

國立臺灣大學工學院機械工程學系

碩士論文

Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis



不確定參數之最佳激發與校準：以車輛模型開發為例
Optimal Uncertain Parameter Excitation and Estimation:
a Case Study on Vehicle Model Development

陳怡平

Yi-Ping Chen

指導教授：詹魁元博士

Advisor: Kuei-Yuan Chan, Ph.D.

中華民國 109 年 6 月

June, 2020

國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書



不確定參數之最佳激發與校準：以車輛模型開發為例

Optimal Uncertain Parameter Excitation and Estimation:
a Case Study on Vehicle Model Development

本論文係陳怡平君 (R07522606) 在國立臺灣大學機械工程學系
完成之碩士學位論文，於民國 109 年 6 月 23 日承下列考試委員審查
通過及口試及格，特此證明

口試委員：

A large, stylized handwritten signature in black ink, likely belonging to the supervisor.

(簽名)

(指導教授)

A handwritten signature in blue ink, likely belonging to a committee member.

A handwritten signature in blue ink, likely belonging to a committee member.

系主任

A handwritten signature in blue ink, likely belonging to the department chair.

(簽名)



誌謝

能在六月底以前完成口試、修改完論文，這幾乎是一年前的我無法想像的畫面。對我來說，真正的研究可能是從去年五月底開始，到了 AI-BUS 的計畫即將告一個段落、對 ADAMS 的寄望全部消失、及終於聽懂了老師跟我說了一整年「假如你是舒馬赫...」這句話到底是什麼意思後，我才真的開始了這一份研究。這一年來過得太過瘋狂，值得好好的品味。

感謝上帝，讓我在升上大四的暑假不知怎麼的突然轉念想要放棄原本的預研究生資格，甘願鼎著落跑預研究生的笑話一路跑來台大，開啓了一段我沒有想過的既痛苦又孤獨的旅程。雖然一路上累死了，卻不斷的給我來自同伴們和家人們的支持和愛，讓我這一路上都還可以順利的走完。也透過這短短的一兩年，讓我更學會感恩、學會挑戰自己、學會向上管理這個名詞，也知道這些恩典都夠我用。

我依然要先感謝那最能啓蒙我的導師—顏鴻森老師，在我什麼都不是的時候手把手帶著我走過了四年的大學生活，讓我在年幼時就能進到研究室跟一群學長姐們學習。對我來說，面對顏老師不太是向上管理，老師總是允許我任性，儘管給了我很多在大學規劃上的意見，我還是我行我素的跑了很多你沒有想過也沒有鼓勵過的活動，但當我有需要時你總是動用你所有的人脈來幫助我。謝謝老師願意在我想落跑的時候全力的支持我，甚至幫我寫推薦信，而且樂意在我來到台北後還定期更心我的進度。謝謝老師讓我看到一個大師的謙卑和自我要求，特別是當年我洋洋灑灑的寫完 100 頁的學士專題，連校對都沒有就直接整份印下來給老師，老師依然每一個字瀏覽一次，並且用我還不是很能看懂的字體逐一挑出錯字來。這對我來說太超乎想像，而且我現在不敢這樣了。謝謝當年在 CMD Lab 曾經在研究和學術上給我啓發，帶著我從 Word 的格式開始修改到可以專題期間給我最實際建議的陳冠辰學長、來到台北還能一起在彼此的水深火熱開玩笑和合作的陳羽薰學姐，以及看著你們念完碩士的龍哥、紹宇、冠輝、駿耀、孜卉、碩辰，和一起在 Lab 一起作研究的夥伴們 Tich、浚澤、儒瑄、京正、正賢、松靈、力歲、翊庭。我知道把大學的事情寫在碩論的致謝很奇怪，但這一段歷程對於現在的我啓發太大，我得要寫在這裡。

謝謝詹魁元老師，從我偷跑找教授時就願意接待我，放榜的第一時間也



願意指導我。一直以來我應該都不是那麼好搞的人，面對接近一年的撞牆期和不適應老師的帶法，甚至還收到了我寫給老師的「我很不爽」的信，依然對我的態度沒有改變。雖然跟我預期的指導方針有些不同，但卻讓我覺得老師你超看得起我，寧可放很大很大的空間讓我自己去撞牆，也不要給我多一點點明確的提示。卡關時，你總是推坑著我去熬夜，「衝一下不會死啦！」「不衝怎麼知道會不會有結果？」或許比起看到結果，你更想看到的是我自己找到答案時的那種雀躍。這兩年間，從 AI-Bus 到自己的研究，你不曾過問我的任何進度，而是給我最大的信任讓我管理自己的時間；雖然才剛跟你表達完我對這種指導方式的滿滿不爽（後來是很開心啦），但在我毛遂自薦想當助教時，還是願意讓我可以一起參與在課程進行中，甚至在碩二下要趕論文的時候讓我協助了課程的種種，可以在過程中學習老師在機械領域外對於教育的思維、實踐、和手腕。對我來說，這太不可思議了，這正是當時我一口咬定要跟著老師的最大原因，而你讓我在最後一個學期可以實現這個願望。謝謝老師在指導我的論文期間給我在專業上的啟發以及對於未來的想像，更讓我愛上可以跳脫舒適圈，讓我可以有自信的面對自己的成果。

謝謝 SOLab 的大家，在這段同甘共苦的日子裡一起扶持。謝謝彥智學長在我的研究上不厭其煩的跟我討論，Kriging 和 EGO 上的支援也讓我的研究得以往前推一步；謝謝穎寬，雖然在 Lab 的日子沒有重疊，但給我很多在研究上的鼓勵和未來方向的想法與激勵；謝謝冠頤和慕堤，兩位出國的經驗給了我更多具體的準備事項，更謝謝冠頤在我低潮時仍然每週兩天一起去水源，也是支持我完成研究的重要人物；謝謝柏賢，你吉祥物的定位真的很奇特，帮大家張羅大大小小的雜事，還要兼任康樂股長和大家完一起去尿尿和抓羊的遊戲，這兩年有你讓 Lab 的研究氛圍相當有趣。謝謝柏宇，雖然話不多但作起事情來是大家的模範；謝謝員成，在研究上和出國上給了很多建議；謝謝心婷，你的研究給了我好多好多啟發，也給了我一個很好的方向去努力。謝謝一起奮鬥的同窗，正直和氣的中信，願意在我需要跑平行運算時把最好的電腦跟我交換，這種捨己太帥；謝謝奕憲，一起修課一起討論研究的時光總是激起很多火花；謝謝路寧，你的好學和風趣也是我喜歡這裡的原因；謝謝宥廷，雖然好像什麼事情都看起來不太在乎但你真的都想過一次，讓我對台大學生大開眼界。謝謝研究室的學弟妹，特別是晉毅，在實驗上願意努力實現，也讓我學習要怎麼把自己理解的東西講得更清楚；謝謝雅媛、俊杰、昱霖，願意把我當一個學長看待，聽我說故事、一起打球。SoLab 真的是很奇妙的一個地方，謝謝這裡的一切！

謝謝鄭榮和老師在我碩一時參與了 Ai-Bus 的計畫，雖然在這個團隊我能貢獻的有限，但從工程的角度仍然讓我學習到很多硬體端在執行上的困難和方法，並且用了一年的時間來理解系統開發的過程和所需要的理論與工具，並深感自己的渺小。謝謝曾經的工作夥伴，在失效組帶著我的冠吾以及學長姐威德、易珊，和同屆的夥伴庭合、大師、嘉言、彭彭、郁婷、謨丞，在你們身上學到了很多來自不同領域的能力，也謝謝這一年來的接納。

謝謝這一路上看著我完成論文，在過程中陪著我的朋友們：子源、李其、允中、簡耀、鼎言、厚承、肯平、建緯、宇軒、主昊、恩典、立祈、何祈、奇緣、順哥、佳君姐、阿圖、亦真、心怡、恩雨、上潔、俊安、顯慶、崇瀚、亞錚、翔姐、Chris，這陣子辛苦你們了，不管是透過電話、透過陪伴、透過禱告，讓我可以一次又一次的用好的情緒來面對我的難題，雖然面對研究的心仍然是孤獨的，但能夠被支持，就是繼續往下走的助力。

謝謝會卿，在我最崩潰黑暗的時期依然陪伴我，與我一起難過、一起開心。謝謝你如此捨己來支持我的忙和我的心累，更是盡全力的支持我。謝謝你願意支持我的偏執、聽我說著一堆你根本不懂的研究內容，然後用笑臉回應我。

謝謝爸爸媽媽和姐姐弟弟，三不五時就關切一下我的研究進度，不斷的告訴我壓力不要太大，身體要顧，念不下去就休學了沒關係。謝謝你們讓我在台北這麼貴的地方仍然可以不用擔心生活起居，全力支持我在這份研究上。也謝謝你們天天的禱告，讓我到現在可以奇蹟似的作完這份研究。

最後，謝謝上帝，帶我從成大到台大，都進到很棒的研究室，並且完成這份研究。讓我在每一個環節中都能學習，並且經歷許多恩典。

陳怡平

2020 年 6 月 30 日於台北真理堂信義學舍



中文摘要

模擬模型是系統開發階段重要的工具之一，如何透過模型驗證以優化模型，建立高度可靠之模型更是重要的議題。本研究在模型與真實系統僅存在參數的偏差之假設下，以校準模型參數為設計出發點，提出一套系統化的參數校準流程，用以解決普遍的驗證程序中，參數校準無法有效診斷模型與真實系統的誤差來源、且缺乏系統化的建立參數驗證操作之處境。

本研究在考量模型的複雜程度導致模擬成本過高的情況下，以電腦實驗設計與分析 (Design and Analysis of Computer Experiment, DACE) 之概念結合替代模型，設計一套可用於複雜系統分析的模型驗證流程，透過對系統輸出進行全域敏感度分析，進一步使用最佳化方法設計於激發觀測參數的操作方法，並以基於混沌多項式之卡爾曼濾波器進行參數校準，最後驗證結果。本研究以單一輸出及動態輸出之數學模型確認所提出之方法的可行性，同時驗證了此方法的一般性。再以一自建之線控操作三輪車做為分析對象之車輛工程案例，透過所提出之方法，對車輛動力學模型中的不確定參數進行校準，得到於 95% 信心水準下被認定為準確之模型參數。透過多個案例，也強調了所提出之方法的重要性。

關鍵字：模型驗證、參數校準、操作設計、全域敏感度分析、Kriging、DACE、卡爾曼濾波器



Abstract

Simulation models play important roles in efficient product development cycles. The ability to improve the confidence level of models during the validation stage is also an important topic. In this research, we proposed a systematic procedure on model validation by assuming all the output errors between simulation models and real model experiments are contributed from deviations of model parameters. This procedure aims to counter the inability to create a proper and logical operation when validating dynamic models.

In this research, considering the expensive costs associated with model simulation used in complex systems, a Design and Analysis of Computer Simulation (DACE) based procedure including an optimization method for generating a proper operation which maximizes the sensitivity of uncertain parameters based on global sensitivity analysis (GSA), estimation of parameters with polynomial chaos-based Kalman filter, and model validation based on hypothesis testing, is introduced. Furthermore, two illustrative math models with scalar and dynamic output are demonstrated to verify the method, consequently proving its generality. Finally, an application on validating vehicle dynamic models is shown as an engineering case, which successfully estimates the unknown model parameters with 95% confidence. The significance of this research is also emphasized through multiple cases.

Keywords : Model Validation, Parameter Estimation, Maneuver Design, Global Sensitivity Analysis, Kriging, DACE, Kalman Filter



目錄

口試委員會審定書	i
誌謝	ii
中文摘要	v
Abstract	vi
目錄	vii
圖目錄	xv
表目錄	xxiii
符號列表	xxvi
名詞對照表	xxx
第一章 緒論	1
1.1 模擬模型驗證與校準	1
1.2 車輛動態測試	3
1.2.1 車輛動態測試方法	3
1.2.2 參數校準於車輛開發工程中之困境	4
1.3 研究動機	5
1.4 研究目的	7
1.5 論文架構	8



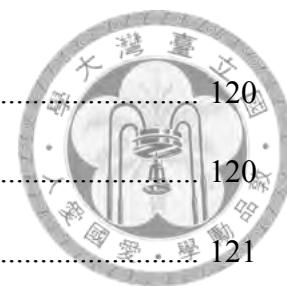
第二章 研究背景與文獻回顧	10
2.1 動態系統之參數激發	10
2.2 敏感度分析	12
2.2.1 全域敏感度分析	13
2.2.2 應用於動態系統之全域敏感度分析	14
2.3 複雜系統於不確定因素下之設計	16
2.3.1 DACE (Design and Analysis of Computer Experiments)	16
2.3.2 低差異取樣方法	17
2.3.3 替代模型	20
2.4 動態系統參數校準	22
2.5 小結	26
第三章 研究方法	27
3.1 真實系統、模擬模型、和實驗與模型驗證之關聯	28
3.2 低差異取樣	30
3.2.1 Radical Inversion	30
3.2.2 生成矩陣	30
3.3 替代模型	32
3.3.1 Kriging 模型	32
3.3.2 EGO 演算法 (Efficient Global Optimization)	35
3.3.3 模型擬合度評估指標	37
3.4 全域敏感度分析	38
3.4.1 Sobol 全域敏感度分析法	38
3.4.2 基於替代模型之全域敏感度分析方法	41



3.4.3	主成分分析	43
3.4.4	基於替代模型之動態系統全域敏感度分析方法	46
3.5	最佳化操作參數	49
3.5.1	指標產生函數	49
3.5.2	目標函數	51
3.5.3	最佳化演算法與流程	52
3.6	動態系統之參數校準	53
3.6.1	混沌多項式展開	53
3.6.2	卡爾曼濾波器	57
3.6.3	應用多項式混沌展開與卡爾曼濾波器於參數校準	60
3.7	參數校準驗證方法	62
3.8	小結	64
第四章	單一輸出數學模型之不確定參數激發	65
4.1	數學模型	65
4.1.1	數學方程式之參數組成	65
4.1.2	敏感度指標求解困境	66
4.2	全域敏感度分析	66
4.2.1	直接求解法	67
4.2.2	替代模型求解法	68
4.3	替代模型求解與評估	73
4.3.1	Kriging 模型擬合準確度評估	73
4.3.2	全域敏感度指標之準確度評估	75

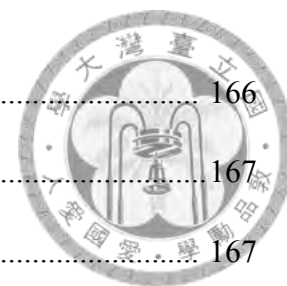


4.4 最佳化操作參數與準確度評估	76
4.4.1 最佳化操作參數之目標函數	76
4.4.2 最佳化結果及準確度評估	76
4.5 小結	80
第五章 動態輸出數學模型之不確定模型參數激發與校準	82
5.1 數學模型	82
5.2 全域敏感度分析	83
5.2.1 直接求解動態系統全域敏感度指標	83
5.2.2 基於替代模型之動態系統全域敏感度分析方法	86
5.3 替代模型求解與評估	88
5.3.1 Kriging 模型擬合準確度評估	88
5.3.2 全域敏感度指標之準確度評估	97
5.4 最佳化操作參數及準確度評估	98
5.4.1 最佳化目標函數	98
5.4.2 最佳化結果與準確度評估	99
5.5 模型參數校準	104
5.6 模型驗證	110
5.7 小結	113
第六章 車輛工程案例	114
6.1 車輛模型建構	114
6.1.1 硬體規格	114
6.1.2 模型架構	116
6.1.3 不確定模型參數	118



6.2 路徑參數化與車輛模型駕駛	120
6.2.1 車道變換	120
6.2.2 定轉角轉向	121
6.2.3 啾頻	121
6.2.4 閉迴路駕駛與開迴路駕駛	123
6.3 參數激發與校準之操作流程	124
6.3.1 模型運作概述	125
6.3.2 完整操作流程	125
6.4 Kriging 模型擬合準確度評估	127
6.4.1 Kriging 模型建立	127
6.4.2 Kriging 模型準確度評估	130
6.5 全域敏感度分析	138
6.5.1 全域敏感度分析流程	138
6.5.2 全域敏感度分析準確度評估	139
6.6 最佳化操作參數	141
6.6.1 最佳化流程	142
6.6.2 於不同操作方式下之最佳化操作參數	143
6.7 模型參數校準	148
6.7.1 實驗架構	149
6.7.2 參數校準流程	151
6.7.3 於不同操作參數下之操數校準結果	155
6.7.4 單一整合軌跡之參數校準	162
6.8 模型驗證	164

6.9 小結	166
第七章 結論與討論	167
7.1 研究成果與具體貢獻	167
7.2 討論	169
7.3 未來工作	171
附錄 A 車輛模型建構	174
A.1 車輛模型建構方法	175
A.1.1 車輛動力學模型	176
A.1.2 車輛動力學模型種類	177
A.2 轉向次系統	179
A.2.1 轉向馬達	181
A.2.2 轉向連桿	182
A.2.3 後傾效應	184
A.2.4 重心偏移	186
A.2.5 傾斜角與滾轉角	189
A.2.6 外傾角	190
A.3 推進次系統	191
A.3.1 PID 控制器	191
A.3.2 輪速轉換	192
A.3.3 馬達模型	193
A.3.4 推進力整合	194
A.4 阻力模型	196
A.4.1 滑動判斷	196





A.4.2 滾動阻力模型	197
A.4.3 空氣阻力模型	199
A.4.4 坡度阻力模型	199
A.5 操控模型	200
A.5.1 側滑角	202
A.5.2 側向力合成	203
A.5.3 回正力矩	204
A.5.4 偏移角速度	205
A.5.5 等效質量	207
A.5.6 正向力分配	208
A.5.7 局部動態	209
A.5.8 全域動態及位置換算	210
A.6 駕駛指令輸入	212
A.6.1 循跡駕駛演算法	212
A.6.2 模擬環境建置及資料蒐集	213
A.7 小結	214
附錄 B 車輛工程案例之準確度評估	215
B.1 Kriging 模型準確度評估指標	215
B.2 Kriging 模型之輸出比較	219
B.3 取樣次數與全域敏感度指標之關係	231
附錄 C Matlab Code	234
C.1 單一輸出數學模型	234
C.1.1 數學模型	234

C.1.2 全域敏感度分析主程式	234
C.2 動態輸出數學模型	238
C.2.1 數學模型 + 主成分分析	238
C.2.2 全域敏感度分析	239
C.2.3 最佳化主程式	245
C.2.4 拘束條件	246
C.2.5 基於混沌多項式之卡爾曼濾波器	247
參考文獻	254





圖目錄

1.1	模型建構概念	1
1.2	V&V 驗證程序	2
1.3	在車道變換中不同的行駛策略	4
1.4	模型關係示意圖	5
1.5	V&V 模型驗證	6
1.6	論文架構	9
2.1	利用小波轉換組成時間域的飛行測試方法	11
2.2	機械手臂之識別軌跡	11
2.3	全域敏感度之應用示意圖	12
2.4	全域敏感度分析方法之性質綜合比較	14
2.5	輸出為時間函數之全域敏感度分析流程	15
2.6	在不確定因素下進行最佳設計之雙迴圈示意圖	16
2.7	應用 DACE 於不確定因素下之設計工程	17
2.8	隨機取樣與低差異取樣的均勻差異	18
2.9	不同替代模型擬合結果	22
2.10	結合穩態行為校準與動態行為校準之流程與校準結果	23
2.11	吻合雷同指標示意圖	24
2.12	使用吻合雷同指標比較模擬模型與真實系統輸出資料流程圖	24
2.13	貝氏推估校準模型流程	24
2.14	後驗機率分佈的聯合機率分佈	25

2.15 應用卡爾曼濾波器於操數校準流程	26
3.1 研究流程圖	27
3.2 三者模型關聯	28
3.3 模型驗證與三者之間關係示意	29
3.4 模型關係與驗證舉例	29
3.5 高斯歷程示意圖	33
3.6 以最大標準差為取樣指標之 EGO 流程圖	36
3.7 以一維模型為 EGO 操作範例	36
3.8 交叉比對流程圖	37
3.9 系統於不確定模型參數分析之輸入輸出關係示意圖	40
3.10 基於替代模型之單一輸出模型全域敏感度分析流程圖	42
3.11 主成分分析流程圖	44
3.12 動態輸出資料之主因素分析	46
3.13 動態輸出軌跡以主成分分析重組示意圖	47
3.14 原始動態軌跡、重組動態軌跡、以及全體資料平均之比較	47
3.15 基於替代模型之動態輸出模型全域敏感度分析流程圖	48
3.16 敏感度指標與操作參數之關係	50
3.17 建立指標產生函數之替代模型	50
3.18 DIRECT 演算法搜尋全域最佳解示意	52
3.19 建立目標函數及最佳化流程圖	53
3.20 卡爾曼濾波器中結合預測及量測示意圖	57
3.21 卡爾曼濾波器之應用示意	58
3.22 卡爾曼濾波器架構	58
3.23 卡爾曼濾波器狀態運作簡圖	60
3.24 具量測不確定性之系統動態輸出信賴區間	63
4.1 直接求解法演算流程圖	67
4.2 替代模型求解法演算流程圖	69
4.3 初始取樣 1000 次之誤差分佈	74



4.4	數學模型真實輸出與 Kriging 模型預測輸出之比較	74
4.5	初始取樣 1000 次之蒙地卡羅取樣與收斂關係	75
4.6	直接求解最佳化演算法流程圖	77
4.7	模型參數於直接求解法最佳激發操作參數下之敏感度指標	78
4.8	模型參數於替代模型法之最佳激發操作參數下之估測及真實敏感度指標	80
4.9	兩種求解法之最佳化演算歷程	81
5.1	動態輸出模型於不確定因素下之輸出	83
5.2	直接求解動態系統全域敏感度流程	84
5.3	基於替代模型之動態系統全域敏感度分析操作流程圖	87
5.4	初始取樣次數與模型準確度評估指標之關係	90
5.5	動態輸出模型初始取樣 200 次之重要係數預測誤差分佈	91
5.6	動態輸出模型初始取樣 600 次之重要係數預測誤差分佈	91
5.7	動態輸出模型初始取樣 800 次之重要係數預測誤差分佈	92
5.8	動態輸出模型初始取樣 200 次之重要係數預測及真實比較	93
5.9	動態輸出模型初始取樣 600 次之重要係數預測及真實比較	94
5.10	動態輸出模型初始取樣 800 次之重要係數預測及真實比較	95
5.11	動態輸出模型初始取樣 200 次之輸出曲線重組比較	96
5.12	動態輸出模型初始取樣 600 次之輸出曲線重組比較	96
5.13	動態輸出模型初始取樣 800 次之輸出曲線重組比較	96
5.14	動態輸出系統於不同全域敏感度取樣次數之收斂性	97
5.15	動態輸出系統之指標產生函數示意圖	98
5.16	動態輸出系統之直接求解最佳化演算法	99
5.17	模型參數於最佳激發操作參數下之敏感度指標	102
5.18	直接求解法之演算歷程及與替代模型求解法結果之比較	103
5.19	應用基於混沌多項式之卡爾曼濾波器於動態輸出模型之流程	104
5.20	卡爾曼濾波器於不同最佳操作參數下之參數估測結果	109
5.21	具量測不確定性之模擬模型 500 次輸出	111
5.22	真實系統於驗證操作下之輸出	112
5.23	模擬模型動態輸出 95% 信賴區間	112



6.1	作為真實系統之三輪車	115
6.2	系統架構示意圖	115
6.3	全車控制之 Simulink 模型	116
6.4	由各次系統模組所組成的車輛動力學模組之 Simulink 模型	117
6.5	三次貝茲曲線示意圖	120
6.6	不同參數下之貝茲曲線	121
6.7	不同參數下之定轉角軌跡	122
6.8	正啣頻與逆啣頻於不同參數下之軌跡	122
6.9	操作參數、閉迴路駕駛、與開迴路駕駛關係	123
6.10	閉迴路駕駛模擬架構	124
6.11	開迴路駕駛架構圖	124
6.12	車輛不確定參數激發與校準流程	126
6.13	以 Kriging 模型替代車輛動態輸出之重要係數示意圖	128
6.14	EGO 於車輛案例之流程圖	130
6.15	車輛案例之 Kriging 模型準確度驗證流程	131
6.16	車道變換操作下重要係數預測誤差百分比分佈	134
6.17	車道變換操作中原始動態、PCA 重組之動態、以 Kriging 模型預測重要 係數重組動態比較	135
6.18	車道變換操作下與 Y 重要係數與預測之重要係數比較	136
6.19	車道變換操作下 $\dot{\psi}$ 重要係數與預測之重要係數比較	137
6.20	具有多組輸出狀態之全域敏感度指標融合示意圖	138
6.21	車道變換操作下取樣次數與全域敏感度指標關係	140
6.22	於不同操作下任意選擇操作參數之全域敏感度指標	141
6.23	用於車輛工程案例之指標生成函數示意圖	142
6.24	於車道變換操作下激發各個不確定參數之全域敏感度指標	144
6.25	於定轉角轉向操作下激發各個不確定參數之全域敏感度指標	145
6.26	於正啣頻操作下激發各個不確定參數之全域敏感度指標	146
6.27	於逆啣頻操作下激發各個不確定參數之全域敏感度指標	147
6.28	真實系統操作實驗環境設置示意圖	149



6.29 Simulink 模型加入雜訊模型架構	150
6.30 於車輛工程案例應用基於混沌多項式之卡爾曼濾波器於參數校準之流程	151
6.31 第 1 組實驗：於車道變換下激發 θ_2 之參數估測結果	156
6.32 第 2 組實驗：於車道變換下激發 θ_3 之參數估測結果	156
6.33 第 3 組實驗：於車道變換下激發 θ_5 之參數估測結果	156
6.34 第 4 組實驗：於定轉角轉向下激發 θ_2 之參數估測結果	157
6.35 第 5 組實驗：於定轉角轉向下激發 θ_3 之參數估測結果	157
6.36 第 6 組實驗：於定轉角轉向下激發 θ_4 之參數估測結果	157
6.37 第 7 組實驗：於正啾頻下激發 θ_1 之參數估測結果	158
6.38 第 8 組實驗：於正啾頻下激發 θ_4 之參數估測結果	158
6.39 第 9 組實驗：於正啾頻下激發 θ_5 之參數估測結果	158
6.40 第 10 組實驗：於逆啾頻下激發 θ_1 之參數估測結果	159
6.41 第 11、12 組實驗：於逆啾頻下激發 θ_4 與 θ_6 之參數估測結果	159
6.42 整合軌跡	162
6.43 整合軌跡之閉迴路駕駛軌跡	163
6.44 整合軌跡操作下之不確定模型參數估測分佈	163
6.45 車輛系統校準模型驗證流程	164
6.46 用於驗證車輛模型之軌跡	165
6.47 估測參數所模擬的軌跡分佈與真實實驗的軌跡比較圖	165
A.1 ISO 規範之車輛座標系	174
A.2 車體座標與全域座標、幾何長度標示	175
A.3 車輛動力學簡述	175
A.4 車輛動力學模型基本架構	176
A.5 使用 Simulink 建構車輛動力學模型	178
A.6 ADAMS 模型示意圖	179
A.7 轉向次系統模組 Simulink 架構	180
A.8 轉向機構 Simulink 架構	180
A.9 轉向馬達 PID 等效模型	181
A.10 轉向馬達於不同輸入訊號下之響應	181

A.11 轉向連桿機構分解示意圖	182
A.12 轉向機構輸入與輸出之關係	184
A.13 曳距示意圖	185
A.14 曳距作用於車輛示意圖	185
A.15 等效轉向角示意圖	186
A.16 輪胎與地面接觸點於轉向時移動示意圖	187
A.17 於轉向時輪軸位置下降示意圖	188
A.18 轉向時重心下降示意圖	189
A.19 傾斜角之幾何關係示意圖	189
A.20 計算滾轉角流程圖	190
A.21 外傾角示意圖	190
A.22 推進次系統 Simulink 架構	191
A.23 推進次系統 PID 控制器 Simulink 架構	191
A.24 推進系統 PID 控制器之輸入與系統響應關係	192
A.25 速度轉換為輪速之 Simulink 架構	192
A.26 馬達動力曲線測試結果	193
A.27 馬達模組 Simulink 架構	193
A.28 推進力整合之情境	194
A.29 第一階：馬達扭矩 τ_{motor} 是否大於 0	195
A.30 第二階：馬達扭矩量值是否大於煞車扭矩量值	195
A.31 第三階：判斷車輛前進速度 v_x	195
A.32 阻力模型 Simulink 架構	196
A.33 滑動判斷模組示意圖	197
A.34 滾動阻力原理示意圖	197
A.35 後輪滾動阻力模組架構	198
A.36 質心速度與輪胎速度示意圖	198
A.37 前右輪滾動阻力模組架構	199
A.38 空氣阻力模組架構	199
A.39 坡度阻力模組架構	200





A.40 操控模型 Simulink 架構	200
A.41 局部動態計算 Simulink 架構	201
A.42 前右輪側滑角示意圖	202
A.43 後輪側滑角模組架構	202
A.44 前輪側滑角模組架構	203
A.45 右前輪側向力模組架構	204
A.46 回正力矩模組架構	205
A.47 三輪車之自由體圖	205
A.48 偏移角速度計算	206
A.49 等效質量模組架構	207
A.50 正向力分配模組架構	208
A.51 以固定於車體座標分析空間運動示意圖	209
A.52 計算 v_x 之局部動態模組架構	211
A.53 全域速度計算模組架構	211
A.54 不同前視距離對循跡演算法之影響示意圖	213
A.55 轉向回授控制	213
B.1 定轉角轉向操作下重要係數預測誤差百分比分佈	219
B.2 定轉角轉向操作中原始動態、PCA 重組之動態、以 Kriging 模型預測重要係數重組動態比較	220
B.3 定轉角轉向操作下 Y 與 $\dot{\psi}$ 重要係數與預測之重要係數比較	221
B.4 定轉角轉向操作下 X 重要係數與預測之重要係數比較	222
B.5 正啾頻操作下重要係數預測誤差百分比分佈	223
B.6 正啾頻操作中原始動態、PCA 重組之動態、以 Kriging 模型預測重要係數重組動態比較	224
B.7 正啾頻操作下 X 與 Y 重要係數與預測之重要係數比較	225
B.8 正啾頻操作下 $\dot{\psi}$ 重要係數與預測之重要係數比較	226
B.9 逆啾頻操作下重要係數預測誤差百分比分佈	227
B.10 逆啾頻操作中原始動態、PCA 重組之動態、以 Kriging 模型預測重要係數重組動態比較	228

B.11 逆啾頻操作下 X 與 Y 重要係數與預測之重要係數比較	229
B.12 逆啾頻操作下 ψ 重要係數與預測之重要係數比較	230
B.13 定轉角轉向操作下取樣次數與全域敏感度指標關係	231
B.14 正啾頻操作下取樣次數與全域敏感度指標關係	232
B.15 逆啾頻操作下取樣次數與全域敏感度指標關係	233

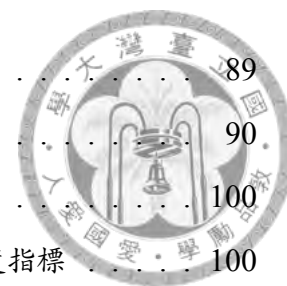




表目錄

2.1	全域敏感度分析方法	13
2.2	低差異取樣方法綜合比較	19
3.1	以 C_3 矩陣生成 Sobol 序列	32
3.2	Legendre polynomials	55
3.3	$n = 2, p_b = 3$ 時混沌多項式的所有多維度項	56
4.1	數學模型預設操作參數	66
4.2	比較解析解與蒙地卡羅法所得之敏感度指標	66
4.3	直接求解法與解析解之比較	68
4.4	演算參數組合	70
4.5	不同演算參數與各階段演算時間	71
4.6	不同演算參數與誤差關係	72
4.7	使全域敏感度指標 $< 1\%$ 之演算參數最低條件	73
4.8	直接求解之最佳操作參數	77
4.9	於直接求解法之最佳操作參數下各個模型參數之全域敏感度指標	78
4.10	基於替代模型法之最佳操作參數	79
4.11	基於替代模型求解法之最佳操作參數下各個模型參數之全域敏感度指標	79
5.1	動態輸出模型之參數分佈	83
5.2	動態輸出模型之各重要係數及等效全域敏感度指標與取樣數量之關係	86
5.3	動態輸出模型中不同初始取樣次數與各階段演算時間之關係	89

5.4	動態輸出模型之初始取樣數量及對應 R^2	89
5.5	動態輸出模型之初始取樣及對應 $RAAE$	90
5.6	激發各個不確定模型參數之最佳操作參數	100
5.7	於直接求解法之最佳操作參數下各個模型參數之全域敏感度指標	100
5.8	基於替代模型求解之最佳操作參數	101
5.9	使用基於替代模型法求解之最佳操作參數下各模型參數之全域敏感度指標	101
5.10	真實系統之模型參數	106
5.11	以卡爾曼濾波器於最佳激發參數下之參數校準結果	108
5.12	於不同操作參數下不確定模型參數估測之誤差絕對值與百分比	110
5.13	以卡爾曼濾波器估測參數結果	110
5.14	用於模型驗證之操作參數選擇	111
6.1	車用元件規格表	115
6.2	真實車輛之可量測/確定參數	116
6.3	不確定參數分佈區間	118
6.4	任意選擇之操作參數	132
6.5	四種操作中重要係數所對應特徵值	132
6.6	車道變換操作下不同初始取樣次數之 R^2 和 $RAAE$	133
6.7	各種操作下不同輸出狀態之全域敏感度指標融合權重	139
6.8	不同操作下激發特定不確定模型參數之最佳操作參數	143
6.9	模擬實驗中真實系統之不確定參數數值	149
6.10	感測器誤差列表	150
6.11	選擇以卡爾曼濾波器進行參數校準之實驗組別列表	155
6.12	第 1 至 6 組實驗之參數校準結果與分佈	160
6.13	第 7 至 11 組實驗之參數校準結果與分佈	161
6.14	整合軌跡操作下之不確定模型參數估測結果與區間	164
6.15	各項輸出及全系統之假設檢定結果	166
A.1	連桿規格表 (長度單位: mm)	182
B.1	定轉角轉向操作下不同初始取樣次數之 R^2 和 $RAAE$	216



B.2	正啾頻操作下不同初始取樣之 R^2 和 $RAAE$	217
B.3	逆啾頻操作下不同初始取樣次數之 R^2 和 $RAAE$	218





符號列表

符號	單位	敘述
a_x, a_y	m/s^2	車體座標之 x, y 方向局部加速度
B		特徵向量
C		重要係數
C_α	N/rad	側偏剛性
C_β	N/rad	外傾剛性
\hat{C}		由替代模型所預測之重要係數
COM		車輛質心位置
$CVar$		EGO 之收斂變異數
de		主成分分析之截斷數
f		系統之表示式
\hat{f}		用以替代 f 之替代模型
F		指標生成函數

\hat{F}		指標生成函數之替代模型
\mathbf{H}		卡爾曼率波器之觀測矩陣
H_p		最佳化目標函數
I		特徵值
$I_x,$ I_y, I_z	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	x, y, z 方向之轉動慣量
k		不確定模型參數數量
m		一般化模型輸出
\hat{m}		由 Kriging 模型預測之模型輸出
n_p		混沌多項式中隨機變數個數
N		取樣次數
R^2		決定係數
\mathbf{R}^i		由 \mathbf{P} 與 \mathbf{R}^i 所組成之輸入樣本矩陣
R_k		t_k 時雜訊變異數
\mathbf{R}_k		t_k 時雜訊共變異矩陣
$RAAE$		相對平均絕對誤差
p_b		混沌多項式最大次數
\mathbf{P}		輸入樣本矩陣之一
$P(\xi)$		一維混沌多項式之項次
$(P_{y,\theta})_k^f$		t_k 時 y 與 θ 之共變異數



$(\mathbf{P}_{y,\theta})_k^f$		t_k 時 y 與 θ 之共變異矩陣
\mathbf{Q}		輸入樣本矩陣之二
S		混沌多項式總項次
S_i		主效應指標
S_i^t		總效應指標
\hat{S}_i		由指標生成函數所預測之主效應指標
\hat{S}_i		由指標生成函數所預測之總效應指標
x		操作參數
x^*		用於激發 θ_i 之最佳操作參數
X	m	車輛於全域作標之 X 座標位置
Y	m	車輛於全域作標之 Y 座標位置
y		系統動態輸出
z		量測狀態
\mathbf{z}		量測狀態矩陣
δ_{fL}	rad	前左輪等效轉角
δ_{fR}	rad	前左輪等效轉角
$\mu_{r_0},$		兩項滾動阻力係數
μ_{r_1}		
ϕ_i		主成分
ψ	rad/s	偏移角



$\psi_i(\xi)$

多維度混沌多項式之項次

Ψ

混沌多項式

θ

不確定模型參數

θ^*

取樣指標

$(\theta)^a$

模型參數之混沌多項式係數的估測狀態

$(\theta)^f$

模型參數之混沌多項式係數的預測狀態

ϑ

隨機亂數之編號

ξ

隨機亂數





名詞對照表

英文名稱	中文翻譯
基於解析之方法	Analytical-based
分離變異數	ANOVA Decomposition
基底函數	Basis Function
外傾角	Camber Angle
後傾角	Caster Angle
決定係數	Coefficient of Determination
摺積	Convolution
共變異矩陣	Correlation Matrix
(正) 啣頻	Chirp Sine
電腦實驗設計與分析	Design and Analysis of Computer Simulation (DACE)
激發	Excitation
全因子設計	Full Factorial Design

全域敏感度分析	Global Sensitivity Analysis
取樣指標	Infill Sampling Criteria
交互作用	Interaction Effect
逆啾頻	Inverse Chirp Sine
卡爾曼濾波器	Kalman Filter
動態轉向角	Kinematic Steering Angle
低差異取樣	Low Discrepancy Sampling
替代模型	Metamodel
基於替代模型之方法	Metamodel-based
主效應指標	Main Sensitivity Index (MSI)
操作	Maneuver
蒙地卡羅法	Monte Carlo Simulation
傾斜角	Pitch Angle
本源多項式	Primitive Polynomials
主成分分析	Principle Component Analysis (PCA)
混沌多項式展開	Polynomial Chaos Expansion
純追蹤法	Pure Pursuit
相對平均絕對誤差	Relative Average Absolute Error
滾轉角	Roll Angle



基於模擬之方法

Simulation-based Method

定轉角轉向

Steady-State Cornering

蝌蚪型設計三輪車

Tadpole Designed Tricycle

張量積

Tensor Product

檢定統計量

Test Statistic

曳距

Trail

總效應指標

Total Sensitivity Index (TSI)

截斷數

Truncation number

驗證

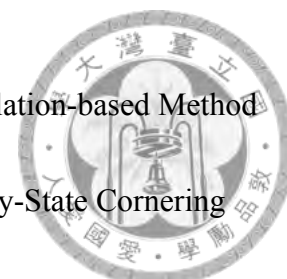
Validation

基於變異數之方法

Variance-based Method

線控操作

X-by-wire





緒論

1.1 模擬模型驗證與校準

在現今的工程開發實務中，電腦模擬模型 (Computer Simulation Model) 被廣泛應用於各個開發階段中。研發工程透過電腦模擬模型的應用，來預測已生產或開發階段中的產品的動態響應及輸出。以車輛工程為例，車輛的各個系統皆大量地使用電腦模擬模型做為開發工具，例如：底盤強度及結構設計、懸吊系統動態設計、控制器設計與驗證、輔助駕駛系統的開發、甚至模擬駕駛與車輛互動。應用多元的模擬和數學工具，工程師可以較直接對系統進行設計最佳化、可靠度分析、優化動態輸出等細部研究。更重要的是，若模型能準確的表達真實系統在運動中的狀態，將能透過模型進行模擬實驗，能夠掌握在真實系統中難以被觀察出來的現象，例如車輛的失效行為，也可以大幅降低實驗的成本和開發時間 [1]。因此，如何在電腦模擬模型建立的階段中，對真實系統有更清楚的掌握，有效的縮小兩者間的差異，是非常重要的議題。

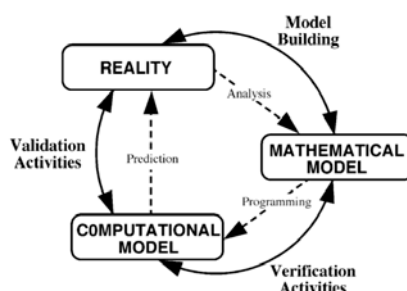


圖 1.1: 模型建構概念 [2]

美國工程師協會 (American Society of Mechanical Engineers, ASME) 曾提出模型建構概念 [2]，如圖1.1所示，透過一連串的建構程序，建立理想的模型。為了使理想的模型能更完整的表達真實系統，也發展出了一套 V & V(Verification and Validation) 的驗證程序 [2]，如圖1.2。「確認」(Verification) 的用意是要確認被建立起來的軟體或程

的執行；而「驗證」進一步探討模擬模型因並修正模擬模型。已經發展全備，卻少



- **模型建立 (Model Formulation)**：建立模型是否能考慮更多會影響車輛輸出的因子，例如剛性、結構的震動等，或是建立更精確、非線性的模型。
- **模擬程式 (Simulation Programming)**：要如何透過次系統的物理模型及運動方程式，有效的建立可以呈現系統動態、輸出響應的運算程式。
- **車輛參數識別 (Vehicle Parameter Estimation/Identification)**：對於可量測的參數如何識別量測誤差進行校準，對於不可量測的參數如何進行識別、對於時變 (Time variant) 的參數進行估測等。

- 數值解的準確性及穩定性 (Numerical Accuracy and Stability)：模擬程式的演算法和求解器、數值演算方法的累積誤差，都會使模擬結果與現實有差異。如何透過單純的在模擬環境中建立更準確的演算方式是一個大領域。



因此對車輛模型的驗證程序中，連結模擬模型與真實系統的最大關鍵，在於如何透過系統化的方法找出有效的測試流程來檢視模擬與實際的偏差來源，進而修正模型、得到更準確的模擬及對動態的預測。

對於現今模型建構的技術而言，電腦的計算能力已經可以非常準確的處理對物理及數學定理的程式建構及數值計算，因此參數的不準確及模型的不完整性則被認為是造成模擬模型與真實系統之間的差異主要來源。而隨著對系統本身的模型認識越來越完整，將不易觀直接量測的模型—桿件的形變、接頭的摩擦等—納入模擬模型後，參數能否有效的呈現系統中各元件的互動方式成了模擬誤差的關鍵。

然而，模型的校準在實務上並非如此容易執行，特別在對系統進行實驗時，量測誤差使得系統真實的輸出無法被準確的量測。在模型數存在不確定性、實驗量測存在誤差的情況下，如何在模型校準的過程中有系統的將兩種誤差有效區分，並順利校準參數，也是在參數校準實務中會面對到的問題 [6]。

1.2 車輛動態測試

1.2.1 車輛動態測試方法

車輛的動態測試項目是驗證流程中的重要部分。操作上，讓模擬模型與真實模型進行同一種操作方式，再比較兩者之間的差異。在這些模擬及實驗中所使用的車輛操作方式及駕駛方式，大多與一般在車輛設計階段時用於檢測車輛性能所使用的動態檢測方法相同，而不同點在於，驗證階段的研究大多於分析模擬模型本身，而非對真實系統進行更動和修改設計。

車輛的動態測試主要可以被分為兩個範疇 [7]：基礎操作方式 (Fundamental Maneuvers) 以及目標導向操作方式 (Purpose Dependent Maneuvers)。基礎操作方式被應用在測試車輛主要的動態特性，包括穩態、暫態、週期性輸入、及隨機輸入時的時間及頻率響應。實際操作如 ISO 3888-1 規範的車道變換的測試方式及目標 [8]、ISO 3888-2 規範的車輛閃避障礙物的急速車道變換測試方式 [9]、ISO 4138 規範的定轉角循圓測試方法 [10]、ISO 7401 規範的側向暫態測試方法 [11]、及 ISO 7957 規範的過彎煞車測試方法 [12] 等；這些操作方式可以使車輛展現普遍的動態行為，且測試流程容易達成、也具有重複性；目標導向操作方式則透過對真實世界中行車可能會碰到的狀況進行情境演練，並記錄車輛在各項動態上、保護機制上的反應，實際測試方法例如 ISO 9816 提供的車輛過彎斷電反應測試 [13] 等。透過對實際車輛進行標準化的動態測試，相關單位能對其性能進行明確的安全規範，例如美國交通局透過對一般小客車進行 Fishhook Test，檢測車輛是否達到防止翻覆的標準 [14]；同時，標準的動態測試也成了一種現成的操作方式，提供給研發單位用來驗證模擬模型與真實模型的動態行為差異，例如 Kutluay 及 Winter

藉由模擬模型進行車道變換，探討如何擷取動態行為的不同片段及資料進行特定次系統或參數的驗證 [15]；Nasir 與 Hudha 等人透過車道變換、定轉向角與步階轉向角等 ISO 動態測試方式來驗證所建立的 Simulink 模型 [16]。

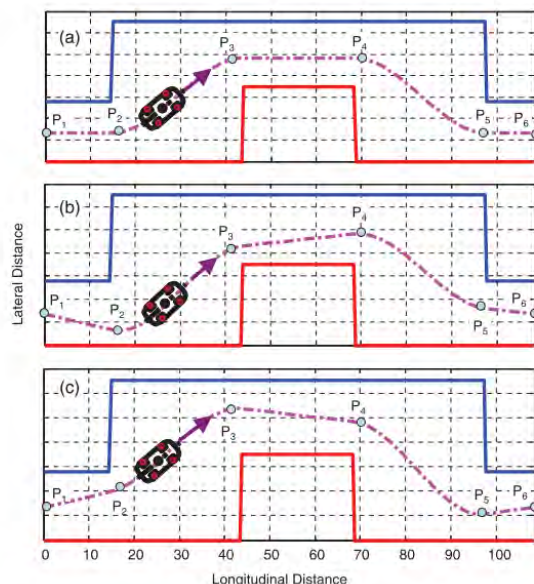


圖 1.3: 在車道變換中不同的行駛策略 [17]

對於使用標準測試法來驗證模型的操作方法，在工業界已經是非常標準且慣用的操作流程。然而，在車輛的開發工程領域中，卻沒有針對這些標準動態測試方法的生成進行深入探討。也就是說，並沒有研究深入探討如何系統化的生成針對車輛系統驗證程序所需用的標準動態測試方法。ISO 標準動態測試方式雖然指定明確的測試方式，但在同一種測試方式下，即使是操作上有些微的不同，如圖1.3所示 [17]，也會對於車輛的輸出性能有極大的不同 [17]。Tsai 也提出不同的超車策略可以激發出不同感測器對於超車決策和軌跡的影響 [18]。因此，儘管都符合標準測試方法，或許在行使策略的些微不同之間，對於參數的激發程度也會非常不一樣。

再者，目前所見的動態測試方式皆是由硬體端出發，讓電腦模擬隨之跟進，少有方法是基於模擬端的驗證需求，例如參數的激發和耦合等問題，而提出如何驗證硬體的方式。也因為大多數的驗證模型流程中，操作真實系統的方式大多被受限於 ISO 的標準操作方式中，因此不只待觀察的系統輸出項目可能被該操作方式所受限，在標準的操作方式下操作系統也不一定能有有效的將模型誤差放大出來。因此，如何針對車輛系統的驗證程序建立系統化的測試方式，從驗證端的需求提出操做硬體的方法，成了本研究想要探討與了解的方向。

1.2.2 參數校準於車輛開發工程中之困境

應用於車輛領域中的動態檢測行為除了於前一節所提到的 ISO 測試方法，也有少部分研究透過設計動態，對不可量測的參數進行預測。2000 年時，Maurice 等人透過設計操作動態模擬對輪胎輸入步階輸入 [19]，藉此校準輪胎多個參數；2009 年，Isermann

等人透過一緩慢等加速的操作方式 [20]，擷取每個時間點速度與偏航率、加速度的關係，並以最小平方法 (Least Square) 預測簡化車輛模型的轉動慣量及輪胎轉向剛性；另外，三維的動態設計加入了高度的變化，主要用於激發懸吊系統的動態響應並進行參數識別 [21]。然而，卻鮮少有研究提出系統化建立車輛動態測試的基礎研究。

在缺乏系統化的參數激發操作設計下，測試的方式僅能仰賴工程師對模型的直覺來判斷該方法或許可以有助於特定參數的觀測，但在比較模擬模型與真實實驗的輸出結果後，也無法得到足夠的資訊來修正模擬模型，使其更能接進真實。例如：Setiawan 等人透過車輛以不同速度通過車道變換測試時偏航率的不同嘗試校準 14 DOF 的車輛模型 [22]，Gawade 透過比較模擬與實驗在定轉角 [10] 下的平均軌跡半徑，作為模型準確度的評估指標 [23]。除了使用 ISO 的車輛動態測試方法來進行模型驗證，由測試者自行設計的操作方法例如 180° 定轉角測試 (Constant radius turn) [24] 及轉向輸入為正弦波 (Sinusoidal steer) [25] 也被應用於車輛測試的案例中。然而，這些案例僅止於呈現模擬模型對於真實系統的動態預測能力，但少有案例可以量化誤差來源並優化模擬模型。換句話說，這些測試方式，包括 ISO 的動態測試方法，都是從硬體的角度出發，目的是要檢測硬體在該操作下的響應。用於強化模擬模型驗證與實驗數據的系統化方法仍然沒有被建立。

1.3 研究動機

面對系統的高度複雜性及安全性的要求，車輛開發過程中需要透過具有可信度的電腦模擬模型來協助分析、預測現象、並且掌握失效狀態。而建立具有可信度的電腦模型的必要條件為工程師需要對目標系統有清楚的認識及了解，且對其數值有一定範圍的假設，才能建立出與真實系統相近的架構。為此，需要進行一連串對系統的猜想及測試，才能使所建立的模型越能表達真實系統的趨勢與數值，如圖1.4中黑色箭頭處。然而，由於無法完全得到真實系統在所有運動中的狀態，因此真實系統事實上是難以完全被掌握及預測的。

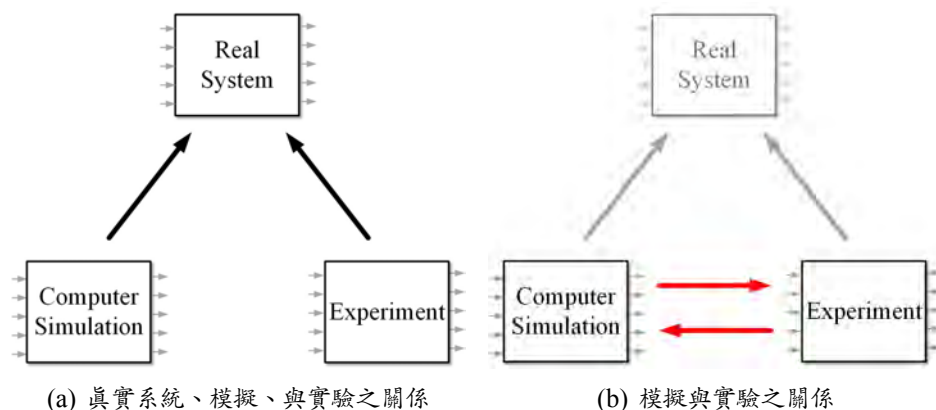


圖 1.4: 模型關係示意圖

在無法掌握真實系統在所有狀態及時間下的各式資訊的情況下，要如何透過在實際

環境下對真實系統的行為進行量測之實驗則更顯重要，如圖1.4中紅色箭頭處。在考量實驗中存在量測誤差的前提下，設計有效找出模擬模型與真實系統差異的實驗在驗證階段成了主要課題。

工程師們將透過數學及物理公式所建立的電腦模擬模型，以及透過現實世界的真實系統加上實驗環境的架設所進行的實驗模型，將兩者進行實驗，透過量測過程中得到兩者之間輸出的誤差，對其誤差進行分析，可透過對真實系統中的不確定性參數或模型進行分析及校準，並進一步修正與擴充電腦模擬模型，使模擬模型更接近真實系統，流程如圖1.5。

