

國立臺灣大學工學院機械工程學系



碩士論文

Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis

平面連桿機構之模組化力學分析方法

A Modular Method for Force Analysis
of Planar Linkages

戴振哲

Cheng-Che Tai

指導教授：徐冠倫 博士

Advisor: Kuan-Lun Hsu, Ph.D.

中華民國 110 年 1 月

January, 2021



國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書

平面連桿機構之模組化力學分析方法
A Modular Method for Force Analysis of
Planar Linkages

本論文係戴振哲君 (r07522654) 在國立臺灣大學機械工程學系完成之碩士學位論文，於民國 110 年 1 月 28 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

徐冠倫

(簽名)

(指導教授)

陳羽薰

蘇序偶

陳冠辰

系主任

林瑞祥

(簽名)



誌謝



在經過了兩年的碩士研究生涯，在學術研究及報告呈現的能力皆有所成長，即使經過了重重困難，最後仍然完成碩士論文。

首先要感謝我的指導教授 徐冠倫教授，在老師用心的指導下，使我在學術知識、研究方法及教學方法都有所增長，老師也提供了產學合作的機會，使我能了解業界的需求與學術界不同之處，也讓我的報告呈現的能力進步許多，最後感謝老師對於我完成論文所提供的幫助。

接著感謝各位口試委員，蘇偉儒教授、陳冠辰教授以及陳羽薰教授，對於我的論文提供了許多想法與建議，並指出不適當之處，使我的論文更加完整。

再來要感謝實驗室的各位同學，施鐳、佳諭、健倫、智理、馥雄、柏妤、景翔、彥年、富升、玳媽，對於課業及研究上的困難，都能與你們互相討論學習。

同時也感謝國立台灣大學，以及在學校所遇到的老師及同學，感謝學校提供良好的環境及資源，也感謝老師的指教及同學的協助。

最後要感謝家人的支持及鼓勵，使我能夠順利且無後顧之憂地完成學業。



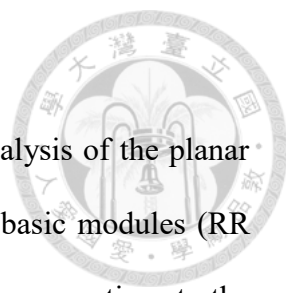
摘要

本文提出一模組化方法以分析平面連桿機構之力學分析，藉由建立以 Assur group 分類出的二連桿基礎模組(RR 機械手臂、PR 機械手臂、RP 機械手臂)的力學方程式，套用至各種連桿機構之力學分析，藉此處理各種平面連桿的靜力學與動力學問題。此模組化方法相較於傳統閉迴路法有以下優勢，其一為在處理多連桿力學問題時不須進行複雜的聯立方程式計算，只需重複套用三個基礎模組。其二為不須為每個不同的新機構重新推導力學方程式，可將新機構進行模組化拆解，將所需要的參數代入三種基礎模組之副函式，即可求解機構之力學分析。此外，本文提供一以力學的觀點進行機械誤差分析之方法。透過將機械誤差問題與力學分析結合，三種基礎模組的靜力平衡方程式可被運用於求解機構之誤差敏感度及機械誤差。

關鍵詞：模組化方法、平面連桿機構、力學分析、敏感度分析、機械誤差分析



Abstract



This thesis proposes a modular method to analyze the force analysis of the planar linkages, by establishing the equilibrium equations of the two-link basic modules (RR dyad, PR dyad, RP dyad) classified by Assur group, and applying these equations to the force analysis of various linkage mechanisms, so as to deal with the statics and dynamics problems of various planar linkages. Compared with the traditional closed-loop method, this modular method has the following advantages. One is that it does not need to perform complex simultaneous calculations when dealing with multi-link force problems. It and only needs to repeatedly apply three basic modules. The second is that it is not necessary to re-derive the equations for each different new mechanism. The new mechanism can be modularized and disassembled, and the required parameters can be substituted into the auxiliary functions of the three basic modules to solve the force analysis of the mechanism. In addition, this article provides a method for solving mechanical error analysis from a statics point of view. By combining mechanical error problems with force analysis, the static equilibrium equations of three basic modules can be used to evaluate the error sensitivity and the mechanical error of the mechanism.

Keywords: modular method, planar linkage, force analysis, sensitivity analysis, mechanical error analysis



目錄



口試委員會審定書	#
誌謝	i
摘要	iii
Abstract.....	v
目錄	vii
圖目錄	ix
表目錄	xii
符號說明	xiii
第一章 前言.....	1
1-1 概論	1
1-2 文獻回顧	2
1-3 研究目標	3
第二章 平面連桿機構之閉迴路分析	4
2-1 四連桿之閉迴路分析	4
2-2 平面四連桿之靜力學分析	7
2-3 滑件曲柄機構之靜力學分析	12
2-4 倒置滑件曲柄機構之靜力學分析	17
2-5 曲柄牛頭刨床機構之靜力學分析	22
第三章 平面連桿機構之模組化靜力學分析	28
3-1 模組化	28
3-2 模組化運動學分析	32
3-3 平面運動之二連桿 RR 機器手臂靜力學分析	41
3-4 平面運動之二連桿 PR 機器手臂靜力學分析	49
3-5 平面運動之二連桿 RP 機器手臂靜力學分析	55
3-6 曲柄牛頭刨床靜力學分析數值模擬範例	61
第四章 平面連桿機構之模組化靜力學誤差分析	64
4-1 機械誤差	64

4-2	機械誤差分析理論.....	65
4-3	以虛功法分析連桿機構之機械誤差.....	73
4-4	曲柄牛頭刨床之誤差分析數值模擬範例.....	82
第五章	平面連桿機構之模組化動力學分析.....	85
5-1	慣性力之等效偏移.....	85
5-2	平面四連桿動力學分析範例.....	86
5-3	滑件曲柄機構動力學分析範例.....	90
第六章	模組化求解力學分析之數值範例.....	94
6-1	六連桿位置及靜力學分析.....	94
6-2	九連桿型雙肘節鎖模機構之敏感度分析.....	98
6-3	Theo Jansen 步行機構動力學分析.....	104
第七章	結論.....	112
	參考文獻.....	114



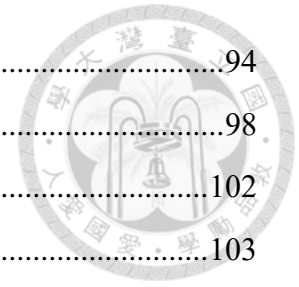
圖目錄



圖 2-1 平面四連桿機構.....	4
圖 2-2 平面四連桿機構自由體圖.....	7
圖 2-3 平面四連桿機構範例.....	9
圖 2-4 平面四連桿機構範例自由體圖.....	9
圖 2-5 滑件曲柄機構.....	12
圖 2-6 滑件曲柄機構自由體圖.....	13
圖 2-7 滑件曲柄機構範例.....	14
圖 2-8 滑件曲柄機構範例自由體圖.....	15
圖 2-9 倒置滑件曲柄機構.....	17
圖 2-10 倒置滑件曲柄機構自由體圖.....	18
圖 2-11 倒置滑件曲柄機構範例.....	20
圖 2-12 倒置滑件曲柄機構範例自由體圖.....	20
圖 2-13 曲柄牛頭刨床機構.....	22
圖 2-14 曲柄牛頭刨床機構自由體圖.....	23
圖 3-1 Assur group class 2 組合種類.....	29
圖 3-2 RR 雙連桿、RP 雙連桿與 PR 雙連桿模組.....	29
圖 3-3 曲柄牛頭刨床機構.....	30
圖 3-4 曲柄牛頭刨床機構模組化拆解.....	30
圖 3-5 Stephenson 六連桿機構.....	30
圖 3-6 Stephenson 六連桿機構模組化拆解.....	31
圖 3-7 Stephenson 六連桿機構模組化拆解(Assur group 3).....	31
圖 3-8 平面運動之二連桿 RR 機器手臂.....	32
圖 3-9 平面運動之二連桿 PR 機器手臂.....	35
圖 3-10 ψ 之兩種解 ψ_1 與 ψ_2	36
圖 3-11 平面運動之二連桿 RP 機器手臂.....	38
圖 3-12 受兩外力 P 與 Q 之平面運動二連桿 RR 機器手臂.....	41
圖 3-13 受兩外力 P 與 Q 之平面運動二連桿 RR 機器手臂之三種類型.....	43
圖 3-14 平面四連桿機構範例.....	46

圖 3-15 平面四連桿機構範例模組化拆解.....	47
圖 3-16 受兩外力 P 與 Q 之平面運動二連桿 PR 機器手臂.....	49
圖 3-17 受兩外力 P 與 Q 之平面運動二連桿 PR 機器手臂之三種類型.....	51
圖 3-18 滑件曲柄機構範例.....	53
圖 3-19 滑件曲柄機構範例模組化拆解.....	54
圖 3-20 受兩外力 P 與 Q 之平面運動之二連桿 RP 機器手臂.....	55
圖 3-21 受兩外力 P 與 Q 之平面運動二連桿 RP 機器手臂之三種類型.....	56
圖 3-22 倒置滑件曲柄機構範例.....	59
圖 3-23 倒置滑件曲柄機構範例模組化拆解.....	60
圖 3-24 曲柄牛頭刨床機構.....	61
圖 3-25 曲柄牛頭刨床機構模組化拆解.....	62
圖 4-1 平面四連桿機構.....	65
圖 4-2 滑件曲柄機構.....	69
圖 4-3 倒置滑件曲柄機構.....	71
圖 4-4 平面四連桿機構.....	74
圖 4-5 平面四連桿機構模組化拆解.....	74
圖 4-6 滑件曲柄機構.....	77
圖 4-7 滑件曲柄機構模組化拆解.....	77
圖 4-8 倒置滑件曲柄機構.....	79
圖 4-9 倒置滑件曲柄機構模組化拆解.....	79
圖 4-10 曲柄牛頭刨床機構.....	82
圖 4-11 曲柄牛頭刨床機構模組化拆解.....	83
圖 5-1 慣性力之等效偏移.....	86
圖 5-2 平面四連桿機構範例.....	87
圖 5-3 平面四連桿機構之模組化拆解.....	88
圖 5-4 平面四連桿機構慣性力等效偏移.....	88
圖 5-5 滑件曲柄機構範例.....	90
圖 5-6 滑件曲柄機構之模組化拆解.....	91
圖 5-7 滑件曲柄機構之慣性力等效偏移.....	92

圖 6-1 六連桿機構.....	94
圖 6-2 九連桿型雙肘節鎖模機構.....	98
圖 6-3 九連桿型雙肘節鎖模機構桿件敏感度.....	102
圖 6-4 九連桿型雙肘節鎖模機構桿件機械誤差.....	103
圖 6-5 Theo Jansen 步行機構.....	104
圖 6-6 Theo Jansen 模組化拆解.....	106
圖 6-7 Theo Jansen 步行機構慣性力等效偏移.....	108
圖 6-8 桿件 4 及桿件 3 組成的 RR 機械手臂之兩種受力情形.....	110



表目錄



表 2-1 四連桿機構範例之各項參數.....	10
表 2-2 滑件曲柄機構範例之各項數值.....	15
表 2-3 倒置滑件曲柄機構範例之各項參數.....	21
表 2-4 曲柄牛頭刨床機構之各項參數.....	26
表 3-1 平面四連桿機構範例之各項參數.....	47
表 3-2 滑件曲柄機構範例之各項參數.....	54
表 3-3 倒置滑件曲柄機構範例之各項參數.....	59
表 3-4 曲柄牛頭刨床之各項參數.....	61
表 4-1 曲柄牛頭刨床之各項參數.....	82
表 5-1 平面四連桿機構範例之各項參數.....	87
表 5-2 滑件曲柄機構範例之各項數值.....	90
表 6-1 六連桿之各項參數.....	95
表 6-2 九連桿型雙肘節鎖模機構之尺寸.....	99
表 6-3 九連桿型雙肘節鎖模機構之尺寸誤差.....	103
表 6-4 Theo Jansen 步行機構之各項參數.....	105
表 6-5 Li 與hi 之數值.....	108

符號說明



a_{Gi}	桿件 i 之質心加速度
a_i	桿件 i 之尺寸
Δa_i	桿件 i 之尺寸誤差
b	機械手臂桿件 1 長度
c	機械手臂桿件 2 長度
d	慣性力偏移距離
d_i	桿件 i 之慣性力偏移距離
F	滑件曲柄機構所受外力
F_e	機械手臂端接器之節點力
F_{Gi}	桿件 i 之質心所受到之慣性力
F_{ij}	桿件 i 對桿件 j 所施加之節點力
F_{ijn}	桿件 i 對桿件 j 所施加之節點力對於桿件 j 之法向分量
F_{ijt}	桿件 i 對桿件 j 所施加之節點力對於桿件 j 之切向分量
F_{ijx}	桿件 i 對桿件 j 所施加之節點力對於桿件 j 之 x 方向分量
F_{ijy}	桿件 i 對桿件 j 所施加之節點力對於桿件 j 之 y 方向分量
h	滑件曲柄機構桿件 3 受外力節點與桿件之垂直距離
h_i	桿件 i 受外力節點與桿件之垂直距離
I_{Gi}	桿件 i 對於其質心之轉動慣量
L	滑件曲柄機構桿件 3 受外力節點與滑件節點之距離
L_i	桿件 i 受外力之節點與前一節點沿桿件方向之距離
M	外力矩
m_i	桿件 i 之質量
N	地桿對滑件之正向力
P	施加於機械手臂之第二外力
Q	施加於機械手臂之第一外力
R	滑件曲柄機構桿件 3 之長度
R_i	桿件 i 之長度



ΔR_i	桿件 i 之長度誤差
r	導致滑件曲柄機構之桿件長度
r_{mi}	桿件轉軸至質心距離
s	滑件之衝程
s_i	桿件 i 之敏感度
T	滑件曲柄機構桿件 3 所受之力矩
T_i	桿件 i 所受之力矩
T_{Gi}	桿件 i 之質心所受之力矩
x_A	A 點之 x 座標
y_A	A 點之 y 座標
Δy	輸出誤差
α	角加速度
α_i	桿件 i 之角加速度
β	桿件幾何尺寸之夾角
γ	桿件幾何尺寸之夾角
ϵ_i	桿件 i 對輸出所造成的誤差
ϵ_m	總輸出誤差
θ	滑件曲柄機構桿件 3 之角度
θ_i	桿件 i 之角度
θ_F	外力 F 之角度
θ_{Fe}	節點力 F_e 之角度
θ_P	外力 P 之角度
θ_Q	外力 Q 之角度
$\Delta\theta_i$	桿件 i 之角度誤差
ϕ	機械手臂之第一桿件轉角
ψ	機械手臂之第二桿件轉角
ω_i	桿件 i 之角速度

第一章 前言



1-1 概論

機構為組成機器的必要單元，是用來傳遞運動和力量的機械裝置，通常可分為三大類，連桿、凸輪和齒輪機構。其中連桿機構為皆由連桿元件所組合成的機構系統，主要功能為運動型態與方向的轉換、運動狀態（位置、速度、加速度）的對應、剛體位置導引、運動路徑生成，連桿機構在工程上的應用不勝枚舉，其優點為構造簡單、製造容易且成本低廉。

在機構的分析中，力學分析佔據很重要的一部分，首先可以透過運動學分析獲得各桿件之位置、速度與加速度。接著可以根據得到的位置進行靜力學分析，再根據速度及加速度以及桿件之慣性力得到動力學分析。力學分析能得到桿件之受力，分析各桿件所受的力是否低於桿件所能承受之最大值，此為安全性問題。藉由分析各個節點所受的力，可計算出連桿機構對地所產生的搖撼力，藉以平衡機構。對於低速機械，因慣性力小可忽略不計，因此視為靜力學問題，而高速及重型機械因為計算時需包含慣性力，因此視為動力學問題。

此外，在製造連桿機構時，因受機器之振動、材料之變異、刀具之磨耗、溫度之變化、人員之技術等因素，在尺度上很難絕對準確，因此桿件的尺寸會存在尺寸誤差。透過虛功定理可將力學分析所得到的結果轉化為敏感度分析，而透過敏感度分析則可了解各尺寸誤差對機械誤差的影響程度，選擇對機械誤差影響程度較大的桿件尺寸進行更精確的加工，可更有效降低機械誤差。



1-2 文獻回顧

為處理機構之力學分析問題，Freudenstein 首先於 1955 年提出分析四連桿位置之向量迴路法[1]，在此後推廣至速度及加速度分析。Hartenberg 與 Denavit 利用此向量迴路法的概念推導了四連桿之機械誤差分析[2]，接著 Mohan 與 Sandor 將此閉迴路法延伸至齒輪機構[3]，Sandor 等人則使用了虛數法推導齒輪機構[4]，此後閉迴路法與虛數法廣泛利用於連桿機構之運動學分析，例如：五連桿[5-7]、六連桿[8-12]甚至到八連桿運動學分析[13]。此外 Sandor 也將虛數法一般化[14]，使其能適用於各種機構，Suh 與 Radcliffe[15, 16]提出了位移矩陣法以求解平面連桿機構之運動學問題，Midha 與 Zhao[17]以及 Simpson 等人[18]則將向量迴路法一般化。

在解決運動學分析的問題後，Smith 與 Maunder 使用了閉迴路法推導出四連桿的力學分析[19]，後續也出現各種類型之四連桿的力學分析[20-26]，Berkof[27]、Elliott 與 Tesar[28]則繼續推導出四連桿機構之力矩、搖撼力及平衡問題。Huang 與 Roth[29, 30]沿用了閉迴路法以推導閉迴路連桿機構之力學分析。在奠定力學分析的基礎後，六連桿力學分析[31, 32]，甚至較複雜的多連桿機構[33-36]與 Jansen 步行機構力學分析[37, 38]都相繼被解決，甚至被利用於平衡機構[39, 40]。由於使用閉迴路法分析多連桿機構計算非常複雜，電腦輔助求解的方法也被提出[41-44]。

除閉迴路法外，Abhary[45]提出一將連桿機構拆解為單獨桿件分析之方法，但不同機構所需使用的拆解方法不同，且不一定適用。為了系統化的拆解連桿機構，李與戴[46]利用了 Assur[47]所提出的 Assur group 將連桿機構的拆解進行系統化的分類，利用 Assur group 分析連桿的方法也相繼出現[48-51]。



1-3 研究目標

根據 1-2 節的文獻回顧，力學分析的方法大多為閉迴路法及其延伸，閉迴路法雖可適用於多種連桿機構分析，但每次分析需為每個不同的新連桿機構重新建立一整套數學模型，且計算量非常龐大且複雜，處理多連桿問題時多半需要電腦輔助求解。此外文獻回顧中也有其他力學分析方法，但都是針對一種連桿機構所提出的方法。因此本論文的研究目標為建立一套較有系統的模組化力學分析方法，適用於各種平面機構，且只需重複套用不同模組即可求解其力學分析，不須為每個機構重新推導一次力學方程式。

過去的文獻多為分析四連桿為主，近年來才出現五連桿、六連桿與八連桿之力學分析，但幾乎僅止於八連桿，且分析方法與數學計算皆較為複雜，顯示其研究的困難度。因此本文期望以模組化方法解決此問題，藉由建立簡單的基礎模組之數學模型，再將其重複套用，即可求解連桿機構之力學分析，還可藉由電腦輔助以副函式的方式演算以減少計算時間。

此外，Armilotta [52]提出一以虛功定理將機械誤差問題轉化為力學分析問題之方法。本論文將其基本原理與本論文所提出的模組化方法做結合，提出一以力學分析模組化方法求解敏感度問題之方法。

以下第二章將先介紹目前廣為使用的閉迴路法，接著第三章將建立三個基礎模型的數學模型，並演示如何套用於力學分析問題。第四章將力學分析問題與敏感度問題做連結，並以模組化方式求解。第五章則將第三章所推導的靜力學基礎模型的應用推廣至動力學。第六章將以本論文提出的模組化方法分析多連桿機構之力學分析及敏感度分析，第七章為總結，以上為本論文之架構。

第二章 平面連桿機構之閉迴路分析



2-1 四連桿之閉迴路分析

閉迴路法(Loop closure method)，又稱向量迴路法(Vector loop method)最早是由 Freudenstein[1]所提出。閉迴路法為先將連桿機構分拆為各個單獨的桿件自由體圖，將各桿件表示為桿件起點指向桿件終點之向量。利用向量封閉迴路的特性，可列出 x 、 y 方向分量的聯立方程式，最後求出特定点之位置座標。

圖 2-1 為一平面四連桿，其中桿 1 稱為固定桿，長度為 R_1 ，為固定於機架上之桿件。桿 2 為機構中的輸入桿，長度為 R_2 ，桿 4 為機構中的輸出桿，長度為 R_4 。桿 3 為連接輸入桿與輸出桿之桿件，稱為耦桿，長度為 R_3 。 θ_2 為輸入角， θ_3 為桿 3 與桿 1 之夾角， θ_4 為輸出角。

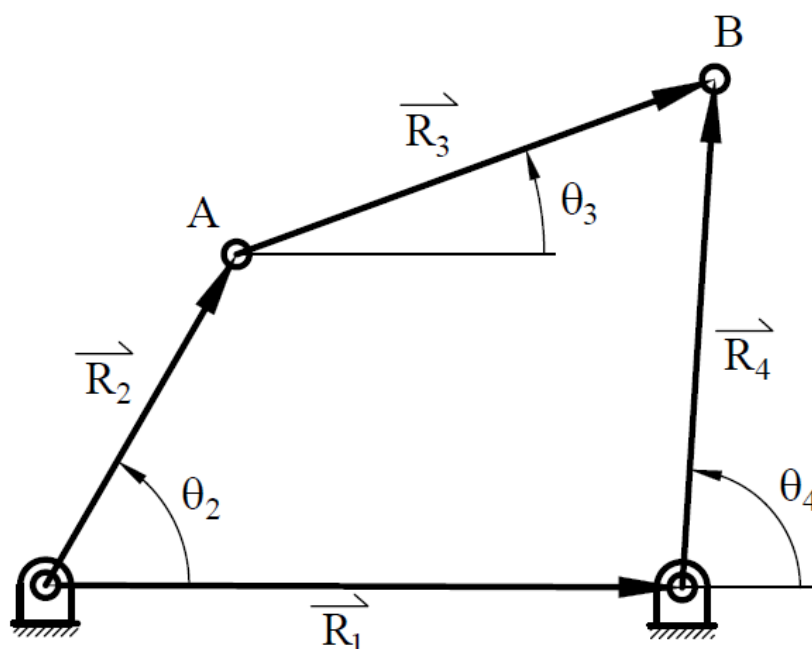


圖 2-1 平面四連桿機構



2-1-1 四連桿之位置、速度、加速度分析

圖 2-1 為一平面四連桿，將桿件以向量形式表示，形成一封閉迴路。根據封閉迴路之特性，可得 $\vec{R}_2 + \vec{R}_3 = \vec{R}_1 + \vec{R}_4$ 並列出其 X 方向分量及 Y 方向分量之方程式

$$R_2 \cos \theta_2 + R_3 \cos \theta_3 = R_1 + R_4 \cos \theta_4 \quad (2-1)$$

$$R_2 \sin \theta_2 + R_3 \sin \theta_3 = R_4 \sin \theta_4 \quad (2-2)$$

在已知各桿長 R_i 及輸入角 θ_2 之條件下，可將上二式聯立求解 θ_3 與 θ_4 。

$$\theta_3 = \cos^{-1} \left[\frac{ab}{d} \pm \sqrt{\left(\frac{ab}{d}\right)^2 - \frac{(b^2 - c^2)}{d^2}} \right] \quad (2-3)$$

$$\theta_4 = \cos^{-1} \left[\frac{(R_2 \cos \theta_2 + R_3 \cos \theta_3 - R_1)}{R_4} \right] \quad (2-4)$$

其中

$$a = 2R_3(R_2 \cos \theta_2 - R_1) \quad (2-5)$$

$$b = R_4^2 - R_1^2 - R_2^2 - R_3^2 + 2R_1R_2 \cos \theta_2 \quad (2-6)$$

$$c = 2R_2R_3 \sin \theta_2 \quad (2-7)$$

$$d = \sqrt{a^2 + c^2} \quad (2-8)$$

在各桿長及角度皆為已知的條件下，可列出四連桿各個接點之位置。

$$A = (R_2 \cos \theta_2, R_2 \sin \theta_2) \quad (2-9)$$

$$B = (R_2 \cos \theta_2 + R_3 \cos \theta_3, R_2 \sin \theta_2 + R_3 \sin \theta_3) \quad (2-10)$$

將(2-1)式與(2-2)式對時間進行微分，可得

$$R_2 \omega_2 \sin \theta_2 + R_3 \omega_3 \sin \theta_3 = R_4 \omega_4 \sin \theta_4 \quad (2-11)$$

$$R_2 \omega_2 \cos \theta_2 + R_3 \omega_3 \cos \theta_3 = R_4 \omega_4 \cos \theta_4 \quad (2-12)$$

將上二式聯立，在各桿長 R_i 、角度 θ_i 及輸入桿角速度 ω_2 已知的條件下，可求得桿

3 及桿 4 之角速度 ω_3 與 ω_4 。利用各桿長及角速度即可求得各個接點之速度。

$$\omega_3 = -\frac{\omega_2[R_2 \sin(\theta_2 - \theta_4)]}{[R_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)]} \quad (2-13)$$

$$\omega_4 = -\frac{\omega_2[R_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)]}{[R_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)]} \quad (2-14)$$

將(2-5)式、(2-6)式再對時間進行微分，可得

$$\begin{aligned} R_2 \omega_2^2 \cos\theta_2 + R_2 \alpha_2 \sin\theta_2 + R_3 \omega_3^2 \cos\theta_3 + R_3 \alpha_3 \sin\theta_3 \\ = R_4 \omega_4^2 \cos\theta_4 + R_4 \alpha_4 \sin\theta_4 \end{aligned} \quad (2-15)$$

$$\begin{aligned} -R_2 \omega_2^2 \sin\theta_2 + R_2 \alpha_2 \cos\theta_2 - R_3 \omega_3^2 \sin\theta_3 + R_3 \alpha_3 \cos\theta_3 \\ = -R_4 \omega_4^2 \sin\theta_4 + R_4 \alpha_4 \cos\theta_4 \end{aligned} \quad (2-16)$$

將上二式聯立，在各桿長 R_i 、角度 θ_i 、角速度 ω_i 及輸入桿角加速度 α_2 已知的條件下，可求得桿 3 及桿 4 之角加速度 α_3 與 α_4 。利用各桿長及角加速度即可求得各個接點之加速度。

$$\alpha_3 = \left(\frac{\omega_3}{\omega_2}\right) \alpha_2 - \frac{[\omega_2^2 R_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) + \omega_3^2 R_3 \cos(\theta_3 - \theta_4) - \omega_4^2 R_4]}{R_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (2-17)$$

$$\alpha_4 = \left(\frac{\omega_4}{\omega_2}\right) \alpha_2 - \frac{[\omega_2^2 R_2 \cos(\theta_2 - \theta_3) + \omega_4^2 R_4 \cos(\theta_3 - \theta_4) - \omega_3^2 R_3]}{R_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (2-18)$$



2-2 平面四連桿之靜力學分析

本節將說明如何以閉迴路法求解四連桿之靜力學分析

圖 2-2 為一平面四連桿機構之自由體圖，其中 F_{ij} 表示桿件 i 對桿件 j 所施加之內力，將其分為 x 方向分量及 y 方向分量，表示為 F_{ijx} 、 F_{ijy} 。根據節點力平衡可得 $F_{ijx} = -F_{jix}$ 、 $F_{ijy} = -F_{jiy}$ ，其中 $i、j = 1、2、3、4$ 。根據自由體圖及力學平衡的觀念，可列出各個桿件之平衡方程式。

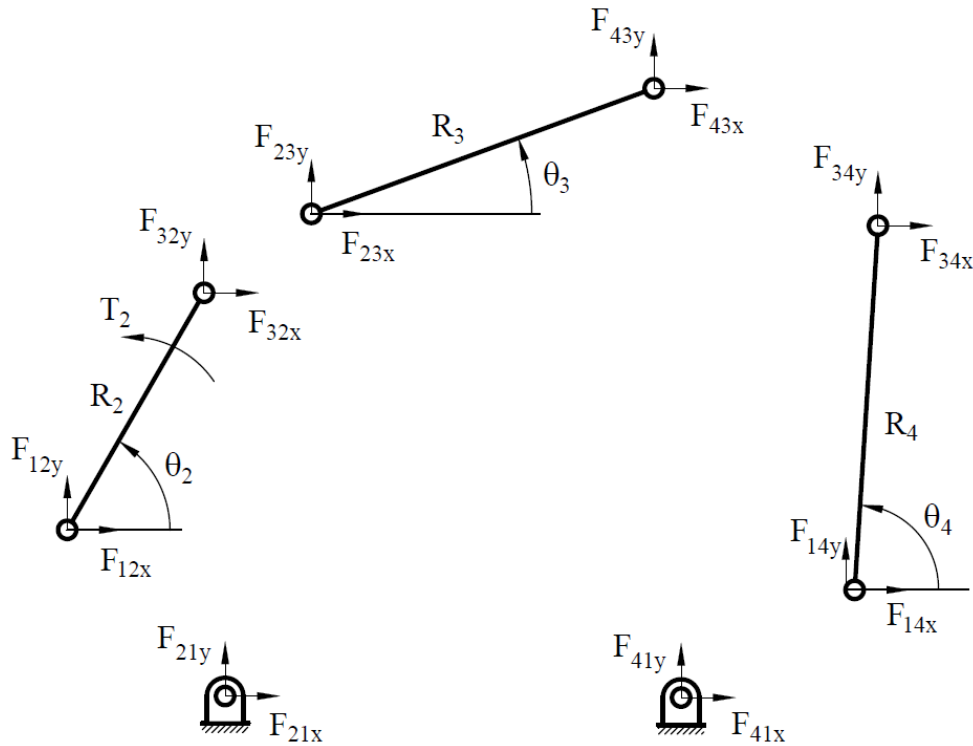


圖 2-2 平面四連桿機構自由體圖

對桿件 2 而言，平衡方程式可寫成：

$$F_{12x} + F_{32x} = 0 \quad (2-19)$$

$$F_{12y} + F_{32y} = 0 \quad (2-20)$$

$$F_{32x}R_2\sin\theta_2 - F_{32y}R_2\cos\theta_2 - T_2 = 0 \quad (2-21)$$



桿件 3 的平衡方程式可寫成：

$$F_{23x} + F_{43x} = 0 \quad (2-22)$$

$$F_{23y} + F_{43y} = 0 \quad (2-23)$$

$$F_{43x}R_3\sin\theta_3 - F_{43y}R_3\cos\theta_3 = 0 \quad (2-24)$$

桿件 4 的平衡方程式可寫成：

$$F_{14x} + F_{34x} = 0 \quad (2-25)$$

$$F_{14y} + F_{34y} = 0 \quad (2-26)$$

$$F_{34x}R_4\sin\theta_4 - F_{34y}R_4\cos\theta_4 = 0 \quad (2-27)$$

將以上九條方程式同時聯立，即可求解 F_{12x} 、 F_{12y} 、 F_{23x} 、 F_{23y} 、 F_{34x} 、 F_{34y} 、 F_{14x} 、 F_{14y} 與 T_2 。以上方程式聯立後可以以矩陣表示為

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_4\sin\theta_4 & -R_4\cos\theta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_3\sin\theta_3 & R_3\cos\theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_2\sin\theta_2 & -R_2\cos\theta_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{14x} \\ F_{14y} \\ F_{34x} \\ F_{34y} \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{12x} \\ F_{12y} \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-28)$$

2-2-1 數值模擬範例

本節將以一數值範例展示閉迴路法求解平面四連桿之靜力學分析。

圖 2-3 與圖 2-4 為一平面四連桿機構及其自由體圖，其中 $F_{ijx} = -F_{jix}$ 、 $F_{ijy} = -F_{jiy}$ ， $i, j = 1, 2, 3, 4$ 。桿件 3 與桿件 4 分別受到 100 N 及 200N 之外力，欲求各桿件接點之受力及為達力平衡，桿件 2 所需要提供之扭矩 T_2 ，各尺寸參數如表 2-1。

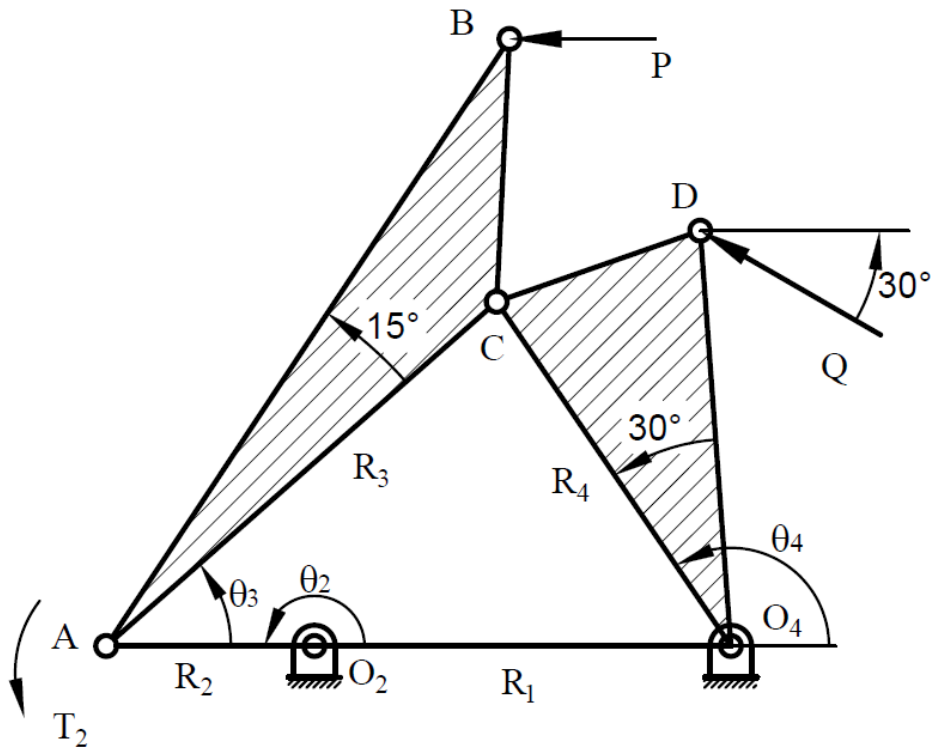


圖 2-3 平面四連桿機構範例

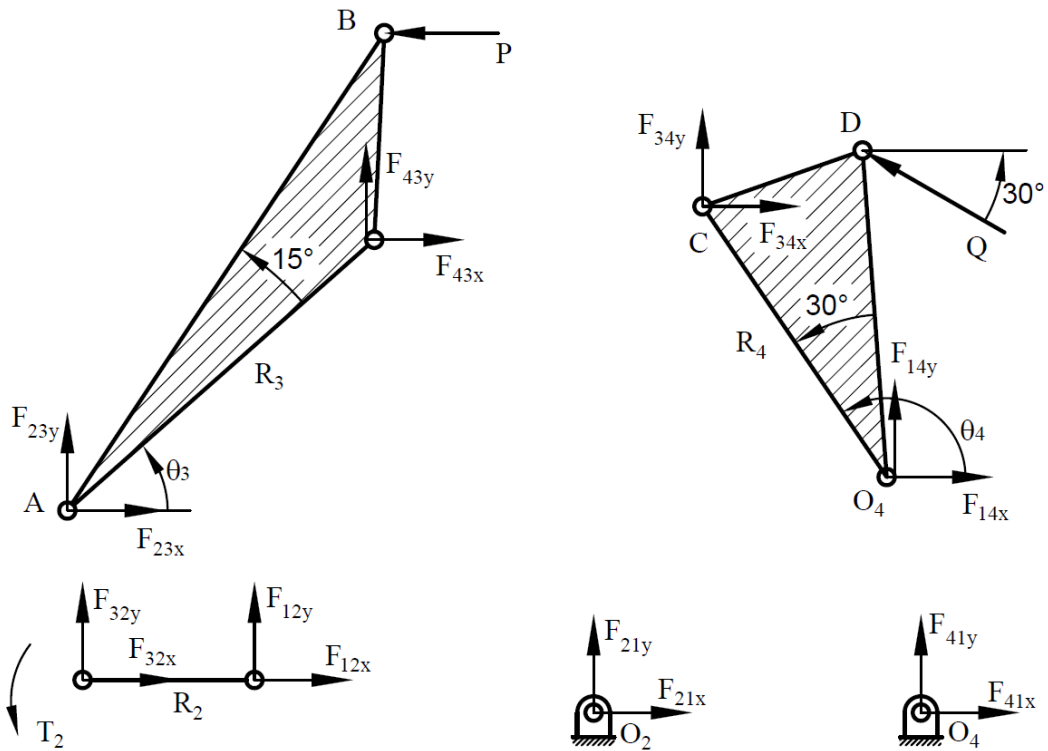


圖 2-4 平面四連桿機構範例自由體圖

表 2-1 四連桿機構範例之各項參數

符號	數值(單位)	符號	數值(單位)
P	100 N	θ_P	180°
Q	200 N	θ_Q	150°
R ₁	8 m	θ_2	180°
R ₂	4 m	θ_3	41.4096°
R ₃	10 m	θ_4	124.2289°
R ₄	8 m	O ₄ D	8 m
AB	14 m		

