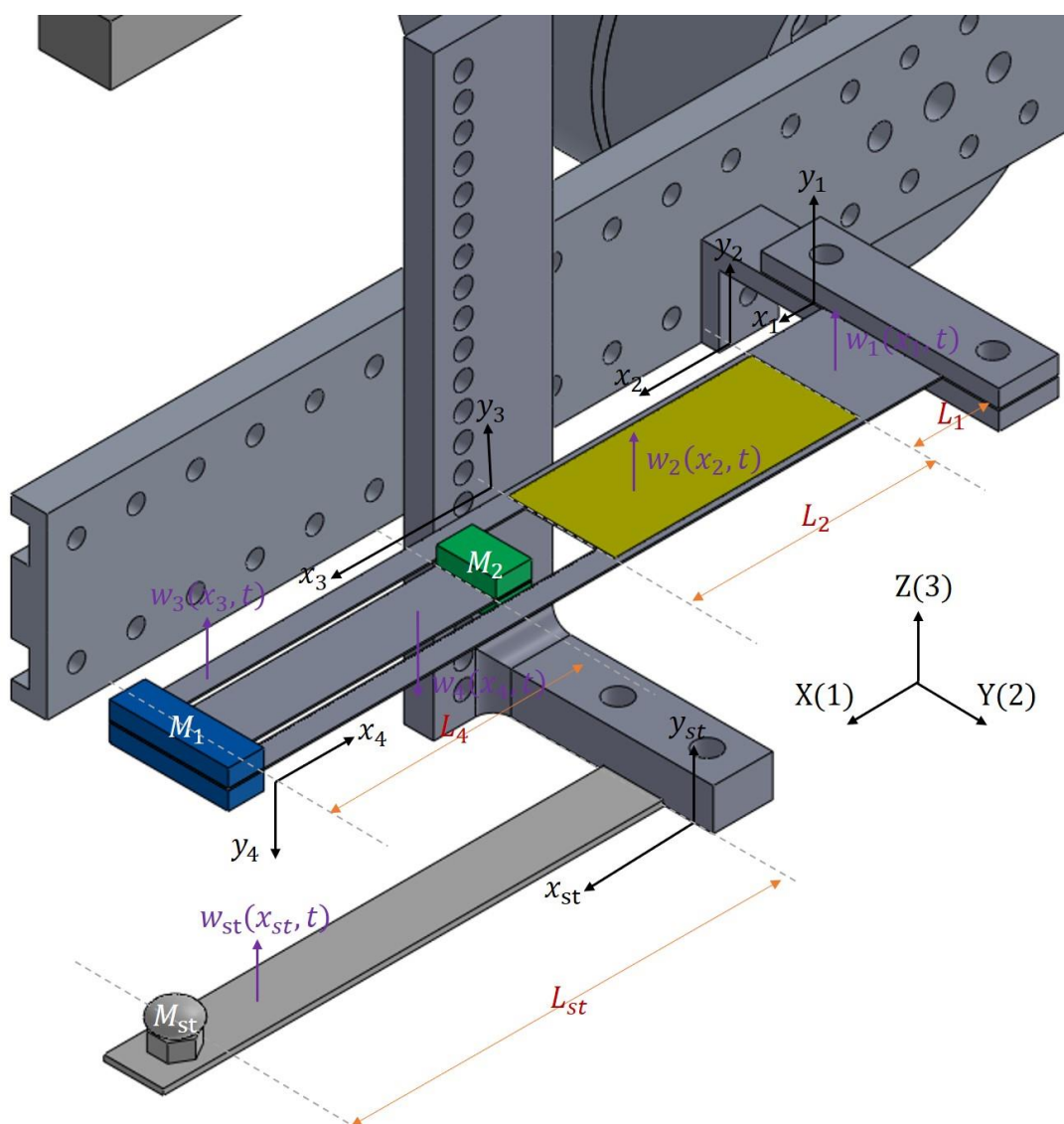


圖 4.1 旋轉折返梁脈衝非線性能量採集器



4.1 脈衝非線性模型

本章引入脈衝非線性的作用。以機械擋板作為系統非線性脈衝力的來源，並將機械擋板設計為懸臂樑式，以機械擋板末端質量塊作為碰撞的衝擊點。

通常處理單模態的脈衝非線性碰撞問題時，多數研究主要會採用集總參數模型 (LPM) 以簡化模擬，將懸臂樑視作由彈簧阻尼系統 (MCK 系統)，雖然集總參數模型可以通過簡單的方法幫助剖析問題，但它一般僅局限於單個振動模態，難以用於耦合系統的一些重要問題分析，如模態振型和應變的精確分佈問題等，因此後文在脈衝非線性模型用於雙自由度的折返樑系統問題上做出一定的改動。

4.1.1 機械擋模型

對於旋轉的懸臂樑擋板，設計其厚度較大，認為其旋轉過程中的振動為小位移振動，這也是為了方便後續使用 MCK 系統獲得需要的脈衝力計算公式。根據 Euler-Bernoulli 樑理論，旋轉環境的懸臂樑機械擋板的運動方程可以表示為：

$$m_{st} \left[\frac{\partial^2 w_{st}(x_{st}, t)}{\partial t^2} - \Omega^2 w_{st}(x_{st}, t) \right] + YI_{st} \frac{\partial^4 w_{st}(x_{st}, t)}{\partial x_{st}^4} - f_{c_{st}}(x_{st}) \frac{\partial^2 w_{st}(x_{st}, t)}{\partial x_{st}^2} = m_{st} g \sin \Omega t \quad (4.1)$$

$$f_{c_{st}}(x_{st}) = \left[m_{st} \int_s^{L_{st}} (x_{st} + R_{st}) dx_{st} + M_{t_{st}} (L_{st} + R_{st}) \right] \Omega^2 \quad (4.2)$$

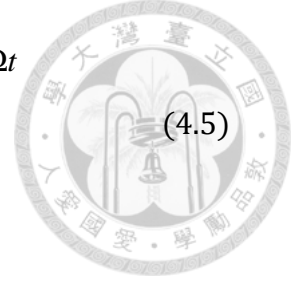
$$x_{st} \in (0, L_{st})$$

其中 m_{st} 、 w_{st} 、 x_{st} 、 $f_{c_{st}}$ 分別為擋板的線密度、Z 方向位移、距離擋板夾持端的距離、擋板系統離心力。擋板的邊界條件有：

$$w_{st}(0, t) = 0 \quad (4.3)$$

$$\left. \frac{\partial w_{st}(x_{st}, t)}{\partial x_{st}} \right|_{x_{st}=0} = 0 \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
& YI_{st} \frac{\partial^3 w_{st}(x_{st}, t)}{\partial x_{st}^3} - f c_{st}(x_{st}) \frac{\partial w_{st}(x_{st}, t)}{\partial x_{st}} + M t_{st} g \sin \Omega t \\
& - M t_{st} \left[\frac{\partial^2 w_{st}(x_{st}, t)}{\partial t^2} - \Omega^2 w_{st}(x_{st}, t) \right] \Big|_{x_{st}=L_{st}} = 0
\end{aligned} \tag{4.5}$$



$$YI_{st} \frac{\partial^2 w_{st}(x_{st}, t)}{\partial x_{st}^2} \Big|_{x_{st}=L_{st}} + I_{M_{st}} \frac{\partial^3 w_{st}(x_{st}, t)}{\partial t^2 \partial x_{st}} \Big|_{x_{st}=L_{st}} = 0 \tag{4.6}$$

其中 $M t_{st}$ 為擋板末端衝擊質量塊質量， $I_{M_{st}}$ 為擋板振動中的振動慣量，它的獲得方式同(3.46)。由於擋板懸臂樑結構的第二模態與第一模態相距較遠，只考慮機械擋板的第一模態，類似的使用第三章分離變數的方法：

$$w_{st}(x_{st}, t) = \phi_{st}(x_{st}) \eta_{st}(t) \tag{4.7}$$

將(4.7)代入(4.1)後，考慮擋板懸臂樑的正交條件：

$$\begin{aligned}
& \int_0^{L_{st}} \phi_{stk}(x_{st}) m_{st} \phi_{stj}(x_{st}) dx_{st} + \phi_{stk}(x_{st}) M t_{st} \phi_{stj}(x_{st}) \Big|_{x_{st}=L_{st}} \\
& + \left[\frac{d\phi_{stk}(x_{st})}{dx_{st}} I_{M_{st}} \frac{d\phi_{stj}(x_{st})}{dx_{st}} dx_{st} \right] = \delta_{jk} \tag{4.8} \\
& \int_0^{L_{st}} \frac{d\phi_{stk}(x_{st})}{dx_{st}} f c_{st}(x_{st}) \Omega^2 \frac{d\phi_{stj}(x_{st})}{dx_{st}} dx_{st} \\
& + \int_0^{st} \frac{d^2 \phi_{stk}(x_{st})}{dx_{st}^2} YI_{st} \frac{d^2 \phi_{stj}(x_{st})}{dx_{st}^2} dx_{st} \\
& - \Omega^2 \left[\int_0^{L_{st}} \phi_{stk}(x_{st}) m_{st} \phi_{stj}(x_{st}) dx_{st} + \phi_{stk}(x_{st}) M t_{st} \phi_{stj}(x_{st}) \Big|_{x_{st}=L_{st}} \right] \\
& + \left[\frac{d\phi_{stk}(x_{st})}{dx_{st}} I_{M_{st}} \frac{d^2 \phi_{stj}(x_{st})}{dx_{st}^2} dx_{st} \right] = \omega_{st}^2 \delta_{jk} \tag{4.9}
\end{aligned}$$

整理得機械擋板的振動方程式：

$$\ddot{\eta}_{st}(t) + 2\zeta_{st} \omega_{st} \dot{\eta}_{st}(t) + \omega_{st}^2 \eta_{st}(t) = F_{st} \sin \Omega t \tag{4.10}$$

4.1.2 脈衝模型

為了獲得折返樑系統在強迫振動過程中撞擊機械擋板時受到的脈衝力，以集總參數模型將擋板模型簡化，此方法之假設條件為：折返樑系統與擋板的撞擊作

用時間極短；發生的碰撞為完全非彈性碰撞；碰撞期間擋板的位移極小，忽略擋板末端質量塊對系統的影響。於是，將機械擋板的運動方程變為 MCK 的形式：

$$M_{st} \ddot{y}_{st}(t) + C_{st} \dot{y}_{st}(t) + K_{st} y_{st}(t) = M_{st} F_{st} \sin \Omega t \quad (4.11)$$

其中，

$$\begin{aligned} M_{st} &= \frac{1}{[\phi_{st}(L_{st})]^2} \\ C_{st} &= \frac{2\zeta_{st}\omega_{st}}{[\phi_{st}(L_{st})]^2} \\ K_{st} &= \frac{\omega_{st}^2}{[\phi_{st}(L_{st})]^2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

分別表示擋板樑末端質量塊、擋板樑等效阻尼、擋板樑等效剛性； y_{st} 表示擋板樑末端質量塊的位移。則在該集總參數模型下脈衝力可表示為：

$$\begin{aligned} F_{imp} &= K_{st} \dot{y}_{rel}(t) + K_{st} (y_{rel}(t) \pm d) \\ &= \frac{2\zeta_{st}\omega_{st}}{[\phi_{st}(L_{st})]^2} \dot{y}_{rel}(t) + \frac{\omega_{st}^2}{[\phi_{st}(L_{st})]^2} (y_{rel}(t) \pm d) \end{aligned} \quad (4.13)$$

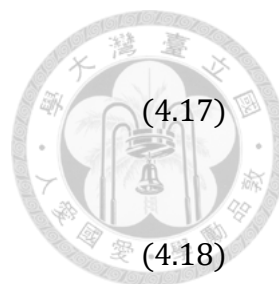
其中， d 為擋板末端質量塊尖端與折返樑系統碰撞發生點的 Z 方向距離，正負號由擋板位置決定，對主樑當擋板在下時符號為正，反之為副；對於副樑當擋板在上時符號為正，反之為副。符號之正負是由坐標建立的關係所決定的。 $\dot{y}_{rel}(t)$ 和 $y_{rel}(t)$ 為相對速度和相對位移：

$$\dot{y}_{rel}(t) = \dot{y}_{sys}(t) - \dot{y}_{st}(t) \quad (4.14)$$

$$y_{rel}(t) = y_{sys}(t) - y_{st}(t) \quad (4.15)$$

根據模態函數的假設

$$\dot{y}_{sys}(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^2 \phi_{3i}(L_3) \dot{\eta}_i(t) & \text{stopper at } M_1 \\ \sum_{i=1}^2 \phi_{4i}(L_4) \dot{\eta}_i(t) & \text{stopper at } M_2 \end{cases} \quad (4.16)$$



$$y_{sys}(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^2 \phi_{3i}(L_3) \eta_i(t) & \text{stopper at } M_1 \\ \sum_{i=1}^2 \phi_{4i}(L_4) \eta_i(t) & \text{stopper at } M_2 \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\dot{y}_{st}(t) = \phi_{st}(L_{st}) \dot{\eta}_{st}(t) \quad (4.18)$$

$$y_{st}(t) = \phi_{st}(L_{st}) \eta_{st}(t) \quad (4.19)$$

但由於相對位移的變化是相對於中性軸的，對於擋板和主樑末端位移沒有影響，但對副樑末端位移會因為主樑的偏角產生差異，如圖 4.2 展示的情況，需要的位移為 $y_{sys}(t) = \bar{w}_4$ ，目前得到的 $y_{sys}(t) = w_4$ 。因此，需要對副樑末端位移做修正，這裡參考劉紹增學長的變形方法 [49] 對副樑末端位移進行修正：

$$\begin{aligned} y_{sys}(t) &= \bar{w}_4 = d_1 - w_3 + d_2 \\ &= L_4 \sin \alpha_3(L_3, t) - \sum_{i=1}^2 \phi_{3i}(L_3) \eta_i(t) + w_4 \cos \alpha_3(L_3, t) \\ &= L_4 \sin \alpha_3(L_3, t) - \sum_{i=1}^2 \phi_{3i}(L_3) \eta_i(t) \\ &\quad + \cos \alpha_3(L_3, t) \sum_{i=1}^2 \phi_{4i}(L_4) \eta_i(t) \end{aligned} \quad (4.20)$$

根據(3.22)知

$$\alpha_3(L_3, t) \approx \sum_{i=1}^2 \left. \frac{d\phi_{3i}(x_3)}{dx_3} \right|_{x_3=L_3} \eta_i(t) \quad (4.21)$$

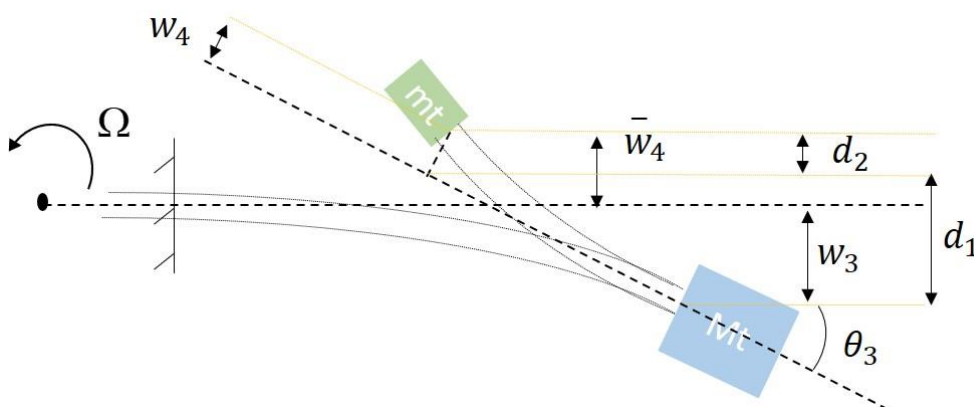



圖 4.2 副樑末端振動偏移示意

代入修正後的位移後獲得不同位置之脈衝力的解析解，考慮不發生碰撞時擋板脈

衝力為 0。

$$F_{imp_1} = \begin{cases} \frac{2\zeta_{st}\omega_{st}}{[\phi_{st}(L_{st})]^2} \left[\sum_{i=1}^2 \phi_{3i}(L_3) \dot{\eta}_i(t) - \phi_{st}(L_{st}) \dot{\eta}_{st}(t) \right] & \text{if } y_{rel} \leq -d_1 \\ + \frac{\omega_{st}^2}{[\phi_{st}(L_{st})]^2} \left[\sum_{i=1}^2 \phi_{3i}(L_3) \eta_i(t) - \phi_{st}(L_{st}) \eta_{st}(t) + d_1 \right] & \\ 0 & \text{if } y_{rel} > -d_1 \end{cases}$$


(4.22)

$$F_{imp_2} = \begin{cases} \frac{2\zeta_{st}\omega_{st}}{[\phi_{st}(L_{st})]^2} \left[\sum_{i=1}^2 \phi_{4i}(L_4) \dot{\eta}_i(t) - \phi_{st}(L_{st}) \dot{\eta}_{st}(t) \right] & \text{if } y_{rel} \geq d_2 \\ + \frac{\omega_{st}^2}{[\phi_{st}(L_{st})]^2} \left[\sum_{i=1}^2 \phi_{4i}(L_4) \eta_i(t) - \phi_{st}(L_{st}) \eta_{st}(t) - d_2 \right] & \\ 0 & \text{if } y_{rel} < d_2 \end{cases}$$

(4.23)

F_{imp_1} 為主樑末端的擋板， F_{imp_2} 為副樑末端的擋板。這裡我們默認擋板位置在樑正下方。

獲得脈衝力解析解後，主樑和副樑發生碰撞時的運動方程修正為：

$$EI_3 \left\{ \frac{\partial^4 w_3(x_3, t)}{\partial x_3^4} + \frac{\partial \left[\frac{\partial w_3(x_3, t)}{\partial x_3} \frac{\partial \left(\frac{\partial w_3(x_3, t)}{\partial x_3} \frac{\partial^2 w_3(x_3, t)}{\partial x_3^2} \right)}{\partial x_3} \right]}{\partial x_3} \right\} + m_3 \left[\frac{\partial^2 w_3(x_3, t)}{\partial t^2} - \Omega^2 w_3(x_3, t) \right] - AF_3 \frac{\partial^2 w_3(x_3, t)}{\partial x_3^2} + F_{imp_1} \delta(x_3 - L_3) = m_3 g \sin \Omega t$$

(4.24)

$$EI_4 \left\{ \frac{\partial^4 w_4(x_4, t)}{\partial x_4^4} + \frac{\partial \left[\frac{\partial w_4(x_4, t)}{\partial x_4} \frac{\partial \left(\frac{\partial w_4(x_4, t)}{\partial x_4} \frac{\partial^2 w_4(x_4, t)}{\partial x_4^2} \right)}{\partial x_4} \right]}{\partial x_4} \right\} + m_4 \left[\frac{\partial^2 w_4(x_4, t)}{\partial t^2} - \Omega^2 w_4(x_4, t) \right] - AF_4 \frac{\partial^2 w_4(x_4, t)}{\partial x_4^2} + F_{imp_2} \delta(x_4 - L_4) = -m_4 g \sin \Omega t$$

(4.25)

類似的，對運動方程正規化處理得：

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{\eta}_i(t) + (\omega_i^2 - Kg_i \cos \Omega t) \eta_i(t) + \left(Rs_i - \frac{1}{2} \Omega^2 Kn_i \right) \eta_i^3(t) + Kn_i \left[\eta_i(t) \dot{\eta}_i^2(t) + \eta_i^2(t) \ddot{\eta}_i(t) \right] + \theta_i v(t) + F_{imp_j} \phi_{j+2,i}(L_{j+2}) = F_i \sin \Omega t \quad (4.26)$$

$$j = \begin{cases} 1 & \text{if stopper at } M_1 \\ 2 & \text{if stopper at } M_2 \end{cases}$$

於是，最終的脈衝非線性的旋轉折返樑壓電耦合方程為：

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{\eta}_i(t) + (\omega_i^2 - Kg_i \cos \Omega t) \eta_i(t) + \left(Rs_i - \frac{1}{2} \Omega^2 Kn_i \right) \eta_i^3(t) + Kn_i \left[\eta_i(t) \dot{\eta}_i^2(t) + \eta_i^2(t) \ddot{\eta}_i(t) \right] + \theta_i v(t) + F_{imp_j} \phi_{j+2,i}(L_{j+2}) = F_i \sin \Omega t \\ \ddot{\eta}_{st}(t) + 2\zeta_{st} \omega_{st} \dot{\eta}_{st}(t) + \omega_{st}^2 \eta_{st}(t) = F_{st} \sin \Omega t \\ Cp \dot{v}(t) + \frac{1}{R_l} v(t) + \sum_{i=1}^2 \theta_i \dot{\eta}_i(t) = 0 \end{cases} \quad i=1,2 \quad (4.27)$$

$$j = \begin{cases} 1 & \text{if stopper at } M_1 \\ 2 & \text{if stopper at } M_2 \end{cases}$$

至此，加入擋板脈衝力的旋轉折返樑力電耦合方程推導結束。



4.2 磁力非線性模型

相比較於擋板脈衝力，磁力的優勢在於它可以在不發生接觸的情況下為系統提供持續的非線性力，進而避免了碰撞的發生。現實中的碰撞往往不能滿足完全碰撞的假設，因此理論上可以減少有效能量損耗，和階段式發生作用的擋板脈衝力相比，磁力的作用是永久性的，並且作用力的大小和磁鐵間間距呈反相關，接下來將首先探求磁力大小與空間位置的關係。