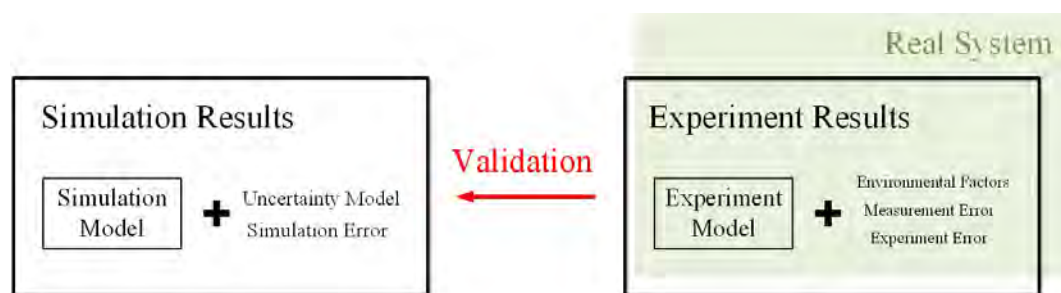


圖 1.5: V&V 模型驗證

然而，儘管在工程領域中，存在著許多方法來設計系統的輸入，使該系統可以在特定的輸入條件下將部分的行為或某些原件的影響進行激發 (Excitation)，在車輛領域中卻少有類似的做法。由於在驗證電腦模擬模型的程序中缺乏系統化的流程規範，大多數的驗證手法皆為透過讓真實系統及電腦模擬模型同時進行 ISO 所提供之標準動態測試流程，並透過比對兩者的誤差對模型進行修正。現有的 ISO 規範所觀察的主體皆為真實系統本身，而並非電腦模擬模型，因此這樣的流程雖然可以保證實驗可以進行且易於重現，但卻存在著幾個問題：

- 動態實驗的方式受限於 ISO 規範所提供的項目，對系統的認識及觀察受限
- 使用 ISO 所規範的動態測試方式，在操作上的細節不同，造成驗證程序中不一定能有效找出模擬模型與真實系統的差異，以至於存在著模擬模型在其他情境中無法預測真實系統的行為的可能性
- 僅透過 ISO 所規範的動態測試方法，不一定能有效進行模型驗證及參數校準，因此無法提供參數重要性的排序資訊並優化模型

因此，如何以電腦模擬模型端出發，提出一套系統化設計系統動態測試實驗的流程，來輔助現有的模型驗證程序，則為本研究想要深入探討的議題。本研究也期待這套方法可以不被侷限於車輛模型建構，而是更一般化的被使用於不同類型之動態系統的不確定模型參數可以透過應用此方法被有效的觀察。除了參數的激發之外，如何在考量量測誤差的情況下，使系統中的不確定模型參數可以在被設計出來的動態測試方式下更準確的校準，則是本研究期望可呈現的結果。



1.4 研究目的

基於前述所討論，面對複雜的車輛系統，本研究欲提出一套方法來協助車輛開發工程中所使用的電腦模擬模型與真實車輛進行驗證。考量到車輛系統非常複雜，在每一個動態行為下皆或有許多次系統參與且參數耦合作用明顯，各自都具有無數個性能輸出，如何在複雜的系統輸出中有效的找出電腦模擬模型與真實系統的差異是這套方法想要解決的問題。

以數學方法來表示動態系統的運作概念，令 θ 為系統的模型參數，例如車輛的質量、質心位置等；令 \mathbf{x} 為系統的操作參數，例如方向盤及油門的指令、駕駛路線等。若系統的輸出以 \mathbf{m} 表示，則 \mathbf{m} 可以 \mathbf{x} 及 θ 的函數表示：

$$\mathbf{m} = f(\mathbf{x}, \theta) \quad (1.1)$$

本研究假設在模型驗證的實驗中，電腦模擬模型與真實系統的動態輸出誤差全部來自系統模型參數的偏差所造成的。因此，經由系統化流程所設計的實驗方法，應有效的從結果當中清楚呈現兩模型中特定參數的誤差，提供工程師參數校準的最適當情境。

因此，本研究的目標為：提出一套系統化的流程，包含求出最適當的操作方式 \mathbf{x}^* ，使得特定模型參數 θ_i 之在兩模型中的偏差可以有效的被激發，以利觀察和量化誤差，以數學式表達則可表示為：

$$\mathbf{x}_i^* = \arg \max \frac{\partial f}{\partial \theta_i} \quad (1.2)$$

並在參數偏差可以被激發的狀態下，校準模型參數：

$$\hat{\theta} = \arg \min \left(f(\mathbf{x}^*, \theta_{real}) - f(\mathbf{x}^*, \hat{\theta}) \right) \quad (1.3)$$

歸納以上，本研究的研究目標具體如下：

1. 對現有的系統建立對應的電腦模擬模型
2. 透過不確定因素分析方法，量化參數偏差對系統輸出所造成的偏移量，並計算其敏感度
3. 建立系統化方法以最佳化使參數偏差影響系統輸出最大之操作方式，並在模擬中進行驗證
4. 提出一套可系統化設計動態模型驗證階段之測試方法的流程
5. 透過操作模型較準方法，在同時考慮模型參數的不確定性及實驗量測誤差下，完成複雜系統之參數校準
6. 整合以上成果，提出一套可用於動態系統的模型驗證流程，包含誤差歸因及量化、測試動態設計、以及模型參數校準



1.5 論文架構

本研究一共分為八章，其內容架構如下：

- **第一章：緒論**

介紹本研究探討問題的背景、當前技術所面臨的困境，並說明本論文之研究動機與目的，呈現全文架構。

- **第二章：文獻回顧**

文獻回顧首先對現有的系統激發方法進行回顧，歸納出一般化之方法，並針對該方法展開後所使用到的各項工具進行文獻整理及選擇。

- **第三章：研究方法**

介紹研究流程及所使用方法之操作，包含以 DACE 為架構、針對複雜系統所設計的不確定因素分析方法、最佳化、及參數校準與驗證之方法。

- **第四章：不確定參數激發於單一輸出數學模型**

以輸出為單一純量之數學模型為說明案例，確認所提出之方法的可行性，並探討參數的激發與操作參數之關聯。

- **第五章：不確定參數之激發與校準於動態輸出數學模型**

以時間函數數學模型取代真實的動態系統，藉由數學模型說明所提出方法於動態系統中的使用流程，並完成參數之校準。

- **第六章：車輛參數校準案例**

以真實系統為案例，以模擬實驗方式對其進行不同操作方式下的全域敏感度分析，並以最佳化求出用於激發各不確定模型參數的最佳操作，最後進行參數校準及模型驗證。

- **第七章：結論與討論**

總結本研究的内容，並對此論文提出相關建議，以供未來研究發展之參考。

- **附錄 A：車輛模型建構**

介紹在本研究中做為真實系統的車輛硬體架構，並介紹其對應的 Simulink 架構的建置，以及於線控操作車輛中實現所提出之方法的流程。

- **附錄 B：車輛工程案例準確度評估**

部分用於第七章內驗證 Kriging 模型準確度之資料將呈現於此附錄。

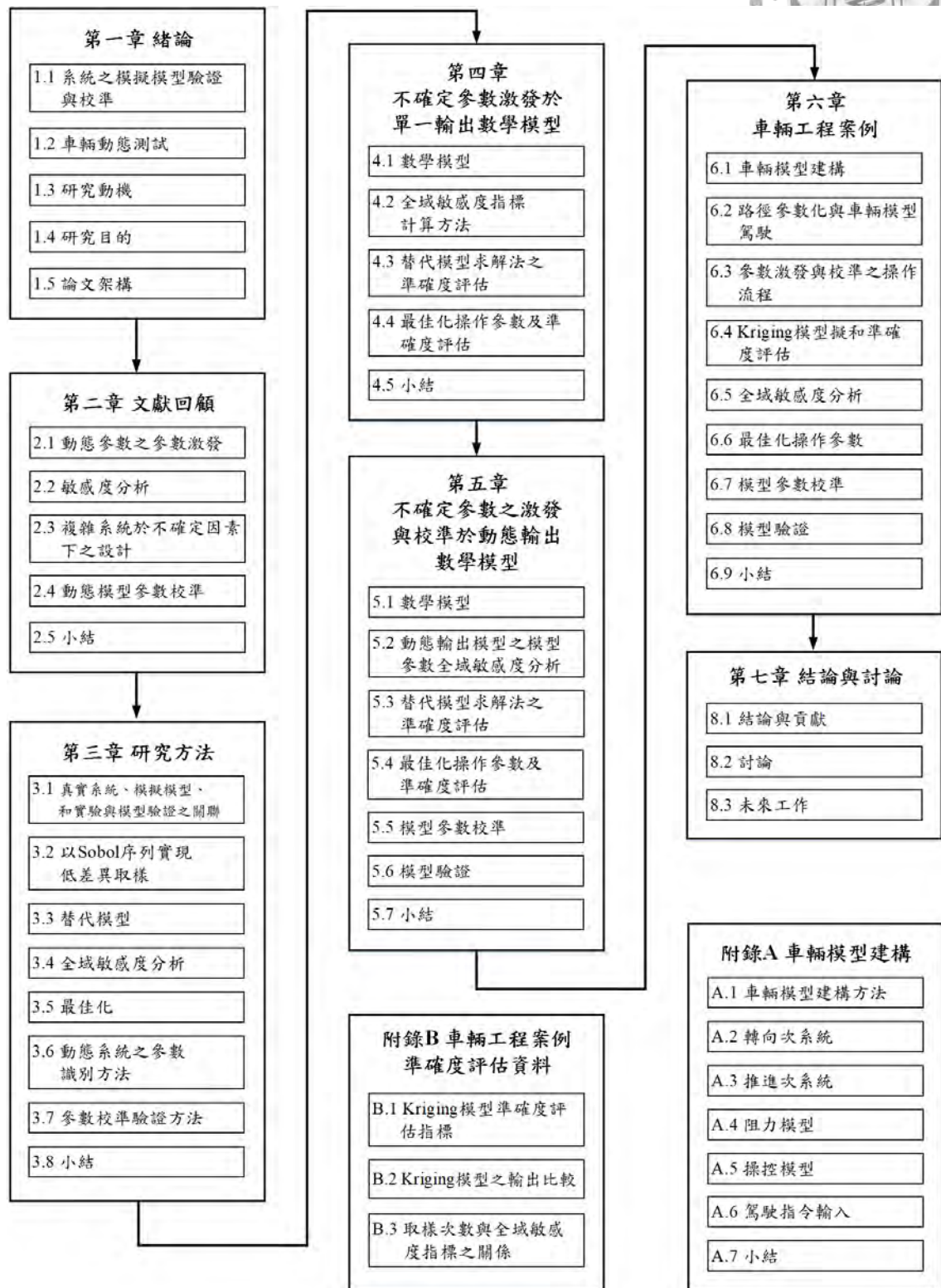


圖 1.6: 論文架構



研究背景與文獻回顧

本章首先整理出應用動態設計來激發系統參數方法的共通性，確定設計激發動態響應的必要元素。再從實現這些元素的過程中歸納可能會碰到的問題及解決方法。最後，本章也整理出應用於動態系統的參數較準方法，並決定本研究之研究流程。

2.1 動態系統之參數激發

在前章提到，應用動態設計或測試方式來激發特定參數的概念較少被實現於車輛動力學的應用中。因此，本研究也希望能從被應用於其他動態系統的參數激發方法中，找到相同的設計方法和邏輯，進一步擬定建立一般化及應用於車輛系統參數激發的方法。

- **應用動態設計於飛機動態檢測**

在航空領域，工程師們設計飛行載具的飛行方式，透過記錄飛機控制舵的頻率響應來校準其參數。1975 年，Gupta 等人運用建立系統化的飛行方式來驗證飛機在風洞測試中所得到的參數預測結果 [26]; 1977 年，Wells 等人則設計飛行方式可以同時校準兩組參數 [27]，且該動態降低了兩參數響應之間的共變異數；2018 年 Roeser 運用小波轉換，透過在選定時間-頻率空間中可以同時激發參數的輸入頻率，設計整合飛行測試方式 [28]，如圖 2.1 [28]，讓單一次飛行測試可以同時校準多組飛機控制舵的參數，以降低研發時間及成本。

- **應用激發軌跡於手臂參數校準**

手臂是目前透過對操作方式的設計而達到參數激發目的典型實例 [29–32]。透過讓手臂執行特定方式的「甩動」，強迫使模型中的特定參數「參與」了對系統輸出的影響，進一步透過演算法同時對多組參數進行校準。對於被設計出來的操作方式或運動路徑，在應用上被稱為「識別軌跡 (Identification Trajectory)」或「激發軌跡 (Excitation Trajectory)」，如圖 2.2 [31] 所示。

這些「甩動」方式的決定其實是由許多的弧形片段組成，而每個弧形片段表示手臂的運動軌跡，且可以被參數化。在這些研究中，透過對每一段參數化弧形

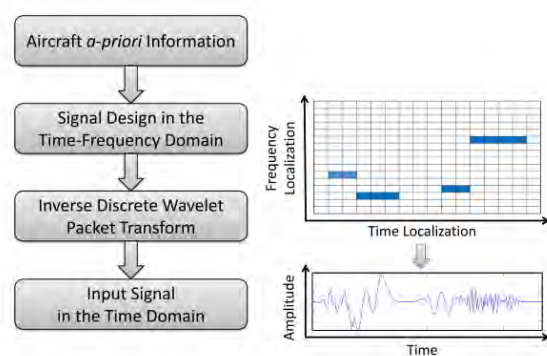


圖 2.1: 利用小波轉換組成時間域的飛行測試方法 [28]

片對行各個參數進行敏感度分析，並建立兩種指標：軌跡生成指標 (Trajectory Forming Matrix) 及耦合指標 (Coupling Matrix)。利用兩指標建立目標函數，即可用透過最佳化方法建立可適當激發出慣量、摩擦模型的內部參數等的激發軌跡，並使用最小平方法達到同時校準多組參數。

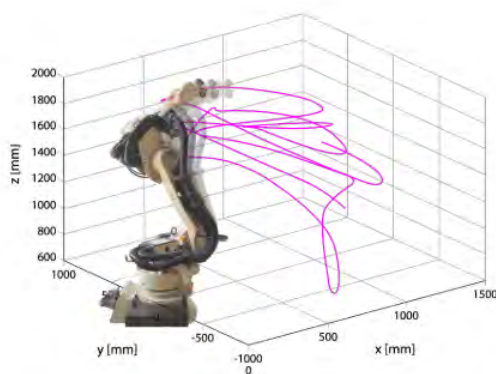


圖 2.2: 機械手臂之識別軌跡 [31]

• 應用動態設計於其他工程領域

透過特定的動態設計來激發參數於系統影響的概念也被應用在其他工程領域中，例如：1993 年由 James 等人所提出的 NExT (Natural Excitation Technique) 是一套系統化的設計輸入頻率方法 [33]，被廣泛應用於土木結構分析領域中 [34]，而在 1994 年，James 等人也使用 NExT 設計適合 STAR (Strategic Targeting System) 飛彈的飛行測試模式來校準參數。在傳統的系統識別 (System Identification) 的問題中，測試者會對系統或控制器輸入特定的波型例如步階響應、脈衝輸入 (Impulse response)、線性變頻脈波 (Chirp sine) 或是偽亂數二進位數列 (Pseudo-Random Binary Sequence, PRBS)，透過對系統響應取進行傅利葉展開得到的頻譜建立自相關矩陣 (Auto-correlation matrix)，計算輸入的持續刺激條件 (Persistent Excitation, PE) [35]，來判斷在控制模型中所有的參數都能被充分激發。若 PE 與未知參數數量相同，則該輸入函數可被認為是激發條件充分的 (Rich)。

綜觀這些案例，可以歸納出設計系統對應的參數激勵動態有兩個必要的元素：

- **被設計的動態可以被參數化**：參數化的動態可以透過演算法計算對系統參數的刺激效果，也可使用最佳化方法對動態內部的參數進行最佳化求解
- **須建立有效評估及量化參數偏差所造成的誤差**：透過建立誤差歸因即量化，演算法可以比較不同動態下對特定參數的激勵效果，並在演算法中進行選擇

假設對於車輛系統而言，在操作指令可精準控制的情況下，操作方式 (Maneuver) 的行為量化相對是容易達成的。因此，本研究將針對量化誤差的方法進行進一步的歸納。

2.2 敏感度分析

系統的模型開發流程中，了解及量化參數的不確定性對於系統輸出的分布狀況是非常重要的 [36]，而敏感度分析 (Sensitivity Analysis, SA) 則是被廣泛應用於定義及量化系統的輸入與輸出之間的不確定性 [37]。

敏感度分析的目的是要探討系統中的參數偏移或變動時對於系統輸出的影響及分布的變化程度。當系統輸出對於某一輸入參數的變動的敏感度較高，表示該參數的些微變化會導致模型輸出產生較大幅度的變化，藉由此方法可以用來識別和量化輸入及輸出不確定性之間的關係 [38]。也因此，敏感度分析可以被應用於不確定因素的呈現，模型參數的估測、實驗數據的分析、對未來資訊蒐集的方法指引、以及參數較準的準確度需求和優先順序的建議 [39]，理想的敏感度分析應用如圖2.3 [40] 所示。

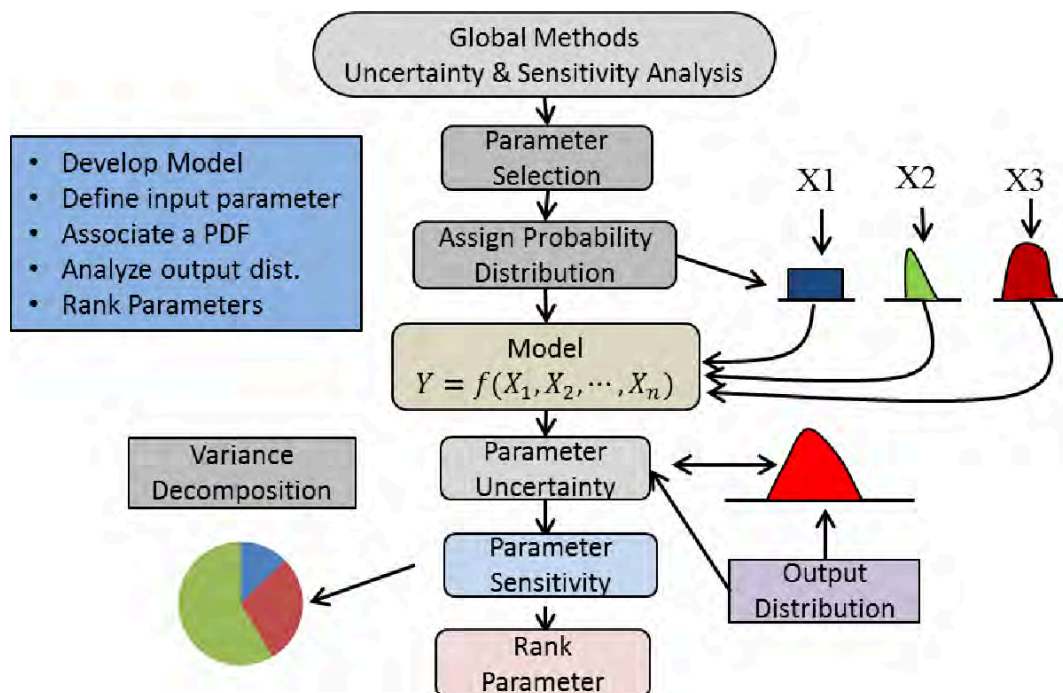


圖 2.3: 全域敏感度之應用示意圖 [40]



2.2.1 全域敏感度分析

常用的敏感度分析又分為兩大類，局部敏感度分析 (Local Sensitivity Analysis, LSA) 及全域敏感度分析 (Global Sensitivity Analysis, GSA) [41]。局部敏感度分析是分析單一參數變化對模型輸出影響程度，因此只需要探討單一參數的對輸出的影響，可以解釋為將輸出對於單一參數進行偏微分，計算較簡單直接，運算量也較少。但當系統本身具備數量較多的參數、具複雜計算及呈現非線性的關係時，將無法具體呈現多項參數所組成的多為度樣本空間中各參數與輸出結果的綜合關係 [18]。全域敏感度分析則是縱觀模型整體參數在其可能分布範圍內對模型輸出的影響程度，並且同時考慮參數之間的交互作用 (Interaction Effect)，特別可應用於找出對系統影響顯著的重要輸入項目。為了分析整體參數空間中各個參數與輸出結果的綜合關係，使用全域敏感度分析必須要能在樣本空間中進行均勻取樣，也因此需要較多的取樣次數及運算量。車輛模型，作為一個包含許多次系統之間耦合性強的非線性系統 [42]，在分析各個參數對輸出影響時得使用全域敏感度分析方法，才能考慮到參數之間的耦合性。

全域敏感度指標的計算方法非常多種，常見的方法主要包含篩選法 (Screening Method) 與變異數法 (Variance-Based Method) 兩大類 [43]，常用的方法可整理於表 2.1：

表 2.1: 全域敏感度分析方法

	變異數法 Variance-Based Method	篩選法 Screening Method
數學意義	$f(\mathbf{X}) = f_0 + \sum_{i=1}^d f_i(X_i) + \sum_{i < j}^d f_{ij}(X_i, X_j) + \dots + f_{12\dots d}(\mathbf{X})$	$E_j^{(i)} = \frac{f(\mathbf{X}^{(i)} + \Delta e_j) - f(\mathbf{X}^{(i)})}{\Delta}$
簡述	估計模型參數對輸出 結果變異數的貢獻	比較樣本點在改變不同維度的 偏移時對系統輸出的偏移多寡
常見方法	Fourier Amplitude Sensitivity Testing (FAST) [44] Sobol's Method [45, 46]	Morris Screening [47] Design of Experiment (DOE) [48]
特點	需要大量取樣次數 (維度 $\times 10$) 才能計算出較準確的敏感度 [49] 適合用於定量分析	計算效率較高，但準確度較低 [50] 適合用於定性分析

其中，篩選法主要應用於決定系統中的重要參數，但由於準確度並不高，僅能巨觀的描述輸入空間的不同位置對參數的影響，對於細部的微觀趨勢較無法掌握，因此對於量化不確定性及誤差歸因幫助較小；相對的，變異數法透過對輸出結果進行方程式的變異數分析 (functional-ANOVA, FANOVA)，可明確量化參數的交互作用，但相對的犧牲了取樣的計算時間與成本。針對各個全域敏感度方法的取樣次數、適用的模型複雜度及對於交互作用的計算能力，可整理於圖 2.4 [43]。比較常被使用的 FAST 及 Sobol 法時，Saltelli 提到 FAST 非常依賴對轉換函數 (Transformation function) 的選擇以及每個參數所對應到的頻率 [41]，並且對 FAST 而言相對於 Sobol 法更難計算用來表示參數之間交互作用大小的指標。因此，本研究會以 Sobol 法作為計算全域敏感度指標的主要方法，

並因應模型尺度及操作上進行細部調整。

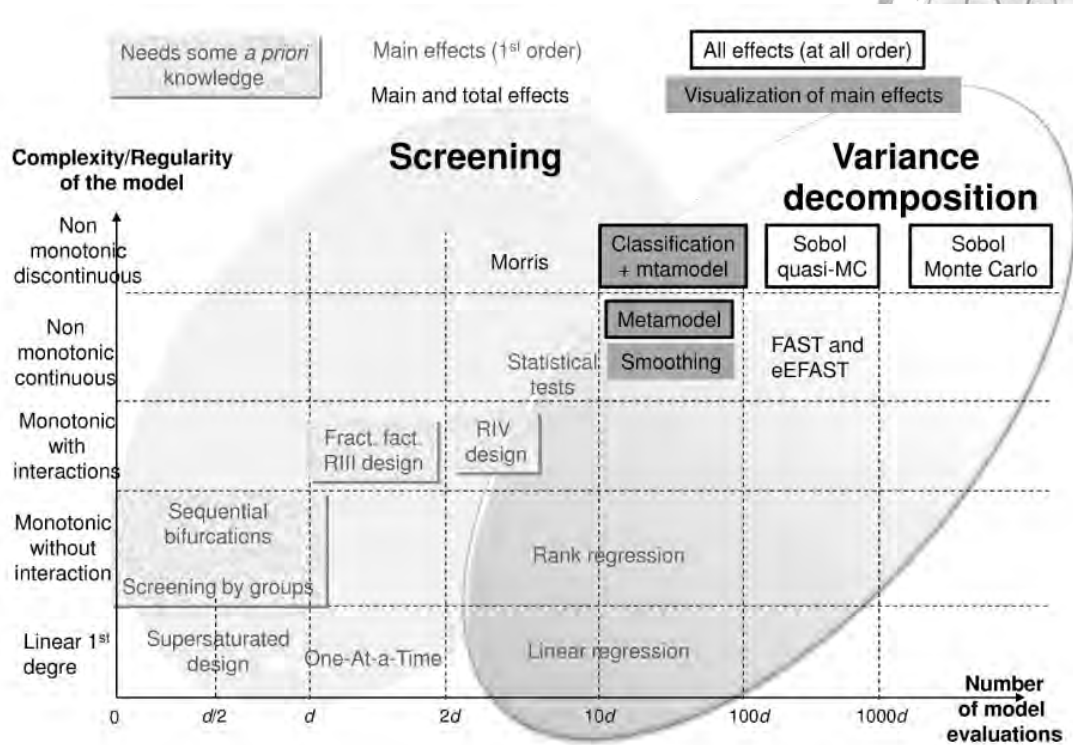


圖 2.4: 全域敏感度分析方法之性質綜合比較 [43]

2.2.2 應用於動態系統之全域敏感度分析

傳統的全域敏感度分析方法適合應用於輸出為純量之系統。然而，對大多數動態系統或機械系統而言，輸出皆是時間函數 (Time function)。面對輸出為時間函數之動態系統，若要使用類似方法進行全域敏感度分析，得要提出一套方法對輸出軌跡或曲線進行量化，基於變異數的全域敏感度分析方法才能夠準確的被實現。

針對動態系統的研究中，面對輸出曲線的差異，最直接的做法就是針對曲線的差異進行誤差的量化 [51]。常見的量化方法例如僅考量幾何形狀以計算兩曲線中的歐幾里得距離 (Euclidean distance) [52]、考量幾何分布上及平均數差異的吻合度 (Fitness) 指標及雷同度 (Similarity) 指標 [53]、使用累積曲線進行比較的 Kolmogorov—Smirnov test [54]，考量取樣點數量不同而進行最短距離計算的動態時間規劃演算法 (Dynamic Time Warping, DTW) [55] 等，都是被應用於訊號處理或機械動態誤差量化上的數學方法。動態系統的動態輸出時間函數經由量化為單一指標後，即可使用變異數法對該輸出及模型中的不確定因素進行全域敏感度分析及物差量化，也被實際應用於工程案例中 [42] [56]。亦或者，也有部分方法嘗試使敏感度指標為時間函數 [57]，使全域敏感度指標會因時間不同而改變。然而將全域敏感度指標表示為時間函數的形式在本研究也無法被妥善使用。

然而，並非所有的曲線差異量化指標都適用於處理動態系統輸出的誤差，且單純的由量化曲線差異來做為敏感度指標會有幾個問題 [58,59]：

1. 對於動態系統的行爲而言，每一個時間點對應到的輸出與其前後時間的量值並非獨立關係，因此若將所有的資料點一起進行比較，不僅花費時間且比較的結果並沒有充分的物理意義
2. 直接對曲線誤差進行量化之方法無法呈現輸出曲線的特性

面對輸出為時間函數的系統進行全域敏感度分析，主成分分析 (Principle Component Analysis, PCA) 是較被廣為使用的方法 [58,60,61]。透過主成分分析，一筆動態輸出軌跡可以被分解為基底函數 ϕ (Basis function) 及重要係數 C (Coefficient) 的線性組成。如此一來動態輸出軌跡即可被轉換為單一純量，再利用上小節所介紹的全域敏感度分析方法即可完成全域敏感度分析，流程如圖2.5 [61] 所示。該方法應用的例如 De Lozzo 及 Marrel 將其運用於對系統輸出為與時間空間相關的資料—例如影像—進行系統參數的全域敏感度分析 [62]、Alexanderian 等人也證明此方法可被應用於線性及非線性系統中 [63]。

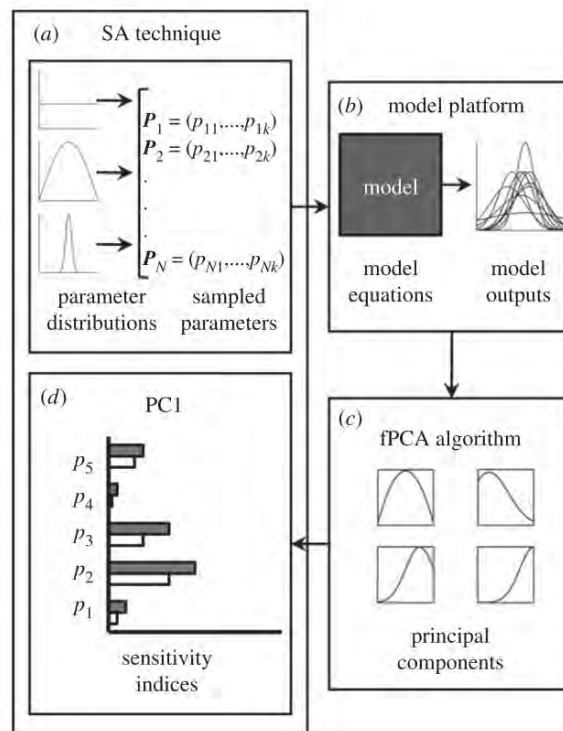


圖 2.5: 輸出為時間函數之全域敏感度分析流程 [61]

因此，本研究認為將動態輸出透過主成分分析轉換為重要係數的組合，是可以被應用於計算動態系統中參數的全域敏感度分析比較好的方法。然而，儘管使用主成分分析於基於變異數法的全域敏感度分析是被大量使用的方法，然而大多數的研究並沒有針對取樣次數被限制的複雜系統進行討論，幾乎都忽略了取樣次數會如何影響全域敏感度指

標的收斂性及取樣限制。因此，在使用上仍然需要與其他複雜系統的設計方式進行調整和搭配使用。



2.3 複雜系統於不確定因素下之設計

2.3.1 DACE (Design and Analysis of Computer Experiments)

隨著使用 CAE (Computer Aided Engineering) 對模型進行分析及設計的工程應用越來越普及，加上對於模型的物理及數學建構上有更準確的了解，各類型的電腦模型例如 CAE (Computational Fluid Dynamics)、FEA (Finite Element Analysis)、及多體系統動力學 (Multibody Dynamics Analysis) 等，開始被用來分析及模擬複雜的機械系統。然而，當這些模擬模型要能隨著產品的快速發展而被建立，最大的阻礙通常都是複雜且非常高的計算成本 [64]。

對複雜系統的開發而言，對不確定因素的分析、量化、甚至是在不確定因素下對系統進行最佳設計，是相當重要的課題 [65]。若要對系統中的不確定因素進行分析，一定得透過「雙迴圈 (Double Loop)」的設計流程 [66]，如圖2.6所示，外圈為最佳化過程而內圈為不確定因素分析。然而，使用此方法分析複雜系統同時模型的計算需求及成本會劇烈的上升。

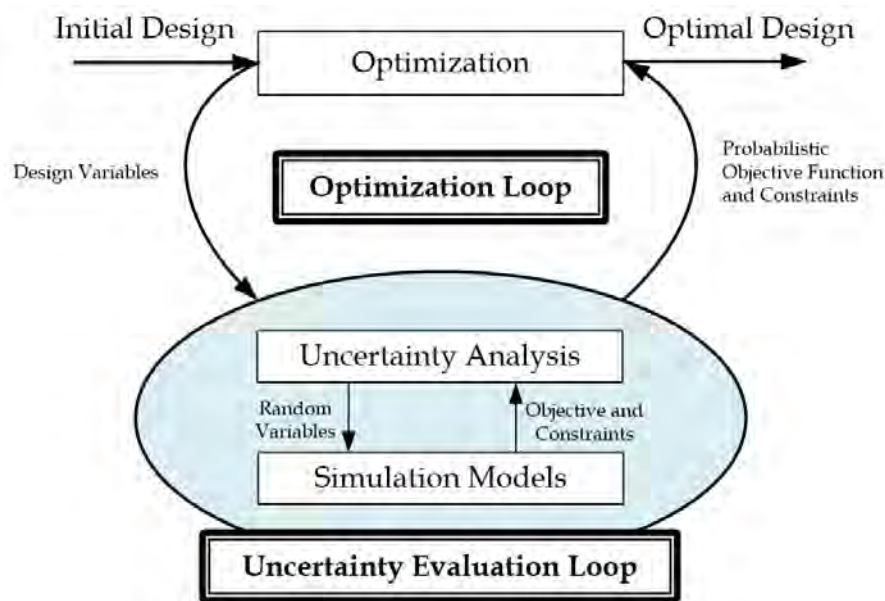


圖 2.6: 在不確定因素下進行最佳設計之雙迴圈示意圖

基於上述的原因，要完全透過這些高解析度的模型進行工程設計是不太實際的。為了要減少計算成本及時間，其中一種方法為建立一個近似的替代模型 (Surrogate model, or Metamodel) 來取代高計算成本的模擬模型或程式。這種替代模型所強調的是透過適當的實驗設計 (Design of Experiments, DOE)，讓取樣點可以均勻且有代表性的分布在整個設計空間中，並以迴歸的方式建立替代模型 (或稱為反應區面)。利用數學模型代替

複雜系統的模擬模型後，數學模型即可在預測設計空間中任意位置的模型輸出。在替代模型廣泛應用於工程案例後，也開始將替代模型應用於在不確定因素下的設計 [67,68]，透過替代模型來實現不確定因素分析、敏感度分析、及最佳化 [68,69]。這種透過實驗設計與替代模型來預測輸入與輸出之間關係，並加入不確定因素進行設計的方法，在廣泛被使用後，則被整理為一套系統化流程稱為 DACE (Design and Analysis of Computer Experiments)，詳細可見 [70]。應用 DACE 於不確定因素下之設計工程的流程如圖 2.7 所示 [71]。

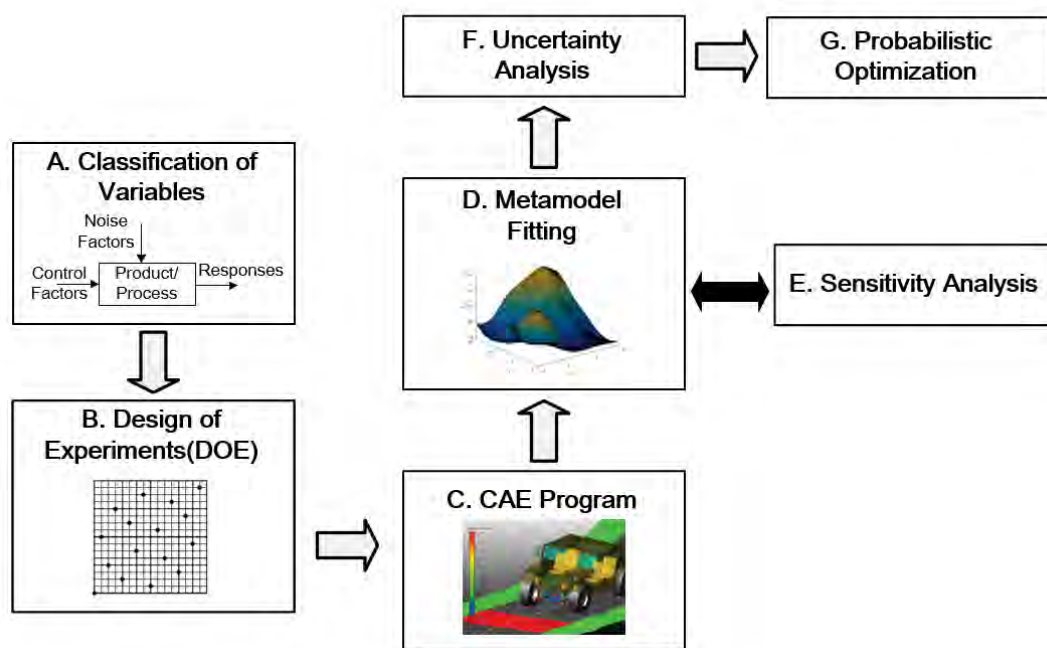


圖 2.7: 應用 DACE 於不確定因素下之設計工程

本研究同樣也會針對複雜系統進行不確定因素量化和敏感度分析，因此決定參考圖 2.7 的流程進行後續研究。為此，本研究同樣也針對流程中的重要步驟進行文獻的搜索，以確定最適合應用於本研究的模擬環境的操作方法。

2.3.2 低差異取樣方法

廣義的 DOE 所指的是設計對於分析系統時最合適的取樣位置或樣本集合。高效率的生成在高維度設計空間中分佈均勻的隨機取樣是實驗設計中非常重要的步驟。在 DACE 中，取樣方式的好壞不僅會決定替代模型的可信度，更直接決定了計算時間和全域敏感度的準確性。有別於傳統操作上在設計空間中以隨機取樣生成取樣點的蒙地卡羅法 [72]，所謂「低差異取樣」(Low Discrepancy Sampling Method)，或者也被理解為擬蒙地卡羅法 (Quasi-Monte Carlo Method) [50]，是一套經設計的取樣方式，讓取樣點以最均勻散佈在設計空間中，使這些樣本能以指定的數量充分的表達系統在整個設計空間中的輸出。

首先，得先說明取樣的「均勻」指的是甚麼。以圖2.8直觀的觀察，左圖為偽隨機亂數所組成的樣本，而右圖中經由低差異取樣兩個維度的樣本對整個空間的覆蓋更加的完整。

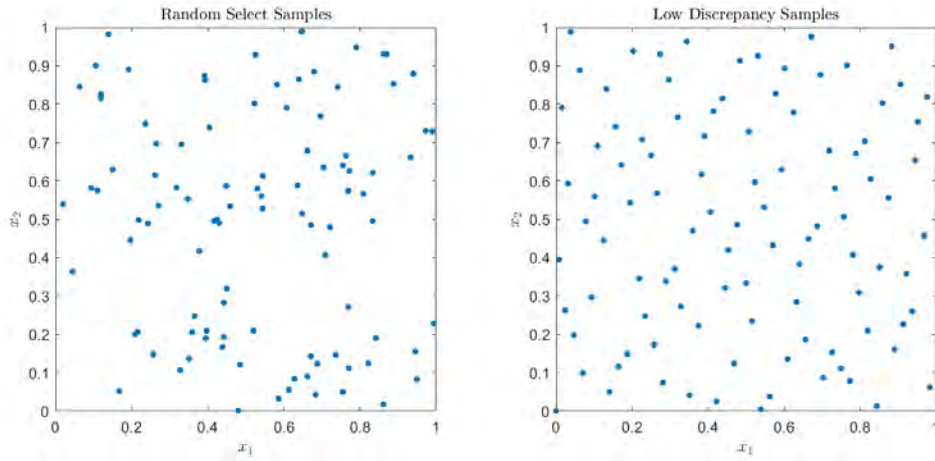


圖 2.8: 隨機取樣與低差異取樣的均勻差異

更嚴謹的定義均勻，則參考 Niederreiter 所提出對差異的定義 [73]：

$$D_N(P) = \sup_{B \in J} \left| \frac{A(B; P)}{N} - \lambda_s(B) \right| \quad (2.1)$$

這個複雜的式子可以解釋為：對於一個在 s 維度 $[0, 1]^s$ 空間 J 的樣本集合 P 而言，任意選取空間中的一個區域 B ，此區域內點的數量 A 和集合中所有樣本個數 N 的比值區域，與此區域內的體積 $\lambda_s(B)$ 之差的絕對值的最大值，被定義為這個點集的差異性 (Discrepancy)。分佈越均勻的樣本集合，任意區域內的樣本數量占總樣本數的比例也會越接近於這個區域的體積。

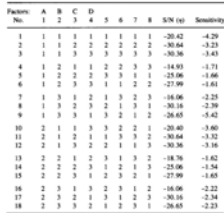
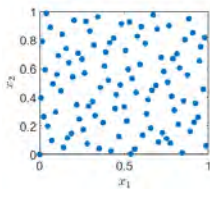
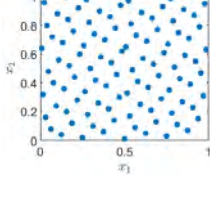
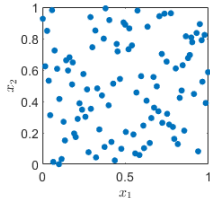
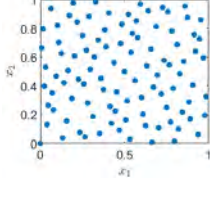
現存的低差異取樣方法種類非常多，對 DACE 來說，選擇樣本在設計空間中的差異程度並不是唯一的選擇依據，同時也會考慮到演算法生成樣本點時的生產速度以及方法本身在使用上的限制。現存的低差異取樣方法多半是基於 Radical Inversion 演算法 [74] 所生成的 Van der Corput Sequence [75] 所組成，而該數列具有以下特性：

- 每個新的樣本點都會落在樣本空間裡面被已有的樣本所「覆蓋」最少的位置
- 當樣本數量 N 非常大時，一維序列會形成被均分 (Uniformly) 狀態

對於 Van der Corput Sequence 的特性有初步了解後，表2.2則整理了幾種較常被使用的低差異取樣方法，簡單的了解各自的特色及簡單比較。

從表2.2中可以看到各種取樣方法的差異及使用上的優劣和限制，而更詳細的比較可以參考 [80]。面對包含著許多參數的複雜系統，考量到取樣需來自高維度的設計空間，且同時考慮程式的演算速度及取樣的低差異性，最適合的方法為 Sobol 序列。因此，本研究決定選擇 Sobol 序列作為 DACE 在取樣階段時所使用的方法，並在第三章會詳細描述該方法的操作。

表 2.2: 低差異取樣方法綜合比較

取樣方法	圖示	特色
DOE [76]		<ul style="list-style-type: none"> 產生直交表做為取樣點 決定樣本數量的參數為每個維度的水準 可分為全因子設計 (Full Factorial Design) 和部分因子設計 (Fractional Factorial Design) 產生高解析度 (Resolution) 的直交表非常耗時，對交互作用的解析能力較差
Halton Sequence [73]		<ul style="list-style-type: none"> 每個維度都是由不同底數的 Van der Corput 序列所構成 每個底數之間彼此互質 以較大的質數做為底數時，序列的分佈在點的数量不那麼多的時候並不會均勻的分佈 不適用於生成高維度 (> 8) 的樣本集合。
Hammersley Sequence [77]		<ul style="list-style-type: none"> 低差異程度較 Halton 優 與 Halton Sequence 幾乎相同，唯第一個維度變為 $\frac{i}{N}$: i 為第 i 個樣本點，N 為總樣本各數 只能生成固定數目個樣本 同樣無法適用於高維度
Latin Hypercube [78]		<ul style="list-style-type: none"> 為少數具有隨機性的低差異取樣方式 低差異性較不如 Halton 與 Hammersley 在取樣空間中，每一行每一列僅會出現一個樣本點 若取樣次數大，電腦生成的計算時間非常大
Sobol Sequence [79]		<ul style="list-style-type: none"> 每一個維度都是由以 2 為底的 Van der Corput 序列所組成，但在進行 radical inversion 時各自的生成的矩陣不同 沒有樣本數上限，可以無限生產 不會受到維度高低影響，在高維度時的低差異性較 Latin Hypercube 來的更佳 由於底數皆為 2，電腦生成速度非常快速



2.3.3 替代模型

DACE 方法的最大核心，即為建立替代模型 (Surrogate model, Regression model, Metamodel, Response Surface...)。在應用上，替代模型所「替代」的對象為複雜系統本身或者系統輸入與輸出指標的關聯，目的是透過有限的取樣，有效的串連系統的輸入與輸出關係所建立的連續曲面。在 DACE 中主要使用的方法有：

- 可以將離散的取樣資料透過數學模型擬合成連續的輸出型態，使最佳化演算法可以被實現 [81]
- 可以透過數學模型的內插，對尚未進行取樣的樣本點進行估測，或者生成更多筆資料。

本小節整理了三種在工程上經常被應用的替代模型，並透過文獻比較之間的優劣及選擇適當的替代模型：

- **多項式迴歸模型 (Polynomial Regression Model)**

多項式迴歸模型是為與實驗設計方法配搭使用而被設計出來的數學模型 [82]，而後因著模型本身可以被簡單應用以及物理意義容易被解釋，因此主要應用於品質設計等定性分析 [83]。最典型的多項式迴歸模型主要以二階多項式表示：

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^M \beta_i x_i + \sum_{i=1}^M \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^M \sum_{j=i+1}^M \beta_{ij} x_i x_j \quad (2.2)$$

其中 β 為迴歸係數，可以透過計算實驗設計的效應或透過最小平方法 [84] 求得，須採用的樣本數約為迴歸係數數量的 2 至 3 倍。多項式迴歸模型被應用於設計複雜模型中 [85]。然而，雖然二階的多項式迴歸模型被廣泛使用，卻不適合應用於擬合非線性程度高的模型，在階數有限的條件下也無法使迴歸模型精準的表達原始系統。雖然使用更高階數的模型可以更準確描述非線性的行為，但同時對模型的係數的需求也會隨之提升，不穩定性也會隨之提升 (類似過度擬合) [67]。例如：若系統有 M 個設計變數，則需要模型會有 $(M+1)(M+2)(M+3)/6$ 個迴歸係數。

- **多變量適應性雲形迴歸模型 (Multivariate Adaptive Regression Splines Method)**

多變量適應性雲形迴歸模型 (MARS) 是由史丹佛大學統計學家 Friedman 所提出 [86]，為一種多變量無母數迴歸處理技術，擅長找出隱藏在高維度資料中的資料結構 (如交互作用)。其原理是評估資料變數間之關係後，運用基底函數 (Basis Function, BF) 加總所組成之預測函數，以獲得最佳的變數組合，一般式可表示為：

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = a_0 + \sum_{i=1}^{N_b} a_i B_i(\mathbf{x}), \quad B_i(\mathbf{x}) = \prod_{l \in K_i} [s_{il}(x_l - t_{il})]_+^q \quad (2.3)$$

其中， N_b 為基底函數的數量 (或交互作用數)， s_{il} 之值限定為 +1 或 -1，表示基底函數的斜率正負，而 t 則為各折點位置，詳細運作不在本文不做解釋，可參考如 Sudjianto 透過 MARS 進行車量的可靠度及穩健分析 [87] 及其他工程案例的應用。從其應用看來，MARS 模型更適合被應用在高度非線性的模型中，但同時所需用的樣本數量也遠大過低階數的多項式迴歸模型。

• 克里金模型 (Kriging Model)

Kriging 模型，或做克里金法，最早是由南非礦冶工程師 D.G. Krige 開發用來分析礦產資訊的方法，而後由法國數學家 Matheron 所提出的一套空間統計法 (Spatial Statistic) [88]。於 1989 年 Sacks 等人開始將 Kriging 模型的技術延伸應用於電腦實驗中 [1] 後，Kriging 模型開始被廣泛應用在許多領域和 DACE 的應用中 [89,90]。Kriging 模型的基本概念為空間中任意位置的估測值與空間中所有的樣本資料之量測值的現性組合，而與該位置的距離越近的樣本資料影響越多。按照這樣的想法，Kriging 模型的概念可以被表示為：

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k \beta_i y_i(\mathbf{x}) + Z(\mathbf{x}) \quad (2.4)$$

其中， $y_i(x)$ 表示為第 i 個樣本資料與估測位置 x 之間的迴歸函數，可以理解成預估的結果； β_i 則表示第 i 個樣本資料與估測位置 x 之間的距離關係，也可以理解為與空間中所有樣本點對估測點的距離推算出來的權重。因此可知 Kriging 模型是一種透過所有樣本資料的資訊進行內插的方法。在應用上，Kriging 模型同時可以得到設計空間中各個位置變異數的大小，與 EGO (Efficient Global Optimization) 搭配使用，進一步提供最能增進模型準確度的取樣點建議 (Infill Sampling Criteria) [91]。

針對上述所提到的三種方法，Jin 等人實際透過案例的應用探討三種模型在合成模型的準確度 (Accuracy)、穩健度 (Robustness)、及實現難易度 (Conceptual Simplicity) 等表現，進行綜合比較 [92]，同時也針對模型應用於最佳化中的應用性進行比較 [71]。在該比較中，Jin 提到 Kriging 模型較能處理擁有不同非線性程度輸入的系統，也更適合與全域敏感度分析方法搭配使用，應用在不確定因素分析的研究中。雖然 Kriging 模型的合成時間雖然較其他方法更久，對雜訊的處理狀況較差，但準確度遠高於其他兩者，可參考圖 2.9 [92]。考量到車輛系統本身就具有高度非線性，且在模擬環境中進行 DACE 流程時可忽略量測雜訊對系統的影響，加上 Kriging 模型的擬合時間依然遠少於對複雜系統進行取樣的時間，因此綜合考量之下，本研究決定採用 Kriging 模型作為主要使用之替代模型。選擇 Kriging 模型的同時，本研究也將在 EGO 加入研究法，以探討在案例中 Kriging+EGO 的實用性。

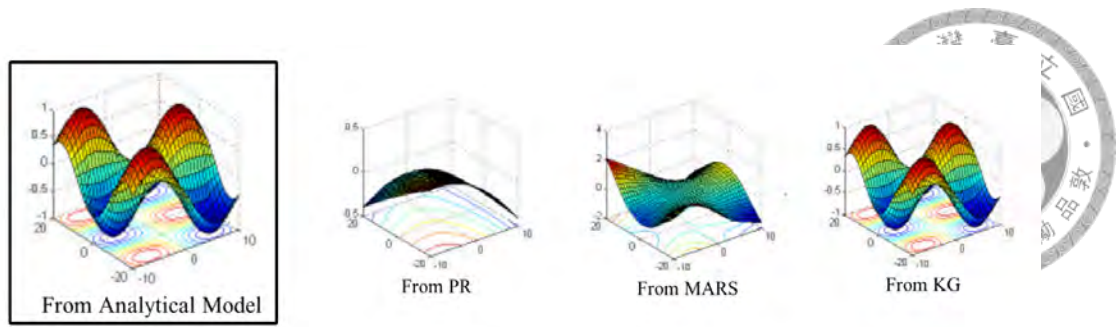


圖 2.9: 不同替代模型擬合結果 [92]

2.4 動態系統參數校準

動態模型是一個具有時間函數輸出的系統，資料已多個時間點所呈現，使得驗證上有一定的難度與複雜度。Oliva 整理了有關商業或策略領域中，動態模型驗證的概念和方法 [93]，透過分析政策影響、金融策略、經濟效應等案例，比較數學模型和真實模型，並點出模型驗證對於動態模型的幫助與方法，以及使用假設檢定來對比模型差異。從文中可知，比較兩模型的靜、動態數據是模型校準 (Model Calibration) 的必經之路。在模型校準的領域中，本研究更著重於探討兩模型中參數的偏差及校準，且假設模擬模型的物理及數學應用可以完整表達真實系統。

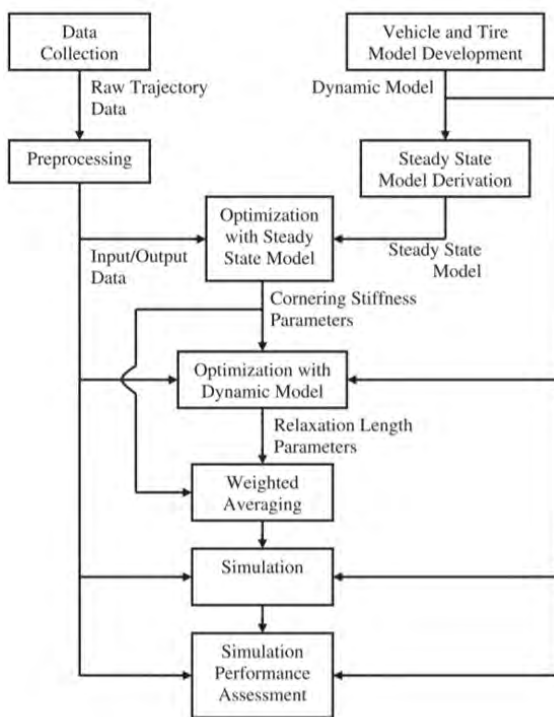
參數的校準，或者可謂「估測 (Estimation)」是一個非常重要的問題，因為許多的參數是無法透過直接的物理測量取得，或者無法被準確的量測。再者，參數數值的推估得仰賴多種可信且可取得的系統響應才可以取得，但系統的響應往往因著量測誤差而無法被準確的量測。參數估測的理論可以參考 [94,95]，而本研究則列舉並歸納幾種應用於車輛參數校準的方法，並探討其可行性及適用性。