首先列出各桿件之平衡方程式，對桿件 2 而言，平衡方程式可寫成：

$$F_{12x} + F_{32x} = 0$$

$$F_{12y} + F_{32y} = 0$$

$$F_{32x}R_2\sin\theta_2 - F_{32y}R_2\cos\theta_2 - T_{12} = 0$$

桿件 3 的平衡方程式可寫成：

$$F_{23x} + F_{43x} = 100$$

$$F_{23y} + F_{43y} = 0$$

$$F_{43x}R_3\sin\theta_3 - F_{43y}R_3\cos\theta_3 = 100 \times 14\sin56.4096^\circ$$

桿件 4 的平衡方程式可寫成：

$$F_{14x} + F_{34x} = 200\cos30^\circ$$

$$F_{14y} + F_{34y} = -200\sin30^\circ$$

$$F_{34x}R_4\sin\theta_4 - F_{34y}R_4\cos\theta_4 = 200 \times 8\sin55.7711^\circ$$

將其列為矩陣，並利用 MATLAB 帶入數值求解



$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 6.6144 & 4.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -6.6144 & 7.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 F_{14x} \\
 F_{14y} \\
 F_{34x} \\
 F_{34y} \\
 F_{23x} \\
 F_{23y} \\
 F_{12x} \\
 F_{12y} \\
 T_{12}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 173.2 \\
 -100 \\
 1322.9 \\
 100 \\
 0 \\
 1166.2 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

可得

$$\begin{bmatrix}
 F_{14x} \\
 F_{14y} \\
 F_{34x} \\
 F_{34y} \\
 F_{23x} \\
 F_{23y} \\
 F_{12x} \\
 F_{12y} \\
 T_{12}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 114.324\text{N} \\
 -307.424\text{N} \\
 58.882\text{N} \\
 207.424\text{N} \\
 158.882\text{N} \\
 207.424\text{N} \\
 158.882\text{N} \\
 207.424\text{N} \\
 -829.698\text{N} \cdot \text{m}
 \end{bmatrix}$$



2-3 滑件曲柄機構之靜力學分析

圖 2-5 為一滑件曲柄機構，其中桿 2 為輸入桿，用以驅動滑件曲柄機構之桿件，其長度為 R_2 ，點 B 為一沿水平線運動之滑件，桿 3 為同時與桿 2 和滑件 B 鄰接之桿件，其長度為 R_3 ，滑件 B 與 X 軸之偏位量為 R_4 ， θ_2 為桿 2 與 X 軸之夾角，為輸入角， θ_3 為桿件 3 與 X 軸之夾角， s 為滑件 B 之衝程，為輸出變數。

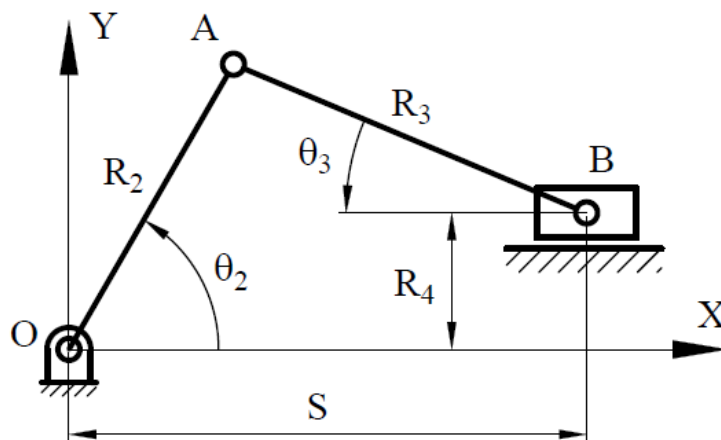


圖 2-5 滑件曲柄機構

2-3-1 滑件曲柄之靜力學分析

圖 2-6 為滑件曲柄機構之自由體圖，其中 F_{ij} 表示桿件 i 對桿件 j 所施加之內力，將其分為 x 方向分量及 y 方向分量，表示為 F_{ijx} 、 F_{ijy} 。根據節點力平衡可得 $F_{ijx} = -F_{jix}$ 、 $F_{ijy} = -F_{jiy}$ ，其中 $i, j = 1, 2, 3, 4$ 。根據圖 2-6 之自由體圖及力學平衡的條件，可列出各個桿件的平衡方程式，假設滑件受一水平方向力 F 。

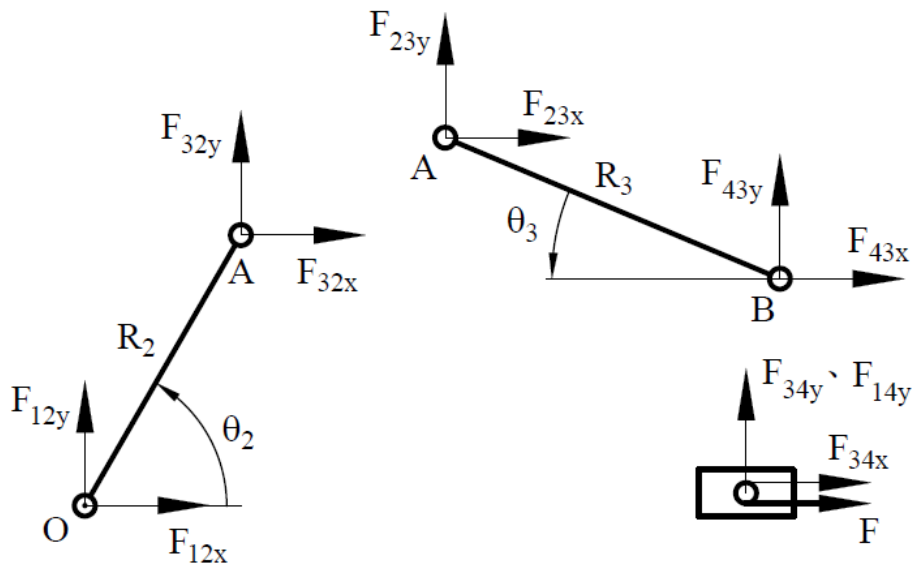


圖 2-6 滑件曲柄機構自由體圖

桿件 2 的平衡方程式可以表示為：

$$F_{12x} + F_{32x} = 0 \quad (2-29)$$

$$F_{12y} + F_{32y} = 0 \quad (2-30)$$

$$F_{32x}R_2\sin\theta_2 - F_{32y}R_2\cos\theta_2 - T_2 = 0 \quad (2-31)$$

桿件 3 的平衡方程式可以表示為：

$$F_{23x} + F_{43x} = 0 \quad (2-32)$$

$$F_{23y} + F_{43y} = 0 \quad (2-33)$$

$$F_{43x}R_3\sin\theta_3 + F_{43y}R_3\cos\theta_3 = 0 \quad (2-34)$$

滑件 4 的平衡方程式可以表示為，其中 F 為滑件受得水平外力：

$$F_{34x} + F = 0 \quad (2-35)$$

$$F_{14y} + F_{34y} = 0 \quad (2-36)$$

將以上八條方程式同時聯立，即可求解 F_{12x} 、 F_{12y} 、 F_{23x} 、 F_{23y} 、 F_{34x} 、 F_{34y} 、 F_{14y} 、 T_2 。以上方程式可以以矩陣表示為

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_3 \sin \theta_3 & R_3 \cos \theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_2 \sin \theta_2 & -R_2 \cos \theta_2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{14y} \\ F_{34x} \\ F_{34y} \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{12x} \\ F_{12y} \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-37)$$

此即為閉迴路求解平面滑件曲柄機構之靜力學。

2-3-2 數值模擬範例

本節將以一數值範例展示閉迴路法求解平面滑件曲柄機構之靜力學分析。

圖 2-7、圖 2-8 為一滑件曲柄機構及其自由體圖，其中 $F_{ijx} = -F_{jix}$ 、 $F_{ijy} = -F_{jiy}$ ， $i、j = 1、2、3、4$ 。滑件受一水平方向之力 F ，大小為 200N 。欲求各桿件接點之受力，以及為達靜力平衡桿 2 所需之扭矩 T_2 ，各尺寸參數如表 2-2。

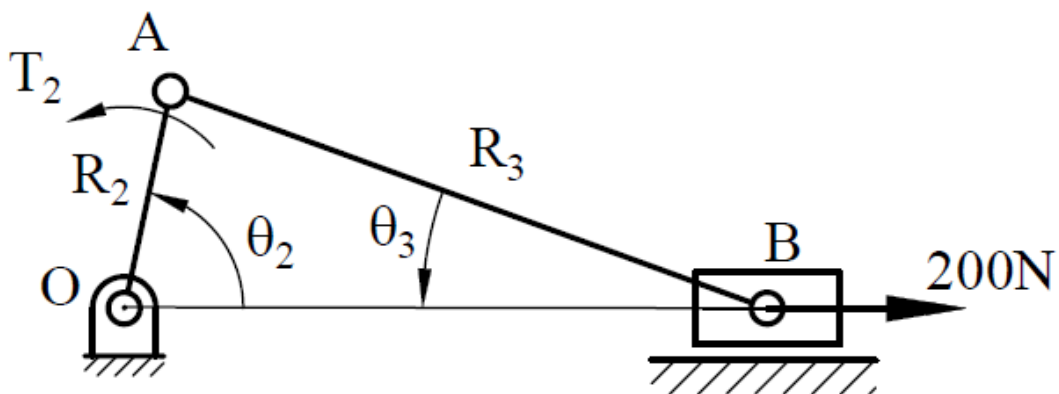


圖 2-7 滑件曲柄機構範例

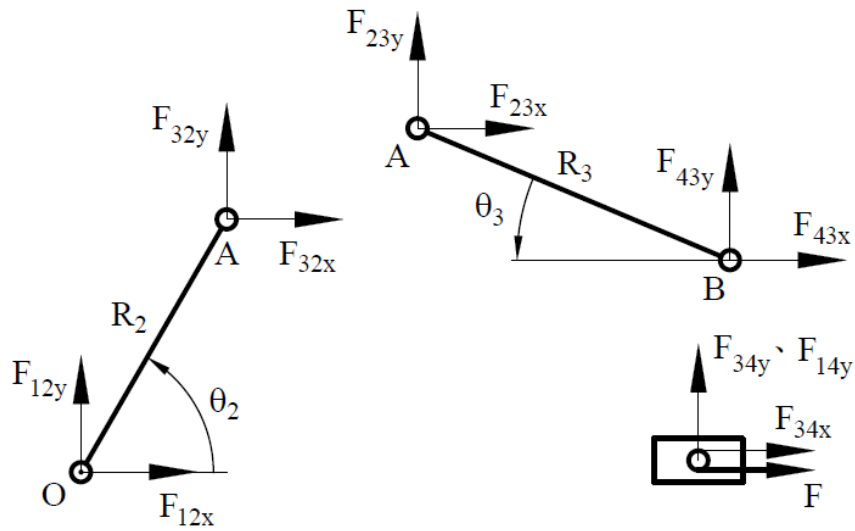


圖 2-8 滑件曲柄機構範例自由體圖

表 2-2 滑件曲柄機構範例之各項數值

符號	數值(單位)	符號	數值(單位)
R_2	2.8 m	θ_2	78.1149°
R_3	8 m	θ_3	19.9052°

桿件 2 的平衡方程式可以表示為：

$$F_{12x} + F_{32x} = 0$$

$$F_{32y} + F_{23y} = 0$$

$$F_{23x}R_2 \sin\theta_2 - F_{23y}R_2 \cos\theta_2 - T_2 = 0$$

桿件 3 的平衡方程式可以表示為：

$$F_{23x} + F_{43x} = 0$$

$$F_{23y} + F_{43y} = 0$$

$$F_{43x}R_3 \sin\theta_3 + F_{43y}R_3 \cos\theta_3 = 0$$



滑件 4 的平衡方程式可以表示為：

$$F_{34x} = -200$$

$$F_{14y} + F_{34y} = 0$$

將其列為矩陣，以 MATLAB 代入數值求解

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.7237 & 7.5221 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.7400 & -0.5767 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{14y} \\ F_{34x} \\ F_{34y} \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{12x} \\ F_{12y} \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可得

$$\begin{bmatrix} F_{14y} \\ F_{34x} \\ F_{34y} \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{12x} \\ F_{12y} \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -72.42\text{N} \\ -200\text{N} \\ 72.42\text{N} \\ -200\text{N} \\ 72.42\text{N} \\ -200\text{N} \\ 72.42\text{N} \\ 589.756\text{N} \cdot \text{m} \end{bmatrix}$$



2-4 倒置滑件曲柄機構之靜力學分析

圖 2-9 為一同樣帶有滑件之機構，其對應之運動鏈與圖 2-7 滑件曲柄機構之滑件曲柄機構相同，但固定桿為不同桿件，兩機構互為倒置機構，故稱為倒置滑件曲柄機構。其中桿 1 稱為固定桿，為固定於機架上之桿件，其長度為 R_1 ，桿 2 稱為輸入桿，為驅動倒置滑件曲柄機構之桿件，其長度為 R_2 ，桿 4 為受輸入桿影響而致動之桿件，稱為輸出桿，點 B 為一沿輸出桿運動之滑件， R_4 為滑件之衝程， θ_2 為桿件 2 與桿件 1 之夾角，稱為輸入角， θ_4 為桿件 4 與桿件 1 之夾角，稱為輸出角。

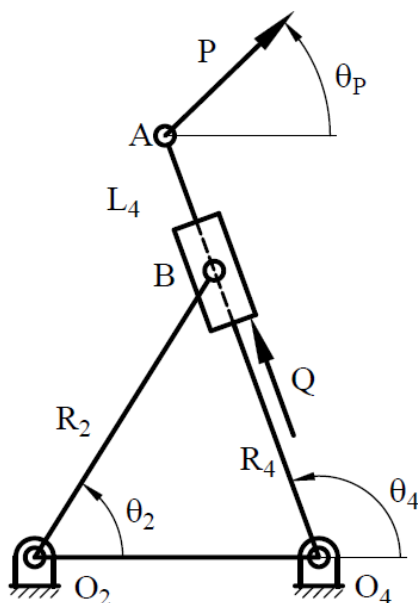


圖 2-9 倒置滑件曲柄機構

2-4-1 倒置滑件曲柄之靜力學分析

圖 2-10 為倒置滑件曲柄機構自由體圖。其中 F_{ij} 表示桿件 i 對桿件 j 所施加之內力，將其分為 x 方向分量及 y 方向分量，表示為 F_{ijx} 、 F_{ijy} 。根據節點力平衡可得 $F_{ijx} = -F_{jix}$ 、 $F_{ijy} = -F_{jiy}$ ， $i, j = 1, 2, 3, 4$ 。根據自由體圖及力學平衡，可列出各個桿件之平衡方程式。

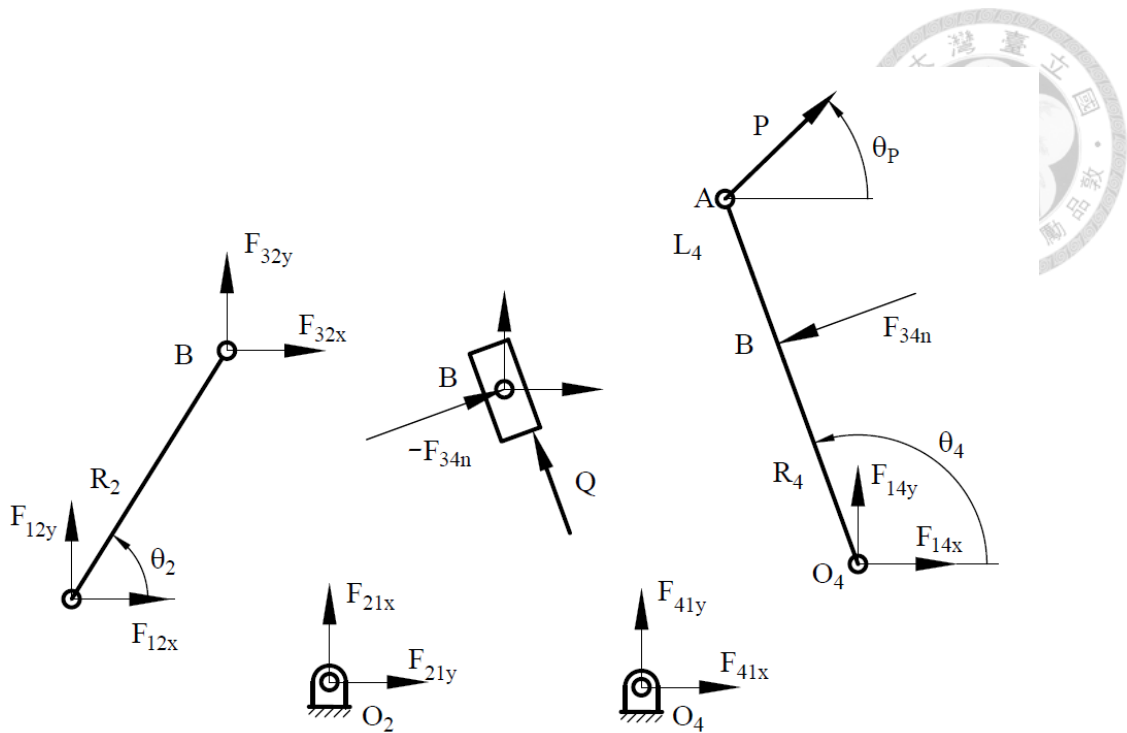


圖 2-10 倒置滑件曲柄機構自由體圖

桿件 2 的平衡方程式可以表示為：

$$F_{12x} + F_{32x} = 0 \quad (2-38)$$

$$F_{12y} + F_{32y} = 0 \quad (2-39)$$

$$F_{32x}R_2 \sin\theta_2 - F_{32y}R_2 \cos\theta_2 - T_2 = 0 \quad (2-40)$$

桿件 3 的平衡方程式可以表示為：

$$F_{23x} + F_{34n} \cos(\theta_4 - 90^\circ) = -Q \cos\theta_4 \quad (2-41)$$

$$F_{23y} + F_{34n} \sin(\theta_4 - 90^\circ) = -Q \sin\theta_4 \quad (2-42)$$

$$T_3 = 0 \quad (2-43)$$

桿件 4 的平衡方程式可以表示為：

$$F_{14x} + F_{34n} \cos(\theta_4 + 90^\circ) = -P \cos\theta_P \quad (2-44)$$

$$F_{14y} + F_{34n} \sin(\theta_4 + 90^\circ) = -P \sin\theta_P \quad (2-45)$$

$$F_{34n}R_4 + T_3 = P \sin(\theta_4 - \theta_P)L_4 \quad (2-46)$$



將以上九條方程式同時聯立，即可求解 F_{12x} 、 F_{12y} 、 F_{23x} 、 F_{23y} 、 F_{34n} 、 T_3 、 F_{14x} 、 F_{14y} 、 T_{12} 。此即為閉迴路求解倒置滑件曲柄機構之靜力學。以上方程式聯立後可以以矩陣表示為：

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -R_2 \sin \theta_2 & R_2 \cos \theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & +\sin \theta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -\cos \theta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta_4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta_4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & R_4 & 1 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 F_{12x} \\
 F_{12y} \\
 F_{23x} \\
 F_{23y} \\
 F_{34n} \\
 T_3 \\
 F_{14x} \\
 F_{14y} \\
 T_2
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 -Q \cos \theta_4 \\
 -Q \sin \theta_4 \\
 0 \\
 -P \cos \theta_P \\
 -P \sin \theta_P \\
 P \sin(\theta_A) L_4
 \end{bmatrix}$$

(2-47)

其中 $\theta_A = \theta_4 - \theta_P$



2-4-2 數值模擬範例

圖 2-11 為一受到兩外力 P 、 Q 之倒置滑件曲柄機構。其中各項數值如表 2-3，

圖 2-12 為圖 2-11 中機構之自由體圖。

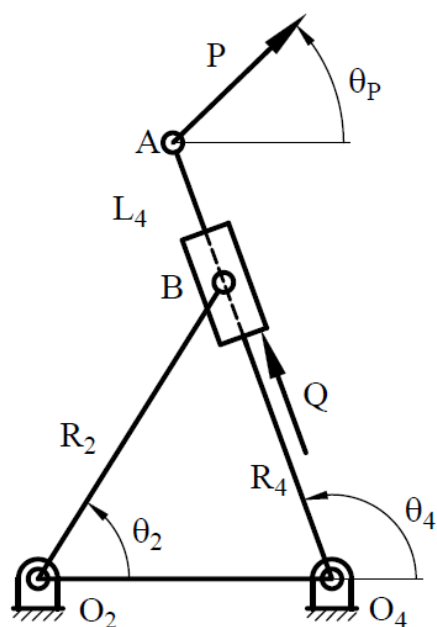


圖 2-11 倒置滑件曲柄機構範例

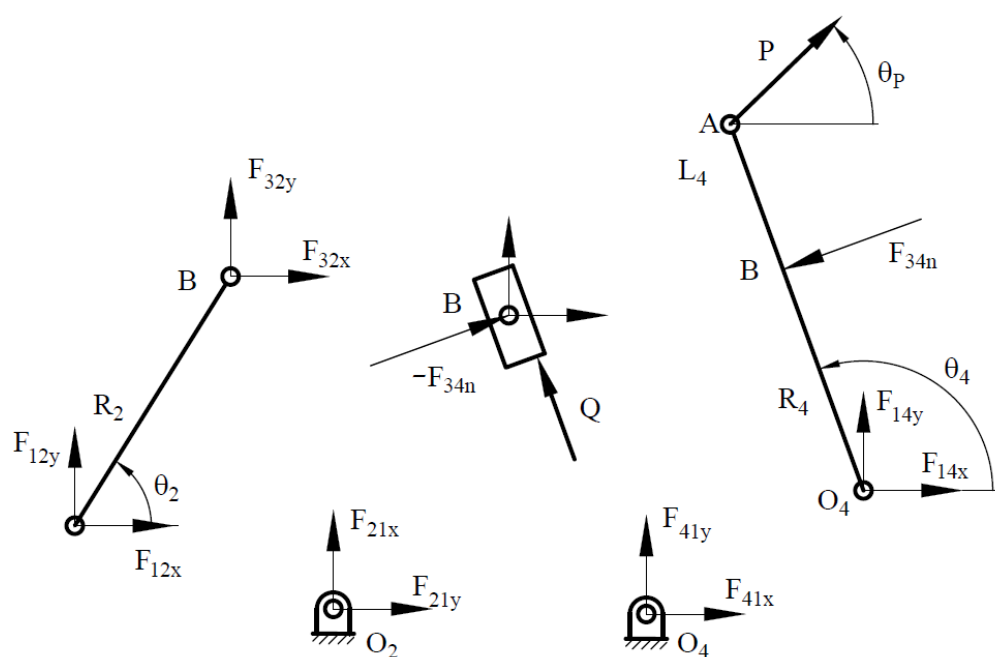


圖 2-12 倒置滑件曲柄機構範例自由體圖

表 2-3 倒置滑件曲柄機構範例之各項參數

符號	數值(單位)	符號	數值(單位)
P	100 N	L ₄	10 m
Q	200 N	θ ₂	51.5431°
R ₂	6 m	θ ₄	70°
R ₄	5 m	θ _p	30°

將各項參數代入(2-47)式後得：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.6985 & -3.7316 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.9397 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.3420 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9397 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3420 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{12x} \\ F_{12y} \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{34n} \\ T_3 \\ F_{14x} \\ F_{14y} \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -68.404 \\ -187.939 \\ 0 \\ -86.603 \\ -50 \\ -642.788 \end{bmatrix}$$

最後可將錯誤! 找不到參照來源。)式利用 MATLAB 進行矩陣運算解出

$$\begin{bmatrix} F_{12x} \\ F_{12y} \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{34n} \\ T_3 \\ F_{14x} \\ F_{14y} \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -189.209N \\ -143.969N \\ -189.209N \\ -143.969N \\ 128.558N \\ 0 \\ 34.202N \\ -93.969N \\ -351.759N \cdot m \end{bmatrix}$$



2-5 曲柄牛頭刨床機構之靜力學分析

圖 2-13 為一六連桿之曲柄牛頭刨床機構，其中固定樞軸 O_2 和固定樞軸 O_4 的距離為 R_1 ，桿 2 為輸入桿，用以接受動力源驅動機構之桿件，其長度為 R_2 ，桿 4 為連接固定樞軸 O_4 之桿件，其長度為 R_4 ，點 A 為一沿桿 4 運動之滑件，其衝程為 L_4 ，點 C 為一沿水平線運動之滑件，桿 5 為同時與桿 4 和滑件 C 鄰接之桿件，其長度為 R_5 ， θ_2 為輸入角（輸入變數）， θ_4 和 θ_5 為其致動接頭之旋轉角度，滑件 C 受一水平方向力 F，桿件 2 受一扭矩 T_2 。

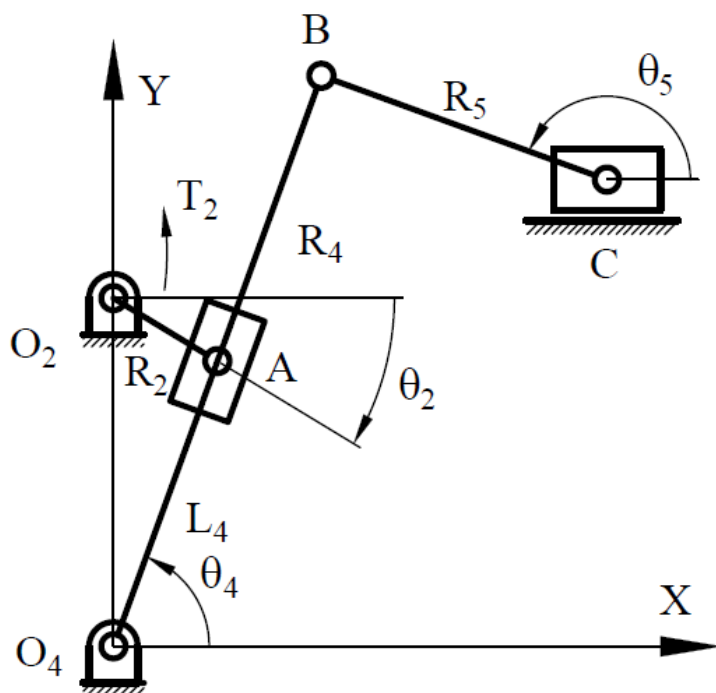


圖 2-13 曲柄牛頭刨床機構



2-5-1 曲柄牛頭刨床機構之靜力學分析

圖 2-14 為六連桿之曲柄牛頭刨床機構之自由體圖，其中 F_{ij} 表示桿件 i 對桿件 j 所施加之內力，將其分為 x 方向分量及 y 方向分量，表示為 F_{ijx} 、 F_{ijy} 。根據節點力平衡可得 $F_{ijx} = -F_{jix}$ 、 $F_{ijy} = -F_{jiy}$ ， $i、j = 1、2、3、4、5、6$ 。根據力學平衡的概念可將各個桿件之 x 方向力平衡、 y 方向力平衡及力矩平衡各列出三條方程式。

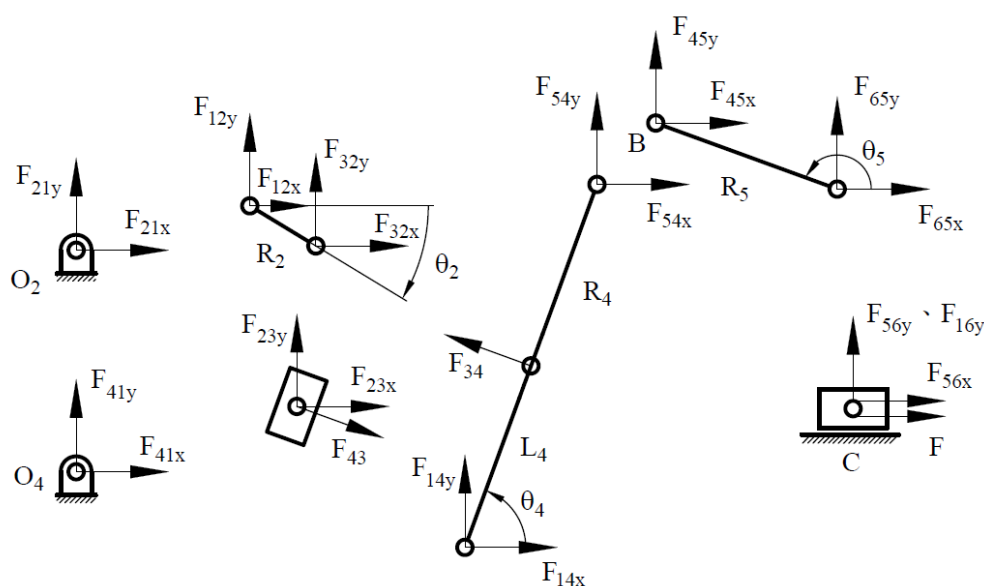


圖 2-14 曲柄牛頭刨床機構自由體圖

對於桿件 2 而言，其平衡方程式可寫成：

$$F_{12x} + F_{32x} = 0 \quad (2-48)$$

$$F_{12y} + F_{32y} = 0 \quad (2-49)$$

$$F_{32x}R_2 \sin\theta_2 - F_{32y}R_2 \cos\theta_2 - T_2 = 0 \quad (2-50)$$

滑件 3 的平衡方程式可寫成：

$$F_{23x} + F_{43} \cos(\theta_4 - 90^\circ) = 0 \quad (2-51)$$

$$F_{23y} + F_{43} \sin(\theta_4 - 90^\circ) = 0 \quad (2-52)$$



桿件 4 的平衡方程式可寫成：

$$F_{14x} + F_{34}\cos(\theta_4 + 90^\circ) + F_{54x} = 0 \quad (2-53)$$

$$F_{14y} + F_{34}\sin(\theta_4 + 90^\circ) + F_{54y} = 0 \quad (2-54)$$

$$F_{54x}R_4\sin\theta_4 - F_{54y}R_4\cos\theta_4 + F_{34}L_4 = 0 \quad (2-55)$$

桿件 5 的平衡方程式可寫成：

$$F_{45x} + F_{65x} = 0 \quad (2-56)$$

$$F_{45y} + F_{65y} = 0 \quad (2-57)$$

$$F_{45x}R_5\sin\theta_5 - F_{45y}R_5\cos\theta_5 = 0 \quad (2-58)$$

滑件 6 的平衡方程式可寫成：

$$F_{56x} = F \quad (2-59)$$

$$F_{56y} + F_{16y} = 0 \quad (2-60)$$

將以上十三條方程式同時聯立，即可求解 F_{12x} 、 F_{12y} 、 F_{23x} 、 F_{23y} 、 F_{34} 、 F_{45x} 、 F_{45y} 、 F_{56x} 、 F_{56y} 、 F_{14x} 、 F_{14y} 、 F_{16y} 與 T_2 。以上方程式聯立後可以以矩陣表示為

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & A_{47} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & A_{57} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & A_{67} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & A_{77} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{87} & A_{88} & A_{89} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{118} & A_{119} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{12x} \\ F_{12y} \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{14x} \\ F_{14y} \\ F_{34} \\ F_{45x} \\ F_{45y} \\ F_{56x} \\ F_{56y} \\ F_{16y} \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-61)$$

其中

$$A_{33} = R_2 \sin \theta_2 \quad (2-62)$$

$$A_{34} = -R_2 \cos \theta_2 \quad (2-63)$$

$$A_{47} = \cos(\theta_4 - 90^\circ) \quad (2-64)$$

$$A_{57} = \sin(\theta_4 - 90^\circ) \quad (2-65)$$

$$A_{67} = \cos(\theta_4 + 90^\circ) \quad (2-66)$$

$$A_{77} = \sin(\theta_4 + 90^\circ) \quad (2-67)$$

$$A_{87} = -L_4 \quad (2-68)$$

$$A_{88} = -R_4 \sin \theta_4 \quad (2-69)$$

$$A_{89} = +R_4 \cos \theta_4 \quad (2-70)$$

$$A_{118} = R_5 \sin \theta_5 \quad (2-71)$$

$$A_{119} = -R_5 \cos \theta_5 \quad (2-72)$$





2-5-2 數值模擬範例

考慮一曲柄牛頭刨床機構，如同圖 2-13。其幾何參數如表 2-4。

表 2-4 曲柄牛頭刨床機構之各項參數

符號	數值(單位)	符號	數值(單位)
F	200 N	R ₅	5 m
L ₄	5 m	θ ₂	-31.2347°
R ₂	2 m	θ ₄	70°
R ₄	10 m	θ ₅	160°

將幾何參數代入(2-61)式的矩陣，其中

$$A_{33} = -1.0371$$

$$A_{34} = -1.7101$$

$$A_{47} = 0.9397$$

$$A_{57} = -0.3420$$

$$A_{67} = -0.9397$$

$$A_{77} = 0.3420$$

$$A_{87} = -5$$

$$A_{88} = -9.3969$$

$$A_{89} = 3.4202$$

$$A_{118} = 1.7101$$

$$A_{119} = 4.6985$$

將矩陣以 MATLAB 求解可得：

$$\begin{bmatrix} F_{12x} \\ F_{12y} \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{14x} \\ F_{14y} \\ F_{34} \\ F_{45x} \\ F_{45y} \\ F_{56x} \\ F_{56y} \\ F_{16y} \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -400\text{N} \\ 145.588 \\ -400\text{N} \\ 145.588\text{N} \\ 200\text{N} \\ -145.588\text{N} \\ 425.671\text{N} \\ -200\text{N} \\ 72.794\text{N} \\ -200\text{N} \\ 72.794\text{N} \\ -72.794\text{N} \\ 165.866\text{N} \cdot \text{m} \end{bmatrix}$$



第三章 平面連桿機構之模組化靜力學分析



3-1 模組化

本節將介紹三個基礎模組以及模組化拆解之範例。

3-1-1 Assur group 及三種基礎模組

Assur group 為數種具有零自由度之呆運動鏈，本論文所提出的模組化分析方法即是將一個平面連桿機構拆解為一個或多個 Assur group 之組合，藉此簡化求解的複雜度，以下將介紹 Assur group 之分類及三個基礎模組。

在 Assur group 中，與其他 Assur group 相接之接頭稱為外接頭，否則稱為內接頭。由於 Assur group 為零自由度，當所有接頭皆為旋轉對(R)或滑動對(P)時，其連桿數 n 與接頭數 k 之關係可由自由度公式得到：

$$3n - 2k = 0 \quad (3-1)$$

Assur group 可以以連桿數進行分類，根據上式可得 Assur group 中最基礎的組合為含兩桿件三接頭之組合，稱為 class 2，其組合有四種，分別為 RR 雙連桿、RP 雙連桿、PR 雙連桿與 PP 雙連桿，如圖 3-1 所示。其中 PP 雙連桿之輸入輸出關係不需經過複雜計算即可求得，且較不常見，因此本論文不討論。而 RR 雙連桿、RP 雙連桿與 PR 雙連桿可分別由四連桿、倒置滑件曲柄機構與滑件曲柄機構中拆解出來，如圖 3-2。本論文將此三種雙連桿視為三個基礎模組，並稱為 RR 機械手臂、RP 機械手臂與 PR 機械手臂。

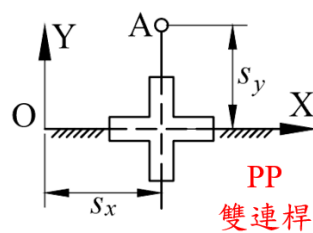
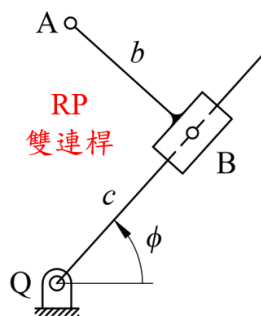
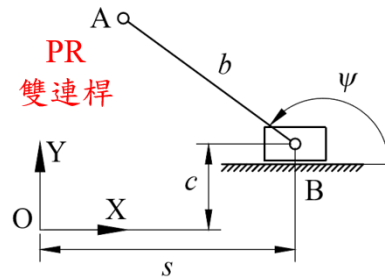
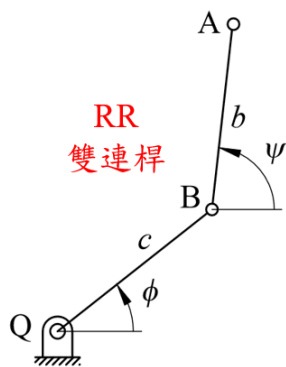