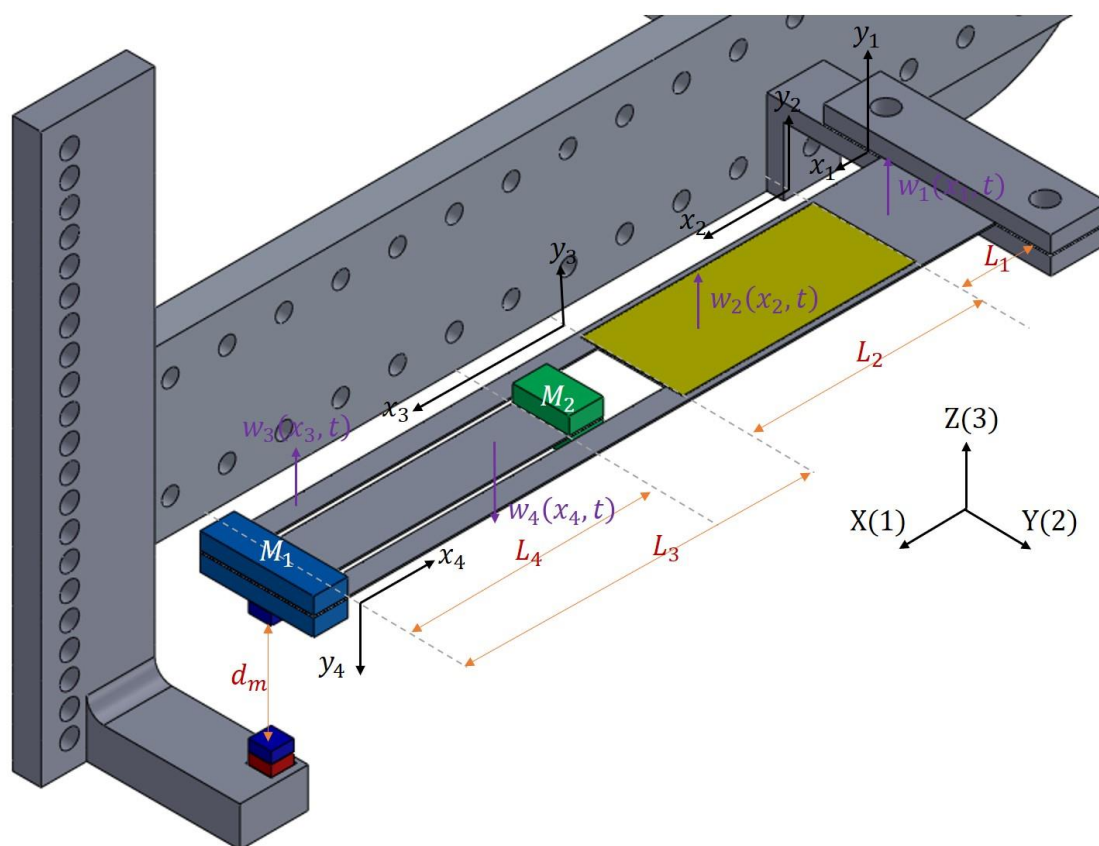


圖 4.3 旋轉折返樑磁力非線性能量收集器

4.2.1 磁力模型

本文參考 Akoun [50]的方形磁鐵模型以方形磁鐵為對象建立模型。由於方形磁鐵的三個方向均有磁場和磁力的作用，因此可以更貼合旋轉環境中大位移振動情況下的受力需求，在後續實驗中也會使用該幾何形狀的磁鐵。

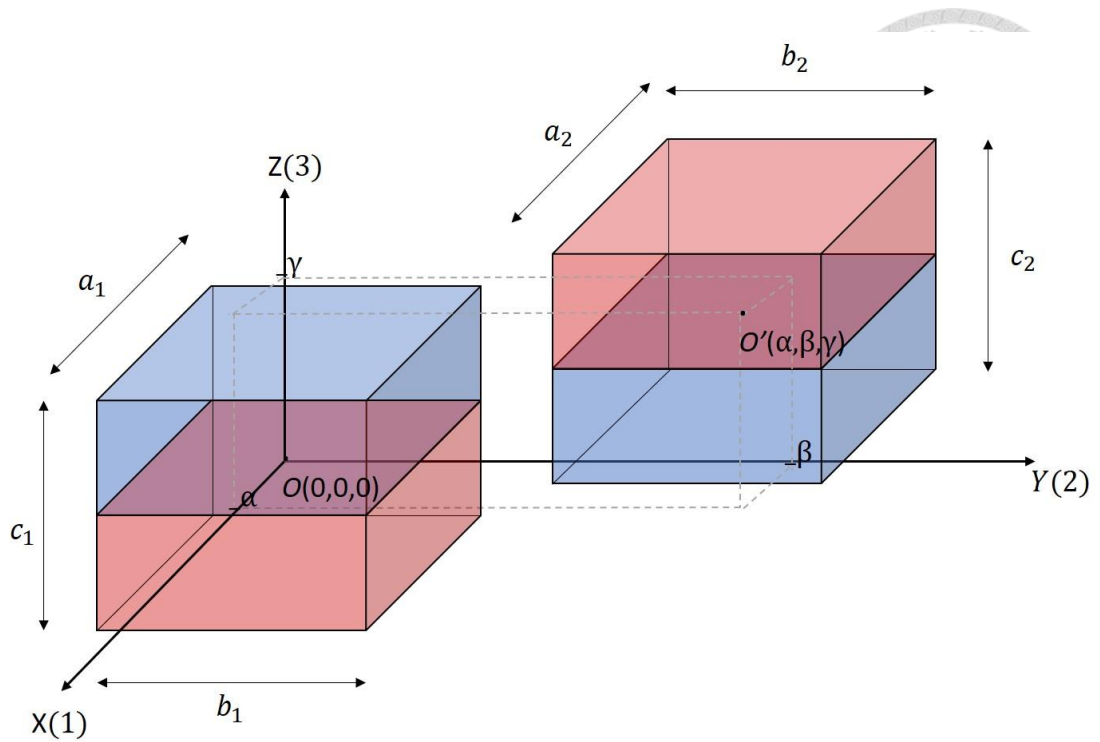


圖 4.4 方形磁鐵坐標示意圖

首先建立坐標系，如圖 4.4，以磁鐵 1 的中心為原點，以方形磁鐵的長寬高方向為 X 軸 Y 軸 Z 軸。假設磁鐵 2 的中心坐標為 (α, β, γ) ，假設兩磁鐵的磁化強度為 B_1 、 B_2 ，兩磁鐵在 X 軸 Y 軸 Z 軸的長寬高分別為 a_1 、 b_1 、 c_1 、 a_2 、 b_2 、 c_2 則表面磁荷密度為：

$$\sigma_i = B_i \hat{n} \quad (4.28)$$

其中， \hat{n} 為 X-Y 平面之法向量。假設兩磁鐵的各自磁極面上任意兩點座標為 (x_1, y_1, z_1) 、 (x_2, y_2, z_2) ，則兩點間距離為

$$d = \sqrt{(\alpha + x_1 - x_2)^2 + (\beta + y_1 - y_2)^2 + \gamma^2} \quad (4.29)$$

則磁極面上任意兩點 (x_1, y_1, z_1) 、 (x_2, y_2, z_2) 的磁荷位能為

$$u = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{4\pi\mu_0 d} \quad (4.30)$$

對兩點磁荷位能做面積分得到兩磁極平面的總位能：



$$\begin{aligned}
 U &= \oint_{A_2} \oint_{A_1} u dA_1 dA_2 \\
 &= \int_{\frac{-a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \int_{\frac{-b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}} \int_{\frac{-a_2}{2}}^{\frac{a_2}{2}} \int_{\frac{-b_2}{2}}^{\frac{b_2}{2}} u dy_2 dx_2 dy_1 dx_1
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

對總位能做三個方向的梯度得到磁鐵三個方向的磁力，於是

$$\begin{aligned}
 F_{mag} &= -\nabla U \\
 &= \frac{B_1 B_2}{4\pi\mu_0} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{m=0}^1 \sum_{n=0}^1 (-1)^{i+j+k+l+m+n} \varphi_{x,y,z}(u_{ij}, v_{kl}, w_{mn}, r)
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

其中，

$$\begin{cases}
 \varphi_x = \frac{1}{2}(v^2 - w^2) \ln(r-u) + uv \ln(r-v) + wv \arctan\left(\frac{uv}{wr}\right) + \frac{1}{2}ru \\
 \varphi_y = \frac{1}{2}(u^2 - w^2) \ln(r-v) + uv \ln(r-u) + wu \arctan\left(\frac{uv}{wr}\right) + \frac{1}{2}rv \\
 \varphi_z = -wu \ln(r-u) - wv \ln(r-v) + uvarctan\left(\frac{uv}{wr}\right) - rw
 \end{cases} \tag{4.33}$$

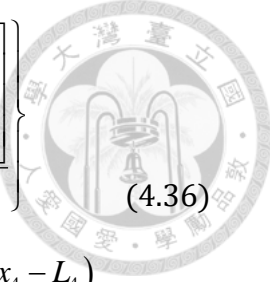
$$\begin{cases}
 u_{ij} = \alpha + (-1)^j \frac{a_1}{2} - (-1)^i \frac{a_2}{2} \\
 v_{kl} = \beta + (-1)^l \frac{b_1}{2} - (-1)^k \frac{b_2}{2} \\
 w_{mn} = \gamma + (-1)^n \frac{c_1}{2} - (-1)^m \frac{c_2}{2}
 \end{cases} \tag{4.34}$$

這樣我們就獲得了任意兩個方形磁鐵三方向磁力大小與空間距離之關係。

4.2.2 系統模型

獲得磁力解析解後，考慮磁鐵一端固定在主樑末端，受到下方磁鐵單方向的作用力 F_{mag} 。主樑的運動方程修正為：

$$\begin{aligned}
 &EI_3 \left\{ \frac{\partial^4 w_3(x_3, t)}{\partial x_3^4} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial w_3(x_3, t)}{\partial x_3} \frac{\partial \left(\frac{\partial w_3(x_3, t)}{\partial x_3} \frac{\partial^2 w_3(x_3, t)}{\partial x_3^2} \right)}{\partial x_3} \right] \right\} \\
 &+ m_3 \left[\frac{\partial^2 w_3(x_3, t)}{\partial t^2} - \Omega^2 w_3(x_3, t) \right] AF_3 - \frac{\partial^2 w_3(x_3, t)}{\partial x_3^2} + F_{mag} \delta(x_3 - L_3) \\
 &= m_3 g \sin \Omega t
 \end{aligned} \tag{4.35}$$



$$\begin{aligned}
& EI_4 \left\{ \frac{\partial^4 w_4(x_4, t)}{\partial x_4^4} + \frac{\partial}{\partial x_4} \left[\frac{\partial w_4(x_4, t)}{\partial x_4} \frac{\partial}{\partial x_4} \left(\frac{\partial w_4(x_4, t)}{\partial x_4} \frac{\partial^2 w_4(x_4, t)}{\partial x_4^2} \right) \right] \right\} \\
& + m_4 \left[\frac{\partial^2 w_4(x_4, t)}{\partial t^2} - \Omega^2 w_4(x_4, t) \right] - AF_4 \frac{\partial^2 w_4(x_4, t)}{\partial x_4^2} + F_{mag} \delta(x_4 - L_4) \\
& = -m_4 g \sin \Omega t
\end{aligned} \tag{4.36}$$

注意，這裡 M_2 處受到的磁力同樣需要先對位移進行修正，修正方法參見(4.20)的推導。類似的，對運動方程正規化處理得：

$$\begin{aligned}
& \ddot{\eta}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{\eta}_i(t) + (\omega_i^2 - Kg_i \cos \Omega t) \eta_i(t) + \left(Rs_i - \frac{1}{2} \Omega^2 Kn_i \right) \eta_i^3(t) \\
& + Kn_i \left[\eta_i(t) \dot{\eta}_i^2(t) + \eta_i^2(t) \ddot{\eta}_i(t) \right] + \theta_i v(t) + F_{mag} \phi_{j+2,i}(L_j) = F_i \sin \Omega t
\end{aligned} \tag{4.37}$$

於是，最終的脈衝非線性的旋轉折返樑壓電耦合方程為：

$$\begin{cases}
\ddot{\eta}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{\eta}_i(t) + (\omega_i^2 - Kg_i \cos \Omega t) \eta_i(t) + \left(Rs_i - \frac{1}{2} \Omega^2 Kn_i \right) \eta_i^3(t) \\
+ Kn_i \left[\eta_i(t) \dot{\eta}_i^2(t) + \eta_i^2(t) \ddot{\eta}_i(t) \right] + \theta_i v(t) + F_{mag} \phi_{j+2,i}(L_{j+2}) = F_i \sin \Omega t & i = 1, 2 \\
Cp\dot{v}(t) + \frac{1}{R_i} v(t) + \sum_{i=1}^2 \theta_i \dot{\eta}_i(t) = 0
\end{cases} \tag{4.38}$$

$$j = \begin{cases} 1 & \text{if mag at } M_1 \\ 2 & \text{if mag at } M_2 \end{cases}$$

至此，加入磁力的旋轉折返樑力電耦合方程推導結束。

除了非接觸的特性，磁力和擋板不同之處還在於磁力是全程與運動方程發生力的作用的，作用力隨末端質量的振動幅度變化而變化，這會改變樑的能量，因此需要對樑的位能進行考慮。下面我們考慮樑的位能的推導。

由於折返樑末端受到單方向磁力的作用，其位能可能會發生平衡位置的改變。接下來進行位能的數值分析。假設折返樑是各向同性的，只考慮 Z 軸方向的形變，折返樑的應變能：

$$U_{beam} = \int_V \frac{1}{2} \sigma \epsilon dV \tag{4.39}$$

其中， σ 是應力， ϵ 是對應的應變。

$$\begin{aligned}
 U_{beam} &= \frac{1}{2} \int_l \left[\int_A \frac{My}{I} \frac{My}{YI} dA \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_l \frac{M^2}{YI} dx \\
 &= \frac{1}{2} YI \int_0^L \kappa^2 dx
 \end{aligned} \tag{4.40}$$



由(3.23)知幾何非線性模型下的曲率半徑有

$$\kappa = \frac{d^2 w(x,t)}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{d^2 w(x,t)}{dx^2} \left(\frac{dw(x,t)}{dx} \right)^2 \tag{4.41}$$

於是得到幾何非線性的位能表達式：

$$\begin{aligned}
 U_{beam} &= \frac{1}{2} YI \int_0^L \left[\frac{d^2 w(x,t)}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{d^2 w(x,t)}{dx^2} \left(\frac{dw(x,t)}{dx} \right)^2 \right]^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} YI \int_0^L \left[\frac{d^2 \sum \phi_i(x) \eta_i(t)}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \sum \phi_i(x) \eta_i(t)}{dx^2} \left(\frac{d \sum \phi_i(x) \eta_i(t)}{dx} \right)^2 \right]^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} YI \left\{ \begin{aligned} &\sum_i \sum_j \eta_i(t) \eta_j(t) \int_0^L \frac{d^2 \phi_i(x)}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} dx \\ &+ \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \eta_i(t) \eta_j(t) \eta_k(t) \eta_l(t) \int_0^L \frac{d^2 \phi_i(x)}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} \frac{d \phi_k(x)}{dx} \frac{d \phi_l(x)}{dx} dx \\ &+ \frac{1}{4} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \eta_i(t) \eta_j(t) \eta_k(t) \eta_l(t) \eta_m(t) \eta_n(t) \cdot \\ &\int_0^L \frac{d^2 \phi_i(x)}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} \frac{d \phi_k(x)}{dx} \frac{d \phi_l(x)}{dx} \frac{d \phi_m(x)}{dx} \frac{d \phi_n(x)}{dx} dx \end{aligned} \right.
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

由於多模態的特性，主梁或副梁的位移並不會在數學意義上決定某一點的位能大小，因此無法直接解析地給出位移位能關係圖。因此在之後的實驗中，我們將以 MATLAB 數值地討論磁力作用下對主樑末端位移和副樑末端位移對位能的影響。

Chapter 5 實驗設計

前兩章為旋轉折返樑的數學模型與兩種非線性模型的建立，為驗證模型的準確性，本文以實驗進行驗證。本章介紹實驗方法、實驗設計、實驗儀器與實驗流程。

5.1 原型設計

原型的各部件如圖 5.1 所示，折返樑的樑基底是使用市售的 SK5 彈簧鋼線切割加工而成，在樑的第二段以 AB 膠將壓電材料與樑基底緊密貼合。主樑末端的質量塊以上下兩塊鋁塊夾持的方式，並用兩顆 M2 螺絲固定，副樑末端的質量塊同樣以上下兩塊鋁塊夾持的方式，並用一顆 M2 螺絲固定。

在擋板脈衝的部分，我們使用 3D 列印的擋板夾持裝置夾持住擋板樑，夾持裝置一側有豎排小孔，藉以固定於大旋轉臂上進行旋轉，多個小孔方便比較 Y 方向不同的擋板間距產生的效果。擋板樑的末端鎖以 M3 螺絲，在螺絲頂部黏以熱熔膠，這是因為在研究中發現，以球狀熱熔膠作為擋板的碰撞頭，其硬化非線性明顯要較其它材質更好，功率更佳。考慮到對主副樑末端兩個不同位置的擋板，本文的擋板以不同的擋板長度進行固定。特別需要指出的是，由於折返樑結構中副樑末端位移同樣較大，出於避免進行主樑末端擋板實驗時副樑末端振動撞擊到擋板產生幹擾的考慮，主樑擋板的螺絲凸起部分較長，之所以採用這種方法而不是將擋板朝內以避開副樑末端碰撞則使因為大旋轉臂臂長的限制。

磁力的部分本文首先進行的是兩磁鐵磁力模型驗證的實驗，將兩磁鐵分別固定在距離調節器和電子秤上，通過記錄不同距離下電子秤數值的變化並減去初始電子秤載重來獲得兩磁鐵之間的力的實驗結果，並用加速度 G 將單位轉化為 N 。旋轉磁力的實驗中，本文將一顆 $5*5*5\text{ mm}$ 的磁鐵以 AB 膠固定在末端的質量塊鋁塊夾持上；另一塊 $4*4*4\text{ mm}$ 的磁鐵則以 AB 膠固定在 3D 列印的磁鐵夾持裝置的凹槽內，夾持裝置保證磁鐵正對折返樑中央，夾持裝置的一側同樣有一排小

孔用以固定在大旋轉臂上和調節兩磁鐵的間距。這種夾持裝置不能線型的調節間距，但好處在於間距固定，量測產生的誤差比較小。

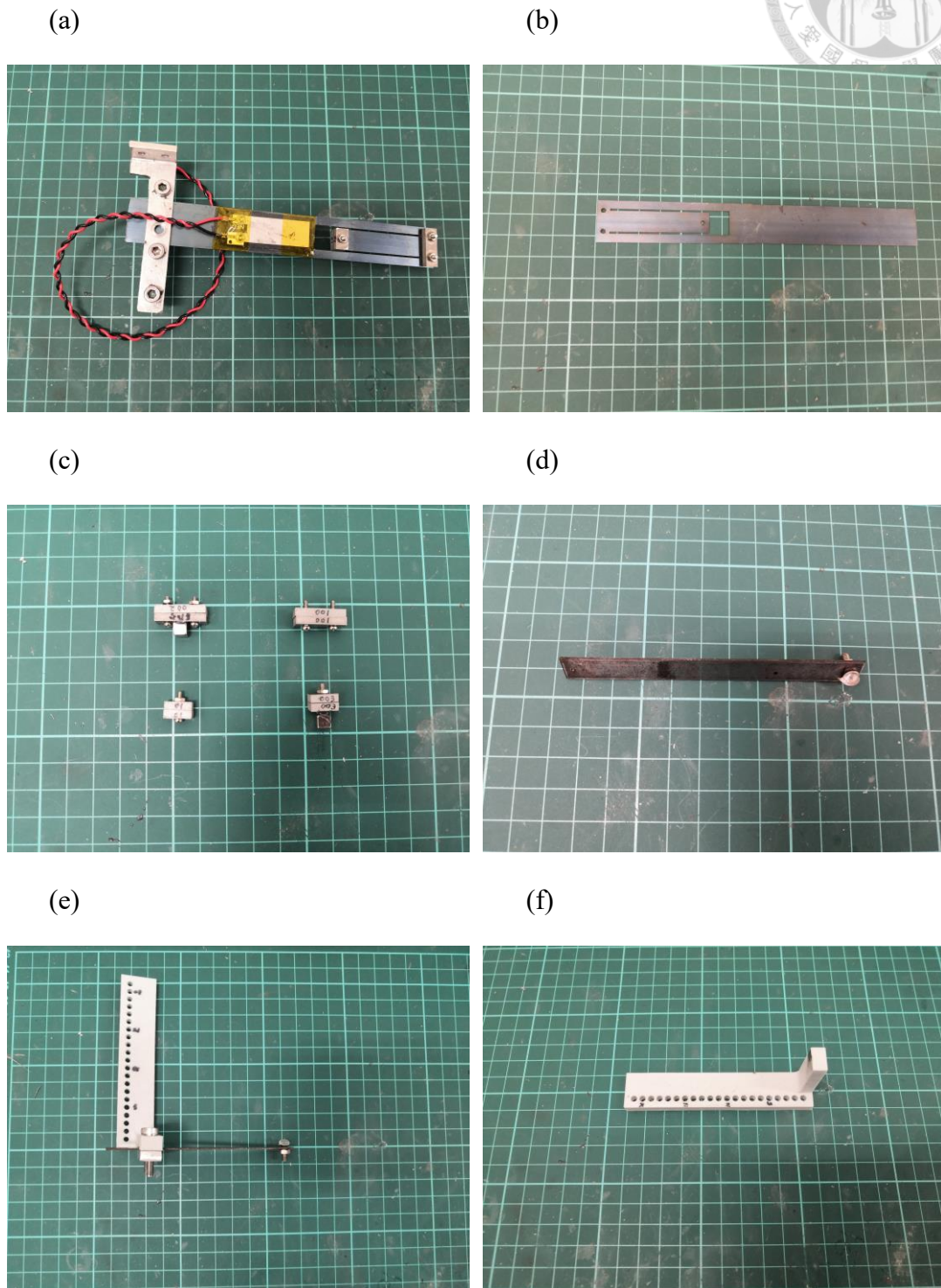


圖 5.1 實驗原型設計

(a)折返樑系統；(b)折返基底樑；(c)主樑、副樑末端質量塊組；(d)擋板；

(e)擋板夾持裝置；(f)磁鐵夾持裝置；

旋轉實驗平台如圖 5.2 所示，通過馬達調速器給定轉速設定，勻速地增加或減少馬達控制器的轉速，控制器將轉速訊號調整電壓輸入馬達，馬達轉動給予壓電能量收集系統以旋轉激勵，產生的電壓通過電線傳送到示波器形成波形和電壓數值。通過記錄不同轉速下示波器的電壓顯示來獲得旋轉環境不同轉速的電壓反饋。