1. 穩態校準 + 動態校準

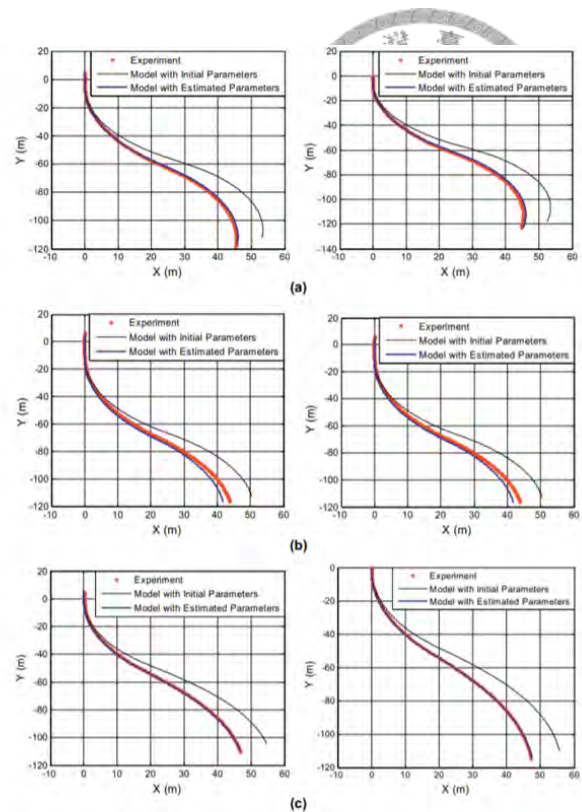
Karkee 及 Steward 針對拖拉機的輪胎參數，依序在穩態行為及動態行為下校準輪胎的側偏剛度 (Cornering stiffness) 及鬆弛參數 (Relaxation length) [96]。

其方法的主要概念為，當車輛行駛於「穩態」，即所有方向的加速度和角加速度為 0 時，側向速度會保持定值，因此對車輛的動態方程式而言，有幾條方程式可以暫時不用被考慮，同樣的也會有部分參數不會參與在該動態當中，因此可在保留至下個校準階段。透過最佳化方法，可以找到一組使得模擬模型與真實實驗的動態輸出曲線之平均誤差 (Mean Squared Error, MSE) 最小的參數組合，作為穩態階段的參數校準結果；在動態校準階段，則透過 PEM (Predictino Error Minimization) 來校準在穩態校準階段被保留未被校準的參數。從圖2.10實驗結果中可以看到，使用該方法確實的透過參數的校準使兩模型之間的誤差縮小，也驗證了方法的可行性。

這個方法的使用已經與本研究想探討的參數激發概念非常接近。然而，使用這種方式進行參數校準時，模型得滿足幾種條件：模型的動態方程式可以被清楚列出，且參數如何影響模型是已知的狀態，因此可以透過穩態、動態行為將參數進行區



Method Flowchart



Result Validation

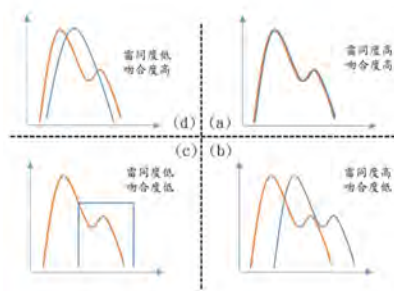
圖 2.10: 結合穩態行為校準與動態行為校準之流程與校準結果 [96]

隔。另外，該方法單純透過單一行為進行最佳化求解，在目標參數較多的情況下，會容易出現多組解的情形 [97]。由於該研究在兩種校準階段都只校準單一個參數，因此多組解的問題並沒有被討論。

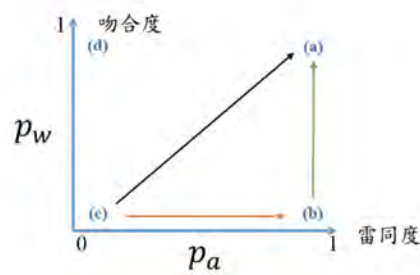
2. KL 轉換 + 吻合雷同指標

Chu 針對動態行為的驗證，使用 K-L 轉換 (Karhunen-Loève Transform) 及重組動態資訊 [98,99]，藉以有效比對重要資訊，並使用無母數檢定方法 (Nonparametric test) 建立分佈的吻合雷同 (Similarity and Fitness) 驗證指標，對模擬模型與真實系統輸出分別經由 K-L 轉換所得到的重要係數分佈進行分佈的比較，以此量化動態行為的差異。透過量化後的誤差指標，即可對模型進行參數校準。建立指標如圖2.11所示，吻合度指標和雷同度指標皆為 0 到 1 之間，在平面空間中，指標越接近 (1,1) 表示兩比動態輸出資料越接近，也表示模擬模型較準確，因此可用以作為模型校準的驗證指標。

使用 K-L 轉換並比較重要係數分佈的方法與常見的量化動態系統誤差方法非常不同，反而是透過直接比較兩模型重覆進行多次後的兩筆動態輸出資料，如圖2.12所示，在應用上更能接近實務。然而，經過測試後發現，在模型中加入模擬雜訊的隨機變數後，吻合雷同指標的表現性能較不理想，推測可能是因為指標本身對於吻合及雷同性的敏感度非常高，因此進行誤差檢定時，指標融異快速的往原點方向聚集而無法被解讀，在實驗中及最佳化演算法中仍然較難被應用。



吻合度與雷同度示意圖



吻合指標與雷同指標在空間中之分佈

圖 2.11: 吻合雷同指標示意圖 [98]

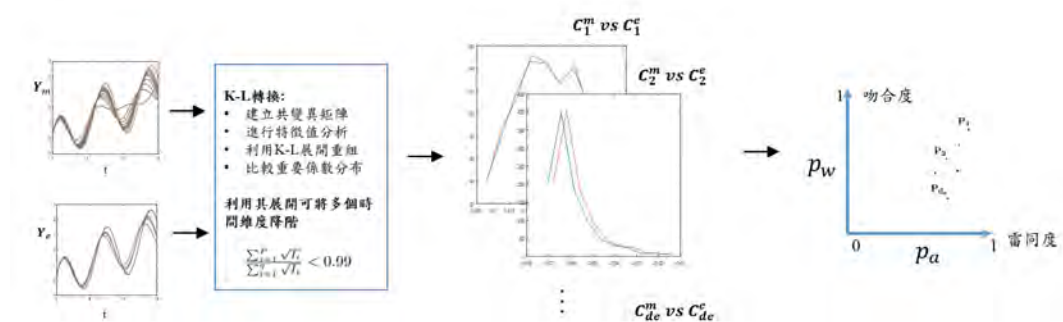


圖 2.12: 使用吻合雷同指標比較模擬模型與真實系統輸出資料流程圖 [98]

3. 貝氏推估

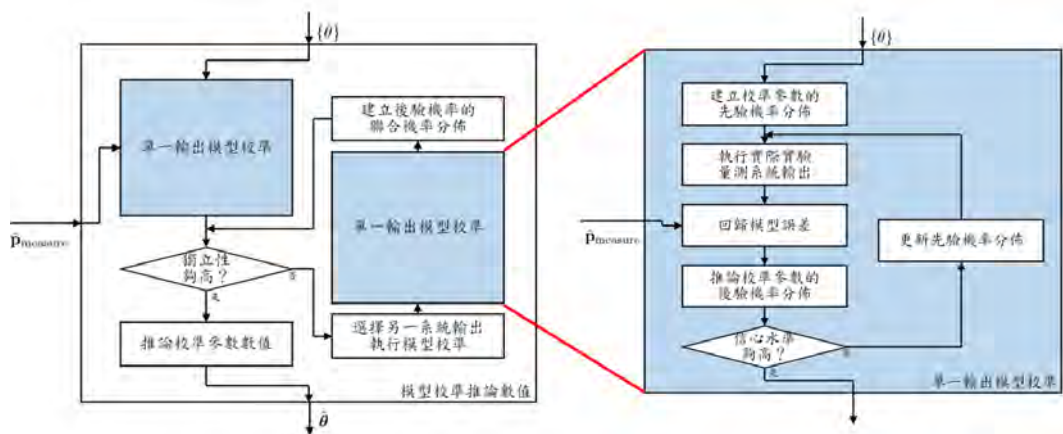


圖 2.13: 貝氏推估校準模型流程圖 [100]

貝氏推估 (Bayesian Inference) 在參數校準的方法中是非常常見的手法，特別在處理模擬模型和實驗本身都帶有不確定性的輸出上更是被普遍應用，是一種將參數估測轉變為尋找最大似然參數 (Maximum Likelihood Value) 的方法。Lin [100] 建立一套系統化的方法，如圖2.13所示。透過不同的行為對系統進行實驗，推估參數

的先驗機率，並且將系統在每一種行為下模擬的結果進行摺積 (Convolution)，以貝氏機率的概念求出參數可行解的分佈，得到參數的後驗機率。重複實驗多次即可縮小參數可能的分佈，提升估測的信心水準，如圖2.14所示。Lin 在研究中也特別針對參數的「獨立性」進行探討，不同行為對參數分佈的影響應該要具有獨立性，在貝氏推估的操作框架下才能有效的使推估更有效率。然而，此方法僅適合用於單一輸出模型，概念較難被應用在動態輸出的系統中。

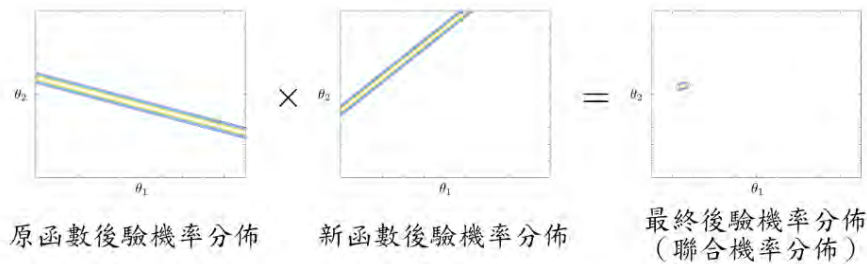


圖 2.14: 後驗機率分佈的聯合機率分佈 [100]

4. 卡爾曼濾波器

卡爾曼濾波器 (Kalman Filter) [101] 是一種高效率的遞迴濾波器，能夠從一系列不完全及包含雜訊的量測中，推估動態系統的狀態，可以說是一種貝氏推估的變化。與貝氏推估的單一輸出不同處為，卡爾曼濾波器所使用的是每一個時間點的輸出量值，並且可同時考慮多個狀態 (State) 的分佈，透過在不同時間下的分佈狀態，考慮各時間下的聯合分佈，再產生對未知變數的估計，因此會比只以單一量測量為基礎的估計方式還要準確。卡爾曼濾波器在工程案例的應用範圍非常廣泛，除了可以用來估測系統的未來動態 [102]，更可以被應用在線上或線下的參數校準，如圖2.15 [103] 所示。

在卡爾曼濾波器的應用上，Blanchard 認為若系統內的不確定參數分佈為已知，且系統在運作時不確定性的傳輸會是一個高斯程序 (Gaussian Process)，則可將系統是為一個隨機程序 (Stochastic Process)，將系統的輸入與輸出以混沌多項式展開 (Polynomial Chaos Expansion, PCE) [104]。如此一來，當系統的輸入與輸出都可以表示成同一種基底函數以不同的係數的線性組成，透過卡爾曼濾波器來估測每一個經由混沌多項式展開所得到的係數，則能細部的調整不確定參數的「分佈」。結合混沌多項式展開與卡爾曼濾波器來校準參數的方法已經被證實可以比一般的卡爾曼濾波器能更有效且精準的進行估測 [105–107]。Blanchard 也整合混沌多項式展開與延伸行卡爾曼濾波器 (Extended Kalman Filter, EKF)，提出一套基於混沌多項式展開的參數校準方法，也應用此方法於估測複雜的彈簧阻尼系統中未知的質量大小與質心位置。

比較這些方法，本研究認為以複雜系統而言，使用卡爾曼濾波器作為參數校準的方法較適合應用於車量系統的參數校準。不僅在工程案例上較多完整的應用，本研究也認為透過卡爾曼濾波器所推估得到的參數分佈，更能表現參數在不同的操作下所呈現的信

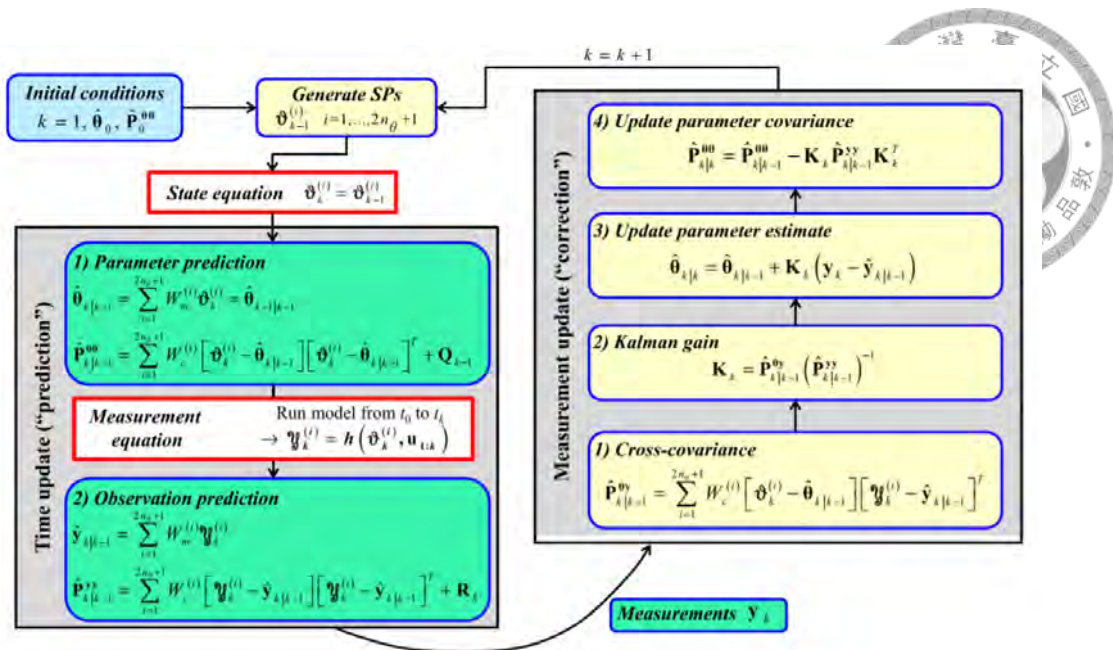


圖 2.15: 應用卡爾曼濾波器於操數校準流程圖 [103]

心水準，可驗證本研究所提出的參數刺激方法對於參數校準是否有顯著影響。因此在後續建立研究方法將針對應用基於 PCE 的卡爾曼濾波器進行探討。

2.5 小結

本章整理透過文獻的整理及對方法的初步嘗試，確定了研究在各階段所使用的研究方法：在 DACE 流程中，透過 Sobol 序列進行低差異取樣，建立 Kriging 模型，並使用基於替代模型的 Sobol 法對系統的動態輸出進行全域敏感度分析，經由最佳化後得到針對特定參數的激發操作方式；在該測試方式下，使用基於混沌多項式展開的卡爾曼濾波器進行參數的估測，完成本研究。

研究方法

本章首先對真實系統及模擬模型做一個清楚的闡述，並透過符號的訂定描述研究目標。接著，研究方法主要分為兩部份進行說明如圖3.1所示。

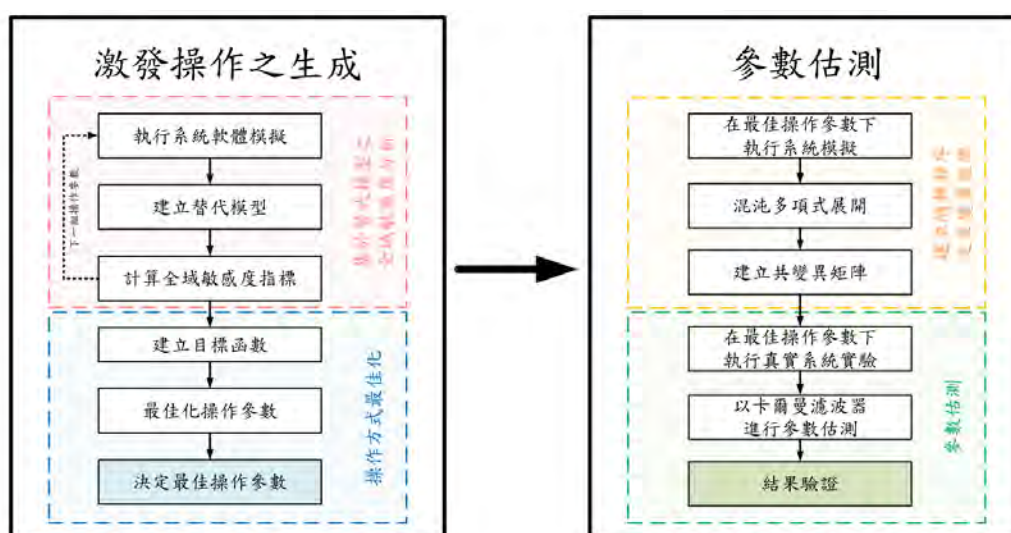


圖 3.1: 研究流程圖

本研究所提出之方法主要為激發參數之操作的生成與參數校準兩大階段，其中激發操作設計主要包含取樣、模型建立、系統分析、與最佳化四個步驟，參數估測則包含以混沌多項式結合卡爾曼濾波器進行參數估測，並以假設檢定檢驗參數校準結果。本章針對激發參數操作設計的重要步驟，分別於 3.2 節介紹 Sobol 取樣的原理及操作方法，3.3 節介紹替代模型數學概念及建立、優化、及評估方式，3.4 節介紹結合 Sobol 法、替代模型、及主成分分析於單一輸出及動態輸出模型的全域敏感度分析之方法，並於 3.5 節介紹激發參數最佳化方法；針對參數估測，於 3.5 節介紹混沌多項式及卡爾曼濾波器的原理，並介紹整合兩者於參數估測的應用，最後於 3.7 節介紹以假設檢定檢驗參數校準的結果。

3.1 真實系統、模擬模型、和實驗與模型驗證之關聯

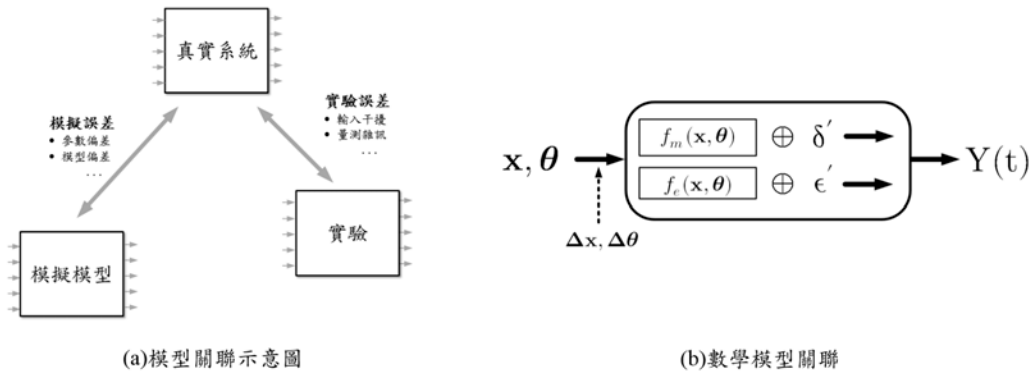


圖 3.2: 三者模型關聯

回到這三者之間的關聯：模擬模型和實驗被建立的目的，都是作為一個讓研究者更能了解真實系統的工具，與真實系統之間仍然都存在著落差，根據 [3]，模擬模型與真實系統存在較顯著的誤差可歸因自參數的偏差以及模型的不完全、而實驗與真實系統的誤差主要則來自實驗中輸入的干擾及量測的雜訊，如圖3.2(a) 所示。

以數學來表示動態系統的模型和實驗與真實系統的關聯，如圖3.2(b) 所示，會發現動態系統其實難以作相對應的模型建立，由其當系統的輸出為以時間函數所表示的動態，在分析上則多了一層複雜度。當模型參數 θ 和操作參數 \mathbf{x} 各自加上了參數的偏移量 $\Delta \mathbf{x}, \Delta \theta$ 後，進入到模擬模型函數 $f_m(\mathbf{x}, \theta)$ ，及實驗模型函數 $f_e(\mathbf{x}, \theta)$ ，各自與模擬誤差 δ' 、實驗誤差 ϵ' 相關聯，是一種可能是加成或相成除的複雜關係，因此以 \oplus 來表示兩者與真實系統輸出 $Y(t)$ 各自存在一定的誤差。更明確來說，圖3.2(b) 可以表示為：

$$Y(t) = f_m(\mathbf{x}, \theta + \Delta \theta) \oplus \delta' \quad (3.1)$$

$$Y(t) = f_e(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, \theta) \oplus \epsilon' \quad (3.2)$$

透過上述的兩個式子來看，可發現雖然理想上能夠希望被建立的模擬跟實驗都能預期的表現真實系統的樣貌，但實際上真實系統是一個無法被徹底了解的黑盒子，需要透過細部的探究才能更接近其完整的樣貌。考量到操作參數的偏差以及量測誤差在目前的技術範圍是可預先得知的，因此儘管在實驗仍然與真實系統存在一定的誤差，但透過統計方法對數據進行一定程度的預測，仍然可以在一定的信心水準下表現真實系統的樣貌。因此，重新敘述三者的關係，可以表達如圖3.3。

因此，針對驗證模擬模型而言，若模擬模型的輸出能夠與實驗的結果相匹配，即可認定模擬模型可以局部的表達真實系統在特定情境 \mathbf{x} 下的樣貌，但仍然無法完全表達真實系統的全貌。圖3.3可看出雖然實驗與模擬模型與真實系統都存在著一定的誤差，但實驗與真實仍然可以更加接近真實系統。於是大部分的研究以實驗代替真實系統，進行模型的驗證與校準。

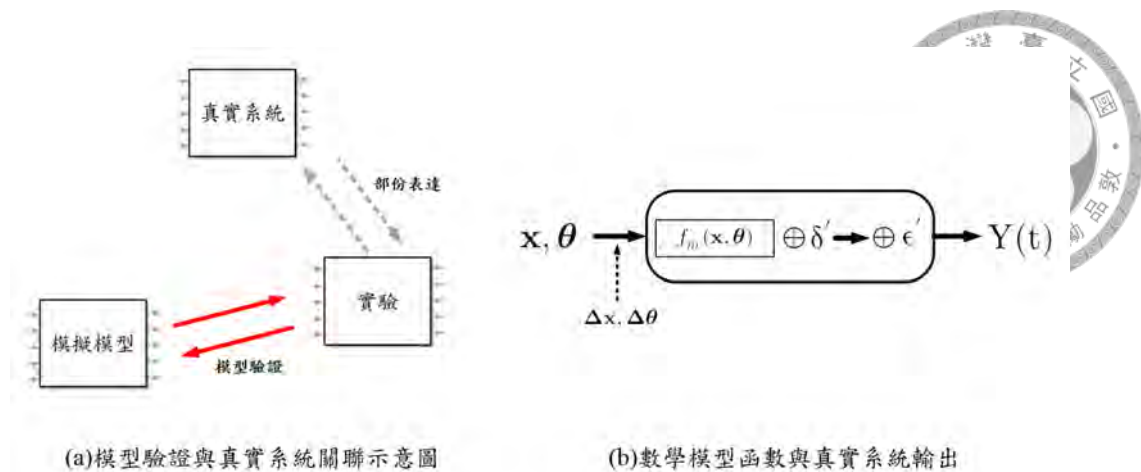


圖 3.3: 模型驗證與三者之間關係示意

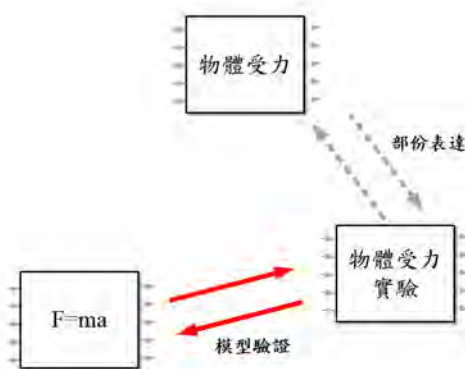


圖 3.4: 模型關係與驗證舉例

舉一個簡單的例子來說明三者的關聯，如圖3.4所示，若真實系統要探討的是真實世界中物體受力的型為，在模型建構的第一步為進行觀察與建立假說，以數學和物理模型描繪模型的樣貌，即 $F=ma$ 。第二步驟，為了證實所推論的物理模型在特定情境下可被使用 (例如巨觀世界)，則建立物體受力等實驗，與模擬模型之間相互驗證與修正。然而，實驗中仍然會有許多環境因素的限制，例如外力 F 的控制、空氣阻力、環境摩擦力以及量測軟體在操作上的誤差等因素影響實驗，所以實驗不一定可以全然量測到真實系統輸出，只能解釋為不確定性的加入會使實驗結果相對較接近真實系統輸出。從例子可知，模擬的建構是為了更容易於預測真實系統的現象和趨勢，實際的物體受力情形仍是一個黑盒子，只能在實驗所給定的情境中表達片面的情境。例如：在微觀時 $F=ma$ 並不適用，可見 $F=ma$ 並非真實系統真實的樣態，僅在巨觀行為下可以做有效的表達而已。模型驗證能做的，僅是不斷的修正對真實系統的猜測。

了解與定位研究意義後，本章將會說明於模型驗證實所應用的模型建構技術、模型中參數偏差的激發、以及模型與實驗之間的驗證並處理量測誤差的相關技術。



3.2 低差異取樣

本節將介紹如何以 Sobol 序列實現低差異取樣，其生成主要來自幾種演算法的搭配：以 Radical Inversion 以及建立不同維度的生成矩陣 (Generator Matrix)。以下將從這兩個要素進行說明及操作方法。

3.2.1 Radical Inversion

假設 b 為一個正整數， i 為任意一整數，則 Radical Inversion 的操作步驟如下：

1. 將 i 轉為以 b 進位制的數字

$$i = \sum_{l=0}^{M-1} a_l(i) b^l \quad (3.3)$$

2. 將轉換進位制後所得到的每一個位數 $a_l(i)$ 排成一個向量

$$\mathbf{a}(i) = [a_0(i), a_1(i), \dots, a_{M-1}(i)] \quad (3.4)$$

3. 將 \mathbf{a} 與一個生成矩陣 \mathbf{C} 相乘，得到一個尺寸相同新的向量

$$[\phi_0(i), \phi_1(i), \dots, \phi_{M-1}(i)] = \mathbf{a}(i) \times \mathbf{C} \quad (3.5)$$

4. 將此新向量鏡像至小數點右側，並將該數的表達以 b 進位制轉回 10 進位制，即可以得到以 b 為底數、 \mathbf{C} 為生成矩陣的 Radical Inversion $\Phi_{b,\mathbf{C}}(i)$ 。透過這個方法所生成的序列則稱為 Van der Corput 序列

$$\Phi(i)_{b,\mathbf{C}} = [b^{-1}, b^{-2}, \dots, b^{-M}] [\phi_0(i), \phi_1(i), \dots, \phi_{M-1}(i)]^T \quad (3.6)$$

舉例說明，假設 \mathbf{C} 為單位矩陣，則計算 8 以 2 為底時的 Radical Inversion，將其轉為 2 進位表示為 1000；由於 \mathbf{C} 為單位矩陣，因此直接將 1000 鏡像制小數點右側得到 0.0001；將其轉回 10 進位制後，即可得到 $\Phi_{2,\mathbf{C}}(8) = 1/16 = 0.0625$ 。

3.2.2 生成矩陣

生成矩陣可說是 Sobol 序列最重要的環節，由於已知 Sobol 序列在每個維度上都是以 2 為底的 Van der Corput 序列，生成矩陣更是決定著要如何將各個維度的序列進行「打散」(Shuffle)。矩陣生成的步驟如下 [108]：

1. 在 Sobol 序列中的第 j 個維度，首先先選擇維度所對應的第二模式本源多項式 [109] (Primitive Polynomials) $p_j(z)$ ，可表示為：

$$p_j(z) = z^{d_j} + a_{j,1} z^{d_j-1} + \dots + a_{j,d_j} \quad (3.7)$$

其中 $a_{j,l} \in \{0, 1\}$ ， d_j 為 $p_j(z)$ 的階數。

2. 建立 d_j 個引導數 (direct numbers) $v_{j,r}$

$$v_{j,r} = \frac{m_{j,r}}{2^r} \quad (3.8)$$

其中 $m_{j,r}$ 是介於 1 到 $2^r - 1$, $r = 1, \dots, d_j$ 之間的奇數，因此引導數會是介於 0 和 1 之間的分數。

3. 當 d_j 個引導數被決定時，可透過遞迴關係生成無限個引導數

$$v_{j,r} = a_{j,1}v_{j,r-1} \oplus \dots \oplus a_{j,d_j-1}v_{j,r-d_j+1} \oplus v_{j,r-d_j}/2^{-d_j} \quad (3.9)$$

其中， \oplus 為向量間逐項的 exclusive-or 的邏輯閘， $a_{j,l}$ 為對應之本源函數的各項係數

4. 將引導數以 2 為底展開，並將展開後的位數排列成對應的一維向量

$$v_{j,r} = v_{j,r,1}2^{-1} + v_{j,r,2}2^{-2} + \dots + v_{j,r,d_j}2^{-d_j}, \quad \mathbf{v}_{j,r} = [v_{j,r,1} \dots v_{j,r,d_j}]^T \quad (3.10)$$

5. 將上述步驟的向量在大小不足處補 0，並將所有的引導數向量排列成一方陣，即為第 j 個維度生成矩陣。

以生成第三個維度的生成矩陣為例，當 $j = 3$ ，對應的本源函數為 $p_3(z) = z^2 + z + 1$ ，可得 $a_{3,1} = 1, a_{3,2} = 1$ ，且 $d_j = 2$ 。因此，為建立兩個引導數，指定 $m_{3,1} = 1$ 及 $m_{3,2} = 3$ ，可得到 2 個引導數為 $v_{3,1} = \frac{1}{2} = [1, 0]^T$ 及 $v_{3,2} = \frac{3}{4} = [1, 1]^T$ 。依照遞迴關係式 3.10 可以得到後續項次：

$$v_{3,3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$v_{3,4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

將引導數整理為長度相同之向量，不足項皆補上 0，即可建立第三個維度的生成矩陣 \mathbf{C}_3 ：

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

透過此生成矩陣及 Radical Inversion 所得的 Van der Corput 序列，及可生成該維度下的 Sobol 序列，如表3.1所示。



表 3.1: 以 C_3 矩陣生成 Sobol 序列

i	$\mathbf{a}(i)$	$\phi(i)$	Inversion	$\Phi_{2,C_3}(i)$
0	[0,0,0,0]	[0,0,0,0]	0	0
1	[0,0,0,1]	[0,0,0,1]	0.1000	1/2
2	[0,0,1,0]	[0,0,1,0]	0.0100	1/4
3	[0,0,1,1]	[0,0,1,1]	0.1100	3/4
4	[0,1,0,0]	[0,1,1,0]	0.0110	3/8
5	[0,1,0,1]	[0,1,1,1]	0.1110	7/8
6	[0,1,1,0]	[0,1,2,0]	0.1010	5/8
7	[0,1,1,1]	[0,1,2,1]	0.0010	1/8
8	[1,0,0,0]	[1,1,0,2]	0.1011	11/16
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

透過建立不同維度的生成矩陣，即可在底數皆為 2 但彼此之間錯開的序列，實現將樣本平均分配於空間中。且因著所有的維度皆是以 2 為底產生的序列，在生產上是非常快速。生成矩陣也可以無限遞迴生成的情況下，Sobol 序列所能生成的樣本數可以說是無限的，也因著矩陣可以快速且生成不受維度上的限制，因此與 Halton 不同的是，Sobol 序列即使在高維度仍然可以保持非常好的低差異性。

3.3 替代模型

於第二章中已針對常見的替代模型進行初步的探討，並決定使用 Kriging 模型作為主要使用的 Kriging 模型。在這節中本研究首先介紹 Kriging 模型的原理和特性，和可以在操作上搭配使用的 EGO，以及用於評估替代模型擬合準確度的評估指標。由於擬合 Kriging 模型和 EGO 的流程建立及程式開發並不是本研究的主要貢獻和重心，在本節僅會針對其性質作介紹，詳細的數學推導和證明可以參考 [88,91,110–112]。

3.3.1 Kriging 模型

Kriging 模型最原始的概念來自南非礦冶工程師 Krige 對於礦脈分佈的研究方法，後來由法國數學家 Matheron 根據 Krige 研究，所提出一套作為地理統計學的預測理論。簡單而言，Kriging 模型的主要內容在探討如何於有限的觀察數據下，建立一個在特定範圍內某種自然現象變異程度的預測模型。如文獻回顧提到的，Kriging 模型在 1980 年代末期開始被應用到電腦實驗模擬，作為一種建立反應區面或迴歸模型的工具。根據 [110]，在一般的 DACE 中與地理統計學對於 Kriging 模型的使用上的不同在於前者所使用的參

數預測方法為最大似然預測 (Maximum Likelihood Estimate) 而後者所使用的為變異圖分析 (Variogram)。本研究所使用的 Kriging 模型會延續 [110]，以地理統計學的角度來講解 Kriging 模型的基本概念。

Kriging 模型的基本概念為根據所有的量測點 (Samples) 來預測未經量測點的值。設由 n_s 個樣本所得到的量測值以一個向量表示為 g_α ，對預測點 x 的預測值為 $\hat{g}(x)$ ，則在 Kriging 模型中 $\hat{g}(x)$ 會是所有量測點之結果的線性組合：

$$\hat{g}(x) = \sum_{\alpha=1}^{n_s} \lambda_\alpha(x) g_\alpha \quad (3.13)$$

然而，及使在相同的位置，重複的量測此現象所得到的量測值往往會是一個隨機函數而不是同一個量值，稱之為序率歷程 (Stochastic Process)，而如果此序率函數是一個高斯分佈，則可說這個量值在空間中的不同位置是一個高斯歷程 (Gaussian Process)，如圖3.5 [110] 所示。

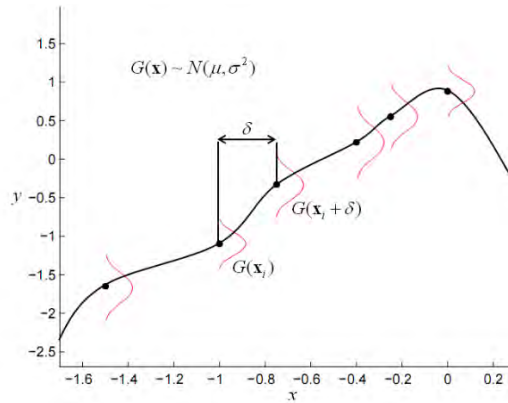


圖 3.5: 高斯歷程示意圖 [110]

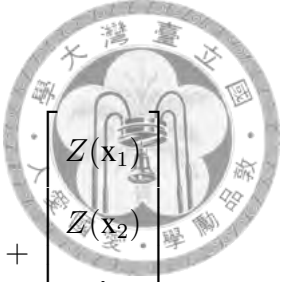
因此，針對一個高斯歷程的函數 $G(x)$ ，可將其分解為定率 (Deterministic) 與序率 (Stochastic) 的兩個部份，分別可理解為一分佈的平均值及機率分佈，如式3.14所示。其中， $y_j(x)$ 為迴歸函數， β_j 為迴歸係數，而序率部份的 $Z(x)$ 表示偏差值 (Departure)，是一個平均值為 0、標準差為 σ_z 的高斯分佈。Kriging 理論中認為，一個序率歷程中的兩個不同位置之間差值的關係，會與兩者之間的距離有關，也就是說，若量測點距離預測點位置越遠，預測的信心水準越低。

$$G(x) = \sum_{j=1}^k \beta_j y_j(x) + Z(x) = \mathbf{y}(x)^T \boldsymbol{\beta} + Z(x) \quad (3.14)$$

$$\mathbf{y}(x) = [y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)]^T$$

$$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k]^T$$

將 n_s 個樣本點 $\{x_\alpha : \alpha = 1, \dots, n_s\}$ 及所得到的量測值 $\{g_\alpha : \alpha = 1, \dots, n_s\}$ 分別代入式3.14中，得到以下式：



$$\mathbf{g}_\alpha = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n_s} \end{bmatrix}_{n_s \times 1} = \begin{bmatrix} y_1(\mathbf{x}_1) & y_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & y_k(\mathbf{x}_1) \\ y_1(\mathbf{x}_2) & y_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & y_k(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(\mathbf{x}_{n_s}) & y_2(\mathbf{x}_{n_s}) & \cdots & y_k(\mathbf{x}_{n_s}) \end{bmatrix}_{n_s \times k} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}_{k \times 1} + \begin{bmatrix} Z(\mathbf{x}_1) \\ Z(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ Z(\mathbf{x}_{n_s}) \end{bmatrix}_{n_s \times 1}$$

$$= \mathbf{y}_\alpha \boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z} \quad (3.15)$$

根據式3.13，Kriging 模型式樣本點量測值的線性組合，稱之為 Kriging Estimator，如式所示：

$$\begin{aligned} \hat{g}(\mathbf{x}) &= \sum_{\alpha=1}^{n_s} \lambda_\alpha(\mathbf{x}) g_\alpha \\ &= \boldsymbol{\lambda}_\alpha(\mathbf{x})^T \mathbf{g}_\alpha \\ &= \boldsymbol{\lambda}_\alpha(\mathbf{x})^T \mathbf{y}_\alpha \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\lambda}_\alpha(\mathbf{x})^T \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (3.16)$$

雖然 \mathbf{Z} 多半為未知，然而考量到 \mathbf{Z} 具有白噪音的特性，因此忽略序率項，得到以下化簡：

$$g(\mathbf{x}) \approx \hat{g}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{n_s} \lambda_\alpha(\mathbf{x}) g_\alpha \quad (3.17)$$

接著要決定在線性疊加過程中每個樣本對於預測點的權重 λ_α 。從 Kriging 的概念中可以知道，在空間中所有的樣本點都會對於預測點的量值產生影響，且距離樣本點越近則影響的比例越高，預測的準確度也較高，變異數較小，因此可得知在進行預測時的存在一個與兩點之間距離有關係的變數。在此，先定義兩個隨機函數 $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \forall i \neq j$ 的共變異數，可表示為：

$$\text{Cov}(Z(\mathbf{x}_i), Z(\mathbf{x}_j)) = \sigma_Z^2 R(h_{ij}) \quad (3.18)$$

其中 $R(h_{ij})$ 為取樣與取樣之間的空間相關函數矩陣，大小為 $n_s \times n_s$ ， $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ 為取樣與預測位置的空間相關矩陣函數：

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{bmatrix} R(h_{11}) & R(h_{12}) & \cdots & R(h_{1n_s}) \\ R(h_{21}) & R(h_{22}) & \cdots & R(h_{2n_s}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(h_{n_s 1}) & R(h_{n_s 2}) & \cdots & R(h_{n_s n_s}) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}) & R(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}) & \cdots & R(\mathbf{x}_{n_s}, \mathbf{x}) \end{bmatrix}^T \quad (3.20)$$

接下來，需要最小化均方誤差，將 Kriging Estimator 與真實函數之間的均方誤差列

出，如下：

$$E[(\hat{g} - g)^2] = E[\lambda_\alpha^T(\mathbf{x})\mathbf{g}_\alpha - g(\mathbf{x})]^2 = \sigma_Z^2(\lambda_\alpha(\mathbf{x})^T \mathbf{R}_\alpha \lambda_\alpha(\mathbf{x}) + 1 - 2\lambda_\alpha(\mathbf{x})^T \mathbf{r}(\mathbf{x})) = \hat{\sigma}_g(\mathbf{x}) \quad (3.21)$$

至此，我們已經擁有 Kriging 模型的推估變異數一般式，如式3.21，此一般式代表 Kriging 模型與實際函數的方均誤差，因此，接下來要以無偏差估測作為約束條件，使其方均誤差最小。將此步驟寫成一般最佳化形式，並用 Lagrange Multipliers 求解：

$$\begin{aligned} \min_{\lambda_\alpha(\mathbf{x})} \quad & \sigma_Z^2(\lambda_\alpha(\mathbf{x})^T \mathbf{R}_\alpha \lambda_\alpha(\mathbf{x}) + 1 - 2\lambda_\alpha(\mathbf{x})^T \mathbf{r}(\mathbf{x})) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{y}_\alpha^T \lambda_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{y}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

最後，可以得到最終的 Kriging 模型：

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = \lambda_\alpha^*(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (3.23)$$

對於 Kriging 模型而言，不同的共變異數方程式將會產生截然不同的 Kriging 模型，因此決定此方程式是一件重要的事，也是 Kriging 模型進行「擬合」(Fitting) 的關鍵所在。詳細使用不同方法進行 Kriging 模型的擬合和綜合比較可以參考 [91, 110, 111]；本研究所使用的 Kriging 模型為基於變意圖分析作為擬合演算法的 Kriging 模型。

3.3.2 EGO 演算法 (Efficient Global Optimization)

本研究採用 EGO 演算法中的取樣指標 (Infill Sampling Criterion, ISC) 作為強化 Kriging 模型擬合品質的方法。Efficient Global Optimization 簡稱 EGO，是一種使用 Kriging 模型作為替代模型的演算法。用來更新替代模型來得知全域最佳解 (Global Optimum)。此方法最早由 Jones 等人於 1998 所提出 [113]，而後被發展至許多最佳化的混合形問題中。在這個流程中，EGO 在每一次的迭代時，會由演算法自替代模型所組成的函數中決定下一個取樣位置，以更新現有的替代模型，使替代模型更能接近系統原貌。

取樣指標所指的是 EGO 演算法中用來決定下一個取樣位置的方法，其決定的方式就是根據某種取樣指標函數進行最佳化，依照不同目的所撰寫的取樣指標，會使演算法選取截然不同的取樣位置，最早使用的取樣指標可參考 [114]。本研究所使用的取樣指標為 Kriging 模型的預測值變異數 [115]，也就是 $\hat{\sigma}_g(\mathbf{x})$ 。當一個需要被預測的樣本位置被輸入至 Kriging 模型時，Kriging 模型不只會對該樣本進行輸出量值的預測，同時也因著 Kriging 模型本身所具備的高斯歷程的特性，計算出對該點輸出量值預測的變異數，也可以理解為信心程度。當預測的變異數越大，表示對預測結果越缺乏信心。因此，本研究採用的 ISC 即是透過搜尋 Kriging 模型中對預測最缺乏信心的位置作為下一個取樣位置 [116]，使模型能夠過最有效率的方式尋找取樣位置。本研究操作 EGO 流程如圖3.7

以一個一維的 Sine 函數當作例子，圖3.7中 (a) 至 (f) 分別是 EGO 經過六次迭代所形成的擬合模型及每個位置所對應到的變異數，上方圖為經由 Kriging 模型的預測，下

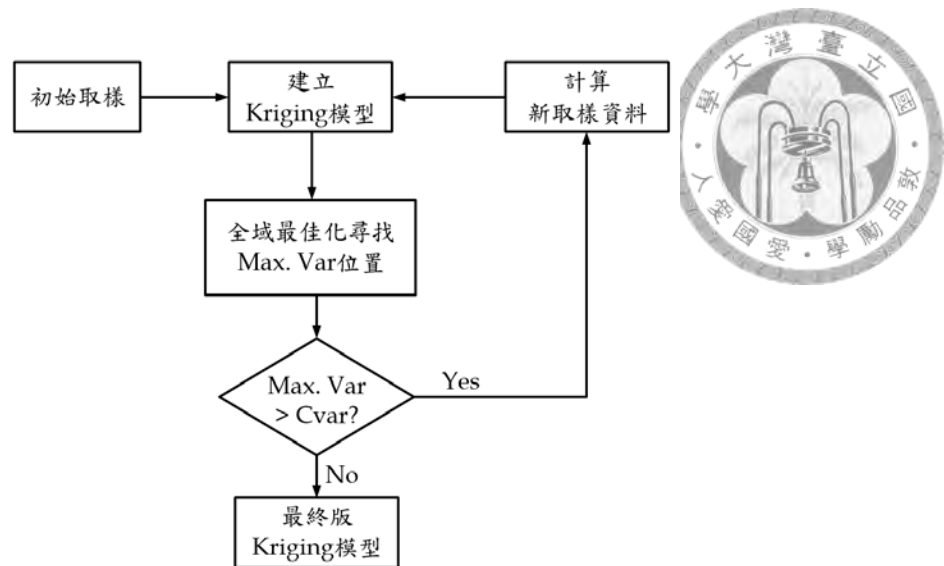


圖 3.6: 以最大標準差為取樣指標之 EGO 流程圖

方圖為各個位置變異數大小。圖中星號為 EGO 演算法所推薦的取樣指標位置，而下一個步驟的 Kriging 模型則是在加入取樣指標於 Kriging 模型的擬合後所呈現的 Kriging 模型。

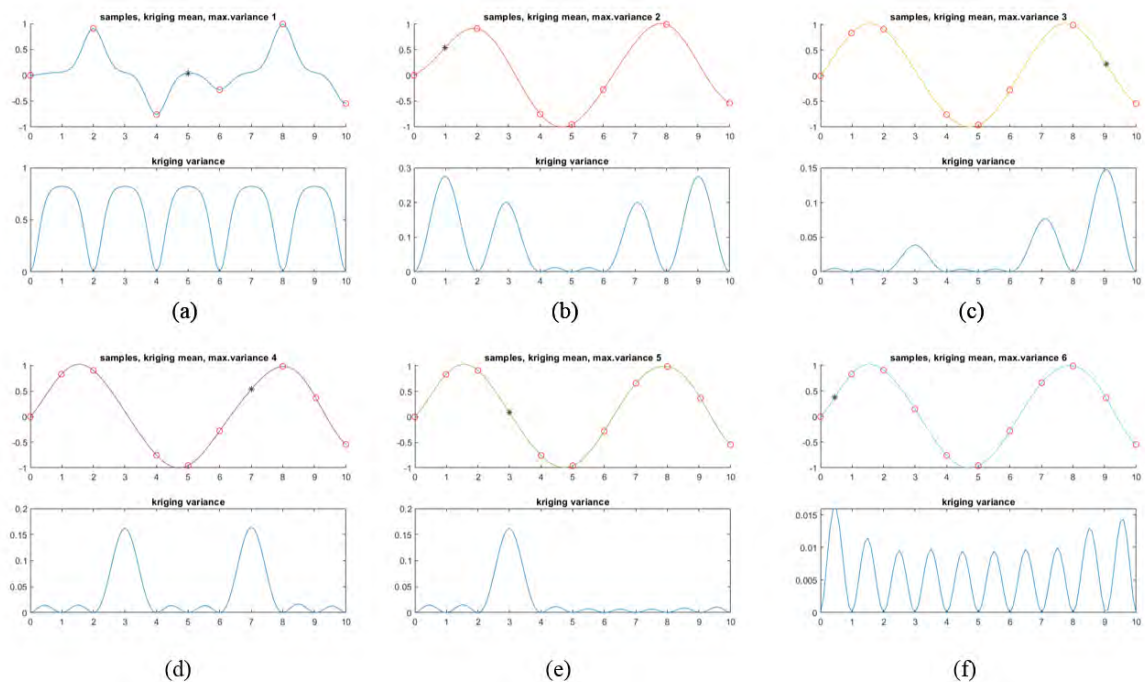


圖 3.7: 以一維模型為 EGO 操作範例

面對取樣成本高的複雜系統，本研究認為 EGO 能夠有效率的決定取樣位置使 Kriging 模型可以最快速達成所需要的模型準確度，也是替代模型中相當重要的方法。在後續章節的案例中會透過方法在操作上的細節進行比較及討論。



3.3.3 模型擬合度評估指標

在使用替代模型進行預測前，需要先了解是否能夠確實表達模型輸出的狀況。因此，模型的準確度評估是非常重要的程序。在使用模型前需對其準確度進行驗證，其目的有二：

- 對於替代模型所預測的資料能保有模糊性，在合理範圍內進行解釋
- 對替代模型的擬合參數例如收斂標準、初始取樣次數進行調整，使擬合更有效率

因此，本研究針對替代模型的準確度擬合歸納出三種準確度評估指標，包括一種定性評估及兩種定量評估 [71]。

• 交叉驗證 (Cross Validation)

在本研究中，交叉驗證是一種對模型準確度的定性觀察，透過交叉驗證可以看到針對驗證資料的預測誤差分佈及誤差百分比分佈。交叉驗證流程如下：

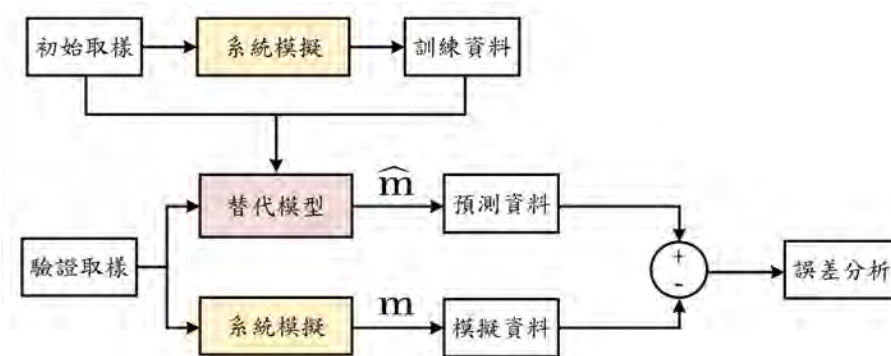


圖 3.8: 交叉比對流程圖

1. 將初始取樣透過模擬模型計算後，得到訓練資料。擬合初始取樣與訓練資料，得到對應的替代模型
2. 另外生成一批不同的取樣，做為驗證取樣。分別以模擬模型計算得到模擬資料，及以替代模型得到預測資料
3. 計算兩筆資料的誤差及相對於模擬資料的誤差百分比，得到誤差分佈及誤差分佈百分比

透過交叉比對，可以清楚呈現兩筆資料的誤差分佈，或針對誤差分佈計算其誤差平均值及誤差標準差，但較不能做為單一指標評估模型擬合的準確度。

• 決定係數 (Coefficient of Determination)

決定係數，通常以 R^2 表示。其表示方式如下：

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N_t} (m_i - \hat{m}_i)^2}{\sum_{i=1}^{N_t} (m_i - \bar{m})^2} = 1 - \frac{SS_{\text{res}}}{SS_{\text{tot}}} \quad (3.24)$$

其中， N_t 為驗證集的樣本總數， \bar{m} 為模擬資料的平均值。對於簡單線性迴歸而言，決定係數為樣本相關係數的平方。當加入其他迴歸自變量後，決定係數相應地變為多重相關係數的平方。分母項為模擬資料與其平均值的誤差總和，稱為「總離均差平方和」(Total Sum of Squares)，即為「總變異量」(Total Variation)；分子項為每個預測誤差項的平方總和，稱作「殘差值離均差平方和」(Residual Sum of Squares)，又稱作「未被解釋到的變異量」(Unexplained Variation)。因此， R^2 在統計上的意義為「在應變項 m 的總變異量中，能被自變項 (參數的偏差) 所解釋到的變異量百分比。」[117]，對於越好的迴歸模型而言， R^2 會越接近 1，反之則會越接近 0。