圖 3-1 Assur group class 2 組合種類

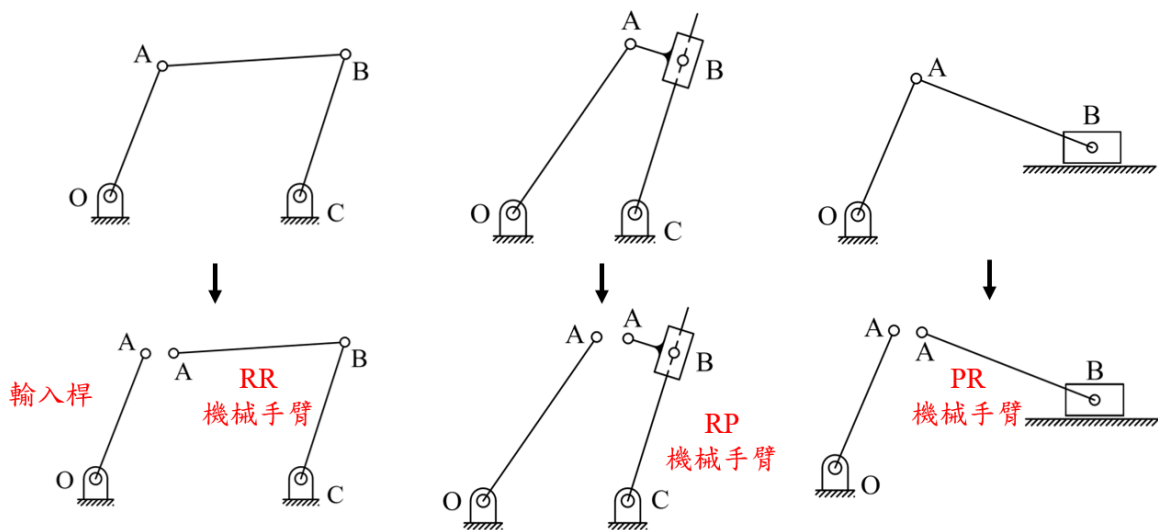


圖 3-2 RR 雙連桿、RP 雙連桿與 PR 雙連桿模組

3-1-2 模組化拆解範例

本小節將演示如何進行模組化拆解。首先以曲柄牛頭刨床為例，如圖 3-3，先將輸入桿單獨拆解為一根桿件，剩餘的桿件即可拆解為一個 RP 基礎模組及一個 PR 基礎模組，如圖 3-4。

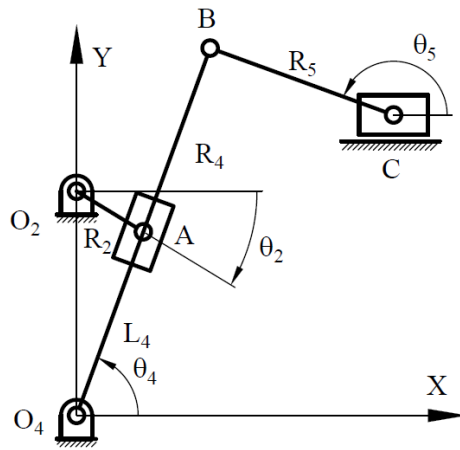


圖 3-3 曲柄牛頭刨床機構

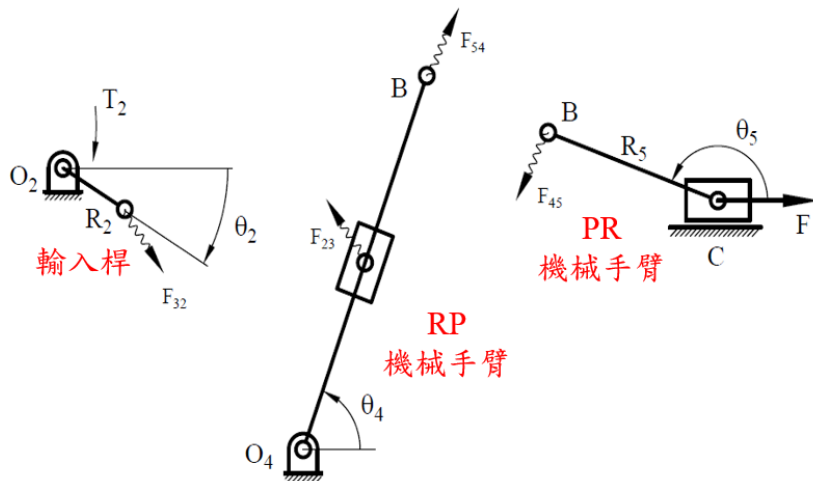


圖 3-4 曲柄牛頭刨床機構模組化拆解

接下來以 Stephenson 六連桿為例，如圖 3-5，假設輸入桿為 OA，則可將輸入桿單獨拆解為一根桿件，剩餘的桿件即可拆解為兩個 RR 基礎模組，如圖 3-6。

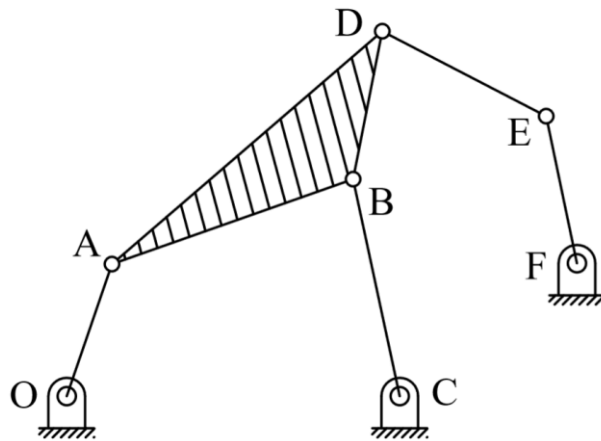


圖 3-5 Stephenson 六連桿機構

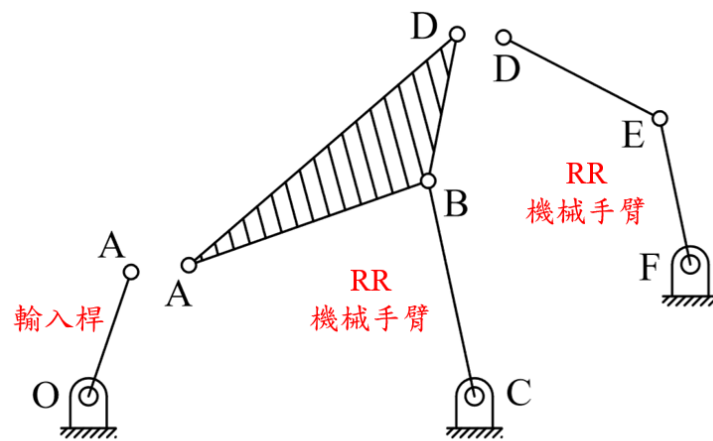


圖 3-6 Stephenson 六連桿機構模組化拆解

但當輸入桿為 EF 時，如圖 3-7，將輸入桿單獨拆解為一根桿件後，剩餘的桿件為 Assur group class 3 的模組，也就是四桿六接頭之類型，並無法以此三個基礎的 class 2 模組求解，此類情況為本論文方法之限制，但可以藉由建立 Assur group class 3 的基礎模組解決。

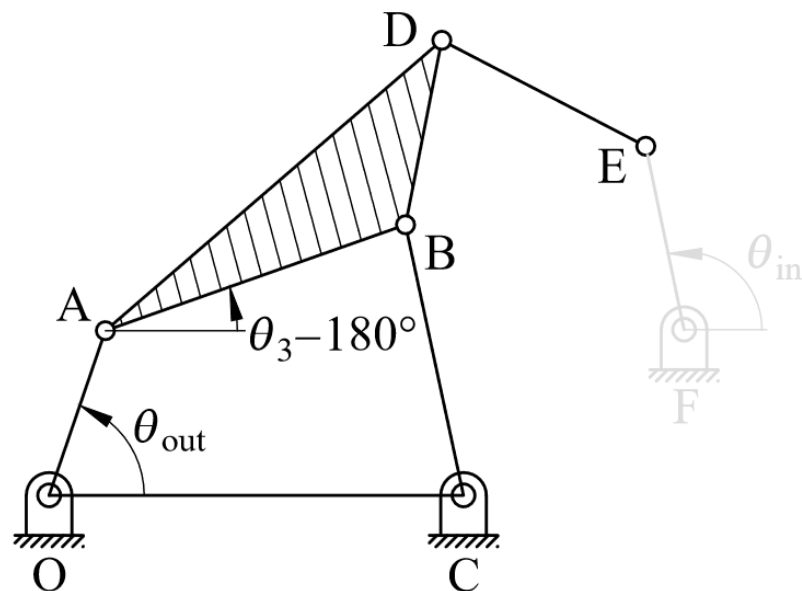


圖 3-7 Stephenson 六連桿機構模組化拆解(Assur group 3)



3-2 模組化運動學分析

本節將介紹如何以機器人學中的順向及逆向運動學對連桿機構進行位置分析，分析結果用於定義後續進行靜力學分析的連桿構型。接著再以相同觀念對連桿進行速度、加速度分析，分析結果用於定義動力學分析中之桿件慣性力。

3-2-1 平面運動之二連桿 RR 機器手臂

圖 3-8 為一平面運動之二連桿機器手臂，因其具有兩個旋轉對接頭(Revolute pair)，故又稱為 RR 機器手臂，其中固定樞軸的座標為 (x_Q, y_Q) ，端接器的座標為 (x_A, y_A) ，兩旋轉對接頭之旋轉角度分別為 ϕ 、 ψ ，兩桿件長度分別為 b 、 c 。

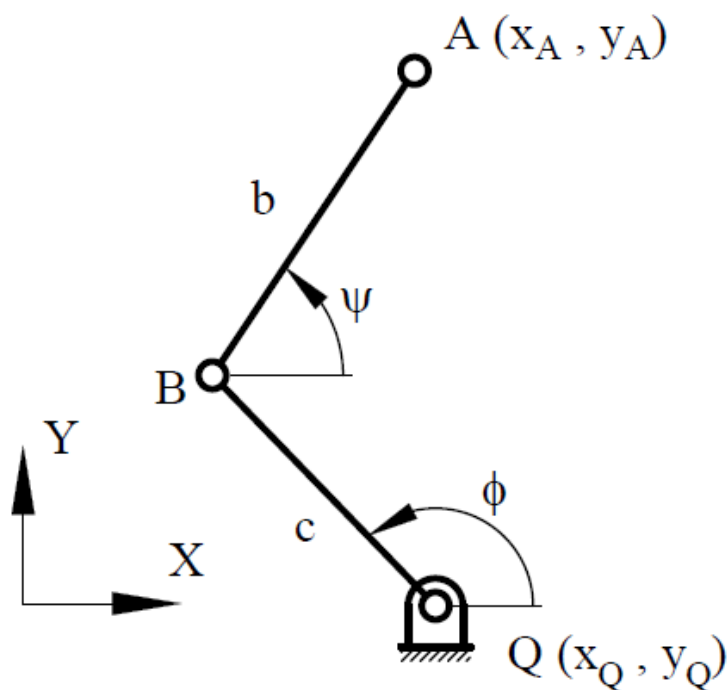


圖 3-8 平面運動之二連桿 RR 機器手臂



1. 順向運動學

已知兩旋轉對接頭之旋轉角度 (ϕ, ψ) 及固定樞軸的座標 (x_Q, y_Q) ，欲求端接器的座標 (x_A, y_A) 。依圖 3-8 之幾何關係，端接器座標可表示如下：

$$x_A = c\cos\phi + b\cos\psi + x_Q \quad (3-2)$$

$$y_A = c\sin\phi + b\sin\psi + y_Q \quad (3-3)$$

假設 Q 點不動，將(3-2)式及(3-3)式對時間進行微分，端接器之速度 (\dot{x}_A, \dot{y}_A) 可表示為：

$$\begin{cases} \dot{x}_A = -c\dot{\phi}\sin\phi - b\dot{\psi}\sin\psi \\ \dot{y}_A = c\dot{\phi}\cos\phi + b\dot{\psi}\cos\psi \end{cases} \quad (3-4)$$

將(3-4)式再次對時間進行微分，可得端接器之加速度 (\ddot{x}_A, \ddot{y}_A)

$$\begin{cases} \ddot{x}_A = -c\ddot{\phi}\sin\phi - c\dot{\phi}^2\cos\phi - b\ddot{\psi}\sin\psi - b\dot{\psi}^2\cos\psi \\ \ddot{y}_A = c\ddot{\phi}\cos\phi - c\dot{\phi}^2\sin\phi + b\ddot{\psi}\cos\psi - b\dot{\psi}^2\sin\psi \end{cases} \quad (3-5)$$

此即為二連桿 RR 機器手臂之順向運動學。可將(3-2)式、(3-3)式、(3-4)式與(3-5)式綜合並表示為以下副函式：

$$[x_A, y_A, \dot{x}_A, \dot{y}_A, \ddot{x}_A, \ddot{y}_A] = \text{ForwardRR}(\phi, \psi, \dot{\phi}, \dot{\psi}, \ddot{\phi}, \ddot{\psi}, b, c, x_Q, y_Q)$$

2. 逆向運動學

已知端接器的座標 (x_A, y_A) 及固定樞軸的座標 (x_Q, y_Q) ，求兩旋轉對接頭之旋轉角度 (ϕ, ψ) 。為計算方便，先假設 $x_A - x_Q = X$ ， $y_A - y_Q = Y$ ，將(3-2)式進行代換得

$$\begin{cases} X = c\cos\phi + b\cos\psi \\ Y = c\sin\phi + b\sin\psi \end{cases} \quad (3-6)$$

將(3-6)式移項並平方可得

$$\begin{cases} b\cos\psi^2 = (X - c\cos\phi)^2 \\ b\sin\psi^2 = (Y - c\sin\phi)^2 \end{cases} \quad (3-7)$$



再將(3-7)式中兩式相加得

$$b^2 = X^2 - 2Xc\cos\phi + Y^2 - 2Yc\sin\phi + c^2 \quad (3-8)$$

將(3-8)式化為 $A\sin\phi + B\cos\phi = C$ 之型式以便計算，其中 $A = 2cY$ ， $B = 2cX$ ， $C = c^2 + X^2 + Y^2 - b^2$ 。 $\cos\phi$ 、 $\sin\phi$ 可轉換為：

$$\cos\phi = \frac{1 - \tan^2\frac{\phi}{2}}{1 + \tan^2\frac{\phi}{2}}, \quad \sin\phi = \frac{2 \tan\frac{\phi}{2}}{1 + \tan^2\frac{\phi}{2}} \quad (3-9)$$

再假設 $t = \tan\frac{\phi}{2}$ ，則(3-9)式可表示為：

$$\cos\phi = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin\phi = \frac{2t}{1 + t^2} \quad (3-10)$$

將(3-10)式代回(3-7)式得

$$A(2t) + B - Bt^2 = C(1 + t^2) \quad (3-11)$$

以公式求解 (3-11)式中的 t ，其中 t 有兩種解，代表兩種組合位置，可得旋轉對接頭之轉角 ϕ ：

$$t = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{C + B}, \quad \frac{\phi}{2} = \tan^{-1}(t) \Rightarrow \phi = 2 \tan^{-1} t \quad (3-12)$$

將解出的 ϕ 代回(3-7)式可得出另一旋轉對接頭之轉角 ψ

$$\cos\psi = \frac{X - c \cos\phi}{b} = U, \quad \sin\psi = \frac{Y - c \sin\phi}{b} = V, \quad \psi = \tan^{-1} \frac{V}{U} \quad (3-13)$$

兩旋轉對接頭之角速度可直接將(3-3)式移項並計算反矩陣得出，可表示成：

$$\begin{bmatrix} -c\sin\phi & -b\sin\psi \\ c\cos\phi & b\cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{X}_A \\ \dot{Y}_A \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c\sin\phi & -b\sin\psi \\ c\cos\phi & b\cos\psi \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{X}_A \\ \dot{Y}_A \end{bmatrix} \quad (3-14)$$

同理，兩旋轉對接頭之角加速度可由(3-4)式得出，並表示成：

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c\sin\phi & -b\sin\psi \\ c\cos\phi & b\cos\psi \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \ddot{X}_A + c\dot{\phi}^2\cos\phi + b\dot{\psi}^2\cos\psi \\ \ddot{Y}_A + c\dot{\phi}^2\sin\phi + b\dot{\psi}^2\sin\psi \end{bmatrix} \quad (3-15)$$



可將(3-12)、(3-13)、(3-14)與(3-15)式合併並表示為以下副函式，其中變數 I 為組合位置，對應 ϕ 之兩種解，分為 1 與 2 兩種組合位置。

$$[\phi, \psi, \dot{\phi}, \dot{\psi}, \ddot{\phi}, \ddot{\psi}] = \text{InverseRR}(x_A, y_A, \dot{x}_A, \dot{y}_A, \ddot{x}_A, \ddot{y}_A, b, c, x_Q, y_Q, I)$$

3-2-2 平面運動之 PR 機器手臂

圖 3-9 為一平面運動之二連桿機器手臂，因其為一個接頭為滑動接頭且另一個接頭為轉動接頭，故又稱為 PR 機器手臂，其中 b 為一桿件之桿長， ψ 為其致動接頭之旋轉角度，點 B 為一沿 X 軸方向滑動之滑件，滑件 B 與 X 軸之偏位量為 c (恆為定值)，與 Y 軸之水平距離為 s ， (x_A, y_A) 為 PR 雙連桿模組之端接器座標。

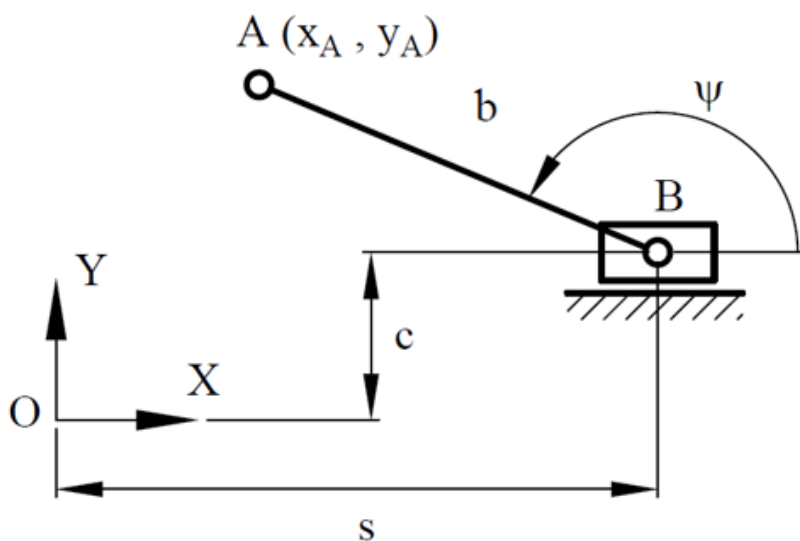


圖 3-9 平面運動之二連桿 PR 機器手臂

1. 順向運動學

已知旋轉對接頭之旋轉角度 ψ 及滑件與 Y 軸之水平距離 s ，欲求端接器的座標 (x_A, y_A) 。依圖 2-2 之幾何關係，其端接器座標可表示如下：

$$\begin{cases} x_A = s + b \cos \psi \\ y_A = c + b \sin \psi \end{cases} \quad (3-16)$$



假設 Q 點不動，將(3-16)式對時間進行微分，端接器之速度(\dot{x}_A, \dot{y}_A)可表示為：

$$\begin{cases} \dot{x}_A = \dot{s} - b\dot{\psi}\sin\psi \\ \dot{y}_A = b\dot{\psi}\cos\psi \end{cases} \quad (3-17)$$

將(3-17)式再次對時間進行微分，可得端接器之加速度(\ddot{x}_A, \ddot{y}_A)：

$$\begin{cases} \ddot{x}_A = \ddot{s} - b\ddot{\psi}\sin\psi - b\dot{\psi}^2\cos\psi \\ \ddot{y}_A = \ddot{\psi}b\cos\psi - b\dot{\psi}^2\sin\psi \end{cases} \quad (3-18)$$

此即為二連桿 PR 機器手臂之順向運動學。可將(3-16)式、(3-17)式與(3-18)式綜合並表示為以下副函式：

$$[x_A, y_A, \dot{x}_A, \dot{y}_A, \ddot{x}_A, \ddot{y}_A] = \text{Forward PR}(c, b, s, \psi, \dot{s}, \dot{\psi}, \ddot{s}, \ddot{\psi})$$

2. 逆向運動學

已知端接器的座標(x_A, y_A)，求旋轉對接頭之旋轉角度 ψ 及滑件與 Y 軸之水平距離 s 。將(3-16)式移項整理，可反推 ψ 及 s 。如圖 3-10， ψ 可能有兩種解：

$$\psi_1 = 180^\circ - \sin^{-1}\left(\frac{y_A - c}{b}\right) \quad \text{or} \quad \psi_2 = \sin^{-1}\left(\frac{y_A - c}{b}\right) \quad (3-19)$$

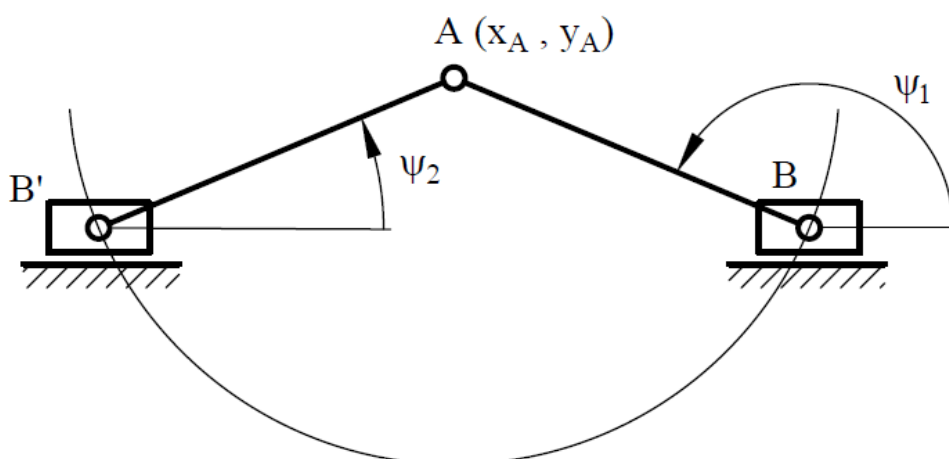


圖 3-10 ψ 之兩種解 ψ_1 與 ψ_2



得出 ψ 後即可求得 s :

$$s = x_A - b \cos \psi \quad (3-20)$$

將(3-20)式與(3-21)式對時間進行微分可得

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \frac{\dot{y}_A}{b \cos \psi} \\ \dot{s} = \dot{x}_A + b \dot{\psi} \sin \psi \end{cases} \quad (3-21)$$

再將(3-22)式對時間進行微分可得

$$\begin{cases} \ddot{\psi} = \frac{\ddot{y}_A + b \dot{\psi}^2 \sin \psi}{b \cos \psi} \\ \ddot{s} = \ddot{x}_A + b \ddot{\psi} \sin \psi + b \dot{\psi}^2 \cos \psi \end{cases} \quad (3-22)$$

此即為二連桿 PR 機器手臂之逆向運動學。可將(3-20)式、(3-21)式、(3-22)式與(3-23)式合併並表示為以下副函式：

$$[s, \psi, \dot{s}, \dot{\psi}, \ddot{s}, \ddot{\psi}] = \text{InversePR}(c, b, x_A, y_A, \dot{x}_A, \dot{y}_A, \ddot{x}_A, \ddot{y}_A, I)$$

其中變數 I 為組合位置，對應 ψ 之兩種解，分為 1 與 2 兩種組合位置。



3-2-3 平面運動之 RP 機器手臂

圖 3-11 為一平面運動之二連桿機器手臂，因為其一個接頭為轉動接頭，另一個接頭為滑動接頭，故又稱為 RP 機器手臂，其中 b 為桿件之長度，點 B 為一滑件，沿直線 QB 之方向滑動， r 為其衝程， ϕ 為致動接頭的旋轉角度， (x_Q, y_Q) 為 RP 機器手臂之固定樞軸座標， (x_A, y_A) 為 RP 機器手臂之端接器座標。

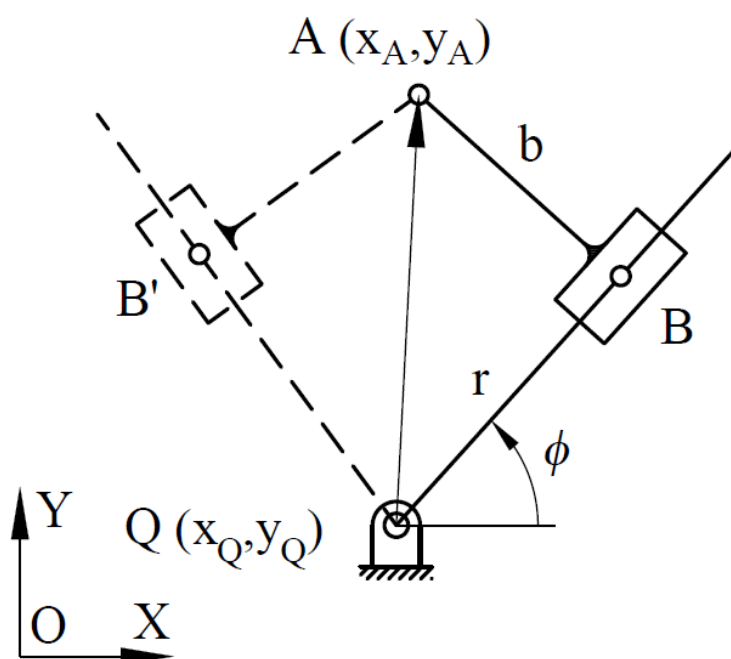


圖 3-11 平面運動之二連桿 RP 機器手臂

1. 順向運動學

已知旋轉對接頭之旋轉角度 ϕ 及滑件之衝程 r 及固定樞軸的座標 (x_Q, y_Q) ，欲求端接器的座標 (x_A, y_A) 。依圖 3-11 之幾何關係，其端接器座標可表示如下：

$$\begin{cases} x_A = x_Q + r\cos\phi + b\cos(\phi + 90^\circ) = x_Q + r\cos\phi - b\sin\phi \\ y_A = y_Q + r\sin\phi + b\sin(\phi + 90^\circ) = y_Q + r\sin\phi + b\cos\phi \end{cases} \quad (3-23)$$



假設 Q 點不動，將(3-23)式對時間進行微分，端接器之速度 (\dot{x}_A, \dot{y}_A) 可表示為：

$$\begin{cases} \dot{x}_A = -r\dot{\phi}\sin\phi + \dot{r}\cos\phi - b\dot{\phi}\cos\phi \\ \dot{y}_A = r\dot{\phi}\cos\phi + \dot{r}\sin\phi - b\dot{\phi}\sin\phi \end{cases} \quad (3-24)$$

再將(3-24)式對時間進行微分可得

$$\begin{cases} \ddot{x}_A = -\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi - r(\ddot{\phi}\sin\phi + \dot{\phi}^2\cos\phi) + \ddot{r}\cos\phi - \dot{r}\dot{\phi}\sin\phi - b(\ddot{\phi}\cos\phi - \dot{\phi}^2\sin\phi) \\ \ddot{y}_A = \dot{r}\dot{\phi}\cos\phi + r(\ddot{\phi}\cos\phi - \dot{\phi}^2\sin\phi) + \ddot{r}\sin\phi + \dot{r}\dot{\phi}\cos\phi - b(\ddot{\phi}\sin\phi + \dot{\phi}^2\cos\phi) \end{cases} \quad (3-25)$$

將(3-25)式整理後表示為：

$$\begin{cases} \ddot{x}_A = -\ddot{\phi}(r\sin\phi + b\cos\phi) + \dot{\phi}^2(b\sin\phi - r\cos\phi) - 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi + \ddot{r}\cos\phi \\ \ddot{y}_A = \ddot{\phi}(r\cos\phi - b\sin\phi) - \dot{\phi}^2(r\sin\phi + b\cos\phi) + 2\dot{r}\dot{\phi}\cos\phi + \ddot{r}\sin\phi \end{cases} \quad (3-26)$$

此即為二連桿 RP 機器手臂之逆向運動學。可將(3-24)式、(3-25)式與(3-27)式合併並表示為以下副函式：

$$[x_A, y_A, \dot{x}_A, \dot{y}_A, \ddot{x}_A, \ddot{y}_A] = \text{Forward RP}(x_Q, y_Q, b, r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}, \ddot{r}, \ddot{\phi})$$

2. 逆向運動學

已知端接器的座標 (x_A, y_A) 及固定樞軸的座標 (x_Q, y_Q) ，欲求旋轉對接頭之旋轉角度 ϕ 及滑件之衝程 r 。將(3-23)中兩式平方相加可得

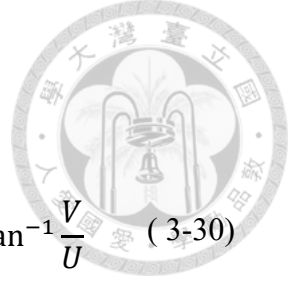
$$(x_A - x_Q)^2 + (y_A - y_Q)^2 = b^2 + r^2 \quad (3-27)$$

由(3-27)式可解出

$$r = \pm \sqrt{(x_A - x_Q)^2 + (y_A - y_Q)^2 - b^2} \quad (3-28)$$

(3-23)式整理後可得

$$\begin{cases} -b\sin\phi + r\cos\phi = x_A - x_Q \\ r\sin\phi + b\cos\phi = y_A - y_Q \end{cases} \quad (3-29)$$



將(3-29)中兩式聯立求解 ϕ ，可得

$$U = \cos \phi = \frac{\begin{vmatrix} -b & x_A - x_Q \\ r & y_A - y_Q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -b & r \\ r & b \end{vmatrix}}, \quad V = \sin \phi = \frac{\begin{vmatrix} x_A - x_Q & r \\ y_A - y_Q & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -b & r \\ r & b \end{vmatrix}}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{V}{U} \quad (3-30)$$

將(3-24)式寫成矩陣形式：

$$\begin{bmatrix} -(b \cos \phi + r \sin \phi) & \cos \phi \\ -b \sin \phi + r \cos \phi & \sin \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{y}_A \end{bmatrix} \quad (3-31)$$

移項後可得旋轉接頭之角速度 $\dot{\phi}$ 及滑件速度 \dot{r} ：

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(b \cos \phi + r \sin \phi) & \cos \phi \\ -b \sin \phi + r \cos \phi & \sin \phi \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{y}_A \end{bmatrix} \quad (3-32)$$

將(3-28)式寫成矩陣形式：

$$\begin{bmatrix} -(b \cos \phi + r \sin \phi) & \cos \phi \\ -b \sin \phi + r \cos \phi & \sin \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{r} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \dot{\phi}(b \sin \phi - r \cos \phi) - \dot{r} \sin \phi & \dot{\phi} \sin \phi \\ -\dot{\phi}(b \cos \phi + r \sin \phi) + \dot{r} \cos \phi & \dot{\phi} \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{y}_A \end{bmatrix} \quad (3-33)$$

移項後可得旋轉接頭之角加速度 $\ddot{\phi}$ 及滑件加速度 \ddot{r} ：

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(b \cos \phi + r \sin \phi) & \cos \phi \\ -b \sin \phi + r \cos \phi & \sin \phi \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{y}_A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\phi}(b \sin \phi - r \cos \phi) - \dot{r} \sin \phi & \dot{\phi} \sin \phi \\ -\dot{\phi}(b \cos \phi + r \sin \phi) + \dot{r} \cos \phi & \dot{\phi} \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{r} \end{bmatrix} \right\} \quad (3-34)$$

此即為二連桿 RP 機器手臂之逆向運動學。可將(3-28)式、錯誤! 找不到參照來源。)式、(3-32)式與(3-34)式合併並表示為以下副函式：

$$[r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}, \ddot{r}, \ddot{\phi}] = \text{Inverse RP}(b, x_Q, y_Q, \dot{x}_Q, \dot{y}_Q, \ddot{x}_Q, \ddot{y}_Q, I)$$

其中變數 I 為組合位置，對應 ϕ 之兩種解，分別為圖 3-11 中 B 與 B' 兩種組合位置。



3-3 平面運動之二連桿 RR 機器手臂靜力學分析

本小節將介紹如何進行平面二連桿 RR 機器手臂之靜力學分析。圖 3-12 為一個受兩外力 P 、 Q 之平面運動二連桿 RR 機器手臂之自由體圖。其中 T_i 為作用於桿件 i 之力矩， R_i 為桿件 i 之長度， L_2 為 \overline{OE} 之長度， L_3 為 \overline{AF} 之長度， h_2 為點 C 與點 E 之距離， h_3 為點 D 與點 F 之距離， θ_i 為桿件之角度， F_e 為節點 B 所受的節點力， θ_{F_e} 表示節點力 F_e 之角度， θ_P 表示外力 P 之角度， θ_Q 表示外力 Q 之角度。其中 $i=2$ 或 3 。

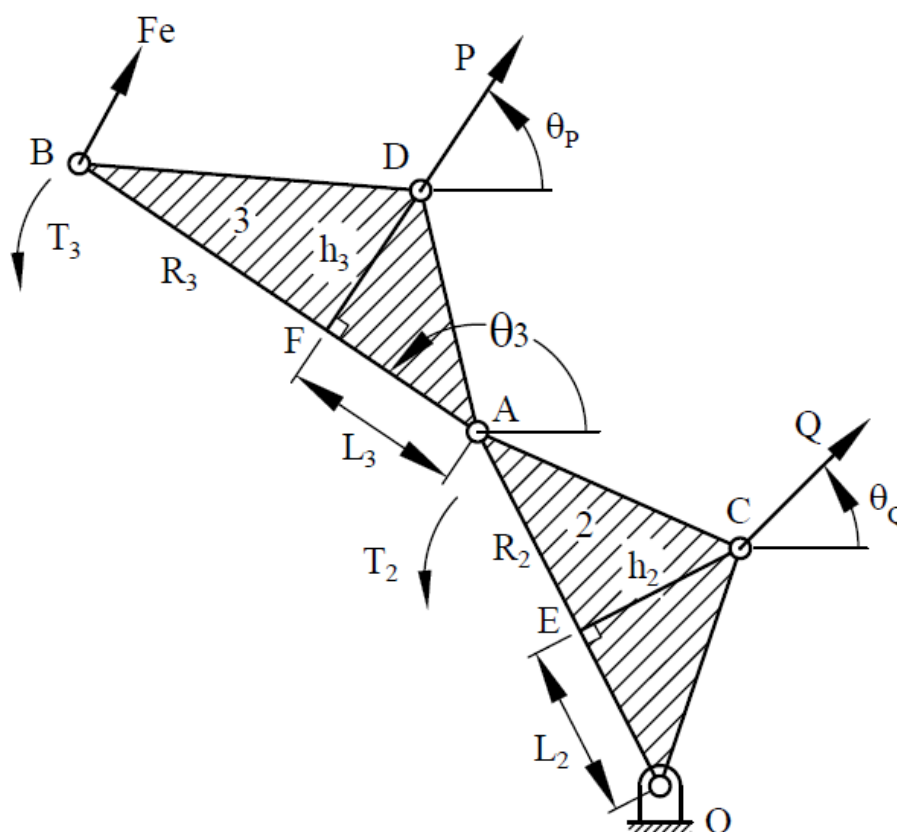
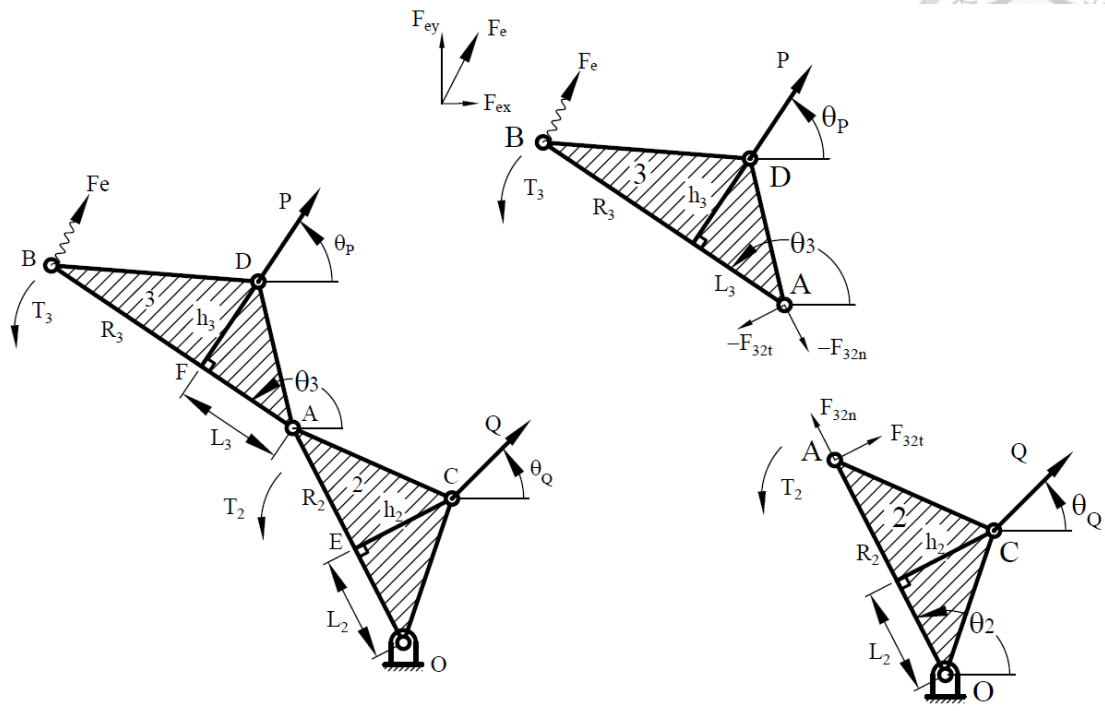
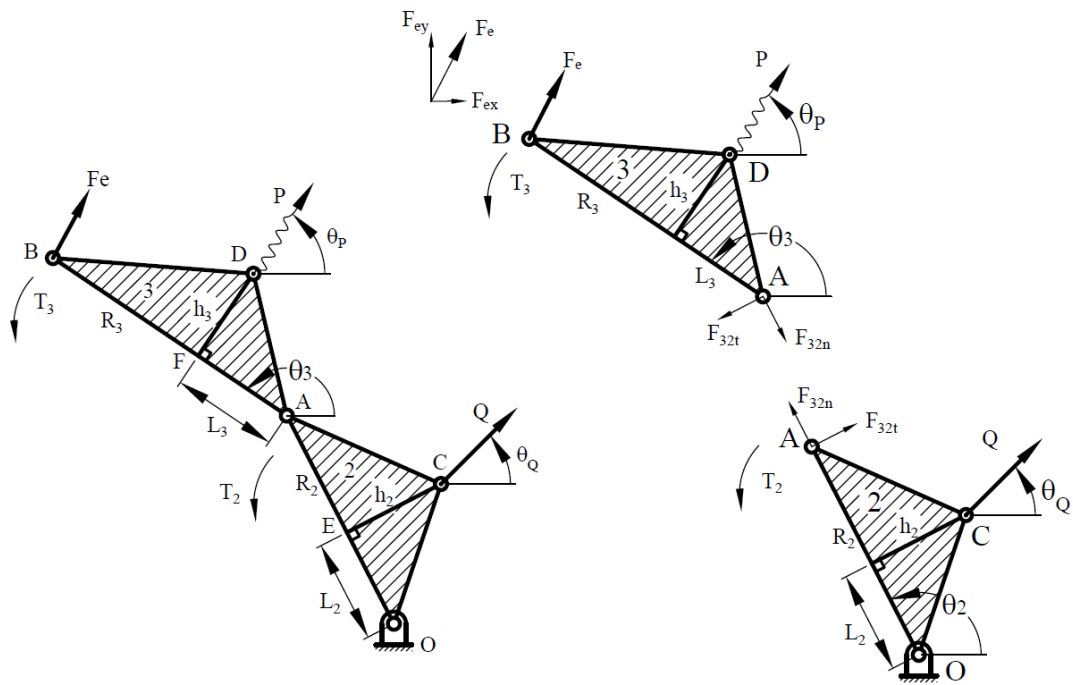