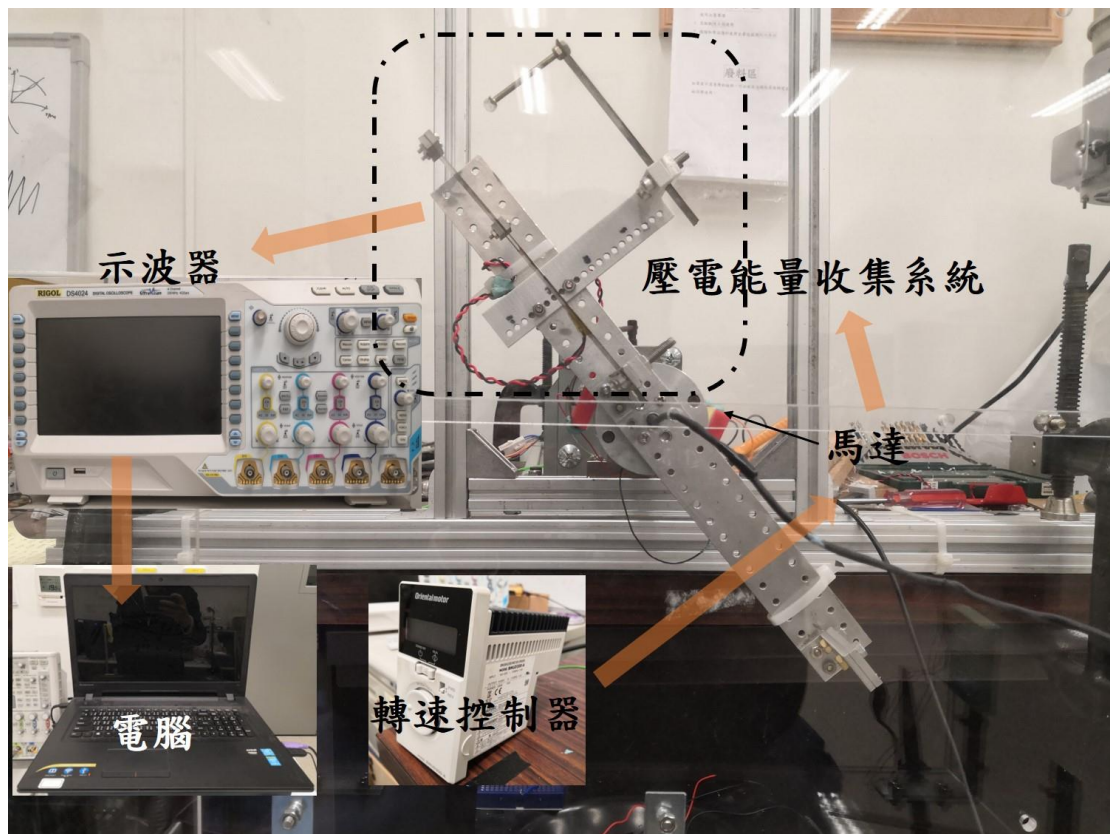


圖 5.2 旋轉測試平台

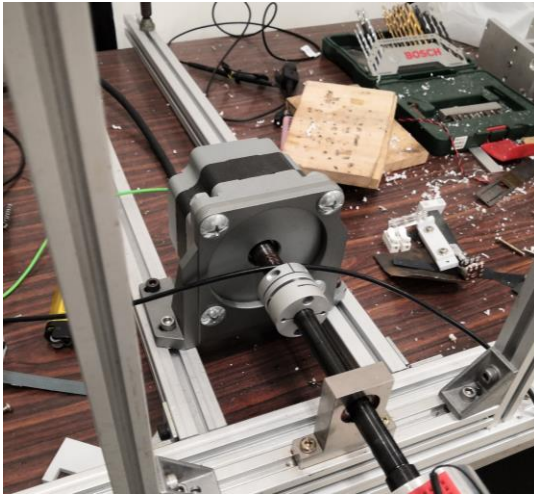
5.2 實驗儀器

本論文所使用之儀器與廠牌型號列於表 5.1，相關照片呈現如圖 5.3。

表 5.1 實驗儀器

儀器名稱	廠牌型號	圖例編號
馬達	Oriental motor BLM5200-A	圖 5.3(a)
馬達調速器	Oriental motor BMUD200-A	圖 5.3(b)
電腦	Lenovo IdeaPad 300	圖 5.3(c)
數位示波器	RIGOL DS1104Z	圖 5.3(d)
數位電表	RIGPL DM3058E	圖 5.3(e)
振動器	LDS V406 M4-CE	圖 5.3(f)
振動訊號控制器	ECON VT-9002	圖 5.3(g)
功率放大器	LDS PA 100E	圖 5.3(h)
加速規	PCB 352C66	圖 5.3(i)
鐳射位移計	Mti LTS-120-40	圖 5.3(j)
間距調節器	TOHATSU AFF0021	圖 5.3(k)
電子秤	I-2000	圖 5.3(l)

(a)



(b)



(c)



(d)



(e)



(f)



(g)

(h)



(i)



(j)



(k)



(l)

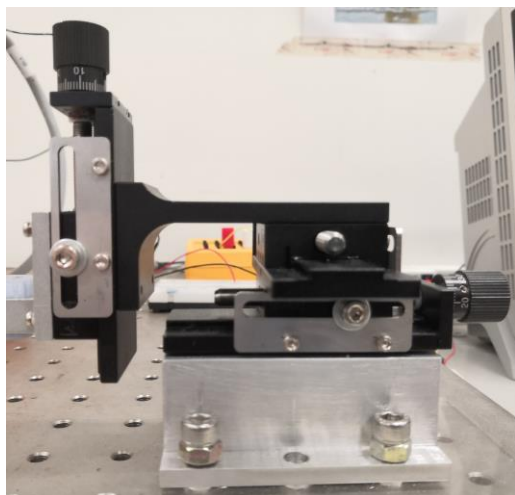


圖 5.3 實驗儀器

(a)馬達；(b)馬達調速器；(c)電腦；(d)數位示波器；(e)數位電表；(f)振動器；

(g)振動訊號控制器；(h)功率放大器；(i)加速規；(j)鐳射位移計；

(k)間距調節器；(l)電子秤；

5.3 實驗流程

本實驗由三部分構成：第一部分為旋轉折返樑系統驗證，該部分又分為對自然頻率的激振驗證和旋轉環境的振動實驗，此外還將比較修改折返樑樑長、主樑末端質量塊質量、副樑末端質量塊質量對結果的影響；第二部分為引入擋板脈衝系統的驗證，該部分分為對單樑擋板自然頻率的激振驗證和旋轉環境的振動實驗，其中旋轉實驗部分將細分為驗證主樑末端擋板和副樑末端擋板；第三部分為引入磁力的系統的驗證，這部分將細分為驗證磁鐵磁力的之數學模型和旋轉環境下的實驗，旋轉實驗分別驗證主樑末端磁力和副樑末端磁力。由於旋轉環境下的設備限制，無法測出旋轉環境的位移數據，因此本文旋轉環境試驗只討論電壓結果。此外，由於旋轉實驗中安裝電阻盒較為不便，因此不再討論最佳內阻的問題，默認內阻為 1 M，在此基礎上簡單討論發電功率的優劣。

5.3.1 基底激振實驗

基底激振實驗配置如圖 5.4 所示，在實驗儀器的連接上，將實驗裝置固定在振動平臺上，通過電腦設定掃頻實驗的相關資訊通過訊號控制器經由功率放大器傳送到振動器，連接在振動器上的加速規反饋加速度與掃頻速率的相關信號。對電壓的量測通過壓電薄膜的電線直接連接到示波器上；對位移的量測則使用鐳射位移計對觀測位置的量測數據反饋於示波器。之後將示波器的數據儲存並分析。

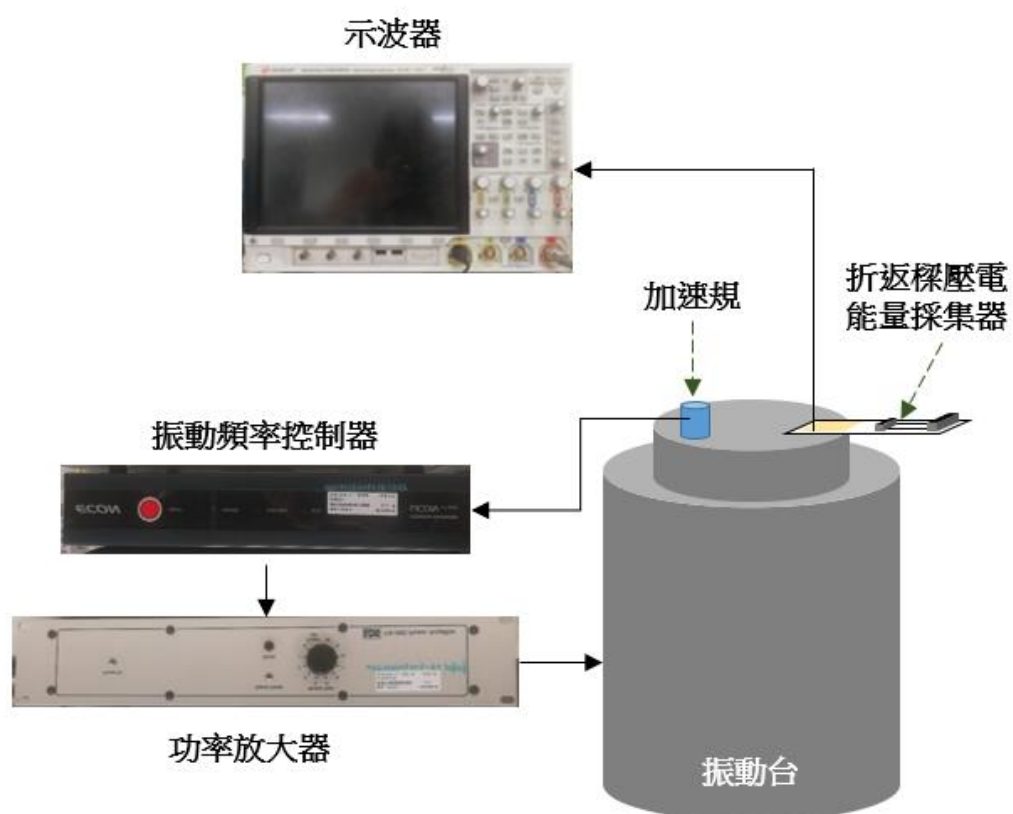
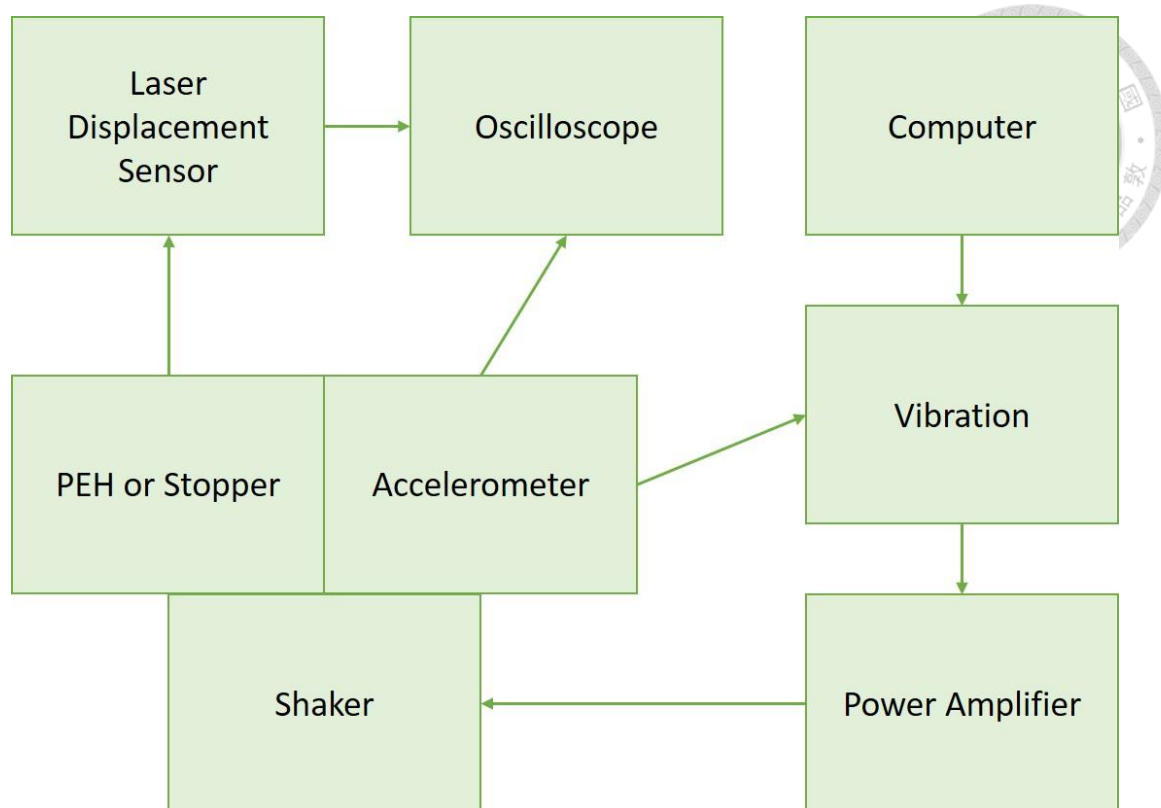
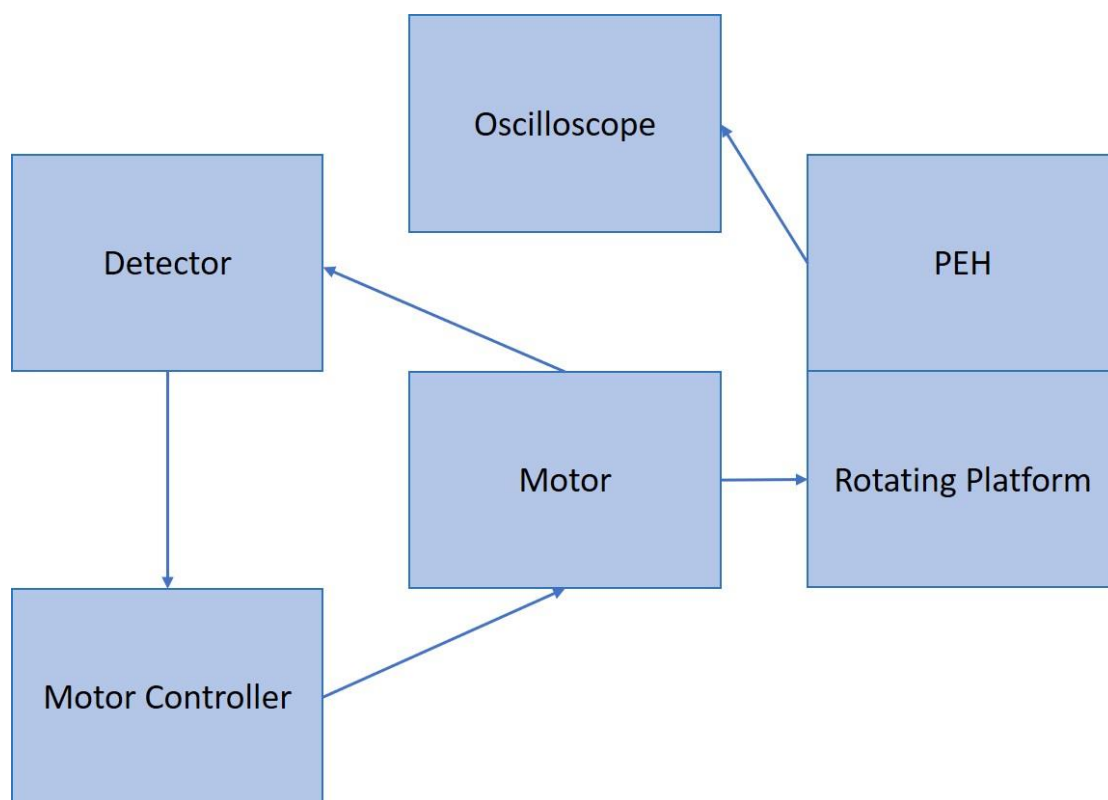


圖 5.4 基底激振實驗配置圖

5.3.2 旋轉環境實驗

旋轉激振實驗配置如圖 5.5 所示，在實驗儀器的連接上，壓電薄膜中接出的電壓連接於內阻為 1 M 的示波器，當進行旋轉實驗時，通過馬達調速器給定轉速設定，調速器將轉速訊號調整電壓輸入馬達，馬達檢測轉子位置回傳訊號給控制器進行閉迴路控制。通過記錄不同轉速下示波器的電壓顯示來獲得旋轉環境不同轉速的電壓反饋，同時每組實驗都進行正反掃實驗比對以研究其非線性硬化與軟化的效果。需要說明的是馬達調速器之單位為 rpm,為了比較頻率與共振頻之關係，數據處理時以 $60\text{rpm}=1\text{Hz}$ 的關係進行單位轉換。



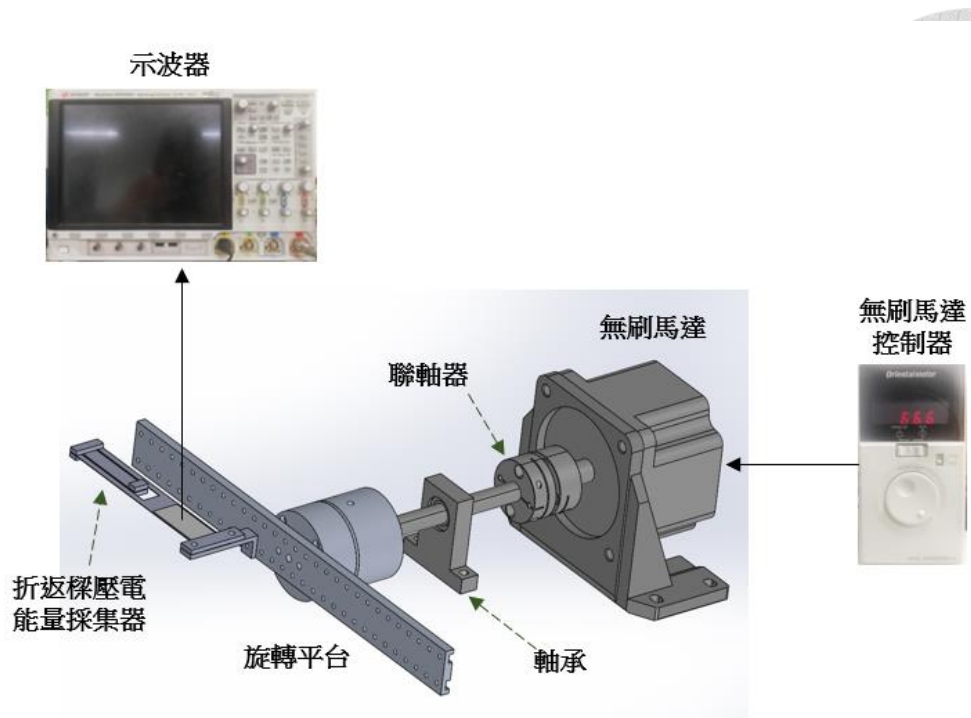


圖 5.5 旋轉環境實驗配置圖

Chapter 6 驗證與討論



根據第 3、4 章的理論推導和第 5 章的實驗設計流程，本章以軟體 MATLAB 進行數學模型的數值模擬，將模擬結果與實驗結果進行比對。

6.1 壓電材料簡化假設

本研究使用的壓電材料為 TE Connectivity 製造的 TE 系列壓電薄膜復合材料 DT1-028K/L w/rivets 1-1002908-0，有著彈性好、耐久、不易損害等優點，非常適合旋轉環境中使用。但由於該材料外表附有一層透明保護薄殼，非單一均質材料，所以對其進行結構簡化藉以適應於前面對壓電材料模型的推導。

該壓電薄膜的結構如圖 6.1，主要包括三層：最內層為壓電薄片，中間為金屬抗氧化層，最外層為透明保護殼。根據壓電薄膜的平面分佈，可以將其分為三段，其中只有第二段為有效發電區域，如圖 6.2 所示，對此假設 l_1 部分被對稱的 l_3 部分取代， $l_e = l_3 + l_2 + l_3$ 為簡化之發電有效區。

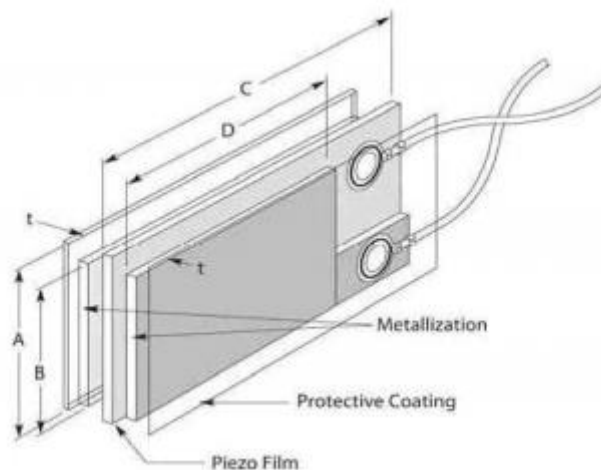


圖 6.1 壓電薄膜結構組成示意圖[51]