• **相對平均絕對誤差 (Relative Average Absolute Error)**

相對平均絕對誤差，標記為 $RAAE$ ，可由下列公式計算 [71,92]：

$$RAAE_S = \frac{\sum_{i=1}^{N_t} |m_i - \hat{m}_i|}{\sqrt{N_t \sum_{i=1}^{N_t} (m_i - \bar{m})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_t} |m_i - \hat{m}_i|}{N_t \times \sigma_{sim}} \quad (3.25)$$

其中 σ_{sim} 為模擬資料之間的標準差。 $RAAE$ 為模擬及預測之平均距離與模擬資料標準差的比。當 $RAAE$ 越小，表示替代模型越精準；反之則相反。

然而，雖然 R^2 及 $RAAE$ 在模擬模型及機器學習領域已經被廣泛使用 [92,118]，卻無法從指標的大小直接的判定該模型是否達到所需的「準確」標準，在使用上仍然應用在比較不同的模型或演算參數組合不同的情況下準確度的優劣。因此，考量本研究的探討的案例為工程上的使用，對模型準確度的要求並不需要非常精確，因此自行定義評估模型是否為可在工程中被使用時標準：

1. $R^2 > 0.95$ 且 $RAAE < 0.1$
2. 當 R^2 及 $RAAE$ 兩指標有明顯的收斂

3.4 全域敏感度分析

本研究主要分析目標為車輛系統，模型複雜度非常高，包含眾多系統參數及元件和次系統之間的資訊交換。為了在分析參數敏感度的同時，考慮參數耦合的影響。本研究使用全域敏感度分析方法，以量化車輛動態系統輸出對不確定模型參數的依賴性。Sobol 全域敏感度分析法是在工程領域被大量應用的全域敏感度方法。本節首先會介紹 Sobol 全域敏感度分析法的概念以及操作上的流程，後續再介紹本研究如何針對該方法進行流程上的調整。

3.4.1 Sobol 全域敏感度分析法

本研究採用 Sobol 敏感度分析法量化敏感度。Sobol 法透過對系統輸出的變異數進行歸因，可看出各項參數的主因素及參數之間的交互作用。這種透過類似變異數分析



(ANOVA) 的方法來分析全域敏感度的方法即可稱為變異數法。

Sobol 法首先將系統的總變異數 V 以式3.26的方式展開。其中， V_i 為第 i 個參數所貢獻的變異量，而 V_{i_1, i_2} 則為第 i_1 與 i_2 個參數的交互作用所貢獻的變異量，其他項則以此類推。

$$V = \left(\sum_{i=1}^k V_i \right) + \left(\sum_{i_1=1}^k \sum_{i_2=i_1+1}^k V_{i_1, i_2} \right) + \left(\sum \sum \sum V_{i_1, i_2, i_3} \right) \dots + (V_{1, \dots, k}) \quad (3.26)$$

而全域敏感度指標則被定義為所探討所貢獻的變異量佔有總變異量的比例，如式3.27所示：

$$S_{i_1 \dots i_s} = V_{i_1 \dots i_s} / V \quad (3.27)$$

若所探討的變異量僅為單一個參數 θ_i 的偏差所造成，則將其敏感度稱為「主效應指標 (Main Sensitivity Index, MSI)」，標記為 S_i ，而若變異量為多個參數的交互作用所造成，則稱之為交互作用效應指標 (Interaction Sensitivity Index, ISI)，標記為 $S_{i_1 \dots i_s} \forall s \geq 2$ ；在全域敏感度分析的應用中，更多探討的是所有與目標參數 θ_i 有相關的變量，稱之為 θ_i 的「總效應指標 (Total Sensitivity Index, TSI)」，如式3.28所示：

$$S_i^t = S_i + \hat{S}_{i, \sim i} = 1 - \hat{S}_{\sim i} = S_i + S_{ij} + S_{il} + \dots + S_{ilm \dots k} \quad (3.28)$$

其中 $\hat{S}_{i, \sim i}$ 為所有與 i 有關的指標 $S_{i_1 \dots i_s}$ 但不包含 S_i 之總和，而 $\hat{S}_{\sim i}$ 則為所有與 i 無關的效應指標之總和。

全域敏感度指標的解析解求法需要仰賴多維度的積分 [45]，或者將變異數的 ANOVA 展開以多個單一維度的張量積基底函數 (Tensor product basis function) 計算 [119]。雖然這些方法在使用上可以精準的計算出敏感度指標，但在複雜系統及電腦程式的應用上缺乏效率。針對此問題，Saltelli 及 Annoni 根據全域敏感度指標的定義，對 Sobol 敏感度分析方法進行改良 [49]，能更直接被應用在系統的模擬合實驗設計中，並輕易計算其主效應指標及總效應指標。

首先定義系統與輸入樣本的關係。將系統中的 l 個操作參數以 $x_1, \dots, x_j, \dots, x_l$ 表示，已知的非時變模型參數則以常數形式建立於模擬模型中，而 k 個不確定模型參數以 $\theta_1, \dots, \theta_i, \dots, \theta_k$ 表示。對於系統的單一輸出 m 而言可以表達為：

$$m = f(x_1, \dots, x_l; \theta_1, \dots, \theta_k) \quad (3.29)$$

k 個不確定模型參數 θ 在空間中會形成 k 維度的機率分佈空間，經由取樣後做為系統輸入，並輸出得到輸出 m 。多次對 θ 取樣 N 次後，將取得的樣本矩陣作為系統輸入樣本，並經由模擬生成一組輸出向量 \mathbf{m} ，如圖3.9所示。

計算全域敏感度指標的方法可分為以下步驟：

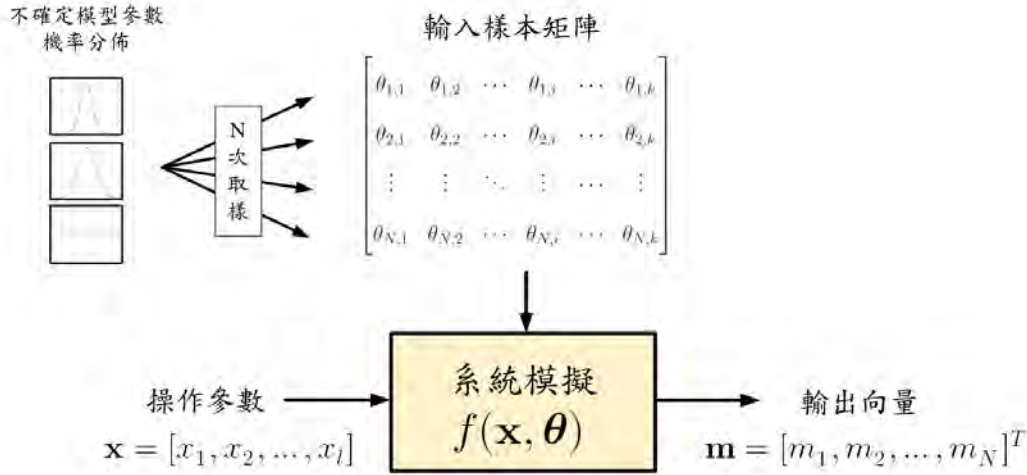


圖 3.9: 系統於不確定模型參數分析之輸入輸出關係示意圖

1. 建立兩個獨立的輸入樣本矩陣

假設系統的不確定模型參數有 k 個，在所有不確定模型參數所組成的設計空間中需取樣 N 次，首先，先建立一個維度為 $2k$ 的矩陣

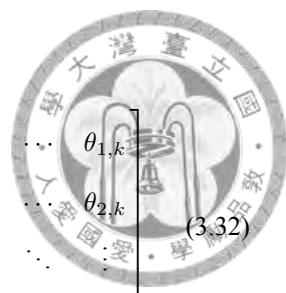
$$\text{Sample} = \begin{bmatrix} \theta_{1,1} & \cdots & \theta_{1,k} & \theta_{1,k+1} & \cdots & \theta_{1,2k} \\ \theta_{2,1} & \cdots & \theta_{2,k} & \theta_{2,k+1} & \cdots & \theta_{2,2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{N,1} & \cdots & \theta_{N,k} & \theta_{N,k+1} & \cdots & \theta_{N,2k} \end{bmatrix} = [\mathbf{P}, \mathbf{Q}] \quad (3.30)$$

將矩陣的前 k 欄取出，稱作 \mathbf{P} ，剩餘的 k 欄則稱為 \mathbf{Q} ，形成兩個獨立的輸入樣本矩陣。

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \cdots & \mathbf{P}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{1,1} & \cdots & \theta_{1,k} \\ \theta_{2,1} & \cdots & \theta_{2,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{N,1} & \cdots & \theta_{N,k} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \cdots & \mathbf{Q}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{1,k+1} & \cdots & \theta_{1,2k} \\ \theta_{2,k+1} & \cdots & \theta_{2,2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{N,k+1} & \cdots & \theta_{N,2k} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

2. 建立單一變量的輸入樣本矩陣

單一變量的輸入樣本矩陣 \mathbf{R}^i 由 \mathbf{P} 和 \mathbf{Q} 衍生出來。在第 i 個輸入樣本矩陣中 ($1 \leq i \leq k$)，第 i 欄的元素等同於樣本矩陣 \mathbf{Q} 的第 i 欄，而其餘欄的元素則與樣本矩陣 \mathbf{P} 的同位置元素相同。如下式所示。



$$\mathbf{R}^i = [\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{Q}_i, \dots, \mathbf{P}_k] = \begin{bmatrix} \theta_{1,1} & \cdots & \theta_{1,i-1} & \theta_{1,i+k} & \theta_{1,i+1} & \cdots & \theta_{1,k} \\ \theta_{2,1} & \cdots & \theta_{2,i-1} & \theta_{2,i+k} & \theta_{2,i+1} & \cdots & \theta_{2,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{N,1} & \cdots & \theta_{N,i-1} & \theta_{N,i+k} & \theta_{N,i+1} & \cdots & \theta_{N,k} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

3. 主效應指標計算

主效應指標考慮直接與變數 θ_i 有關的影響，分母為計算輸出的總變異量，分子為 θ_i 直接造成的系統的變異數。總變異數及主效應指標計算方式如下：

$$var(f) = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N (f(\mathbf{x}, \mathbf{P}_u))^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{u=1}^N f(\mathbf{x}, \mathbf{P}_u) \right)^2 \quad (3.33)$$

$$S_i = \frac{var(E(f|\theta_i))}{var(f)} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{u=1}^N f(\mathbf{x}, \mathbf{Q}_u)(f(\mathbf{x}, \mathbf{R}_u^i) - f(\mathbf{x}, \mathbf{P}_u))}{\frac{1}{N} \sum_{u=1}^N (f(\mathbf{x}, \mathbf{P}_u))^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{u=1}^N f(\mathbf{x}, \mathbf{P}_u) \right)^2} \quad (3.34)$$

4. 總效應指標計算

總效應指標考慮所有與變數 θ_i 有關的影響，分母同樣為總變異量，而分子為計算當除了 θ_i 以外的所有參數都固定時的變異數期望值。排除 θ_i 的變異數期望值及總效應指標的計算如下：

$$var(E(f|\theta_{\sim i})) = \frac{1}{2N} \sum_{u=1}^N (f(\mathbf{x}, \mathbf{P}_u) - (\mathbf{x}, \mathbf{R}_u^i))^2 \quad (3.35)$$

$$S_i^t = \frac{var(E(f|\theta_{\sim i}))}{var(f)} = \frac{\frac{1}{2N} \sum_{u=1}^N (f(\mathbf{x}, \mathbf{P}_u) - (\mathbf{x}, \mathbf{R}_u^i))^2}{\frac{1}{N} \sum_{u=1}^N (f(\mathbf{x}, \mathbf{P}_u))^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{u=1}^N f(\mathbf{x}, \mathbf{P}_u) \right)^2} \quad (3.36)$$

由上述步驟，即可計算出不確定模型參數的主效應指標 S_i 及總效應指標 S_i^t 。

3.4.2 基於替代模型之全域敏感度分析方法

前章節介紹了如何透過取樣和對其輸出進行分析，進而計算全域敏感度指標。然而，正如 [49] 所言，本研究在測試方法時也面臨到同樣的問題：當隨機取樣次數過少時，敏感度指標也無法收斂在同一個值，而會隨機變動。在使用像 Sobol 法這類的變異數法計算全域敏感度指標時，就算使用低差異取樣方法進行取樣可減少輸入樣本數，敏感度指標依然需要在樣本數到非常大的狀態下才會出現較明顯的收斂。考量到所分析的對象多為複雜系統，單一次模擬所需的時間成本可能非常大，在大量計算的成本非常高 [71, 119]，因此應用 DACE 的流程，對於單一輸出模型而言，在計算全域敏感度指

標前先以替代模型取代原複雜系統。有了替代模型後，在使用 Sobol 敏感度分析法時即可使用取樣次數較大的輸入樣本矩陣計算敏感度指標，可以大幅度的減少計算成本。這種透過替代模型計算全域敏感度的方法則被稱為「基於替代模型之全域敏感度方法 (Metamodel-based Global Sensitivity Analysis)」，其步驟如圖3.10及下方所描述：

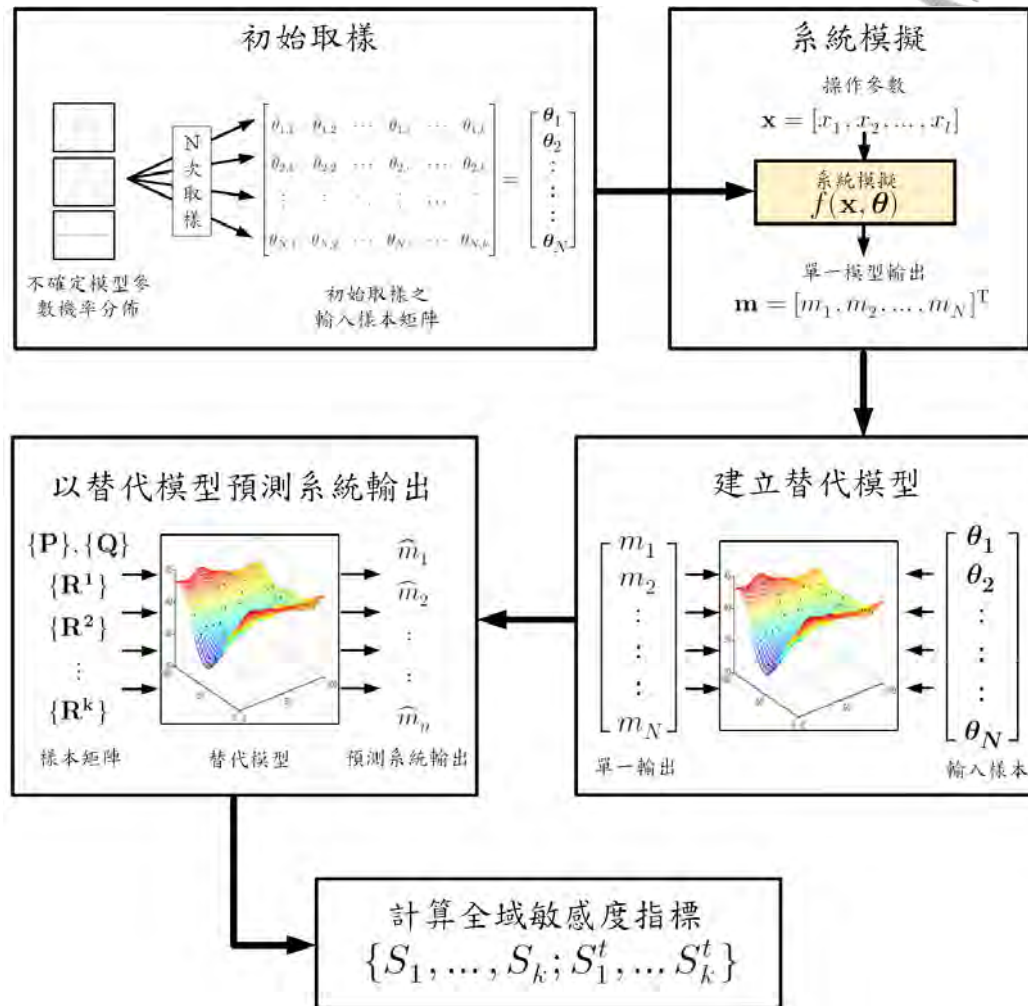


圖 3.10: 基於替代模型之單一輸出模型全域敏感度分析流程圖

1. 建立初始取樣

初始取樣為選取用以擬合成替代模型的輸入樣本。為了使取樣可以更均勻散佈在整個由不確定模型參數所構成的設計空間中，建議使用低差異取樣方法進行輸入樣本矩陣的建立，本研究即使用 Sobol 序列完成此步驟。根據 [119]，在模擬時間許可的情況下，建立替代模型所需要的初始取樣數量至少為不確定模型參數或變量的 10 倍至 100 倍。

2. 系統模擬

將初始取樣之樣本依序代入模擬模型中進行模擬，將所有初始取樣經模擬後所得的單一模型輸出匯整為單一維度的向量。



3. 建立替代模型

以初始取樣之樣本矩陣作為輸入，單一模型輸出向量為輸出，將兩筆資料擬合成替代模型，用以連結輸入與輸出關係，在後續的步驟中可以直接替換掉模擬模型。本研究所使用的替代模型方法為前節所敘述的 Kriging 模型，並搭配 EGO 進行最佳取樣點的決定，在後續案例探討中會進一步討論使用上的細節和參數的調整。

4. 預測系統輸出

由於複雜系統的模擬模型已由替代模型所取代，因此對於透過數值模型經由內插所得到的值，在計算上相對快速許多。為了獲得較有可信度的全域敏感度指標，可使用低差異取樣建立取樣次數大的獨立樣本矩陣。依序將所建立的獨立樣本矩陣 \mathbf{P} 、 \mathbf{Q} 、及 \mathbf{R}^i 作為輸入，透過替代模型預測對應的輸出 $\hat{\mathbf{m}}$ 。

5. 計算全域敏感度指標

當模型得到與 \mathbf{P} 、 \mathbf{Q} 、及 \mathbf{R}^i 樣本矩陣所對應的模型輸出後，即可用前小節所提到的方法計算主效應指標及總效應指標，完成全域敏感度分析。

在全域敏感度分析中加入替代模型確實的提升了計算上的效率。然而，本小節所介紹的流程僅能應用在當模型的輸出為單一純量，無法將同樣的流程應用於輸出為時間函數的動態系統中。因此，後續小節首先介紹如何將動態輸出以主成分分析轉為以具有代表性的單一數值表示，並整合主成分分析及替代模型於全域敏感度分析流程中，提出一套適用於複雜動態系統的全域敏感度分析方法。

3.4.3 主成分分析

主成分分析 (Principle Component Analysis, PCA) 的概念最早由 Karl Pearson 於 1901 年所提出 [120]，後續在不同領域被以不同方式命名，是一種用來簡化數據、重組數據的方法，利用正交變換 (Orthogonal Transformations) 對一系列可能相關的變數觀測值進行線性變化，將其投影成一系列正交 (互不相關) 的值。而這些不相關的變數稱為主成分 (Principle Components)。資料經過主成分分析之後，可以將資料以主成分的線性疊加重組。舉例而言，假設一次輸出資料 $y(t)$ ，經由主成分分析分離主因素後重組為 $y^{\text{re}}(t)$ ，可表示為：

$$y^{\text{re}}(t) = \sum_i^{\text{dc}} C_i \phi_i(t) \cong y(t) \quad (3.37)$$

其中 C_i 是 $y^{\text{re}}(t)$ 中各項主成分的係數，在此稱為重要係數。

在信號處理的領域中，實現主成分分析的方法稱為離散 K-L 轉換 (discrete Karhunen-Loève transform, KLT) [121]。該方法透過對共變異數矩陣 (Covariance Matrix) 進行特徵分解，以其特徵向量為主成分，特徵值作為對應主成分的權重，即重要係數。這樣的結果可以理解為對原數據中的變異數作出解釋，可以探討數值的主成分影響變異的程度有多大。而主成分分析的另一個特性是可以透過僅記錄有限數量的特徵值及對應的特徵向量，有效的降低數據的維度 [98,99]。

K-L 轉換的步驟說明如下：



圖 3.11: 主成分分析流程圖

1. 資料前處理

設有一數學模型，輸入一組模型參數 θ_i 可得到輸出為一時間函數 $y_i(t)$ 。對時間函數資料進行離散化，假設對該筆資料輸出取出 l 個資料點，輸出資料可以表示為：

$$\mathbf{y}_i = [y_i(1), y_i(2), \dots, y_i(l)] \quad (3.38)$$

因此，若系統有 n 筆模擬參數，則 n 筆系統輸出資料可以以矩陣表示為：

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1(1) & y_1(2) & \cdots & y_1(l) \\ y_2(1) & y_2(2) & \cdots & y_2(l) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n(1) & y_n(2) & \cdots & y_n(l) \end{bmatrix}_{n \times l} \quad (3.39)$$

計算系統輸出的平均值

$$\bar{\mathbf{y}} = [\bar{y}(1), \bar{y}(2), \bar{y}(3), \dots, \bar{y}(l)]_{1 \times l} \quad (3.40)$$

將輸出資料 \mathbf{y} 的每一筆輸出資料減去 $\bar{\mathbf{y}}$ ，處理後的資料為：

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Y}} &= \begin{bmatrix} y_1(1) - \bar{y}(1) & y_1(2) - \bar{y}(2) & \cdots & y_1(l) - \bar{y}(l) \\ y_2(1) - \bar{y}(1) & y_2(2) - \bar{y}(2) & \cdots & y_2(l) - \bar{y}(l) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n(1) - \bar{y}(1) & y_n(2) - \bar{y}(2) & \cdots & y_n(l) - \bar{y}(l) \end{bmatrix}_{n \times l} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1(1) & \tilde{y}_1(2) & \cdots & \tilde{y}_1(l) \\ \tilde{y}_2(1) & \tilde{y}_2(2) & \cdots & \tilde{y}_2(l) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{y}_n(1) & \tilde{y}_n(2) & \cdots & \tilde{y}_n(l) \end{bmatrix}_{n \times l} \\ &= [\tilde{\mathbf{y}}_1, \tilde{\mathbf{y}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_l]_{n \times l} \end{aligned} \quad (3.41)$$

2. 建立共變異矩陣

建立處理後資料 $\tilde{\mathbf{Y}}$ 的共變異矩陣 Cov ，其中 $\tilde{\mathbf{y}}_i$ 為 $\tilde{\mathbf{Y}}$ 的第 i 欄， $\mu_{\tilde{y}_i}$ 為 $\tilde{\mathbf{y}}_i$ 向量之平

均值。

$$Cov = \begin{bmatrix} E[(\tilde{\mathbf{y}}_1 - \mu_{\tilde{\mathbf{y}}_1})_{n \times 1}(\tilde{\mathbf{y}}_1 - \mu_{\tilde{\mathbf{y}}_1})_{n \times 1}] & \cdots & E[(\tilde{\mathbf{y}}_1 - \mu_{\tilde{\mathbf{y}}_1})_{n \times 1}(\tilde{\mathbf{y}}_l - \mu_{\tilde{\mathbf{y}}_l})_{n \times 1}] \\ E[(\tilde{\mathbf{y}}_2 - \mu_{\tilde{\mathbf{y}}_2})_{n \times 1}(\tilde{\mathbf{y}}_1 - \mu_{\tilde{\mathbf{y}}_1})_{n \times 1}] & \cdots & E[(\tilde{\mathbf{y}}_2 - \mu_{\tilde{\mathbf{y}}_2})_{n \times 1}(\tilde{\mathbf{y}}_l - \mu_{\tilde{\mathbf{y}}_l})_{n \times 1}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(\tilde{\mathbf{y}}_l - \mu_{\tilde{\mathbf{y}}_l})_{n \times 1}(\tilde{\mathbf{y}}_1 - \mu_{\tilde{\mathbf{y}}_1})_{n \times 1}] & \cdots & E[(\tilde{\mathbf{y}}_l - \mu_{\tilde{\mathbf{y}}_l})_{n \times 1}(\tilde{\mathbf{y}}_l - \mu_{\tilde{\mathbf{y}}_l})_{n \times 1}] \end{bmatrix}_{l \times l} \quad (3.42)$$

求出共變異數之特徵值，由大至小排列，以及對應的特徵向量，可得到特徵值及特徵向量以矩陣形式排列：

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= [I_1, I_2, I_3, \dots, I_l]_{1 \times l} \\ \mathbf{B} &= [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_l]_{l \times l} \end{aligned} \quad (3.43)$$

3. 降低維度

降低維度是 K-L 轉換中一個非常重要的特性，主要從特徵值的大小來判斷維度的選取。在特徵值向量 \mathbf{I} 中，所有的特徵值都是由大至小排列。特徵值在這裡的意義可以作維表示特徵值對應到的資料的重要程度，意即特徵值越大，該特徵值對應到的特徵向量對資料的重組貢獻越多，反之，若特徵向量越小，則表示該特徵向量對原資料點影響不大，在特定條件下可被忽略。這也是降低維度的關鍵所在。假設我們想要保留原本資料的 99.9% 的資料，則只要在特徵值向量 \mathbf{I} 中選擇前 de 組特徵值使其總合超過所有特徵值總合的 99.9%，則 de 可稱為 K-L 轉換在保留 99.9% 資料特徵下的維度，即：

$$\frac{\sum_{j=1}^{de} I_j}{\sum_{j=1}^l I_j} > \Theta = 99.9\% \quad (3.44)$$

由上式所求得的 de，可做為將 K-L 重組式截斷 (Truncate) 的臨界值，因此將 de 稱為截斷數 (Truncation number)。

4. K-L 重組

K-L 重組是建立在共變異數矩陣的特徵值和特徵向量上。由於特徵向量即表示組成資料的不同個互相正交的向量，也就是這些向量可以相疊加而不會互相影響，而對應到的特徵值就可以被視為是某一種權重。因此，處理後的系統輸出 \mathbf{y}_i 在經由 K-L 轉換後，可以下列方式被重組。

$$\mathbf{y}_i = \sum_{j=1}^l \sqrt{I_j} \mathbf{B}_j C_j = \sum_{j=1}^l C_j \phi_j + \bar{\mathbf{y}} \quad (3.45)$$

其中重要係數 C_j 的組成皆是來自原有資訊：

$$C_{i,k} = \frac{1}{\sqrt{I_i}} \sum_{i=k}^l Y_k \mathbf{B}_k \quad (3.46)$$

將前步驟所得到的截斷數 de 套用到 K-L 重組中降低維度，重組資料可以被表示為：

$$\mathbf{y}_i^{re} = \sum_{j=1}^{de} \sqrt{I_j} \mathbf{B}_j C_j + \bar{\mathbf{y}} \quad (3.47)$$

將降低維度後的資料展開後，即可得到重組後的數據：

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1^{re} &= \sqrt{I_1} \mathbf{B}_1 C_{1,1} + \sqrt{I_2} \mathbf{B}_2 C_{1,2} + \dots + \sqrt{I_{de}} \mathbf{B}_{de} C_{1,de} + \bar{\mathbf{y}} = C_{1,1} \phi_1 + C_{1,2} \phi_2 + \dots + C_{1,de} \phi_{de} + \bar{\mathbf{y}} \\ \mathbf{y}_2^{re} &= \sqrt{I_1} \mathbf{B}_1 C_{2,1} + \sqrt{I_2} \mathbf{B}_2 C_{2,2} + \dots + \sqrt{I_{de}} \mathbf{B}_{de} C_{2,de} + \bar{\mathbf{y}} = C_{2,1} \phi_1 + C_{2,2} \phi_2 + \dots + C_{2,de} \phi_{de} + \bar{\mathbf{y}} \\ &\vdots \\ \mathbf{y}_n^{re} &= \sqrt{I_1} \mathbf{B}_1 C_{n,1} + \sqrt{I_2} \mathbf{B}_2 C_{n,2} + \dots + \sqrt{I_{de}} \mathbf{B}_{de} C_{n,de} + \bar{\mathbf{y}} = C_{n,1} \phi_1 + C_{n,2} \phi_2 + \dots + C_{n,de} \phi_{de} + \bar{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (3.48)$$

透過 K-L 轉換對一筆資料進行主成分分析，可以將每一筆動態輸出轉為同一組基底函數的線性組合，而基底函數的係數 C_j 則為決定線性組合權重的關鍵。舉例說明 (以第五章案例為例)，假設動態系統的輸出資料透過主成分分析並降低維度後，可分離出 $de=5$ 個主成分 $\phi_1 \sim \phi_5$ ，如圖3.12所示。

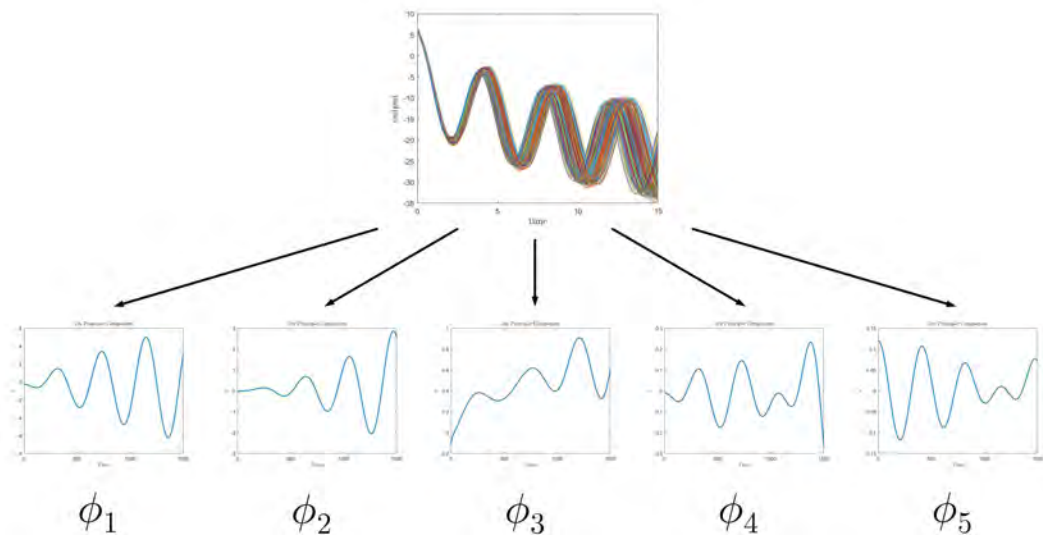


圖 3.12: 動態輸出資料之主因素分析

因此，對動態系統中的任意一筆資料，以式3.48重組，可以圖3.13為示意。其中，原始動態軌跡、重組動態軌跡、以及全體資料的平均動態軌跡分別如圖3.14所示。

3.4.4 基於替代模型之動態系統全域敏感度分析方法

在主成分分析當中，由於在資料處理階段就已經先將所有資料減去其平均，因此建立的共變異數矩陣可說是對每一筆資料的偏差所建立，而基底函數的意義也可以理解為將資料的變異量拆解為不同方向的變異向量。也因此，重要係數既然代表著基底函數的

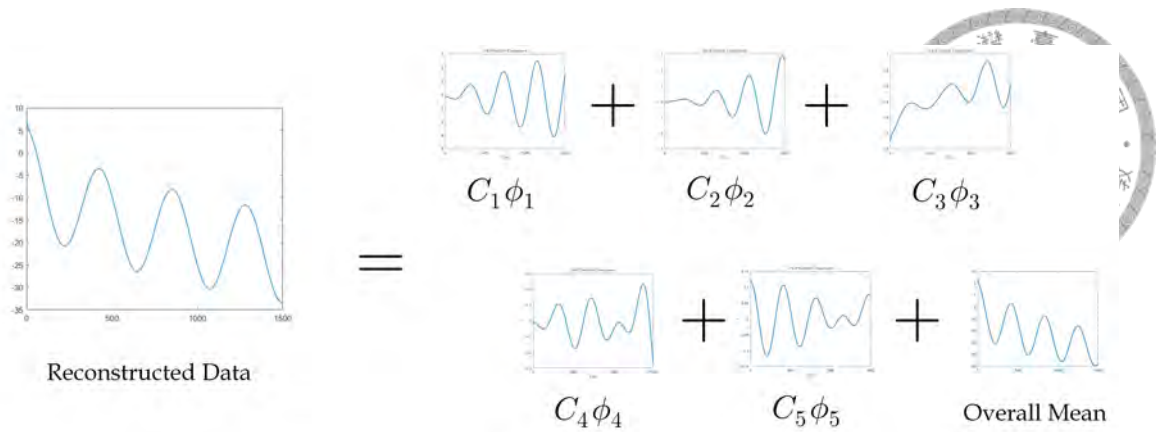


圖 3.13: 動態輸出軌跡以主成分分析重組示意圖

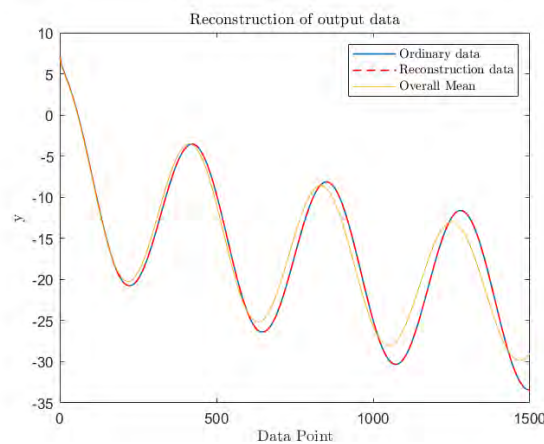


圖 3.14: 原始動態軌跡、重組動態軌跡、以及全體資料平均之比較

係數，也可以理解為對於變異向量的倍數或表示變異的大小。如此一來，重要係數即可被用來做為動態資料的量化指標，並用來計算全域敏感度指標。

儘管使用主成分分析於基於變異數之全域敏感度分析是被不少研究所使用的做法，大多數的研究並沒有針對取樣次數被限制的複雜系統進行討論，幾乎都忽略了取樣次數會如何敏感度指標的收斂性及取樣限制。同樣的，為解決複雜系統在模擬次數上的耗時問題，本研究根據 [58, 61] 所提出的方法進行調整，同樣將替代模型加入使用主成分分析的動態系統全域敏感度分析方法中，並暫時稱這套流程為「基於主成分分析之替代模型全域敏感度分析 (PCA-Metamodel Based Global Sensitivity Analysis)」。

在這個方法中，被作為敏感度分析的對象是 de 組重要係數 C ，因此在分析中每一組重要係數的敏感度分析都需要有非常多組重要係數參與。替代模型在此方法中所要替代的是初始樣本到產出重要係數的過程，因此應該會產出 de 個替代模型。詳細方法之操作流程如下：

1. 建立初始取樣

選取用以擬合成替代模型的 N 個初始取樣為輸入樣本，可使用低差異取樣方法進行輸入樣本矩陣的建立，本研究同樣使用 Sobol 序列完成此步驟。取樣次數約為

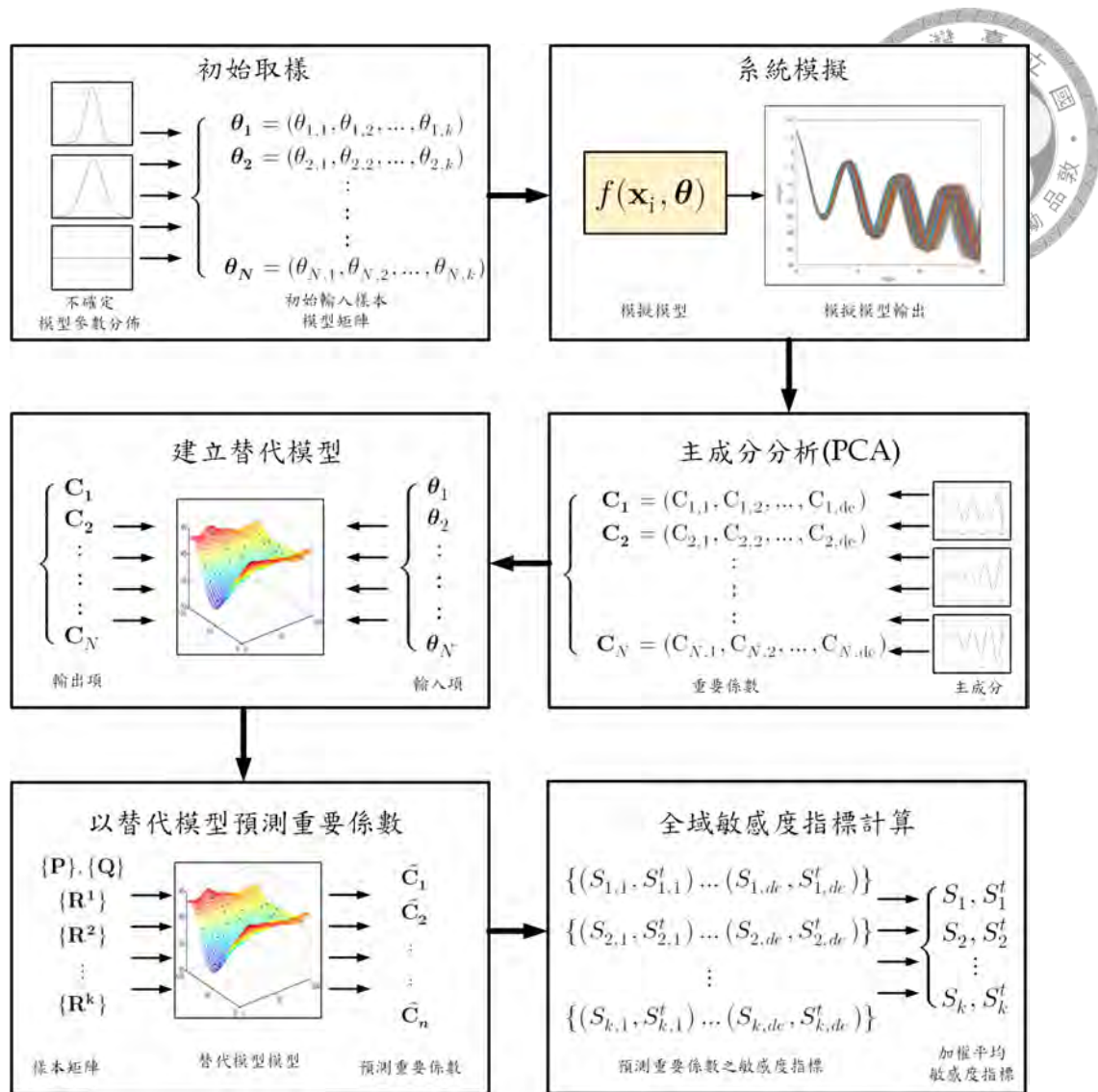


圖 3.15: 基於替代模型之動態輸出模型全域敏感度分析流程圖

不確定模型參數數量的 10 倍至 100 倍。

2. 系統模擬

將初始取樣之樣本依序代入模擬模型中進行模擬，得到多筆模型的動態模型輸出。

3. 主成分分析

將所有的動態輸出進行主成分分析，透過降階後，將每一筆資料轉換為重要係數 C_1, \dots, C_{de} 與主成分的線性組合。

4. 建立替代模型

取出所有模型的第 i 組 N 個重要係數 $\mathbf{C}_i = \{C_{1,i}, \dots, C_{N,i}\}, 1 \leq i \leq de$ 作為模型輸出，並以初始輸入樣本作為模型輸入，建立替代模型連結兩者。重複步驟直到針對 de 組重要係數都建立對應的替代模型。

5. 以替代模型預測重要係數



與單一輸出模型的全域敏感度分析方法相同，建立獨立樣本矩陣 P 、 Q 、及 R^i 。此時的複雜系統已經被 de 個替代模型所替代，因此在大量的樣本輸入下可以經由內插對重要係數進行預測。依序將所建立的獨立樣本矩陣 P 、 Q 、及 R^i 作為輸入，並透過替代模型得到重要係數的預測值。

6. 全域敏感度指標分析

將 de 組重要係數進行全域敏感度分析並得到 de 組主效應指標及總效應指標。若要將 de 組敏感度指標融合 (Fusion) 為一個單一指標，根據 [58]，可將每一組全域敏感度指標以對所對應的共變異矩陣之特徵值作為權重，計算其加權平均，即可得到單一組全域敏感度指標。

本研究在後續章節中，也會透過案例來驗證方法的可行性。確立了全域敏感度分析方法並可計算出系統對於不確定模型參數的主效應指標及總效應指標後，即可透過最佳化流程，找出最能激發不確定模型參數於模型中的影響。

3.5 最佳化操作參數

本研究的目的是為找出使參數偏差造成的變異可以最被放大的操作方式，若將其寫為最佳化的一般式，可表示為：

$$\begin{array}{ll} \text{Optimize} & \text{目標函數(操作參數, 模型參數)} \\ \text{w.r.t.} & \text{操作參數} \\ \text{s.t.} & \text{不確定模型參數分佈空間與模型可控範圍} \end{array} \quad (3.49)$$

本節將介紹在分析對象為複雜系統時，實現最佳化時的目標函數建立方式，以及最佳化方法的使用。

3.5.1 指標產生函數

根據研究目標，與目標函數有關聯的應為不確定模型參數的變異量，在本研究中為全域敏感度指標。因此，建立目標函數時需先建立最佳化的設計變數——系統的操作參數 x ——與全域敏感度指標的關係。圖3.16的上半部為從替代模型的建立到全域敏感度指標計算的流程。在不同的操作參數 x_j 輸入下，若在不確定模型參數的分佈空間、初始取樣的樣本矩陣、以及用於計算全域敏感度的樣本矩陣都不會改變條件下，計算出參數的全域敏感度指標，則可以將整個流程視為一個系統(圖3.16中藍色虛線內)，且系統的輸入(自變數)為系統的操作參數 x_j ，輸出(應變數)為系統中各個不確定模型參數的全域敏感度指標。因此，透過流程的整合，如圖3.16下半部，可以建立一個函數 F 來連結操作參數與敏感度指標的關係，在此稱之為「指標產生函數」(Indices Generator)，以利後續最佳化的執行。

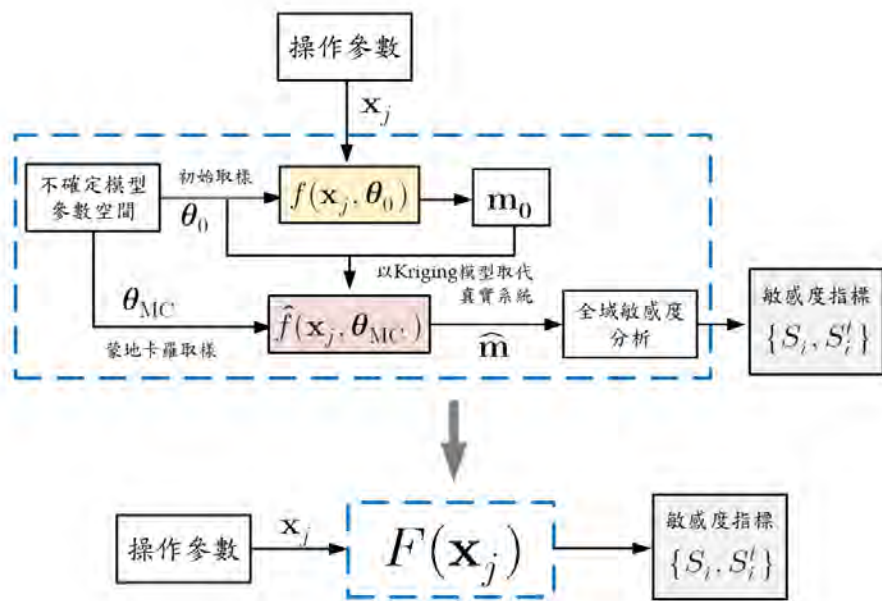


圖 3.16: 敏感度指標與操作參數之關係

考量到從建立模擬模型到計算全域敏感度指標的流程非常的複雜且可能具有高度非線性，且計算成本非常大。因此，可以透過替代模型對操作參數與敏感度指標進行擬合，可以較快速的建立操作參數與敏感度之間的連續數學模型，並透過替代模型進行最佳化。圖3.17為建立指標產生函數之替代模型的流程圖，步驟如下：

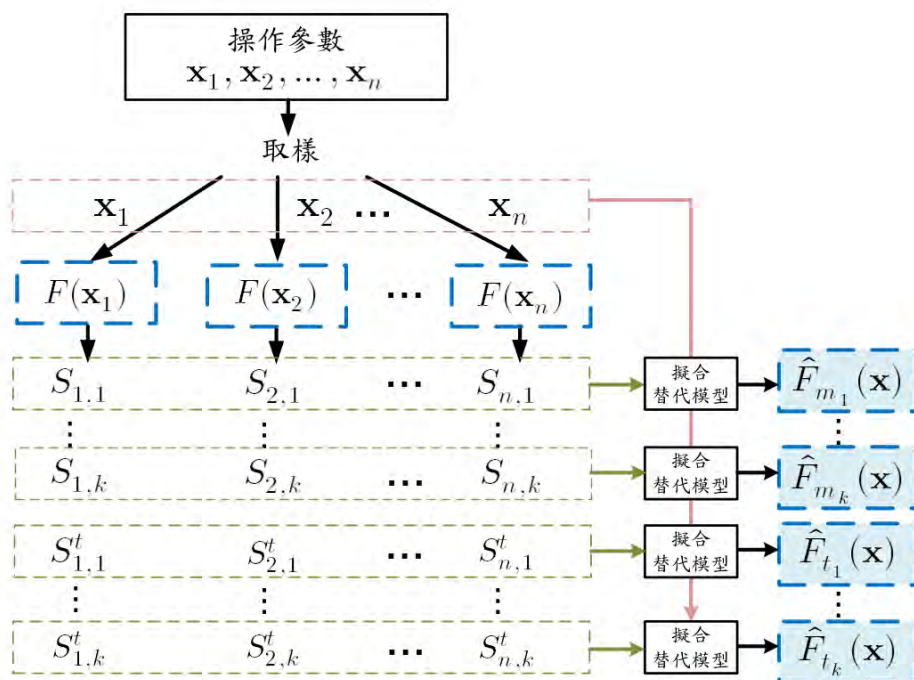


圖 3.17: 建立指標產生函數之替代模型



1. 建立模型操作參數之輸入樣本

將模型的操作參數進行參數化後，在模型的參數空間中取樣做為擬合替代模型的輸入。輸入樣本可以透過低差異取樣方法或者實驗設計來建立。

2. 計算全域敏感度指標

依序將每一個操作參數代入系統模擬模型中，在固定不確定模型參數的取樣下，計算每個不確定模型參數 θ_i 的全域敏感度指標 S_i, S_i^t 。

3. 建立指標產生函數之替代模型

分別將操作參數的輸入樣本矩陣與每一個全域敏感度指標擬合成替代模型。對 θ_i 而言，會建立可以預測主效應指標的替代模型 $\hat{F}_{m_i}(\mathbf{x})$ 及可以預測總效應指標的替代模型 $\hat{F}_{t_i}(\mathbf{x})$ 。若系統存在 k 個不確定模型參數，總共需建立 $2k$ 個由替代模型取代的指標產生函數。

3.5.2 目標函數

在本研究中，設計操作參數的目的有二：

- 最大化欲校準之不確定模型參數對模型輸出的變異量
- 最小化其他不確定模型參數對模型輸出的變異量影響

根據這兩項目標，在目標為突出單一不確定模型參數 θ_i 的不確定性，可以制訂目標函數 H_p 如下：

$$H_p(S_1 \dots S_k, S_1^t \dots S_k^t) = \frac{S_i^t - S_i}{S_i} + \frac{S_1 + \dots + S_k - S_i}{S_i} \quad (3.50)$$

透過最小化此目標函數，不僅達成了對目標參數的主因素凸顯，也盡可能的降低目標參數與其他模型參數的交互作用以及其他模型參數對系統的影響，以此降低參數之間的耦合性。

目標函數看起來雖然是敏感度指標 \mathbf{S} 及 \mathbf{S}^t 的函數，但在前小節介紹透過替代模型來預測各個敏感度指標，因此式3.50可以改寫為式3.51。如此一來，目標函數即可透過替代模型轉換為操作參數 \mathbf{x} 的函數。

$$\begin{aligned} H_p(S_1 \dots S_k, S_1^t \dots S_k^t) &= \frac{S_i^t - S_i}{S_i} + \frac{S_1 + \dots + S_k - S_i}{S_i} \\ &= \frac{\hat{F}_{t_i}(\mathbf{x}) - \hat{F}_{m_i}(\mathbf{x})}{\hat{F}_{m_i}(\mathbf{x})} + \frac{\hat{F}_{m_i}(\mathbf{x}) + \dots + \hat{F}_{m_k}(\mathbf{x}) - \hat{F}_{m_i}(\mathbf{x})}{\hat{F}_{m_i}(\mathbf{x})} \\ &= H_p(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.51)$$



3.5.3 最佳化演算法與流程

建立目標函式後，完整的最佳化一般式可以被精確的表達為：

$$\begin{aligned} \min \quad & H_p(\mathbf{S}, \mathbf{S}^t) = \frac{\hat{S}_i^t - \hat{S}_i}{\hat{S}_i} + \frac{\hat{S}_1 + \hat{S}_2 + \dots + \hat{S}_k - \hat{S}_i}{\hat{S}_i} \\ \text{w.r.t } \quad & \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \hat{S}_i = \hat{F}_{m_i}(\mathbf{x}), i = 1, \dots, k \\ & \hat{S}_i^t = \hat{F}_{t_i}(\mathbf{x}), i = 1, \dots, k \\ & \forall \{\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}\} \in \mathcal{F} \end{aligned} \quad (3.52)$$

其中 \mathcal{F} 為兩種參數的設計空間。

對於最佳化演算法的選擇而言，考量到對於替代模型模型的全貌並不了解，僅知道替代模型為一連續且平滑之曲面，因此並不適合使用以梯度下降為核心的局部最佳化演算法 (Local Optimization Algorithm) 以避免求解出局部最佳解 (Local Optimum)；本研究選擇的方法為全域最佳化演算法 (Global Optimization)，所搜尋的最佳解為演算法認定的全域最佳解，其特性為經由巨觀的搜尋後，在進入局部的最佳解搜尋時仍然會在搜尋區域外進行外部的探勘，以確保所選定的局部區域之外並無存在更好的解。類似的概念如基因演算法 (Genetic Algorithm, GA) [122]。然而，考量到基因演算法本身在計算時存在著非常大的隨機性，若需要有更精準的最佳化結果，則需要非常大數量的子代，使得每一次 GA 在迭代時的計算量是非常大量的。因此，本研究在全域最佳化演算法選擇以 DIRECT 演算法來執行。

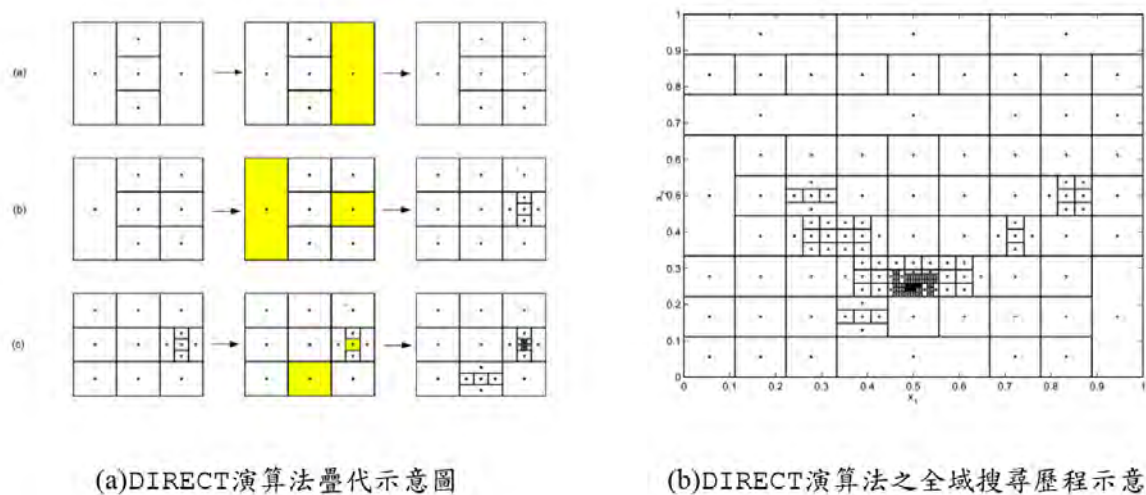


圖 3.18: DIRECT 演算法搜尋全域最佳解示意 [123]