圖 3-12 受兩外力 P 與 Q 之平面運動二連桿 RR 機器手臂

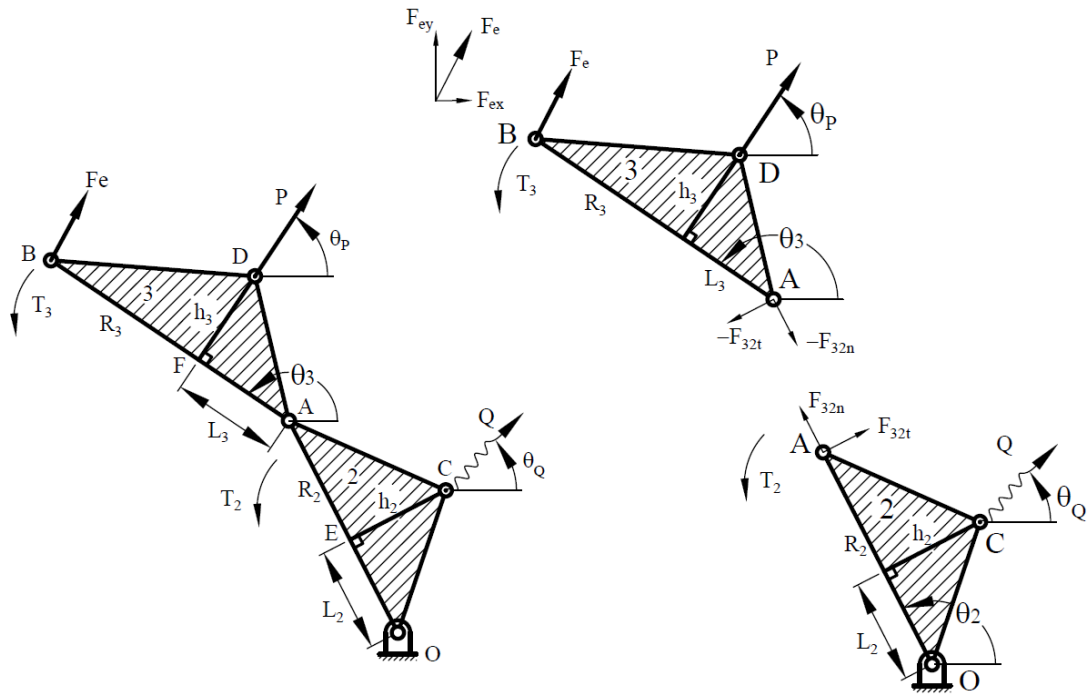
若將 P 、 Q 或 F_e 分別當作未知力，則可將圖 3-12 所示 RR 機器手臂之自由體圖分為三類，如圖 3-13 所示。



(a) 已知：P、Q 未知：Fe



(b) 已知：Fe、Q 未知：P



(c) 已知：P、Fe 未知：Q

圖 3-13 受兩外力 P 與 Q 之平面運動二連桿 RR 機器手臂之三種類型

1. 已知外力 P 和 Q 求未知節點力 F_e ，如圖 3-13(a)

首先分析桿件 2 之自由體圖，對 O 點取力矩平衡可得

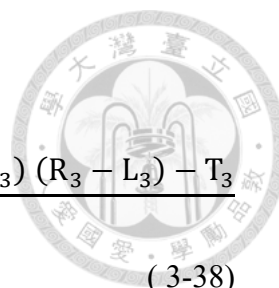
$$F_{32t}R_2 + Q\cos[\theta_Q - (\theta_2 - 90^\circ)]L_2 - Q\sin[\theta_Q - (\theta_2 - 90^\circ)]h_2 - T_2 = 0 \quad (3-35)$$

將(3-35)式整理後可求得 F_{32t} ：

$$F_{32t} = \frac{Q\sin(\theta_Q - \theta_2)L_2 + Q\cos(\theta_Q - \theta_2)h_2 + T_2}{R_2} \quad (3-36)$$

接著分析桿件 3 之自由體圖，對 B 點取力矩平衡可得

$$F_{32t} \sin(\theta_2 + 90^\circ - \theta_3) R_3 + F_{32n} \sin(\theta_2 + 180^\circ - \theta_3) R_3 - P\sin[\theta_P - (\theta_3 - 90^\circ)]h_3 + P\cos[\theta_P - (\theta_3 - 90^\circ)](R_3 - L_3) + T_3 = 0 \quad (3-37)$$



將(3-38)整理後可求得 F_{32n} ：

$$F_{32n} = \frac{F_{32t} \cos(\theta_2 - \theta_3) R_3 - P \cos(\theta_P - \theta_3) h_3 + P \sin(\theta_P - \theta_3) (R_3 - L_3) - T_3}{\sin(\theta_2 - \theta_3) R_3} \quad (3-38)$$

最後考慮桿件 2 及桿件 3 之自由體圖，依 X 方向及 Y 方向之合力平衡列出平衡方程式：

$$F_{ex} + P \cos \theta_P + F_{32t} \cos(\theta_2 + 90^\circ) - F_{32n} \cos(\theta_2 + 180^\circ) = 0 \quad (3-39)$$

$$F_{ey} + P \sin \theta_P + F_{32t} \sin(\theta_2 + 90^\circ) + F_{32n} \sin(\theta_2 + 180^\circ) = 0 \quad (3-40)$$

$$F_{12x} + Q \cos \theta_Q + F_{32t} \cos(\theta_2 - 90^\circ) + F_{32n} \cos \theta_2 = 0 \quad (3-41)$$

$$F_{12y} + Q \cos \theta_Q + F_{32t} \cos(\theta_2 - 90^\circ) + F_{32n} \sin \theta_2 = 0 \quad (3-42)$$

上四式整理過後可分別求得 F_{ex} 、 F_{ey} 、 F_{12x} 、 F_{12y} 。

$$F_{ex} = -P \cos \theta_P + F_{32t} \sin \theta_2 + F_{32n} \cos \theta_2 \quad (3-43)$$

$$F_{ey} = -P \sin \theta_P - F_{32t} \cos \theta_2 + F_{32n} \sin \theta_2 \quad (3-44)$$

$$F_{12x} = -Q \cos \theta_Q - F_{32t} \sin \theta_2 - F_{32n} \cos \theta_2 \quad (3-45)$$

$$F_{12y} = -Q \cos \theta_Q + F_{32t} \cos \theta_2 - F_{32n} \sin \theta_2 \quad (3-46)$$

此即為開迴路二連桿 RR 機器手臂求解未知力 F_e 時之靜力學力分析。可將(3-37)式、(3-39)式、(3-44)式至(3-47)式合併，表示為以下副函式：

$$[F_{32}, F_{ex}, F_{ey}, F_{12x}, F_{12y}] = \text{ForceRR}(P, Q, T_2, T_3, R_2, R_3, L_2, L_3, h_2, h_3, \theta_2, \theta_3, \theta_P, \theta_Q)$$

2. 已知節點力 F_e 和外力 Q 求外力 P ，如圖 3-13 (b)

F_{32t} 同樣可由(3-37)式求得，接著參考桿件 3 之自由體圖並對 P 之施力點列出力矩平衡方程式：

$$\begin{aligned} & -F_{32t} \sin(\theta_2 + 90 - \theta_3) L_3 - F_{32t} \cos(\theta_2 + 90 - \theta_3) h_3 + F_{32n} \sin(\theta_2 - \theta_3) L_3 - \\ & F_{32n} \cos(\theta_2 - \theta_3) h_3 - F_e \sin(\theta_{Fe} - \theta_3) (R_3 - L_3) - F_e \cos(\theta_{Fe} - \theta_3) h_3 - T_3 = 0 \end{aligned} \quad (3-47)$$



上式整理後可解出 F_{32n} 。

$$F_{32n} = \frac{-F_{32t} \cos(\theta_2 - \theta_3) L_3 + F_{32t} \sin(\theta_2 - \theta_3) h_3 - F_e \sin(\theta_{Fe} - \theta_3)(R_3 - L_3) - F_e \cos(\theta_{Fe} - \theta_3) h_3 - T_3}{-\sin(\theta_2 - \theta_3) L_3 + \cos(\theta_2 - \theta_3) h_3} \quad (3-48)$$

將(3-44)式至(3-47)式移項整理後可分別求得 P 、 F_{12x} 、 F_{12y} 。

$$P \cos \theta_P = -F_{ex} + F_{32t} \sin \theta_2 + F_{32n} \cos \theta_2 \quad (3-49)$$

$$P \sin \theta_P = -F_{ey} - F_{32t} \cos \theta_2 + F_{32n} \sin \theta_2 \quad (3-50)$$

$$P = \sqrt{(P \sin \theta_P)^2 + (P \cos \theta_P)^2} \quad (3-51)$$

$$F_{12x} = -Q \cos \theta_Q - F_{32t} \sin \theta_2 - F_{32n} \cos \theta_2 \quad (3-52)$$

$$F_{12y} = -Q \cos \theta_Q + F_{32t} \cos \theta_2 - F_{32n} \sin \theta_2 \quad (3-53)$$

可將(3-37)式、(3-49)式、(3-52)式至(3-54)式合併，表示為以下副函式

$$[P, F_{32}, F_{12x}, F_{12y}] = \text{ForceRR}(F_e, Q, T_2, T_3, R_2, R_3, L_2, L_3, h_2, h_3, \theta_2, \theta_3, \theta_{Fe}, \theta_Q)$$

3. 已知節點力 F_e 和外力 P 求外力 Q ，如圖 3-13 (c)

相異於前兩種類的自由體圖，本類須留意外力 Q 必須為已知角度或已知大小才有解，因此假設已知角度 θ_Q 。先由(3-39)式及(3-40)式求得 F_{32t} 與 F_{32n} ：

$$F_{32t} = F_{ex} \sin \theta_2 - F_{ey} \cos \theta_2 + P \sin(\theta_P - \theta_2) \quad (3-54)$$

$$F_{32n} = F_{ex} \cos \theta_2 + F_{ey} \sin \theta_2 + P \cos(\theta_P - \theta_2) \quad (3-55)$$

再由(3-35)式求得 Q ：

$$Q = \frac{-F_{32t} R_2 + T_2}{\sin[\theta_Q - (\theta_2 - 90^\circ)] h_2 + \cos[\theta_Q - (\theta_2 - 90^\circ)] L_2} \quad (3-56)$$



由(3-41)式及(3-42)式可求得 F_{12x} 與 F_{12y}

$$F_{12x} = -Q\cos\theta_Q - F_{32t}\cos(\theta_2 - 90^\circ) + F_{32n}\sin(\theta_2 - 90^\circ) \quad (3-57)$$

$$F_{12y} = -Q\sin\theta_Q - F_{32t}\sin(\theta_2 - 90^\circ) - F_{32n}\cos(\theta_2 - 90^\circ) \quad (3-58)$$

此即為開迴路二連桿 RR 機器手臂在未知名力為 P 時之靜力學力分析。可將(3-54)式至(3-58)式合併，表示為以下副函式：

$$\begin{aligned} & [Q, F_{32}, F_{12x}, F_{12y}] \\ & = \text{ForceRR}(F_e, P, T_2, T_3, R_2, R_3, L_2, L_3, h_2, h_3, \theta_2, \theta_3, \theta_{Fe}, \theta_P, \theta_Q) \end{aligned}$$

3-3-1 四連桿靜力學分析數值範例

本節將以一數值範例展示模組化法求解平面四連桿之靜力學分析。

圖 3-14 為一平面四連桿機構，欲求各桿件接點之受力及為達力平衡，桿件 2 所需要提供之扭矩 T_{12} 。首先將四連桿進行模組化拆解，如圖 3-15，其中各數值如表 3-1。

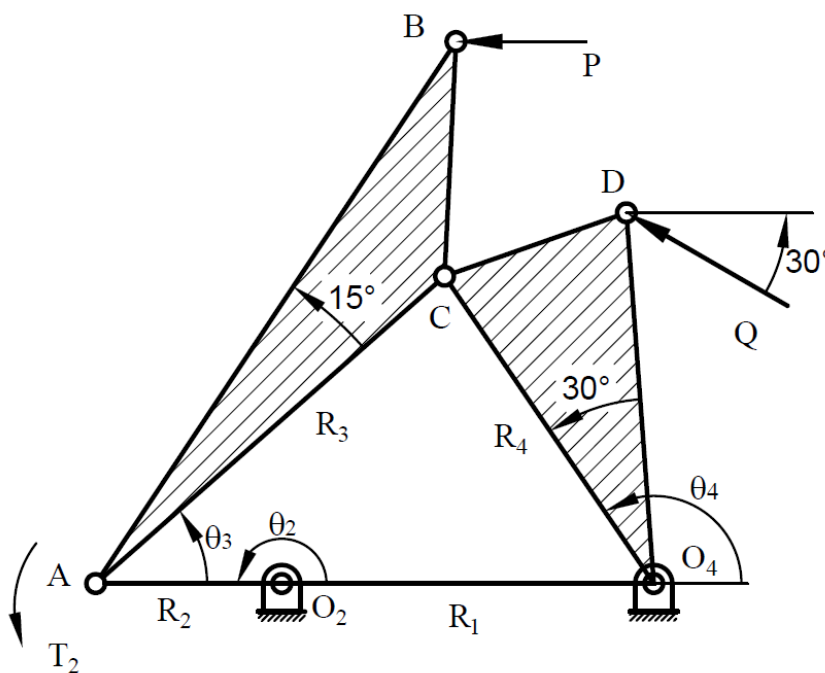


圖 3-14 平面四連桿機構範例

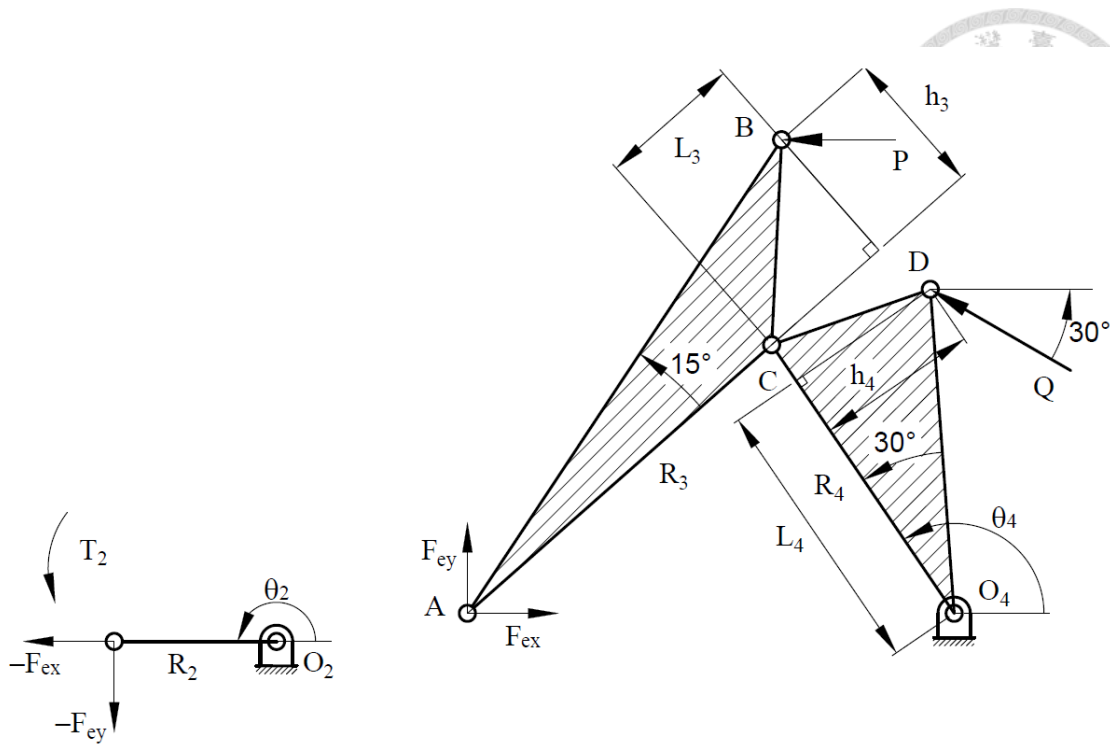


圖 3-15 平面四連桿機構範例模組化拆解

表 3-1 平面四連桿機構範例之各項參數

符號	數值(單位)	符號	數值(單位)
P	100 N	h_4	4 m
Q	200 N	h_3	3.6235 m
R_4	8 m	θ_4	124.2289°
R_3	10 m	θ_3	221.4096°
L_4	6.9282 m	θ_P	180°
L_3	-3.5230 m	θ_Q	150°

圖 3-15 中的桿件 3 及桿件 4 可視為一平面運動二連桿 RR 機器手臂，因此可將各項數值帶入套用副函式：

$$[F_{34}, F_{23x}, F_{23y}, F_{14x}, F_{14y}] = \text{ForceRR}(P, Q, 0, 0, R_4, R_3, L_4, L_3, h_4, h_3, \theta_4, \theta_3, \theta_P, \theta_Q)$$

利用 MATLAB 代入數值求解可得

$$\begin{bmatrix} F_{34} \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{14x} \\ F_{14y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 215.62\text{N} \\ 158.882\text{N} \\ 207.424\text{N} \\ 114.324\text{N} \\ -307.424\text{N} \end{bmatrix}$$



推出桿件 3 及桿件 4 之結果後，可利用 F_e 得到左邊輸入桿之力矩 T_2 。

$$T_2 = -F_{23y}R_2\cos 180^\circ = -829.697 \text{ N} \cdot \text{m}$$

由於將三角函數值取近似至小數點第四位，與第二章中閉迴路法結果之小數點第三位以下出現不同，但若不取近似值，其結果會與閉迴路法相同。



3-4 平面運動之二連桿 PR 機器手臂靜力學分析

本節將介紹如何進行平面二連桿 PR 機器手臂之靜力學分析。圖 3-9 為一個受兩外力 P、Q 之平面運動二連桿 PR 機器手臂之自由體圖。其中 T 為作用於桿件 3 之力矩，R 為桿件 3 之長度，h 為 B 至 AC 之垂直距離，L 為 B 與 AC 之交點與 C 點之距離， θ 為桿件 3 之角度， θ_P 表示外力 P 之角度， F_e 為節點力， θ_{F_e} 表示節點力 F_e 之角度。

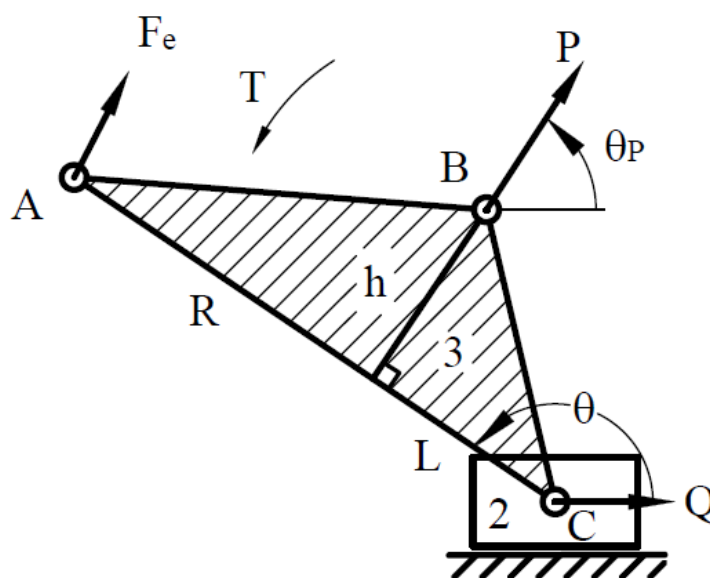
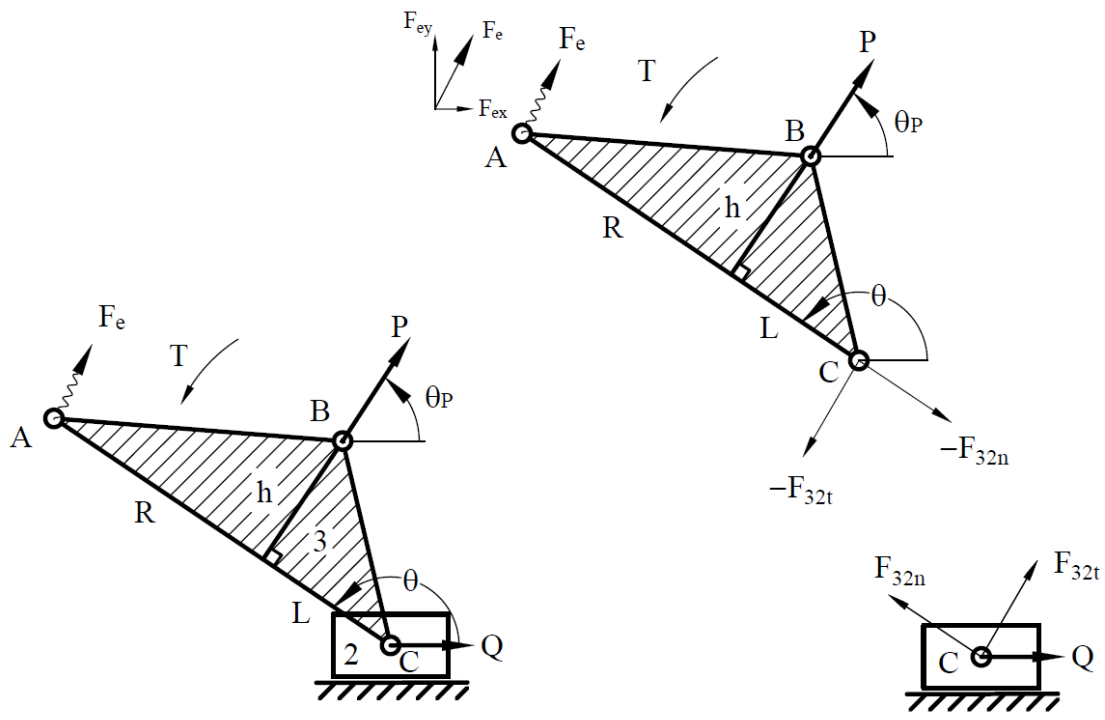
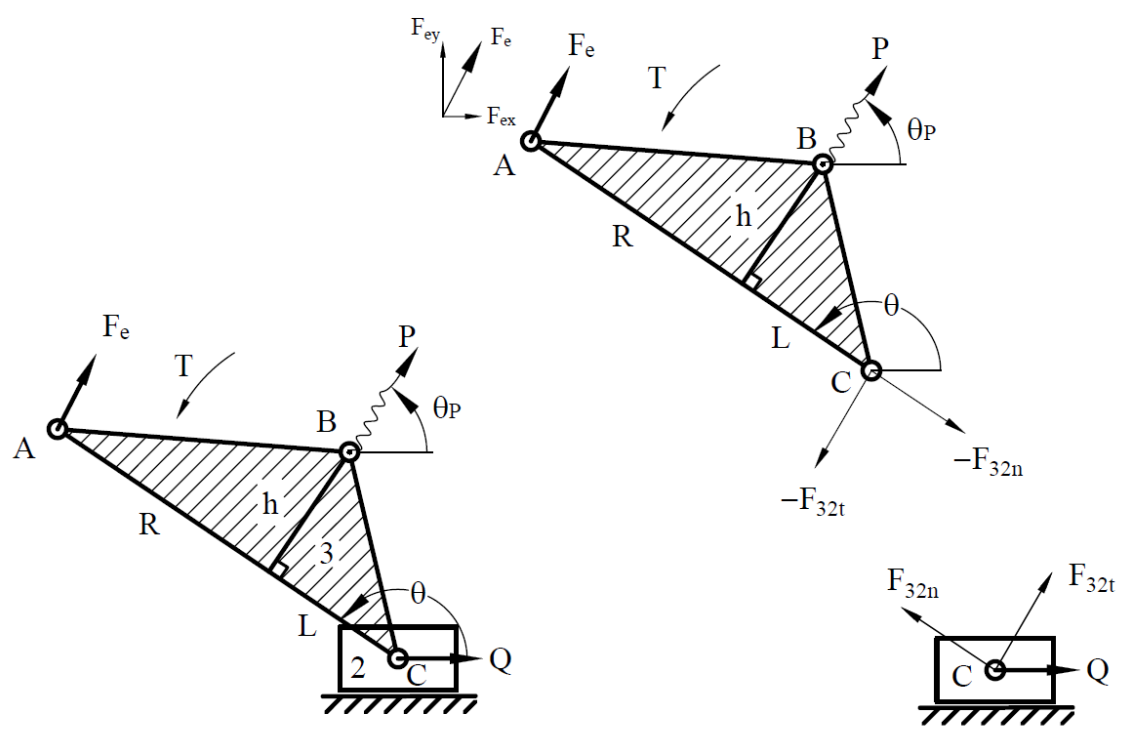


圖 3-16 受兩外力 P 與 Q 之平面運動二連桿 PR 機器手臂

若將 P、Q 或 F_e 分別當作未知力，則可將圖 3-16 所示 PR 機器手臂之自由體圖分為三類，如圖 3-17 所示。



(a)



(b)

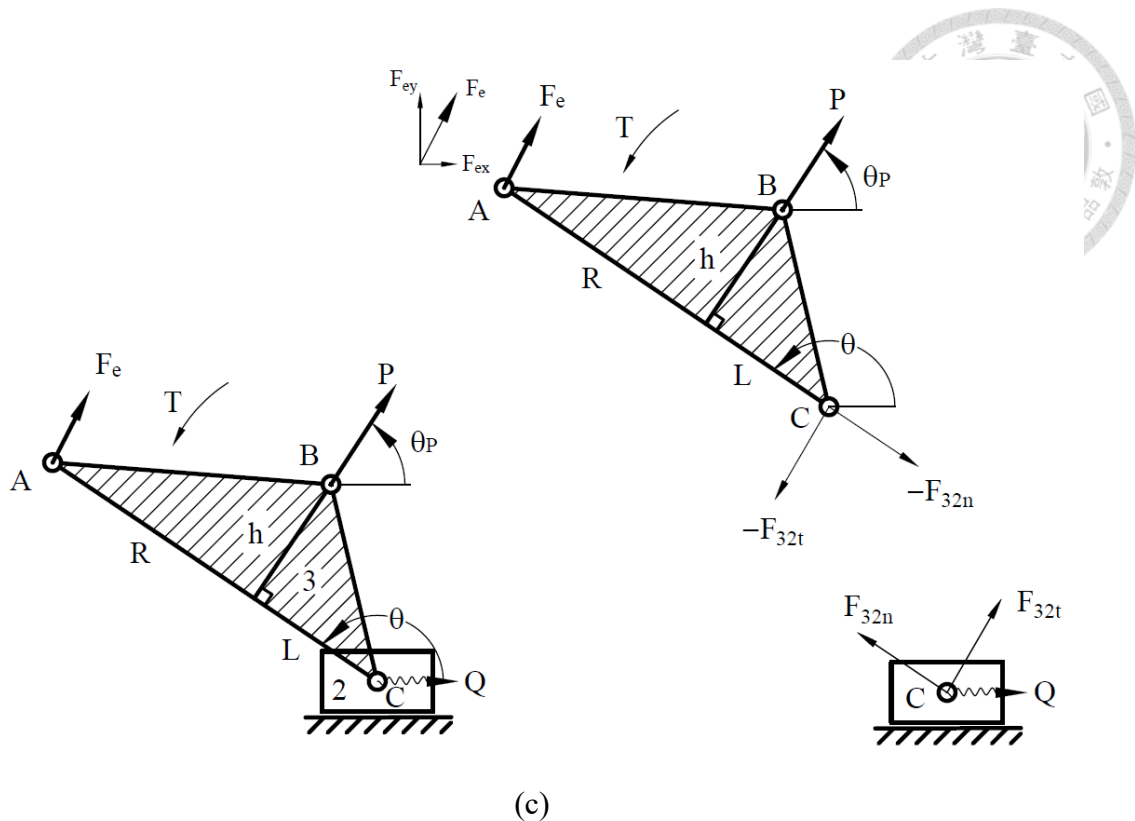


圖 3-17 受兩外力 P 與 Q 之平面運動二連桿 PR 機器手臂之三種類型

1. 已知外力 P 和 Q 求未知節點力 F_e ，如圖 3-17 (a)

首先分析桿件 3 之自由體圖，其平衡方程式可表示為：

$$F_{ex} + P\cos\theta_P + F_{32t}\cos(\theta + 90^\circ) + F_{32n}\cos(\theta + 180^\circ) = 0 \quad (3-59)$$

$$F_{ey} + P\sin\theta_P + F_{32t}\sin(\theta + 90^\circ) + F_{32n}\sin(\theta + 180^\circ) = 0 \quad (3-60)$$

$$-F_{32t}R + P\sin(\theta_P - \theta)(R - L) + P\cos(\theta_P - \theta)h - T = 0 \quad (3-61)$$

其中(3-61)式整理後可得 F_{32t} ：

$$F_{32t} = \frac{P\sin(\theta_P - \theta)(R - L) + P\cos(\theta_P - \theta)h - T}{-R} \quad (3-62)$$

再根據滑件 2 之自由體圖列出平衡方程式：

$$F_{32n}\cos\theta + F_{32t}\sin\theta + Q = 0 \quad (3-63)$$

$$-F_{32t}\cos\theta + F_{32n}\sin\theta = -N \quad (3-64)$$



由(3-63)式可解出 F_{32n} ：

$$F_{32n} = \frac{F_{32t}\sin\theta + Q}{-\cos\theta} \quad (3-65)$$

再由(3-64)式解出 N ：

$$N = -F_{32t}\sin(\theta - 90^\circ) - F_{32n}\sin\theta \quad (3-66)$$

最後由(3-59)式與(3-60)式分解出 F_{ex} 、 F_{ey}

$$F_{ex} = -P\cos\theta_p + F_{32t}\sin\theta + F_{32n}\cos\theta \quad (3-67)$$

$$F_{ey} = -P\sin\theta_p - F_{32t}\cos\theta + F_{32n}\sin\theta \quad (3-68)$$

此即為開迴路二連桿 PR 機器手臂求解未知力 F_e 時之靜力學力分析。可將(3-62)式、(3-65)式至(3-68)式合併，表示為以下副函式：

$$[F_{32}, F_{ex}, F_{ey}, N] = \text{ForcePR}(P, Q, T, R, L, h, \theta, \theta_p)$$

2. 已知外力 Q 和 F_e 求未知力 P ，如圖 3-17 (b)

根據桿件 3 的自由體圖，對 B 點取力矩平衡，可列出平衡方程式：

$$F_{32t}L + F_e\cos(\theta_{F_e} - \theta)h + F_e\sin(\theta_{F_e} - \theta)(R - L) - T = 0 \quad (3-69)$$

由(3-69)式可解出 F_{12t} ：

$$F_{32t} = \frac{F_e\cos(\theta_{F_e} - \theta)h + F_e\sin(\theta_{F_e} - \theta)(R - L) - T}{-L} \quad (3-70)$$

F_{32n} 與 N 同樣可由(3-65)式及(3-66)式求得，最後由(3-59)式與(3-60)式解出 P

$$P\cos\theta_p = -F_{ex} + F_{32t}\sin\theta + F_{32n}\cos\theta \quad (3-71)$$

$$P\sin\theta_p = -F_{ey} - F_{32t}\cos\theta + F_{32n}\sin\theta \quad (3-72)$$

$$P = \sqrt{(P\sin\theta_p)^2 + (P\cos\theta_p)^2} \quad (3-73)$$



最後可將(3-69)式、(3-70)式與(3-73)式合併，表示為以下副函式

$$[P, F_{12}, N] = \text{ForcePR}(F_e, Q, T, R, L, h, \theta, \theta_{F_e})$$

3. 已知外力 P 和 F_e 求未知力 Q ，如圖 3-17(c)

F_{32t} 同樣可由(3-62)式解出，再由(3-59)式或(3-60)式解出 F_{32n} ：

$$F_{32n} = \frac{F_{ex} + P\cos\theta_P + F_{12t}\cos(\theta_1 + 90^\circ)}{-\cos(\theta_1 + 180^\circ)} \quad (3-74)$$

$$F_{32t} = \frac{F_{ey} + P\sin\theta_P + F_{12t}\sin(\theta_1 + 90^\circ)}{-\sin(\theta_1 + 180^\circ)} \quad (3-75)$$

求得 F_{32n} 即可利用(3-63)式及(3-66)式解出 Q 、 N 。最後可將(3-62)式、(3-63)式、(3-66)與(3-74)式合併，表示為以下副函式：

$$[F_{32}, Q, N] = \text{ForcePR}(P, F_e, T, R, L, h, \theta, \theta_{F_e}, \theta_P)$$

3-4-1 數值模擬範例

本節將以一數值範例展示模組化法求解滑件曲柄機構之靜力學分析。

圖 3-18 為一滑件曲柄機構。其中 $R_2 = 2.8$ 、 $R_3 = 8$ 、 $\theta_2 = 78^\circ$ 、 $\theta_3 = 19.9^\circ$ ，滑件受一水平方向之力，大小為 200N。欲求各桿件接點之受力，及為靜力平衡桿 2 所需之扭矩 T_{12} 。首先，將機構進行模組化拆解如圖 3-19。

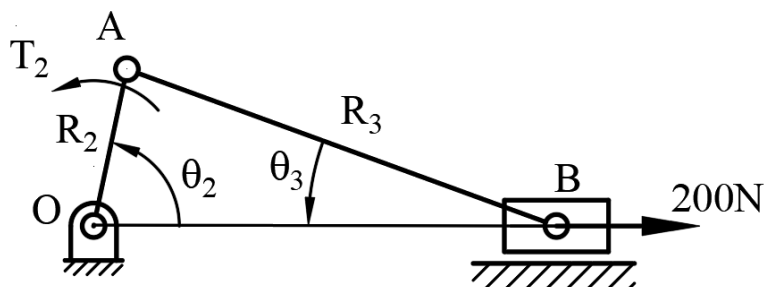


圖 3-18 滑件曲柄機構範例

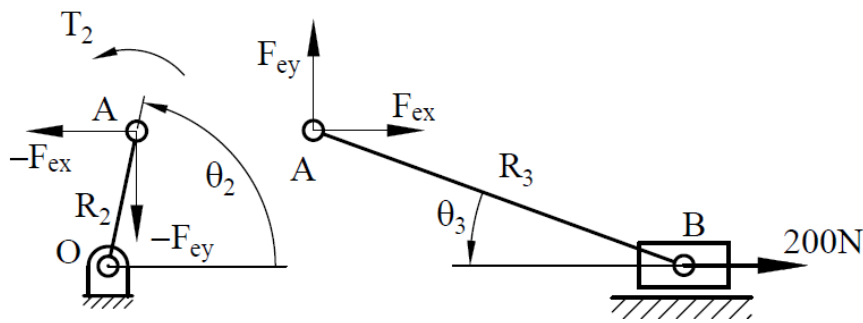


圖 3-19 滑件曲柄機構範例模組化拆解

圖 3-19 中桿件三及滑件為一平面運動二連桿 PR 機器手臂，可將各項數值帶入套用副函式：

$$[F_{34}, F_{23x}, F_{23y}, N] = \text{ForcePR}(P, Q, T, R, L, h, \theta, \theta_p)$$