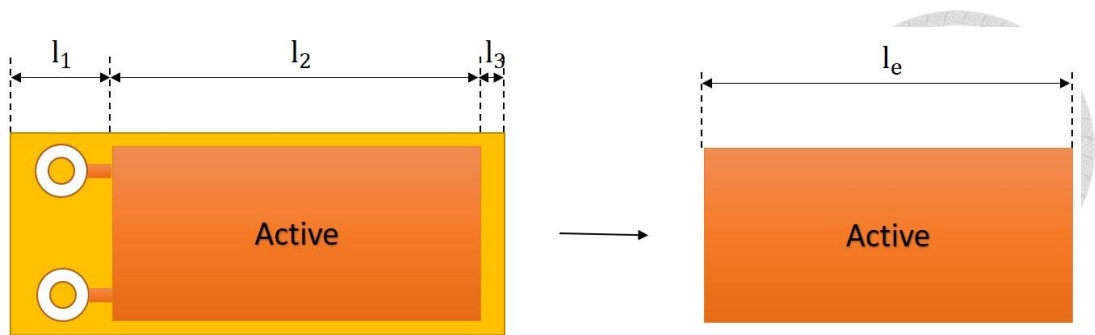


圖 6.2 壓電薄膜簡化示意圖

由於官方只給定了壓電片內部材料的楊氏係數的大致範圍在 2-4 GPa 之間，而包有外部透明保護殼且底部黏有 AB 膠的壓電片整體顯然會大於這個數字，因此，計算時引入整體壓電片的楊氏係數用以結構和運動方程的計算，而壓電片內部的楊氏係數用以電學方程的計算。表 6.1 為官方提供的參數表，為了簡化模擬，本文數值計算中採用以上述方法採用簡化後的表 6.2 的相關參數資料。

表 6.1 DT1-028K/L 官方參數

符號	對象	參數值
L_{tot}	總長度	41 mm
L_{active}	發電區長度	30 mm
b_{tot}	總寬度	16 mm
b_{active}	發電區寬度	12 mm
h_{tot}	總厚度	0.4 mm
h_{active}	發電區厚度	0.28 mm
C_p	電容	1.38 nF
d_{31}	壓電常數	$-23e-12 \text{ C/N}$
Y_p	楊氏係數	2-4 GPa

表 6.2 DT1-028K/L 簡化後參數

符號	對象	參數值
L_e	等效長度	34 mm
b_e	等效寬度	12 mm
h_e	等效厚度	0.4 mm
ρ_e	等效密度	1780 $\frac{kg}{m^3}$
Y_{pe}	壓電片內部楊氏係數	4 GPa
Y_p	壓電片整體楊氏係數	45 GPa
d_{31}	壓電常數	$-23e-12 \frac{C}{N}$
C_p	電容	1.38 nF

6.2 旋轉折返樑模型驗證

在完成壓電薄膜的簡化後，開始對旋轉折返樑系統進行驗證。本文實驗裡使用了兩組基底樑分別進行擋板和磁力的驗證，本文將他們記為基樑 A 與基樑 B。這兩組樑基底結構參數基本相同，但現實中由於材料誤差存在一些差異。在本節，首先給出基樑 A 與基樑 B 的基本的旋轉折返樑的實驗驗證，本文將修改基樑 A 的樑長和末端質量塊的質量藉以比較樑長和末端質量塊的質量對結果的影響。為了更好的比較發電功率與頻寬的變化，本文後續的實驗除了使用基樑 A 和基樑 B 分別作為磁力系統和擋板系統的基本樑外，還盡可能的保持最少的變量以進行比對。

6.2.1 旋轉折返基樑驗證

下面確定折返樑幾何結構參數，如圖 6.3 所示，折返樑由主副樑結構及主副樑末端質量塊構成。

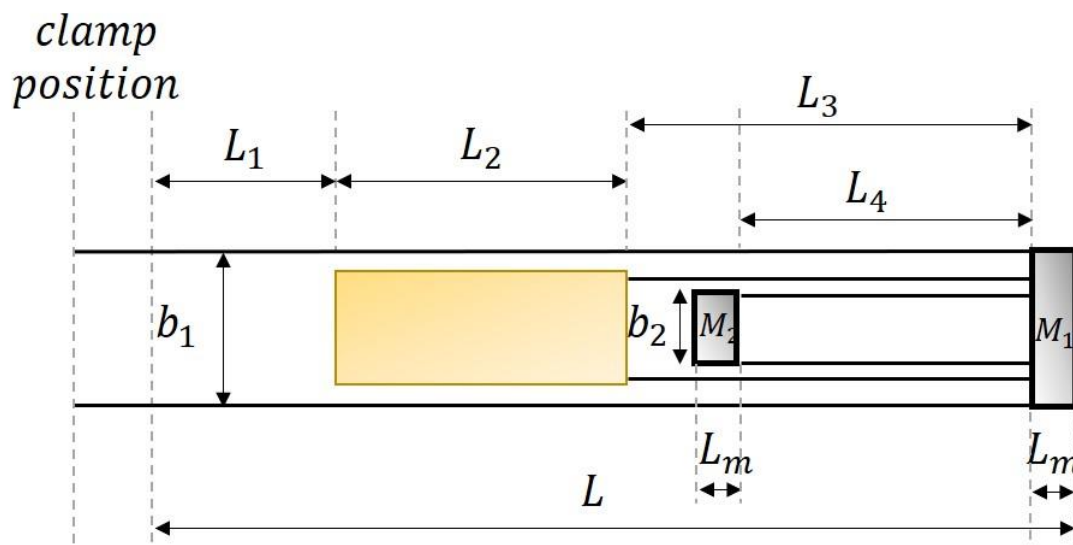


圖 6.3 折返樑幾何結構

表 6.3 給出了本章接下來實驗的基礎折返樑系統基底 A 的基本參數，本文將在該基礎折返樑系統上進行後續實驗，基樑 B 的實驗主要用於擋板脈衝系統實驗中，因此基樑 B 的相關參數和實驗驗證會在擋板脈衝力驗證一節進行說明。

由於本文涉及折返樑結構時希望樑體寬度較小以避免旋轉平面外的振動，因此主樑第三段的寬度被最大程度壓縮，如果將副樑做成可調節的將使結構強度不佳，因此副樑長度是一體成型的，這也可以避免安裝造成的誤差，在本節接下來的參數實驗中將做以改變的參數包括 $L_1(L)$ 、 M_1 、 M_2 。

下表為數值模擬中使用的非結構參數以及考慮材料誤差而對參數的修正。

表 6.3 旋轉折返樑基基底樑 A 參數

符號	對象	參數值
R_t	旋轉半徑	30 mm
L	主樑長度	130 mm
L_1	主樑第一段長度	33 mm
L_2	主樑第二段長度	34 mm
L_3	主樑第三段長度	57 mm
L_4	副樑長度	41 mm
L_m	質量塊長度	6 mm
b_1	主樑寬度	20 mm
b_2	副樑寬度	12 mm
h_s	樑厚度	0.3 mm
ρ_e	樑密度	7930 $\frac{kg}{m^3}$
Y_s	樑楊氏係數	193 GPa
Y_p	壓電片整體楊氏係數	44 GPa
M_1	主樑末端質量塊	2.42 g
M_2	副樑末端質量塊	1.25 g

表 6.4 旋轉折返樑基基底樑 A 數值模擬參數修正

符號	對象	參數值
h_s	樑厚度	0.303 mm
I_1	主樑末端質量塊轉動慣量	$5.03e-8 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
I_2	副樑末端質量塊轉動慣量	$4.32e-8 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
ζ_1	第一模態阻尼	0.028
ζ_2	第二模態阻尼	0.034

接下來給出旋轉折返樑基樑的電壓實驗結果。由圖 6.4 可以看出，初始共振頻（自然頻率=0 時）掃頻的結果和模擬的結果相比，第一共振頻有 0.51 Hz 的誤差，第二共振頻有 1.41 Hz 的誤差，第一模態在模態轉向之前一點點到達旋轉共振頻，第二模態則在模態轉向後一點點到達旋轉共振頻；由圖 6.5 可以看出，兩個旋轉共振頻的實驗結果和模擬結果誤差都在 0.5 Hz 以內，旋轉共振頻的第一、二共振頻和峰值基本可以對准，這主要是因為本文對參數進行了微小修正（表 6.4），保證後續實驗的準確。

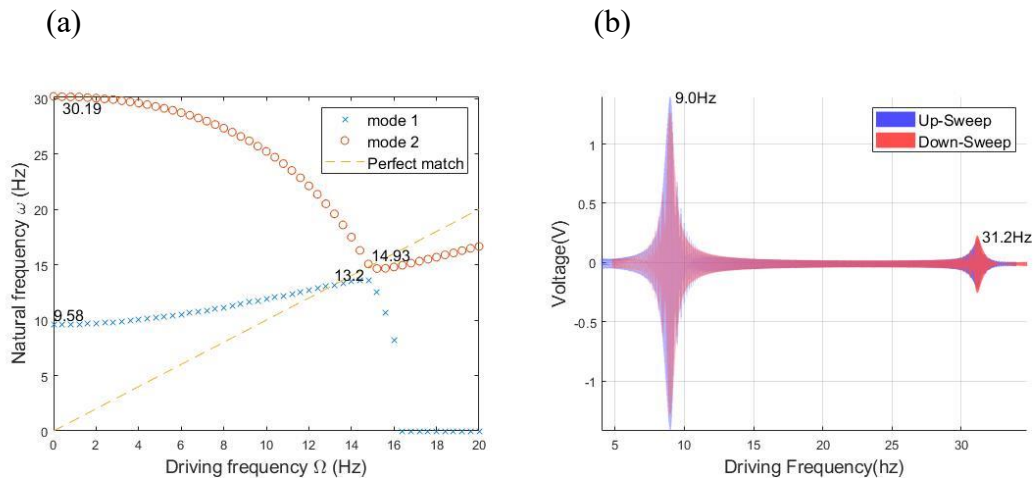


圖 6.4 旋轉折返樑基樑 A 共振頻模擬圖與實驗圖

(a)自然頻率與轉速關係模擬圖；(b)激振掃頻實驗圖；

從電壓的實驗結果圖 6.5 來看，折返樑基樑 A 體現出非常明顯的雙峰態，在雙峰之間有非常明顯的反共振點；對比模擬結果來看，最明顯的差異在於第二

共振頻的波形，實驗中的第二共振頻峰值呈微微硬化的效果，而模擬的結果則呈微微軟化的波形，從理論上講，朝內樑在旋轉過程中受樑自身及末端質量塊的離心力的作用應該呈現一定的軟化特性，這可能是本文的數值模擬高估了這種作用，此外，由於研究的基樑 A 兩個旋轉共振頻非常接近，從參數上看，在反共振點位置附近已經出現較為明顯的耦合現象，這可能導致原本離反共振點較近的旋轉第二共振頻被迫推向後高頻，進而呈現微微硬化的姿態，換而言之，模擬高估了模態轉向的變化速度，低估了其作用範圍。在較為低頻的部分預測情況和實驗結果有一定的小誤差，這可能是本文在建立線型模型時把阻尼當成線型變化導致的，實際情況下的阻尼在不同的旋轉速度下的變化可能比較大。

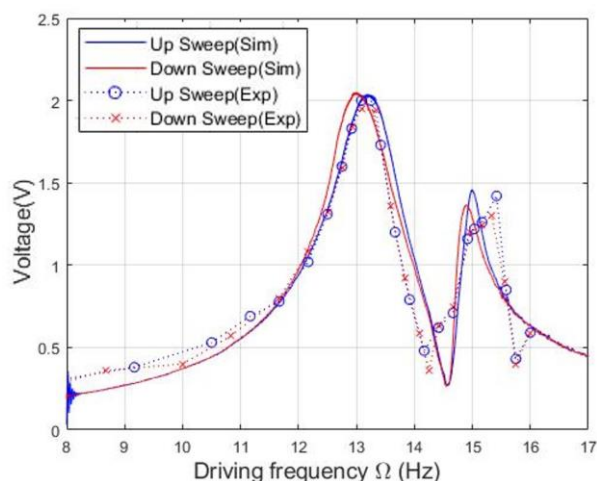


圖 6.5 旋轉折返樑基樑 A 模擬實驗比較圖

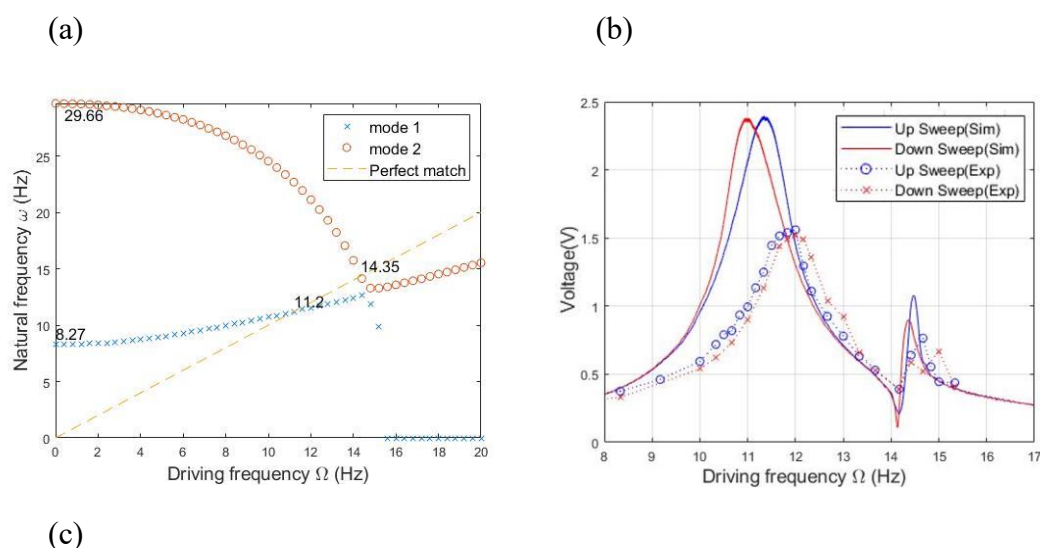
6.2.2 結構參數調節的影響與驗證

本節主要驗證參數 $L_1(L)$ 、 M_1 、 M_2 變化對電壓反饋的影響。在前一節的基樑基礎上改變其樑長參數，具體來講是修改主樑第一段的長度 L_1 ，這是因為我們的實驗設計中能夠改變樑長的只有修改夾持位置，而主樑鏤空部分和副樑樑長是無法修改的，詳細參數修正見表 6.5。接下來我們先驗證 L 從 $130mm$ 修改為 $140mm$ 情況下旋轉折返樑的電壓響應情況。

表 6.5 旋轉折返樑對比不同樑長的參數修正

符號	對象	參數值
L	主樑長度	140 mm
L_1	主樑第一段長度	43 mm
ζ_1	第一模態阻尼	0.028(不修正)/0.04
ζ_2	第二模態阻尼	0.034(不修正)/0.045

從圖 6.6(b)看出，在基樑 A 基礎上只修改樑長參數後，旋轉的第一第二共振頻任可以較好地符合實驗的結果。但是峰值大小卻出現明顯不同，由於實驗僅僅改變了夾持裝置的位置，因此考慮修改電學參數顯然是不合理的，本文認為改變樑長參數後，旋轉振動過程中的擬合阻尼也發生了較大的變化，這導致了電壓的不同。在略微修正阻尼參數後，電壓共振峰值的結果也體現地比較理想，第一共振頻、第二共振頻、反共振點的頻率都與實驗結果契合。考慮到使用的參數都是依據 $L=130mm$ 情況下的實驗結果而得到的，這樣的匹配程度已經很好。此外，實驗中第二共振頻峰值反掃比正掃稍稍延遲出現的非線性現象預測也得充分到體現。



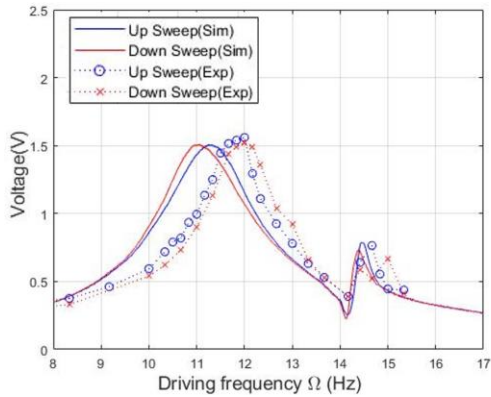


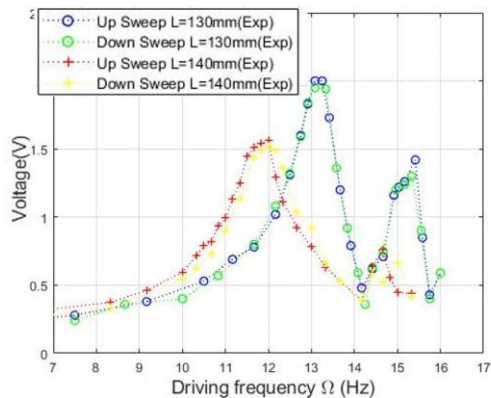
圖 6.6 旋轉折返樑改變主樑樑長 L

(a)自然頻率與轉速關係模擬圖；(b)模擬實驗比較圖（不修正阻尼）；

(c)模擬實驗比較圖（修正阻尼）；

從圖 6.7 可以看出，在修改樑長後旋轉第一二共振頻都發生了明顯變化，隨著樑長增加，第一共振頻和第二共振頻降低大約 1 Hz，第一共振頻電壓和第二共振頻電壓降低約 0.5 V，整體發電功率下降明顯。

(a)



(b)

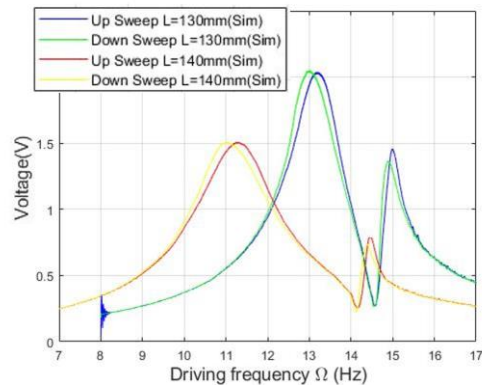


圖 6.7 旋轉折返樑改變主樑長度 L 模擬實驗比較圖

(a)實驗；(b)模擬；

由於修改樑長參數明顯改變了發電功率，本文對發電效果進行比較。由於發電功率只能反映出某一轉速下發電的大小而不能比較出頻寬的優劣，而比較發電效率對頻寬的效果更為看重，因此本文比較指定區間的發電面積，對於發電面積的比較，考慮到本文所有實驗的峰值結果都在 7-17 Hz 的區間裡，定義發電面積

為：

$$\text{Power Area} = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\omega_A}^{\omega_B} \frac{V^2(\omega, t)}{R} d\omega dt$$

其中 ω_A 與 ω_B 根據實際的峰值位置界定，保證包括比較對象的發電峰值，由於模擬的預測主要體現在波形等趨勢上而在數值上不算非常精準，因此本文主要對實驗結果進行發電面積的比較。並以其中最基礎的對象的發電面積為 100% 比較不同對象的發電效果。根據計算結果，當樑長 L 從 130 mm 修改為 140 mm 時（即 L_1 從 33 mm 修改為 43 mm 時），發電效果下降大約 30%。

表 6.6 不同樑長 L 對發電面積比較

比較區間 10 Hz–15.3 Hz	$L = 130 \text{ mm}$		$L = 140 \text{ mm}$	
掃頻方式	正掃	反掃	正掃	反掃
發電面積 ($mW \cdot Hz$)	$6.2775e-3$	$6.2661e-3$	$4.4316e-3$	$4.4336e-3$
發電效果 (百分比)	100%	99.82%	70.59%	70.63%

在 6.2.1 的基樑 A 基礎上，本節改變其主樑末端質量塊的質量，詳細參數修正見表 6.7。接下來我們驗證 M_1 從 2.42 g 修改為 3.42 g 情況下旋轉折返樑的電壓響應情況。

表 6.7 旋轉折返樑對比不同主樑末端質量塊 M_1 的參數修正

符號	對象	參數值
M_1	主樑末端質量塊	3.42 g
I_1	主樑末端質量塊轉動慣量	$7.03e-8 \text{ kg} \cdot m^2$
ζ_1	第一模態阻尼	0.028(不修正)
ζ_2	第二模態阻尼	0.034(不修正)

從圖 6.8 圖 6.9 初始共振頻（自然頻率=0 時）掃頻的結果和模擬的結果相比，第一共振頻有 0.52 Hz 的誤差，第二共振頻有 0.91 Hz 的誤差，第一旋轉共振頻和峰值、反共振點的頻率和數值的實驗結果和模擬結果誤差都在非常小的範



圍內，第二共振頻的峰值大小接近但共振頻相差 0.6 Hz 左右，第二共振頻峰值不僅反映出反掃延遲，反掃峰值降低的現象也有體現。總體看來對於一二共振頻和共振峰值的模擬是比較準確的。由於這裡只修改了主樑末端質量相關參數，並沒有變更阻尼和電學等其他參數，這側面印證了基樑 A 相關模擬的準確性。從結果來看，改變末端質量塊對阻尼影響較小。