DIRECT 演算法由 Jones 於 1993 年所提出 [124]，在後續的研究中也被證實在設計變數較少 (<20 個) 時，可以同時處理非線性、非平滑、及整數解等限制 [125]，且具有非常高的效率，在使用替代模型進行最佳化的工程問題中也頻繁的被使用 [91, 111]。詳

細操作方法可參考 [123]。簡單來說，DIRECT 演算法的一次迭代中，會將所選擇的區域切成五塊長方形，計算能代表該長方體中能代表局部的目標函數值，並選擇最小者做為下一次迭代時域分割的區域範圍，如圖 3.18(a) [123] 中，可看見搜尋區域 (上色區域) 除了在選定的區域內，也會選擇在前步驟未被選擇的區塊進行搜尋。在不斷選擇下一個切割區域時，DIRECT 演算法本身也存在另一個機制，有系統的在所選擇的局部區域外進行探索及比較目標函數值，以此方法搜尋全域最佳解，如圖 3.18(b) [123] 所示。

決定了目標函數的形式和演算法後，本研究的最佳化演算法流程如圖 3.19：

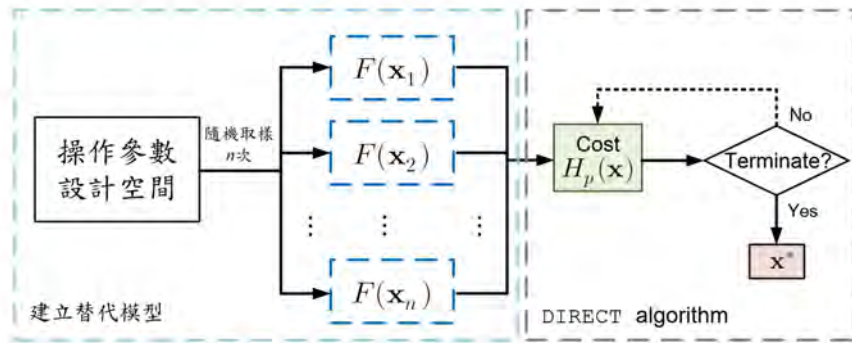


圖 3.19: 建立目標函數及最佳化流程圖

3.6 動態系統之參數校準

於文獻回顧中，本研究參考多種參數校準的方法後，選擇了使用卡爾曼濾波器進行參數的校準。這種參數校準方法同時可被應用於及時 (Online) 的參數校準和估測。使用卡爾曼濾波器校準參數的研究中，Blanchard [104] 所提出混沌多項式展開結合延伸形卡爾曼濾波器的研究，更是能有效的結合不確定因素分析、隨機程序的推估、以及參數校準於一身，因此本研究嘗試將此方法應用於車輛系統的參數校準中。本節將先各別介紹混沌多項式展開以及卡爾曼濾波器的原理及操作方法，最後在詳細介紹如何將兩者作結合應用。

3.6.1 混沌多項式展開

混沌多項式展開 (Polynomial Chaos Expansion, PCE) 是一種非常有效的基於隨機程序 (Stochastic Process) 的不確定性分析方法，能夠精確描述任意分佈形式的隨機變量之隨機性，可以被用來分析存在不確定模型參數之動態系統的不確定性 [126]。混沌多項式展開理論最早由 Wiener 於 1938 年所提出 [127]，運用 Hermite 正交多項式來表示當不確定模型參數為高斯分佈時的隨機歷程。現階段所使用的混沌多項式展開主要為 Xiu 及 Karniadakis 於 2002 年所提出來的廣義混沌多項式展開 (Generalized Polynomial Chaos Expansion) [128]，解決了 Wiener 的理論中不確定輸入僅能是高斯分佈的使用限制，而

是用利用不同類型的正交多項式基函數構建混合多項式，產生廣義的混沌多項式展開方法，大幅的增加應用性，例如流場、多體動力學等分析中 [129–131]。

混沌多項式展開之所以能夠被應用於具有隨機程序的動態系統中，是因為任何一個隨機變量的機率密度函數 (PDF) 為連續可積分時，則該隨機變量能夠表示成若干相互獨立的標準隨機變量的函數。這個特性在一階及二階系統中進行動態的計算和推估時非常有效率，使用多組正交多項式進行擬合對取樣的數量要求也遠小於許多常見的線性及非線性模型迴歸方法 [132]，而且能夠同時於系統的時域和頻域中進行不確定因素的量化。

在混沌多項式展開理論中，假設不確定模型參數 $X(\vartheta)$ 的變異數為一個有限值，則這個具有隨機性的不確定模型參數可以被近似於一組具有獨立變數且正交的多項式以線性組成，可以表示為一個隨機事件 ϑ 的函數。在此可以將 ϑ 理解為一個事件的編號，對運算上的影響不大。隨機的不確定模型參數可以被表達為：

$$X(\vartheta) = \sum_{j=1}^{\infty} c^j \psi^j(\xi(\vartheta)) \quad (3.53)$$

其中， $\psi^j(\xi)$ 為廣義的混沌多項式，由多個多維度的基底函數所組成，而 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n_p}) \in \Omega \subseteq \mathcal{R}^{n_p}$ 為分佈於不確定模型參數之樣本空間中 Ω 中的 n_p 維隨機變數，同樣也由隨機事件 ϑ 所決定。特別留意 ξ 的樣本空間會由其對應的多項式 ψ^j 之定義域所決定，而 X 的範圍則由真實系統的參數分佈範圍所決定。

多維度的基底函數 (Multi-dimensional basis functions) 是由一維的多項式基底函數以張量積 (Tensor product) 所組成：

$$\psi^j(\xi_1, \dots, \xi_n) = \prod_{k=1}^n P_k^{l_k}(\xi_k), \quad j = 1, 2, \dots, S, \quad l_k = 1, 2, \dots, p_b \quad (3.54)$$

其中， p_b 為多維度基底函數的最大次數，而 S 為該組混沌多項式中多維度基底函數的總各數，也可作項目總數。對於多維度的基底函數而言，基底函數之間仍具有彼此呈現正交的特性，因此在不同向量上的內積 (投影) 仍保有以下性質：

$$\langle \psi^i, \psi^j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j \in S, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{when } i = j \\ 0, & \text{when } i \neq j \end{cases} \quad (3.55)$$

該投影在混沌多項式展開理論中則稱為 Galerkin Projection。

瞭解了混沌多項式展開的一般式後，本研究操作混沌多項式展開的步驟如下：

1. 決定不確定模型參數之分佈及基底函數

在廣義混沌多項式展開的特色為不確定模型參數的分佈會決定不同的一維多項式基底函數 [104]，例如：高斯分佈對應到的基底函數為 Hermite polynomials、均勻分布對應到的多項式為 Legendre polynomials，Beta 分佈對應到的為 Jacobi polynomials，Gamma 分佈對應到的為 Laguerre polynomials。本研究假設所有的不確定模型參數皆為均勻分布，所使用的基底函數為 Legendre polynomials，



且對應的隨機變數範圍在 $-1 \leq \xi \leq 1$ ，不同階數的基底函數可由查表取得 [133]，如表所示：

表 3.2: Legendre polynomials

l_k	$P^{l_k}(\xi_k)$
0	1
1	ξ_k
2	$\frac{1}{2}(3\xi_k^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5\xi_k^3 - 3\xi_k)$
4	$\frac{1}{8}(35\xi_k^4 - 30\xi_k^2 + 3)$
5	$\frac{1}{2}(63\xi_k^5 - 70\xi_k^3 + 15\xi_k)$
6	$\frac{1}{16}(231\xi_k^6 - 315\xi_k^4 + 105\xi_k^2 - 5)$
7	$\frac{1}{16}(429\xi_k^7 - 693\xi_k^5 + 315\xi_k^3 - 35\xi_k)$
\vdots	\vdots
p_b	$\sum_{r=k, k-2, \dots} \frac{(2r+1)k!}{2^{(k-1)/2} \left(\frac{1}{2}(k-1)\right)!(r+k+1)!} \xi_r$

2. 決定多項式最高次數

混沌多項式中的每一個項都是由多個一維的基底函數相乘而得，每一個維度的多項式都一定會參與在張量積當中，因此該組混沌多項式中的多項式總項數之計算為重複排列的問題，可由最大次數 p_b 與隨機變數的個數 n_p 來決定

$$S = \frac{(n_p + p_b)!}{n_p! p_b!} \quad (3.56)$$

由此可知多項式的項目總數會隨著 n_p 和 p 的增加急遽上升，同時也會增加建立模型所需要的取樣次數和複雜度。因此，選定適當的 p_b ，將擁有無限項的一維基底函數之高次項截斷 (Truncate)，限制混沌多項式的項目總數為有限數 S ，可改寫式3.53為：

$$X(\vartheta) = \sum_{j=1}^S c^j \psi^j(\xi(\vartheta)) \quad (3.57)$$

3. 建立混沌多項式

對擁有 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_p}$ 的混沌多項式來說，其每一項多項式都是由單一維度的多項式相乘且總次數小於 p_b 。舉個簡單的例子說明，假設限制最高次項 $p_b = 3$ ，則可以容納兩個不確定模型參數 ξ_1, ξ_2 的混沌多項式 $\Psi(\xi_1, \xi_2)$ 所包含的項為兩個一維的基底函數乘積且次數小於 3 的所有可能列於下表：



表 3.3: $n = 2, p_b = 3$ 時混沌多項式的所有多維度項

j	α	$\psi^\alpha = \psi^j$
0	[0,0]	$\psi^0 = 1$
1	[1,0]	$\psi^1 = \xi_1$
2	[0,1]	$\psi^2 = \xi_2$
3	[2,0]	$\psi^3 = \frac{1}{2}(3\xi_1^2 - 1)$
4	[1,1]	$\psi^4 = \xi_1\xi_2$
5	[0,2]	$\psi^5 = \frac{1}{2}(3\xi_2^2 - 1)$
6	[3,0]	$\psi^6 = \frac{1}{2}(5\xi_1^3 - 3\xi_1)$
7	[2,1]	$\psi^7 = \frac{1}{2}(3\xi_1^2 - 1)\xi_2$
8	[1,2]	$\psi^8 = \xi_1\frac{1}{2}(3\xi_2^2 - 1)$
9	[0,3]	$\psi^9 = \frac{1}{2}(5\xi_2^3 - 3\xi_2)$

因此，當 $p_b = 3$ 時，一般化 $\Psi(\xi_1, \xi_2)$ 的係數後，可以表示為：

$$\begin{aligned} \Psi(\xi_1, \xi_2) \cong & a_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3(3\xi_1^2 - 1) + a_4\xi_1\xi_2 + a_5(3\xi_2^2 - 1) \\ & + a_6(5\xi_1^3 - 3\xi_1) + a_7(3\xi_1^2 - 1)\xi_2 + a_8\xi_1(3\xi_2^2 - 1) + a_9(5\xi_2^3 - 3\xi_2) \end{aligned} \quad (3.58)$$

4. 計算係數

由上步驟所決定的混沌多項式可以解釋為一個由隨機變數組成的框架，不論是對於系統輸入的不確定模型參數 $X(\vartheta)$ 或是系統輸出的 $y(\vartheta)$ ，都可以用同樣的多項式組合表示，僅有多項式的係數不同。且由於混沌多項式是多項式的線性組合，因此係數的求解可以透過蒙地卡羅取樣及最小平方法達成。

對求解不確定模型參數 $X(\vartheta)$ 的混沌多項式係數而言，首先生成 $\xi(1), \xi(2), \dots, \xi(N)$ 個隨機變數，根據式3.57，可將式子寫為：

$$\begin{bmatrix} X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(N) \end{bmatrix}_{N \times 1} = \begin{bmatrix} \psi^1(\xi(1)) & \psi^2(\xi(1)) & \cdots & \psi^S(\xi(1)) \\ \psi^1(\xi(2)) & \psi^2(\xi(2)) & \cdots & \psi^S(\xi(2)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi^1(\xi(N)) & \psi^2(\xi(N)) & \cdots & \psi^S(\xi(N)) \end{bmatrix}_{N \times S} \begin{bmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^S \end{bmatrix}_{S \times 1} \quad (3.59)$$

由於不確定模型參數的樣本產生皆是由隨機變數經過平移縮放所得來，因此 \mathbf{X} 矩陣為已知； ψ 矩陣內容可將隨機變數直接代入多項式中即可求得矩陣每個位置的數值，因此也可作為已知。此時係數矩陣 \mathbf{c} 即可由 $\mathbf{c} = (\psi^T \psi)^{-1} \psi^T \mathbf{x}$ 求得。



同樣的，若一系統將同一組不確定模型參數代入系統，輸出為 $y(\vartheta)$ ，也可表示為：

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}_{N \times 1} = \begin{bmatrix} \psi^1(\xi(1)) & \psi^2(\xi(1)) & \cdots & \psi^S(\xi(1)) \\ \psi^1(\xi(2)) & \psi^2(\xi(2)) & \cdots & \psi^S(\xi(2)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi^1(\xi(N)) & \psi^2(\xi(N)) & \cdots & \psi^S(\xi(N)) \end{bmatrix}_{N \times S} \begin{bmatrix} d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^S \end{bmatrix}_{S \times 1} \quad (3.60)$$

\mathbf{y} 為系統之輸出，可從模擬中以對應的輸入參得到，可作為已知。因此， \mathbf{y} 之係數也可透過 $\mathbf{d} = (\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi})^{-1} \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{x}$ 求得。

不論是對於不確定模型參數還是系統輸出，混沌多項式中都只有 S 個未知數需要求解，在理想上僅需要進行實驗 S 次就可以將其機率分佈模型建立起來。但考量到所使用的混沌多項式有經過截斷，使得最小平方方法進行迴歸時會存在誤差，因此根據 [134]，最佳的取樣次數在 $2S \leq N \leq 3S$ 。

透過以上四個步驟，即可將任意的隨機程序以混沌多項式展開的方式表達。

3.6.2 卡爾曼濾波器

卡爾曼濾波器是一種自迴歸濾波器，能夠從一系列的不完整和包含雜訊的量測中，綜合所有量測資訊並給出動態系統的估測狀態。簡單來說，卡爾曼濾波器將帶有不確定性的模型預測狀態 y^f ，與具有量測雜訊的量測值 z ，將兩者的機率分佈以捲積的方式取得類似交集的機率分佈，得到估測狀態 y^a 如圖3.20所示。

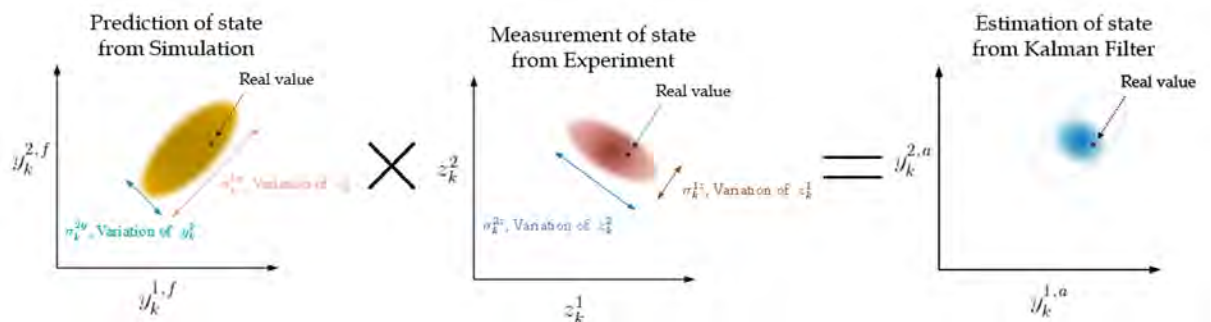


圖 3.20: 卡爾曼濾波器中結合預測及量測示意圖

而在 $t = k$ 時所得到的狀態估測值，又可被用於預測 $t = k + 1$ 時的狀態。隨著系統持續運作，卡爾曼濾波器也不停的進行迭代，如圖3.21(a) [135] 所示。在應用上可以參考圖3.21(b) [135]，圖中打叉色塊為物體的真實位置，但系統僅能提供兩個不準確的量測，分別是兩個顏色的橢圓色塊，透過卡爾曼濾波器，可以在每一個時間點對位置的估測值進行更新，達到較準確的位置估測。

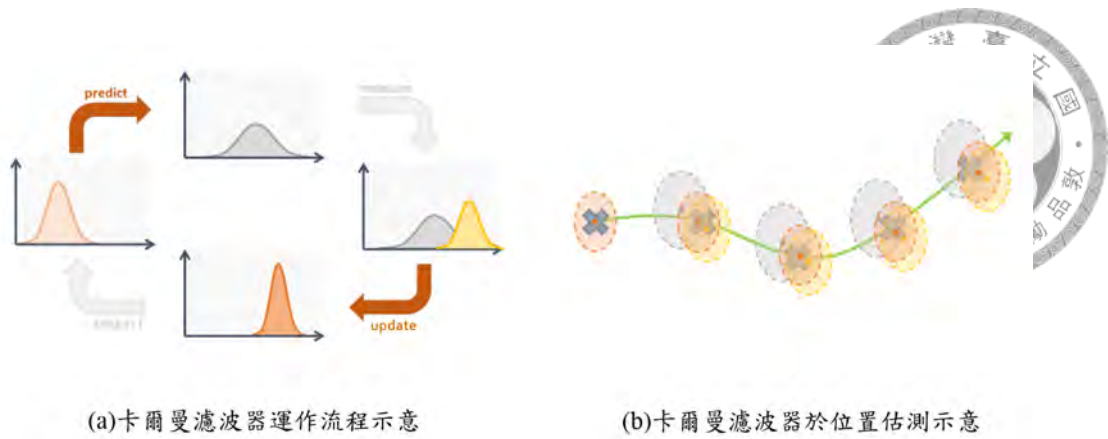


圖 3.21: 卡爾曼濾波器之應用示意 [135]

以數學方式來表達卡爾曼濾波器的運作時，系統架構如圖3.22所示：

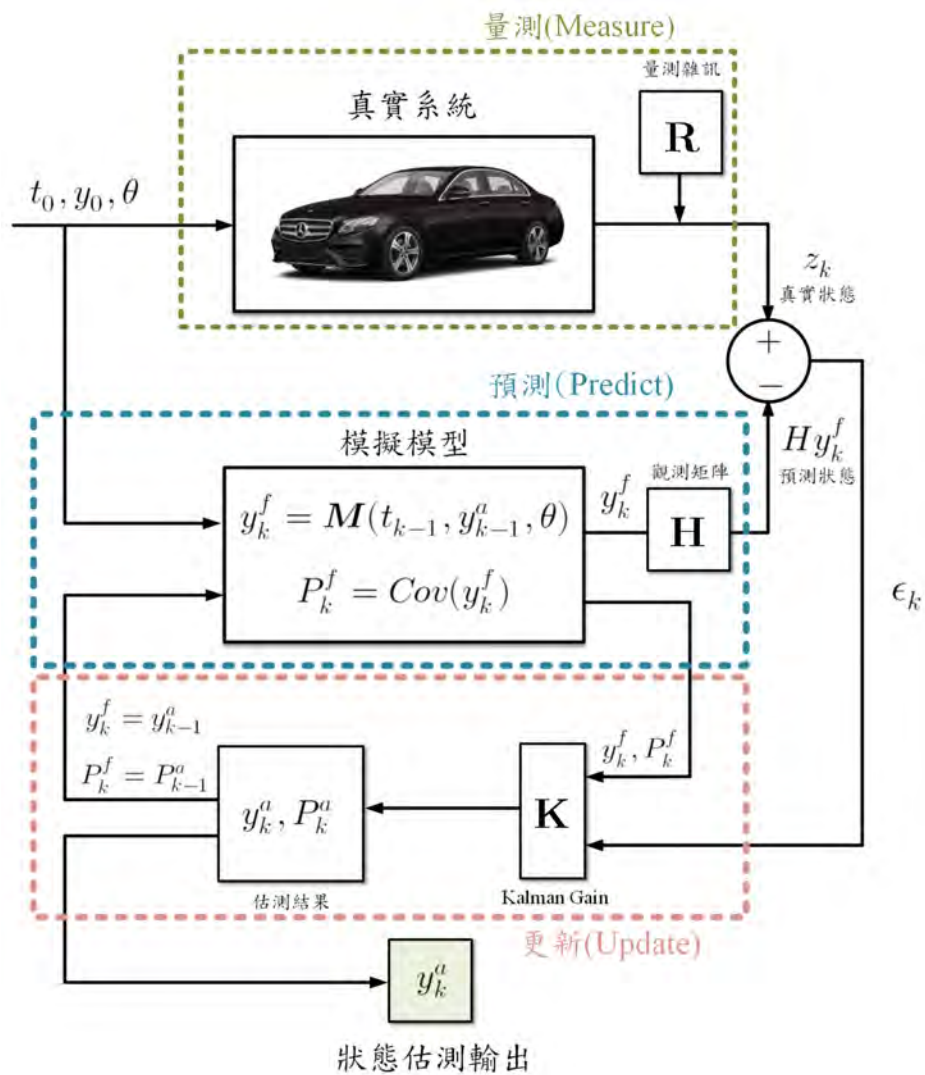


圖 3.22: 卡爾曼濾波器架構

先定義動態系統的初始值為 $t = t_0$ 時，系統的狀態 $y_0 = y(t_0)$ ，且系統參數為 θ_0 。

卡爾曼濾波器以一個時間單位 $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ 進行更新，並以 k 紀錄迭代次數。整個卡爾曼濾波器的運作主要可為三個主要結構：量測、預測、及更新，分別以 z_k 、 y_k^f 、及 y_k^a 表示系統在時間為 t_k 時的量測狀態 (Measured state)、預測狀態 (Forecast state)、及估測狀態 (Assimilated/Estimated state)。觀測矩陣 (Observer) \mathbf{H} 為狀態方程中的 C 矩陣，對於模擬模型所輸出的狀態 y_1, y_2, \dots 進行線性疊加，將疊加結果作為模擬系統的觀測輸出 (Observed vector)，得到與真實系統輸出 z 相同的物理量。若觀測輸出為狀態的非線性組合，該系統本身具有非線性，則觀測矩陣 \mathbf{H} 中的每一項皆需要對系統偏微分，使 \mathbf{H} 仍然可以具有線性疊加的作用，這樣的應用屬於拓展形的卡爾曼濾波器 (Extended Kalman Filter, EKF) [102]。 P_k 為狀態 t_k 時的誤差共變異矩陣 (Error covariance matrix)，用以表示系統對狀態預測時的不確定性。瞭解卡爾曼濾波器所需要的元素後，進一步了解其操作方法：

• 量測 Measure

量測即針對真實系統的狀態進行量測後，得到系統的觀測輸出。然而雜訊在實驗中確會直接影響到實驗，使得量測值為系統的狀態再加上於平均數為 0、為高斯分佈的量測雜訊 η_k ：

$$z_k = \mathbf{H}(y_k + \eta_k), \eta_k \in \mathbf{N}(0, R_k), ; z_k \in \mathcal{R}^{n_O} \quad (3.61)$$

其中 n_O 為系統觀測輸出 z_k 的個數， y 為系統狀態的準確值。卡爾曼濾波器同時考量到感測器在進行量測時會有偏差，因此在系統中加入建立由各個觀測輸出 z_k 的量測誤差所組成的雜訊共變異矩陣 \mathbf{R}_k ，如式 3.6.2。其中， n_s 為狀態的個數，而 R_{ik} 則是第 i 個狀態 z_i 在 t_k 時的變異數， $i = 1, \dots, n_O$ 。

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} R_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{2k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{n_O k} \end{bmatrix}_{n_O \times n_O} \quad (3.62)$$

矩陣中，需要先取得量測雜訊的變異數，使 \mathbf{R}_k 矩陣為已知。同時，雜訊變異數可能會隨著量測值的大小而改變，因此 \mathbf{R}_k 不一定是固定的，而有可能會隨著每個時間點根據量測值進行調整。

• 預測 Predict

預測所指的是將前一個時間點 t_{k-1} 時所得到的估測狀態及共變異矩陣代入模擬模型中。模擬模型中的 \mathbf{M} 是一個模型的求解器，可從自 y_{k-1} 計算下一個時間點的狀態 y_k 。需要留意的是，卡爾曼濾波器所預測的狀態，並不是單一個數值，而是考量到量測不確定而產生的一個分佈。



• 更新 Update

更新為卡爾曼濾波器結合量測狀態分佈及預測狀態分佈，透過卷積所計算出能代表該時間下的估測狀態及估測誤差共變異矩陣。更新後的估測狀態 y_k^a 及估測誤差共變異矩陣 P_k^a 是由預測狀態 y_k^f 、預測狀態的共變異矩陣 P_k^f 、及量測狀態 z_k ，更新方式如下：

$$y_k^a = y_k^f + P_k^f \mathbf{H}(\mathbf{R}_k + \mathbf{H}P_k^f \mathbf{H}^T)(z_k - \mathbf{H}y_k^f) = y_k^f + \mathbf{K}(z_k - \mathbf{H}y_k^f) \quad (3.63)$$

$$P_k^a = P_k^f - P_k^f \mathbf{H}(\mathbf{R}_k + \mathbf{H}P_k^f \mathbf{H}^T)\mathbf{H}P_k^f = P_k^f(I - \mathbf{K}\mathbf{H}) \quad (3.64)$$

透過更新步驟得到的估測狀態 y_k^f 及估測誤差共變異矩陣 P_k^f ，在 t_{k+1} 時會作為模型求解器 \mathbf{M} 的輸入，並預測 t_{k+1} 時的預測狀態 y_{k+1}^f 及預測誤差共變異矩陣 P_{k+1}^f 。

整合上述資訊，卡爾曼濾波器的狀態可以圖3.23簡化。

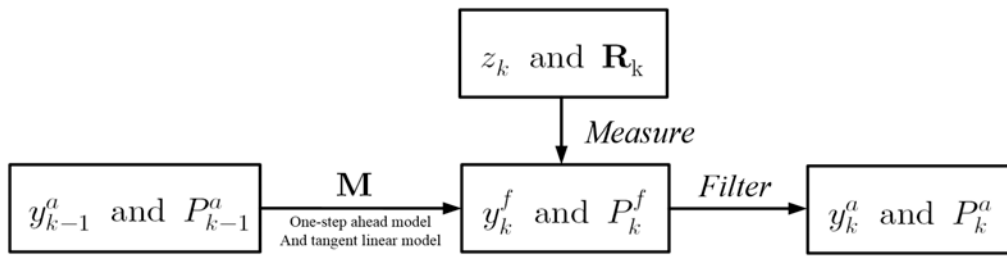


圖 3.23: 卡爾曼濾波器狀態運作簡圖

3.6.3 應用多項式混沌展開與卡爾曼濾波器於參數校準

基於混沌多項式之卡爾曼濾波器 [104]，以下稱之為 PC-KF (Polynomial Chaos-Based Kalman Filter,)，被應用於參數校準時，須先完成兩項調整：

1. 資料分佈以混沌多項式展開

PC-KF 在與一般卡爾曼濾波器最不同的地方在於，當一般的卡爾曼濾波器在進行更新時，須將同一個狀態於分佈內的所有樣本都進行更新及預測，而在 PC-KF 中，被更新和被預測的是混沌多項式的係數。因此，針對系統中以分佈表示的輸出狀態 y_k^f 及作為不確定模型參數的 θ_k^f ，都須先透過同一組混沌多項式進行展開，如式3.65及式3.66。其中，該組混沌多項式須依據系統中不確定模型參數的數量及分佈，來生成可包含對應維度的多維度混沌多項式之線性組合。

$$y_{m,k}^f = \sum_{j=1}^S (y_{m,k}^f)^j \psi^j(\boldsymbol{\xi}), \quad 1 \leq m \leq n_s \quad (3.65)$$



$$\theta_{i,k}^f = \sum_{j=1}^S (\theta_{i,k}^f)^j \psi^j(\boldsymbol{\xi}), \quad 1 \leq i \leq n_p \quad (3.66)$$

2. 卡爾曼濾波器須考慮不確定模型參數的變異

卡爾曼濾波器若將參數的變異列入率波器中，則圖3.22中的模擬模型需延伸為：

$$\begin{bmatrix} y_k^f \\ \theta_k^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}(t_{k-1}, y_{k-1}^a, \theta_{k-1}^a) \\ \theta_{k-1}^a \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

誤差共變異矩陣也需包含不確定模型參數之變異：

$$P_k^f = \text{Cov} \left(\begin{bmatrix} y_k^f \\ \theta_k^f \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \text{Cov}(y_k^f) & \text{Cov}([y_k^f, \theta_k^f]) \\ \text{Cov}([\theta_k^f, y_k^f]) & \text{Cov}(\theta_k^f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (P_{yy})_k^f & (P_{y\theta})_k^f \\ (P_{\theta y})_k^f & (P_{\theta\theta})_k^f \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Kalman Gain 矩陣因誤差共變異矩陣的延伸因此改寫為：

$$\mathbf{K}_k = P_k \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \\ 0 \end{bmatrix} (\mathbf{R}_k + \mathbf{H}(P_{yy})_k^f \mathbf{H}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} (P_{yy})_k^f \mathbf{H}^T \\ (P_{\theta y})_k^f \mathbf{H}^T \end{bmatrix} (\mathbf{R}_k + \mathbf{H}(P_{yy})_k^f \mathbf{H}^T)^{-1} \quad (3.69)$$

因此，可將卡爾曼濾波器的更新步驟以下式表示：

$$\begin{bmatrix} y_k^a \\ \theta_k^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_k^f \\ \theta_k^f \end{bmatrix} + \mathbf{K}_k (z_k - \mathbf{H} \begin{bmatrix} y_k^f \\ \theta_k^f \end{bmatrix}) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \begin{bmatrix} y_k^f \\ \theta_k^f \end{bmatrix} + \mathbf{K}_k z_k \quad (3.70)$$

透過上述兩項調整，即可以將混沌多項式展開應用於卡爾曼濾波器進行參數校準。接下來，即可將混沌多項式代入卡爾曼濾波器中。將 y_k 及 θ_k 以 PCE 呈現，將方程式改寫為：

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^S (y_k^a)^j \psi^j(\boldsymbol{\xi}) \\ \sum_{j=1}^S (\theta_k^a)^j \psi^j(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^S (y_k^f)^j \psi^j(\boldsymbol{\xi}) \\ \sum_{j=1}^S (\theta_k^f)^j \psi^j(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} + \mathbf{K}_k z_k \psi^1(\boldsymbol{\xi}), \quad j = 1, \dots, S \quad (3.71)$$

須留意的是，量測狀態 z_k 為單一量值而非分佈，因此在式3.71中， z_k 所對應到的為混沌多項式的第一項(常數項) $\psi^1(\boldsymbol{\xi}) = 1$ 。在式3.71中的混沌多項式共為 S 個多項式所組成。為了使卡爾曼濾波器可以將混沌多項式中的係數分開校準，可將式3.71依序對

$\psi^j, j = 1, \dots, S$ 進行 Galerkin Projection，由於不同的多項式彼此為正交，因此在投影的運算上如式3.55，得到結果如下：

$$\begin{bmatrix} (y_k^a)^j \\ (\theta_k^a)^j \end{bmatrix} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})(y_k^f)^j + \mathbf{K}_k z_k \delta_{1j}, j = 1, \dots, S \quad (3.72)$$

將式3.69代入3.72中，可得到經由卡爾曼濾波器更新後的不確定模型參數之 PCE 係數，可表示為：

$$(\theta_k^a)^j = (\theta_k^f)^j + (P_{\theta y})_k^f \mathbf{H}^T (\mathbf{R}_k + \mathbf{H} (P_{yy})_k^f \mathbf{H}^T)^{-1} (z_k \delta_{1j} - \mathbf{H} (y_k^f)^j), j = 1, \dots, S \quad (3.73)$$

當所有的混沌多項式展開係數都被更新之後，更新後的係數會組成一個一個新的分佈作為對不確定模型參數的估側。在上述的步驟中，系統的狀態 y_k 及誤差共變異矩陣 P_k 也都能隨著 PC-KF 架構進行更新，並且根據混沌多項式理論，共變異數矩陣可以直接透過混沌多項式展開的係數所求得，讓使用混沌多項式展開的效益可以被更完整的實現在卡爾曼濾波器中。但本研究因模型和操作上的限制較難實現，因此並未採用，詳細可參考 [134]。

3.7 參數校準驗證方法

模型驗證的最後一步，即為驗證模擬結果是否與真實系統的動態行為是吻合、或者在統計的角度上可被認定是相同的。然而，動態系統的驗證非常的困難，對實驗而言，重複多次會得到多筆時間序列資料，而同樣的對加入不確定因素模型的模擬模型重複實驗多次，也會得到多筆時間序列資料。若對於純量輸出而言，可使用卡方檢定 (Chi Square Test) 來檢驗兩分佈是否相同，但這樣的方法卻難以應用在輸出為時間序列的動態系統輸出的檢定上。因此，本研究試著在基於假設檢定 (Hypothesis Testing) 的概念下，提出一套適用於動態系統的模型驗證方法。

方法操作流程如下：

1. 於模擬模型中建立量測不確定性

為了使模擬模型能表現出真實系統在量測數據上的樣貌，特別是針對量測誤差的模擬，因此首先需要模擬模型中建立不確定因素模型。通常可將量測誤差模型表示為平均數為 0 之常態分佈模型，且標準差需先透過量測儀器或其他方法得知。另外，需將模擬資料的取樣頻率調整為與真實系統相同。

2. 重複執行多次模擬

重複執行多次模擬後，可得到具有不確定的多筆模擬資料。假設模擬 N 次，每一筆資料由 n 個取樣資料點所組成，可表現如下：

$$\mathbf{y}^{sim} = \begin{bmatrix} y_1^{sim}(1) & y_1^{sim}(2) & \cdots & y_1^{sim}(n) \\ y_2^{sim}(1) & y_2^{sim}(2) & \cdots & y_2^{sim}(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_N^{sim}(1) & y_N^{sim}(2) & \cdots & y_N^{sim}(n) \end{bmatrix} \quad (3.74)$$



真實系統資料可以是單一次實驗數據，或者為多次實驗之平均值。真實系統的實驗資料則可表示為：

$$\mathbf{y}^{exp} = [y^{exp}(1), y^{exp}(2), \dots, y^{exp}(n)] \quad (3.75)$$

3. 建立模擬資料之信賴區間

分別計算模擬資料於第 i 個時間點的資料 $\mathbf{y}^{sim}(i) = [y_1^{sim}(i), y_2^{sim}(i), \dots, y_N^{sim}(i)]^T, i = 1, \dots, n$ 之平均數及標準差，並以 1.96 倍標準差建立信賴區間上界及下界，如下圖所示：

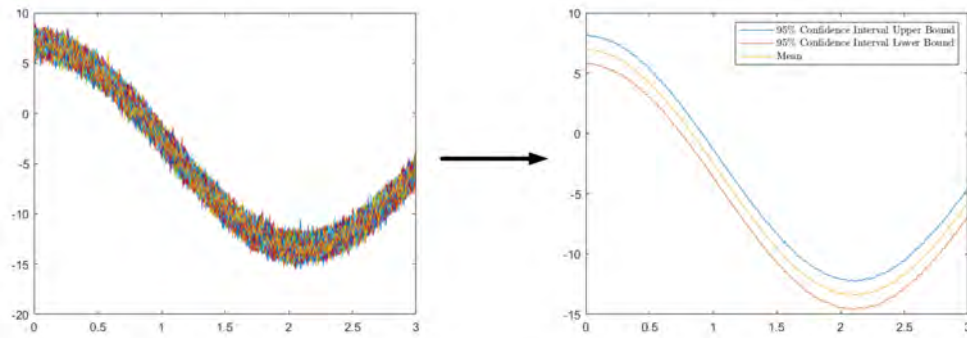


圖 3.24: 具量測不確定性之系統動態輸出信賴區間

4. 計算實驗資料於各取樣點之檢定統計量

計算第 i 個取樣點的實驗資料 $y^{exp}(i)$ 於第 i 個取樣點的模擬資料 $\mathbf{y}^{sim}(i) = [y_1^{sim}(i), y_2^{sim}(i), \dots, y_N^{sim}(i)]^T, i = 1, \dots, n$ 中的檢定統計量 (Test Statistic)，並透過常態分佈之累積函數 (CDF) 的反函數計算對應到的機率，即 α 值。其中，為了方便後續計算，不論檢定統計量為正或負，統一對其取決對值，讓統計檢定量可以被鏡射於常態分佈之右側。在此步驟中，共可得到 i 組 α 值，表示為：

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha(1), \alpha(2), \dots, \alpha(n)] \quad (3.76)$$

將 α 幾何平均數作為可以代表整筆資料的單一檢定統計量，即為：

$$\alpha_{eq} = \sqrt[n]{\alpha(1) \times \alpha(2) \times \dots \times \alpha(n)} \quad (3.77)$$



5. 假設檢定

以 α_{eq} 為檢定統計量，建立假設檢定：

- H_0 ：模擬模型與真實系統的輸出表現可被視為相同，即模型參數相同
- H_1 ：模擬模型與真實系統的輸出表現不可被視為相同，即模型參數不同

$$\begin{cases} \text{if } \alpha_{eq} \geq 0.975, H_0 \text{ is rejected, } H_1 \text{ stands} \\ \text{if } \alpha_{eq} < 0.975, H_1 \text{ is rejected, } H_0 \text{ stands} \end{cases}$$

透過所建立的假設檢定流程，可以透過判斷真實量測資料與模擬資料是否相同，來判斷參數的校準是否具有統計上的意義，完成參數校準的驗證。

3.8 小結

本章主要介紹針對複雜的動態系統進行全域敏感度分析之方法，透過結合低差異取樣、替代模型、主成分分析，將動態系統的時間輸出轉換為單一輸出，並透過替代模型生成多組樣本輸出，以實現建立可收斂、具可信度且全域敏感度指標。針對參數的激發，本研究透過將參數化的系統操控作為最佳化的設計變數，並以全域敏感度指標建立了可凸顯單一模型參數影響且最小化其他參數之交互作用的目標函數，透過最佳化方法得到系統在激發參數時的最佳操作參數。以最佳參作參數操作系統後，利用基於混沌多項式之卡爾曼濾波器，來校準各個不確定模型參數於混沌多項式之係數，最後得到參數的估側分佈，作為參數校準的最終結果。

接下來的章節中，本研究將使用兩個數學按例來驗證提出方法的可行性及操作細節。確認方法為可行後，將所提出之方法應用於車輛工程案例，並探討實際應用於複雜系統上的優劣級及成效。



單一輸出數學模型之不確定參數激發

在開發及驗證本研究所提出流程時，首先以數學模型取代複雜系統進行方法的探討。使用數學系統優點主要有以下：

1. 數學系統較複雜系統簡單，且在分析時可以有絕對正確之答案作為依據，若使用不同方法進行分析，可以針對結果進行誤差分析，驗證方法可行性
2. 數學系統運算速度較高，可針對計算環境和方法進行多次調整及測試

因此，本研究選定數學模型進行分析，在後續章節會針對所建立之方法進行可行性驗證及比較。

本章期望可以透過數學模型，建構並呈現操作參數及不確定模型參數所扮演的角色，驗證透過最佳化操作參數凸顯出單一個設計參數之不確定性的可行性。

4.1 數學模型

4.1.1 數學方程式之參數組成

本研究選擇 Chen 於發表之論文 [119] 所使用之數學模型，在文中所提出的方法為針對系統之全域敏感度指標進行解析解計算。本研究雖然不使用該方法，但仍然將其計算結果作為驗證方法正確性之依據。數學模型如下：

$$f(x) = \alpha_1 + e^{x_1[(\theta_1-1)^2+\theta_2^2]+x_2(\theta_3^2+\theta_4^2)} + e^{x_3[(\theta_2-1)^2+\theta_1^2]+x_4(\theta_3^2+\theta_4^2)} \quad (4.1)$$

其中，各項參數預設值如表4.1所示。

在數學模型中， $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 被視為數學模型之可調整的操作參數，也是本研究的設計變數，可調整的範圍皆設定在 $[0, -5]$ 之間。而 $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$ 則被視為數學模型之具有不確定性的模型參數。本章的目的即為找到一組最佳的操作參數來最大



表 4.1: 數學模型預設操作參數

α_1	x_1	x_2	x_3	x_4
1	-2	-0.5	-2	-0.5

化模型參數的敏感度，可表達為：

$$\mathbf{x}_i^* = \arg \max \frac{\partial f}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, 3, 4 \quad (4.2)$$

4.1.2 敏感度指標求解困境

Chen 也在論文 [119] 中提到，要求得敏感度指標的值並不是一件容易的事情，原因是對於基於模擬 (Simulation-based) 所得到的敏感度指標，會因取樣次數的不同而有所變異，如表 4.2 所示。因此，Chen 才會提出了針對數學模型或替代模型 (Metamodel or Surrogate Model) 求得敏感度指標之解析解 (Analytical-based) 的方法。

表 4.2: 比較解析解與蒙地卡羅法所得之敏感度指標

	(S_1, S_1^t)	(S_2, S_2^t)	(S_3, S_3^t)	(S_4, S_4^t)
Analytical Method	(0.0033, 0.5798)	(0.0033, 0.5798)	(0.2063, 0.2220)	(0.2063, 0.2220)
$N = 100,000$	(0.0208, 0.5820)	(0.0089, 0.5838)	(0.2126, 0.2235)	(0.2326, 0.2216)
$N = 10,000$	(0.0787, 0.5809)	(0.0518, 0.5835)	(0.2126, 0.2235)	(0.2326, 0.2216)
$N = 1000$	(0.2448, 0.6119)	(0.3761, 0.6167)	(0.4844, 0.2225)	(0.2814, 0.2467)

然而，Chen 提出的這種解析分離變異數 (ANOVA Decomposition) 的基於變異數 (Variance-based) 的方法雖然可以求得替代模型的準確敏感度指標，但建立解析解的過程非常繁瑣且無法輕易由電腦展開，不容易快速求解。基於模擬的方法使用蒙地卡羅法得到全域敏感度指標，雖然從上表中可以看見當取樣次數非常大時，所求得的解即可逼近解析解，但考量到取樣次數與計算成本仍然存在一定正相關，因此不能毫無邏輯的將取樣次數增加，而是得從全域敏感度指標的收斂性與取樣次數的關係來決定，才能找出既有可信度又使運算最有效率之全域敏感度指標。

4.2 全域敏感度分析

本使用兩種全域敏感度指標計算方法求解並比較，分別為：

1. 直接求解法 (Direct Approach)：直接對數學模型進行多次取樣，計算其全域敏感度指標

2. 替代模型求解法 (Metamodel Approach)：針對數學模型建立其對應之替代模型，並對替代模型求解其全域敏感度指標

面對數學模型，兩種方法都可以很容易求得敏感度指標。但，考量到工程的應用上，研究目標多半非數學模型而是複雜系統，在單一次取樣過程中即會消耗非常多時間，計算成本過大。因此，本節會著重探討替代模型求解法的細節操作，並以直接求解法所得的解作為參考目標，計算其偏差。

4.2.1 直接求解法

直接求解法流程如圖4.1所示：

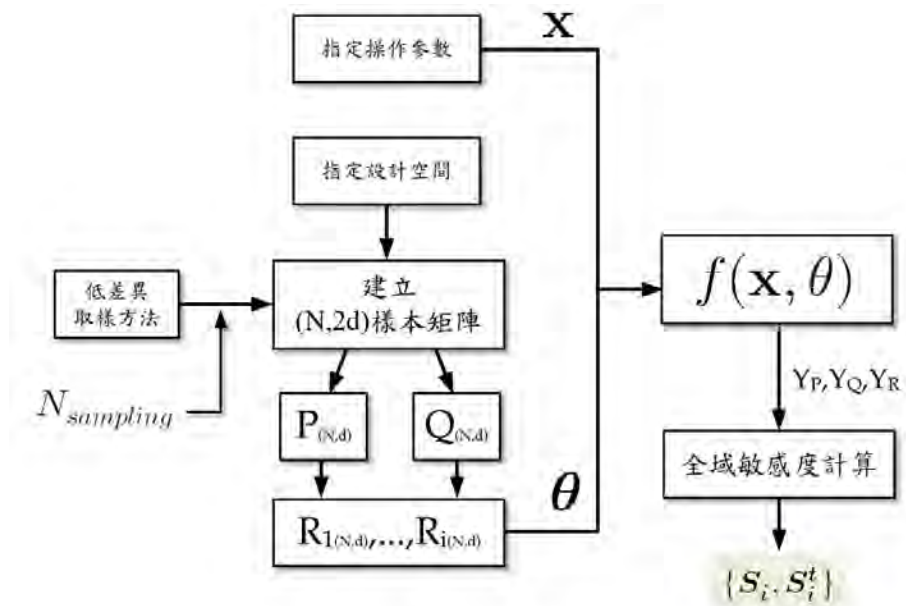


圖 4.1: 直接求解法演算流程圖

步驟說明如下：

1. 指定操作參數的數值及具有不確定模型參數之設計空間

預設之操作參數的數值與表4.1相同，在後續才會使用不同參數進行驗正；對於不確定模型參數 \mathbf{x} 則將其變動範圍設定在 $[0, 1]$

2. 決定蒙地卡羅法的取樣次數 $N_{sampling}$

由於直接求解法在此僅作為參考用，且數學模型取樣速度非常快，因此並不會針對此方法的取樣次數進行探討，將其預設為 $N_{sampling} = 1e7$ 次

3. 以低差異取樣方法建立樣本矩陣

在此案例中有四個模型參數，為建立兩組獨立之樣本矩陣，首先以低差異取樣方法列建立行 (column) 數為 $4 \times 2 = 8$ 個維度、列 (row) 數為取樣次數 $1e7$ 的矩陣。取出前四行作為第一組樣本矩陣 \mathbf{P} ，剩餘的四行作為第二組樣本矩陣 \mathbf{Q}



4. 建立獨立輸入樣本矩陣

依序將 \mathbf{P} 矩陣的第 i 列與 \mathbf{Q} 矩陣的第 i 列交換，經替換行的 \mathbf{P} 矩陣則作為 \mathbf{R}_i 矩陣，在本案例中 $i = 1, 2, 3, 4$ ，共建立四個獨立輸入樣本矩陣

5. 計算敏感度指標

將前步驟所產生的樣本矩陣 \mathbf{P} 、 \mathbf{Q} 、及 \mathbf{R}_i 依序代入數學模型中計算其函數輸出，即可得到全域敏感度指標

運用直接求解法所得到敏感度指標與 Chen 的論文中得到的全域敏感度指標比較，結果如下：

表 4.3: 直接求解法與解析解之比較

	(S_1, S_1^t)	(S_2, S_2^t)	(S_3, S_3^t)	(S_4, S_4^t)
Analytical Method	(0.0033, 0.5798)	(0.0033, 0.5798)	(0.2063, 0.2220)	(0.2063, 0.2220)
$N = 10,000,000$	(0.0033, 0.5798)	(0.0033, 0.5798)	(0.2063, 0.2220)	(0.2063, 0.2220)

表中可以看到，在取樣次數達到 $1e7$ 時，直接求解法與解析解得到的敏感度指標幾乎相同，因此可確認此方法的可行性。由於解析解僅提供模型參數在一組操作參數下的解析解，在同一個數學模型中若改變操作參數則無法與解析解進行比對驗證。在後續的操作中若有更改操作參數，皆假設透過直接求解法得到的敏感度指標為準確值。

4.2.2 替代模型求解法

考量到若將方法應用於實際工程案例中，取樣的速度並無法如同數學模型一樣快速，使用直接求解法會使得計算成本非常高。因此，替代模型求解法則被應用於解決在有限取樣次數下實現全域敏感度分析。

方法流程圖如圖4.2所示，方法共分為三個階段：數學模型初始取樣、EGO 演算法、以及全域敏感度分析。步驟的操作過程如下：

1. 指定操作參數的數值及具有不確定模型參數之分布空間

預設之操作參數的數值與前表相同，在後續才會使用不同參數進行驗正；對於不確定模型參數 θ 則將其變動範圍皆設定在 $[0, 1]$ 。

2. 在設計空間中對模型參數進行低差異取樣點

於四個模型參數的設計空間中，使用低差異取樣創造四個維度、組數為 $N_{initial}$ 之低差異數列，作為輸入樣本矩陣 θ_{ini} 。

3. 計算數學模型之取樣輸出

將步驟 2 中產生的樣本矩陣代入數學模型中，得到數學模型輸出 \mathbf{y}_{ini} 。

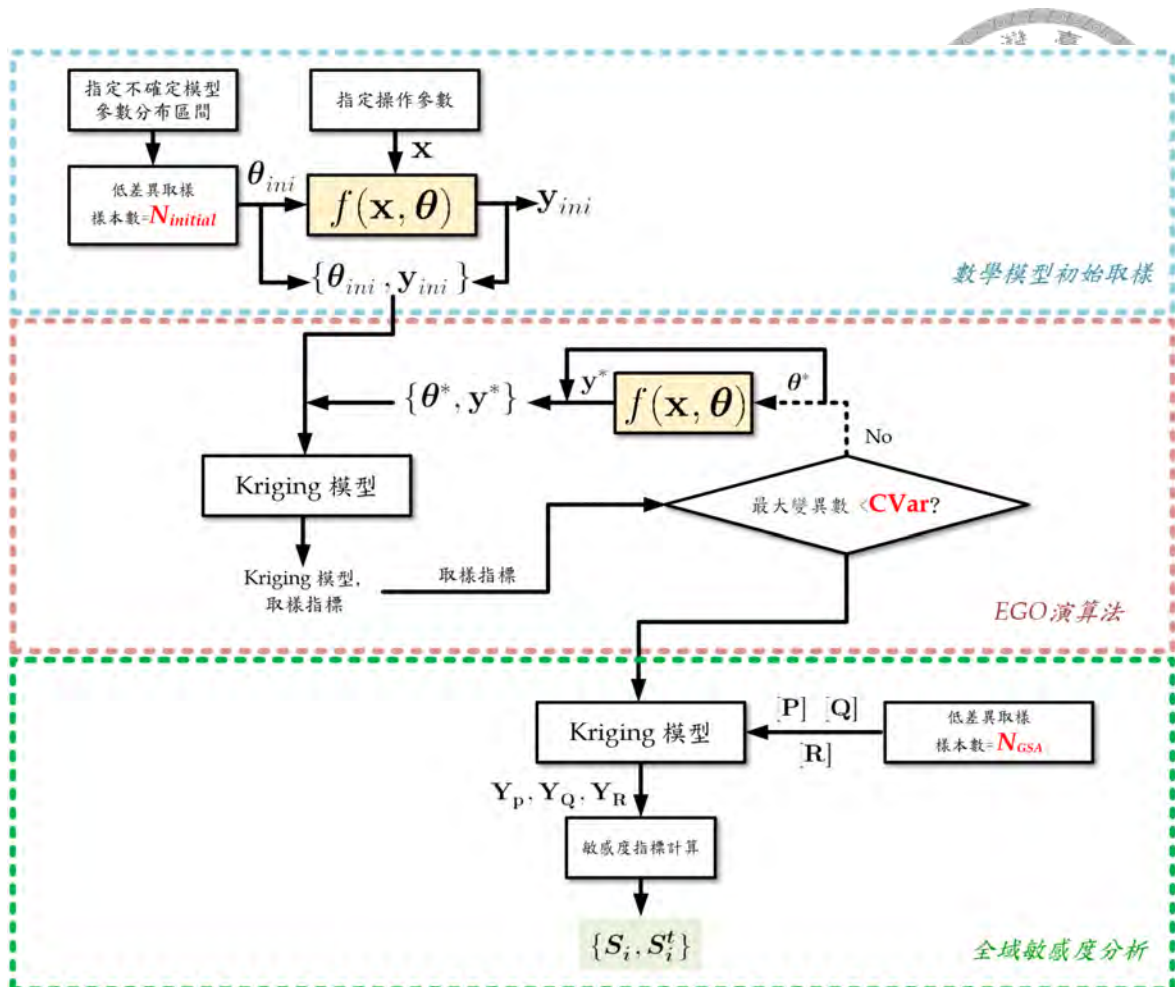


圖 4.2: 替代模型求解法演算流程圖

4. Kriging 模型擬合

將 θ_{ini} 作為輸入， y_{ini} 作為輸出，經由擬合建立 Kriging 模型。擬合的結果除了會得到 Kriging 模型的參數外，同時得到在 Kriging 模型中，變異數的最大值及其對應到的樣本位置 θ^* ，作為此案例的取樣指標。