其中需輸入的數值如表 3-2 所示。

表 3-2 滑件曲柄機構範例之各項參數

符號	數值(單位)	符號	數值(單位)
P	0	h	0
Q	200 N	θ	160.0948°
T	0	θ_p	0°
R	8 m	θ_Q	180°
L	0		

將數值代入並利用 MATLAB 求解可得

$$\begin{bmatrix} F_{34} \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 212.701\text{N} \\ -200\text{N} \\ 72.399\text{N} \\ -72.399\text{N} \end{bmatrix}$$

推出桿件 3 及滑件 4 之結果後，可參考桿件 2 之自由體圖得到輸入桿力矩 T_2 。

$$T_2 = R_2(F_{ex}\cos\theta_2 - F_{ey}\sin\theta_2) = 589.9 \text{ N} \cdot \text{m}$$

此結果與 2-3-2 節利用閉迴路法計算之結果相同。



3-5 平面運動之二連桿 RP 機器手臂靜力學分析

本節將介紹如何進行平面二連桿 RP 機器手臂之靜力學分析。圖 3-20 為一個受兩外力 P 、 Q 之平面運動二連桿 RP 機器手臂之自由體圖。其中 T 為作用於桿件 2 之力矩， R_2 為桿件 2 之長度， θ_2 為桿件 2 之角度， θ_P 表示外力 P 之角度， F_e 為點 B 所受到的節點力。

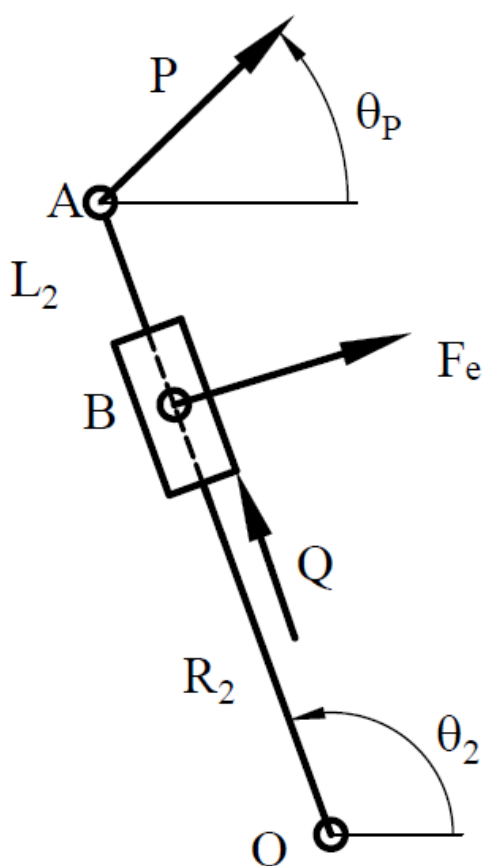
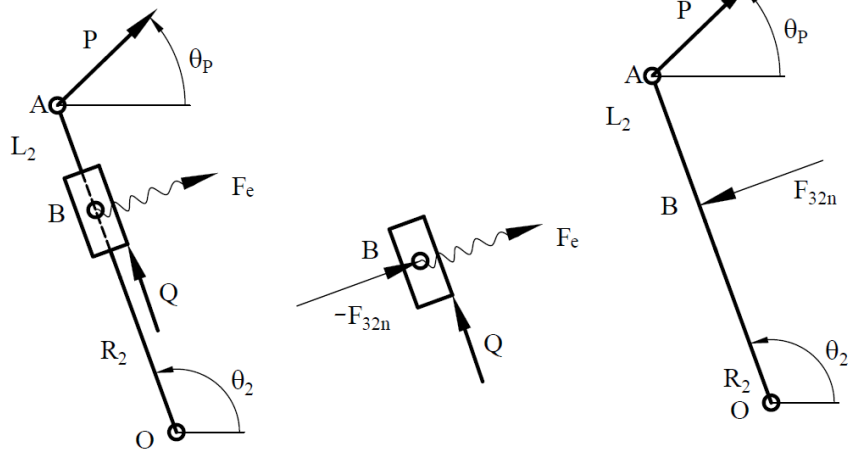
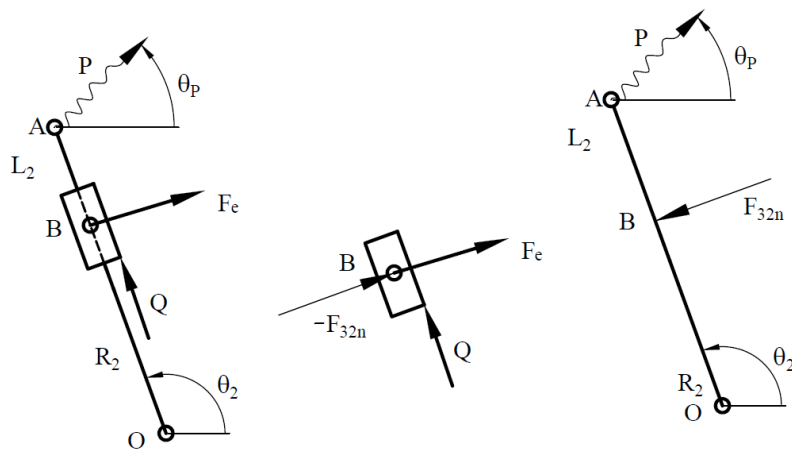


圖 3-20 受兩外力 P 與 Q 之平面運動之二連桿 RP 機器手臂

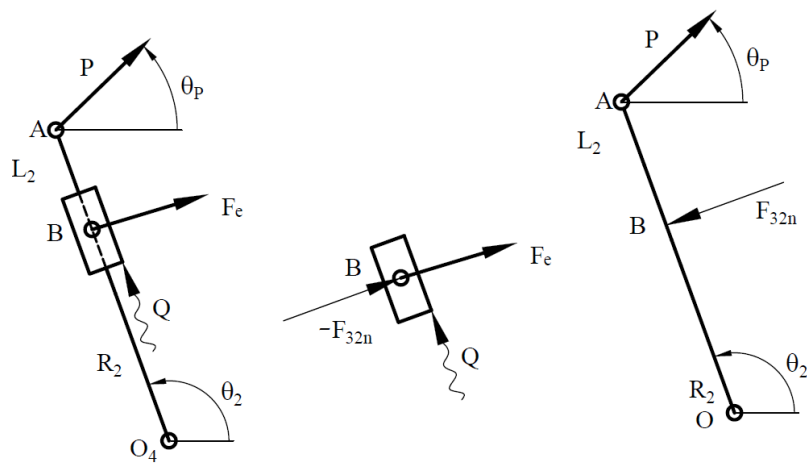
若將 P 、 Q 或 F_e 分別當作未知力，則可將圖 3-20 所示 RP 機器手臂之自由體圖分為三類，如圖 3-21 所示。



(a)



(b)



(c)

圖 3-21 受兩外力 P 與 Q 之平面運動二連桿 RP 機器手臂之三種類型



1. 已知外力 P 和 Q 求未知節點力 F_e ，如圖 3-21(a)

根據桿件 2 的自由體圖，其平衡方程式可表示為：

$$F_{12x} + F_{32n} \cos(\theta_2 + 90^\circ) = -P \cos \theta_P \quad (3-76)$$

$$F_{12y} + F_{32n} \sin(\theta_2 + 90^\circ) = -P \sin \theta_P \quad (3-77)$$

$$F_{32n} R_2 + T_3 = P \sin(\theta_2 - \theta_P) L_2 \quad (3-78)$$

根據滑件 3 的自由體圖，其平衡方程式可表示為：

$$F_{ex} + F_{32n} \cos(\theta_2 - 90^\circ) = -Q \cos \theta_2 \quad (3-79)$$

$$F_{ey} + F_{32n} \sin(\theta_2 - 90^\circ) = -Q \sin \theta_2 \quad (3-80)$$

$$T_3 = 0 \quad (3-81)$$

其中(3-78)式與(3-81)合併整理後可得 F_{32n} ：

$$F_{32n} = \frac{P \sin(\theta_2 - \theta_P) L_2}{-R_2} \quad (3-82)$$

再由(3-76)、(3-77)式解出 F_{12x} 、 F_{12y}

$$F_{12x} = F_{32n} \sin \theta_2 - P \cos \theta_P \quad (3-83)$$

$$F_{12y} = -F_{32n} \cos \theta_2 - P \sin \theta_P \quad (3-84)$$

最後由(3-79)式及(3-80)式可解出 F_{ex} 、 F_{ey} ：

$$F_{ex} = -F_{32n} \sin \theta_2 - Q \cos \theta_2 \quad (3-85)$$

$$F_{ey} = F_{32n} \cos \theta_2 - Q \sin \theta_2 \quad (3-86)$$

此即為開迴路二連桿 RP 機器手臂求解未知力 F_e 時之靜力學力分析。可將(3-82)

式至(3-86)式合併，表示為以下副函式

$$[F_{32n}, F_{ex}, F_{ey}, F_{12x}, F_{12y}] = \text{ForceRP}(P, Q, R_2, L_2, \theta_2, \theta_P)$$



2. 已知外力 Q 和 F_e 求未知力 P ，如圖 3-21 (b)

此種類須留意需在已知 P 之大小或角度時才有解，因此假設已知角度 θ_P 。

F_{32n} 可由 (3-79) 式可解出：

$$F_{32n} = \frac{F_{ex} + Q\cos\theta_Q}{-\sin\theta_2} \quad (3-87)$$

接著可由 (3-78) 式解出 P ：

$$P = \frac{-F_{32n}R_2}{\sin(\theta_2 - \theta_P)L_2} \quad (3-88)$$

最後一樣由 (3-83) 式及 (3-84) 式解出 F_{12x} 、 F_{12y} ，將 (3-83) 式、(3-84) 式、(3-87) 式與 (3-88) 式合併，表示為以下副函式

$$[F_{32n}, P, F_{12x}, F_{12y}] = \text{ForceRP}(F_e, Q, R_2, L_2, \theta_2, \theta_P)$$

3. 已知外力 P 和 F_e 求未知力 Q ，如圖 3-21 (c)

可先由 (3-82) 式得到 F_{32n} ，接著由 (3-83) 式及 (3-84) 式得到 F_{12x} 、 F_{12y} ，最後由 (3-79) 式可解出 Q ：

$$Q = \frac{F_{ex} + F_{32n}\sin\theta_2}{-\cos\theta_Q} \quad (3-89)$$

最後可將 (3-82) 式、(3-83) 式、(3-84) 式與 (3-89) 式合併，表示為以下副函式

$$[F_{32n}, Q, F_{12x}, F_{12y}] = \text{ForceRP}(P, F_e, R_2, L_2, \theta_2, \theta_P)$$



3-5-1 數值模擬範例

圖 3-22 為一受到兩外力 P 、 Q 之倒置滑件曲柄機構。其中各項數值如表 3-3

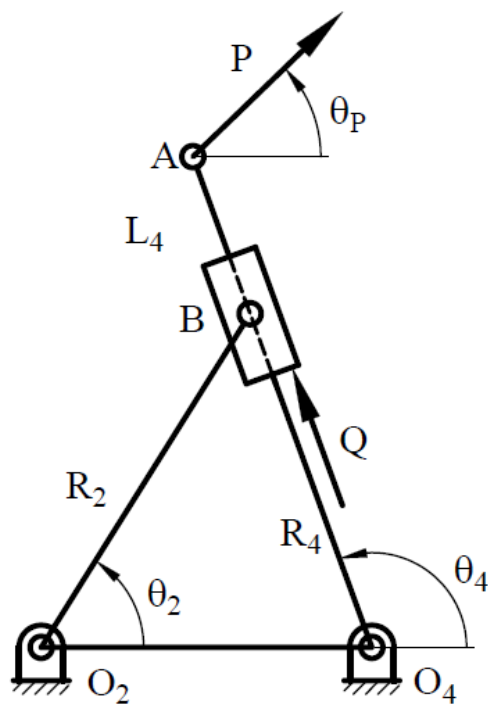


圖 3-22 倒置滑件曲柄機構範例

表 3-3 倒置滑件曲柄機構範例之各項參數

符號	數值(單位)	符號	數值(單位)
P	100 N	L_4	10 m
Q	200 N	θ_2	51.5431°
R_2	6 m	θ_4	70°
R_4	5 m	θ_P	30°

先將圖 3-22 進行模組化拆解，如圖 3-23。

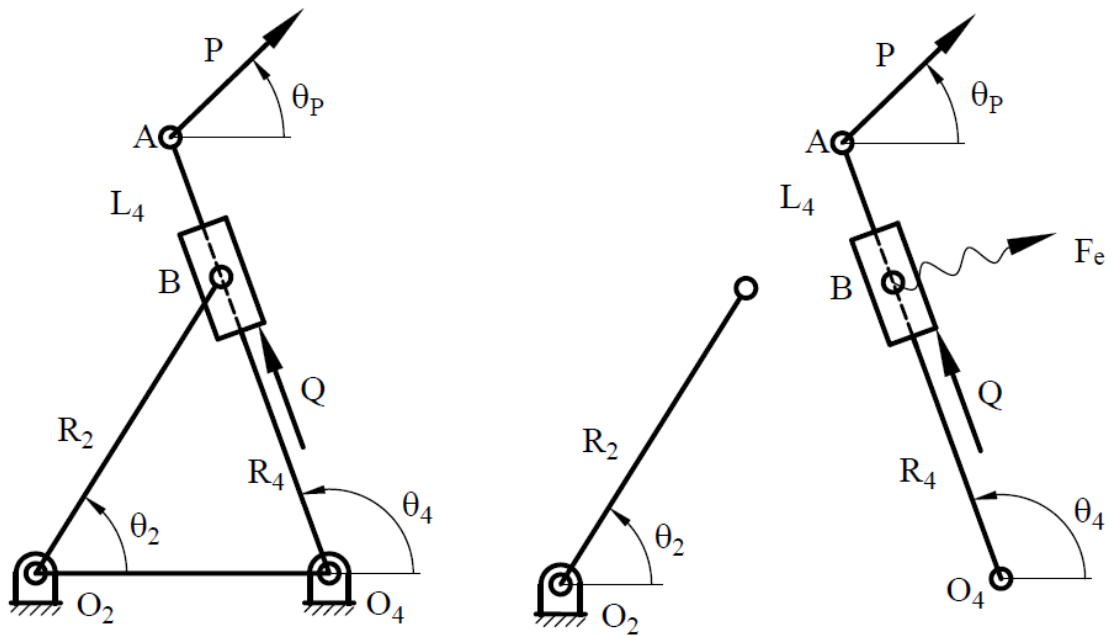


圖 3-23 倒置滑件曲柄機構範例模組化拆解

圖 3-23 的滑塊 3 及桿件 4 可視為一 RP 二連桿機械手臂，套用副函式：

$$[F_{34n}, F_{ex}, F_{ey}, F_{14x}, F_{14y}] = \text{ForceRP}(P, Q, R_4, L_4, \theta_4, \theta_P)$$

利用 MATLAB 求解可得

$$\begin{bmatrix} F_{34n} \\ F_{ex} \\ F_{ey} \\ F_{14x} \\ F_{14y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 128.558\text{N} \\ -189.209\text{N} \\ -143.969\text{N} \\ 34.202\text{N} \\ -93.969\text{N} \end{bmatrix}$$

最後可根據桿件 2 的自由體圖求得輸入桿之力矩 T_2 ：

$$T_2 = -F_{ex}R_2\sin\theta_2 + F_{ey}R_2\cos\theta_2 = -351.759\text{N} \cdot \text{m}$$

此結果與 2-4-2 節利用閉迴路法計算之結果相同。



3-6 曲柄牛頭刨床靜力學分析數值模擬範例

圖 3-24 為一六連桿之曲柄牛頭刨床機構，其中固定樞軸 O_2 和固定樞軸 O_4 的距離為 R_1 ，桿 2 為輸入桿，用以接受動力源驅動機構之桿件，其長度為 R_2 ，桿 4 為連接固定樞軸 O_4 之桿件，其長度為 R_4 ，點 A 為一沿桿 4 運動之滑件，其衝程為 L_4 ，點 C 為一沿水平線運動之滑件，桿 5 為同時與桿 4 和滑件 C 鄰接之桿件，其長度為 R_5 ， θ_2 為輸入角（輸入變數）， θ_4 和 θ_5 為其致動接頭之旋轉角度。其各項參數如表 3-4。

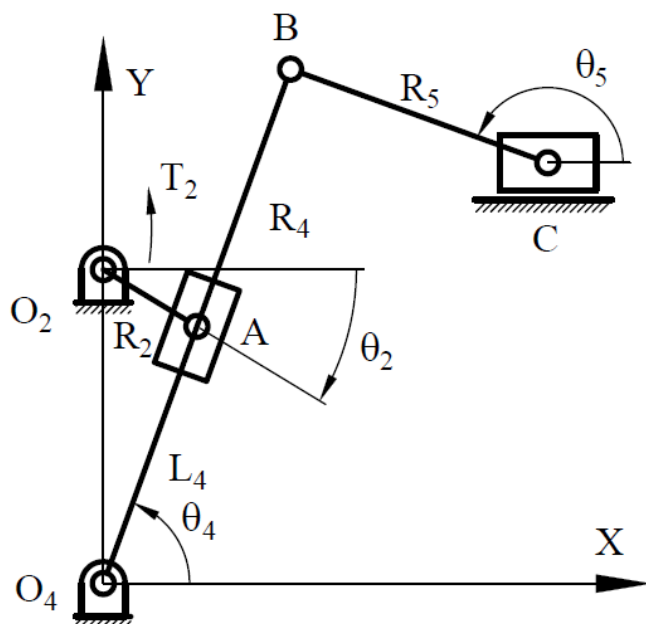


圖 3-24 曲柄牛頭刨床機構

表 3-4 曲柄牛頭刨床之各項參數

符號	數值	符號	數值
F	200 N	R_5	5 m
L_4	5 m	θ_2	-31.2347°
R_2	2 m	θ_4	70°
R_4	10 m	θ_5	160°



首先將曲柄牛頭刨床機構進行模組化拆解，如圖 3-25。

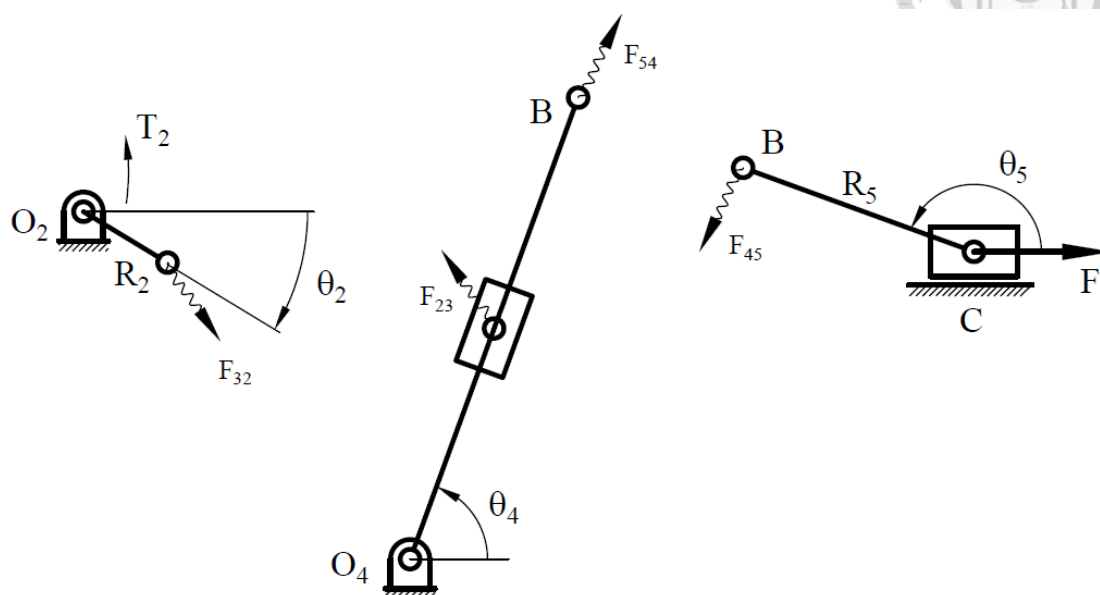


圖 3-25 曲柄牛頭刨床機構模組化拆解

拆解後桿件 2 為一輸入桿，滑件 3 及桿件 4 為一 RP 機器手臂，桿件 5 及滑件 6 為一 PR 機器手臂。首先將 PR 機械手臂部分帶入副函式：

$$[F_{65}, F_{45x}, F_{45y}, N] = \text{ForcePR}(0, 200, 0, 5, 0, 0, 160, 0, 0)$$

利用 MATLAB 求解可得

$$\begin{bmatrix} F_{65} \\ F_{45x} \\ F_{45y} \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 212.836\text{N} \\ -200\text{N} \\ 72.794\text{N} \\ -72.794\text{N} \end{bmatrix}$$

得到 F_{45} 後即可繼續求解 RP 機器手臂之靜力學，依樣將其帶入副函式：

$$[F_{34n}, F_{23x}, F_{23y}, F_{14}] = \text{ForceRP}(212.836, 0, 5, 10, 70, -20)$$

利用 MATLAB 求解可得

$$\begin{bmatrix} F_{34n} \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 425.671\text{N} \\ -400\text{N} \\ 145.588\text{N} \\ 212.836\text{N} \end{bmatrix}$$



最後在已知 F_{23} 的條件下可根據桿件 2 的自由體圖列出平衡方程式求得 F_{12} 及 T_2 。

$$F_{12x} = F_{23x} = -400 \text{ N}$$

$$F_{12y} = F_{23y} = 145.588 \text{ N}$$

$$T_2 = F_{23x}R_2\sin\theta_2 - F_{23y}R_2\cos\theta_2 = 165.866 \text{ N} \cdot \text{m}$$

此結果與 2-5-2 節利用閉迴路法計算之結果相同。

本章所提出的方法與閉迴路法可達到相同效果且更為簡便，只需利用三種基礎模組便可解決大部分平面連桿機構之力學分析問題。

第四章 平面連桿機構之模組化靜力學誤差分析



4-1 機械誤差

考慮一連桿機構，具有 n 個固定參數 a_1, a_2, \dots, a_n ，用以表示各桿件尺寸，且此連桿機構能夠將一輸入運動(在此定義為輸入變數 ϕ)轉換成另一輸出運動(在此定義為輸出變數 ψ)，則以上提到之固定參數和變數可表示成以下函式形式：

$$\psi = F(a_1, a_2, \dots, a_n, \phi) \quad (4-1)$$

實際情況下，連桿機構皆會因為桿件變形或製造不夠精確等因素，使其各桿件尺寸 a_1, a_2, \dots, a_n 產生尺寸誤差 $\Delta a_1, \Delta a_2, \dots, \Delta a_n$ ，輸入變數 ϕ 也會因為控制不夠精確，而產生運動誤差 $\Delta \phi$ ，此時輸出變數將會變成 $\psi + \Delta \psi$ ，可表示成以下函式形式：

$$\psi + \Delta \psi = F(a_1 + \Delta a_1, a_2 + \Delta a_2, \dots, a_n + \Delta a_n, \phi + \Delta \phi) \quad (4-2)$$

其中 $\Delta \psi$ 即為機械誤差，在此以 ϵ_m 表示之，如下所示：

$$\epsilon_m = \Delta \psi \quad (4-3)$$

由於 $\Delta a_1, \Delta a_2, \dots, \Delta a_n, \Delta \phi, \Delta \psi$ 皆可視為極小數值，因此可利用全微分的方法，將機械誤差寫成以下方程式：

$$\Delta \psi = \frac{\partial F}{\partial a_1} \times \Delta a_1 + \frac{\partial F}{\partial a_2} \times \Delta a_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial a_n} \times \Delta a_n + \frac{\partial F}{\partial \phi} \times \Delta \phi = \epsilon_m \quad (4-4)$$

由上式(4-4)可看出，連桿機構之機械誤差 ϵ_m 可視為為分別考慮各項誤差所造成之個別誤差的總和。



4-2 機械誤差分析理論

以下將以 Hartenberg 所提出的機械誤差分析理論[2]為基礎，依序分析四連桿機構、滑件曲柄機構以及倒置滑件曲柄機構之機械誤差方程式的推導。

4-2-1 四連桿機構之機械誤差分析

圖 4-1 為一平面四連桿機構，其中桿 1 為固定於機架上之桿件，稱之為固定桿，其長度為 a_1 ，桿 2 為接受動力源用以驅動四連桿之桿件，稱之為輸入桿，其長度為 a_2 ，桿 4 為受輸入桿影響而致動之桿件，稱之為輸出桿，其長度為 a_4 ，桿 3 為同時與桿 2 和桿 4 鄰接之桿件，運動時無固定旋轉中心，稱之為耦桿，其長度為 a_3 ， θ_2 為輸入角（輸入變數）， θ_4 為輸出角（輸出變數）。

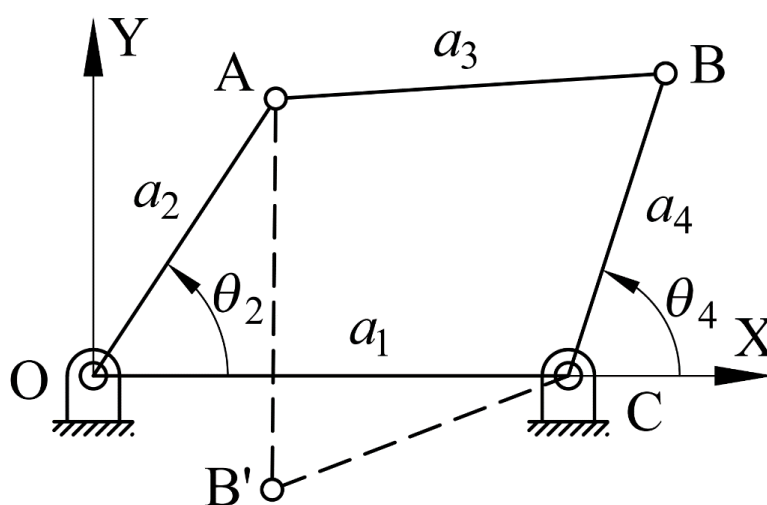


圖 4-1 平面四連桿機構

4-2-2 機械誤差方程式

設定一 XY 座標如圖 4-1 所示，以固定樞軸 O 為原點，則運動樞軸 A 和 B 的座標可表示如下：

$$A(a_2 \cos \theta_2, a_2 \sin \theta_2) \quad (4-5)$$

$$B(a_1 + a_4 \cos \theta_4, a_4 \sin \theta_4) \quad (4-6)$$



其中 A 和 B 兩座標之距離為 a_3 ，故可得以下方程式：

$$(a_1 + a_4 \cos \theta_4 - a_2 \cos \theta_2)^2 + (a_4 \sin \theta_4 - a_2 \sin \theta_2)^2 = a_3^2 \quad (4-7)$$

將上式(4-7)展開並化簡後，可得四連桿之位移方程式如下所示：

$$D \sin \theta_4 + E \cos \theta_4 = F \quad (4-8)$$

其中，

$$D = 2a_2 a_4 \sin \theta_2 \quad (4-9)$$

$$E = 2a_2 a_4 \cos \theta_2 - 2a_1 a_4 \quad (4-10)$$

$$F = a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 - 2a_1 a_2 \cos \theta_2 \quad (4-11)$$

根據三角函數公式， $\sin \theta_4$ 和 $\cos \theta_4$ 可表示如下：

$$\sin \theta_4 = \frac{2 \tan(\theta_4/2)}{1 + \tan^2(\theta_4/2)} \quad (4-12)$$

$$\cos \theta_4 = \frac{1 - \tan^2(\theta_4/2)}{1 + \tan^2(\theta_4/2)} \quad (4-13)$$

再根據上式(4-12)和(4-13)的三角函數公式，可將上式(4-8)置換變數後，得以下方程式：

$$D \left(\frac{2t}{1+t^2} \right) + E \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right) = F \quad (4-14)$$

其中，

$$t = \tan \frac{\theta_4}{2} \quad (4-15)$$

此時方程式(4-14)可視為為一以 t 為變數之一元二次方程式，因此可利用公式法解得 θ_4 ，共有兩個解，分別表示如下：

$$\theta_4 = 2 \tan^{-1} \left(\frac{D + \sqrt{D^2 + E^2 - F^2}}{E + F} \right) \quad (4-16)$$

$$\theta_4 = 2 \tan^{-1} \left(\frac{D - \sqrt{D^2 + E^2 - F^2}}{E + F} \right) \quad (4-17)$$

其具有兩個解，是因為四連桿具有兩個構形，如圖 4-1 所示，分別為 OABC 和 OAB'C，因此一輸入角 θ_2 有兩對應之輸出角 θ_4 。

由於製造上的不精確，造成桿長有尺寸誤差 (Δa_1 、 Δa_2 、 Δa_3 和 Δa_4)，並且因為控制上的不精確，造成輸入角也有運動誤差 ($\Delta\theta_2$)，這些誤差會修正上式(4-9)、(4-10)和(4-11)之係數 D、E 和 F，使其產生偏差 ΔD 、 ΔE 和 ΔF ，進而造成輸出角產生誤差 $\Delta\theta_4$ ，此時可將位移方程式(4-8)改寫如下：

$$(D + \Delta D)\sin(\theta_4 + \Delta\theta_4) + (E + \Delta E)\cos(\theta_4 + \Delta\theta_4) = F + \Delta F \quad (4-18)$$

透過三角函數和差化積之公式將上式(4-18)展開，並透過近似方法估算化簡後（因為 $\Delta \approx 0$ ，所以 $\sin\Delta\theta_4 = \Delta\theta_4$ ， $\cos\Delta\theta_4 = 1$ ， $\Delta \times \Delta = 0$ ），可整理得誤差 $\Delta\theta_4$ 之方程式，如下所示：

$$\Delta\theta_4 = \frac{-\Delta D \sin\theta_4 - \Delta E \cos\theta_4 + \Delta F}{D \cos\theta_4 - E \sin\theta_4} = \epsilon_m \quad (4-19)$$

其中誤差 $\Delta\theta_4$ 即為四連桿之機械誤差 ϵ_m ，上式(4-19)即為四連桿之機械誤差方程式。接下來將分析各項誤差所造成之個別誤差，若只考慮尺寸誤差 Δa_1 時，所造成之偏差 ΔD 、 ΔE 和 ΔF 如下所示：

$$\Delta D = (D + \Delta D) - D = 2a_2a_4\sin\theta_2 - 2a_2a_4\sin\theta_2 = 0 \quad (4-20)$$

$$\begin{aligned} \Delta E &= (E + \Delta E) - E \\ &= 2a_2a_4\cos\theta_2 - 2(a_1 + \Delta a_1)a_4 - (2a_2a_4\cos\theta_2 - 2a_1a_4) \quad (4-21) \\ &= -2\Delta a_1a_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta F &= (F + \Delta F) - F = (a_1 + \Delta a_1)^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 \\ &\quad - 2(a_1 + \Delta a_1)a_2\cos\theta_2 - (a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 - 2a_1a_2\cos\theta_2) \quad (4-22) \\ &= 2a_1\Delta a_1 - 2\Delta a_1a_2\cos\theta_2 \end{aligned}$$



將上式(4-20)、(4-21)和(4-22)代入上式(4-19)，經整理化簡後，即可獲得尺寸誤差 Δa_1 所造成之個別誤差 ϵ_1 ，如下所示：

$$\epsilon_1 = 2\Delta a_1 \frac{a_4 \cos\theta_4 + a_1 - a_2 \cos\theta_2}{D \cos\theta_4 - E \sin\theta_4} \quad (4-23)$$

同理可得其他尺寸誤差所造成之個別誤差，尺寸誤差 Δa_2 所造成之個別誤差 ϵ_2 ，如下所示：

$$\epsilon_2 = -2\Delta a_2 \frac{a_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) - a_2 + a_1 \cos\theta_2}{D \cos\theta_4 - E \sin\theta_4} \quad (4-24)$$

尺寸誤差 Δa_3 所造成之個別誤差 ϵ_3

$$\epsilon_3 = -2\Delta a_3 \frac{a_3}{D \cos\theta_4 - E \sin\theta_4} \quad (4-25)$$

尺寸誤差 Δa_4 所造成之個別誤差 ϵ_4

$$\epsilon_4 = 2\Delta a_4 \frac{-a_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) + a_4 + a_1 \cos\theta_4}{D \cos\theta_4 - E \sin\theta_4} \quad (4-26)$$

運動誤差 $\Delta\theta_2$ 所造成之個別誤差 ϵ_{θ_2} ，如下所示：

$$\epsilon_{\theta_2} = 2\Delta\theta_2 \frac{a_2(a_4 \sin(\theta_2 - \theta_4) + a_1 \sin\theta_2)}{D \cos\theta_4 - E \sin\theta_4} \quad (4-27)$$

透過以上分析各項誤差所造成之個別誤差，便能夠了解各項誤差對機械誤差之影響程度，稱之為敏感度。若該項誤差所造成之個別誤差愈大，其對機械誤差之影響程度就會愈大，此時需嚴格控制其誤差，以避免誤差過大，造成不可接受之機械誤差；反之若該項誤差所造成之個別誤差愈小，其對機械誤差之影響程度就會愈小，此時就不需花費過多成本來控制其誤差。



4-2-3 滑件曲柄機構之機械誤差分析

圖 4-2 為一滑件曲柄機構，其中桿 1 為輸入桿，用以驅動滑件曲柄機構之桿件，其長度為 a_1 ，點 B 為一沿水平線運動之滑件，桿 2 為同時與桿 1 和滑件 B 鄰接之桿件，其長度為 a_2 ，滑件 B 與 X 軸之偏位量為 a_3 ， θ_1 為桿 1 與 X 軸之夾角，為輸入角， s 為滑件 B 之衝程，為輸出變數。

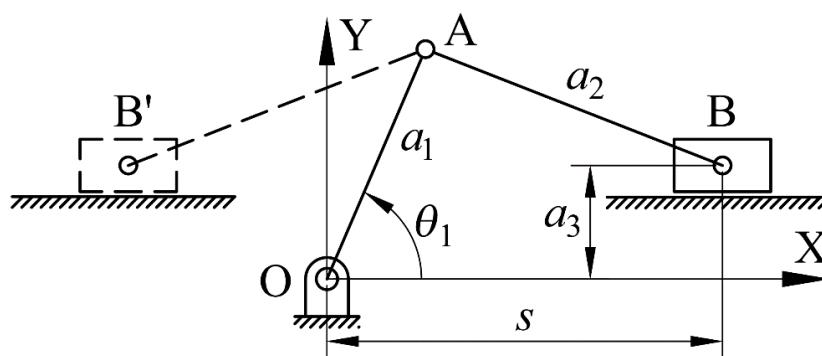


圖 4-2 滑件曲柄機構

設定一 XY 座標如圖 4-2 所示，以固定樞軸 O 為原點，則運動樞軸 A 和 B 的座標可表示如下：

$$A(a_1 \cos \theta_1, a_1 \sin \theta_1) \quad (4-28)$$

$$B(s, a_3) \quad (4-29)$$

其中 A 和 B 兩座標之距離為 a_2 ，故可得以下方程式：

$$(s - a_1 \cos \theta_1)^2 + (a_3 - a_1 \sin \theta_1)^2 = a_2^2 \quad (4-30)$$

將上式(4-30)展開並化簡後，可得滑件曲柄之位移方程式如下所示：

$$s^2 + Ds = E \quad (4-31)$$

其中

$$D = -2a_1 \cos \theta_1 \quad (4-32)$$

$$E = -a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + 2a_1 a_3 \sin \theta_1 \quad (4-33)$$

由於製造上的不精確，造成桿長有尺寸誤差 (Δa_1 、 Δa_2)，偏位量也有尺寸誤差 (Δa_3)，並且因為控制上的不精確，造成輸入角有運動誤差 ($\Delta \theta_1$)，這些誤差會修正上式(4-32)和(4-33)之係數 D 和 E，使其產生偏差 ΔD 和 ΔE ，進而造成輸出變數產生誤差 Δs ，此時可將位移方程式(4-31)改寫如下：

$$(s + \Delta s)^2 + (D + \Delta D)(s + \Delta s) = (E + \Delta E) \quad (4-34)$$

將上式(4-34)展開，並透過近似方法估算化簡後（因為 $\Delta \approx 0$ ，所以 $\Delta \times \Delta = 0$ ），可整理得誤差 Δs 之方程式，如下所示：

$$\Delta s = \frac{-\Delta D s + \Delta E}{2s + D} = \epsilon_m \quad (4-35)$$

其中誤差 Δs 即為滑件曲柄之機械誤差 ϵ_m ，上式(2-46)即為滑件曲柄之機械誤差方程式。接著使用與分析四連桿相同之方法，求出各尺寸誤差所造成之個別誤差。尺寸誤差 Δa_1 所造成之個別誤差 ϵ_1 ：

$$\epsilon_1 = -2\Delta a_1 \frac{a_1 - a_3 \sin \theta_1 - s \cos \theta_1}{2s + D} \quad (4-36)$$

尺寸誤差 Δa_2 所造成之個別誤差 ϵ_2 ：

$$\epsilon_2 = 2\Delta a_2 \frac{a_2}{2s + D} \quad (4-37)$$

尺寸誤差 Δa_3 所造成之個別誤差 ϵ_3 ：

$$\epsilon_3 = -2\Delta a_3 \frac{a_3 - a_1 \sin \theta_1}{2s + D} \quad (4-38)$$