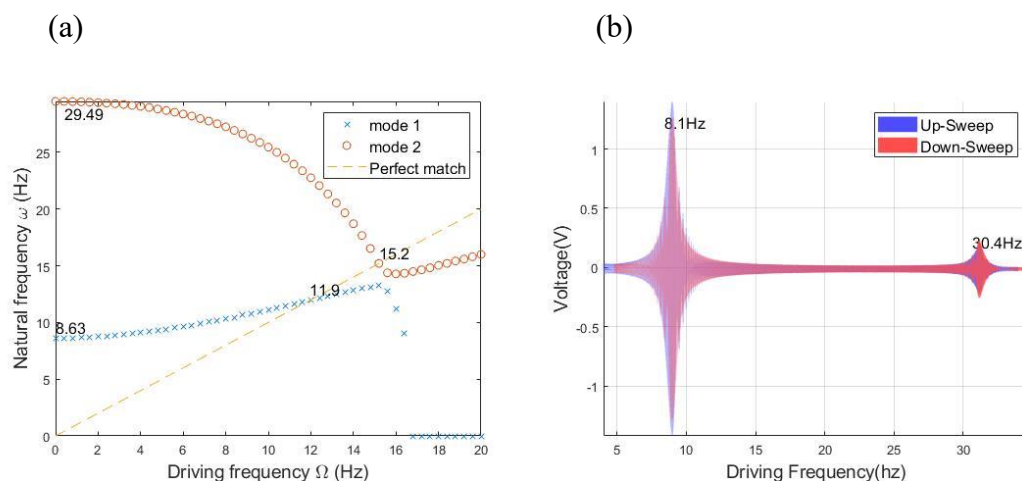


圖 6.8 旋轉折返樑改變 $M_1 = 3.5 \text{ g}$ 共振頻模擬圖與實驗圖

(a)自然頻率與轉速關係模擬圖；(b)激振掃頻實驗圖；

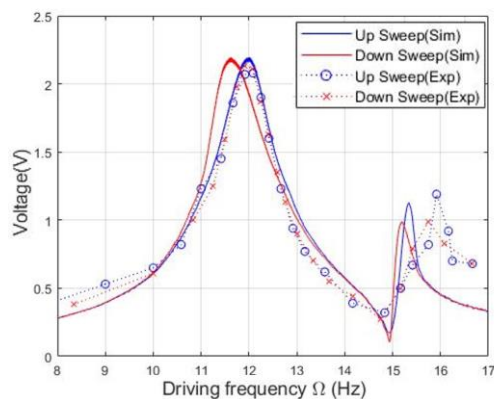


圖 6.9 旋轉折返樑改變主樑末端質量塊 M_1 模擬實驗比較圖

從實驗結果圖 6.10 可以看出，當增加主樑末端質量塊 M_1 的質量後，旋轉第一二共振頻都發生了明顯變化，隨著樑長增加，第一共振頻降低而第二共振頻上升，第一共振頻電壓略微上升而第二共振頻電壓略微降低，從實驗結果看，整體發電效果基本沒有太大變化。

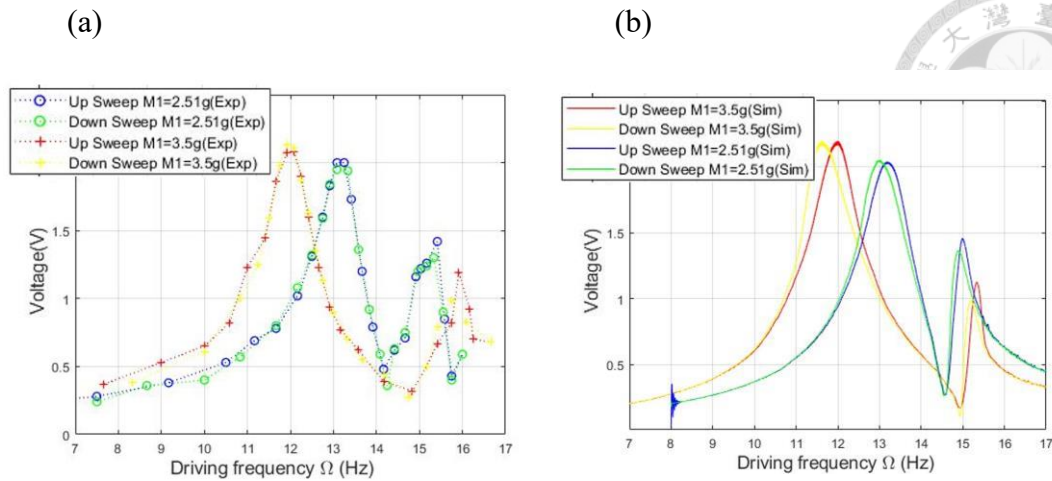


圖 6.10 旋轉折返樑改變主樑末端質量塊模擬實驗比較圖

(a)實驗；(b)模擬；

表 6.8 不同主樑末端質量 M_1 對發電面積比較

比較區間 10 Hz–16 Hz	$M_1=2.42\text{ g}$		$M_1=3.42\text{ g}$	
掃頻方式	正掃	反掃	正掃	反掃
發電面積 ($mW \cdot Hz$)	$6.8643e-3$	$6.7293e-3$	$7.0310e-3$	$7.1031e-3$
發電效果 (百分比)	100%	98.03%	102.43%	103.48%

在 6.2.1 的基樑 A 基礎上，本節改變其副樑末端質量塊的質量，詳細參數修正見表 6.9。接下來我們驗證 M_2 從 1.25 g 修改為 2.25 g 情況下旋轉折返樑的電壓響應情況。

表 6.9 旋轉折返樑對比不同副樑末端質量塊 M_2 的參數修正

符號	對象	參數值
M_2	副樑末端質量塊	2.25 g
I_2	副樑末端質量塊轉動慣量	$7.92e-8\text{ kg} \cdot m^2$
ζ_1	第一模態阻尼	0.028(不修正)/0.03
ζ_2	第二模態阻尼	0.034(不修正)/0.035

當在基樑 A 的數值模擬基礎上直接改變副樑末端質量塊質量時，如圖 6.11(b) 所示，雖然共振頻大致相近，但數值模擬的電壓反饋明顯失真，這是因為在增加

副樑末端質量塊質量後，系統的模態發生了變化，下降模態先於上升模態到達工作頻率，因此在計算時需要對參數進行交換來實現模態交換的實際情況。圖 6.11(c)展示了進行模態交換處理後的電壓反饋，模擬結果很好地體現了反掃會比正掃延遲出現峰值，並且峰值下降，頻響變窄的硬化非線性現象，兩個模態的阻尼依然不需要大的修正，這證明本文進行模態交換的處理時符號實際情況的。根據很多次實驗的結果，這種窄且高的明顯的硬化非線性現象也是典型的下降模態的峰值反映。

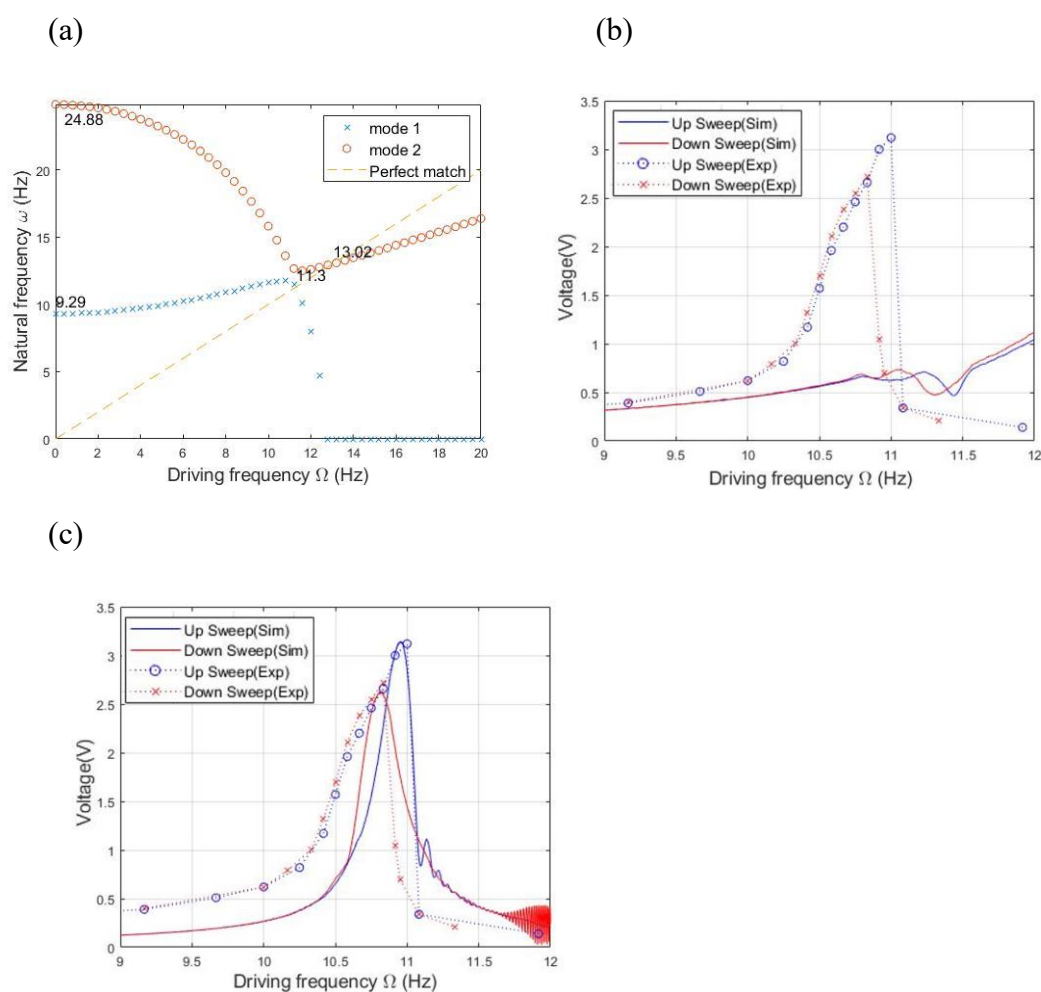


圖 6.11 旋轉折返樑改變副樑末端質量塊 M_2

(a)自然頻率與轉速關係模擬圖；(b)模擬實驗比較圖（不修正阻尼）；

(c)模擬實驗比較圖（模態交換）；

在改變基樑 A 的副樑末端質量塊 M_2 後，如圖 6.12，電壓峰值上升，但頻響

寬度下降嚴重，下降模態的共振頻下降 4-5 Hz，上升模態的峰值因為太小而難以辨別，導致其共振頻非常不明顯。在比較發電效果時無法在同一範圍進行比較，這裡分別取了不同的頻率範圍進行發電效率的比較（表 6.10），正掃發電效率下降超過 1/3，反掃的發電效率下降超過一半，在模態交換的情況下，正反掃的發電效率差別模型，正掃約為反掃的 1.4 倍。

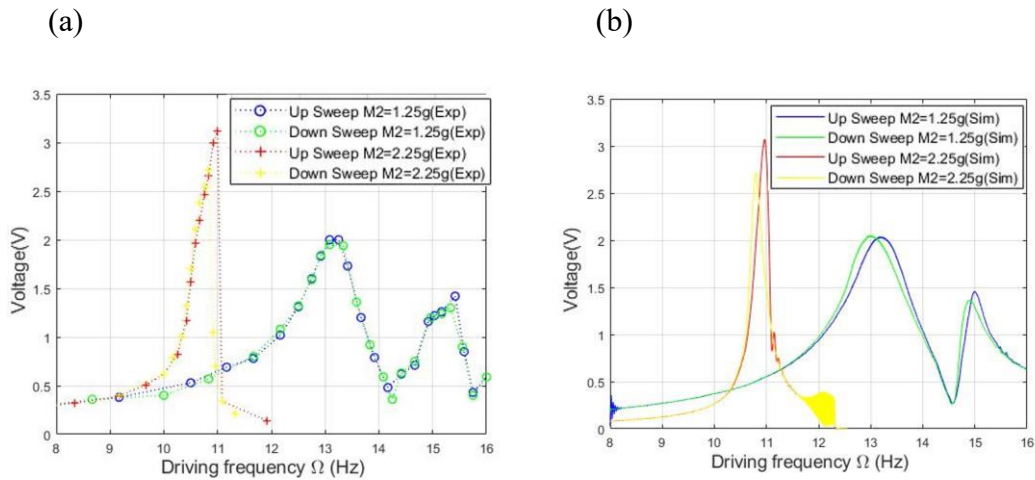


圖 6.12 旋轉折返樑改變副樑末端質量塊模擬實驗比較圖

(a)實驗；(b)模擬；

表 6.10 不同副樑末端質量 M_2 對發電面積比較

比較區間 9.2 Hz - 11.3 Hz 11.7 Hz - 15.7 Hz	$M_2=1.25$ g		$M_2=2.25$ g	
	正掃	反掃	正掃	反掃
掃頻方式	正掃	反掃	正掃	反掃
發電面積 ($mW \cdot Hz$)	$6.1501e-3$	$6.0902e-3$	$4.1621e-3$	$3.0107e-3$
發電效果 (百分比)	100%	99.03%	67.68%	48.95%

綜合以上三種不同的結構參數修改結果，本文認為對於折返梁系統，改變樑長參數在上升下降模態共振與模態轉向的先後關係不變的情況下會改變阻尼的大小，因此會同步改變發電效率，且與樑長呈反相關；改變主樑末端質量塊參數對阻尼影響很小，因此可以實現在極小的發電效率變化下實現對頻響位置的改變；改變副樑末端質量塊質量有可能觸發上升下降模態共振與模態轉向的先後關係

發生交換，一般上升模態共振先於模態轉向發生的情況下的發電效率會遠遠優於上升模態共振後於模態轉向發生的情況；當然，三種參數均可實現對頻響位置（共振頻率）的改變。





6.3 擋板非線性模型驗證

通過前一節的介紹看出，在旋轉環境下，折返樑的初始共振頻得到拉近，但共振頻頻響並不寬，本節考慮使用擋板脈衝力改變旋轉折返樑系統的系統剛性，進而達到拓寬頻寬的效果。考慮當第一共振頻頻寬拓展到第二共振頻峰值時（峰值重疊）產生的效果。

6.3.1 擋板驗證

首先對擋板樑本身進行驗證，表 6.11 給出了實驗中使用的擋板的相關參數，本文實驗在主樑末端擋板和副樑末端擋板中使用了兩組擋板，由於旋轉實驗中無法得到擋板的位移和共振頻數據，這裡僅通過激振掃頻實驗簡單地比較非旋轉環境下擋板的初始共振頻情況。

表 6.11 擋板 A（主樑擋板）與擋板 B（副樑擋板）參數

符號	對象	參數值
R_{st_A} / R_{st_B}	旋轉半徑	90/60 mm
L_{st_A} / L_{st_B}	擋板樑長度	70/55 mm
$L_{m_{st_A}} / L_{m_{st_B}}$	碰撞質量塊長度	7 mm
b_{st_A} / b_{st_B}	擋板樑寬度	20 mm
h_{st_A} / h_{st_B}	擋板樑厚度	1 mm
ρ_{st}	擋板樑密度	7930 $\frac{kg}{m^3}$
Y_{st}	擋板樑楊氏係數	193 GPa
M_{st_A} / M_{st_B}	擋板末端質量塊質量	2.92/1.05 g

如圖 6.13 觀察兩個擋板掃頻實驗的共振頻分別為 77.4 Hz、156.9 Hz，這和模擬的結果完全一致，因為旋轉懸臂樑是旋轉中最簡單基本的結果，因此進行參

數修正後誤差很小。數值模擬的結果顯示，當轉速頻率達到 182 Hz 與 214 Hz 時，兩組擋板懸臂樑到達旋轉共振頻。

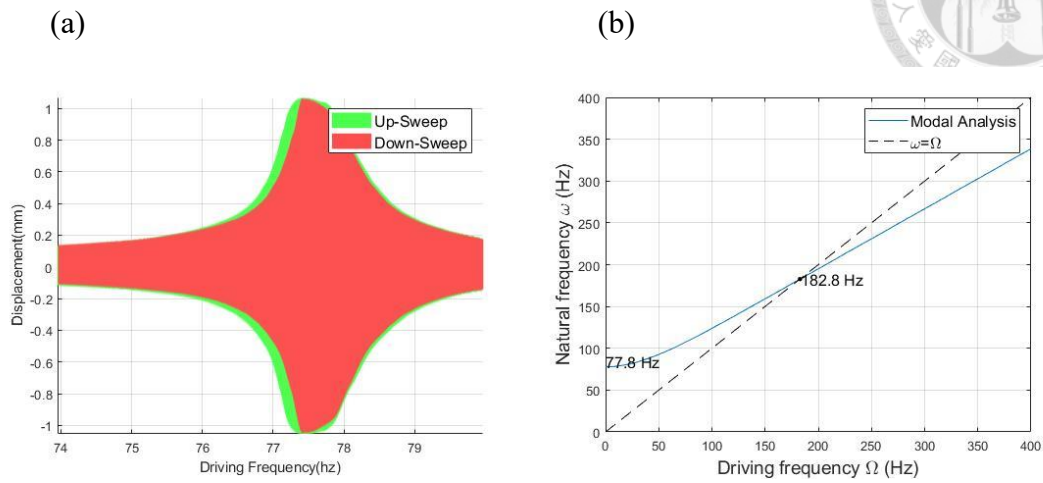


圖 6.13 擋板 A (主樑擋板) 掃頻共振頻實驗模擬對比

(a)掃頻實驗；(b)數值模擬；

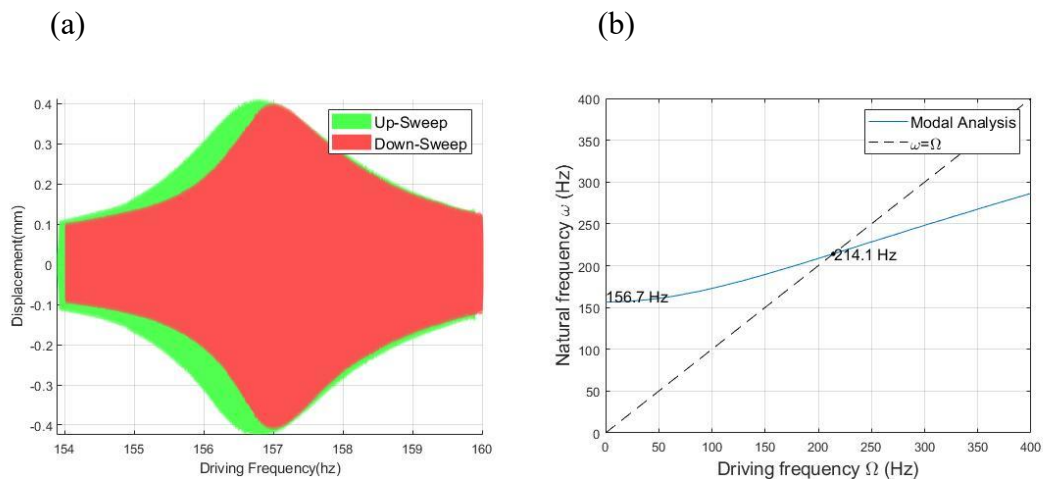


圖 6.14 擋板 B (副樑擋板) 掃頻共振頻實驗模擬對比

(a)掃頻實驗；(b)數值模擬；

6.3.2 主樑末端擋板模型驗證

本節擋板模型使用的是折返樑基樑 B，表 6.12 給出了基樑 B 的相關參數，在完成對基樑 B 的驗證後，將引入主樑末端擋板對旋轉環境下主樑末端質量塊處的最大位移進行限制，並研究其現象。

表 6.12 旋轉折返樑基基底樑 B 參數

符號	對象	參數值
R_t	旋轉半徑	30 mm
L	主樑長度	130 mm
L_1	主樑第一段長度	33 mm
L_2	主樑第二段長度	34 mm
L_3	主樑第三段長度	57 mm
L_4	副樑長度	41 mm
L_m	質量塊長度	6 mm
b_1	主樑寬度	20 mm
b_2	副樑寬度	12 mm
h_s	樑厚度	0.3 mm
ρ_e	樑密度	7930 kg/m^3
Y_s	樑楊氏係數	193 GPa
Y_p	壓電片整體楊氏係數	44 GPa
M_1	主樑末端質量塊	2.42 g
M_2	副樑末端質量塊	1.25 g
I_1	主樑末端質量塊轉動慣量	$5.03e-8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
I_2	副樑末端質量塊轉動慣量	$4.32e-8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
ζ_1	第一模態阻尼	0.028
ζ_2	第二模態阻尼	0.034
ζ_{st}	擋板阻尼	0.04

從初始共振頻看，如圖 6.15，掃頻結果和模擬的第一共振頻誤差為 0.61 Hz，第二共振頻誤差為 1.99 Hz。

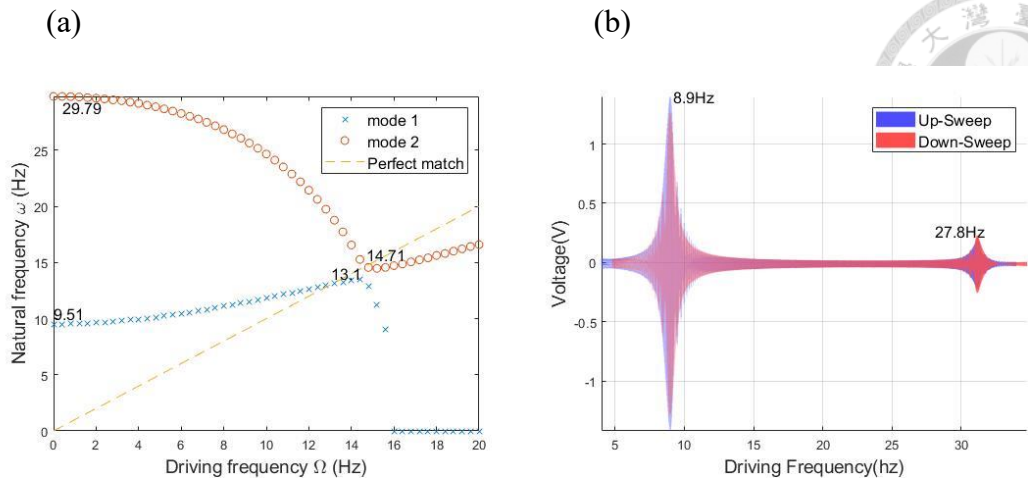


圖 6.15 旋轉折返樑基樑 B 共振頻模擬圖與實驗圖

(a)自然頻率與轉速關係模擬圖；(b)激振掃頻實驗圖；

從電壓的實驗結果圖 6.16 來看，模擬的結果在峰值上比較準確，但依然呈現對第二共振峰波軟化效果的高估，這導致第二旋轉共振頻對不齊，但這也是本文有意為之，通過研究發現，反共振點的頻率位置其實比第二共振頻更加重要，因此在參數修正時選擇對準第一旋轉共振頻和反共振點的頻率。