5. 判斷模型擬合度是否具有一定可信

判斷模型是否需要進一步進行取樣以提升模型可信度，以收斂變異數 $CVar$ 作為收斂條件，與 Kriging 擬合之最大變異數進行比較判斷是否進一步進行取樣。若最大變異數小於收斂變異數，即認定 Kriging 模型能有效的表達數學模型；若最大變異數大於 $CVar$ ，則表示需再進行取樣，提升 Kriging 模型可信度。

6. 使用取樣指標進行取樣並擬合新的 Kriging 模型

以取樣指標 θ^* 作為取樣點，經數學模型計算後取得對應的輸出 y^* 。將 θ^* 及原有的取樣點 θ_0 、 y^* 及原有的取樣輸出 y_0 組合為新的取樣點 θ 及取樣輸出 y ，並再次將 $\{\theta, y\}$ 作為輸入及輸出，合成新的 Kriging 模型。重複步驟 5 及步驟 6，直到 Kriging 模型的最大變異數達到收斂條件。

7. 對 Kriging 模型進行參數之敏感度分析



有了可信的 Kriging 模型後，其全域敏感度分析方法與直接求解法相同，唯一不同為將直接求解法中的數學模型以 Kriging 模型取代，並且考量計算效率，將差異取樣的樣本數設定為變數 N_{GSA} ，其餘的樣本矩陣建立及全域敏感度指標計算方法前小節敘述相同。完成此步驟後即完成以間接求解法計算數學模型之全域敏感度。

間接求解法的步驟雖然複雜，但面對到取樣時間漫長的複雜系統，此方法為計算其敏感度較有效率之方法。然而，在操作間接求解法時，仍有幾項參數被認定為會直接影響敏感度計算結果，分別是：

1. **初始取樣數量 $N_{initial}$** ：雖然有 EGO 演算法可使 Kriging 模型到達一定擬合可信度，但初始取樣數量卻也直接的影響 EGO 的迭代次數，在計算時間上亦是一大負擔。再者，雖然 EGO 可以保證取樣位置為最有效率之取樣點，但透過低差異取樣方法進行初始取樣的結果仍然會與 EGO 有些許差異，因此選擇適當的 $N_{initial}$ 在求解過程中仍極為重要。
2. **收斂變異數 $CVar$** ：收斂變異數直接決定了 Kriging 模型中對尚未取樣位置預測時的變異數大小，也決定了模型準確度。然而收斂變異數的大小影響了 EGO 的迭代次數，也間接地影響計算時間。
3. **全域敏感度分析之取樣次數 N_{GSA}** ：在間接求解法中，取樣點會經由 Kriging 模型計算出輸出結果，在運算上仍有一定的時間消耗，因此 N_{GSA} 是否選取適當仍需由敏感度指標的收斂與否作為判斷依據。

由於無法透過系統化的方法得到演算參數的最佳組合，為了觀察上述三個參數對計算結果的影響，首先對於參數的數量級進行測試，透過三個參數在不同水準下的組合來探討參數數量及對收斂結果的影響。三個參數組合如表4.4所示。

表 4.4: 演算參數組合

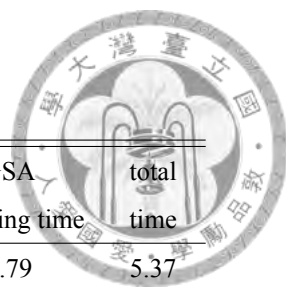
Parameter	Levels
$N_{initial}$	{100, 200, 300, 1000}
$CVar$	{0.01, 0.0025, 0.0001}
N_{GSA}	{1e5, 1e6}

針對表中的參數組合，共進行 21 組實驗測試，分別記錄 EGO 迭代次數及每個階段所運用的計算時間，並對其敏感度指標計算結果與解析解進行比較及誤差分析。結果列於表4.5及4.6。

從表4.5中可以看見，計算的時間主要來自於 EGO 演算法及分析全域敏感度時使用的蒙地卡羅法。

EGO 演算法在進行搜尋取樣指標及更新 Kriging 模型時所花費的時間會隨著迭代次數呈現倍數成長，且成長時間與 Kriging 模型本身所包含的擬合樣本數量有關係。在收

表 4.5: 不同演算參數與各階段演算時間



set	$[N_{initial}, CVar, N_{GSA}]$	EGO number	Kriging Fitting time(s)	EGO time	GSA sampling time	total time
1	[100, 0.01, 1e5]	7	0.0072	2.57	2.79	5.37
2	[100, 0.01, 1e6]	7	0.003	2.19	27.91	30.10
3	[100, 0.0025, 1e5]	17	0.0034	55.22	5.52	60.74
4	[100, 0.0025, 1e6]	17	0.0029	43.92	60.74	104.66
5	[100, 0.0001, 1e5]	393	0.0048	346.02	12.86	358.88
6	[100, 0.0001, 1e6]	393	0.004	319.82	193.63	513.45
7	[200, 0.01, 1e5]	1	0.0032	0.80	5.09	5.90
8	[200, 0.01, 1e6]	1	0.0028	0.40	50.10	50.50
9	[200, 0.0025, 1e5]	37	0.003	14.49	6.19	20.68
10	[200, 0.0025, 1e6]	37	0.0034	14.63	59.98	74.62
11	[200, 0.0001, 1e5]	92	0.0036	534.64	15.22	549.87
12	[200, 0.0001, 1e6]	92	0.0039	527.68	351.04	878.72
13	[300, 0.01, 1e5]	1	0.0029	1.06	7.58	8.65
14	[300, 0.01, 1e6]	1	0.0028	0.78	74.77	75.55
15	[300, 0.0025, 1e5]	1	0.0031	0.81	7.66	8.48
16	[300, 0.0025, 1e6]	1	0.0033	0.73	74.07	74.80
17	[300, 0.0001, 1e5]	65	0.0048	427.02	14.59	441.62
18	[300, 0.0001, 1e6]	65	0.0041	424.18	382.70	806.88
19	[1000, 0.01, 1e5]	1	0.0063	10.49	26.87	37.37
20	[1000, 0.0025, 1e5]	1	0.0065	10.37	26.50	36.87
21	[1000, 0.0001, 1e5]	26	0.0045	281.03	27.76	308.79

斂變異數為 0.0025 時 EGO 的迭代次數都僅有一次，代表著他們的初始取樣次數已經可以使得擬合得到的 Kriging 模型具有一定的可信度，且在此案例中，擬合 Kriging 模型的時間並不會受到取樣次數影響太多。從上述觀察結果可以得到結論：在此案例中，若要提升演算效率並提升 Kriging 模型的可信度，為避免 EGO 迭代的計算時間花費，應增加初始取樣 $N_{initial}$ 。

從演算的時間來討論演算法的效能後，實際上來探討各組參數在演算後所得的結果與解析解的差異。從表 4.6 中可以發現，誤差的數量級大約落在 1% 到 5% 之間，而更精確的預測則可以使誤差縮小至 0.1% 至 0.5% 之間。考量到工程的需求以及對敏感度判讀並不至於要求精確，因此將可接受誤差範圍設定在 1% 以內。從表中整理不同的初始取樣數量下，所需要達到誤差在 1% 以內的最低條件及其時間花費，整理結果列於表。

考量到模型在不同的操作參數下，演算參數對預測結果準確度可能也會有相當的影響。為了保證初始取樣本身就具有一定的準確度，盡可能減少 EGO 的迭代次數，同時參考計算時間的多寡，在此案例中設定初始取樣次數 $N_{initial} = 1000$ 。為了更準確計算

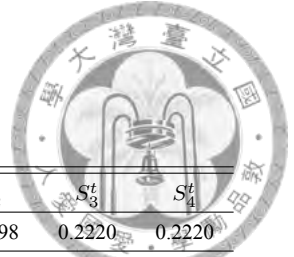


表 4.6: 不同演算參數與誤差關係

	$[N_{initial}, CVar, N_{GSA}]$	S_1	S_2	S_3	S_4	S_1^t	S_2^t	S_3^t	S_4^t
Set	Analytical Solution	0.0033	0.0033	0.2063	0.2063	0.5798	0.5798	0.2220	0.2220
1	[100, 0.01, 1e5]	0.1057	0.1055	0.1129	0.1107	0.6031	0.6027	0.2540	0.2526
	error	-0.1024	-0.1022	0.0934	0.0956	-0.0233	-0.0229	-0.0320	-0.0306
2	[100, 0.01, 1e6]	0.1060	0.1061	0.1133	0.1104	0.6031	0.6027	0.2540	0.2526
	error	-0.1027	-0.1028	0.0930	0.0959	-0.0233	-0.0229	-0.0320	-0.0306
3	[100, 0.0025, 1e5]	0.0476	0.0476	0.2480	0.2470	0.5747	0.5745	0.2208	0.2196
	error	-0.0443	-0.0443	-0.0417	-0.0407	0.0051	0.0053	0.0012	0.0024
4	[100, 0.0025, 1e6]	0.0476	0.0474	0.2484	0.2469	0.5748	0.5746	0.2208	0.2196
	error	-0.0443	-0.0441	-0.0421	-0.0406	0.0050	0.0052	0.0012	0.0024
5	[100, 0.0001, 1e5]	0.0041	0.0043	0.2068	0.2072	0.5800	0.5800	0.2221	0.2219
	error	-0.0008	-0.0010	-0.0005	-0.0009	-0.0002	-0.0002	-0.0001	0.0001
6	[100, 0.0001, 1e6]	0.0040	0.0041	0.2072	0.2070	0.5801	0.5801	0.2221	0.2220
	error	-0.0007	-0.0008	-0.0009	-0.0007	-0.0003	-0.0003	-0.0001	0.0000
7	[200, 0.01, 1e5]	0.0590	0.0585	0.1489	0.1489	0.5912	0.5915	0.2311	0.2305
	error	-0.0557	-0.0552	0.0574	0.0574	-0.0114	-0.0117	-0.0091	-0.0085
8	[200, 0.01, 1e6]	0.0593	0.0589	0.1491	0.1486	0.5913	0.5916	0.2311	0.2305
	error	-0.0560	-0.0556	0.0572	0.0577	-0.0115	-0.0118	-0.0091	-0.0085
9	[200, 0.0025, 1e5]	0.0114	0.0118	0.2158	0.2136	0.5805	0.5806	0.2254	0.2236
	error	-0.0081	-0.0085	-0.0095	-0.0073	-0.0007	-0.0008	-0.0034	-0.0016
10	[200, 0.0025, 1e6]	0.0116	0.0118	0.2163	0.2136	0.5804	0.5807	0.2254	0.2236
	error	-0.0083	-0.0085	-0.0100	-0.0073	-0.0006	-0.0009	-0.0034	-0.0016
11	[200, 0.0001, 1e5]	0.0020	0.0022	0.2050	0.2053	0.5804	0.5803	0.2225	0.2223
	error	0.0013	0.0011	0.0013	0.0010	-0.0006	-0.0005	-0.0005	-0.0003
12	[200, 0.0001, 1e6]	0.0019	0.0019	0.2054	0.2051	0.5804	0.5804	0.2225	0.2223
	error	0.0014	0.0014	0.0009	0.0012	-0.0006	-0.0006	-0.0005	-0.0003
13	[300, 0.01, 1e5]	0.0072	0.0070	0.1989	0.1975	0.5866	0.5866	0.2270	0.2250
	error	-0.0039	-0.0037	0.0074	0.0088	-0.0068	-0.0068	-0.0050	-0.0030
14	[300, 0.01, 1e6]	0.0074	0.0074	0.1991	0.1972	0.5866	0.5867	0.2270	0.2251
	error	-0.0041	-0.0041	0.0072	0.0091	-0.0068	-0.0069	-0.0050	-0.0031
15	[300, 0.0025, 1e5]	0.0072	0.0070	0.1989	0.1975	0.5866	0.5866	0.2270	0.2250
	error	-0.0039	-0.0037	0.0074	0.0088	-0.0068	-0.0068	-0.0050	-0.0030
16	[300, 0.0025, 1e6]	0.0074	0.0074	0.1991	0.1972	0.5866	0.5867	0.2270	0.2251
	error	-0.0041	-0.0041	0.0072	0.0091	-0.0068	-0.0069	-0.0050	-0.0031
17	[300, 0.0001, 1e5]	0.0046	0.0048	0.2077	0.2080	0.5802	0.5802	0.2226	0.2222
	error	-0.0013	-0.0015	-0.0014	-0.0017	-0.0004	-0.0004	-0.0006	-0.0002
18	[300, 0.0001, 1e6]	0.0046	0.0046	0.2081	0.2079	0.5802	0.5802	0.2225	0.2222
	error	-0.0013	-0.0013	-0.0018	-0.0016	-0.0004	-0.0004	-0.0005	-0.0002
19	[1000, 0.01, 1e5]	0.0001	0.0003	0.2036	0.2042	0.5814	0.5813	0.2230	0.2229
	error	0.0032	0.0030	0.0027	0.0021	-0.0016	-0.0015	-0.0010	-0.0009
20	[1000, 0.0025, 1e5]	0.0001	0.0003	0.2036	0.2042	0.5814	0.5813	0.2230	0.2229
	error	0.0032	0.0030	0.0027	0.0021	-0.0016	-0.0015	-0.0010	-0.0009
21	[1000, 0.0001, 1e5]	0.0028	0.0026	0.2005	0.2012	0.5809	0.5808	0.2228	0.2228
	error	0.0005	0.0007	0.0058	0.0051	-0.0011	-0.0010	-0.0008	-0.0008



表 4.7: 使全域敏感度指標 $< 1\%$ 之演算參數最低條件

$N_{initial}$	$CVar$	N_{GSA}	Time Needed(s)
100	0.0001	1.00E+05	358.88
200	0.0001	1.00E+05	549.87
300	0.0001	1.00E+05	441.62
1000	0.01	1.00E+05	37.37

全域敏感度指標， N_{GSA} 的大小與全域敏感度的收斂關係仍需要進一步被探討。

4.3 替代模型求解與評估

在前小節中，三個重要的演算參數對計算時間及準確性的影響被深入探討，也透過實驗決定了初始取樣次數。本節將進一步對 Kriging 模型的擬合程度及預測性能進行分析，用來確認所選定之演算參數具有足夠的信心水準替代原數學模型以計算全域敏感度指標。本節所探討的目標主要有以下兩點：

1. Kriging 模型之準確度評估：透過交叉驗證計算 Kriging 模型與數學模型輸出之誤差及誤差百分比。
2. 探討最小 N_{GSA} 之需求：比較在不同的取樣數量 N_{GSA} 下所計算得到的全域敏感度指標與解析解的誤差，並從中歸納出全域敏感度指標的收斂性，以決定 N_{GSA} 的值。

4.3.1 Kriging 模型擬合準確度評估

Kriging 模型的準確度評估可藉由交叉驗證得到，以前小節所設定的初始取樣次數 $N_{initial}$ 建立訓練 Kriging 模型後，另外建立一組獨立的驗證樣本矩陣，分別以數學模型和 Kriging 模型得到模型的真實輸出及預測輸出，並計算兩者之間誤差的平均及標準差、誤差百分比的平均及標準差、並計算 R^2 及 $RAAE$ 。

$N_{initial} = 1000$ 的三種模型準確度評估如下：

- 誤差分佈及誤差百分比分佈

圖4.3為 Kriging 模型於交叉驗證中所呈現的誤差分佈與誤差百分比分佈圖，可看見其誤差百分比平均為 0.000071%，且誤差百分比的標準差為 0.0000026，可見其誤差百分比非常小。

- 系統真實輸出與 Kriging 模型預測輸出比較

圖4.4選擇驗證樣本矩陣中任意 200 組資料，直接比較數學模型輸出與 Kriging 模型之輸出，也可以看見兩者輸出差異非常小，誤差幾乎可以被忽略。



• 準確度評估指標

計算其決定系數及其平均絕對誤差，可得到 $R_{1000}^2 = 0.9998$ 及 $RAAE_{1000} = 0.0055$ 。根據上述四項指標，可以判定 Kriging 模型可以非常有效的表達真實模型。

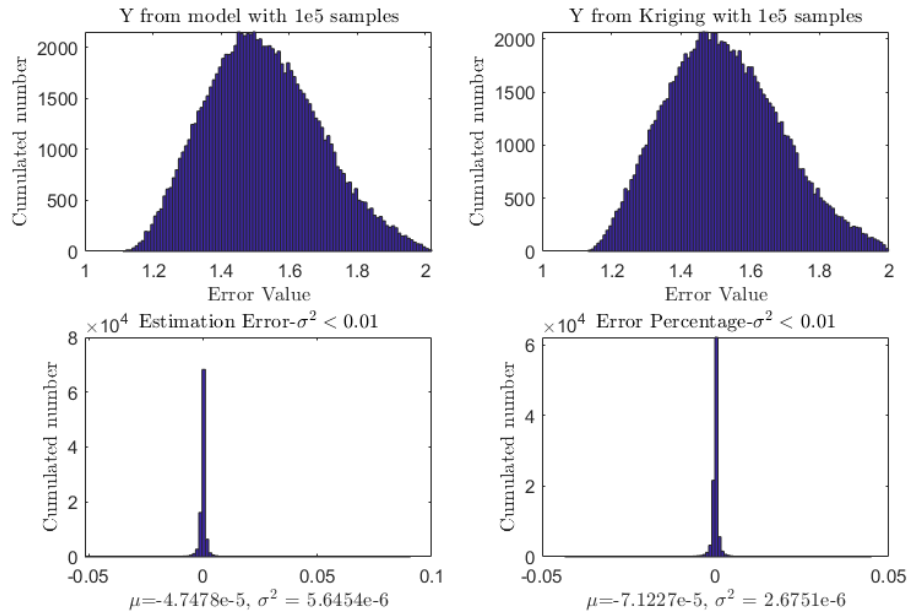


圖 4.3: 初始取樣 1000 次之誤差分佈

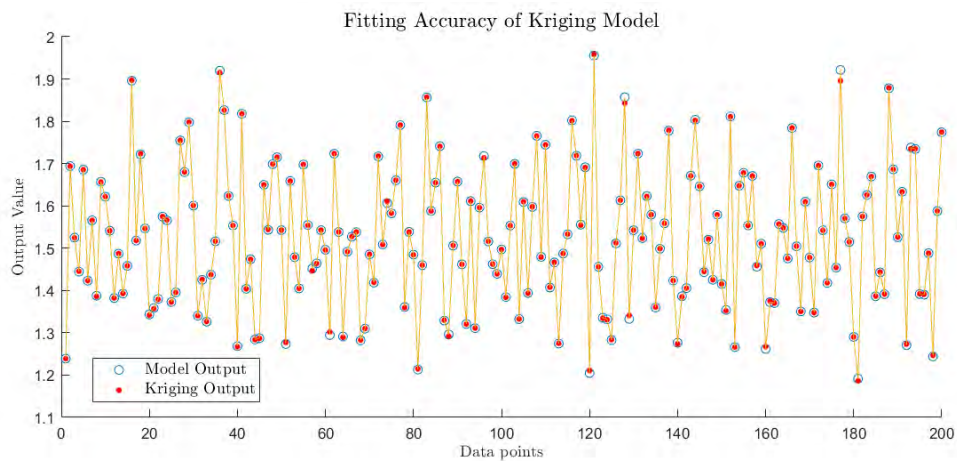


圖 4.4: 數學模型真實輸出與 Kriging 模型預測輸出之比較

透過三種 Kriging 模型擬合準確度評估的呈現，呈現了初始取樣次數為 1000 次時，Kriging 模型可替代數學模型的精確程度，也證實了 Kriging 模型可在高度信心水準下，替代數學模型。



4.3.2 全域敏感度指標之準確度評估

進一步探討 N_{GSA} 與演算收斂的關係。分別以 $N_{GSA} = 1e4, 5e4, 1e5, 1e6, 5e6, 1e7$ 進行實驗，並列出 N_{GSA} 與計算所得的全域敏感度指標的關係。

$N_{initial} = 1000$ 的實驗結果如圖4.5。圖中可看見曲線的趨勢在取樣次數到達 $1e6$ 時，其全域敏感度指標幾乎不會有變化，表示收斂，且收斂值與解析解的計算結果相差約在 $0.0001 \sim 0.004$ 之間；在取樣次數為 $1e5$ 時，最大誤差約落在 0.003 左右；然而在樣本數為 $1e4$ 時，所得的結果是幾組實驗中最接近解析解計算結果的，但在收斂實驗中，卻不是 Kriging 模型的全域敏感度收斂值。

從實驗結果可以得到結論：當 N_{GSA} 達到 $1e6$ 時，Kriging 模型會在誤差範圍 0.0001 內呈現收斂，而在 N_{GSA} 達到 $1e4$ 時，雖然未達到收斂的情形，但誤差仍在合理範圍內，因此從此實驗中可以確定只要 N_{GSA} 在 $1e4$ 以上，皆可以計算出具有可信度的敏感度指標。

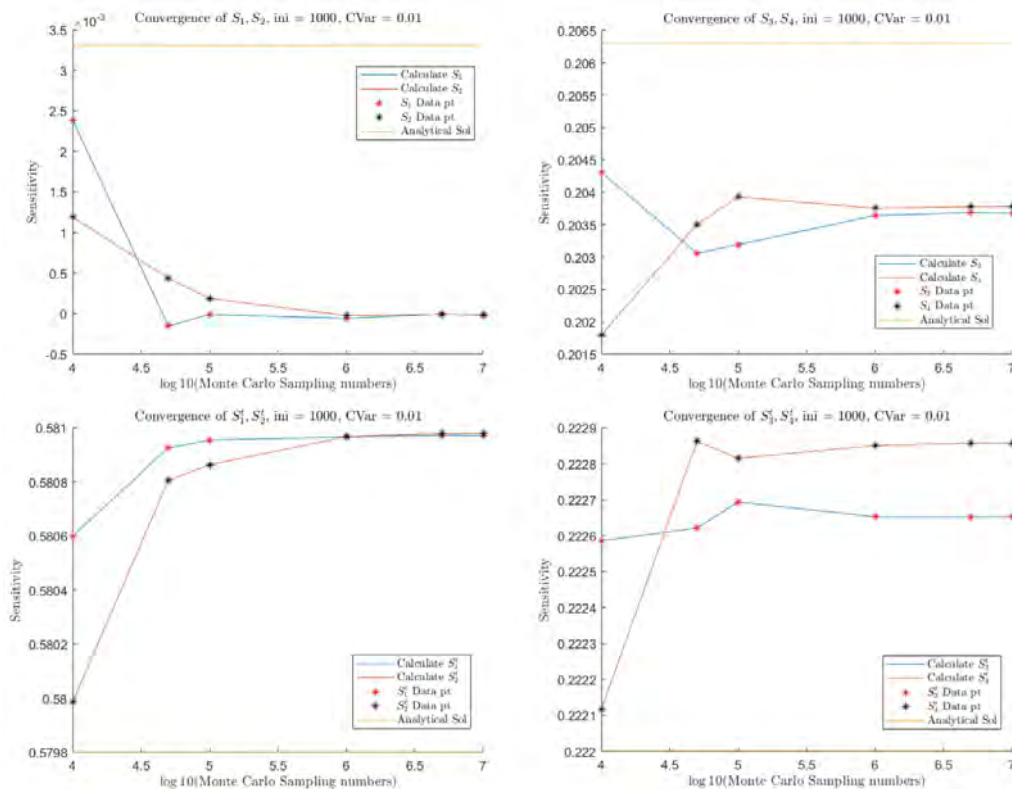


圖 4.5: 初始取樣 1000 次之蒙地卡羅取樣與收斂關係

在實驗中也可以發現，在系統的全域敏感度指標非常小時，以 S_1 為例，有可能會使計算的敏感度指標呈現負數，在敏感度的意義上是不合理的。因此可以得到另一個結論：使用基於模擬的方法計算全域敏感度指標，對於數值小的敏感度指標估測無法做到非常精準，因此面對經由計算所得的敏感度，可判定與系統真實的敏感度約會存在 0.5% 的誤差。這項結論也讓我們對於後續估計系統以及進行最佳化演算時，能對演算結果的誤差數量級有初步的了解。



4.4 最佳化操作參數與準確度評估

4.4.1 最佳化操作參數之目標函數

所謂「最佳的操作參數」的意義，即為能最有效將單一個模型參數之不確定性凸顯出來，或可稱為對參數的「激發」。為此，本研究使用主效應指標 S_i 及總效應指標 S_i^t 為依據，建立最佳化程序中的目標函式。以 θ_1 為激發目標參數為例，建立目標函式如下：

$$H_p = \left(\frac{S_1^t - S_1}{S_1} + \frac{S_2 + S_3 + S_4}{S_1} \right) \quad (4.3)$$

從方程式中可看見，欲使目標函式 H_p 有最小值，分母的 $S_1^t - S_1$ 表示 x_1 的主效應指標不只要被放大，與其他模型參數之間的交互作用需要被縮小；而另一項分母 $S_2 + S_3 + S_4$ 則表示其他模型參數的主效應指標也需要被縮小。本研究則期望透過此目標函數，透過最佳化方法，可分別使不確定性 $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ 的偏差所造成的影響被凸顯。

利用第3.5.1節介紹的指標產生器 $F(\mathbf{x})$ ，將每個全域敏感度指標改寫為操作參數 \mathbf{x} 的函式。對於目標函數而言，所有的項皆為各個參數的敏感度指標組成，因此也可以將目標函式改寫為操作參數 \mathbf{x} 的函數。

透過方程式的結合和代換，以凸顯不確定參數 θ_1 的影響為例，最佳化此目標函式的一般式可以寫成：

$$\begin{aligned} \min \quad & H_p(\mathbf{S}, \mathbf{S}^t) = \left(\frac{S_1^t - S_1}{S_1} + \frac{S_2 + S_3 + S_4}{S_1} \right) \\ \text{w.r.t } \quad & \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \hat{S}_i = \hat{F}_{m_i}(\mathbf{x}), i = 1, \dots, 4 \\ & \hat{S}_i^t = \hat{F}_{t_i}(\mathbf{x}), i = 1 \\ & \forall \{\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}\} \in \mathcal{F} \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.4.2 最佳化結果及準確度評估

為了測試本研究所提出來的最佳化方法是否可以有效且準確的達成激發參數的效果，本研究同時使用直接求解法對目標函數進行求解。此方法僅能在取樣成本非常低的數學模型中才能使用，因此只被用於方法的驗證，而無法被實際應用於工程案例中。

直接求解最佳化演算法

與前小節所提到的直接求解法概念相同，直接求解即為不使用 Kriging 模型取代原系統來計算敏感度，方法流程如圖4.6所示。直接求解最佳化演算法步驟如下：

1. 由最佳化演算法指定操作參數 \mathbf{x} 的設計空間
2. 在模型參數中進行取樣，建立樣本矩陣 $\boldsymbol{\theta}_{MC}$

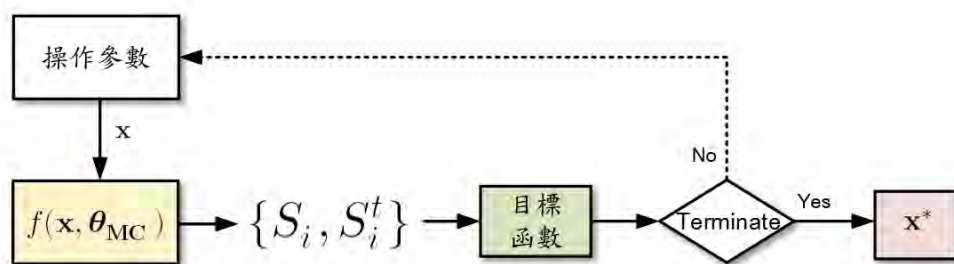


圖 4.6: 直接求解最佳化演算法流程圖

3. 計算在操作參數及輸入樣本矩陣 θ_{MC} 時，由輸出計算各參數的全域敏感度指標
4. 透過敏感度指標計算目標函數於 \mathbf{x} 的輸出，並透過 DIRECT 演算法尋找下一個操作參數的取樣點
5. 重覆步驟 2 至 4 直到演算法收斂，即可求得最佳操作變數 \mathbf{x}^*

直接求解法所得到的最佳解在這裡被認定為可以最大化特定參數之最佳操作參數的標準答案，對於不確定參數 $p = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$ 而言，所對應到的最佳操作參數 $\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \mathbf{x}_3^*, \mathbf{x}_4^*$ 整理於表 4.8：

表 4.8: 直接求解之最佳操作參數

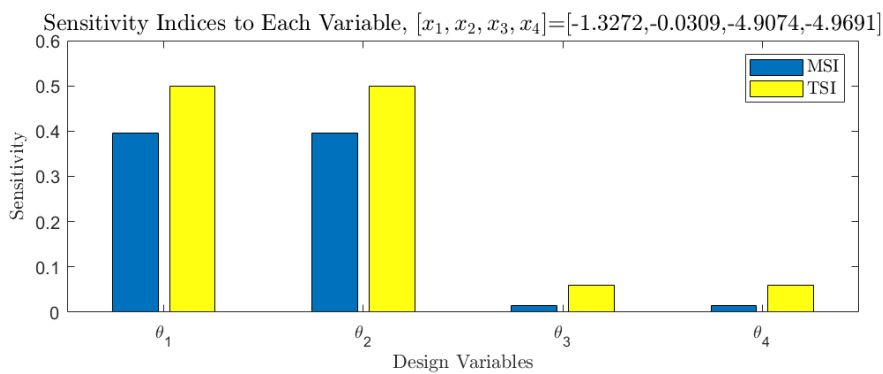
Uncertain Parameter	Operation Parameters
θ_i	$[x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*]$
θ_1	$[-1.3727, -0.0309, -4.9074, -4.9691]$
θ_2	$[-1.3727, -0.0309, -4.9074, -4.9691]$
θ_3	$[-0.0926, -0.6481, -0.0926, -0.6481]$
θ_4	$[-0.0926, -0.6481, -0.0926, -0.6481]$

各個不確定模型參數在對應的最佳操作參數下，對應到的敏感度列於表 4.9 及圖 4.7。

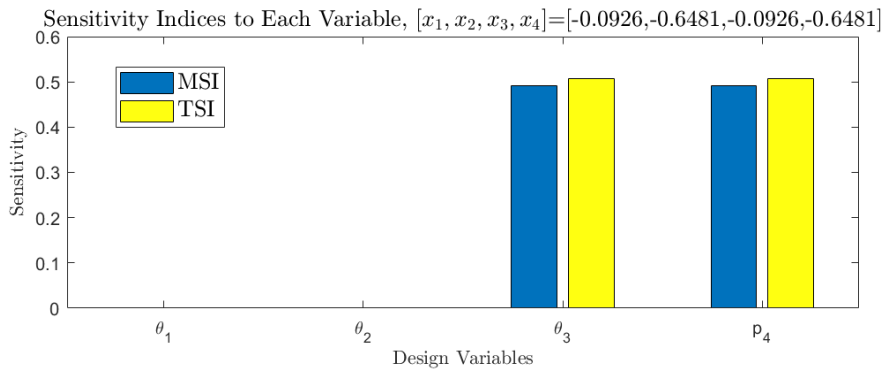
由於對 θ_1, θ_2 及 θ_3, θ_4 來說，最佳的激發參數是相同的，因此圖 4.7 僅各自顯示一組敏感度指標。參數的影響具有對稱性也可以從模型中觀察出來。

表 4.9: 於直接求解法之最佳操作參數下各個模型參數之全域敏感度指標

Sensitivity Indices	MSI and TSI of model parameters under optimal operation parameters (MSI,TSI)			
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
cost	1.4547	1.4547	1.0355	1.0355
(S_1, S_1^t)	(0.3959,0.5483)	(0.3959,0.5483)	(2.37e-4,7.13e-4)	(2.37e-4,7.13e-4)
(S_2, S_2^t)	(0.3959,0.5483)	(0.3959,0.5483)	(2.40e-4,7.09e-4)	(2.40e-4,7.09e-4)
(S_3, S_3^t)	(0.0138,0.0594)	(0.0138,0.0594)	(0.4907,0.5077)	(0.4907,0.5077)
(S_4, S_4^t)	(0.0138,0.0594)	(0.0138,0.0594)	(0.4907,0.5078)	(0.4907,0.5078)



(a) θ_1 及 θ_2 於最佳操作參數激發下之敏感度指標



(b) θ_3 及 θ_4 於最佳操作參數激發下之敏感度指標

圖 4.7: 模型參數於直接求解法最佳激發操作參數下之敏感度指標

基於替代模型求解最佳化演算法

有了直接求解法的最佳解作為依據後，由基於替代模型方法所得到的解就可以被驗證。基於模型法的操作步驟如下：

1. 使用低差異取樣，於操作變數 \mathbf{x} 的設計空間中透過低差異取樣得到 $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_{N_{opt}}\}$ 。在此案例中， $N_{opt} = 96$
2. 依序將 \mathbf{x}_1 至 $\mathbf{x}_{N_{opt}}$ 代入模型的指標生成函數 (見圖3.16，計算所對應的 4 個主效應指標 S_1, \dots, S_4 及 4 個總效應指標 S_1^t, \dots, S_4^t)



3. 以 \mathbf{x} 為模型輸入、依序以主效應及總效應指標作為模型輸出，共擬合生成 8 個 Kriging 模型 (見圖3.17)，分別為 $\hat{F}_{m_1}(\mathbf{x}), \dots, \hat{F}_{m_4}(\mathbf{x}); \hat{F}_{t_1}(\mathbf{x}), \dots, \hat{F}_{t_4}(\mathbf{x})$
4. 將 $\hat{F}_{m_1}(\mathbf{x}), \dots, \hat{F}_{m_4}(\mathbf{x}); \hat{F}_{t_1}(\mathbf{x}), \dots, \hat{F}_{t_4}(\mathbf{x})$ 代換式4.4中的全域敏感度指標項，使目標函數可作為操作參數 \mathbf{x} 的函數。
5. 經由最佳化演算法，求解基於替代模型求解法下的用於激發不同參數 θ_i 之最佳操作參數 \mathbf{x}_i^*

將利用基於替代模型方法下所求得的最佳操作參數列於表，可看見與直接求解法的最佳解有些微不同。表4.10列出使用基於替代模型法求解得到的最佳操作參數。

表 4.10: 基於替代模型法之最佳操作參數

Uncertain Parameter	Operation Parameters
θ_i	$[x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*]$
θ_1	[-1.1366,-0.1857,-4.7374,-4.0052]
θ_2	[-1.1366,-0.1857,-4.7374,-4.0052]
θ_3	[-0.0944,-0.6667,-0.0833,-0.6833]
θ_4	[-0.0944,-0.6167,-0.0833,-0.6833]

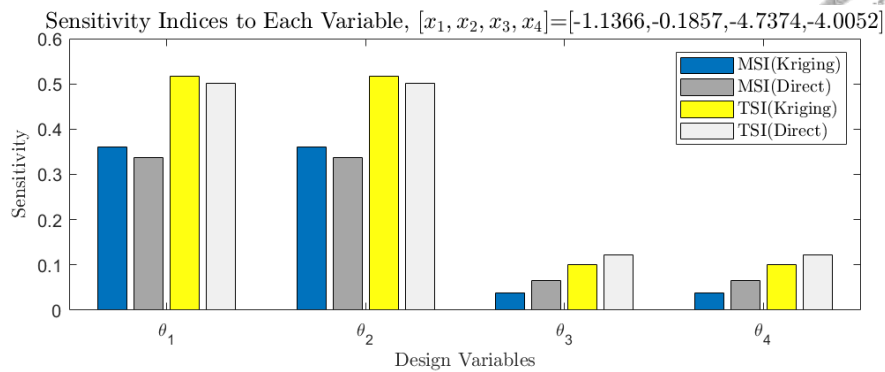
將所求得的最佳操作參數代回至原替代模型中，並找出各個模型參數在對應的最佳操作參數下所對應到的主效應指標及總效應指標，整理於表4.11。

表 4.11: 基於替代模型求解法之最佳操作參數下各個模型參數之全域敏感度指標

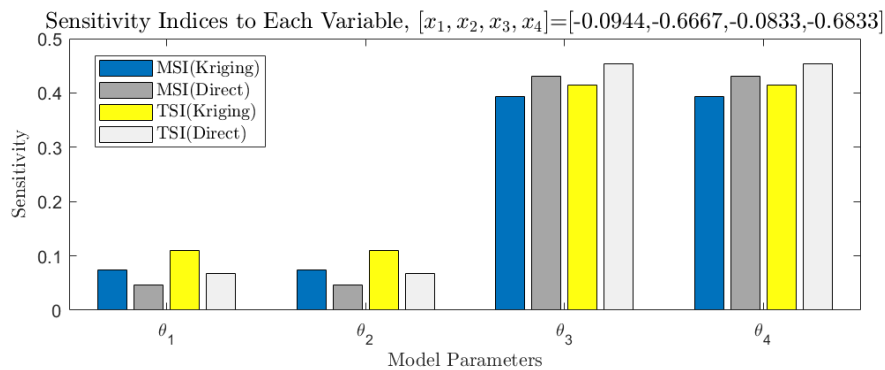
Sensitivity Indices	MSI and TSI of model parameters under optimal operation parameters (MSI,TSI)			
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
cost	1.6496	1.6493	1.4306	1.4302
(S_1, S_1^t)	(0.3606,0.5170)	(0.3606,0.5170)	(0.0744,0.1100)	(0.0744,0.1100)
(S_2, S_2^t)	(0.3606,0.5169)	(0.3606,0.5169)	(0.0744,0.1101)	(0.0744,0.1101)
(S_3, S_3^t)	(0.0390,0.1009)	(0.0390,0.1009)	(0.3941,0.4148)	(0.3941,0.4148)
(S_4, S_4^t)	(0.0389,0.1009)	(0.0389,0.1009)	(0.3941,0.4149)	(0.3941,0.4149)

同時，為了驗證 Kriging 模型預測的全域敏感度指標準確度，圖4.8中也同時將由基於替代模型法所求得的最佳操作參數代回真實模型，求出真實模型在該最佳操作參數下的真實全域敏感度，與預測的敏感度指標進行比較。

透過細部來觀察兩種不同的求解方法在 Direct 演算法中的求解歷程，可以判定求得的最佳解是否為合理可以被合理的解釋。如圖4.9，可看見在左側欄中，所代表的意義



(a) θ_1 及 θ_2 於最佳操作參數激發下之估測及真實敏感度指標



(b) θ_3 及 θ_4 於最佳操作參數激發下之估測及真實敏感度指標

圖 4.8: 模型參數於替代模型法之最佳激發操作參數下之估測及真實敏感度指標

為總效應和主效應的差收斂在較小值，同時主效應收斂在較大值，而4.9中右側欄可以看見，對 θ_1 和 θ_2 來說，可以同時找到其他參數主效應相對小且自己的主效應較大的位置，但對於 θ_3 及 θ_4 而言，受目標函式的限制，較難找到符合所有條件趨勢的解。然而從圖4.9中可以看見不論是直接求解法或是基於替代模型法，收斂的趨勢都是相近的，並且收斂的位置相差皆位於 10 個百分點內。

從圖4.9中可以發現，不論是使用 Kriging 模型進行全域敏感度的預測主效應指標或是總效應指標時，仍然會與估測的真實數值有些許的落差，誤差範圍約介於 1% 至 3% 左右。

4.5 小結

本章以一個單一輸出的數學模型作為模型案例，驗證了將替代模型加入基於變異數法之全域敏感度分析方法時，透過調整初始取樣及蒙地卡羅取樣數量，可以使替代模型有效的取代原系統，也應該可以被應用於複雜系統的全域敏感度分析方法中。其次，本章也驗證了將最佳化演算法中的目標函式以指標產生函數取代全域敏感度指標，直接透過替代模型搜尋最佳解的方法是可行的。雖然在預測最佳操作參數的準確度並不至於精確，誤差範圍約介於 1% 至 3% 之間，但由於工程應用對於透過此方法所求得的敏感度需求並不會非常精準，根據方法驗證的結果，本研究認為此方法是可行且可以被應用的。

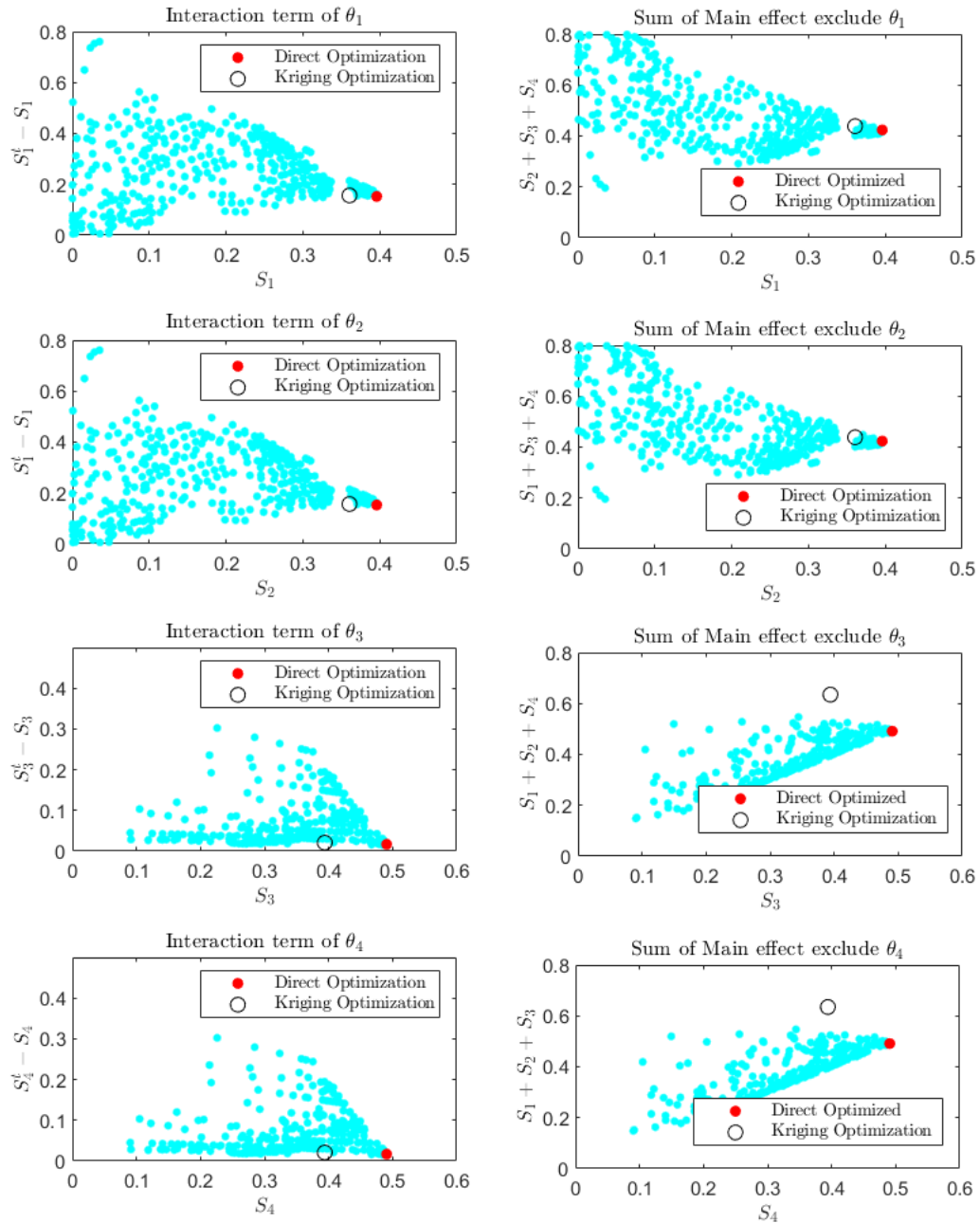


圖 4.9: 兩種求解法之最佳化演算歷程



動態輸出數學模型之不確定模型參數激發與校準

在前章本研究以一個單一輸出的數學案例驗證了以替代模型結合最佳化方法來尋找用於激發參數之效應的最佳操作參數。本章欲探討的，則是當分析對象的輸出為時間函數的動態系統，是否也能以相同的概念來進行操作參數的最佳化及校準。本章建立一個輸出為時間函數之動態輸出模型，首先驗證以結合替代模型及主成分分析於動態模型的全域敏感度分析方法之可行性及準確性評估，並以與前章相同的方法驗證求解最佳化操作參數方法與評估。完成驗證及操作參數的最佳化後，本章也將透過此數學模型及最佳化操作參數，將混沌多項式展開及卡爾曼濾波器應用於數學模型的參數校準中，並進行模型校準，確認方法的應用可行性及操作細節。

5.1 數學模型

本章所選擇的數學模型參考 Wang 於 [99] 所應用之數學模型，為高度非線性且參數耦合複雜的模型，且可明顯的觀察到參數的偏差對動態輸出的影響。數學模型如下：

$$y(t) = \theta_1 x_1 \cos\left(\frac{\theta_2 + x_2}{\theta_3} t\right) + \theta_3 \log(x_2) \left(\sin\left(\frac{1}{x_1}\right) + \sqrt{x_2} t \theta_3 x_3\right) - 3 + \epsilon \quad (5.1)$$

其中， $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 為不確定模型參數，在以均勻分布呈現，而 x_1, x_2, x_3 為可調整的操作參數， ϵ 作為模型的量測雜訊。各項數值區間列於表 5.1。

設定模型取樣時間為 15 秒，取樣頻率為 100Hz，單筆資料供有 1500 個資料點。將操作參數預設為 $x_1 = 10, x_2 = 0.5, x_3 = 10$ ，動態輸出模型於不確定因素下的輸出結果如圖 5.1。

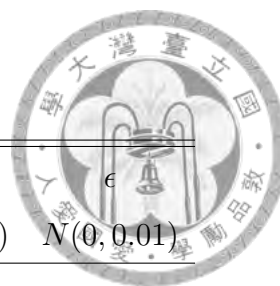


表 5.1: 動態輸出模型之參數分佈

不確定模型參數	θ_1	θ_2	θ_3
分佈區間	$U(0.95, 1.05)$	$U(0.95, 1.05)$	$U(0.95, 1.05)$
操作參數	x_1	x_2	x_3
操作區間	$[5, 10]$	$[0, 0.5]$	$[0, 10]$

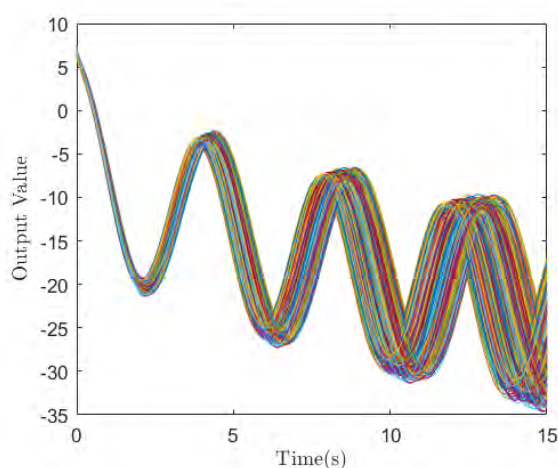


圖 5.1: 動態輸出模型於不確定因素下之輸出

5.2 全域敏感度分析

本節同樣會以直接求解法及基於模型的全域敏感度計算方法來計算敏感度指標，後者可被應用於複雜系統來降低取樣次數並藉此降低運算成本；前者僅能被應用於數學案例中，可將其計算結果用來驗證基於替代模型方法的準確性。

5.2.1 直接求解動態系統全域敏感度指標

直接求解動態系統的全域敏感度指標流程可以圖5.2簡單表示。詳細操作步驟如下：

1. 建立獨立輸入樣本矩陣

自不確定模型參數 θ 的設計空間中以低差異取樣、根據式 3.30和式3.31，建立獨立輸入樣本矩陣 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}^i$ 。在此案例中，假設每個獨立輸入樣本矩陣的取樣次數為 $N_{initial}$ 。對於量測雜訊的取樣，可以直接於高斯分佈下取隨機變數，或者可在均勻分布空間中取樣後，再以反函數方式轉換為低差異之高斯分佈。

2. 進行模擬並輸出動態曲線

將獨立輸入樣本矩陣依序輸入模型中進行模擬，並將每個獨立輸入樣本矩陣的輸

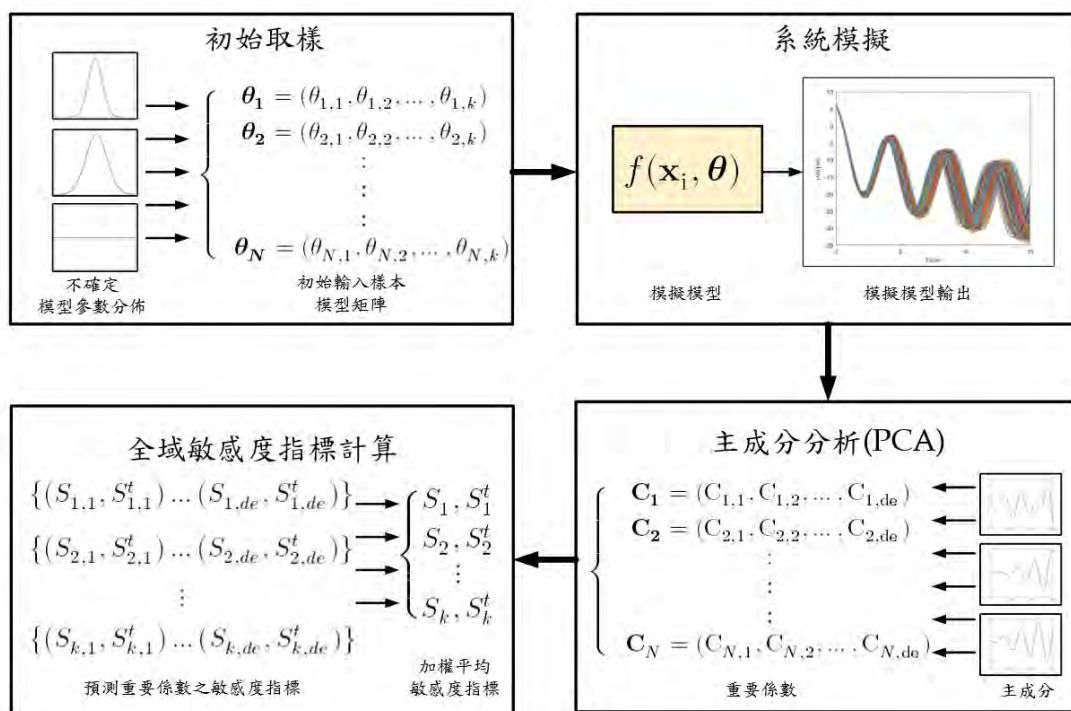


圖 5.2: 直接求解動態系統全域敏感度流程

出資料整理為：

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1(1) & y_1(2) & \cdots & y_1(1500) \\ y_2(1) & y_2(2) & \cdots & y_2(1500) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N_{initial}}(1) & y_{N_{initial}}(2) & \cdots & y_{N_{initial}}(1500) \end{bmatrix}_{N_{initial} \times 1500}$$

3. 資料前處理

計算所有輸出資料在每一個時間點的平均，並將每一筆資料減去平均值，計算出每一筆資料的在每個取樣時間時與平均相比的變異。減去平均後的資料可表示為：

$$\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}} = [\tilde{\mathbf{y}}_1, \tilde{\mathbf{y}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_{1500}]_{N_{initial} \times 1500} \quad (5.2)$$

4. 建立共變異矩陣

建立 $\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}$ 的共變異矩陣，並求得共變異矩陣的特徵值與特徵向量，並將變異數依照大小排序，如式3.43。

5. 降低維度

在這個案例中，希望有達 99.9% 的資料可以被保存。根據依序排列的特徵值，選擇前 de 個特徵值的合，使其合能大於所有特徵值總合的 99.9%。在此案例中，只要初始取樣 $N_{initial} > 200$ ， de 皆為 5。