運動誤差 $\Delta \theta_1$ 所造成之個別誤差 ϵ_{θ_1} ：

$$\epsilon_{\theta_1} = 2\Delta \theta_1 \frac{a_1 (s \sin \theta_1 + a_3 \cos \theta_1)}{2s + D} \quad (4-39)$$



4-2-4 倒置滑件曲柄機構之機械誤差分析

圖 4-3 為一倒置滑件曲柄機構，其中桿 1 為固定於機架上之桿件，稱之為固定桿，其長度為 a_1 ，桿 2 為接受動力源用以驅動倒置滑件曲柄機構之桿件，稱之為輸入桿，其長度為 a_2 ，桿 4 為受輸入桿影響而致動之桿件，稱之為輸出桿，點 B 為一沿輸出桿運動之滑件， a_3 為滑件之桿長， a_4 為其衝程， θ_2 為輸入角（輸入變數）， θ_4 為輸出角（輸出變數）。

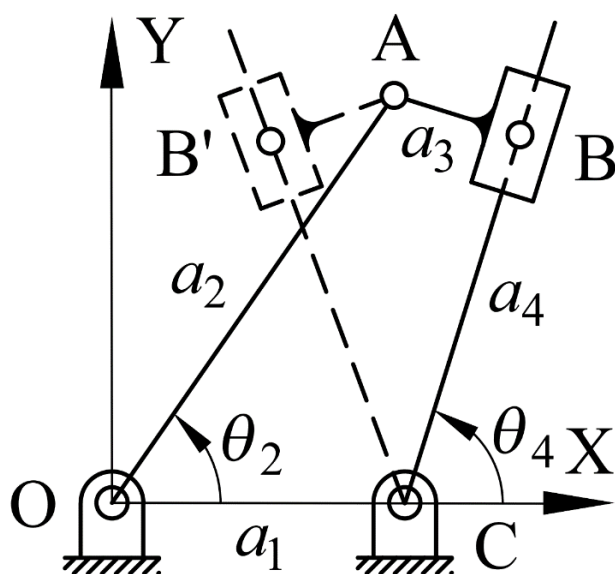


圖 4-3 倒置滑件曲柄機構

設定一 XY 座標如圖 4-3 所示，以固定樞軸 O 為原點，則點 A 的座標有以下兩種表示方式：

$$A(a_2 \cos \theta_2, a_2 \sin \theta_2) \quad (4-40)$$

$$A(a_1 + a_4 \cos \theta_4 + a_3 \cos(\theta_4 + 90^\circ), a_4 \sin \theta_4 + a_3 \sin(\theta_4 + 90^\circ)) \quad (4-41)$$

故可列出以下兩方程式：

$$a_2 \cos \theta_2 = a_1 + a_4 \cos \theta_4 - a_3 \sin \theta_4 \quad (4-42)$$

$$a_2 \sin \theta_2 = a_4 \sin \theta_4 + a_3 \cos \theta_4 \quad (4-43)$$



將上式(4-43)移項後，可得以下方程式：

$$a_4 = \frac{a_2 \sin \theta_2 - a_3 \cos \theta_4}{\sin \theta_4} \quad (4-44)$$

將上式(4-44)代入上式(4-42)，經整理化簡後，可得倒置滑件曲柄之位移方程式如下所示：

$$D \sin \theta_4 + E \cos \theta_4 = a_3 \quad (4-45)$$

其中

$$D = a_1 - a_2 \cos \theta_2 \quad (4-46)$$

$$E = a_2 \sin \theta_2 \quad (4-47)$$

由於製造上的不精確，造成桿長有尺寸誤差 (Δa_1 、 Δa_2 和 Δa_3)，且因為控制上的不精確，造成輸入角也有運動誤差 ($\Delta \theta_2$)，這些誤差會修正上式(4-46)和(4-47)之係數 D 和 E，使其產生偏差 ΔD 和 ΔE ，進而造成輸出角產生誤差 $\Delta \theta_4$ ，此時可將位移方程式(4-45)改寫如下：

$$(D + \Delta D) \sin(\theta_4 + \Delta \theta_4) + (E + \Delta E) \cos(\theta_4 + \Delta \theta_4) = a_3 + \Delta a_3 \quad (4-48)$$

透過三角函數和差化積之公式將上式(4-48)展開，並透過近似方法估算化簡後（因為 $\Delta \approx 0$ ，所以 $\sin \Delta \theta_4 = \Delta \theta_4$ ， $\cos \Delta \theta_4 = 1$ ， $\Delta \times \Delta = 0$ ），可整理得誤差 $\Delta \theta_4$ 之方程式，如下所示：

$$\Delta \theta_4 = \frac{-\Delta D \sin \theta_4 - \Delta E \cos \theta_4 + \Delta a_3}{D \cos \theta_4 - E \sin \theta_4} = \epsilon_m \quad (4-49)$$

其中誤差 $\Delta \theta_4$ 即為倒置滑件曲柄之機械誤差 ϵ_m ，上式(4-49)即為倒置滑件曲柄之機械誤差方程式。

在求得倒置滑件曲柄之機械誤差 ϵ_m 後，可接著利用與分析四連桿同樣的方法分析各尺寸誤差所造成之個別誤差，以下為尺寸誤差 Δa_1 、 Δa_2 、 Δa_3 與 $\Delta \theta_2$ 所造成



之個別誤差 ϵ_1 、 ϵ_2 、 ϵ_3 與 ϵ_{θ_2} ：

$$\epsilon_1 = -\Delta a_1 \frac{\sin\theta_4}{D\cos\theta_4 - E\sin\theta_4} \quad (4-50)$$

$$\epsilon_2 = -\Delta a_2 \frac{\sin(\theta_2 - \theta_4)}{D\cos\theta_4 - E\sin\theta_4} \quad (4-51)$$

$$\epsilon_3 = \Delta a_3 \frac{1}{D\cos\theta_4 - E\sin\theta_4} \quad (4-52)$$

$$\epsilon_{\theta_2} = -\Delta\theta_2 \frac{a_2 \cos(\theta_2 - \theta_4)}{D\cos\theta_4 - E\sin\theta_4} \quad (4-53)$$

4-3 以虛功法分析連桿機構之機械誤差

Armillotta 於 2015 年提出一個將機械誤差分析轉化為靜力學分析的方法[52]，根據虛功定理可得知：

$$F\delta y - F_i\delta R_i = 0 \quad (4-54)$$

我們可將欲求得的點之機械誤差 δy 轉化為一施力於此點之外力 F ，根據靜力平衡求得各桿件所受的內力 F_i ，再將其內力 F_i 與外力 F 相除，轉化回各桿件對最後尺寸誤差之敏感度 s_i 。

$$\frac{\delta y}{\delta R_i} = \frac{F_i}{F} = s_i \quad (4-55)$$

將其推廣至力矩，可得：

$$s_i = \frac{F_i}{M} \quad (4-56)$$

以下將使用此方法結合第三章之靜力學模組推導出四連桿、滑件曲柄、倒置滑件曲柄之機械誤差分析。



4-3-1 以靜力學法推導四連桿誤差分析

圖 4-4 為一平面四連桿，其中桿 1 稱為固定桿，長度為 R_1 ，為固定於機架上之桿件。桿 2 為機構中的輸入桿，長度為 R_2 ，桿 4 為機構中的輸出桿，長度為 R_4 。桿 3 為連接輸入桿與輸出桿之桿件，稱為耦桿，長度為 R_3 。 θ_2 為輸入角。 θ_3 為桿 3 與桿 1 之夾角。 θ_4 為輸出角。

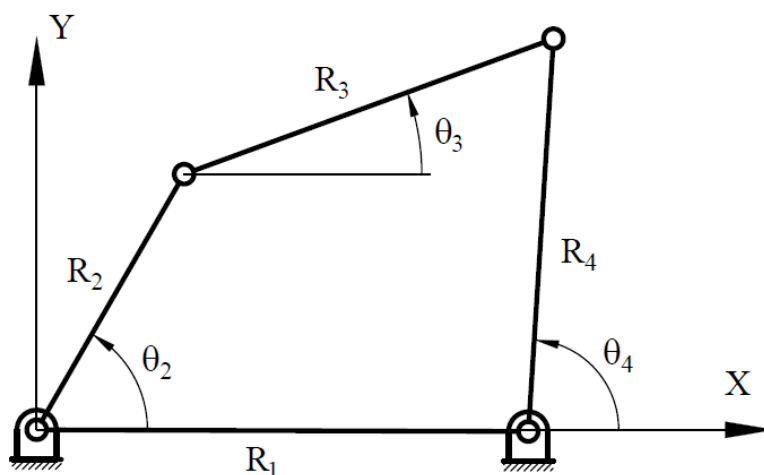


圖 4-4 平面四連桿機構

首先將四連桿模組化拆解，如圖 4-5。

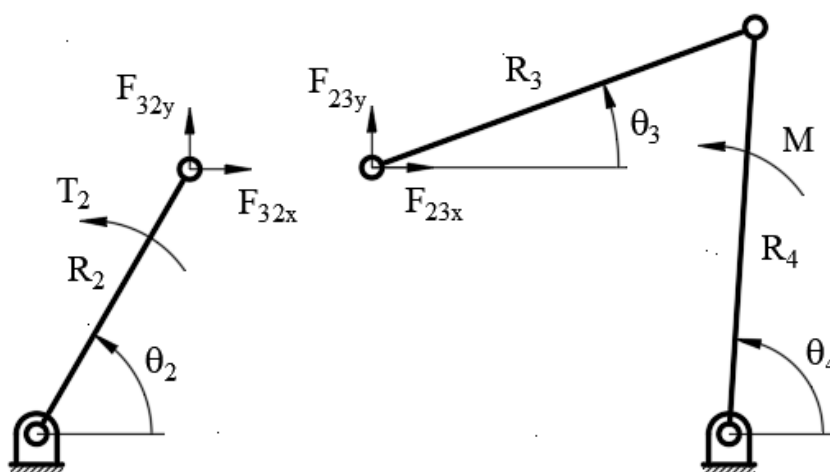


圖 4-5 平面四連桿機構模組化拆解



其中桿件 3、桿件 4 可視為一 RR 機器手臂，帶入以下副函式，由於我們欲計算的誤差為 $\Delta\theta_4$ ，所以將其轉化為作用於桿件 4 上的外力矩 M。

$$\begin{aligned} & [F_{34t}, F_{34n}, F_{23x}, F_{23y}, F_{14x}, F_{14y}] \\ & = \text{ForceRR}(0,0, M, 0, R_4, R_3, 0,0,0,0, \theta_4, 180^\circ - \theta_3, 0,0) \end{aligned}$$

可由 MATLAB 解出：

$$F_{34t} = -\frac{M}{R_4} \quad (4-57)$$

$$F_{34n} = \frac{M \cos(\theta_3 - \theta_4)}{R_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (4-58)$$

$$F_{23x} = \frac{M \cos(\theta_3)}{R_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (4-59)$$

$$F_{23y} = \frac{M \sin(\theta_3)}{R_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (4-60)$$

$$F_{14x} = -\frac{M \cos(\theta_3)}{R_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (4-61)$$

$$F_{14y} = -\frac{M \sin(\theta_3)}{R_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (4-62)$$

將以上結果，取各桿件所受的軸向力，整理為各桿件尺寸之敏感度，各桿件所受到之力矩則整理為角度之敏感度。

桿件 1 所受到的軸向力即為 F_{14x} ，則桿件 1 之誤差 ΔR_1 對 $\Delta\theta_4$ 的敏感度為：

$$\frac{\Delta\theta_4}{\Delta R_1} = \frac{F_{14x}}{M} = -\frac{\cos(\theta_3)}{R_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (4-63)$$

桿件 2 所受到的軸向力為 F_{32x} 、 F_{32y} 對桿件 2 軸向之分量，可表示為：

$$F_{32x} \cos\theta_2 + F_{32y} \sin\theta_2 = \frac{M \cos(\theta_2 - \theta_3)}{R_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (4-64)$$

則桿件 2 之誤差 ΔR_2 對 $\Delta\theta_4$ 的敏感度為：

$$\frac{\Delta\theta_4}{\Delta R_2} = \frac{F_{32x} \cos\theta_2 + F_{32y} \sin\theta_2}{M} = \frac{\cos(\theta_2 - \theta_3)}{R_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (4-65)$$



桿件 3 所受到的軸向力為 F_{23x} 、 F_{23y} 對桿件 3 軸向之分量，可表示為：

$$F_{23x}\cos\theta_3 + F_{23y}\sin\theta_3 = \frac{M}{R_4\sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (4-66)$$

則桿件 3 之誤差 ΔR_3 對 $\Delta\theta_4$ 的敏感度為：

$$\frac{\Delta\theta_4}{\Delta R_3} = \frac{F_{23x}\cos\theta_3 + F_{23y}\sin\theta_3}{M} = \frac{1}{R_4\sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (4-67)$$

桿件 4 所受到的軸向力即為 F_{34n} ，則桿件 4 之誤差 ΔR_4 對 $\Delta\theta_4$ 的敏感度為：

$$\frac{\Delta\theta_4}{\Delta R_4} = \frac{\cos(\theta_3 - \theta_4)}{R_4\sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (4-68)$$

桿件 2 所受到的力矩為 F_{32x} 、 F_{32y} 對桿件 2 切向之分量乘上桿件長度 R_2 ，可以表示為：

$$(F_{32x}\sin\theta_2 - F_{32y}\cos\theta_2)R_2 = \frac{R_2 M \sin(\theta_2 - \theta_3)}{R_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (4-69)$$

接著可得輸入角誤差 $\Delta\theta_2$ 對 $\Delta\theta_4$ 的敏感度為：

$$\frac{\Delta\theta_4}{\Delta\theta_2} = \frac{(F_{32x}\sin\theta_2 - F_{32y}\cos\theta_2)R_2}{M} = \frac{R_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)}{R_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (4-70)$$

4-3-2 以靜力學法推導滑件曲柄機構誤差分析

圖 4-6 為一滑件曲柄機構，其中桿 2 為輸入桿，用以驅動滑件曲柄機構之桿件，其長度為 R_2 ，點 B 為一沿水平線運動之滑件，桿 3 為同時與桿 2 和滑件 B 鄰接之桿件，其長度為 R_3 ， θ_2 為桿 2 與 X 軸之夾角，為輸入角， θ_3 為桿件 3 與 X 軸之夾角， s 為滑件 B 之衝程，為輸出變數。

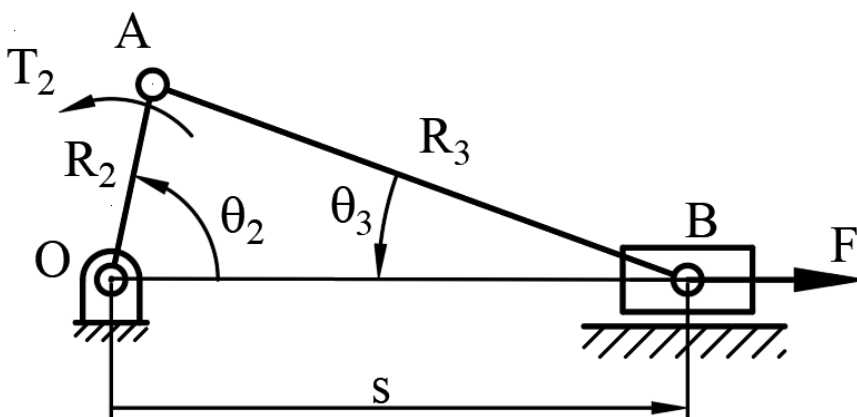


圖 4-6 滑件曲柄機構

首先將滑件曲柄機構進行模組化拆解，如圖 4-7。

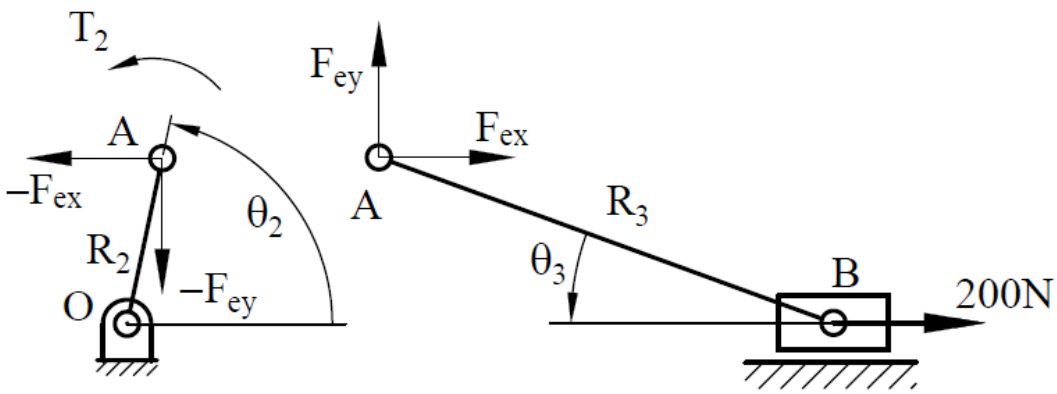


圖 4-7 滑件曲柄機構模組化拆解

欲求的機械誤差為輸出的誤差 Δs ，將其轉換為一作用於滑塊之水平方向外力 F 。

其中桿件 3 及滑件 4 可視為一 PR 機器手臂，套用副函式：

$$[F_{43t}, F_{43n}, F_{23x}, F_{23y}, F_{14y}] = \text{ForcePR}(0, -F, 0, R_3, 0, 0, 180^\circ - \theta_3, 0, 0)$$



以 MATLAB 求解可得

$$F_{43t} = 0 \quad (4-71)$$

$$F_{43n} = \frac{F}{\cos\theta_3} \quad (4-72)$$

$$F_{23x} = -F \quad (4-73)$$

$$F_{23y} = \frac{F\sin\theta_3}{\cos\theta_3} \quad (4-74)$$

$$F_{14y} = -\frac{F\sin\theta_3}{\cos\theta_3} \quad (4-75)$$

將以上結果，取各桿件所受的軸向力，整理為各桿件尺寸對輸出誤差 Δs 之敏感度，各桿件所受到之力矩則整理為角度誤差對輸出誤差 Δs 之敏感度。

桿件 2 所受到的軸向力為 F_{32x} 、 F_{32y} 對桿件 2 軸向之分量，可表示為：

$$F_{32x}\cos\theta_2 + F_{32y}\sin\theta_2 = \frac{F\cos(\theta_2 + \theta_3)}{\cos\theta_3} \quad (4-76)$$

則桿件 2 之誤差 ΔR_2 對 Δs 的敏感度為：

$$\frac{\Delta s}{\Delta R_2} = \frac{F_{32x}\cos\theta_2 + F_{32y}\sin\theta_2}{F} = \frac{\cos(\theta_2 + \theta_3)}{\cos\theta_3} \quad (4-77)$$

桿件 3 所受到的軸向力即為 F_{43n} ，則桿件 3 的尺寸誤差 ΔR_3 對輸出誤差 Δs 之敏感度可表示為：

$$\frac{\Delta s}{\Delta R_3} = \frac{F_{43n}}{F} = \frac{1}{\cos\theta_3} \quad (4-78)$$

桿件 2 所受到的力矩為 F_{32x} 、 F_{32y} 對桿件 2 切向之分量乘上桿件長度 R_2 ，可表示為：

$$(F_{32x}\sin\theta_2 - F_{32y}\cos\theta_2)R_2 = \frac{R_2F\sin(\theta_2 + \theta_3)}{\cos\theta_3} \quad (4-79)$$

接著可得輸入角誤差 $\Delta\theta_2$ 對 Δs 的敏感度為：

$$\frac{\Delta s}{\Delta\theta_2} = \frac{(F_{32x}\sin\theta_2 - F_{32y}\cos\theta_2)R_2}{F} = \frac{R_2\sin(\theta_2 + \theta_3)}{\cos\theta_3} \quad (4-80)$$



4-3-3 以靜力學法推導倒置滑件曲柄機構誤差分析

圖 4-8 為一倒置滑件曲柄機構，其中桿 1 為固定於機架上之桿件，稱之為固定桿，其長度為 R_1 ，桿 2 為接受動力源用以驅動倒置滑件曲柄機構之桿件，稱之為輸入桿，其長度為 R_2 ，桿 4 為受輸入桿影響而致動之桿件，稱之為輸出桿，點 B 為一沿輸出桿運動之滑件， R_3 為滑件之桿長， R_4 為其衝程， θ_2 為輸入角（輸入變數）， θ_4 為輸出角（輸出變數）。首先將滑件曲柄機構進行模組化拆解，如圖 4-9。

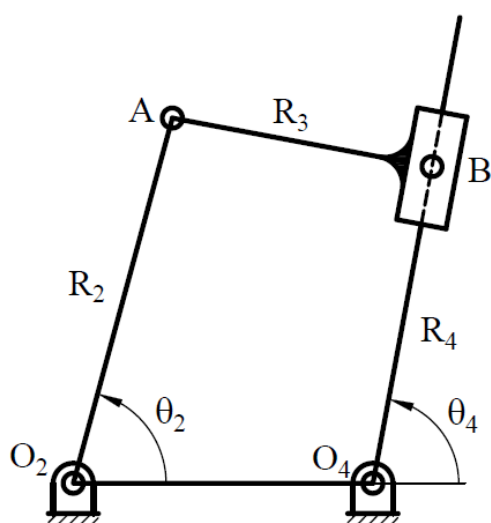


圖 4-8 倒置滑件曲柄機構

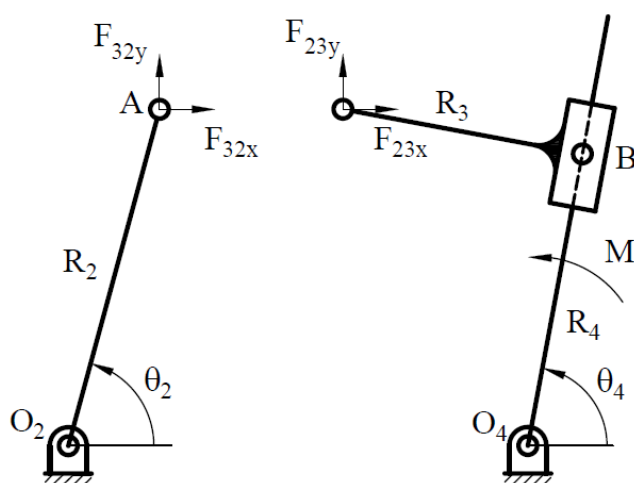


圖 4-9 倒置滑件曲柄機構模組化拆解



桿件 3 及滑件 4 可視為一 RP 機器手臂，套用副函式：

$$[F_{34n}, F_{23x}, F_{23y}, F_{14x}, F_{14y}] = \text{ForceRP}(0, 0, R_4, 0, \theta_4, 0)$$

其中，由於我們欲計算的誤差為 $\Delta\theta_4$ ，所以將其轉化為作用於桿件 4 上的外力矩 M，而副函式中的(3-78)式改寫為：

$$F_{34n}R_4 + M = P\sin(\theta_4 - \theta_p)L_4 \quad (4-81)$$

以 MATLAB 求解得

$$F_{34n} = -\frac{M}{R_4} \quad (4-82)$$

$$F_{23x} = \frac{M\sin\theta_4}{R_4} \quad (4-83)$$

$$F_{23y} = -\frac{M\cos\theta_4}{R_4} \quad (4-84)$$

$$F_{14x} = -\frac{M\sin\theta_4}{R_4} \quad (4-85)$$

$$F_{14y} = \frac{M\cos\theta_4}{R_4} \quad (4-86)$$

桿件 1 所受到的軸向力即為 F_{14x} ，則桿件 1 之誤差 ΔR_1 對 $\Delta\theta_4$ 的敏感度為：

$$\frac{\Delta\theta_4}{\Delta R_1} = \frac{F_{14x}}{M} = \frac{\sin\theta_4}{R_4} \quad (4-87)$$

桿件 2 所受到的軸向力為 F_{32x} 、 F_{32y} 對桿件 2 軸向之分量，可表示為：

$$F_{32x}\cos\theta_2 + F_{32y}\sin\theta_2 = -\frac{M\sin(\theta_2 - \theta_4)}{R_4} \quad (4-88)$$

則桿件 2 之誤差 ΔR_2 對 $\Delta\theta_4$ 的敏感度為：

$$\frac{\Delta\theta_4}{\Delta R_2} = \frac{F_{32x}\cos\theta_2 + F_{32y}\sin\theta_2}{M} = -\frac{\sin(\theta_2 - \theta_4)}{R_4} \quad (4-89)$$

桿件 3 所受到的軸向力為 F_{23x} 、 F_{23y} 對桿件 3 軸向之分量，可表示為：

$$F_{23x}\cos\theta_3 + F_{23y}\sin\theta_3 = \frac{M}{R_4} \quad (4-90)$$



則桿件 3 之誤差 ΔR_3 對 $\Delta\theta_4$ 的敏感度為：

$$\frac{\Delta\theta_4}{\Delta R_3} = \frac{F_{23x}\cos\theta_3 + F_{23y}\sin\theta_3}{M} = \frac{1}{R_4} \quad (4-91)$$

桿件 2 所受到的力矩為 F_{32x} 、 F_{32y} 對桿件 2 切向之分量乘上桿件長度 R_2 ，可以表示為：

$$(F_{32x}\sin\theta_2 - F_{32y}\cos\theta_2)R_2 = \frac{R_2 M \sin(\theta_2 - \theta_4)}{R_4} \quad (4-92)$$

接著可得輸入角誤差 $\Delta\theta_2$ 對 $\Delta\theta_4$ 的敏感度為：

$$\frac{\Delta\theta_4}{\Delta\theta_2} = \frac{(F_{32x}\sin\theta_2 - F_{32y}\cos\theta_2)R_2}{M} = \frac{R_2 \sin(\theta_2 - \theta_4)}{R_4} \quad (4-93)$$



4-4 曲柄牛頭刨床之誤差分析數值模擬範例

圖 4-10 為一曲柄牛頭刨床機構，其中固定樞軸 O_2 和固定樞軸 O_4 的距離為 R_1 ，桿 2 為輸入桿，用以接受動力源驅動機構之桿件，其長度為 R_2 ，桿 4 為連接固定樞軸 O_4 之桿件，其長度為 R_4 ，點 A 為一沿桿 4 運動之滑件，其衝程為 L_4 ，點 C 為一沿水平線運動之滑件，桿 5 為同時與桿 4 和滑件 C 鄰接之桿件，其長度為 R_5 ， θ_2 為輸入角(輸入變數)， θ_4 和 θ_5 為其致動接頭之旋轉角度。其各項參數如表 4-1。

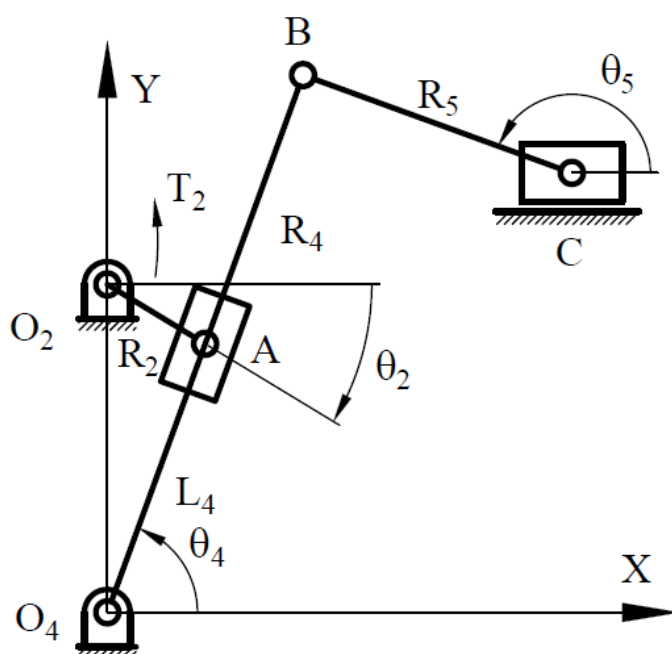


圖 4-10 曲柄牛頭刨床機構

表 4-1 曲柄牛頭刨床之各項參數

符號	數值(單位)	符號	數值
F	1 N	R_5	5 m
L_4	5 m	θ_2	-31.2347°
R_2	2 m	θ_4	70°
R_4	10 m	θ_5	160°



首先將曲柄牛頭刨床機構進行模組化拆解，如圖 4-11。

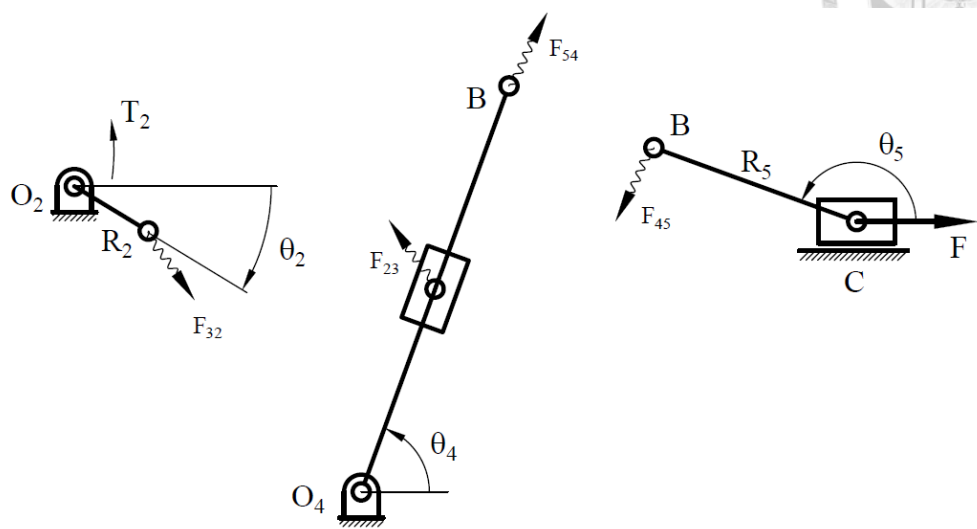


圖 4-11 曲柄牛頭刨床機構模組化拆解

拆解後桿件 2 為一輸入桿，滑件 3 及桿件 4 為一 RP 機器手臂，桿件 5 及滑件 6 為一 PR 機器手臂。首先將 PR 機械手臂部分帶入副函式：

$$[F_{65t}, F_{65n}, F_{45x}, F_{45y}, N] = \text{ForcePR}(0, -1, 0, 5, 0, 0, 160^\circ, 0, 0)$$

利用 MATLAB 求解可得

$$\begin{bmatrix} F_{65t} \\ F_{65n} \\ F_{45x} \\ F_{45y} \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.064 \\ -1 \\ 0.364 \\ -0.364 \end{bmatrix}$$

此結果中桿件 5 所受到的軸向力為 F_{65n} ，即表示桿件 5 的尺寸誤差對輸出誤差的敏感度為 1.064。桿件 4 所受的軸向力為：

$$F_{54x} \cos \theta_4 + F_{54y} \sin \theta_4 = -0.000028$$

桿件 4 的尺寸誤差對輸出誤差的敏感度為 -0.000028 。

得到 F_{45} 後即可繼續求解 RP 機器手臂之靜力學，一樣將其帶入副函式：

$$[F_{34n}, F_{23x}, F_{23y}, F_{14x}, F_{14y}] = \text{ForceRP}(1.064, 0, 5, 10, 70, -20)$$



利用 MATLAB 求解可得

$$\begin{bmatrix} F_{34n} \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{14x} \\ F_{14y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.128 \\ -2 \\ 0.728 \\ 1 \\ -0.364 \end{bmatrix}$$

桿件 1 所受到的軸向力即為 F_{14y} ，表示桿件 1 的尺寸誤差對輸出誤差的敏感度為 0.364。桿件 2 所受到的軸向力可表示為：

$$F_{32x}\cos\theta_2 + F_{32y}\sin\theta_2 = 2.088$$

即表示桿件 2 的尺寸誤差對輸出誤差的敏感度為 2.088。

桿件 2 所受到的力矩可表示為：

$$(-F_{32x}\sin\theta_2 + F_{32y}\cos\theta_2)R_2 = 0.829$$

即表示輸入角的誤差對輸出誤差的敏感度為 0.829。

以上各桿件對輸出誤差的敏感度可整理為：

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_{\theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.364 \\ 2.088 \\ -0.000028 \\ 1.064 \\ 0.829 \end{bmatrix}$$

由此結果可看出敏感度較大的桿件為桿件 2 及桿件 5，表示若想降低輸出機械誤差，可考慮將此二桿件進行較精密之加工。本節所推導出以力學分析得到敏感度分析之結果與數值範例，其中四連桿、滑件曲柄機構與倒置滑件曲柄機構之敏感度分析結果與 4-2 節由 Hartenberg[2]之方法所推導出的結果相同。本節所提出的方法較為快速且將結果化簡，並且結合了本論文第三章所提出的靜力學模組，較為複雜的機構也只需將模組的副函式重複套用，即可求得其敏感度分析。

第五章 平面連桿機構之模組化動力學分析



本章進行平面連桿機構之動力學分析，利用桿件受到的慣性力及慣性矩可等效於一偏移之慣性力的特性，可將動力學問題轉化為類靜力學問題，並套用本論文所提出的二連桿靜力學模組求解。

5-1 慣性力之等效偏移

本節將介紹如何將慣性力等效偏移以抵消慣性矩，抵消慣性矩後，動力學問題便可簡化為一受外力之靜力學問題。首先由牛頓第二運動定律可得：

$$F = ma \quad (5-1)$$

其中 F 為作用於質點上的力， m 為質點之質量， a 為質點之加速度。可將其延伸至剛體運動，表示為：

$$F_e = ma_G \quad (5-2)$$

其中 F_e 為作用於剛體上的外力， m 為剛體之質量， a_G 為剛體質心之加速度。而平面運動之剛體所受的力矩可以表示為：

$$T = I_G \alpha \quad (5-3)$$

其中 T 為作用於剛體上對於質心的外力矩， I_G 為剛體對於質心的轉動慣量， α 為剛體之角加速度。

將以上定律移項，(5-2)及(5-3)式可改寫為：

$$F_e + (-ma_G) = 0 \quad (5-4)$$

$$T + (-I_G \alpha) = 0 \quad (5-5)$$



為了將連桿機構之動力學的分析簡化，可以將桿件之慣性力及慣性矩結合為一偏移的慣性力，如圖 5-1 所示。其中 ma_G 為桿件質心所受到的慣性力， $I_G\alpha$ 為桿件所受到的慣性矩。

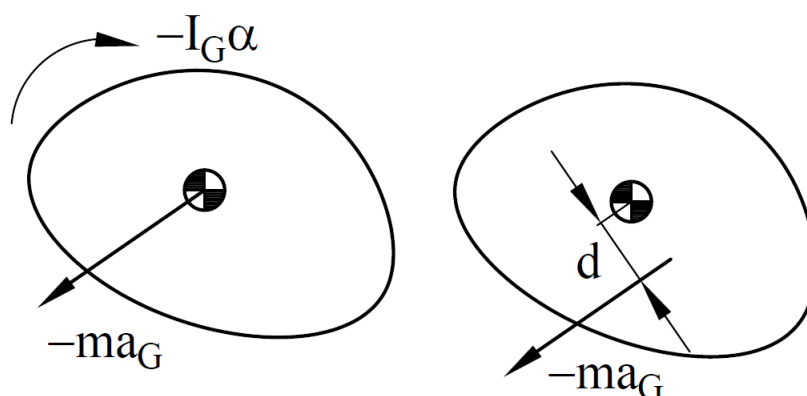


圖 5-1 慣性力之等效偏移

慣性力所需偏移的距離 d 為：

$$d = \frac{I_G\alpha}{ma_G} \quad (5-6)$$

偏移之慣性力所造成的慣性矩會與 $I_G\alpha$ 相同。

5-2 平面四連桿動力學分析範例

以下將演示如何利用慣性力之等效偏移將動力學問題轉化為靜力學問題，並套用第三章所提出的二連桿靜力學模組求解。

圖 5-2 為一平面四連桿機構，其中各桿件質量為 m_i ，各桿件對質心之轉動慣量為 I_{Gi} ，各桿件質心加速度為 a_{Gi} ，各桿件之角加速度為 α_i ，各桿件角度為 θ_i ， $i = 1, 2$ 或 3 。已知桿件 1 之角速度 ω_1 為 95 rad/s ，桿件 1 之角加速度 $\alpha_1 = 0$ ，欲求桿件 1 所需受到的力矩 T 。各項參數之數值如表 5-1。