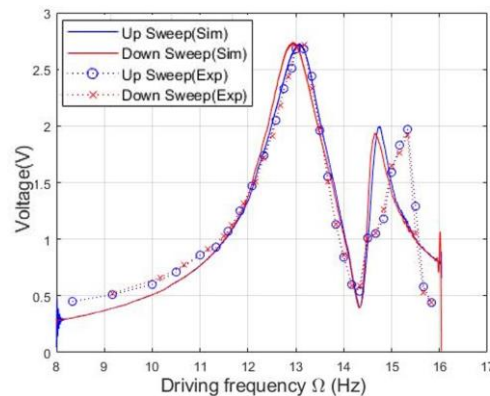


圖 6.16 旋轉折返樑基樑 B 模擬實驗比較圖

接下來進行旋轉折返樑主樑末端擋板系統的實驗。

如圖 6.17 和圖 6.18，實驗結果顯示，當擋板間距為 18.9 mm 時，第一共振頻峰值展現出明顯的硬化非線性，第二共振頻峰值降低，反掃體現出類似的情況，但硬化非線性減弱，不過並非完全沒有。當擋板間距進一步減少到 14.4 mm 時，第一共振頻的硬化非線性越過反共振點作用在第二共振頻上，並在第二共振頻展

現出頻寬拓寬的非線性現象，反掃情況下這種第二共振頻的頻寬則比正掃減少很多。從結果看，即使第一共振頻的硬化非線性足夠大，也無法對反共振點產生影響，而是越過反共振點作用於第二共振頻上。

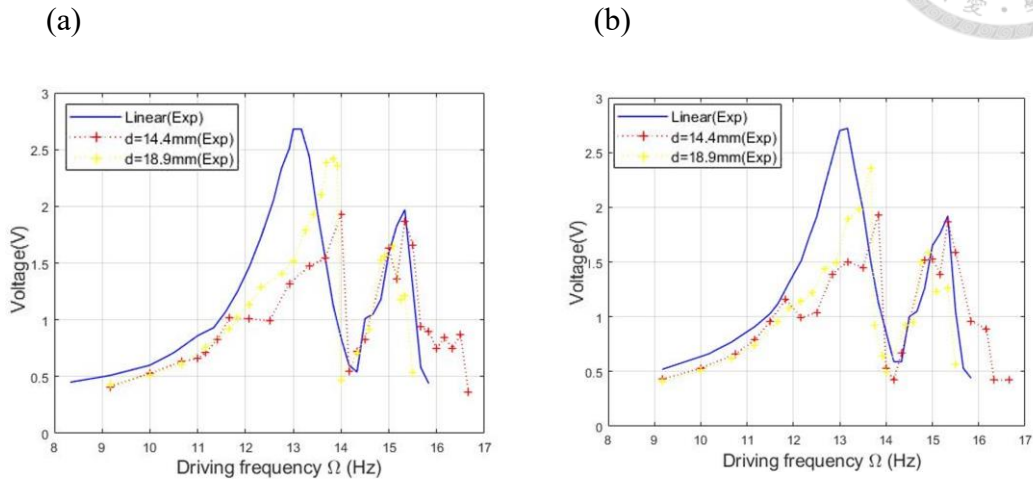


圖 6.17 旋轉折返樑主樑末端擋板系統在不同碰撞間距下實驗圖

(a)正掃；(b)反掃；

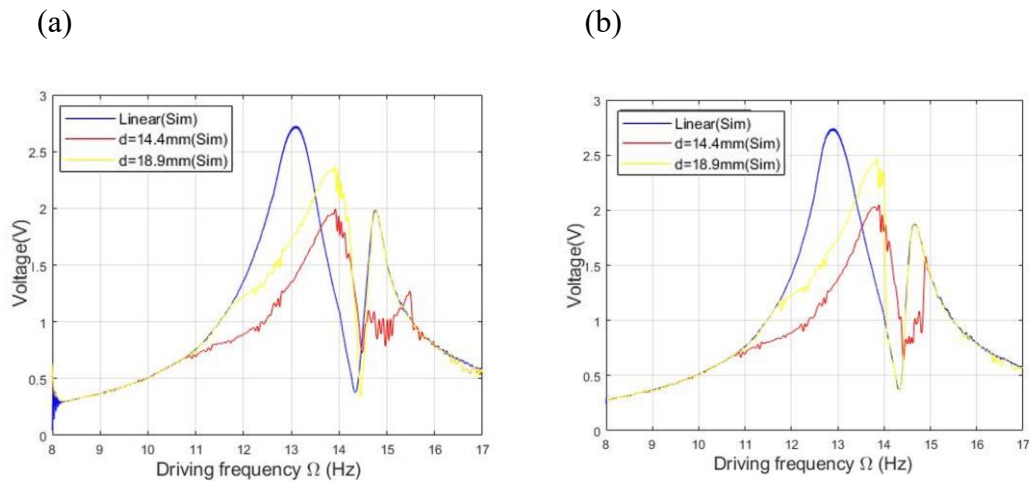


圖 6.18 旋轉折返樑主樑末端擋板系統在不同碰撞間距下模擬圖

(a)正掃；(b)反掃；

(a) (b)

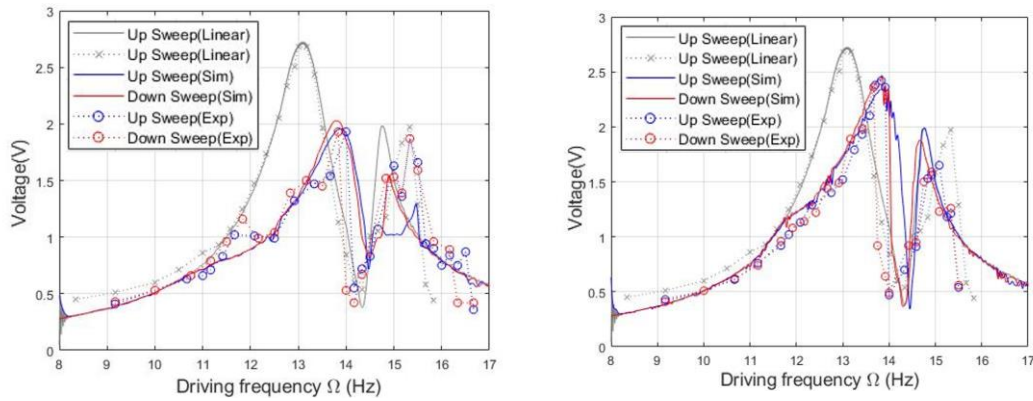


圖 6.19 旋轉折返樑主樑末端擋板系統正反掃實驗模擬比較圖

(a) $d = 14.4 \text{ mm}$; (b) $d = 18.9 \text{ mm}$;

如表 6.13，從發電面積來看，不同間距的主樑末端擋板的損耗比較接近，大約在 30-35%，正掃的發電效果稍高於反掃的發電效果。

表 6.13 不同主樑末端擋板間距對發電面積的比較

比較區間 10 Hz - 17 Hz	Linear		$d = 14.4 \text{ mm}$		$d = 18.9 \text{ mm}$	
	正掃	反掃	正掃	反掃	正掃	反掃
發電面積 ($mW \cdot Hz$)	$12.54e-3$	$12.41e-3$	$8.74e-3$	$8.61e-3$	$8.91e-3$	$8.15e-3$
發電效果 (百分比)	100%	98.94%	69.68%	68.65%	71.06%	64.99%

6.3.3 副樑末端擋板模型驗證

接下來進行旋轉折返樑副樑末端擋板系統的實驗。

如圖 6.20 和圖 6.21，實驗展示了兩種間距下的擋板效果，在 $d = 24.4 \text{ mm}$ 的情況下，電壓曲線似乎呈損耗狀態，第一共振頻整體輕微降低，第二共振頻峰值下降明顯，但沒有明顯的非線性的現；但當 $d = 15.4 \text{ mm}$ 的情況下，非線性現象變得非常明顯，頻寬明顯拓寬接近 1 Hz，第二共振頻峰值也比之前又下降了一點，反掃也有一定的頻寬拓寬，但遠少於正掃的情況，這個間距的副樑擋板體現出充分的非線性現象，通過數值模擬發現這兩種情況其實分別對應於第一共振時副樑

擋板是否和末端發生碰撞的情況，當沒有發生碰撞時，硬化非線性不存在；當發生碰撞時，硬化非線性突然出現，而且頻寬突然拓寬，本文稱之為副樑擋板的闖值現象。當第一共振頻的共振位置發生碰撞時，第一共振頻的非線性並不會立即作用出來，而是經過反共振點作用到第二共振頻去。因此，這種非線性現象並不是隨著間距變化而線型出現，而是階梯式出現的，輕微改變副樑擋板的間距即可發生完全不同的效果，這個現象在實際運用中也有一定的價值。

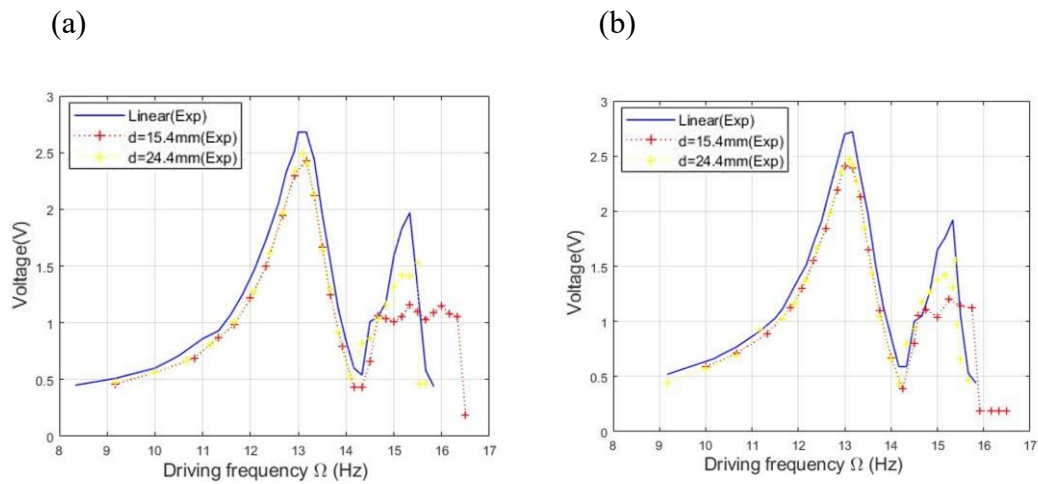


圖 6.20 旋轉折返樑副樑末端擋板系統在不同碰撞間距下實驗圖

(a)正掃；(b)反掃；

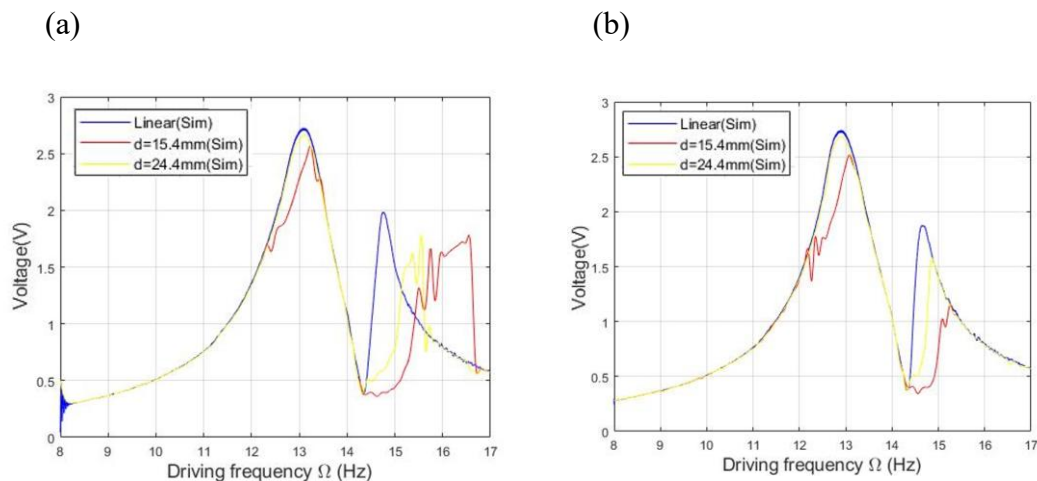


圖 6.21 旋轉折返樑副樑末端擋板系統在不同碰撞間距下模擬圖

(a)正掃；(b)反掃；

(a) (b)

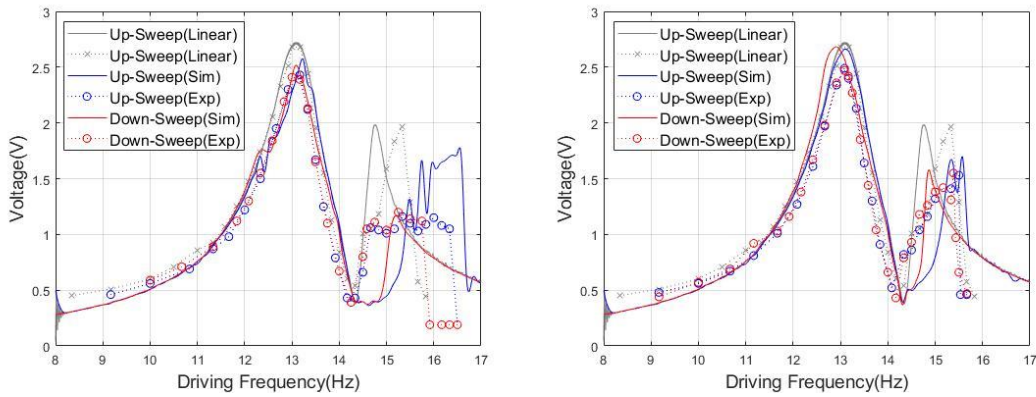


圖 6.22 旋轉折返樑副樑末端擋板系統正反掃實驗模擬比較圖

(a) $d = 15.4 \text{ mm}$; (b) $d = 24.4 \text{ mm}$;

如表 6.14，從發電面積看，副樑末端擋板的發電損耗總體小於主樑擋板，大約在 22%，正掃發電面積稍高於反掃，當擋板間距通過閾值時，發電面積得到小幅提升，和反掃的發電面積差距增加。

表 6.14 不同副樑末端擋板間距對發電面積的比較

比較區間 10 Hz–17 Hz	Linear		$d = 15.4 \text{ mm}$		$d = 24.4 \text{ mm}$	
	正掃	反掃	正掃	反掃	正掃	反掃
發電面積 ($mW \cdot Hz$)	$12.54e-3$	$12.41e-3$	$9.92e-3$	$9.62e-3$	$9.86e-3$	$9.79e-3$
發電效果 (百分比)	100%	98.94%	79.10%	76.73%	78.58%	78.09%

6.4 磁力非線性模型驗證

前一節介紹了有關雙自由度旋轉折返樑結合擋板脈衝力的實驗，通過實驗可以看出，由於碰撞過程中摩擦力的客觀存在，其非線性效果是受到損耗的，數值模擬的結果相比實驗結果會有一定的高估。本文引入磁力這種非接觸力以改善和探討新的硬化效果影響，希望獲得更好的頻寬優化效果和發電功率優化效果。

6.4.1 磁鐵模型驗證

本文參考 Akoun [50]的方形磁鐵模型給出兩方形磁鐵之間作用力與位置的變化關係，這裡對該模型的準確性進行簡單驗證。將兩磁鐵之間作用力的實驗實驗數據、MATLAB 數值模擬的解析模型與 K&J Magnetics 網站提供的數據[52]進行比對。不過 K&J Magnetics 只提供了相同大小磁鐵在 XY 方向偏移為 0 的情況下的實驗數據，而本文實驗中使用的兩磁鐵大小分別 $4*4*4\text{ mm}$ 與 $5*5*5\text{ mm}$ ，因此分別對兩種磁鐵進行比對（圖 6.23）。除此之外，本文還比對了 $4*4*4\text{ mm}$ 與 $5*5*5\text{ mm}$ 兩顆磁鐵在 X 方向偏移 5 mm 情況下的數值模型與實驗結果（圖 6.24），這種條件下的磁力變化曲線具有拐點，方便更好地確定磁化強度的數值，但不具備 K&J Magnetics 網站提供的數據支援。從實驗結果圖 6.23 和圖 6.24 可以看出，該模型準確性非常高，這保證了本章後續磁力系統的驗證的基礎。

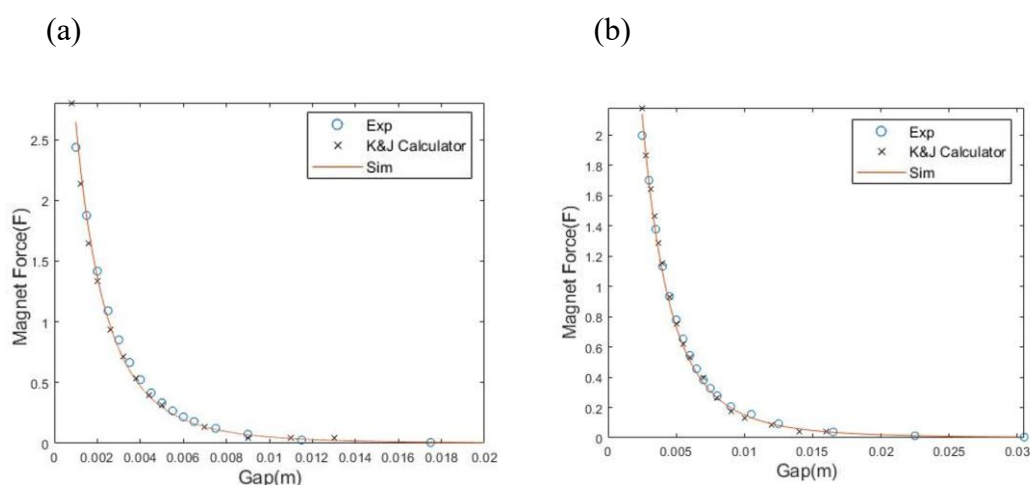


圖 6.23 兩顆磁鐵之磁力模型驗證

(a)兩顆 $4*4*4\text{ mm}$ 磁鐵；(b)兩顆 $5*5*5\text{ mm}$ 磁鐵；

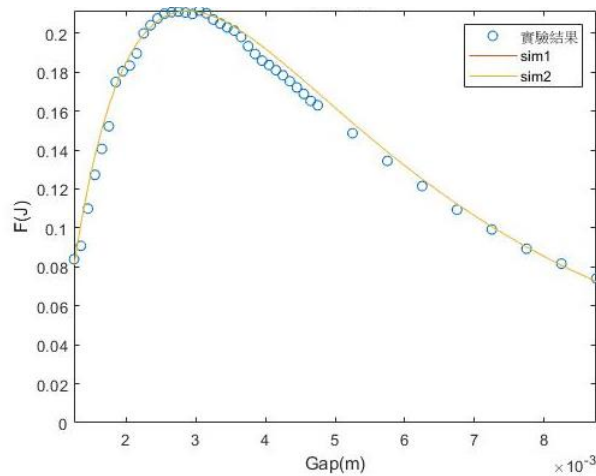


圖 6.24 $4*4*4\text{ mm}$ 與 $5*5*5\text{ mm}$ 兩顆磁鐵在 X 方向偏移 5 mm 情況之磁力模型
驗證

6.4.2 主樑末端磁力模型驗證

對於旋轉折返樑主樑末端磁力系統，本文選擇在主樑質量塊鋁塊夾持裝置上安裝一塊 $5*5*5\text{ mm}$ 磁鐵，出於對相同變量參數的考慮，當然希望主樑末端質量塊在安裝磁鐵後質量保持不變，但由於實驗裝置的限制，本文不可能保證質量一致，且上下兩塊鋁塊夾持不僅僅是質量塊，也起到末端的邊界條件作用，如果擅自移除其中一塊，會對邊界條件造成影響，對結果也會造成不小的影響。表 6.15 為旋轉折返樑主樑末端磁力系統的最終實驗參數。

表 6.15 旋轉折返樑主樑末端磁力系統參數修正

符號	對象	參數值
h_s	樑厚度	0.303 mm
M_1	主樑末端質量塊	3.42 g
I_1	主樑末端質量塊轉動慣量	$7.03e-8\text{ kg}\cdot\text{m}^2$
ζ_1	第一模態阻尼	0.026
ζ_2	第二模態阻尼	0.028

圖 6.25 圖 6.26 為旋轉折返樑磁力系統在不同磁鐵間距下的正反掃實驗與模擬結果。本文最初希望當磁鐵間距足夠近的時候，硬化的第一共振區間可以和第二共振區間發生重合理論上兩磁鐵距離越近，作用力越大，絕對不可能兩磁鐵碰撞，但是由於實驗設備的限制，附著在主樑末端的磁鐵在振動時存在角度偏移，在實際實驗中，過近的磁鐵間距設置會導致振動過程中發生碰撞，這違背了本文不接觸作用力的設計，因此實際實驗沒能在合理的間距能讓第一共振頻曲線的硬化程度足以和第二共振頻區間發生重合交錯。

從正掃實驗結果來看，磁力作用在主樑末端後，電壓體現出明顯的硬化非線性，頻寬增加。雖然模擬結果和磁力系統第一共振頻峰值附近的電壓預測非常準確，但在硬化驟降點都出現明顯偏差，預測的拐點比模擬普遍低一些，導致最終的發電面積不及預期。雖然磁力是非接觸力，但顯然旋轉過程中任然有相當的能量在磁力作用過程中損耗了，從實驗結果看來，磁鐵間距越小磁力作用越大則損耗程度越高。從反掃實驗結果來看，模擬結果相對準確。反掃硬化非線性消失，這是因為在硬化非線性區間實際上電壓有多組解，而前一刻的參數會成為下一刻參數的初始值。當正掃掃頻時，通過非線性區間的解受前面初始值影響保持在最大解，而反掃則保持在最小值直到進入穩定解區間，因此正掃的硬化非線性在反掃過程中消失，這種正反掃的差異也是典型的硬化非線性情況。