6. 計算重要係數

透過上個步驟確定了截斷數 $de = 5$ 後，表示每一筆資料在 K-L 重組時僅需要計算 5 個重要係數，即可幾乎還原原始資料。重要係數的計算方式可參考式 3.46。此時，所得到的重要係數為：

$$C_P = [C_{P,1} \ C_{P,2} \ C_{P,3} \ C_{P,4} \ C_{P,5}]$$

$$C_Q = [C_{Q,1} \ C_{Q,2} \ C_{Q,3} \ C_{Q,4} \ C_{Q,5}]$$

$$C_{R^1} = [C_{R^1,1} \ C_{R^1,2} \ C_{R^1,3} \ C_{R^1,4} \ C_{R^1,5}]$$

$$C_{R^2} = [C_{R^2,1} \ C_{R^2,2} \ C_{R^2,3} \ C_{R^2,4} \ C_{R^2,5}]$$

$$C_{R^3} = [C_{R^3,1} \ C_{R^3,2} \ C_{R^3,3} \ C_{R^3,4} \ C_{R^3,5}]$$

$$C_{R^4} = [C_{R^4,1} \ C_{R^4,2} \ C_{R^4,3} \ C_{R^4,4} \ C_{R^4,5}]$$

7. 計算重要係數之全域敏感度指標

將五個重要係數作為動態輸出模型的五個不同的純量輸出，根據式 3.34 及式 3.36，依序計算 C_1 至 C_5 的全域敏感度指標。此步驟結束，會得到每個不確定模型參數對應的 5 個重要係數的主效應指標及 5 個總效應指標。

$$\{S_1, S_1^t\} = \{(S_{1,1}, S_{1,1}^t), (S_{1,2}, S_{1,2}^t), \dots, (S_{1,5}, S_{1,5}^t)\}$$

$$\{S_2, S_2^t\} = \{(S_{2,1}, S_{2,1}^t), (S_{2,2}, S_{2,2}^t), \dots, (S_{2,5}, S_{2,5}^t)\}$$

$$\{S_3, S_3^t\} = \{(S_{3,1}, S_{3,1}^t), (S_{3,2}, S_{3,2}^t), \dots, (S_{3,5}, S_{3,5}^t)\}$$

$$\{S_\epsilon, S_\epsilon^t\} = \{(S_{\epsilon,1}, S_{\epsilon,1}^t), (S_{\epsilon,2}, S_{\epsilon,2}^t), \dots, (S_{\epsilon,5}, S_{\epsilon,5}^t)\}$$

8. 指標融合

最後，即可將每個不確定模型參數的 5 組敏感度指標，融合成一組等效、具有代表性的指標。將同一個不確定模型參數中的指標以對應的特徵值作為該指標的權重，進行加權平均，即可得到單一指標。以 θ_1 為例：

$$S_1 = \frac{1}{I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5} (S_{1,1}I_1 + S_{1,2}I_2 + S_{1,3}I_3 + S_{1,4}I_4 + S_{1,5}I_5)$$

$$S_1^t = \frac{1}{I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5} (S_{1,1}^tI_1 + S_{1,2}^tI_2 + S_{1,3}^tI_3 + S_{1,4}^tI_4 + S_{1,5}^tI_5)$$

由於無法自文獻得到此模型各參數的全域敏感度準確值，且根據 [119] 所敘述，使用蒙地卡羅法求解全域敏感度指標會因取樣數量不同而有差異。因此在開始後續分析前，本研究先以大樣本數生成輸出矩陣，直到全域敏感度指標及特徵值有明顯收斂值，則將該收斂值作為全域敏感度指標準確的標準解。以不同大樣數計算求得的全域敏感度指標如表 5.2。從表 5.2 中可以看到，在初始取樣數為 $1e6$ 時，指標的數值有明顯的收斂。因

此可以將這組指標作為當操作參數 $x_1 = 10, x_2 = 0.5, x_3 = 10$ 時，系統中不確定模型參數的全域敏感度指標的準確值。



表 5.2: 動態輸出模型之各重要係數及等效全域敏感度指標與取樣數量之關係

$N_{initial}$		θ_1 (S_1, S_1^t)	θ_2 (S_2, S_2^t)	θ_3 (S_3, S_3^t)	Eigen value
Overall	1000	(0.626, 0.7028)	(0.2903, 0.3637)	(0.0182, 0.0182)	13302.5
	100000	(0.6189, 0.6998)	(0.2821, 0.363)	(0.0181, 0.0182)	13307.76
	1000000	(0.6189, 0.6998)	(0.2821, 0.363)	(0.0181, 0.0182)	13307.54
C_1	1000	(0.6836, 0.6896)	(0.3166, 0.3191)	(0.0008, 0.0009)	11343.28
	100000	(0.6804, 0.6856)	(0.3136, 0.3188)	(0.0008, 0.0008)	11347.11
	1000000	(0.6804, 0.6856)	(0.3136, 0.3188)	(0.0008, 0.0008)	11346.97
C_2	1000	(0.3314, 0.9296)	(0.1115, 0.7055)	(0.0049, 0.0061)	1565.973
	100000	(0.2938, 0.932)	(0.0634, 0.7016)	(0.0047, 0.0047)	1567.353
	1000000	(0.2938, 0.9321)	(0.0633, 0.7016)	(0.0047, 0.0047)	1567.263
C_3	1000	(0.1406, 0.1503)	(0.2492, 0.2639)	(0.5913, 0.596)	373.4143
	100000	(0.1392, 0.1524)	(0.2507, 0.2643)	(0.5965, 0.5969)	373.4537
	1000000	(0.1392, 0.1524)	(0.2507, 0.2643)	(0.5965, 0.5969)	373.4628
C_4	1000	(0.1047, 0.9661)	(0.036, 0.8826)	(0.0047, 0.005)	14.7957
	100000	(0.1123, 0.9714)	(0.0228, 0.882)	(0.0056, 0.0056)	14.787
	1000000	(0.1125, 0.9715)	(0.0229, 0.8819)	(0.0056, 0.0056)	14.785
C_5	1000	(0.1799, 0.2245)	(0.3967, 0.4462)	(0.3797, 0.3806)	5.0388
	100000	(0.1778, 0.2257)	(0.3969, 0.4451)	(0.3772, 0.3775)	5.0565
	1000000	(0.1778, 0.2257)	(0.3968, 0.4451)	(0.3772, 0.3775)	5.0565

5.2.2 基於替代模型之動態系統全域敏感度分析方法

考量到使用 Sobol 法分析全域敏感度所需用的取樣次數需要非常多才能使指標收斂，因此本研究針對現存的動態系統全域敏感度指標分析方法進行調整，在原本的流程中加入替代模型的使用，流程概念可參考 3.15。將此流程應用於本案例中，其流程與方法如下：

1. 建立初始取樣獨立矩陣與系統模擬

以低差異取樣方法在不確定模型參數設計空間中取出 $N_{initial}$ 組初始取樣，並進行模擬，得到 $N_{initial}$ 筆輸出資料。 $N_{initial}$ 的建議須超過不確定模型參數數量的 100 倍。

2. 主成分分析

對輸出資料以 K-L 轉換進行主成分分析，並透過降低維度將每一筆原始資料轉換

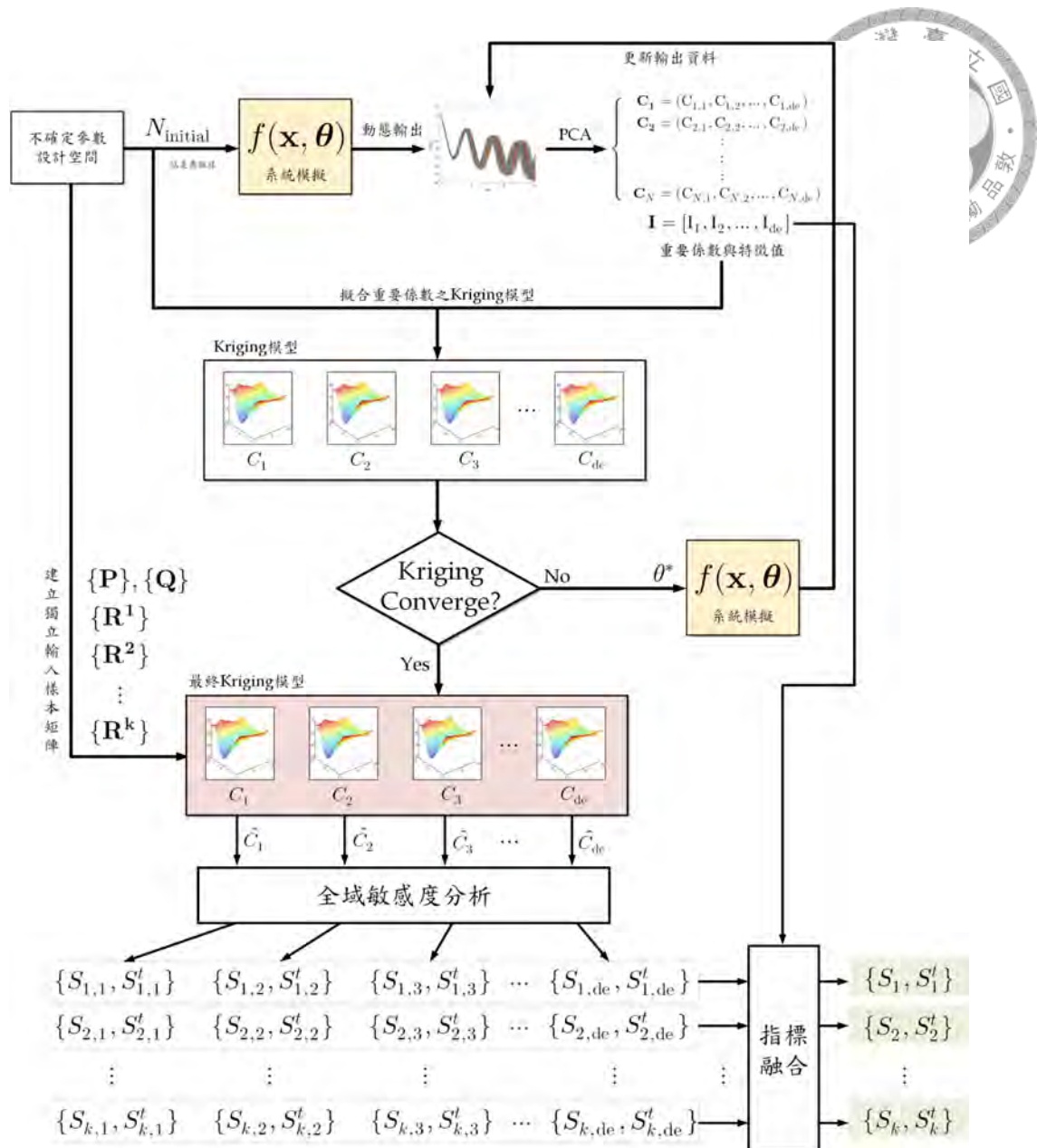


圖 5.3: 基於替代模型之動態系統全域敏感度分析操作流程圖

為主成分與 de 個重要係數的線性組合，同時記錄重要係數所對應的共變異矩陣特徵值。

3. 擬合初代 Kriging 模型

以初始取樣輸入矩陣為輸入，分別以第 1 至第 de 組重要係數作為系統輸出，共擬合成 de 個 Kriging 模型。

4. 判斷初代 Kriging 模型是否達收斂標準

由 K-L 轉換進行主成分分析時，每一組重要係數的變異數皆為 1，因此在此可一律將收斂變異數 $CVar$ 設定為 0.05。考量到建議採樣的決策複雜度，EGO 在計算取樣指標時僅考慮最大特徵值所對應到的重要係數之 Kriging 模型的準確度 (此項

對全體的影響權重最高)。透過演算法搜尋 Kriging 模型中的最大變異數及其設計空間中的位置作為取樣指標 θ^* ，並以最大變異數與 $CVar$ 進行比較判定是否需繼續取樣以更新 Kriging 模型。在這個案例中，考量到 EGO 的演算時間，因此設定對單一個 Kriging 模型的 EGO 迭代次數上限為 50 次。



5. 更新 Kriging 模型

以 θ^* 作為系統輸入，並輸出得到對應的輸出資料 \mathbf{y}^* 。以 \mathbf{y}^* 來更新原輸出資料矩陣，並重複步驟 2.4 直到 Kriging 模型達到收斂條件或達 EGO 迭代次數限制，以該 Kriging 模型作為最終的 Kriging 模型。

6. 建立獨立輸入樣本矩陣

自不確定設計變數的設計空間中，以低差異取樣方法建立取樣 N_{GSA} 次的兩獨立輸入樣本矩陣 \mathbf{P} 、 \mathbf{Q} 、及 $\mathbf{R}^1 \sim \mathbf{R}^3$ 。方法可參考式 3.31。

7. 預測重要係數及全域敏感度分析

將 \mathbf{P} 、 \mathbf{Q} 、及 $\mathbf{R}^1 \sim \mathbf{R}^3$ 依序輸入至 d_e 個 Kriging 模型，得到預測的重要係數。透過式 3.34 及式 3.36 計算各個不確定設計參數的每個重要係數的主效應指標及總效應指標。

8. 指標融合

將每個參數的 d_e 項敏感度指標，以其對應的特徵項量作為權重，進行加權平均，得到最終可代表系統不確定模型參數的敏感度指標。

透過此方法，可以在使用較少的系統模擬次數及達成可收斂的全域敏感度計算。然而，與第四章所面臨的問題相同，演算的結果也會在三個演算參數所決定：初始取樣次數 $N_{initial}$ 、 $CVar$ 、及 N_{GSA} 。在後續章節中，本研究會先討論如何透過擬合準確度來決定 $N_{initial}$ ，並透過指標的收斂性來探討 N_{GSA} 。

5.3 替代模型求解與評估

本節首先探討初始取樣次數 $N_{initial}$ 與 Kriging 模型準確度的關係。由於收斂變異數 $CVar$ 在並不會隨著操作參數不同而有改變，因此並不會將 $CVar$ 列入討論。在這一節的討論中，模擬參數的設定會以本案例預設操作為主，在取樣成本的許可下進行探討，並提出一個可供參考的流程。在其他案例中則須根據不同模型的運算時間、可承擔的運算成本進行評估。本節分別對於 $N_{initial} = [200, 300, \dots, 700, 800]$ 共 7 組不同的初始取樣來探討其運算時間及準確度，最後決定一組最適當的演算參數。選定最適合的初始取樣後，再針對 N_{GSA} 與敏感度指標的收斂性進行探討，決定最有效率之 N_{GSA} 。

5.3.1 Kriging 模型擬合準確度評估

以 7 組不同的初始取樣各數進行模擬後，所得到的總運算次數、Kriging 模型擬合時間、EGO 演算法進行的時間 (包含取樣和模擬)、全域敏感度分析的時間、以及運算的

總時間，都列於表5.3。

表 5.3: 動態輸出模型中不同初始取樣次數與各階段演算時間之關係

$N_{initial}$	Total simulation runs	Kriging fitting time	EGO time	GSA time	overall
200	249	0.6056	62.2007	3.3595	66.4893
300	319	1.2835	39.5943	4.2986	45.5606
400	413	2.4220	45.6761	5.7109	54.2130
500	507	4.2244	39.1923	7.0711	50.9197
600	603	6.7712	25.4634	8.5173	41.1856
700	701	10.3243	13.3260	10.0323	34.1392
800	800	15.1747	2.1041	11.4701	29.2579

自表5.3中可以發現，EGO 的迭代次數與演算時間為正相關，且樣本數越多時不論是在進行 EGO 的迭代還是全域敏感度分析，由於演算法在進行預測輸出值時會考量到預測點與所有參與擬合的樣本之關係，所以速度相對會變慢。

進一步模型準確度評估，步驟如下：

1. 保留以初始取樣擬合的最終 Kriging 模型。此時的初始取樣資料為訓練集
2. 建立輸入次數為 4000 次之獨立輸入矩陣，並透過系統模擬得到其輸出
3. 透過 K-L 轉換得到該筆資料的 de 組重要係數，將此作為驗證集
4. 將驗證集的輸入矩陣輸入由訓練集擬合之 Kriging 模型，得到預測輸出
5. 以驗證集輸出作為真實資料，計算與預測輸出之間的關係誤差分佈、 R^2 、及 $RAAE$

自模型驗證中所計算不同的 $N_{initial}$ 下各個重要係數的 R^2 及 $RAAE$ 為：

表 5.4: 動態輸出模型之初始取樣數量及對應 R^2

$N_{initial}$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
200	0.9946	0.9585	0.9801	0.8328	0.9748
300	0.9984	0.9866	0.9940	0.9155	0.9905
400	0.9990	0.9932	0.9953	0.9457	0.9920
500	0.9993	0.9976	0.9986	0.9682	0.9955
600	0.9996	0.9978	0.9988	0.9810	0.9979
700	0.9997	0.9985	0.9993	0.9832	0.9979
800	0.9998	0.9991	0.9995	0.9899	0.9987



表 5.5: 動態輸出模型之初始取樣及對應 $RAAE$

$N_{initial}$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
200	0.0484	0.1273	0.1157	0.1938	0.1133
300	0.0256	0.0707	0.0602	0.1389	0.0657
400	0.0178	0.0448	0.0522	0.1216	0.0592
500	0.0143	0.0259	0.0226	0.0913	0.0424
600	0.0111	0.0238	0.0230	0.0666	0.0295
700	0.0092	0.0191	0.0162	0.0540	0.0269
800	0.0078	0.0158	0.0171	0.0442	0.0226

從表5.4及表5.5中可以發現， $N_{initial}$ 為 200 至 400 次時雖然有使用 EGO 來強化模擬模型，但模型準確性卻不如 $N_{initial}$ 為 500 次以上的實驗。因此可以知道在如此的 $CVar$ 作為收斂條件下，EGO 在此案例的效果並不顯著。從 R^2 及 $RAAE$ 中可以發現，在樣本數較少時，Kriging 模型針對 C_4 的預測能力差異較為顯著。而觀察初始取樣次數較大的實驗可以發現，在初始取樣次數自 500 次增加至 600 次時，各項重要係數在 R^2 及 $RAAE$ 上皆顯示有明顯的成長，而在初始取樣次數達到 600 次後，模型的準確度隨著取樣次數增加的程度則不明顯，如圖5.4所示。

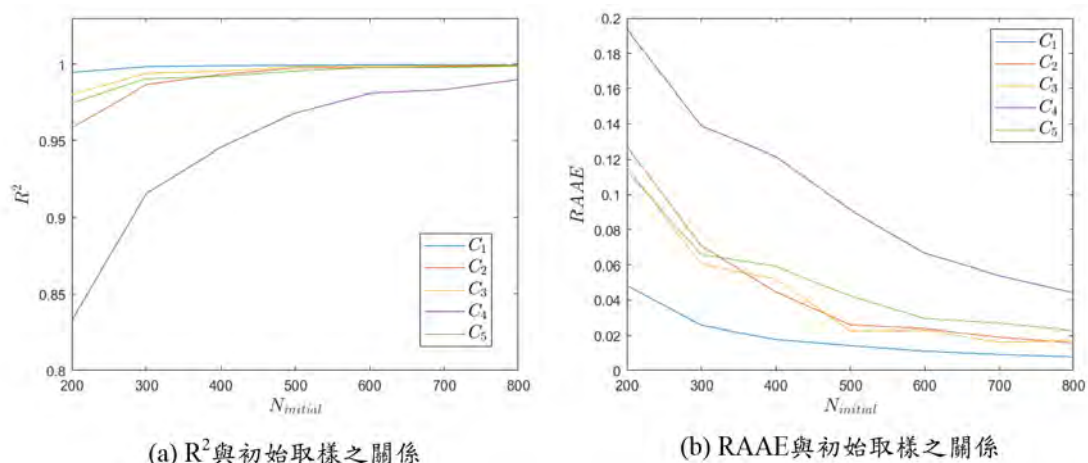


圖 5.4: 初始取樣次數與模型準確度評估指標之關係

因此，從上述的模型準確度評估中，可以看到取樣次數 600 次，且不使用 EGO 時，可使用較有效率的計算成本建立預測能力較好的 Kriging 模型。比較初始取樣次數 200 次、600 次、及 800 次時的誤差分佈，比較如圖5.5至5.7所示。

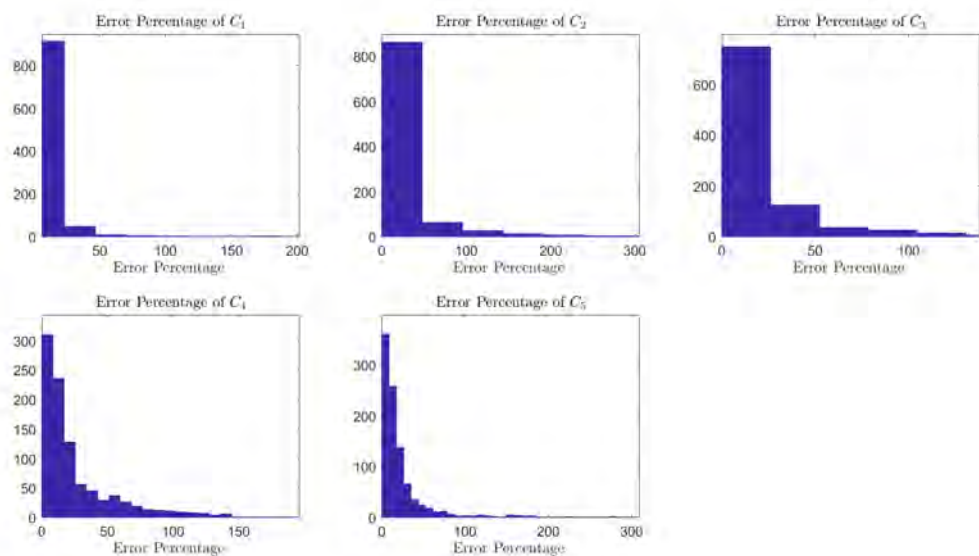


圖 5.5: 動態輸出模型初始取樣 200 次之重要係數預測誤差分佈

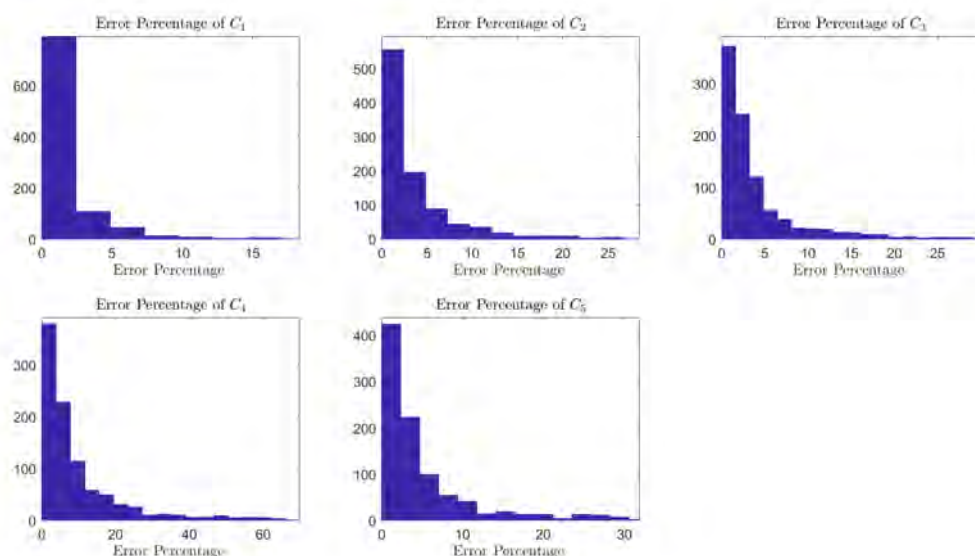


圖 5.6: 動態輸出模型初始取樣 600 次之重要係數預測誤差分佈

比較誤差分佈可以看到當初始取樣次數從 200 次增加至 600 次時，在誤差分佈上可以看到誤差百分比有顯著的縮小，而 600 次提升至 800 次除了 C_1 有明顯的提升之外，其他的誤差提升較不顯著。

從誤差分佈瞭解模型擬合度的不同後，可以直接從重要係數的真實值與 Kriging 模型的預測值來觀察誤差程度。自三組不同初始取樣次數的實驗中各取出前 80 組重要係數，分別列出來自直接計算的重要係數以及 Kriging 模型預測的重要係數。從圖 5.8、圖 5.9、和圖 5.10 中可以看到透過計算及透過 Kriging 預測的重要係數之比較，圖中藍色空心圓為來自計算之重要係數，紅色點為來自 Kriging 預測之重要係數，而橫軸為取樣

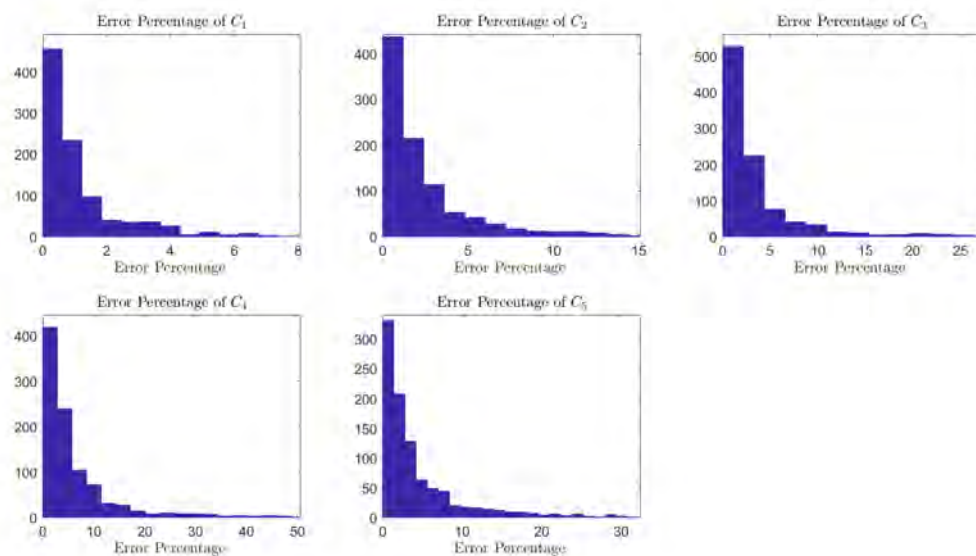


圖 5.7: 動態輸出模型初始取樣 800 次之重要係數預測誤差分佈

編號，資料前後並無關聯。從圖中可到，對 C_4 之預測在每一種不同的初始取樣實驗中，預測皆有較明顯的偏差。從圖5.8中可看見初始取樣次數僅 200 次的實驗，在大多數的預測中都帶有偏差，特別在預測絕對值較大的重要係數時更為明顯；從圖5.9中可看見，取樣次數為 600 次時，對於絕對值較小的重要係數幾乎已經可以準確的預測，僅在絕對值較大的重要係數偏差較明顯，這也與 Kriging 模型本身的曲面特性有關；從圖5.10中可看見，取樣次數為 800 次時，在絕對值較大的重要係數可以做到更好的預測，但整體而言與取樣次數 600 次時的預測品質相差不大。

擬合準確度評估的最後，在驗證取樣中，隨意選擇一次取樣，透過由 K-L 轉換來重組輸出曲線，直接觀察真實曲線、K-L 轉換重組、及 Kriging 預測重要係數重組，來判斷所選擇的參數是否為可用。圖5.11、圖5.12、與圖5.13分別比較了同一組模型參數在三種取樣次數實驗中的輸出曲線與重組曲線的差異。在取樣次數為 200 次時，可以看到 K-L 重組與 Kriging 模型預測重組的曲線皆與真實輸出有所差距；而取樣次數為 600 次及 800 次的曲線比較中，則幾乎看不出差距。若將其放大來看，在 $t=15(s)$ 時，兩者由 Kriging 模型重組的曲線與真實輸出曲線約會有 0.3 的差距，為可接受差距。除此之外，觀察兩者的局部放大圖，可發現兩者的偏差狀況相差不遠，表示 Kriging 模型的預測能力差異不大。

綜合以上，透過誤差分佈、重要係數比較、及曲線重組和運算時間來選擇初始取樣次數，本案例決定以 $N_{initial} = 600$ 來進行後續模擬。另外，考量到 EGO 在此案例中在模型準確度的提升上效果有限，且占用的運算成本相對取樣成本來的更高，因此在此案例中並不會使用 EGO 於模擬中。

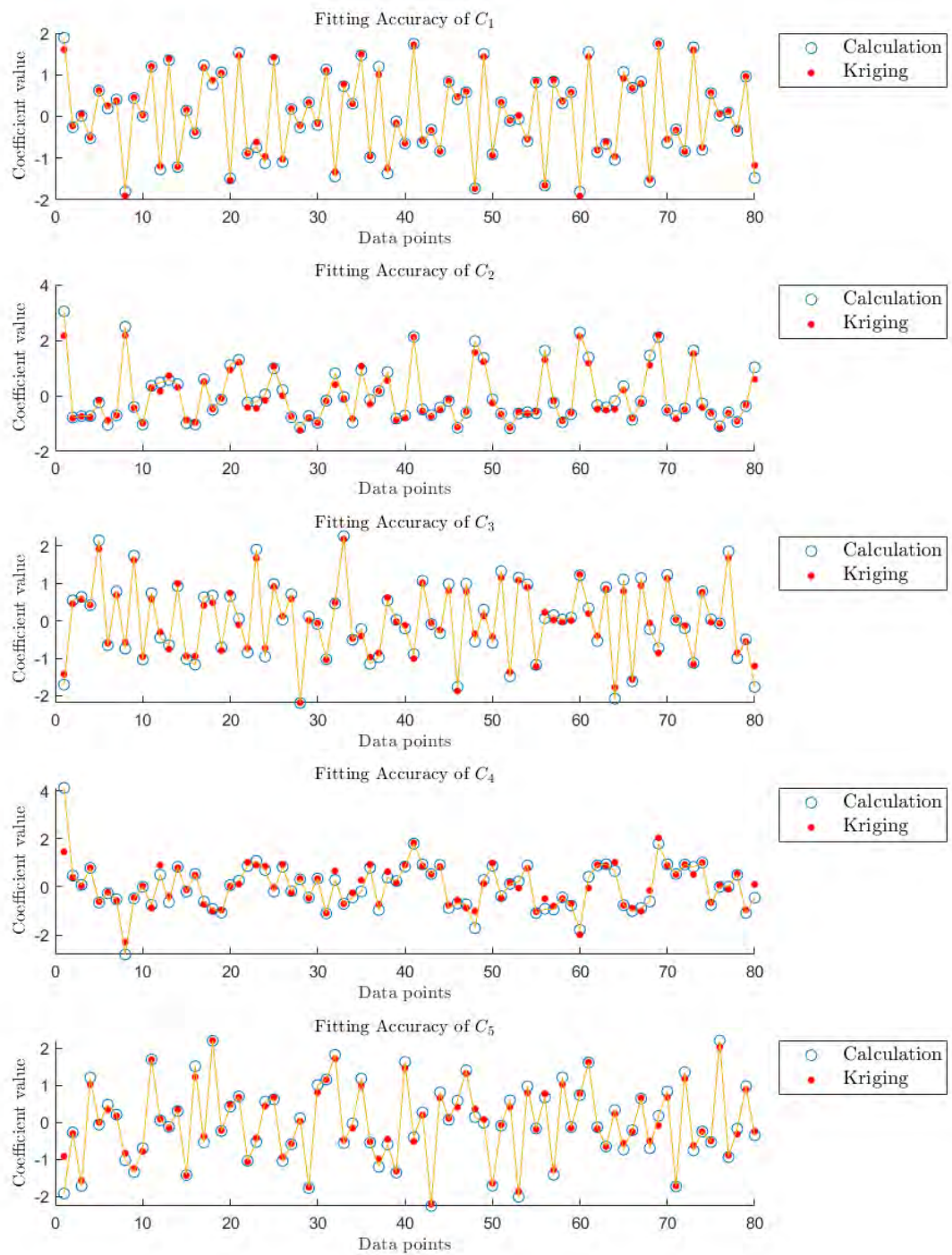


圖 5.8: 動態輸出模型初始取樣 200 次之重要係數預測及真實比較

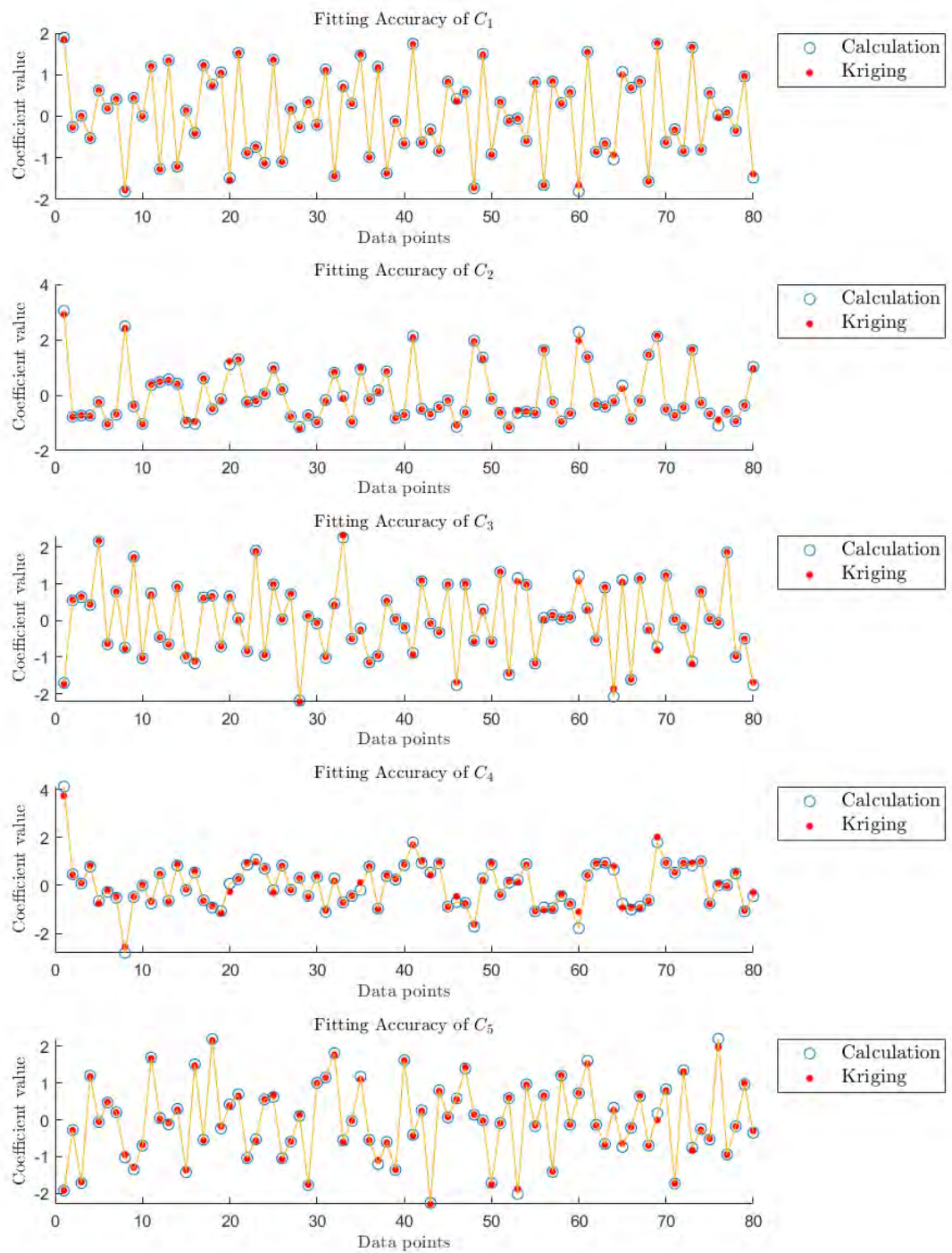


圖 5.9: 動態輸出模型初始取樣 600 次之重要係數預測及真實比較

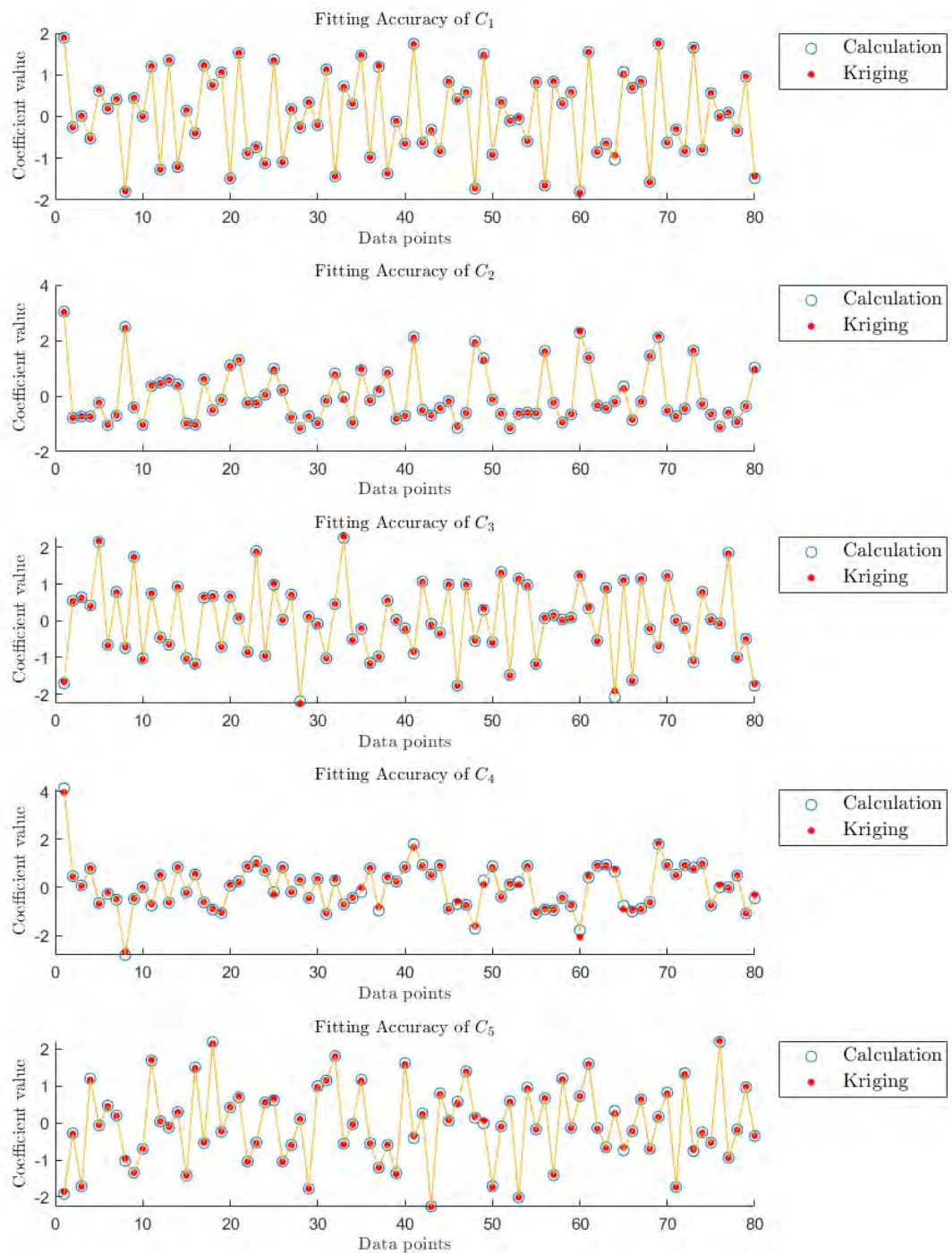


圖 5.10: 動態輸出模型初始取樣 800 次之重要係數預測及真實比較

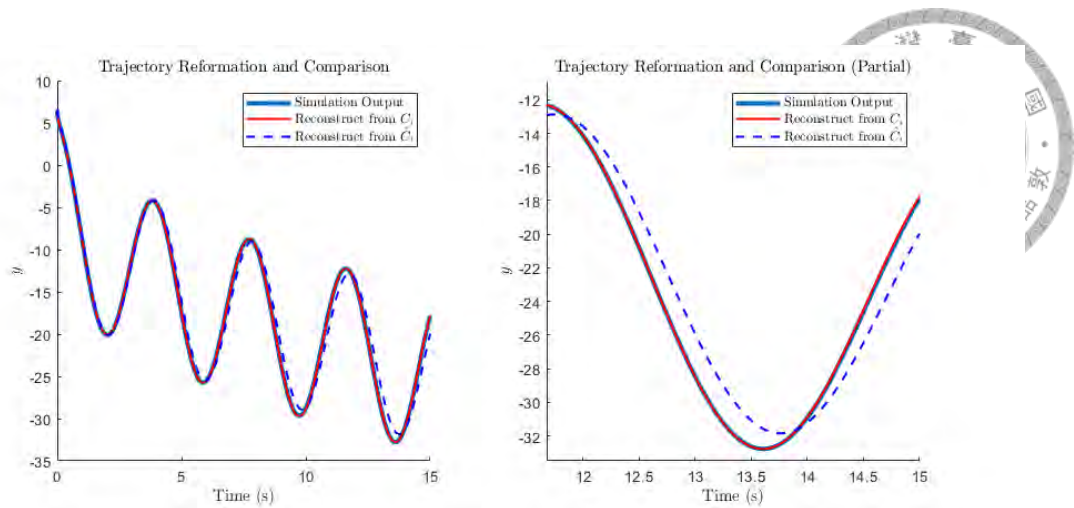


圖 5.11: 動態輸出模型初始取樣 200 次之輸出曲線重組比較

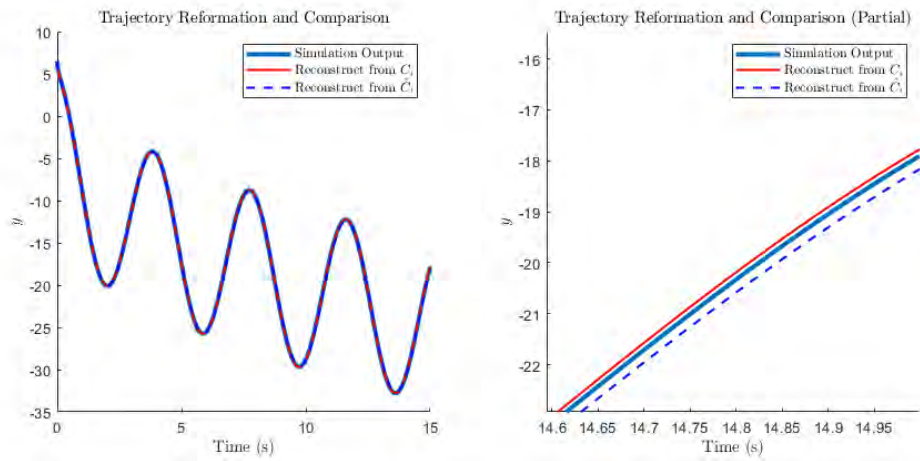


圖 5.12: 動態輸出模型初始取樣 600 次之輸出曲線重組比較

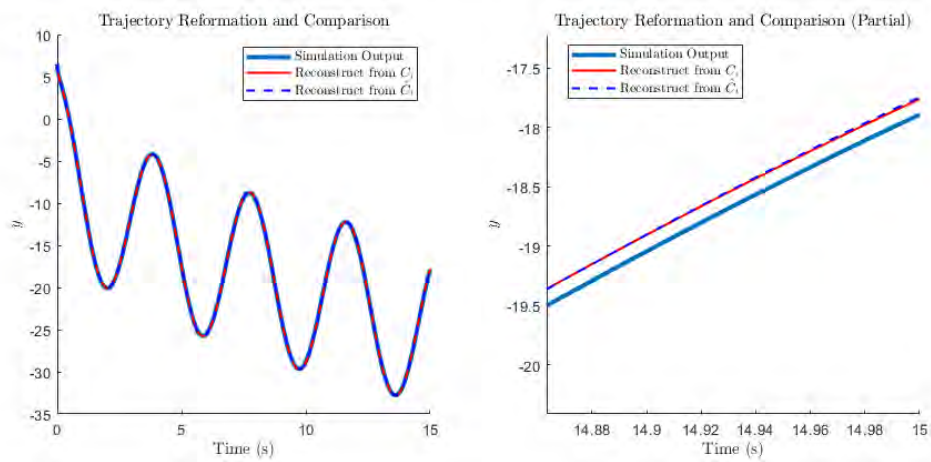


圖 5.13: 動態輸出模型初始取樣 800 次之輸出曲線重組比較



5.3.2 全域敏感度指標之準確度評估

決定了初始取樣次數，為確保 Kriging 模型可以準確預測重要係數，使 Kriging 模型可以有效取代真實系統後，接著則須決定 N_{GSA} 的數量使全域敏感度指標可以收斂。以不同的取樣次數 N_{GSA} 所計算得到的全域敏感度指標，可以下圖呈現：

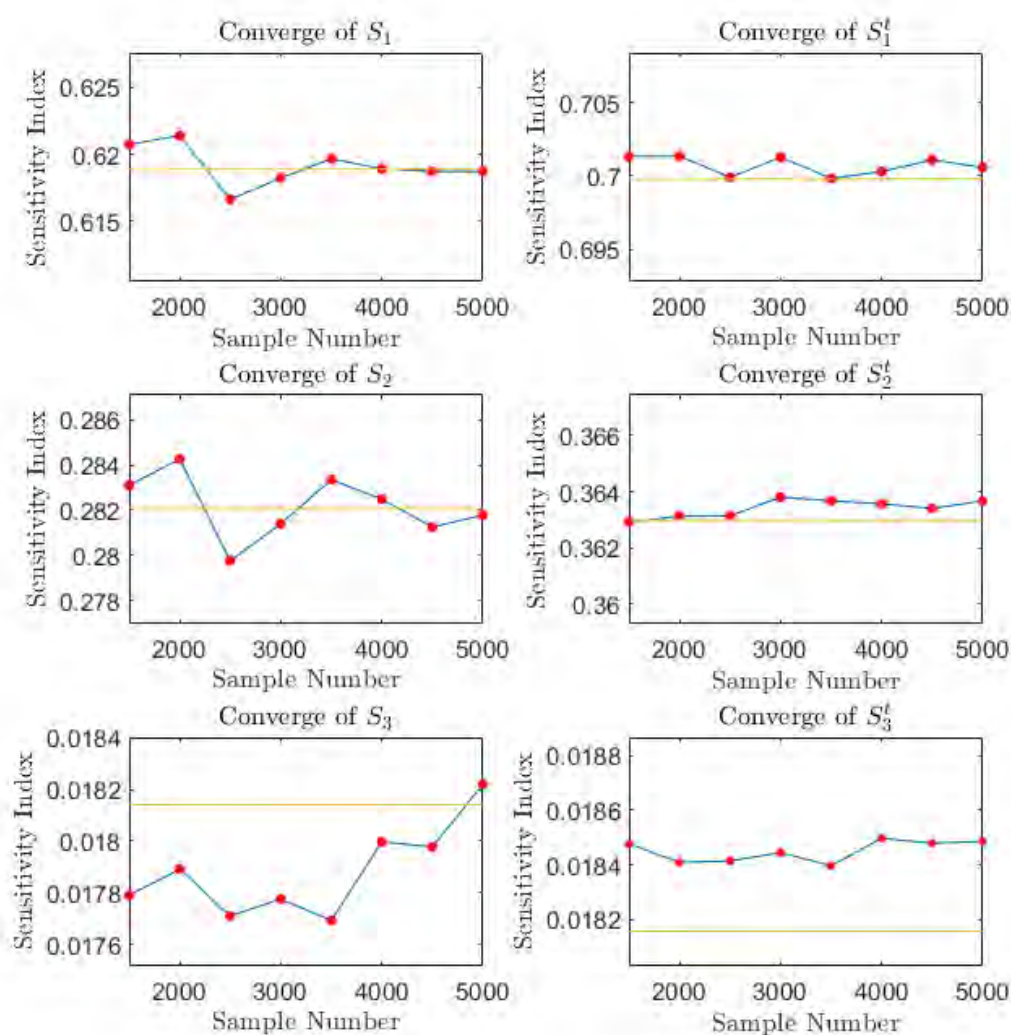


圖 5.14: 動態輸出系統於不同全域敏感度取樣次數之收斂性

從圖5.14中可以看見，主效應指標會隨著取樣次數的增加而有較明顯的收斂性，收斂結果也與真實數值較接近；但對於總效應指標，似乎在收斂性不受到取樣次數的影響，甚至較偏離真實數值。因此，在這個案例中，決定 N_{GSA} 的關鍵就來自於主效應指標的收斂性。根據圖5.14，在 N_{GSA} 達到 4000 次時，敏感度指標會有較明顯的收斂，且對於 Kriging 模型的取樣成本非常低，對取樣時間負荷較小，因此透過收斂性的探討決定 N_{GSA} 設定在 4000 次。



5.4 最佳化操作參數及準確度評估

瞭解如何對動態系統進行不確定模型參數的全域敏感度分析之後，同樣的，可以透過設定適當的目標函數，以最佳化方法求解能凸顯目標參數效益同時降低參數間的耦合度和其他參數的影響。本節將介紹目標函數的設定，並提出基於替代模型的最佳化方法，提升演算效率。

5.4.1 最佳化目標函數

此案例的最佳化操作參數之目標函數參考式4.4進行些微調整，將變異數同時加入至目標函數中。考量到全域敏感度指標本身已經對總變異數進行一般化，所呈現的指標為比較單一組(同一個操作參數)實驗中各個不確定模型參數的敏感度大小，卻不能直接用於表達不同組實驗(不同的操作參數)之間不確定模型參數對系統輸出變異的大小。因此，為了能夠實現跨組的比較，目標函數則需要同時考慮該組實驗的總變異數，即可將全域敏感度指標轉變為表示不確定模型參數所貢獻的變異量。以凸顯 θ_1 的效應為例，修正後的目標函數如下：

$$H_p = \frac{1}{Var} \left(\frac{S_1^t - S_1}{S_1} + \frac{S_2 + S_3}{S_1} \right) \quad (5.3)$$

與單一輸出模型相同，目標函數中的所有項次皆可以透過將流程化簡為指標產生函數 $F(\mathbf{x})$ 表示為操作參數 \mathbf{x} 的函數。使用於動態輸出模型的指標產生函數經調整可表示如下：

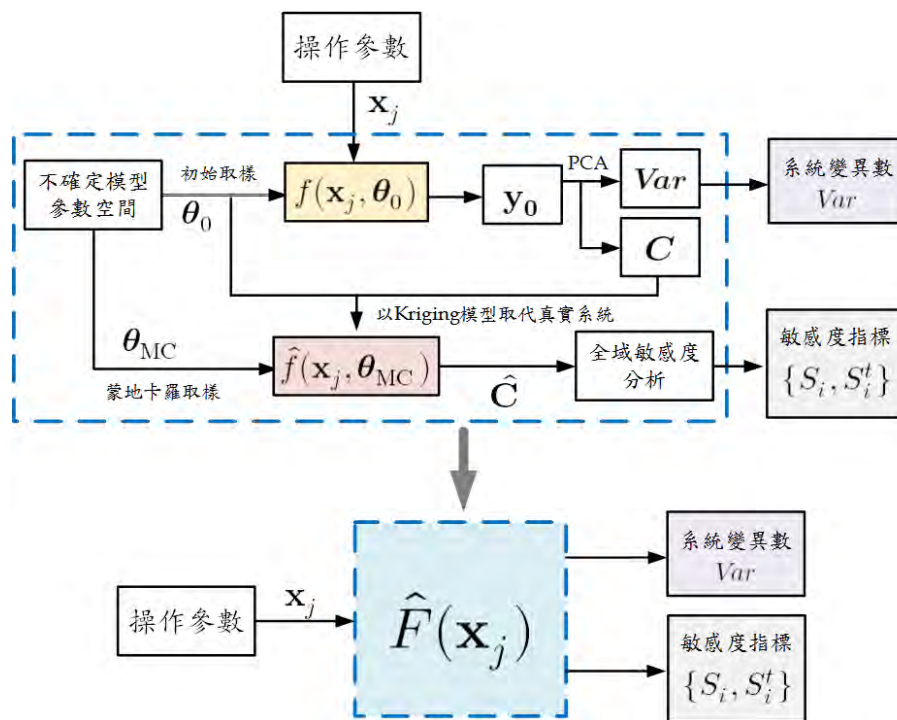


圖 5.15: 動態輸出系統之指標產生函數示意圖

將敏感度指標和系統變異數透過指標產生函數，最佳化此目標函式的一般式可以寫成：

$$\begin{aligned} \min \quad & H_p(\mathbf{S}, \mathbf{S}^t) = \frac{1}{Var} \left(\frac{S_1^t - S_1}{S_1} + \frac{S_2 + S_3}{S_1} \right) \\ \text{w.r.t } \quad & \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \forall \{\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}\} \in \mathcal{F} \end{aligned} \quad (5.4)$$