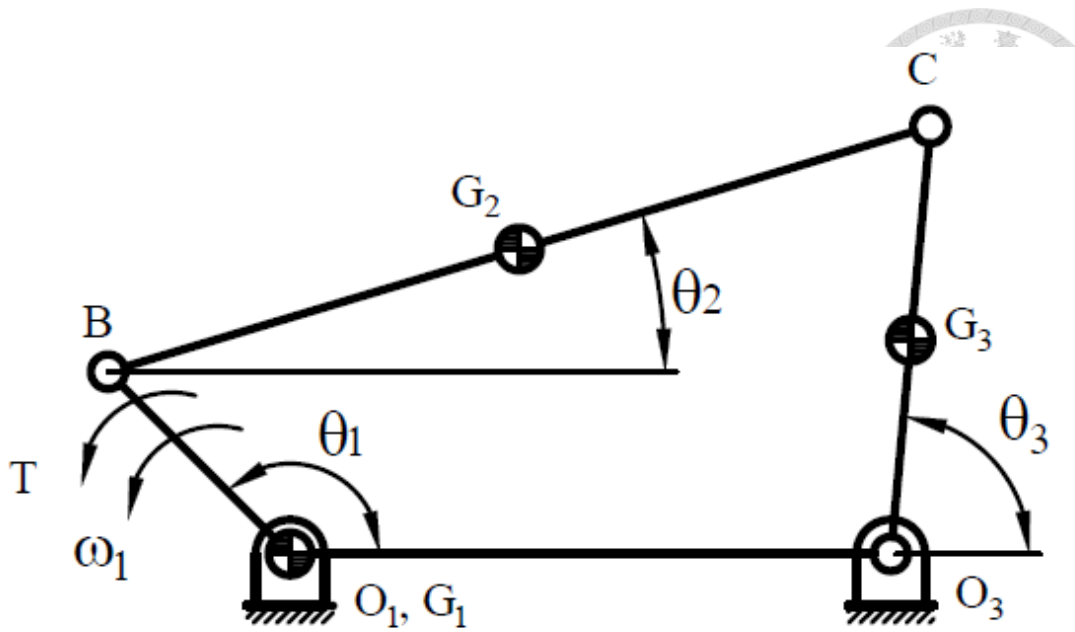


圖 5-2 平面四連桿機構範例

表 5-1 平面四連桿機構範例之各項參數

符號	數值(單位)	符號	數值(單位)
m_1	0.1 kg	θ_1	135°
m_2	0.2 kg	θ_2	17°
m_3	0.3 kg	θ_3	85°
I_{G1}	$0.00002 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	ω_1	95 rad/s
I_{G2}	$0.0004 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	O_1O_3	70 mm
I_{G3}	$0.0004 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	O_1B	30 mm
a_{G1}	0	BC	100 mm
a_{G2}	$235 \text{ m/s}^2(312^\circ)$	BG_2	50 mm
a_{G3}	$235 \text{ m/s}^2(308^\circ)$	O_3C	50 mm
α_1	0	O_3G_3	25 mm
α_2	$520 \text{ rad/s}^2 \text{ ccw}$		
α_3	$2740 \text{ rad/s}^2 \text{ cw}$		

首先將四連桿進行模組化拆解，如圖 5-3。

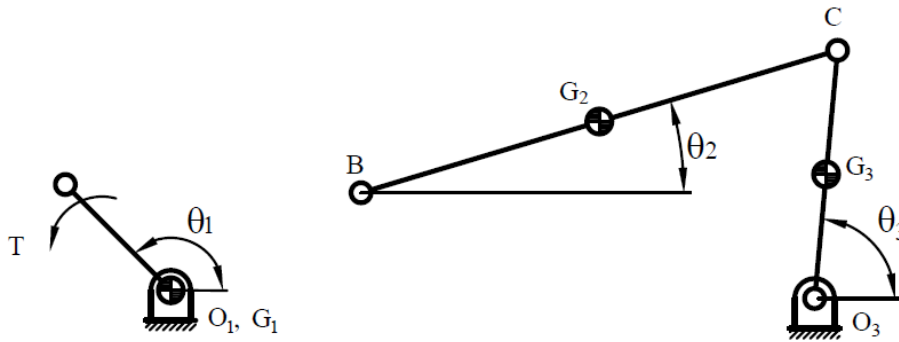


圖 5-3 平面四連桿機構之模組化拆解

計算桿件所受到的慣性力 $F_{Gi} = -m_i a_{Gi}$ ：

$$F_{G1} = 0$$

$$F_{G2} = -m_2 a_{G2} = 47\text{N}(132^\circ)$$

$$F_{G3} = -m_3 a_{G3} = 30\text{N}(128^\circ)$$

計算桿件所受的慣性矩 $T_{Gi} = -I_{Gi} \alpha_i$ ：

$$T_{G1} = 0$$

$$T_{G2} = -I_{G2} \alpha_2 = 0.208\text{N} \cdot \text{m/s}^2 \text{ cw}$$

$$T_{G3} = -I_{G3} \alpha_3 = 0.208\text{N} \cdot \text{m/s}^2 \text{ ccw}$$

接著將桿件 2 及桿件 3 進行慣性力之等效偏移，如圖 5-4。

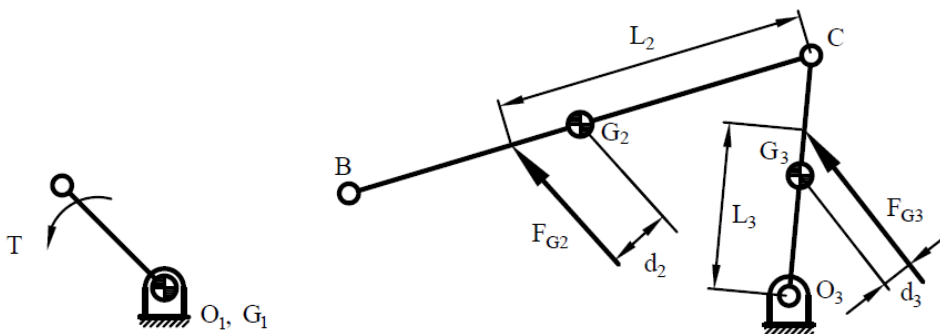


圖 5-4 平面四連桿機構慣性力等效偏移



其中桿件 2 之慣性力所需偏移之距離 d_2 為

$$d_2 = \frac{I_{G2}\alpha_2}{m_2 a_{G2}} = 4.43 \text{ mm}$$

桿件 3 之慣性力所需偏移之距離 d_3 為

$$d_3 = \frac{I_{G3}\alpha_3}{m_3 a_{G3}} = 9.13 \text{ mm}$$

得到 h_2 與 h_3 後，可計算 L_2 與 L_3 之長度，以方便套用於副函式：

$$L_2 = CG_2 + \frac{h_2}{\cos(132^\circ - \theta_2 - 90^\circ)} = 54.9 \text{ mm}$$

$$L_3 = O_3G_3 + \frac{h_3}{\cos(90^\circ - \theta_3 - 128^\circ)} = 38.4 \text{ mm}$$

完成慣性力之等效偏移後，可將桿件 2 及桿件 3 視為一受兩外力之 RR 機械手臂，

並代入第三章所推導之副函式：

$$\begin{aligned} & [F_{23t}, F_{23n}, F_{12x}, F_{12y}, F_{03x}, F_{03y}] \\ & = \text{ForceRR}(47, 30, 0, 0, 50, 100, 38.4, 54.9, 0, 0, 85, 197, 132, 128) \end{aligned}$$

可得

$$\begin{bmatrix} F_{23t} \\ F_{23n} \\ F_{12x} \\ F_{12y} \\ F_{03x} \\ F_{03y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.713 \text{ N} \\ 27.068 \text{ N} \\ 49.462 \text{ N} \\ -9.332 \text{ N} \\ 0.457 \text{ N} \\ -49.236 \text{ N} \end{bmatrix}$$

最後由 F_{12x} 與 F_{12y} 可得到桿件 1 所需的力矩 T ：

$$T = (F_{12x} \sin \theta_1 - F_{12y} \cos \theta_1) \times O_1B = 0.851 \text{ N} \cdot \text{m}$$



5-3 滑件曲柄機構動力學分析範例

圖 5-5 為一滑件曲柄機構，其中各桿件質量為 m_i ，各桿件對質心之轉動慣量為 I_{Gi} ，各桿件質心加速度為 a_{Gi} ，各桿件之角加速度為 α_i ，各桿件角度為 θ_i ， $i = 1, 2$ 或 3 。已知桿件 1 之角速度 ω_1 為 10 rad/s，桿件 1 之角加速度 $\alpha_1 = 40 \text{ rad/s}^2$ ，欲求桿件 1 所需受到的力矩 T 。各項參數之數值如表 5-2。

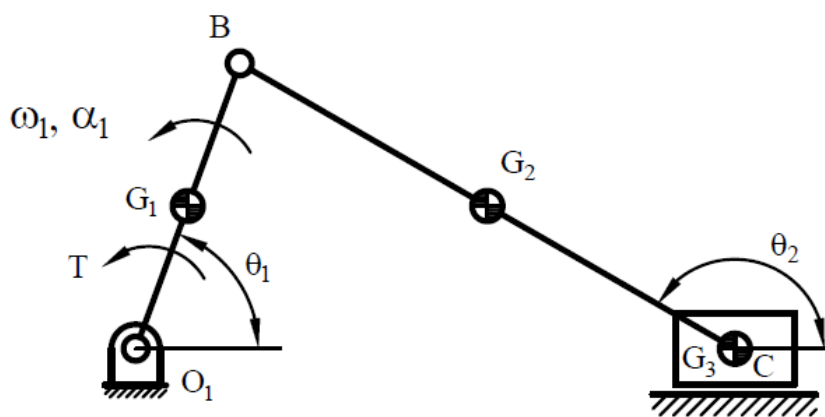


圖 5-5 滑件曲柄機構範例

表 5-2 滑件曲柄機構範例之各項數值

符號	數值(單位)	符號	數值(單位)
m_1	0.5 kg	α_2	46 rad/s ² cw
m_2	1 kg	θ_1	70°
m_3	1.5 kg	θ_2	30°
I_{G1}	0.00125 kg · m ²	ω_1	95 rad/s
I_{G2}	0.0025 kg · m ²	O_1B	50 mm
a_{G1}	2.67 m/s ² (218°)	BC	94 mm
a_{G2}	3.32 m/s ² (37°)	BG_1	25 mm
a_{G3}	-1.75 m/s ²	BG_2	47 mm
α_1	40 rad/s ² ccw		



首先將滑件曲柄機構進行模組化拆解，如圖 5-6。

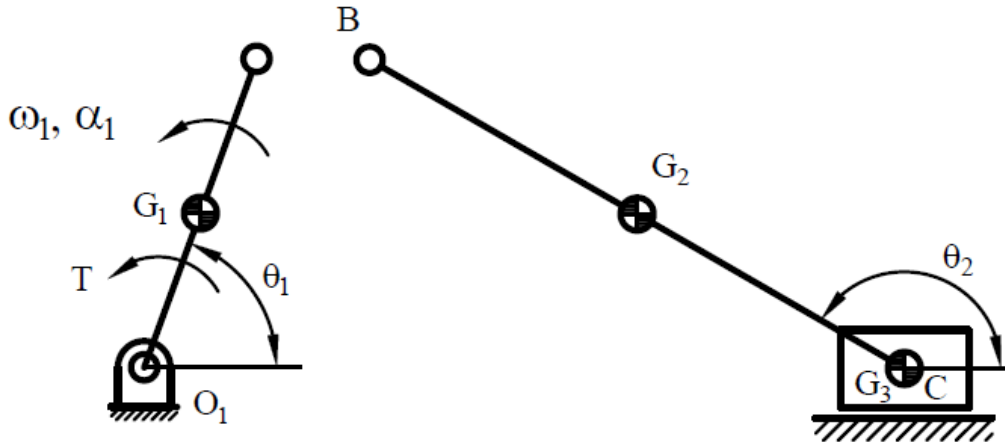


圖 5-6 滑件曲柄機構之模組化拆解

計算桿件所受到的慣性力 $F_{Gi} = -m_i a_{Gi}$ ：

$$F_{G1} = -m_1 a_{G1} = 1.338\text{N}(48^\circ)$$

$$F_{G2} = -m_2 a_{G2} = 3.32\text{N}(37^\circ)$$

$$F_{G3} = -m_3 a_{G3} = 2.625\text{N}$$

計算桿件所受的慣性矩 $T_{Gi} = -I_{Gi} \alpha_i$ ：

$$T_{G1} = -I_{G1} \alpha_1 = 0.05\text{N} \cdot \text{m/s}^2 \text{ cw}$$

$$T_{G2} = -I_{G2} \alpha_2 = 0.115\text{N} \cdot \text{m/s}^2 \text{ ccw}$$

$$T_{G3} = 0$$

接著將桿件 2 進行慣性力之等效偏移，如圖 5-7。

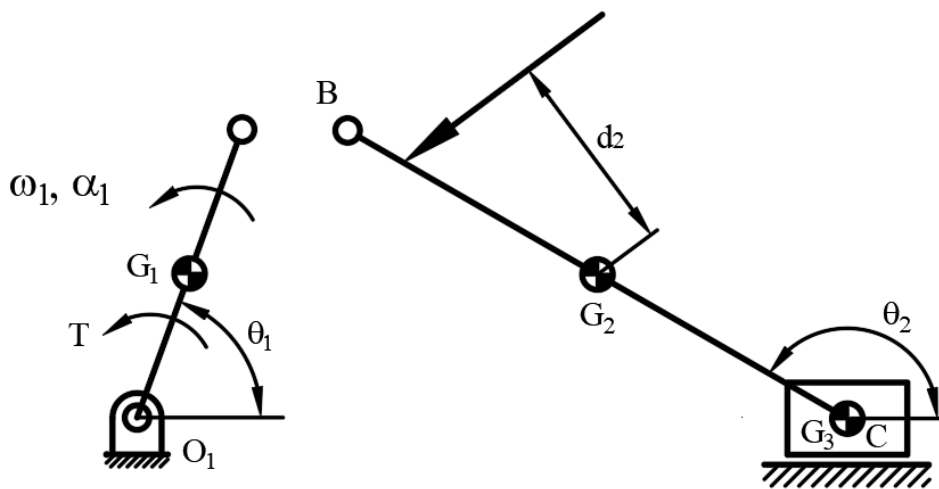


圖 5-7 滑件曲柄機構之慣性力等效偏移

其中桿件 2 之慣性力所需偏移之距離 d_2 為

$$d_2 = \frac{I_{G2}\alpha_2}{m_2 a_{G2}} = 34.63 \text{ mm}$$

得到 h_2 後，可計算 L_2 之長度，以方便套用於副函式：

$$L_2 = CG_2 + \frac{d_2}{\cos(150^\circ - 37^\circ - 90^\circ)} = 84.58 \text{ mm}$$

完成慣性力之等效偏移後，可將桿件 2 及滑件 3 視為一受兩外力之 PR 機械手臂，

並代入第三章所推導之副函式：

$$[F_{32}, F_{12x}, F_{12y}, F_{03x}] = \text{ForcePR}(3.32, 2.625, 0, 94, 84.58, 0, 150, 37)$$

可得

$$\begin{bmatrix} F_{32} \\ F_{12x} \\ F_{12y} \\ F_{03x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.223 \text{ N} \\ -5.277 \text{ N} \\ -0.129 \text{ N} \\ -1.869 \text{ N} \end{bmatrix}$$

最後由 F_{12} 可得到桿件 1 所需的力矩 T ：

$$\begin{aligned} T &= (-F_{12x}\sin\theta_1 + F_{12y}\cos\theta_1) \times O_1B + (-m_1a_{G1}) \times (-I_{G1}\alpha_1) \\ &= 0.308\text{N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$



在處理多連桿機構的動力學分析時，可將已知的接點力與慣性力及慣性矩利用等效偏移結合為單一合力及單一力矩，如此便可直接代入第三章所推導出的副函式進行求解，其中合力視為外力 P 、 Q 或 F_e ，合力矩則視為外力矩 T 。

第六章 模組化求解力學分析之數值範例



6-1 六連桿位置及靜力學分析

圖 6-1 為受一外力 F 之六連桿機構，其中 R_i 為桿件 i 之長度， θ_i 為桿件 i 之角度， $i=1、2、3、4、5$ 或 6 ， α 為桿件 3 夾角角度， h_3 為桿件 3 三角形的高， L_3 為高與 AB 之交點與 B 之距離， $a、b$ 為桿件 3 之 $BC、AC$ 兩邊長， T_2 為桿件 2 為平衡所需提供之力矩，各項尺寸數值如表 6-1。

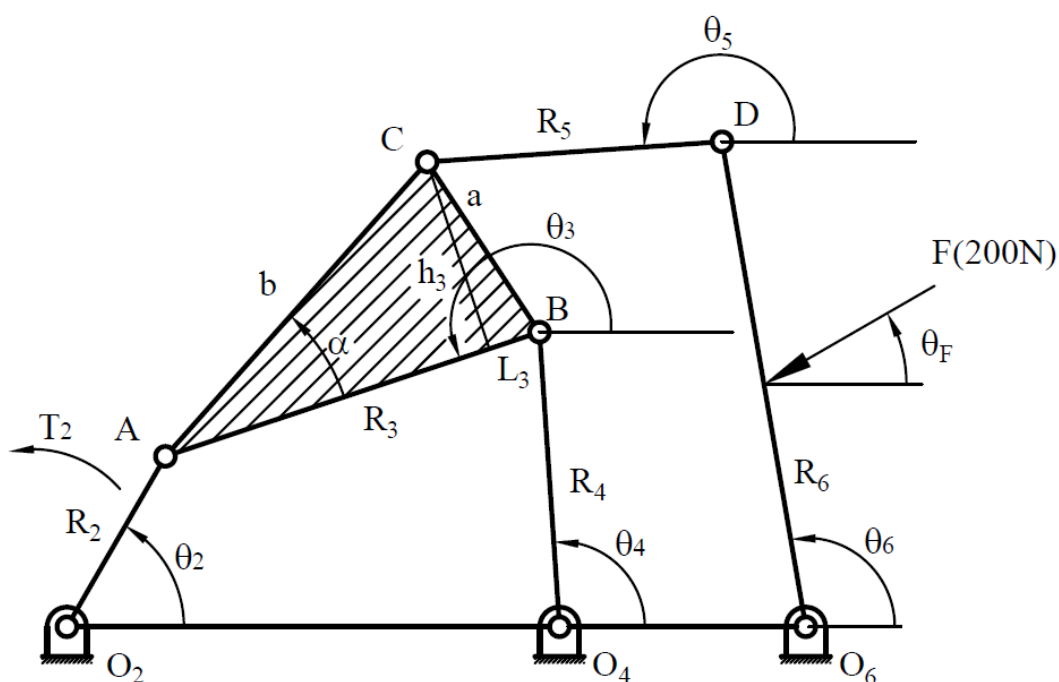


圖 6-1 六連桿機構

表 6-1 六連桿之各項參數

符號	數值(單位)	符號	數值(單位)
R_2	4 m	F	200 N
R_3	8 m	θ_F	210°
R_4	6 m	θ_2	60°
R_5	6 m	a	4.1411 m
R_6	10 m	b	8 m
α	30°	L_3	1.7179 m
h_3	4 m	O_2O_4	10 m
O_4O_6	5 m		

6-1-1 六連桿位置分析

由圖 6-1 中的桿件 2 開始推導，以 O_2 為原點，可得 A 點之位置 (x_A, y_A) ：

$$x_A = R_2 \cos \theta_2 = 3.464$$

$$y_A = R_2 \sin \theta_2 = 2$$

接著可將桿件 3 及桿件 4 視為一 RR 機械手臂模組，由 A 點位置以 RR 逆向運動學之副函式求得 θ_3 及 θ_4 ：

$$[\theta_3, \theta_4, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \ddot{\theta}_3, \ddot{\theta}_4] = \text{InverseRR}(x_A, y_A, \dot{x}_A, \dot{y}_A, \ddot{x}_A, \ddot{y}_A, R_3, R_4, 10, 0, I)$$

$$\theta_3 = -161.6240^\circ$$

$$\theta_4 = 93.8985^\circ$$



再來可將桿件 2 及桿件 3 的 AC 邊視為一 RR 機械手臂，利用 RR 順向運動學求得 C 點之位置 (x_C, y_C) ：

$$\begin{aligned} [x_C, y_C, \dot{x}_C, \dot{y}_C, \ddot{x}_C, \ddot{y}_C] \\ = \text{ForwardRR}(\theta_2, \theta_3 - 180 + \alpha, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \ddot{\theta}_2, \ddot{\theta}_3, R_2, R_3, 0, 0) \\ (x_C, y_C) = (7.314, 9.444) \end{aligned}$$

最後可將桿件 5 及桿件 6 視為一 RR 機械手臂模組，由 C 點位置以 RR 逆向運動學之副函式求得 θ_5 及 θ_6 ：

$$\begin{aligned} [\theta_5, \theta_6, \dot{\theta}_5, \dot{\theta}_6, \ddot{\theta}_5, \ddot{\theta}_6] = \text{InverseRR}(x_C, y_C, \dot{x}_C, \dot{y}_C, \ddot{x}_C, \ddot{y}_C, R_5, R_6, 15, 0, 1) \\ \theta_5 = -176.0802^\circ \\ \theta_6 = 99.7885^\circ \end{aligned}$$

6-1-2 六連桿靜力學分析

在求得各位置及角度後，可開始進行靜力學分析，首先將桿件 5 及桿件 6 視為一 RR 機械手臂，其中桿件 6 受一外力 F，可套用第三章靜力學所推導之 RR 機械手臂副函式：

$$\begin{aligned} [F_{65}, F_{45x}, F_{45y}, F_{16x}, F_{16y}] = \text{ForceRR}(0, F, 0, 0, R_6, R_5, 0, 0, 0, 0, \theta_6, \theta_5, 0, \theta_F) \\ \begin{bmatrix} F_{65} \\ F_{45x} \\ F_{45y} \\ F_{16x} \\ F_{16y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 94.337\text{N} \\ 94.116\text{N} \\ 6.449\text{N} \\ 79.089\text{N} \\ 93.551\text{N} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

可由 F_{45x} 及 F_{45y} 求得 F_{45} 及 θ_{F45} ：

$$\begin{aligned} F_{45} &= \sqrt{F_{45x}^2 + F_{45y}^2} = 94.337\text{N} \\ \theta_{F45} &= \tan^{-1}\left(\frac{F_{45y}}{F_{45x}}\right) = 3.92^\circ \end{aligned}$$

接著將桿件 3 及桿件 4 視為一 RR 機械手臂，套用副函式：

$$[F_{43}, F_{23x}, F_{23y}, F_{14x}, F_{14y}] = \text{ForceRR}(0, -F_{45}, 0, 0, R_4, R_3, 0, 0, 0, 0, \theta_4, \theta_3, 0, \theta_{F45})$$

$$\begin{bmatrix} F_{43} \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{14x} \\ F_{14y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105.364\text{N} \\ 86.953\text{N} \\ 111.569\text{N} \\ 7.164\text{N} \\ -105.12\text{N} \end{bmatrix}$$

最後可由 F_{23x} 及 F_{23y} 求得 F_{12x} 、 F_{12y} 與 T_2 ：

$$F_{12x} = F_{23x} = 86.953 \text{ N}$$

$$F_{12y} = F_{23y} = 111.569 \text{ N}$$

$$T_2 = F_{23x}R_2\sin\theta_2 - F_{23y}R_2\cos\theta_2 = 78.075 \text{ N} \cdot \text{m}$$





6-2 九連桿型雙肘節鎖模機構之敏感度分析

圖 6-2 為一九連桿型雙肘節鎖模機構[53]，其中 R_{1U} 、 R_{1L} 、 R_{2U} 、 R_{2L} 、 R_{3U} 、 R_{3L} 、 R_{4U} 、 R_{4L} 、 R_{5U} 、 R_{5L} 、 R_{6U} 、 R_{6L} 、 R_{7U} 和 R_{7L} 分別為其各桿件之桿長，三接頭桿 OAB 中 $\angle O = \beta$ ，三接頭桿 EFG 中 $\angle E = \alpha$ ， θ_{3U} 、 θ_{3L} 、 θ_{5U} 、 θ_{5L} 、 θ_{6U} 和 θ_{6L} 為其致動接頭的旋轉角度， x 為滑件 1 之衝程（輸入變數）， s_U 和 s_L 分別為滑件 2 之上下衝程（輸出變數），設定一 XY 座標，以固定樞軸 O 為原點。九連桿型雙肘節鎖模機構為一過度拘束機構，其計算之自由度為 0，但當整個機構存在上下對稱之幾何關係時，機構就可以運動，然而由於製造上的不精確，造成其桿件有尺寸誤差，整個機構不可能完全對稱，若尺寸誤差過大的話，可能會影響機構之運動，因此像這樣的過度拘束機構，格外需要進行機械誤差分析。九連桿型雙肘節鎖模機構之各尺寸如表 6-2 所示。由於九連桿型雙肘節鎖模機構為上下對稱，上下桿件尺寸皆相同，因此本論文分析其機械誤差時，只分析機構的下半部（圖 6-2 中虛線圈起來的部分），且將各尺寸之下標 L 省略。

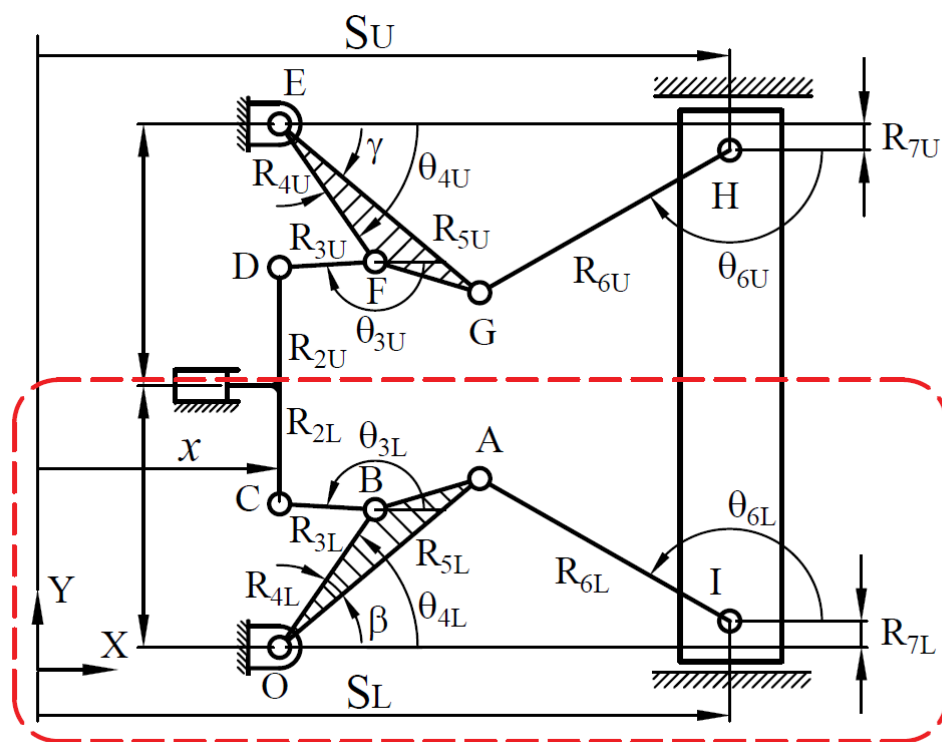


圖 6-2 九連桿型雙肘節鎖模機構

表 6-2 九連桿型雙肘節鎖模機構之尺寸

符號	尺寸(mm)	符號	尺寸(mm)
R ₁	100	R ₆	110
R ₂	45.2	R ₇	10
R ₃	36.6	h ₄	26.05
R ₄	64.1	L ₄	96.55
R ₅	100	β	15.1°

6-2-1 九連桿型雙肘節鎖模機構位置分析

以圖 6-2 中的 O 點作為原點，則 C 點位置為(x = 10, R₁ - R₂)，接著將 OBC 視為一 RR 機械手臂模組，可將 C 點位置代入 RR 逆向運動學之副函式以求解θ₃、θ₄：

$$[\theta_3, \theta_4, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \ddot{\theta}_3, \ddot{\theta}_4] = \text{InverseRR}(x_C, y_C, \dot{x}_C, \dot{y}_C, \ddot{x}_C, \ddot{y}_C, R_3, R_4, 0, 0, I)$$

$$\theta_3 = 164.963^\circ$$

$$\theta_4 = 44.973^\circ$$

再來可由θ₄推導出 A 點位置：

$$[x_A, y_A, \dot{x}_A, \dot{y}_A, \ddot{x}_A, \ddot{y}_A] = \text{FowardRR}(\theta_4 - \beta, 0, \dot{\theta}_4, 0, \ddot{\theta}_4, 0, R_5, 0, 0, 0)$$

$$(x_A, y_A) = (86.713, 49.808)$$

最後可將圖 6-2 中的 AI 視為一 PR 機械手臂，利用 PR 逆向運動學可求得s 與θ₆：

$$[s, \theta_6, \dot{s}, \dot{\theta}_6, \ddot{s}, \ddot{\theta}_6] = \text{InversePR}(R_6, R_7, x_A, y_A, \dot{x}_A, \dot{y}_A, \ddot{x}_A, \ddot{y}_A, 2)$$

由副函式可得

$$s = 189.257 \text{ mm}$$

$$\theta_6 = 158.784^\circ$$



6-2-2 九連桿型雙肘節鎖模機構敏感度分析

在已知位置後，可接著利用 4-3 節所提出的力學法求解各桿件之敏感度。欲求得的誤差為 Δs ，也就是機構最後的總衝程，因此將其轉化為機構末端滑件的水平方向施力 F (假設為 1N)，以計算各桿件之敏感度 s_i 。

首先將圖 6-2 桿件 AI 及滑件 I 視為一 PR 機械手臂，利用第三章所推導之副函式求得 F_{67t} 、 F_{67n} 、 F_{56x} 、 F_{56y} 、 F_{17y} ：

$$[F_{67t}, F_{67n}, F_{56x}, F_{56y}, F_{17y}] = \text{ForcePR}(0, F, 0, R_6, 0, 0, \theta_6, 0)$$

$$\begin{bmatrix} F_{67t} \\ F_{67n} \\ F_{56x} \\ F_{56y} \\ F_{17y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.073\text{N} \\ -1\text{N} \\ 0.388\text{N} \\ -0.388\text{N} \end{bmatrix}$$

由 F_{56x} 、 F_{56y} 可求得 F_{56} 、 θ_{F56} ：

$$F_{56} = \sqrt{F_{56x}^2 + F_{56y}^2} = 1.073\text{N}$$

$$\theta_{F56} = \tan^{-1}\left(\frac{F_{56y}}{F_{56x}}\right) = -21.217^\circ$$

接著將 OBC 視為一 RR 機械手臂，一樣利用 RR 機械手臂之力分析副函式：

$$\begin{aligned} & [F_{34t}, F_{34n}, F_{23x}, F_{23y}, F_{14x}, F_{14y}] \\ & = \text{ForceRR}(0, F_{56}, 0, 0, R_4, R_3, L_{4,0}, h_{4,0}, \theta_4, \theta_3, 0, \theta_{F56}) \end{aligned}$$

可得

$$\begin{bmatrix} F_{34t} \\ F_{34n} \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{14x} \\ F_{14y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.302\text{N} \\ -0.752\text{N} \\ -1.452\text{N} \\ 0.39\text{N} \\ 0.452\text{N} \\ -0.002\text{N} \end{bmatrix}$$

為求得各桿件之敏感度，需找出各桿件所受到之軸向力，由於 F 假設為 1N，



各桿件所受軸向力即為敏感度。

R_1 所受到之軸向力即為 F_{41y} ，且方向為壓縮，取負值：

$$F_{41y} = -0.002 \text{ N}$$

R_2 所受到之軸向力即為 F_{32y} ，且方向為拉伸，取正值：

$$F_{32y} = 0.39 \text{ N}$$

R_3 所受到之軸向力為：

$$F_{23x}\cos\theta_3 + F_{23y}\sin\theta_3 = 1.504 \text{ N}$$

R_4 所受到之軸向力即為 F_{34n} ：

$$F_{34n} = -0.752 \text{ N}$$

R_5 所受到之軸向力為：

$$F_{65x}\cos(\theta_4 - \beta) + F_{65y}\sin(\theta_4 - \beta) = 0.674 \text{ N}$$

R_6 所受到之軸向力即為 F_{76n} ，且方向為拉伸，取正值：

$$F_{76n} = 1.073 \text{ N}$$

R_7 所受到之軸向力即為 F_{71y} ，且方向為拉伸，取正值：

$$F_{71y} = 0.388 \text{ N}$$

整理以上各桿件之敏感度，可得

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.002 \\ 0.39 \\ 1.504 \\ -0.752 \\ 0.674 \\ 1.073 \\ 0.388 \end{bmatrix}$$



可看出此九連桿型雙肘節鎖模機構於 $x = 10$ 時，敏感度最大之桿件為桿件 3 (BC)。由於各位置之敏感度不同，接著使用 MATLAB 進行由 $x = 0$ 移動至 $x = 50$ 之敏感度分析，可得圖 6-3：

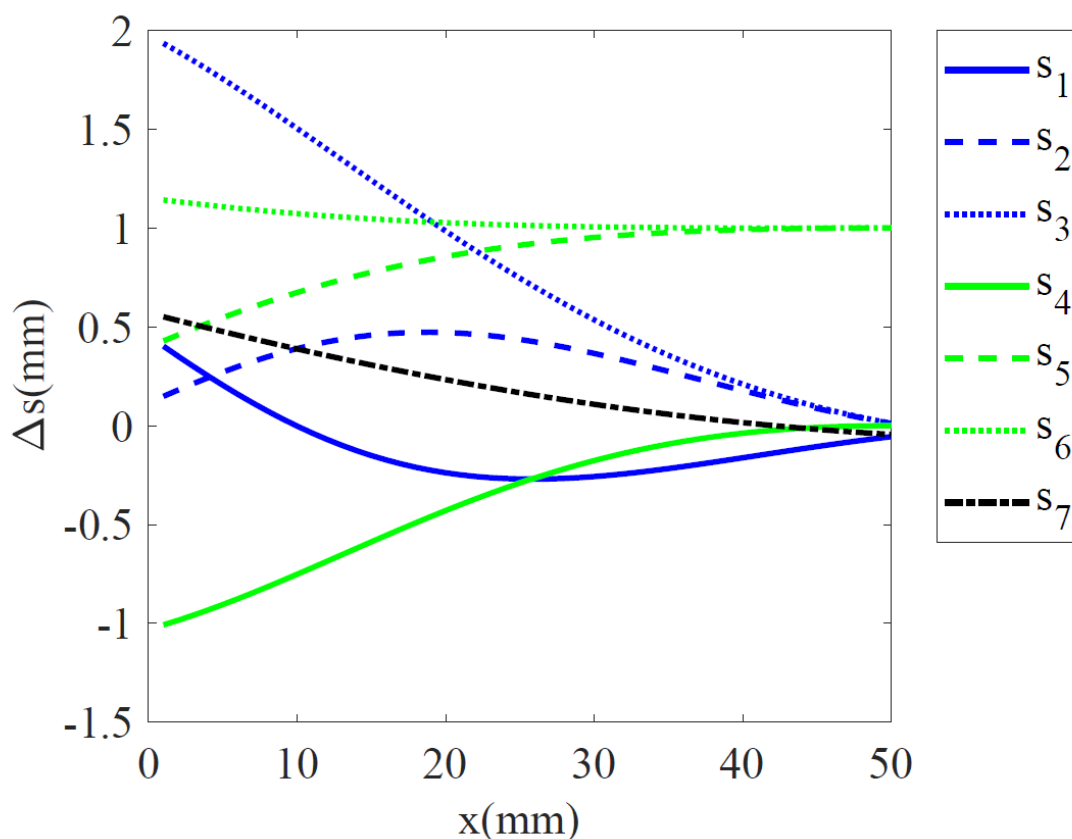


圖 6-3 九連桿型雙肘節鎖模機構桿件敏感度

由圖 6-3 可看出於末端($x = 50$)時，敏感度較大之桿件為桿件 5 及桿件 6，由於鎖模機構末端位置較重要，因此可考慮將桿件 5 及桿件 6 以較精密加工方式製造，以降低機械誤差。以下將各尺寸的機械誤差假設為 IT8 等級，如表 6-3，將桿件誤差乘上敏感度，可得各桿件所造成之機械誤差，如圖 6-4。



表 6-3 九連桿型雙肘節鎖模機構之尺寸誤差

符號	尺寸(mm)	符號	誤差(IT8, mm)
R_1	100	ΔR_1	± 0.054
R_2	45.2	ΔR_2	± 0.039
R_3	36.6	ΔR_3	± 0.039
R_4	64.1	ΔR_4	± 0.046
R_5	100	ΔR_5	± 0.054
R_6	110	ΔR_6	± 0.054
R_7	10	ΔR_7	± 0.022