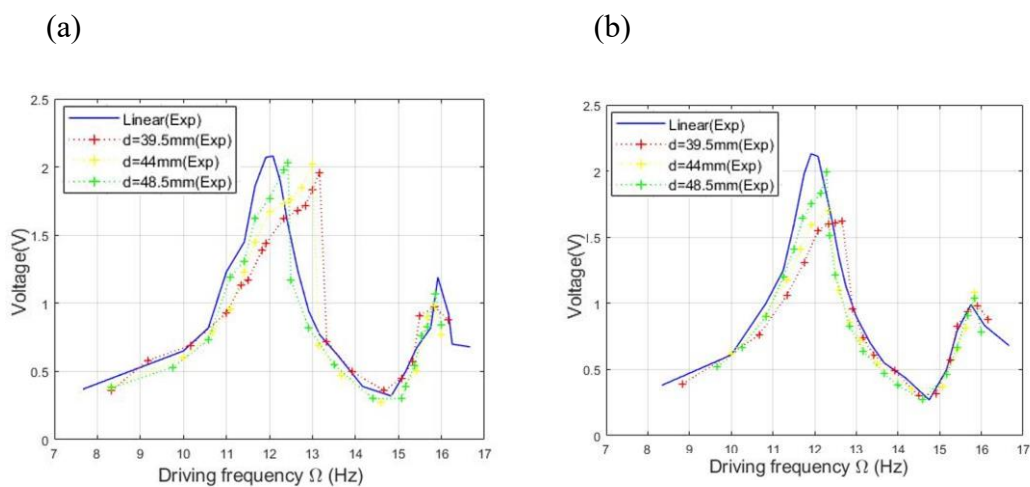
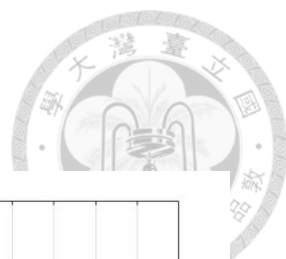


圖 6.25 旋轉折返樑主樑末端磁力系統在不同磁鐵間距下實驗圖



(a)正掃；(b)反掃；

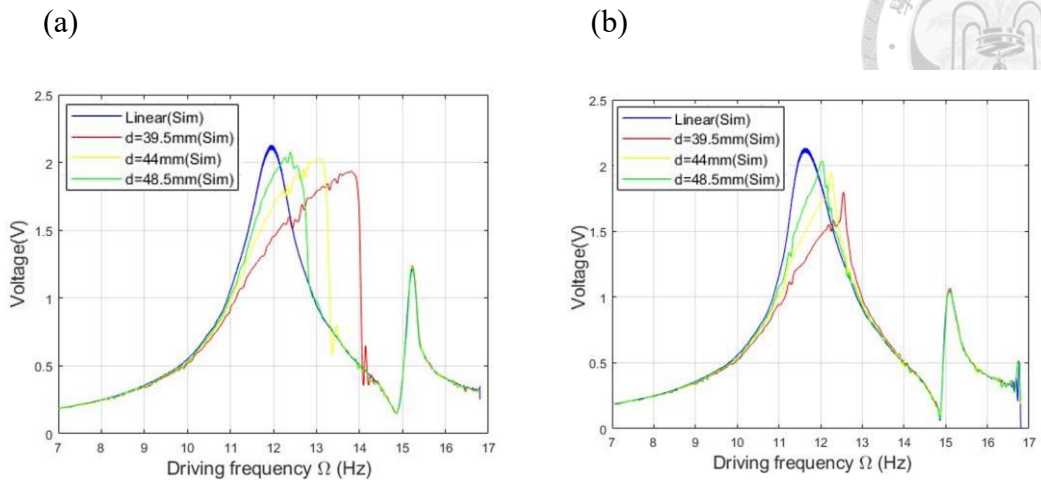


圖 6.26 旋轉折返樑主樑末端磁力系統在不同磁鐵間距下模擬圖

(a)正掃；(b)反掃；

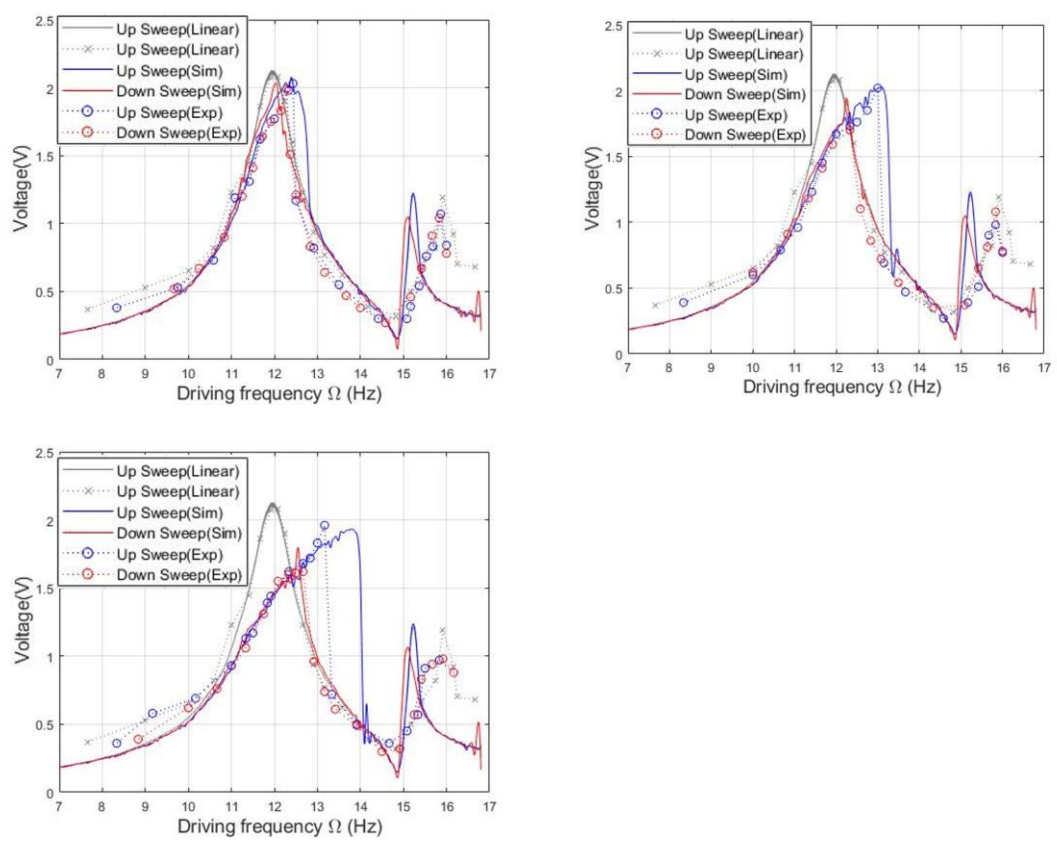


圖 6.27 旋轉折返樑主樑末端磁力系統正反掃實驗模擬比較圖

(a) $d = 48.5 \text{ mm}$; (b) $d = 44 \text{ mm}$; (c) $d = 39.5 \text{ mm}$;

從發電效率表 6.16 來看，正掃發電效率最低的反而是磁鐵間距最遠的

$d = 48.5 \text{ mm}$ ，損耗約 20%，另外兩隻情況發電面積則大致相當；反掃發電效率三種間距的磁鐵都損耗 25% 左右，差別很小。

表 6.16 不同主樑末端磁鐵間距對發電面積的比較

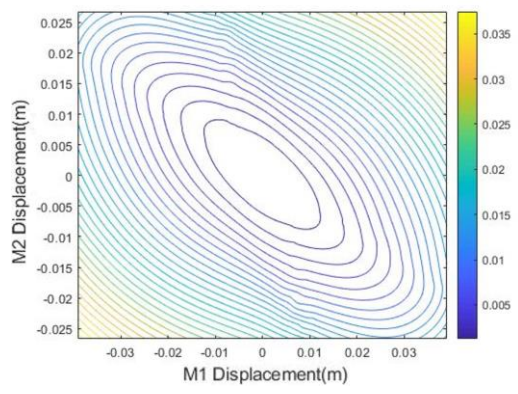
比較區間 10 Hz - 17 Hz	Linear	$d = 48.5 \text{ mm}$	$d = 44 \text{ mm}$	$d = 39.5 \text{ mm}$
掃頻方式	正掃	正掃	正掃	正掃
	反掃	反掃	反掃	反掃
發電面積 ($mW \cdot Hz$)	$7.370e-3$	$5.659e-3$	$6.852e-3$	$6.848e-3$
	$7.433e-3$	$5.558e-3$	$5.233e-3$	$5.425e-3$
發電效果 (百分比)	100%	76.8%	93.0%	92.9%
	100.9%	75.4%	71.0%	73.6%

由於磁力一直對主樑末端產生作用力，因此本文考慮磁力作用於主樑末端時對位能的改變，並和主樑末端位移和副樑末端位移作比較。但雙模態下幾何非線性模型計算複雜，難以直接給出位移和位能的解析解，因此這裡用數值解進行位能計算。位能之理論推導參見 4.2.2 節。

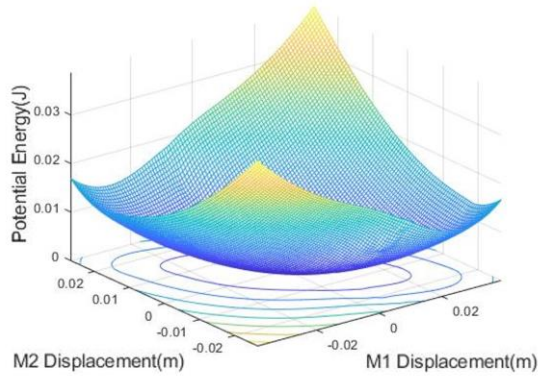
圖 6.28 可以看出，主樑和副樑的末端位移越大，位能越高，並且當主副樑位移同方向時（由於主副樑坐標系方向相反，實際上這是主副樑振動方向相反的情況）位能更大，如果主副樑位移為 0 時位能最低。在主樑下方磁力的作用下，位能變化很微小，這是因為磁鐵間距較遠，只有當振動幅度較大時磁力作用明顯，因此磁鐵對位能的影響非常有限。從位能等高線圖可以發現，當磁鐵間距越小磁力作用越大的情況下，等高線的左下和右上方密度增加，呈現出向左上和右下的拉伸趨勢，內部橢圓呈現出變扁的趨勢，這證明當磁力作用越大時，相同位移距離下的位能變化越大。

(a)

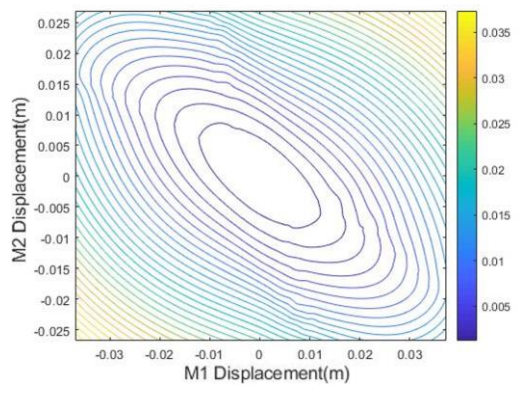
(b)



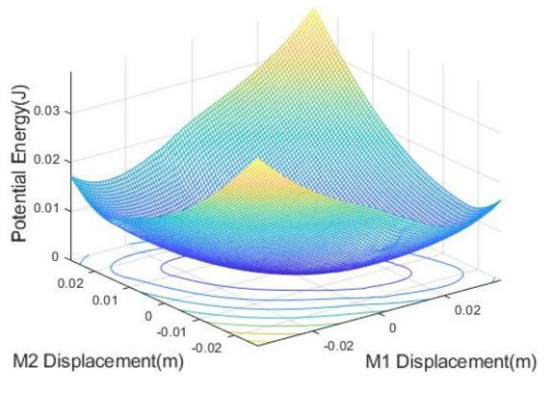
(c)



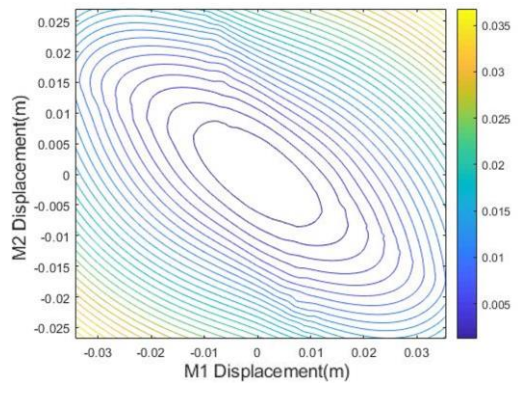
(d)



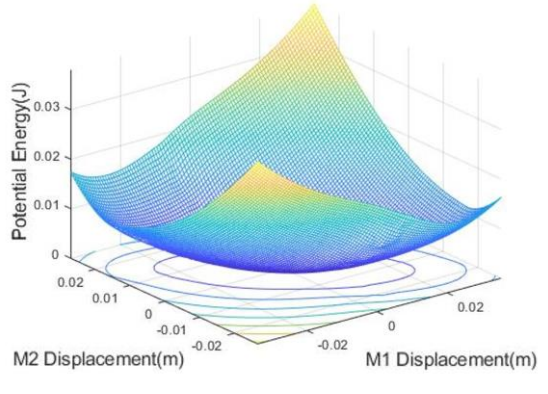
(e)



(f)



(g)



(h)

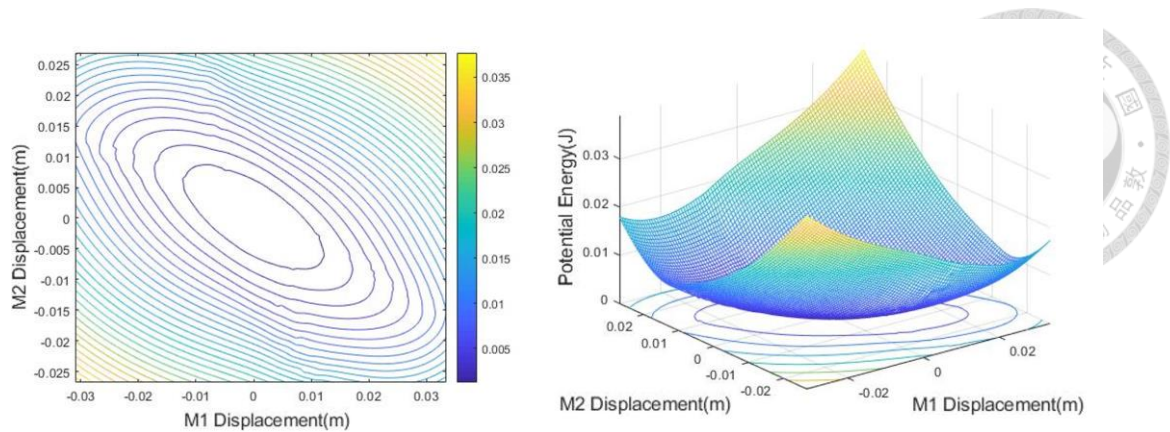


圖 6.28 旋轉折返樑主樑末端磁力系統位能圖

(a)位能等高線圖 (Linear); (b)位能立體圖 (Linear);

(c)位能等高線圖 ($d = 48.5 \text{ mm}$); (d)位能立體圖 ($d = 48.5 \text{ mm}$);

(e)位能等高線圖 ($d = 44 \text{ mm}$); (f)位能立體圖 ($d = 44 \text{ mm}$);

(g)位能等高線圖 ($d = 39.5 \text{ mm}$); (h)位能立體圖 ($d = 39.5 \text{ mm}$);

6.4.3 副樑末端磁力模型驗證

接下來一節將進行副樑末端磁力的研究，本文將一塊 $5*5*5 \text{ mm}$ 的磁鐵黏著於副樑末端質量塊上，這改變了折返樑系統的結構參數，根據 6.2.2 節對改變系統副樑末端質量塊 M_2 的研究發現，如果直接修改 M_2 參數代入程式計算，雖然旋轉共振頻大致可以對到，但並不能獲得正常的電壓反饋結果，這是因為當副樑末端質量塊增加時，下降模態組先於上升模態組到達旋轉共振頻，但由於模態轉向，先出現的卻是第一模態的峰值，因此，原本的程式會用第二模態的參數計算第一模態的下降模態組，所以壓電結果失真。於是將一二模態的參數交換，得到電壓曲線，對比實驗結果，進行參數微調 (表 6.17)。本文最初考慮副樑磁鐵時同樣是希望磁力作用能較大地改變兩個共振峰值，使兩個共振峰值出現重合，但是實際實驗結果中上升模態的峰值因為太小而觀測不到。並且由於實驗設備的限制，如果進一步減少磁鐵間距，現實中的兩磁鐵會發生碰撞，這和初衷相違背，因此不做更小間距的磁鐵實驗記錄。

表 6.17 旋轉折返樑副樑末端磁力系統參數修正

符號	對象	參數值
h_s	樑厚度	0.294 mm
M_2	主樑末端質量塊	2.25 g
I_2	主樑末端質量塊轉動慣量	$8.17e-8 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
ζ_1	第一模態阻尼	0.03
ζ_2	第二模態阻尼	0.035(不重要)

觀察實驗結果圖 6.29 和圖 6.30，正掃情況下磁力作用在副樑末端的效果和無磁力的反掃的非線性現象接近，都是峰值降低，頻寬減少，硬化效果減弱。而反掃情況下的磁力作用也體現出類似的情況，但硬化效果減弱程度不及正掃。從實驗結果來看 $d = 48.5 \text{ mm}$ 和 $d = 53 \text{ mm}$ 的情況下的作用效果相近。模擬的結果認為，磁鐵間距越近，電壓峰值越低，但實驗中兩種差距很小，這可能時實驗裝置的誤差造成的：由於本文使用的樑材質為鋼，磁鐵在經過期鏤空部分時，兩側的樑體對其造成往復的磁力作用，由於距離很近，這種作用在振幅不大的時候甚至會超越末端磁力的作用，形成位能閘，副樑的振動在低頻狀態下會先受阻而振不起來，而後突破位能閘後則同樣受阻無法在閘值位移附近穩定振動，因此電壓曲線變化較難隨磁鐵間距變化。

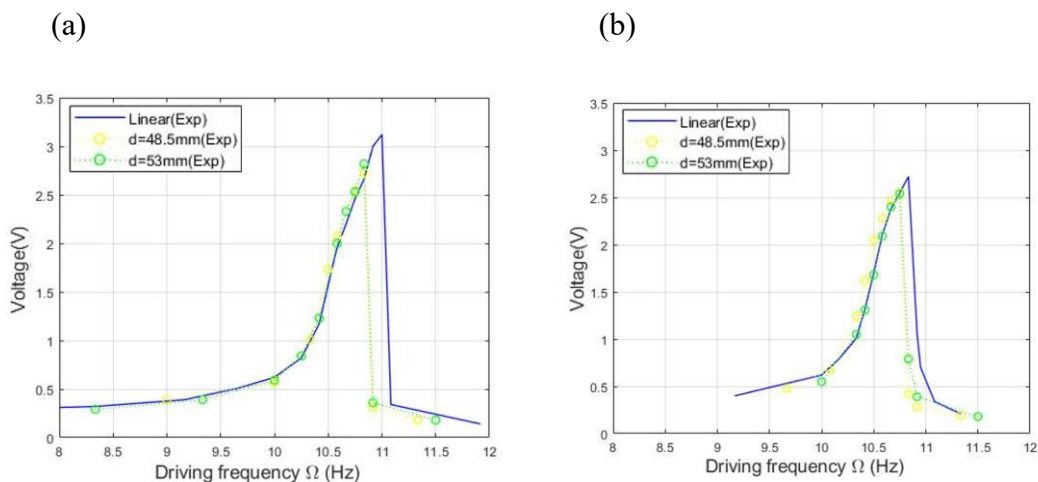
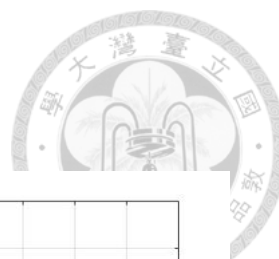


圖 6.29 旋轉折返樑副樑末端磁力系統在不同磁鐵間距下實驗圖



(a)正掃；(b)反掃；

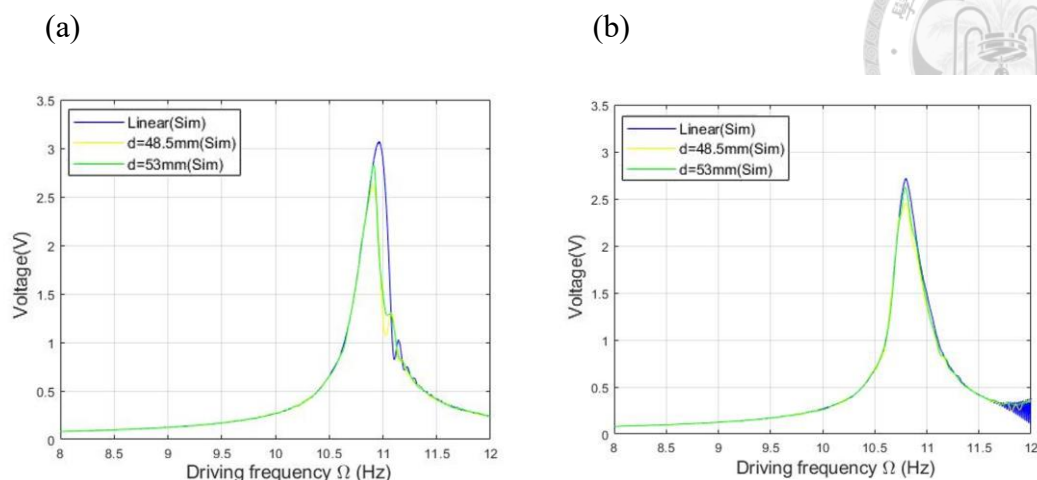


圖 6.30 旋轉折返樑副樑末端磁力系統在不同磁鐵間距下模擬圖

(a)正掃；(b)反掃；

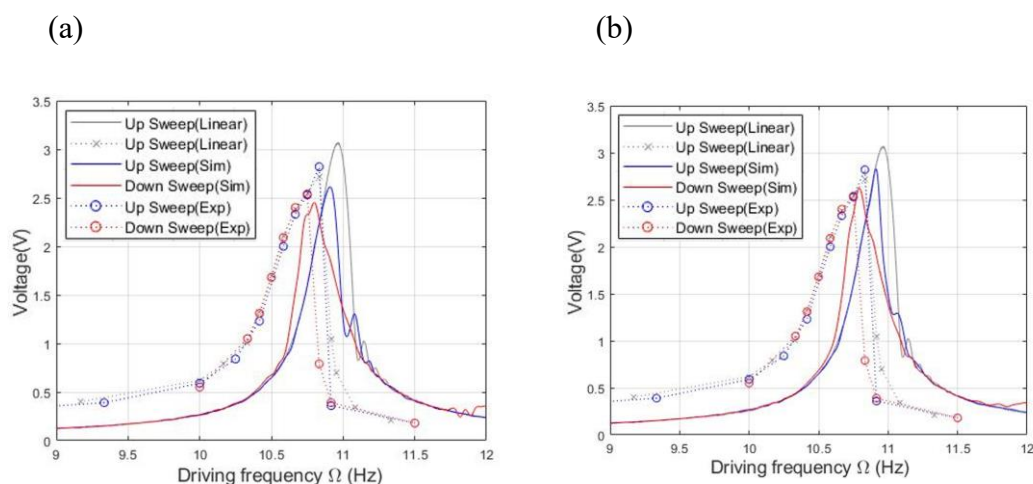


圖 6.31 旋轉折返樑副樑末端磁力系統正反掃實驗模擬比較圖

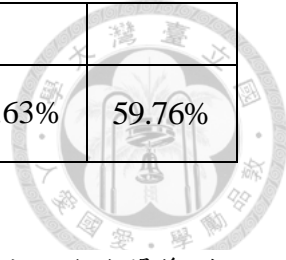
(a) $d = 48.5 \text{ mm}$; (b) $d = 53 \text{ mm}$;

從發電效率表 6.18 看，正掃的發電效果普遍高於反掃，磁力作用下的系統正掃發電效率損耗大約 1/3，反掃的發電效率損耗約 20%。

表 6.18 不同副樑末端磁鐵間距對發電面積的比較

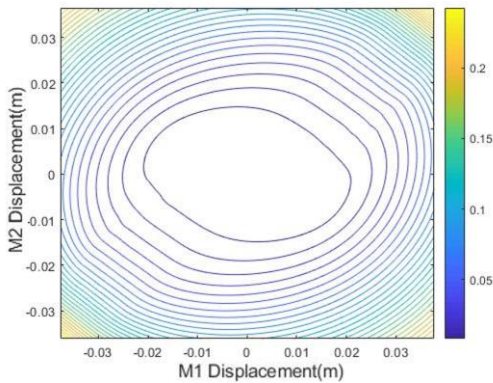
比較區間 10 Hz – 17 Hz	Linear		$d = 53 \text{ mm}$		$d = 48.5 \text{ mm}$	
	正掃	反掃	正掃	反掃	正掃	反掃
發電面積	$3.96e-3$	$2.75e-3$	$2.58e-3$	$2.06e-3$	$2.60e-3$	$2.36e-3$

$(mW \cdot Hz)$						
發電效果 (百分比)	100%	69.53%	65.24%	52.11%	65.63%	59.76%

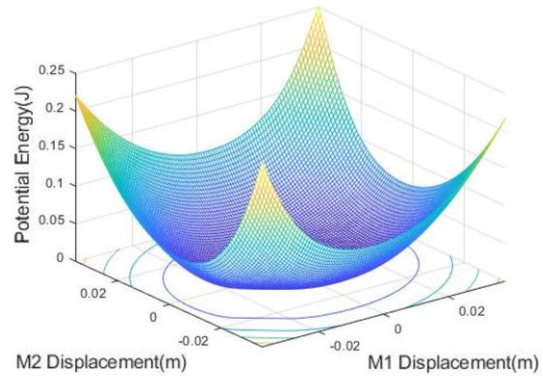


接下來我們比較副樑末端磁力作用下位能與主樑和副樑末端位移的關係，根據圖 6.32 的結果，副樑末端磁力的作用對樑的位能影響依然有限，不過相比主樑末端磁力的情況磁力作用有所體現，總體位能下降。不過位移方向對位能的影響減弱，當主副樑位移距離最大時位能最大。當磁鐵間距減小，磁力作用增加的情況下，等高線的左下和右上方線密度增加，呈現出向左上和右下的拉伸趨勢，內部橢圓呈現出變扁的趨勢，這證明當磁力作用越大時，相同位移距離下的位能變化越大。

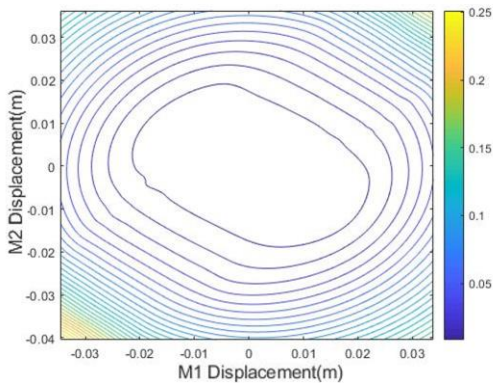
(a)



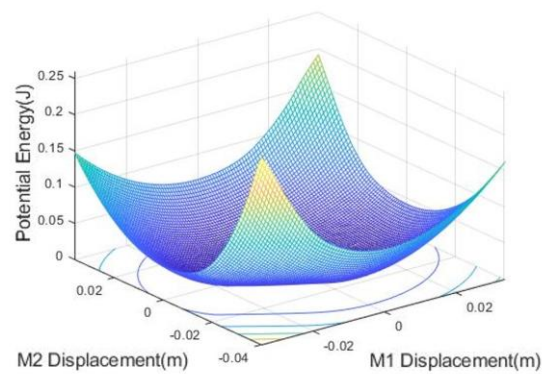
(b)



(c)



(d)



(e)

(f)

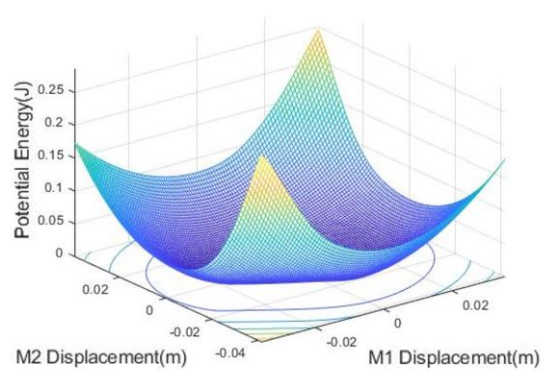
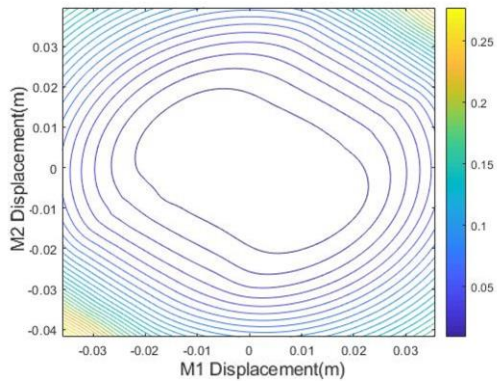


圖 6.32 旋轉折返樑副樑末端磁力系統位能圖

(a)位能等高線圖 (Linear) ; (b)位能立體圖 (Linear) ;

(c)位能等高線圖 ($d = 48.5 \text{ mm}$) ; (d)位能立體圖 ($d = 48.5 \text{ mm}$) ;

(e)位能等高線圖 ($d = 53 \text{ mm}$) ; (f)位能立體圖 ($d = 53 \text{ mm}$) ;

Chapter 7 結論與未來展望



7.1 結論

本文研究了一種雙自由度折返樑式的壓電能量收集器，它在低頻下具有典型兩個共振頻，通過旋轉環境進一步拉近兩個共振頻的共振位置，進而獲得兩個距離很進大小相近的峰值。在此基礎上，首先嘗試改變結構參數來觀測發電效率的改變，同時特別研究了當上升模態先於和後於模態轉向發生的兩種情況下的處理方式，並取得接近現實情況的模擬結果。為使系統頻寬拓寬，實驗還使用兩種非線性外力作用分別作用在主樑末端和副樑末端不同情況下的效果：機械擋板通過與折返樑系統末端質量塊發生碰撞產生非線性脈衝力來改變系統剛性；兩顆磁鐵分別安裝在折返樑系統末端質量塊與其正下方固定位置，通過產生的磁力以非接觸的方式來改變系統的剛性。

本文放寬傳統古典樑假設中的小位移振動的限制，以幾何非線性的模型來探討旋轉環境大位移振動下發電電壓之頻響與頻寬的數值解。從總體看來，模擬的結果對擋板和磁力均存在高估發電效果，發電效率不夠理想等情況。擋板和磁力的引入在拓寬頻寬方面效果比較顯著：隨著主梁擋板作用間距的減少，非線性效果愈加明顯，但峰值降低；隨著副梁擋板作用間距的減少，第二共振頻峰值減少，但沒有明顯非線性，當到達副樑擋板的間距閾值時（即第一共振區間振動中的副梁擋板也發生碰撞的情況下），非線性效果突然變得明顯。隨著主梁磁鐵間距減少，非線性效果同樣愈加明顯，峰值同樣降低；隨著副梁磁鐵間距減少，峰值降低，非線性效果前移，頻寬減少，這也和數值模擬的預期相一致。這四種配置下的非線性效果均沒有對反共振點造成影響，無法達到完整的兩個共振區間連接的非線性效果。就結果而言，副梁磁鐵的發電效果最差，發電效率、頻寬、峰值均出現下降；副梁擋板的閾值效果最獨特，可以實現階段式的電壓非線性；主梁擋板和主梁磁力均展現出良好的頻寬拓寬，發電效率的損耗相對最小。

7.2 未來展望

理論模型的優化：本文對經典樑理論模型做出了一些小的優化，放寬小位移振動的假設，將軸向位移和軸向力納入力學關係的考慮，獲得的幾何非線性的振動方程相比經典的運動方程在旋轉大位移環境的應用有一定的進步，但是推導過程中出於計算的考慮也作出一些計算上的妥協，實驗結果來看高估了離心力對第二共振頻區間的作用程度和模態轉向的速率。

參數最佳化：受限於實驗裝置和研究基礎，本文主要對擋板和磁力兩種作用力作用於主樑末端和副樑末端的情況進行模擬和比較，很多參數並沒有特別設計，如何設計參數讓發電效果最優化對現實的應用更有意義。

更深入的現象討論：根據實驗經驗，在上升模態先於模態轉向發生旋轉共振的情況下，第二共振頻的電壓不是常規的正弦曲線而是呈現出較為複雜的曲線，有研究稱為 beats 點，這可能是多種屬性的電壓耦合造成的，用傅裡葉分析探究其成因和規律會幫助我們更好的地理解第二共振頻區間電壓變化的規律；此外，當兩個共振頻非常接近乃至重合的情況下，旋轉掃頻也會出現模態耦合的情況，此時振型為多模態的耦合，反共振點消失，這種情形下如何合理地處理模態的參數也是本文未能解決的。

參考文獻

- [1] P. D. Mitcheson, P. Miao, B. H. Stark, E. Yeatman, A. Holmes, and T. Green, "MEMS electrostatic micropower generator for low frequency operation," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 115, no. 2-3, pp. 523-529, 2004.
- [2] C. Dagdeviren *et al.*, "Conformal piezoelectric energy harvesting and storage from motions of the heart, lung, and diaphragm," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 111, no. 5, pp. 1927-1932, 2014.
- [3] M. Rafiee, F. Nitzsche, and M. Labrosse, "Dynamics, vibration and control of rotating composite beams and blades: A critical review," *Thin-Walled Structures*, vol. 119, pp. 795-819, 2017.
- [4] B. Lee, S. Lin, W. Wu, X. Wang, P. Chang, and C. Lee, "Piezoelectric MEMS generators fabricated with an aerosol deposition PZT thin film," *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 19, no. 6, p. 065014, 2009.
- [5] S.-B. Kim, H. Park, S.-H. Kim, H. C. Wickle, J.-H. Park, and D.-J. Kim, "Comparison of MEMS PZT cantilevers based on d_{31} and d_{33} modes for vibration energy harvesting," *Journal of microelectromechanical systems*, vol. 22, no. 1, pp. 26-33, 2012.
- [6] N. Chandiramani, L. Librescu, and C. Shete, "On the free-vibration of rotating composite beams using a higher-order shear formulation," *Aerospace Science and Technology*, vol. 6, no. 8, pp. 545-561, 2002.
- [7] A. Erturk and D. J. Inman, "A distributed parameter electromechanical model for cantilevered piezoelectric energy harvesters," *Journal of vibration and acoustics*, vol. 130, no. 4, 2008.
- [8] A. Erturk and D. J. Inman, "An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations," *Smart materials and structures*, vol. 18, no. 2, p. 025009, 2009.
- [9] L. Mateu and F. Moll, "Optimum piezoelectric bending beam structures for energy harvesting using shoe inserts," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 16, no. 10, pp. 835-845, 2005.
- [10] N. Sharpes, A. Abdelkefi, and S. Priya, "Comparative analysis of one-dimensional and two-dimensional cantilever piezoelectric energy harvesters," *Energy Harvesting and Systems*, vol. 1, no. 3-4, pp. 209-216, 2014.
- [11] S. Kim, W. W. Clark, and Q.-M. Wang, "Piezoelectric energy harvesting with a clamped circular plate: analysis," *Journal of intelligent material systems and structures*, vol. 16, no. 10, pp. 847-854, 2005.
- [12] S. Kim, W. W. Clark, and Q.-M. Wang, "Piezoelectric energy harvesting with a clamped circular plate: experimental study," *Journal of Intelligent Material*

- Systems and Structures*, vol. 16, no. 10, pp. 855-863, 2005.
- [13] H. W. Kim, S. Priya, K. Uchino, and R. E. Newnham, "Piezoelectric energy harvesting under high pre-stressed cyclic vibrations," *Journal of Electroceramics*, vol. 15, no. 1, pp. 27-34, 2005.
- [14] X. Tang and L. Zuo, "Enhanced vibration energy harvesting using dual-mass systems," *Journal of sound and vibration*, vol. 330, no. 21, pp. 5199-5209, 2011.
- [15] J. E. Kim and Y. Y. Kim, "Power enhancing by reversing mode sequence in tuned mass-spring unit attached vibration energy harvester," *AIP Advances*, vol. 3, no. 7, p. 072103, 2013.
- [16] Y. Hu and Y. Xu, "A wideband vibration energy harvester based on a folded asymmetric gapped cantilever," *Applied physics letters*, vol. 104, no. 5, p. 053902, 2014.
- [17] H. Wu, L. Tang, Y. Yang, and C. K. Soh, "Development of a broadband nonlinear two-degree-of-freedom piezoelectric energy harvester," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 25, no. 14, pp. 1875-1889, 2014.
- [18] R. Toyabur, M. Salauddin, and J. Y. Park, "Design and experiment of piezoelectric multimodal energy harvester for low frequency vibration," *Ceramics International*, vol. 43, pp. S675-S681, 2017.
- [19] A. Triplett and D. D. Quinn, "The effect of non-linear piezoelectric coupling on vibration-based energy harvesting," *Journal of intelligent material systems and structures*, vol. 20, no. 16, pp. 1959-1967, 2009.
- [20] R. Masana and M. F. Daqaq, "Electromechanical modeling and nonlinear analysis of axially loaded energy harvesters," *Journal of vibration and acoustics*, vol. 133, no. 1, 2011.
- [21] H. Liu, C. Lee, T. Kobayashi, C. J. Tay, and C. Quan, "Piezoelectric MEMS-based wideband energy harvesting systems using a frequency-up-conversion cantilever stopper," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 186, pp. 242-248, 2012.
- [22] K. Fan, Q. Tan, Y. Zhang, S. Liu, M. Cai, and Y. Zhu, "A monostable piezoelectric energy harvester for broadband low-level excitations," *Applied Physics Letters*, vol. 112, no. 12, p. 123901, 2018.
- [23] W.-J. Su and J. Zu, "An innovative tri-directional broadband piezoelectric energy harvester," *Applied Physics Letters*, vol. 103, no. 20, p. 203901, 2013.
- [24] R. Chen, L. Ren, H. Xia, X. Yuan, and X. Liu, "Energy harvesting performance of a dandelion-like multi-directional piezoelectric vibration energy harvester," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 230, pp. 1-8, 2015.
- [25] A. Yigit, R. Scott, and A. G. Ulsoy, "Flexural motion of a radially rotating beam

- attached to a rigid body," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 121, no. 2, pp. 201-210, 1988.
- [26] L. Gu and C. Livermore, "Compact passively self-tuning energy harvesting for rotating applications," *Smart materials and structures*, vol. 21, no. 1, p. 015002, 2011.
- [27] J.-C. Hsu, C.-T. Tseng, and Y.-S. Chen, "Analysis and experiment of self-frequency-tuning piezoelectric energy harvesters for rotational motion," *Smart Materials and Structures*, vol. 23, no. 7, p. 075013, 2014.
- [28] Ö. Turhan and G. Bulut, "On nonlinear vibrations of a rotating beam," *Journal of sound and vibration*, vol. 322, no. 1-2, pp. 314-335, 2009.
- [29] P. Minguet and J. Dugundji, "Experiments and analysis for composite blades under large deflections. II-Dynamic behavior," *AIAA journal*, vol. 28, no. 9, pp. 1580-1588, 1990.
- [30] R. Chandra and I. Chopra, "Experimental-theoretical investigation of the vibration characteristics of rotating composite box beams," *Journal of Aircraft*, vol. 29, no. 4, pp. 657-664, 1992.
- [31] R. Chandra and I. Chopra, "Analytical-experimental investigation of free-vibration characteristics of rotating composite I-beams," *Journal of Aircraft*, vol. 30, no. 6, pp. 927-934, 1993.
- [32] M. Li, Y. Wen, P. Li, J. Yang, and X. Dai, "A rotation energy harvester employing cantilever beam and magnetostrictive/piezoelectric laminate transducer," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 166, no. 1, pp. 102-110, 2011.
- [33] H.-X. Zou *et al.*, "Design and experimental investigation of a magnetically coupled vibration energy harvester using two inverted piezoelectric cantilever beams for rotational motion," *Energy Conversion and Management*, vol. 148, pp. 1391-1398, 2017.
- [34] B. Guo, Z. Chen, C. Cheng, and Y. Yang, "Characteristics of a nonlinear rotating piezoelectric energy harvester under variable rotating speeds," *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 47, no. 2, pp. 411-423, 2015.
- [35] X. Mei, S. Zhou, Z. Yang, T. Kaizuka, and K. Nakano, "A tri-stable energy harvester in rotational motion: Modeling, theoretical analyses and experiments," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 469, p. 115142, 2020.
- [36] S. Fang *et al.*, "Comprehensive theoretical and experimental investigation of the rotational impact energy harvester with the centrifugal softening effect," *Nonlinear Dynamics*, vol. 101, no. 1, pp. 123-152, 2020.
- [37] S. Fang, S. Wang, S. Zhou, Z. Yang, and W.-H. Liao, "Exploiting the advantages

- of the centrifugal softening effect in rotational impact energy harvesting," *Applied Physics Letters*, vol. 116, no. 6, p. 063903, 2020.
- [38] M. Febbo, S. P. Machado, C. D. Gatti, and J. M. Ramirez, "An out-of-plane rotational energy harvesting system for low frequency environments," *Energy conversion and management*, vol. 152, pp. 166-175, 2017.
- [39] R. Ramezanzpour, H. Nahvi, and S. Ziaei-Rad, "A vibration-based energy harvester suitable for low-frequency, high-amplitude environments: Theoretical and experimental investigations," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 27, no. 5, pp. 642-665, 2016.
- [40] Z. Xie, C. Kitio Kwuimy, Z. Wang, and W. Huang, "A piezoelectric energy harvester for broadband rotational excitation using buckled beam," *AIP Advances*, vol. 8, no. 1, p. 015125, 2018.
- [41] S. Sadeqi, S. Arzanpour, and K. H. Hajikolaie, "Broadening the frequency bandwidth of a tire-embedded piezoelectric-based energy harvesting system using coupled linear resonating structure," *IEEE/ASME transactions on mechatronics*, vol. 20, no. 5, pp. 2085-2094, 2014.
- [42] A. Erturk and D. J. Inman, "Issues in mathematical modeling of piezoelectric energy harvesters," *Smart Materials and Structures*, vol. 17, no. 6, p. 065016, 2008.
- [43] F. Standards Committee of the IEEE Ultrasonics and F. C. Society, "IEEE Standard on Piezoelectricity," ed: IEEE New York, 1987.
- [44] W.-J. Su and J. W. Zu, "Modeling of V-shaped beam-mass piezoelectric energy harvester: impact of the angle between the beams," in *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, 2012, vol. 45202: American Society of Mechanical Engineers, pp. 573-579.
- [45] O. A. Bauchau and J. I. Craig, *Structural analysis: with applications to aerospace structures*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [46] 黃奕傑, "雙自由度折返樑於旋轉式壓電能量採集之分析," 台灣大學機械工程研究所碩士論文, 2019.
- [47] F. J. Shaker, "Effect of axial load on mode shapes and frequencies of beams," in *National Aeronautics and Space Administration*, 1975.
- [48] M. A. C. F. Lima, "Rotating cantilever beams: Finite element modeling and vibration analysis," Ph.d, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica, 2012.
- [49] 劉紹增, "結合擋板的雙自由度非線性壓電能量採集器之設計與分析," 台灣大學機械工程研究所碩士論文, 2019.
- [50] G. Akoun and J.-P. Yonnet, "3D analytical calculation of the forces exerted between two cuboidal magnets," *IEEE Transactions on magnetics*, vol. 20, no.

5, pp. 1962-1964, 1984.

- [51] te.com. "DT SERIES ELEMENTS WITH LEAD ATTACHMENT."
<https://www.te.com/commerce/DocumentDelivery> (accessed.
- [52] K. J. Magnetics. "Magnet Calculator." <https://www.kjmagnetics.com/> (accessed.