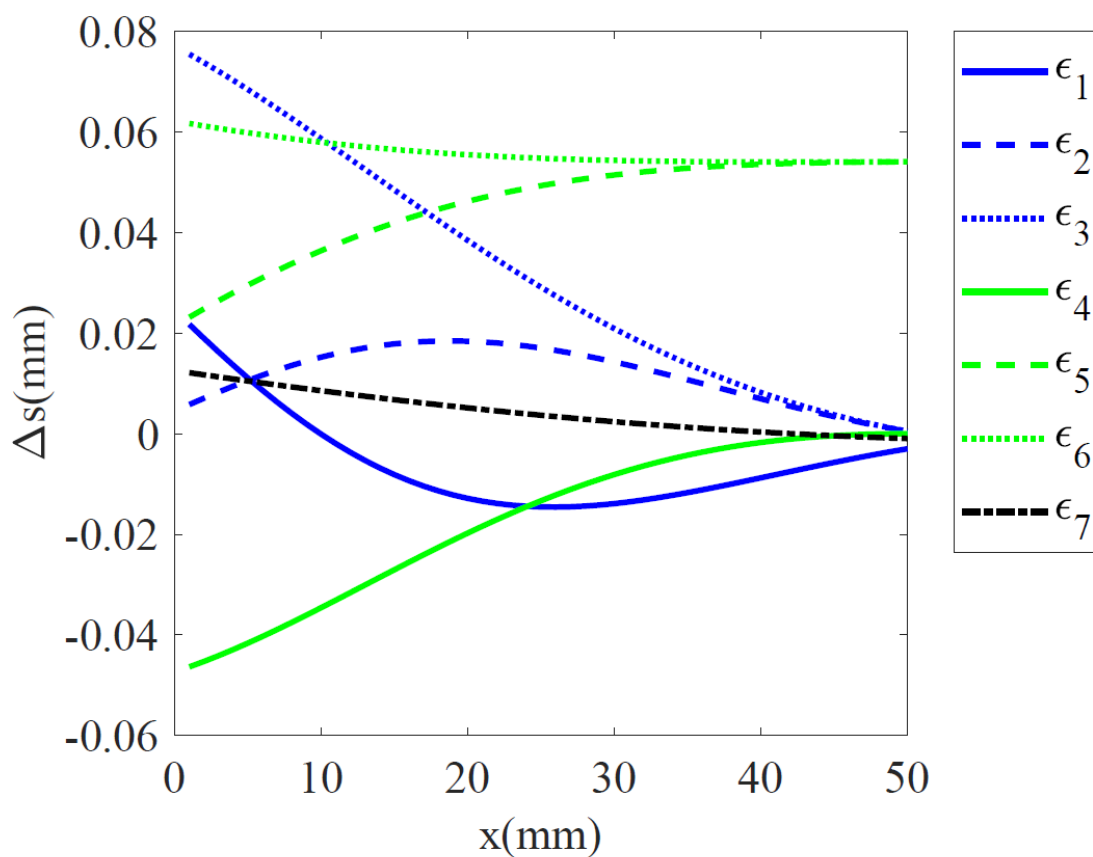


圖 6-4 九連桿型雙肘節鎖模機構桿件機械誤差



6-3 Theo Jansen 步行機構動力學分析

圖 6-5 為 Theo Jansen 步行機構，其中 R_{1X} 、 R_{1Y} 、 R_2 、 R_3 、 R_4 、 R_5 、 R_6 、 R_7 、 R_8 、 R_9 和 R_{10} 分別為其各桿件之桿長，三接頭桿 OCD 中 $\angle O = \alpha$ ，三接頭桿 EFG 中 $\angle F = \beta$ ， θ_3 、 θ_4 、 θ_5 、 θ_6 、 θ_7 和 θ_8 為其致動接頭的旋轉角度， θ_2 為輸入角（輸入變數）， G 點座標 (X_G, Y_G) 為步行軌跡（輸出變數），設定一 XY 座標，以固定樞軸 O 為原點。Theo Jansen 步行機構之各項參數如表 6-4 所示。

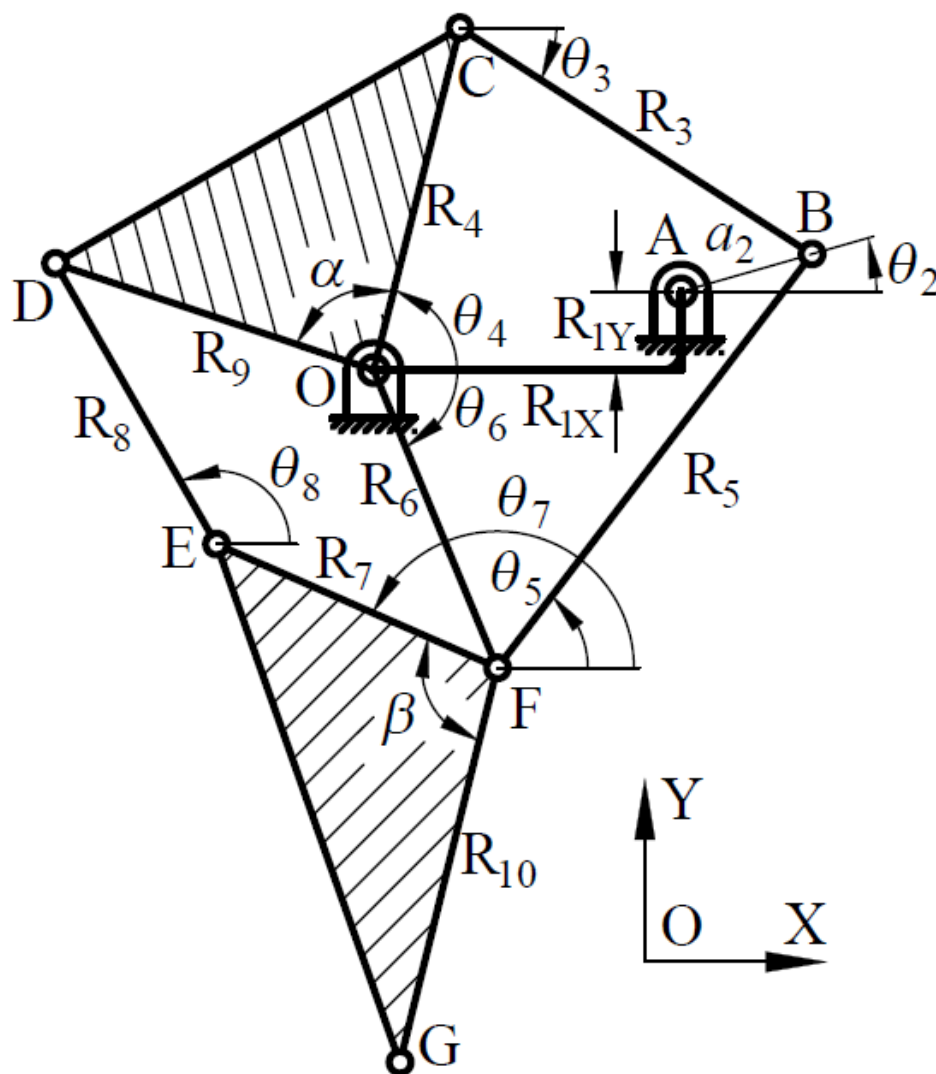


圖 6-5 Theo Jansen 步行機構

表 6-4 Theo Jansen 步行機構之各項參數

符號	數值(單位)	符號	數值(單位)
R_{1X}	38 mm	θ_2	10°
R_{1Y}	7.8 mm	θ_3	-35.81°
R_2	15 mm	θ_4	72.69°
R_3	50 mm	θ_5	50.08°
R_4	41.5 mm	θ_6	-70.6°
R_5	61.9 mm	θ_7	154.05°
R_6	39.3 mm	θ_8	116.41°
R_7	36.7 mm	a_{G2}	$750 \text{ mm/s}^2(190^\circ)$
R_8	39.4 mm	a_{G3}	$396.56 \text{ mm/s}^2(18.2^\circ)$
R_9	40.1 mm	a_{G4}	$408.81 \text{ mm/s}^2(47^\circ)$
R_{10}	49 mm	a_{G5}	$258.38 \text{ mm/s}^2(207.8^\circ)$
α	86.27°	a_{G6}	$510.22 \text{ mm/s}^2(1.4^\circ)$
β	99.1°	a_{G7}	$428.02 \text{ mm/s}^2(324.5^\circ)$
ω_2	10 rad/s	a_{G8}	$71.211 \text{ mm/s}^2(211^\circ)$
α_2	0	r_{m2}	7.5 mm
α_3	-10.57 rad/s^2	r_{m3}	30 mm
α_4	19.02 rad/s^2	r_{m4}	20 mm
α_5	3.16 rad/s^2	r_{m5}	30.95 mm
α_6	-24.65 rad/s^2	r_{m6}	19.65 mm
α_7	18.34 rad/s^2	r_{m7}	20 mm
α_8	1.8 rad/s^2	r_{m8}	39.4 mm

假設各桿件質量 m_i 皆為 1kg，各桿件對質心轉動慣量 I_{Gi} 皆為 $100 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$ 。

其中 R_i 為桿件 i 之長度， a_{Gi} 為桿件 i 之質心加速度， r_{mi} 為桿件 i 轉軸至其質心之距離。將 Theo Jansen 步行機構進行模組化拆解，如圖 6-6，且將桿件 7 之 F 點假想為固定樞軸。桿件 4 與桿件 7 之質心分別位於 α 及 β 之角平分線上。

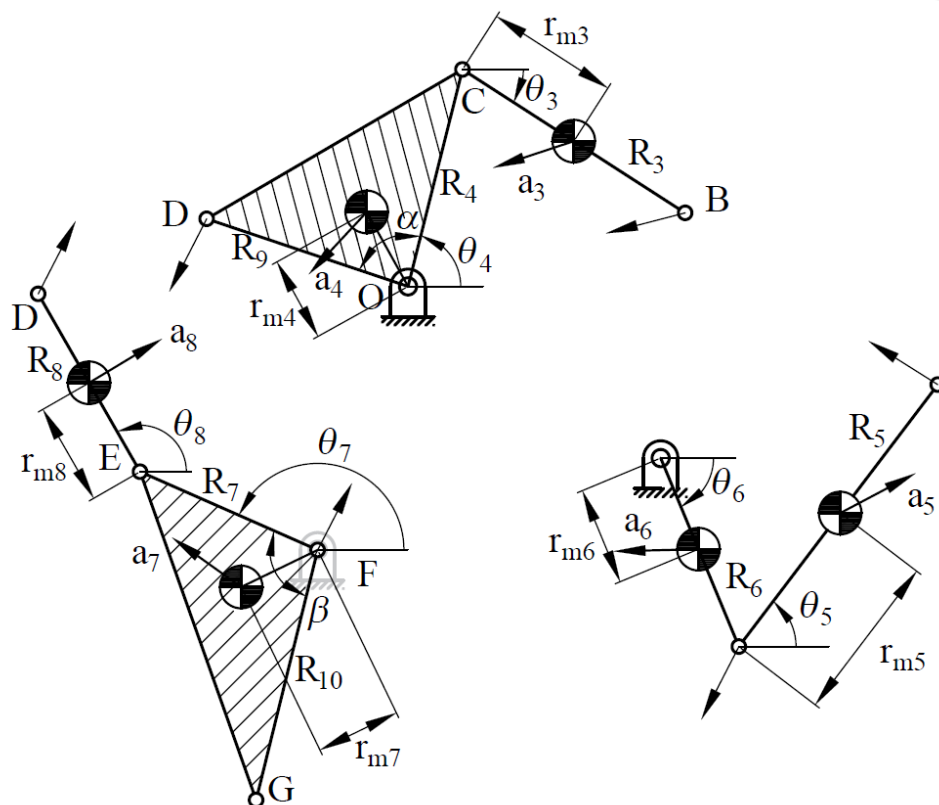


圖 6-6 Theo Jansen 模組化拆解

首先先計算各桿件所受到的慣性力 $F_{Gi} = -m_i a_{Gi}$ ：

$$F_{G2} = -m_2 a_{G2} = 0.75N(190^\circ)$$

$$F_{G3} = -m_3 a_{G3} = 0.396N(198.2^\circ)$$

$$F_{G4} = -m_4 a_{G4} = 0.408N(227^\circ)$$

$$F_{G5} = -m_5 a_{G5} = 0.258N(27.8^\circ)$$

$$F_{G6} = -m_6 a_{G6} = 0.51N(181.4^\circ)$$

$$F_{G7} = -m_7 a_{G7} = 0.428N(144.5^\circ)$$

$$F_{G8} = -m_8 a_{G8} = 0.071N(31^\circ)$$



計算桿件所受的慣性矩 $T_{Gi} = -I_{Gi}\alpha_i$ ：

$$T_{G2} = -I_{G2}\alpha_2 = 0$$

$$T_{G3} = -I_{G3}\alpha_3 = 1.057\text{N} \cdot \text{m/s}^2 \text{ ccw}$$

$$T_{G4} = -I_{G4}\alpha_4 = 1.902\text{N} \cdot \text{m/s}^2 \text{ cw}$$

$$T_{G5} = -I_{G5}\alpha_5 = 0.315\text{N} \cdot \text{m/s}^2 \text{ cw}$$

$$T_{G6} = -I_{G6}\alpha_6 = 2.464\text{N} \cdot \text{m/s}^2 \text{ ccw}$$

$$T_{G7} = -I_{G7}\alpha_7 = 1.834\text{N} \cdot \text{m/s}^2 \text{ cw}$$

$$T_{G8} = -I_{G8}\alpha_8 = 0.18\text{N} \cdot \text{m/s}^2 \text{ cw}$$

計算慣性力所需偏移之距離 d_i ：

$$d_3 = \frac{I_{G3}\alpha_3}{m_3a_{G3}} = 2.665 \text{ mm}$$

$$d_4 = \frac{I_{G4}\alpha_4}{m_4a_{G4}} = 4.653 \text{ mm}$$

$$d_5 = \frac{I_{G5}\alpha_5}{m_5a_{G5}} = 0.818 \text{ mm}$$

$$d_6 = \frac{I_{G6}\alpha_6}{m_6a_{G6}} = 4.83 \text{ mm}$$

$$d_7 = \frac{I_{G7}\alpha_7}{m_7a_{G7}} = 4.284 \text{ mm}$$

$$d_8 = \frac{I_{G8}\alpha_8}{m_8a_{G8}} = 2.492 \text{ mm}$$

將慣性力偏移後之結果如圖 6-7。其中 L_i 為各桿件轉軸與偏移後之慣性力沿桿件方向距離， h_i 為各桿件轉軸與偏移後之慣性力垂直桿件方向距離，可經由幾何計算得到，其結果如表 6-5。

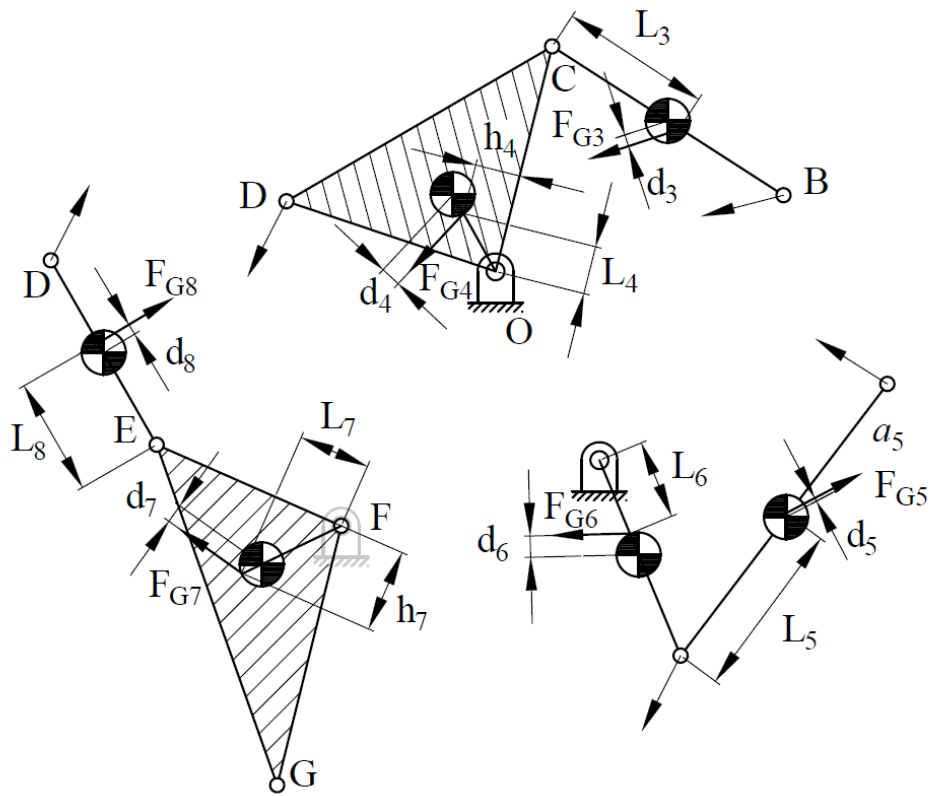


圖 6-7 Theo Jansen 步行機構慣性力等效偏移

表 6-5 L_i 與 h_i 之數值

h_4	-10.26 mm	L_5	28.79 mm
h_7	-19.44 mm	L_6	14.57 mm
L_3	33.29 mm	L_7	13.69 mm
L_4	10.93 mm	L_8	22.2 mm

求得各項所需參數後，可開始進行模組化力學分析，首先分析由桿件 7 及桿件 8 組成的 RR 機械手臂，將偏移後的慣性力 F_{G7} 及 F_{G8} 視為外力 P 與 Q，並將 F 點假想為此機械手臂之固定樞軸，代入副函式：

$$\begin{aligned}
 & [F_{87t}, F_{87n}, F_{48x}, F_{48y}, F_{67x}, F_{67y}] \\
 & = \text{ForceRR}(F_{G8}, F_{G7}, 0, 0, R_7, R_8, L_7, L_8, h_7, 0, \theta_7, \theta_8, 31, 144.5)
 \end{aligned}$$



可得到

$$\begin{bmatrix} F_{87t} \\ F_{87n} \\ F_{48x} \\ F_{48y} \\ F_{67x} \\ F_{67y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.042N \\ -0.359N \\ -0.062N \\ -0.415N \\ -0.247N \\ 0.153N \end{bmatrix}$$

接著分析桿件 5 及桿件 6 組成的 RR 機械手臂，在此利用 superposition 的原則將受桿件 7 之力及偏移之慣性力分開計算，以便套用模組之副函式。計算完再將兩種結果加總即可求解桿件 5 及桿件 6 之受力。首先計算偏移之慣性力 F_{G5} 及 F_{G6} 所造成的效果：

$$\begin{aligned} & [F_{56t}, F_{56n}, F_{25x}, F_{25y}, F_{16x}, F_{16y}] \\ & = \text{ForceRR}(F_{G5}, F_{G6}, 0, 0, R_6, R_5, L_6, L_5, 0, 0, \theta_6, \theta_5, 27.8, 181.4) \end{aligned}$$

可得到

$$\begin{bmatrix} F_{56t} \\ F_{56n} \\ F_{25x} \\ F_{25y} \\ F_{16x} \\ F_{16y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.18N \\ -0.046N \\ -0.074N \\ -0.017N \\ 0.356N \\ -0.071N \end{bmatrix}$$

計算受桿件 7 之力所造成之效果，其中

$$F_{67} = \sqrt{F_{67x}^2 + F_{67y}^2} = 0.29N$$

$$\theta_{F67} = \tan^{-1}\left(\frac{F_{67y}}{F_{67x}}\right) = -31.823^\circ$$

代入副函式：

$$\begin{aligned} & [F_{56t}, F_{56n}, F_{25x}, F_{25y}, F_{16x}, F_{16y}] \\ & = \text{ForceRR}(0, -F_{67}, 0, 0, R_6, R_5, R_6, 0, 0, 0, \theta_6, \theta_5, 0, \theta_{F67}) \end{aligned}$$



可得到

$$\begin{bmatrix} F_{56t} \\ F_{56n} \\ F_{25x} \\ F_{25y} \\ F_{16x} \\ F_{16y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.067\text{N} \\ -0.04\text{N} \\ 0.05\text{N} \\ 0.06\text{N} \\ 0.196\text{N} \\ -0.213\text{N} \end{bmatrix}$$

將兩結果相加可得

$$\begin{bmatrix} F_{56t} \\ F_{56n} \\ F_{25x} \\ F_{25y} \\ F_{16x} \\ F_{16y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.247\text{N} \\ -0.086\text{N} \\ -0.024\text{N} \\ 0.043\text{N} \\ 0.552\text{N} \\ -0.304\text{N} \end{bmatrix}$$

接著分析桿件 4 及桿件 3 組成的 RR 機械手臂，在此一樣利用 superposition 的原則將受桿件 8 之力及偏移之慣性力分開計算，如圖 6-8，以便套用模組之副函式。計算完再將兩種結果加總即可求解桿件 4 及桿件 3 之受力。

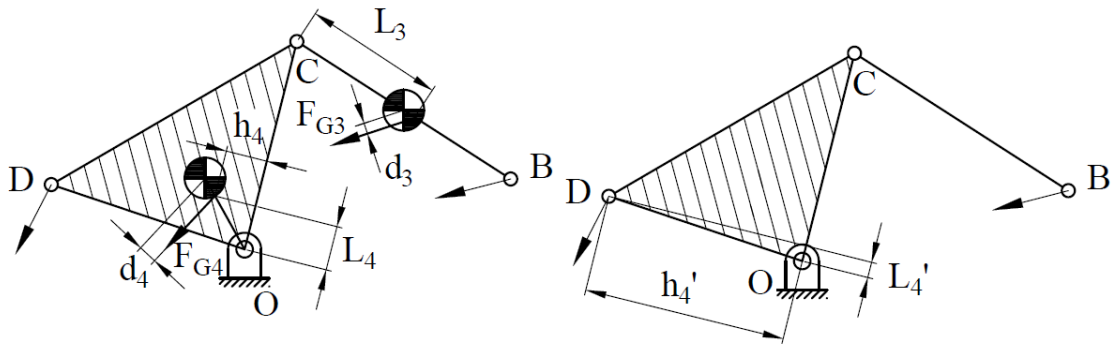


圖 6-8 桿件 4 及桿件 3 組成的 RR 機械手臂之兩種受力情形

首先計算偏移之慣性力 F_{G4} 及 F_{G3} 所造成的效果：

$$\begin{aligned} & [F_{34t}, F_{34n}, F_{23x}, F_{23y}, F_{14x}, F_{14y}] \\ & = \text{ForceRR}(F_{G3}, F_{G4}, 0, 0, R_4, R_3, L_4, L_3, h_4, 0, \theta_4, \theta_3, 227, 198.2) \end{aligned}$$



可得到

$$\begin{bmatrix} F_{34t} \\ F_{34n} \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{14x} \\ F_{14y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.187\text{N} \\ 0.146\text{N} \\ 0.354\text{N} \\ 0.067\text{N} \\ 0.304\text{N} \\ 0.35\text{N} \end{bmatrix}$$

計算受桿件 8 之力所造成之效果，其中由於受力位置不同， h_4 與 L_4 變更為 h_4' 與 L_4' ：

$$F_{48} = \sqrt{F_{48x}^2 + F_{48y}^2} = 0.42\text{N}$$

$$\theta_{F48} = \tan^{-1}\left(\frac{F_{48y}}{F_{48x}}\right) = 81.439^\circ$$

$$h_4' = 40.02 \text{ mm}$$

$$L_4' = 2.6 \text{ mm}$$

代入副函式：

$$\begin{aligned} & [F_{34t}, F_{34n}, F_{23x}, F_{23y}, F_{14x}, F_{14y}] \\ & = \text{ForceRR}(0, -F_{48}, 0, 0, R_4, R_3, L_4', 0, h_4', 0, \theta_4, \theta_3, 0, \theta_{F48}) \end{aligned}$$

可得到

$$\begin{bmatrix} F_{34t} \\ F_{34n} \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{14x} \\ F_{14y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.396\text{N} \\ -0.132\text{N} \\ 0.338\text{N} \\ -0.244\text{N} \\ -0.276\text{N} \\ 0.659\text{N} \end{bmatrix}$$

將兩結果相加可得

$$\begin{bmatrix} F_{34t} \\ F_{34n} \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{14x} \\ F_{14y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.542\text{N} \\ -0.319\text{N} \\ 0.692\text{N} \\ -0.177\text{N} \\ 0.028\text{N} \\ 1.009\text{N} \end{bmatrix}$$

最後計算桿件 2 B 點所受到的力矩

$$T_2 = -(F_{32x} + F_{52x}) * \cos + (F_{32y} + F_{52y}) * \sin = -0.682 \text{ N} \cdot \text{m}$$

第七章 結論



本論文建立一模組化方法，進行平面連桿之力學分析及敏感度分析。首先建立三個基礎模組：RR 機械手臂、PR 機械手臂及 RP 機械手臂，分別推導其順向和逆向之運動學分析以及其力學方程式之數學模型，將其寫成 MATLAB 副函式之形式，接著將其套用於各種不同的平面機構，由基礎的四連桿、滑件曲柄機構與倒置滑件曲柄機構，再到較複雜之六連桿機構與九連桿型雙肘節鎖模機構[53]，皆可透過此模組化方法簡單有效的分析其力學問題，並藉由虛功定理將機械誤差分析中的敏感度分析與力學分析問題做結合，並將模組化方法套用於其中以求解。接著將此模組化方法推廣至動力學分析，將慣性力等效偏移，將動力學問題轉化為靜力學問題，再利用副函式求解平面連桿機構之動力學分析問題。以下將總結此模組化方法之優缺點：

1. 對於較為複雜之多連桿機構，若以傳統閉迴路法或其他方法推導其力學分析其實相當困難且複雜，而使用本論文提出之模組化方法，僅需推導三個簡單模組數學模型，接著將其重複套用便可得到機構之力學分析結果，省下繁瑣的計算過程。
2. 本論文所提出的模組化方法，只需透過重複套用基礎模組，即可簡單有效的求解大部分平面連桿機構之力學分析，其過程只需建立三個基礎模組數學模型，其餘只需重複演算模組副函式，無須為了一個新的機構而重新建立一套數學模型，為一較系統化之方法。
3. 本文所提出的模組化力學分析方法也可利用虛功定理轉化並套用於敏感度分析問題。相較於傳統的閉迴路機械誤差方程式，計算較為簡便，可從靜力學分析的結果直接得到各桿件之敏感度，且得到的結果與閉迴路法相同，能達到同樣的分析效果。
4. 本論文將模組化方法結合順向和逆向運動學所得到的速度與加速度及桿件之慣性力結合，利用慣性力的等效偏移使其適用於靜力學分析之基礎模組，一

樣只需重複套用個基礎模組及可求得大部分平面連桿機構之動力學分析。

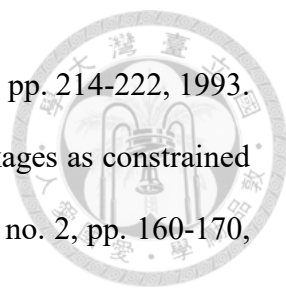
5. 本論文所提出的模組化方法之主要缺點在於，建立三個基礎模組可分析大部分之平面連桿機構，但仍然有少部分連桿機構無法套用此三種模組，例如含有 Assur group 3 之機構。往後仍需建立其他基礎模組並盡量簡化其計算過程，以最少之基礎模組完成連桿機構之力學分析。

根據本論文之研究，在處理連桿機構之力學問題時，套用模組的方法有一定的規則可循，因此有將其程式化之可能，利用電腦輔助分析套用模組的順序為本研究未來可能可以延伸的方向。

參考文獻

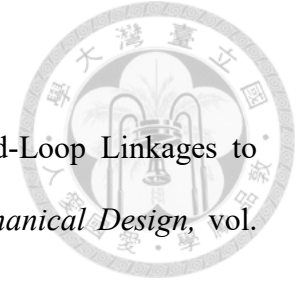


- [1] F. Freudenstein, "An analytical approach to the design of four-link mechanisms," *Transactions of the ASME*, vol. 76, no. 3, pp. 483-442, 1954.
- [2] R. Hartenberg and J. Danavit, *Kinematic synthesis of linkages*. New York: McGraw-Hill, 1964.
- [3] A. V. Mohan Rao and G. N. Sandor, "Extension of Freudenstein's Equation to Geared Linkages," *Journal of Engineering for Industry*, vol. 93, no. 1, pp. 201-210, 1971.
- [4] G. N. Sandor, R. Kaufman, A. Erdman, T. Foster, J. Sadler, and T. Kershaw, "Kinematic synthesis of geared linkages," *Journal of Mechanisms*, vol. 5, no. 1, pp. 59-87, 1970.
- [5] K. Ting and G. Tsai, "Mobility and synthesis of five-bar programmable linkages," in *Proceedings of the Ninth OSU Applied Mechanisms Conference*, 1985.
- [6] K. Russell and R. S. Sodhi, "Kinematic synthesis of planar five-bar mechanisms for multi-phase motion generation," *JSME International Journal Series C Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing*, vol. 47, no. 1, pp. 345-349, 2004.
- [7] L. Vathan, H. Kumar, and I. Brighton, "Kinematic Analysis of Five-Bar Mechanism in Industrial Robotics," *Alangulam: Sardar Raja College of engineering*, 2015.
- [8] C. W. McLarnan, "Synthesis of Six-Link Plane Mechanisms by Numerical Analysis," *Journal of Engineering for Industry*, vol. 85, no. 1, pp. 5-10, 1963, doi: 10.1115/1.3667588.
- [9] J. A. Mirth and T. R. Chase, "Circuit Analysis of Watt Chain Six-Bar

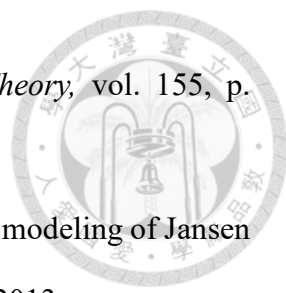
- 
- Mechanisms," *Journal of Mechanical Design*, vol. 115, no. 2, pp. 214-222, 1993.
- [10] G. S. Soh and J. M. McCarthy, "The synthesis of six-bar linkages as constrained planar 3R chains," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 43, no. 2, pp. 160-170, 2008.
- [11] G. R. Pennock and A. Israr, "Kinematic analysis and synthesis of an adjustable six-bar linkage," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 44, no. 2, pp. 306-323, 2009.
- [12] M. M. Plecnik and J. Michael McCarthy, "Numerical synthesis of six-bar linkages for mechanical computation," *Journal of Mechanisms and Robotics*, vol. 6, no. 3, 2014.
- [13] G. R. Pennock and D. J. Kassner, "Kinematic Analysis of a Planar Eight-Bar Linkage: Application to a Platform-Type Robot," *Journal of Mechanical Design*, vol. 114, no. 1, pp. 87-95, 1992.
- [14] G. N. Sandor, "A general complex-number method for plane kinematic synthesis with applications," Columbia University, 1959.
- [15] C. H. Suh and C. W. Radcliffe, "Synthesis of Plane Linkages With Use of the Displacement Matrix," *Journal of Engineering for Industry*, vol. 89, no. 2, pp. 206-214, 1967.
- [16] C. H. Suh and C. W. Radcliffe, *Kinematics and mechanisms design*. Wiley, 1978.
- [17] A. Midha and Z.-L. Zhao, "Synthesis of planar linkage via loop closure and nonlinear equations solution," *Mechanism and Machine theory*, vol. 20, no. 6, pp. 491-502, 1985.
- [18] D. Simpson, J. Simmons, and G. Moldovean, "A generalized approach for the kinematic analysis of planar mechanisms," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol.




- 209, no. 4, pp. 237-244, 1995.
- [19] M. Smith and L. Maunder, "Inertia forces in a four-bar linkage," *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 9, no. 3, pp. 218-225, 1967.
- [20] J. Uicker Jr, "Dynamic force analysis of spatial linkages," 1967.
- [21] M. Skreinerr, "Dynamic analysis used to complete the design of a mechanism," *Journal of Mechanisms*, vol. 5, no. 1, pp. 105-119, 1970.
- [22] S. Sahin and L. Notash, "Static force analysis of mechanisms with four-bar linkages based on flexibility conditions," *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, vol. 29, no. 4, pp. 605-616, 2005.
- [23] X. Li, Q. Huang, X. Chen, Z. Yu, J. Zhu, and J. Han, "A novel under-actuated bionic hand and its grasping stability analysis," *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 9, no. 2, p. 1687814016688859, 2017.
- [24] V. Arakelian and Y. Zhang, "An improved design of gravity compensators based on the inverted slider-crank mechanism," *Journal of Mechanisms and Robotics*, vol. 11, no. 3, 2019.
- [25] S. Gawande and S. Bhojane, "Numerical and Experimental Design Optimization of Toggle Clamping Mechanism," *Iranian Journal of Science and Technology; Transactions of Mechanical Engineering*, vol. 43, no. 4, pp. 763-779, 2019.
- [26] A. Yildiz, "Parametric synthesis of two different trunk lid mechanisms for sedan vehicles using population-based optimisation algorithms," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 156, p. 104130, 2021.
- [27] R. S. Berkof, "The input torque in linkages," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 14, no. 1, pp. 61-73, 1979.
- [28] J. L. Elliott and D. Tesar, "The Theory of Torque, Shaking Force, and Shaking Moment Balancing of Four Link Mechanisms," *Journal of Engineering for*



- Industry*, vol. 99, no. 3, pp. 715-722, 1977.
- [29] C. Huang and B. Roth, "Dimensional Synthesis of Closed-Loop Linkages to Match Force and Position Specifications," *Journal of Mechanical Design*, vol. 115, no. 2, pp. 194-198, 1993.
- [30] C. Huang and B. Roth, "Position-Force Synthesis of Closed-Loop Linkages," *Journal of Mechanical Design*, vol. 116, no. 1, pp. 155-162, 1994.
- [31] N. P. Dien and N. Van Khang, "Dynamic force analysis of a six-link planar mechanism under consideration of friction at the joints," *Vietnam Journal of Mechanics*, vol. 26, no. 2, pp. 65-75, 2004.
- [32] B. K. Belleri and S. B. Kerur, "Dynamic analysis of four bar planar mechanism extended to six-bar planar mechanism with variable topology," in *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 1943, no. 1: AIP Publishing LLC, p. 020094.
- [33] J.-S. Zhao, J.-Y. Wang, F. Chu, Z.-J. Feng, and J. S. Dai, "Structure synthesis and statics analysis of a foldable stair," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 46, no. 7, pp. 998-1015, 2011.
- [34] Y. Bai, F. Gao, W. Guo, and Y. Yue, "Kinematic and dynamic analyses of the multi-actuated mechanical press with parallel topology," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 226, no. 10, pp. 2573-2588, 2012.
- [35] H. Ding, L. Han, W. Yang, and C. Wu, "Kinematics and dynamics analyses of a new type face-shovel hydraulic excavator," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 231, no. 5, pp. 909-924, 2017.
- [36] D. Wang, Y. Xiong, B. Zi, S. Qian, Z. Wang, and W. Zhu, "Design, analysis and experiment of a passively adaptive underactuated robotic hand with linkage-slider

- 
- and rack-pinion mechanisms," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 155, p. 104092, 2021.
- [37] S. Nansai, M. R. Elara, and M. Iwase, "Dynamic analysis and modeling of Jansen mechanism," *Procedia Engineering*, vol. 64, pp. 1562-1571, 2013.
- [38] K. Komoda and H. Wagatsuma, "Energy-efficacy comparisons and multibody dynamics analyses of legged robots with different closed-loop mechanisms," *Multibody System Dynamics*, vol. 40, no. 2, pp. 123-153, 2017.
- [39] G. Feng, "Complete shaking force and shaking moment balancing of 26 types of four-, five-and six-bar linkages with prismatic pairs," *Mechanism and Machine theory*, vol. 25, no. 2, pp. 183-192, 1990.
- [40] G. Feng, "Complete shaking force and shaking moment balancing of 17 types of eight-bar linkages only with revolute pairs," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 26, no. 2, pp. 197-206, 1991.
- [41] P. Sheth, J. Uicker, and J. IMP, "A computer aided design analysis system for mechanisms and linkages," *Journal of Engineering for Industry*, pp. p454-464, 1972.
- [42] V. Brat and P. Lederer, "KIDYAN: Computer-aided kinematic and dynamic analysis of planar mechanisms," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 8, no. 4, pp. 457-467, 1973.
- [43] R. Williams and S. Rupprecht, "Dynamic force analysis of planar mechanisms," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 16, no. 4, pp. 425-440, 1981.
- [44] R. Kumar, S. D. Vantmuri, R. G. Chittawadigi, and S. K. Saha, "Dynamic analyses of four-bar mechanism in MechAnalyzer software," 2016.
- [45] K. Abhary, "A simple analytical method for force analysis of planar frictional tree-like mechanisms," 2008: ASEE.

- 
- [46] 李树军 and 戴建生, "基于 Assur 杆组元素的平面机构的拓扑描述," *机械工程学报*, vol. 47, no. 19, pp. 8-13, 2011.
- [47] L. Assur, "Investigation of plane hinged mechanisms with lower pairs from the point of view of their structure and classification (in Russian): Part I, II," *Bull. Petrograd Polytech. Inst*, vol. 20, pp. 329-386, 1913.
- [48] H. Wang, Z. Lin, and X. Lai, "Composite modeling method in dynamics of planar mechanical system," *Science in China Series E: Technological Sciences*, vol. 51, no. 5, pp. 576-590, 2008.
- [49] S. Durango, G. Calle, and O. Ruiz, "Analytical method for the kinetostatic analysis of the second-class RRR Assur group allowing for friction in the kinematic pairs," *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 32, no. 3, pp. 200-207, 2010.
- [50] S. Durango, C. Giraldo, G. Calle, and L. Mesa, "Dynamics of planar mechanisms by a modular approach," *Ingeniería y competitividad*, vol. 16, no. 1, pp. 159-168, 2014.
- [51] A. Jomartov and A. Tuleshov, "Vector method for kinetostatic analysis of planar linkages," *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 40, no. 2, pp. 1-9, 2018.
- [52] A. Armillotta, "Force analysis as a support to computer-aided tolerancing of planar linkages," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 93, pp. 11-25, 2015.
- [53] Chang, W. T., Lee, W. I. and Hsu, K. L. "Analysis and Experimental Evaluation of Mechanical Errors in Nine-Link Type Double-Toggle Mold/Die Clamping Mechanisms," *Applied Sciences*, vol. 11, no. 2, pp.832. , 2021.