5.4.2 最佳化結果與準確度評估

使用基於替代模型法進行最佳化的方法，在使用前仍需要被妥善評估。因此，在本節會分別使用直接求解法和基於替代模型求解法進行最佳化結果的比較。其中，直接求解法僅適合應用於取樣成本低的數學模型中，在複雜系統中的應用成本相對非常高，因此僅適合用在此案例中作為方法的驗證。

直接求解最佳化演算法

本章所使用的直接求解法流程與前章所使用的流程非常相似，僅針對全域敏感度分析方法加入主成分分析，對系統輸出動態進行動態分析。直接求解最佳操作參數的流程如下：

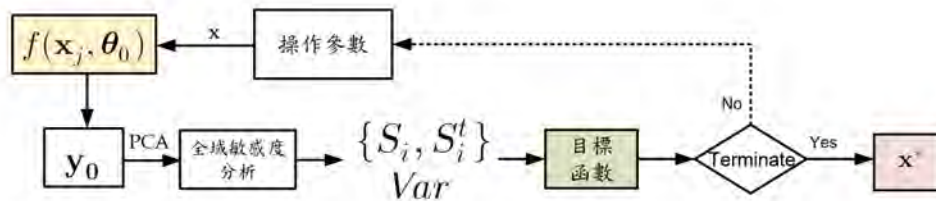


圖 5.16: 動態輸出系統之直接求解最佳化演算法

1. 輸入操作參數至系統

使用 DIRECT 演算法產生第一組操作變數，將操作變數輸入至系統中進行模擬，得到多筆模擬輸出的動態資料

2. 主成分分析

以 K-L 轉換進行主成分分析，將動態資料轉換為多筆重要係數及特徵值總合作為總變異數

3. 計算全域敏感度指標

以重要係數計算各個不確定模型參數之主效應指標及總效應指標

4. 計算目標值

將主效應指標、總效應指標、與總變異數代入至目標函數，計算目標值



5. 判斷是否收斂

由 DIRECT 演算法判斷目標函數是否達收斂；若未達到收斂條件，則產生一組新的操作參數，並重複所有步驟

透過直接求解法得到用於激發 $\theta_1 \sim \theta_3$ 的最佳操作參數列於表。

表 5.6: 激發各個不確定模型參數之最佳操作參數

Uncertain Parameter	Operation Parameters
θ_i	$[x_1^*, x_2^*, x_3^*]$
θ_1	[9.7222, 0.4722, 0.5556]
θ_2	[9.7222, 0.0278, 9.4444]
θ_3	[5.0001, 0.1140, 9.9997]

將三組最佳操作參數分別代入系統中，由系統模擬後所得到的各個不確定模型參數之全域敏感度指標，則列於下表：

表 5.7: 於直接求解法之最佳操作參數下各個模型參數之全域敏感度指標

Sensitivity Indices	MSI and TSI of model parameters under \mathbf{x}^*		
	θ_1	θ_2	θ_3
(S_1, S_1^t)	(0.6480, 0.7254)	(0.4329, 0.4878)	(0.3418, 0.3877)
(S_2, S_2^t)	(0.2756, 0.3538)	(0.4809, 0.5271)	(0.4461, 0.4925)
(S_3, S_3^t)	(0.0004, 0.0008)	(0.0422, 0.0425)	(0.1678, 0.1678)
Var	11977	9661	3454

基於替代模型最佳化演算法

基於替代模型之最佳化演算法可參考式4.4，同樣的將目標函數中的全域敏感度指標替換程指標產生後，以最佳化用於激發 θ_1 之操作參數，可得到最佳化一般式為：

$$\begin{aligned}
 \min \quad & H_p(\hat{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{S}}^t) = \frac{1}{\hat{Var}} \left(\frac{\hat{S}_1^t - \hat{S}_1}{\hat{S}_1} + \frac{\hat{S}_2 + \hat{S}_3}{\hat{S}_1} \right) \\
 \text{w.r.t } \quad & \mathbf{x} \\
 \text{s.t.} \quad & \hat{S}_i = \hat{F}_{m_i}(\mathbf{x}), i = 1, \dots, 3 \\
 & \hat{S}_i^t = \hat{F}_{t_i}(\mathbf{x}), i = 1 \\
 & \hat{Var} = \hat{F}_{Var}(\mathbf{x}) \\
 & \forall \{\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}\} \in \mathcal{F}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

其中，目標函數中的指標與變異數皆以指標產生函數表示，而指標產生函數則以替代模型取代，流程可參考3.17。本案例的操作步驟如下：



1. 建立操作參數樣本矩陣

以操作參數為設計變數，在本案例中以 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, 和 \mathbf{x}_3 的分佈建立設計空間，並以 5 種水準的全因子設計進行取樣，共取樣 125 次。

2. 以基於替代模型之全域敏感度求解法計算全域敏感度指標及變異數

將操作參數輸入矩陣輸入系統，以 $N_{initial} = 600$ 、 $N_{GSA} = 4000$ 依序計算對應的全域敏感度指標 S_1, S_2, S_3 、 S_1^t, S_2^t, S_3^t 及變異數 Var 。

3. 建立指標產生函數之 Kriging 模型

以操作參數樣本矩陣為輸入，分別以其對應到的全域敏感度指標與變異數建立 Kriging 模型。在此案例中，共需要建立 7 個 Kriging 模型。完成建立指標產生函數後，將目標函數中的全域敏感度指標與變異數替換為對應的指標產生函數。

4. 操作參數最佳化

以 DIRECT 演算法計算最佳操作參數。當演算法計算出取樣點時，目標函數則會透過指標產生函數對指標和變異數進行預測，將所得到的預測值代入目標函數中，即可得到目標函數值。演算法的計算結果即為最佳化操作參數。

使用基於替代模型求解用於激發三個參數的最佳操作參數，紀錄於表中：

表 5.8: 基於替代模型求解之最佳操作參數

Uncertain Parameter	Operation Parameters
θ_i	$[x_1^*, x_2^*, x_3^*]$
θ_1	[9.8333, 0.4883, 0.3333]
θ_2	[9.7222, 0.0278, 9.1667]
θ_3	[5.0333, 0.0250, 9.8444]

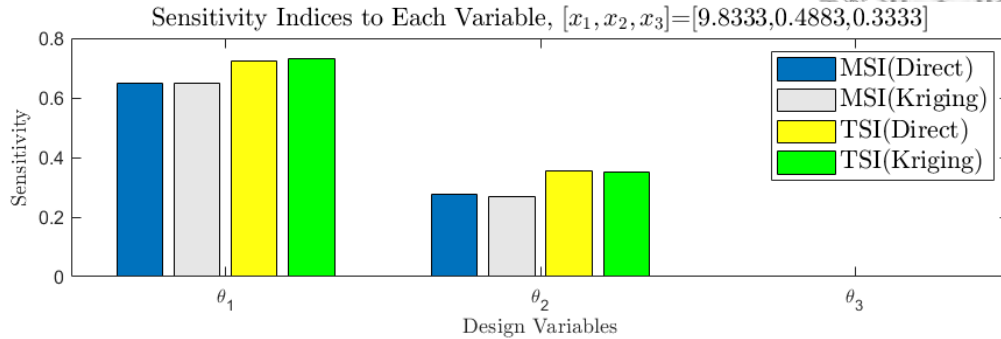
將最佳操作參數代入系統中，以基於替代模型之全域敏感度方法計算全域敏感度指標，可得到結果如下表：

表 5.9: 使用基於替代模型法求解之最佳操作參數下各模型參數之全域敏感度指標

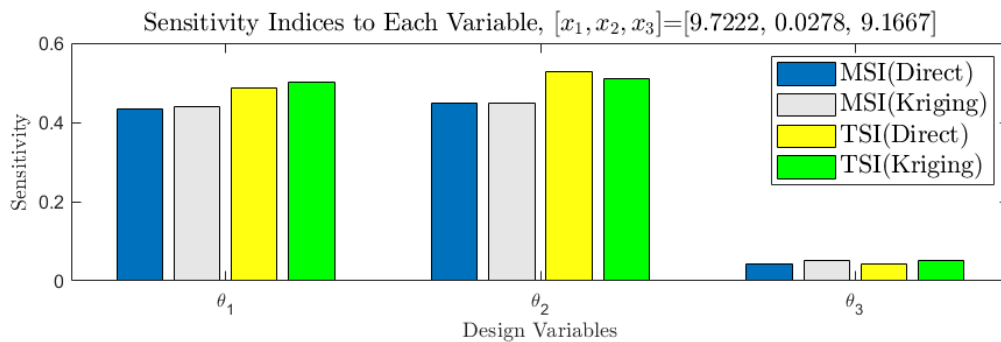
Sensitivity Indices	MSI and TSI of model parameters under \mathbf{x}^*		
	θ_1	θ_2	θ_3
(S_1, S_1^t)	(0.6507, 0.7323)	(0.4401, 0.5006)	(0.3463, 0.3926)
(S_2, S_2^t)	(0.2688, 0.3511)	(0.4491, 0.5101)	(0.4910, 0.5275)
(S_3, S_3^t)	(0.0004, 0.0007)	(0.0520, 0.0522)	(0.1419, 0.1420)
Var	12206	9469	3242

最佳化演算法準確度評估

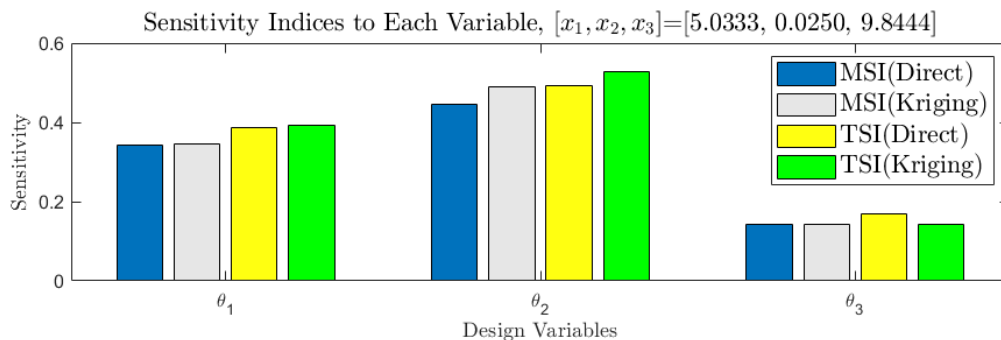
將透過兩種方法所得到的全域敏感度指標以圖5.17表示，可以看到兩種方法所得到的全域敏感度指標相差並不大，最大誤差範圍約為 5%，為可接受範圍。



(a) θ_1 於最佳操作參數激發下之敏感度指標比較



(b) θ_2 於最佳操作參數激發下之敏感度指標比較



(c) θ_3 於最佳操作參數激發下之敏感度指標比較

圖 5.17: 模型參數於最佳激發操作參數下之敏感度指標

從圖5.17中可看到， θ_1 相較於其他兩者，全域敏感度較大，而 θ_3 則相對較小，儘管在設計於激發 θ_3 的操作參數下，其全域敏感度指標依然小於 θ_1 和 θ_2 。但儘管如此，仍然可以明顯的看到於5.17中 θ_3 的全域敏感度指標明顯的大於其他兩者，表示操作參數的設計對於參數具有顯著的效果。

最後，比較兩種方法所得到的全域敏感度指標在最佳化演算法中的演算歷程。圖5.18顯示直接求解法的演算歷程，並標示其對應的最佳解位置且與替代模型法的最佳解進行比較。

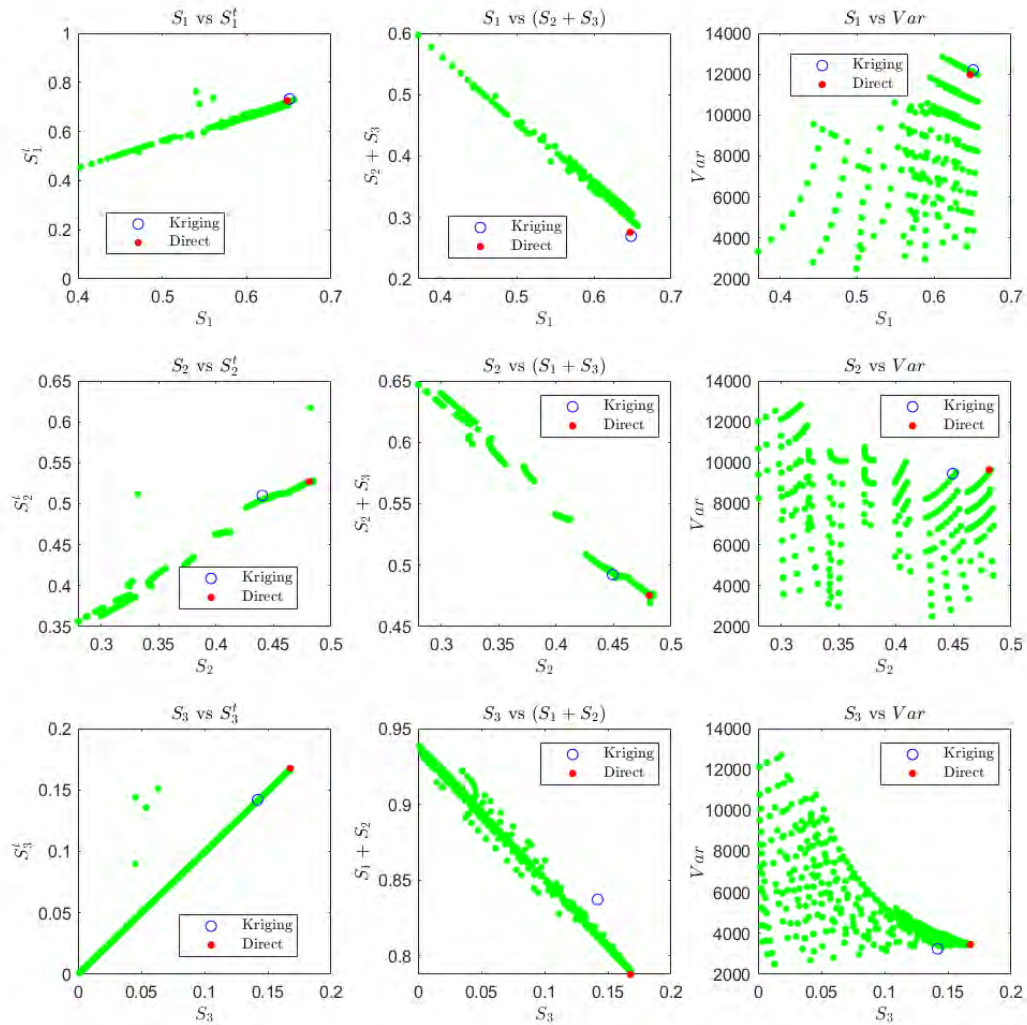


圖 5.18: 直接求解法之演算歷程及與替代模型求解法結果之比較

從圖5.18可以看到，在全域敏感度指標的預測上，兩種演算法的差距約為 0.03 左右，顯示替代模型法的最佳化演算準確度是非常高的。再者，可以看到在兩種演算法中，最佳解的位置皆顯示欲凸顯之參數的主效應指標皆被放至最大，而其他參數的主效應指標則被最小化；然而，變異數並不一定可以在凸顯參數之主效應參數被放大時同時也被放大，因此在收斂位置較無顯著的規律。從圖中可以看出，此目標函數確實的達到參數激勵的效果，同時也驗證了以替代模型求解最佳操作參數的準確性及可行性。確認了最佳化操作參數的方法後，後續將透過參數校準方法，來探討求解最佳操作參數的重要性的必要性。



5.5 模型參數校準

建立了用於激發各個不確定模型參數的激發操作參數後，本章透過卡爾曼濾波器來進行參數的校準。在此案例中，本研究對卡爾曼濾波器的操作進行了調整，因為數學模型並沒有辦法直接建立 One-Step-Ahead 的模擬模型，透過前一個時間所估測的狀態和模型參數對下一個時間點的狀態和模型參數。由於本系統模型本身即為一時間函數，雖然無法對估測狀態及估測誤差共變異矩陣進行更新，但仍然可直接透過模型本身來求得這兩項必要的資訊。

應用基於混沌多項式之卡爾曼濾波器操作流程如下：

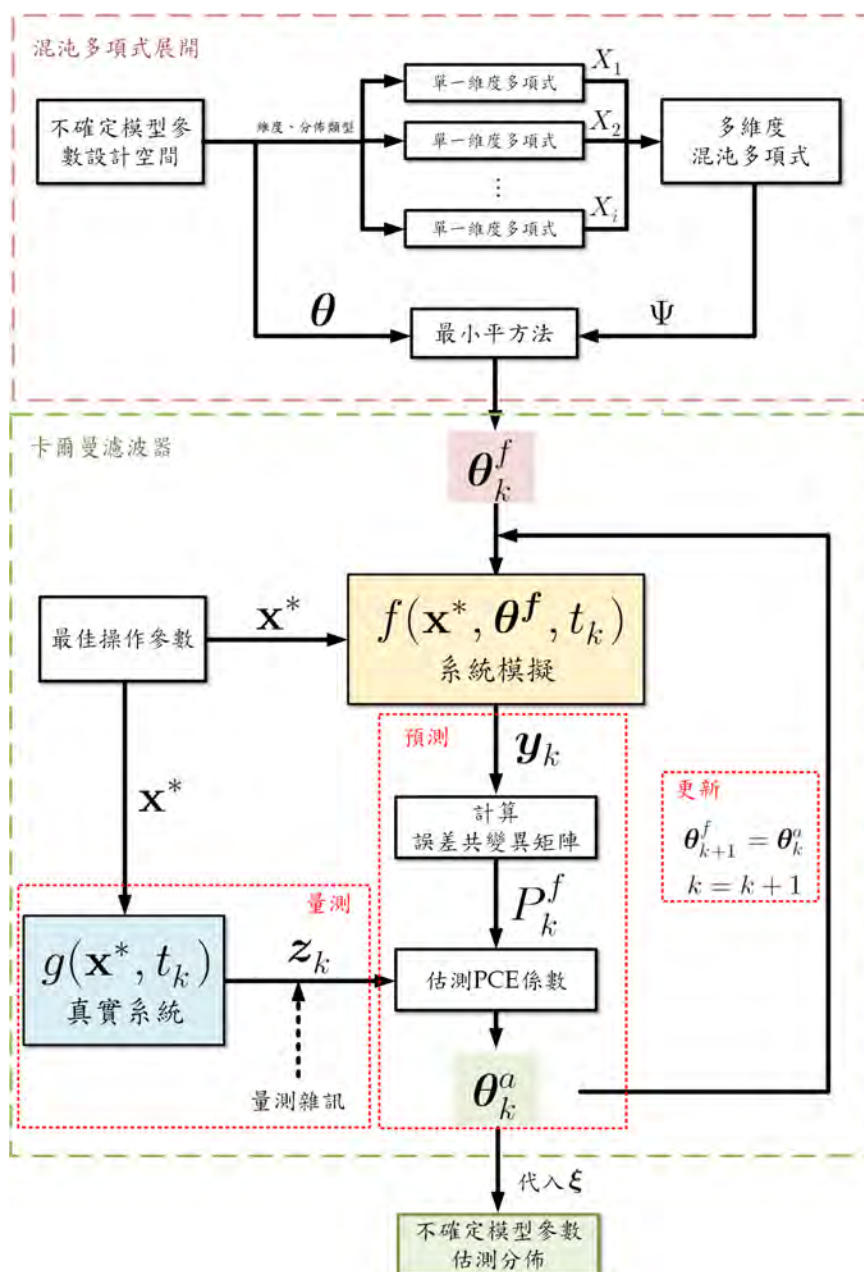


圖 5.19: 應用基於混沌多項式之卡爾曼濾波器於動態輸出模型之流程



1. 決定不確定模型參數之分佈類型及維度

使用混沌多項式展開對系統進行不確定模型參數分析時，對不確定因素之分布狀態的設定會決定所選擇的單一維度的基底函數類型。在此案例中，由於不確定模型參數在系統中是固定數值，不隨時間改變，因此針對不確定模型參數則先假設參數以均勻分布散佈在分佈區間內。面對皆為均勻分佈的不確定模型參數，分別建立三組單一維度的多項式基底函數，對應到三個不確定模型參數。

$$X_1(\xi_1) = 1 + \xi_1 + \frac{1}{2}(3\xi_1^2 - 1) + \frac{1}{2}(5\xi_1^3 - 3\xi_1) \dots = \sum_{i=0}^{\infty} P^i(\xi_1)$$

$$X_2(\xi_2) = 1 + \xi_2 + \frac{1}{2}(3\xi_2^2 - 1) + \frac{1}{2}(5\xi_2^3 - 3\xi_2) \dots = \sum_{m=0}^{\infty} P^m(\xi_2)$$

$$X_3(\xi_3) = 1 + \xi_3 + \frac{1}{2}(3\xi_3^2 - 1) + \frac{1}{2}(5\xi_3^3 - 3\xi_3) \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(\xi_3)$$

2. 選擇最大次數 p_b 並建立多維度混沌多項式

最大次數 p_b 與隨機變數 ξ 的維度會直接的影響混沌多項式的個數，也影響了計算時間及採樣次數，因此最大次數的選擇得依照該案例所能承擔的計算成本而決定。在本案例中，選擇 $p_b = 7$ 對函數進行截斷，因此可得到多維度的混沌多項式 $\Psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 。透過式3.56可知多項式具有 120 項，且每項皆有一般化係數 a_s ，如下式所示：

$$\Psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i=1}^7 \sum_{m=1}^7 \sum_{n=1}^7 a_j P^i(\xi_1) P^m(\xi_2) P^n(\xi_3) = \sum_{j=1}^{120} a_j \psi_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad i \times m \times n \leq 7 \quad (5.6)$$

3. 計算係數

決定了可以代表不確定模型參數的混沌多項式後，即可將求解一般化係數 a_s 。首先，以低差異取樣方法建立維度為 3、取樣次數為 $3 \times s = 360$ 次的樣本矩陣，將其平移至 $[-1, 1]$ ，分別代表三個維度的隨機變數 ξ_1, ξ_2, ξ_3 。再將其平移至不確定模型參數的分佈區間，分別代表對 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 的取樣。將 ξ_1, ξ_2, ξ_3 代入混沌多項式 Ψ 中，並以矩陣方式將矩陣的一般化係數與多維度基底函數分離。以 θ_1 為例：

$$\begin{bmatrix} \theta_{1,1} \\ \theta_{1,2} \\ \vdots \\ \theta_{1,360} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1(\xi(1)) & \psi_2(\xi(1)) & \cdots & \psi_{120}(\xi(1)) \\ \psi_1(\xi(2)) & \psi_2(\xi(2)) & \cdots & \psi_{120}(\xi(2)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(\xi(360)) & \psi_2(\xi(360)) & \cdots & \psi_{120}(\xi(360)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{120} \end{bmatrix}$$

利用最小平方法，即可求解一般化係數大小，同時也完成了對不確定模型參數以混沌多項式展開的操作。將求解後的係數代入卡爾曼濾波器前，將係數的符號改



寫為 $(\theta_{i,k}^f)^j$ ， i 代表第 i 個不確定模型參數， j 代表第 j 個混沌多項式係數， k 代表於卡爾曼濾波器的第 k 次疊代，而 f 則表示係數為預測狀態、尚未經過濾波器進行估測。

4. 設定卡爾曼濾波器

在此案例中，由於僅存在一個系統輸出狀態，且設定觀察器 (Observer) 所量測系統的狀態與系統輸出狀態相同，因此將觀測矩陣 \mathbf{H} 設為 1；同時，也設定對真實系統的量測存在一量測誤差，以 $N(0, 0.1^2)$ 呈現，因此可設定雜訊共變異矩陣為雜訊變異數 $0.1^2 = 0.01$ 。在此案例中，設定卡爾曼濾波器總共疊代 20 次，且系統的終止時間為 15 秒，因此每一次疊代的系統估測時間點為 $t_k = k(\frac{20}{15})$, $k = 1, \dots, 20$ 。

5. 建立誤差共變異矩陣

將步驟 3 所建立的不確定模型參數代入系統模擬中，共輸出 360 組系統於 $t_k, k = 1$ 的單一輸出 $\mathbf{y} = [y_1(t_k), y_2(t_k), \dots, y_{360}(t_k)]^T$ 。根據式 3.68，將單一輸出與不確定模型參數建立誤差共變異矩陣：

$$P_k^f = Cov \left(\begin{bmatrix} y_k \\ \theta_{1,k} \\ \theta_{2,k} \\ \theta_{3,k} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} (P_{y,y})_k^f & (P_{y,\theta_1})_k^f & (P_{y,\theta_2})_k^f & (P_{y,\theta_3})_k^f \\ (P_{\theta_1,y})_k^f & (P_{\theta_1,\theta_1})_k^f & (P_{\theta_1,\theta_2})_k^f & (P_{\theta_1,\theta_3})_k^f \\ (P_{\theta_2,y})_k^f & (P_{\theta_2,\theta_1})_k^f & (P_{\theta_2,\theta_2})_k^f & (P_{\theta_2,\theta_3})_k^f \\ (P_{\theta_3,y})_k^f & (P_{\theta_3,\theta_1})_k^f & (P_{\theta_3,\theta_2})_k^f & (P_{\theta_3,\theta_3})_k^f \end{bmatrix}$$

6. 量測真實系統

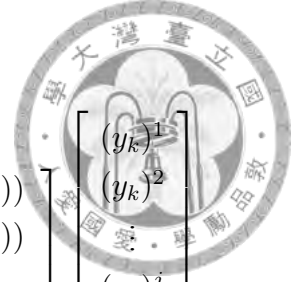
對真實系統進行一次量測，並在量測值中加入量測雜訊 ϵ ，創造不確定性。在此同樣取出真實系統在 t_k 時的輸出 $z_k = y_{real}(t_k)$ 。在本案例中，以另一個已知參數大小的模型，並加上量測誤差，來模擬真實系統輸出。模擬真實系統之參數 $\theta_1^{real}, \theta_2^{real}, \theta_3^{real}$ 如下：

表 5.10: 真實系統之模型參數

θ_1^{real}	θ_2^{real}	θ_3^{real}
1.015	1.03	0.96

7. 輸出狀態混沌多項式展開

將模擬模型的輸出以混沌多項式展開，並計算輸出在同樣的混沌多項式中的各項係數。以矩陣表示模擬模型輸出與輸出狀態的混沌多項式係數如下：



$$\begin{bmatrix} y_1(t_k) \\ y_2(t_k) \\ \vdots \\ y_{360}(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1(\xi(1)) & \psi_2(\xi(1)) & \cdots & \psi_{120}(\xi(1)) \\ \psi_1(\xi(2)) & \psi_2(\xi(2)) & \cdots & \psi_{120}(\xi(2)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(\xi(360)) & \psi_2(\xi(360)) & \cdots & \psi_{120}(\xi(360)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (y_k)^1 \\ (y_k)^2 \\ \vdots \\ (y_k)^j \\ \vdots \\ (y_k)^{120} \end{bmatrix}$$

以最小平方方法可即可求解上式右側係數。係數以 $(y_k^f)^j$ 表示，其中 j 表示混沌多項式中第 j 個係數，而 k 為卡爾曼濾波器於第 k 次迭代，於初始係數中 $k = 1$ ， f 表示該係數為卡爾曼濾波器進行濾波前的係數值。

8. 預測係數

將所得到的各項矩陣代入式3.73中，並依序更新每個不確定模型參數的混沌多項式展開中的各項係數。將 $\mathbf{H} = 1$, $\mathbf{R} = 1$ 代入，可得到：

$$\begin{aligned} (\theta_{1,k}^a)^j &= (\theta_{1,k}^f)^j + (P_{\theta_1,y})_k^f (1 + (P_{y,y})_k^f)^{-1} (z_k \delta_{1,j} - (y_k)^j) \\ (\theta_{2,k}^a)^j &= (\theta_{2,k}^f)^j + (P_{\theta_2,y})_k^f (1 + (P_{y,y})_k^f)^{-1} (z_k \delta_{1,j} - (y_k)^j) \\ (\theta_{3,k}^a)^j &= (\theta_{3,k}^f)^j + (P_{\theta_3,y})_k^f (1 + (P_{y,y})_k^f)^{-1} (z_k \delta_{1,j} - (y_k)^j) \end{aligned}$$

9. 還原不確定模型參數分佈

完成估測混沌多項式的各項係數後，不確定模型參數的機率分佈方程式就能以係數和多項式表達。此時，將 ξ_1, ξ_2, ξ_3 再次代入新的混沌多項式後，即可得到在 $t = t_k$ 時的參數估測數值，以 $\hat{\theta}_1$ 為例：

$$\hat{\theta}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{1,1} \\ \hat{\theta}_{1,2} \\ \vdots \\ \hat{\theta}_{1,360} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1(\xi(1)) & \psi_2(\xi(1)) & \cdots & \psi_{120}(\xi(1)) \\ \psi_1(\xi(2)) & \psi_2(\xi(2)) & \cdots & \psi_{120}(\xi(2)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(\xi(360)) & \psi_2(\xi(360)) & \cdots & \psi_{120}(\xi(360)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\theta_{1,k})^1 \\ (\theta_{1,k})^j \\ \vdots \\ (\theta_{1,k})^{120} \end{bmatrix}$$

10. 更新模型參數

將估測的參數數值作為下一時間點 t_{k+1} 的系統模擬之輸入，並重複步驟 5 至 9，隨著系統的運動和時變不斷更新對模型參數的估測。將最後所得到的估測參數數值輸出，即可得到卡爾曼濾波器對不確定模型參數的估測，如下所示，並分析其平均值與變異數。

$$\hat{\theta}_1 = [\hat{\theta}_{1,1}, \hat{\theta}_{1,2}, \dots, \hat{\theta}_{1,360}]^T$$



$$\hat{\theta}_2 = [\hat{\theta}_{2,1}, \hat{\theta}_{2,2}, \dots, \hat{\theta}_{2,360}]^T$$

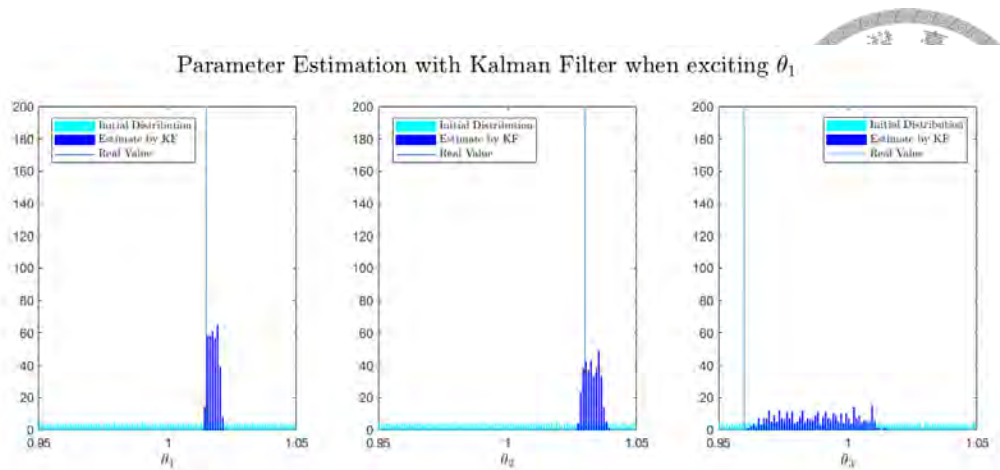
$$\hat{\theta}_3 = [\hat{\theta}_{3,1}, \hat{\theta}_{3,2}, \dots, \hat{\theta}_{3,360}]^T$$

根據以上步驟，分別將激發 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 的操作參數代入卡爾曼濾波器中，分別得到三組估測參數的平均值和標準差，列於下表：

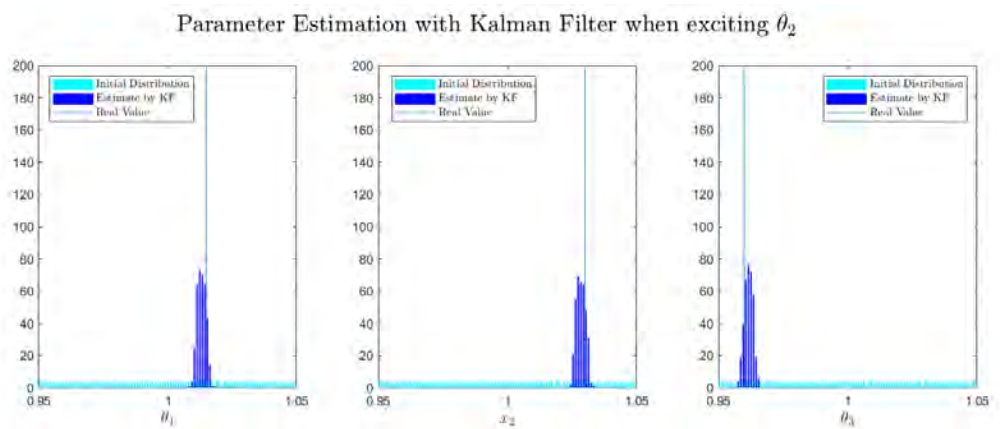
表 5.11: 以卡爾曼濾波器於最佳激發參數下之參數校準結果

Real Parameter Value			
	θ_1	θ_2	θ_3
	1.015	1.03	0.96
Excite θ_1			
	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$
Mean	1.017	1.0326	0.9876
Variance	0.0018	0.0027	0.0137
Excite θ_2			
	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$
Mean	1.0125	1.0282	0.9616
Variance	0.0016	0.0017	0.0017
Excite θ_3			
	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$
Mean	1.0112	1.0267	0.9595
Variance	0.0033	0.0035	0.003

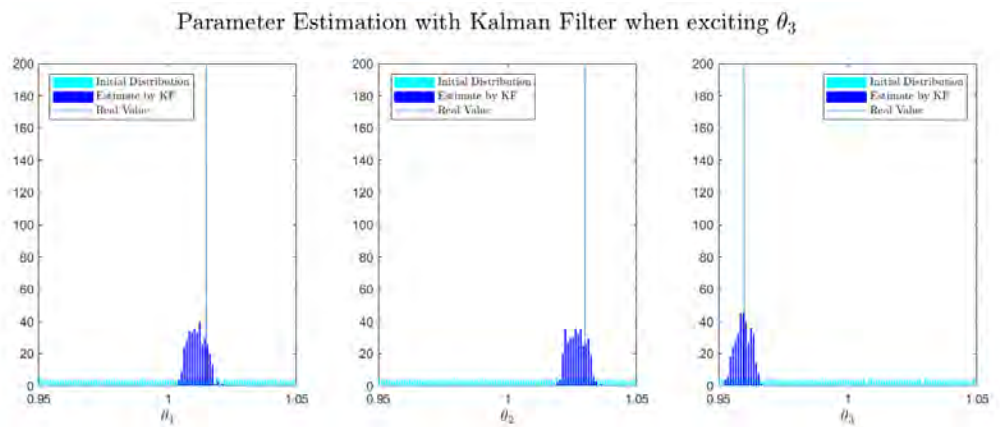
同時，比較三種不同的激發下，原始的參數分佈與經由卡爾曼濾波器估測後的參數分佈異同，可參考如下：



(a) 於激發 θ_1 之最佳操作參數時卡爾曼濾波器估測參數之分佈



(b) 於激發 θ_2 之最佳操作參數時卡爾曼濾波器估測參數之分佈



(c) 於激發 θ_3 之最佳操作參數時卡爾曼濾波器估測參數之分佈

圖 5.20: 卡爾曼濾波器於不同最佳操作參數下之參數估測結果

誤差絕對值及誤差百分比整理於表5.12。從表5.12及圖5.20中可以發現，對激發 θ_1 而言，在激發 θ_1 及 θ_2 時差異並不大，儘管在前節中在不同的最佳操作參數下全域敏感度指標有差異，但由於所貢獻的變異數比重相當高，仍然屬於非常好辨識的參數類型，因此較容易被校準，且其分佈的標準差也非常接近；對 θ_2 而言，根據前節所計算在激發不同參數時 θ_2 的全域敏感度指標，在激發 θ_2 時的主效應指標及總效應指標約較激發 θ_1

時成長約 20 個百分點，在誤差上雖然並沒有顯著的成長，但標準差卻有明顯的縮小，表示所估測出來的參數的信心水準更高；對 θ_3 而言，則可看到在激發 θ_1 的操作參數下， θ_3 可說是幾乎無法被估測出來，分佈的區間非常大。而在 θ_3 被激發的操作參數中，雖然在 θ_3 的估測上是最接近真實數據的，但在標準差上顯示信心水準較於激發 θ_2 之操作參數下還低。同時， θ_1 和 θ_2 雖然在這組實驗中在全域敏感度指標的表現與前組差異不大，卻在估測的信心水準上也降低了不少，推測是因為在系統在用於激發 θ_3 的最佳操作參數下時，輸出結果的變異數僅為其他兩組的 0.25 倍，而變異較小可能會使得卡爾曼濾波器在進行估測時更容易因量測雜訊的加入，使判讀更難進行，因此所呈現的收斂情況較差。然而，根據表 5.9，比較 θ_3 在激發 θ_1 與激發 θ_3 兩組實驗中所貢獻的變異量，可發現雖然在激發 θ_1 時，系統的總變異量較大，但由 θ_3 所貢獻的變異量卻僅為 θ_3 於激發 θ_3 的操作下的百分之一，推測是造成參數估測結果差異的主要原因。

表 5.12: 於不同操作參數下不確定模型參數估測之誤差絕對值與百分比

	Excite θ_1			Excite θ_2			Excite θ_3		
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_1	θ_2	θ_3	θ_1	θ_2	θ_3
Error value	0.002	0.0026	0.0276	0.0025	0.0018	0.0016	0.0038	0.0033	0.0005
Error Percentage	0.20%	0.25%	2.88%	0.25%	0.17%	0.17%	0.37%	0.32%	0.05%

同時，本研究也發現，卡爾曼濾波器每次的估測狀況並非相同，可能是受到量測雜訊所影響，讓參數估測的收斂值並非唯一且固定。因此，在參數估測的平均數可能會有些微的變動下，信賴區間的大小也會是決定參數校準結果是否為可信之重要依據。

因此，綜合以上討論，此案例透過基於混沌多項式之卡爾曼濾波器校準參數的結果如下：

表 5.13: 以卡爾曼濾波器估測參數結果

θ_1	θ_2	θ_3
1.0125	1.0282	0.9616

5.6 模型驗證

為了確定經由校準後的模型是否可以有效的表達真實系統，本節也透過假設檢定來檢測校準後的數學模型與用來模擬真實系統的模型的等效性。參數校準的驗證程序可參照 3.7。本案例的模型驗證操作過程如下：

1. 選擇另一組獨立的操控參數

在驗證流程中，選擇一組與所以用於校準參數無關的操控方式為模型驗證流程中所強調的「獨立性」。在驗證此模型中，操作參數選擇如表 5.14 所示。



表 5.14: 用於模型驗證之操作參數選擇

x_1^{val}	x_2^{val}	x_3^{val}
7.5	0.25	5

2. 建立模擬模型輸出資料

將用於驗證模型的操作參數 \mathbf{x}^{val} 和估測參數 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 代入模擬模型中，並在模型中的每一次取樣加入量測雜訊 $N(0, 0.1^2)$ 。在此設定模擬次數 $N_{val} = 500$ ，資料點數量為先前模擬相同的 $n = 1500$ 。500 次模擬輸出如下：

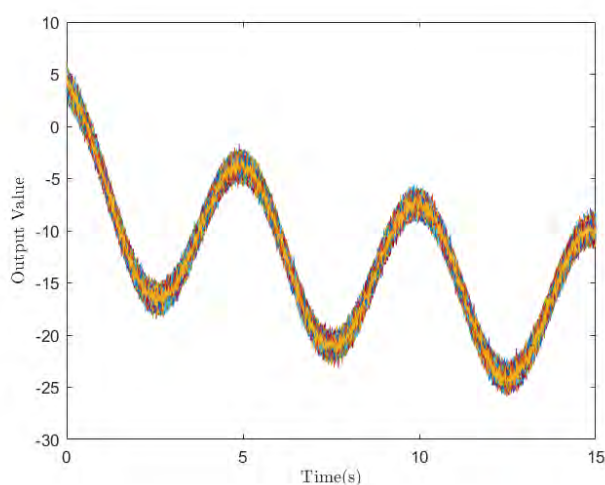


圖 5.21: 具量測不確定性之模擬模型 500 次輸出

3. 真實系統動態輸出

將用於驗證模型的操作參數 \mathbf{x}^{val} 和真實系統參數 $\boldsymbol{\theta}^{real}$ 代入系統中，並在模型中的每一次取樣加入量測雜訊 $N(0, 0.1^2)$ 。在真實的工程案例中，真實系統為未知，僅能透過實驗進行量測。所得到的輸出如圖 5.22：

4. 計算信賴區間與檢定統計量

計算模擬模型中每一個取樣點的輸出資料之平均值與標準差，並建立動態輸出的信賴區間，如圖所示：

同時，也計算在每一個取樣點中，真實系統的輸出資料在該取樣資料中的檢定統計量 $\alpha(i)$ ，共可得到 1500 組 α 值。計算所有 α 的幾合平均數作為代表整個動態輸出的檢定統計量，在此案例中可得 $\alpha_{eq} = 0.7416$

5. 假設檢定

對模型驗證建立無效假設及對立假設：

- H_0 ：模擬模型與真實系統的輸出表現可被視為相同，即模型參數相同

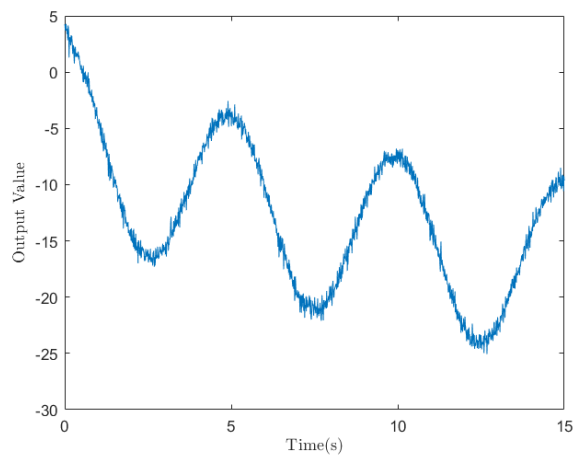


圖 5.22: 真實系統於驗證操作下之輸出

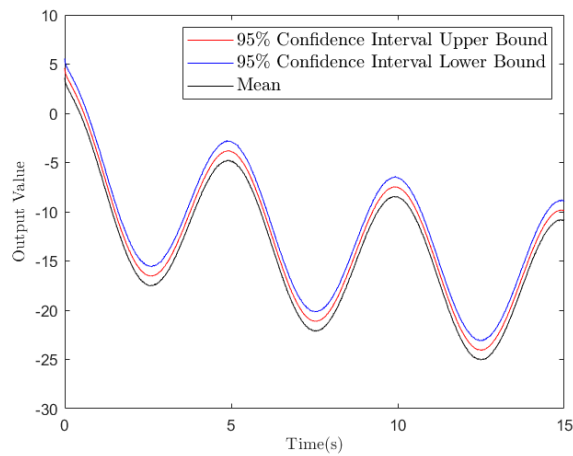


圖 5.23: 模擬模型動態輸出 95% 信賴區間

- H_1 : 模擬模型與真實系統的輸出表現不可被視為相同，即模型參數不同

$$\begin{cases} \text{if } \alpha_{eq} \geq 0.975, H_0 \text{ is rejected, } H_1 \text{ stands} \\ \text{if } \alpha_{eq} < 0.975, H_1 \text{ is rejected, } H_0 \text{ stands} \end{cases}$$

在此案例中，由於檢定統計量 $\alpha_{eq} = 0.7416 < 0.975$ ，沒有足夠證據可以推翻無效假設 H_0 ，因此無效假設 H_0 成立，在檢定下可認定模擬模型與真實系統之模型參數相同。

5.7 小結

在此案例的分析中，透過對動態輸出模型建立 K-L 轉換的重要係數之 Kriging 模型，首先透過對演算參數的選擇，決定了初始取樣次數並驗證模型準確度後，也驗證了基於替代模型之全域敏感度分析方法的準確度。在激發各個參數的效應上，透過直接求解最佳化方法來驗證基於替代模型之最佳化求解方法的準確性，並得到了對應各個不確定模型參數的最佳激發操作參數。接著，使用基於混沌多項式之卡爾曼濾波器對不確定模型參數進行校準，成功的對三個不確定模型參數進行具有可信度的校準，同時也透過校準結果和參數激發結果推測了模型參數的可校準性，以及系統輸出的總變異量不可被忽略的結論。

透過一連串的流程，此案例證實了所提出方法的可用性，加入替代模型和混沌多項式雖然使各個階段的計算誤差被累積，但也可以確實的看見對模擬系統取樣的數量需求已經有大幅度的降低。雖然在整體的演算次數仍然不少，但對於要將透過對不確定模型參數的激發幫助參數校準的流程應用於複雜系統中，已經將演算成本及使用門檻降低許多。在後續章節中，將實際應用此流程於校準車輛模型中的不確定模型參數，並進一步透過操作工程案例，對方法的使用性進一步提出討論。



車輛工程案例

在前面的章節中，已經對於找出激發動態的方法進行驗證，也了解如何校準動態系統的參數。本研究的最終目標，即是將此流程應用於真實車輛系統中，嘗試以所提出方法於校準真實系統的不確定模型參數。本章首先簡介本研究中作為工程案例之目標—線控操作三輪車之模型建構和操作方法 (完整建構及模擬細節可參考附錄A)，並介紹如何應用所提出之方法於真實系統上的操作過程，同樣的也會針對替代模型的擬合準確度進行評估後，以基於替代模型的全域敏感度分析和最佳化方法計算最佳操作參數，並以基於混沌多項式之卡爾曼濾波器進行參數校準，並對校準結果進行驗證及討論。

6.1 車輛模型建構

車輛模型的建構須考慮到多個次系統和元件的作動原理和動力的控制，也需將車輛與環境間的作用力和摩擦力納入模型，是個非常複雜且需要多個領域的專業參與在建模過程中。本研究在工程案例探討中選擇了具有 X-by-Wire (線控操作) 及自主駕駛功能之蝌蚪型 (Tadpole Design) 三輪車作為工程案例之探討目標。考量到模型本身所具備的複雜度和次系統的耦合性相較一般車輛低、所具備的參數數量較少、且系統為自行搭建，在規格的控制上更為容易、也容易在量測上取得資訊，同時也具備著與一般車輛相似的動力學模型和控制方式，因此被認為可適合作為本研究的探討案例。

6.1.1 硬體規格

本研究所使用自行組裝之蝌蚪型設計線控三輪車如圖6.1所示，三輪車車體由三組自行車車架所組成，以前兩輪後一輪的方式配置，以後輪為動力輪，由輪轂馬達帶動；前輪為轉向輪，由轉向機構帶動兩輪轉向。

全車硬體架構如圖6.2所示：以 Jetson TX2 作為 VCU (Vehicle Control Unit)，分別以 Arduino 作為轉向、驅動、煞車次系統的 PLC 及控制單元；全車由 48V 電池供電，除了直接以 48V 驅動轉向馬達及輪轂馬達，也透過降壓模組提供 12V 電壓給 TX2，再

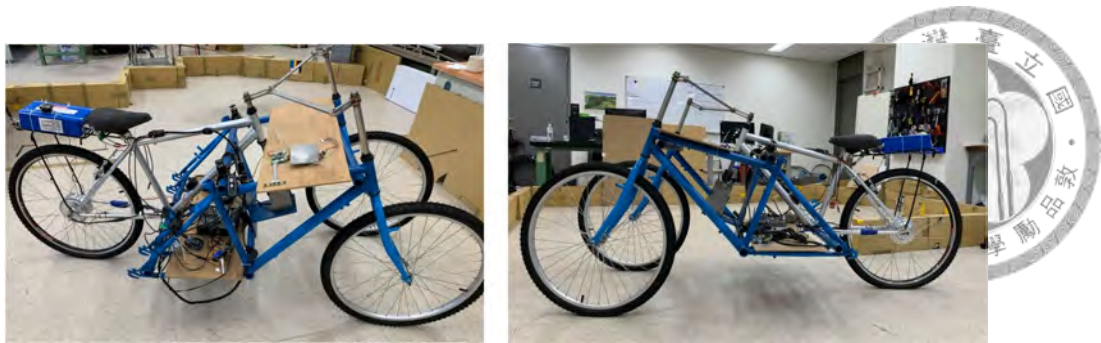


圖 6.1: 作為真實系統之三輪車

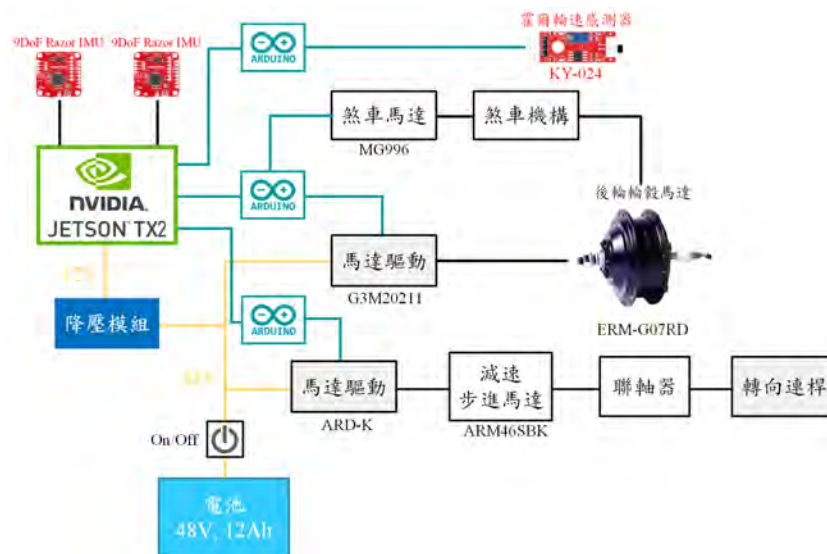


圖 6.2: 系統架構示意圖

由 TX2 提供 5V 電壓至 Arduino；另配有霍爾感測器作為輪速感測器以及兩組 IMU 量測六軸動態。車輛所配置之主要元件列表如下：

表 6.1: 車用元件規格表

元件名稱	型號(廠商)	元件	型號(廠商)
輪轂馬達	ERM-G07RD 48V (AICO)	轉向馬達	ARM46SBK 48V (Oriental)
輪轂馬達驅動器	G3M20211(AICO)	轉向馬達驅動器	ARD-K (Oriental)
車用鋰電池	BD4812LT(AICO)	煞車馬達	MG996
PLC/CU	UNO/mini (Arduino)	VCU	Jetson TX2 (Nvidia)
48/12 降壓模組	MGS304805(Cosel)	加速規	9DoF Razor (SparkFun)

面對車輛的模型參數分類，對於是否將該參數作為確定或不確定參數，首先根據對工程的判斷來決定是否須針對對參數量測的不確定性進行進一步的校準。若經評估認為該參數對於車輛的影響不大，或者易於量測，則先將其假設為確定數值，作為模型中的常數。若該參數被認定為重要參數且不易直接換算或被量測，則將其設定為不確定模型



參數，於所提出方法中進行校準。

車輛中的硬體規格參數整理於表6.2中，列於表中的量質及幾何意義可參考圖A.2。列於表中的參數為車輛模型中的確定參數，為根據對車輛進行量測、以 CAD 檔進行推算、或根據合理之工程假設而得。

表 6.2: 真實車輛之可量測/確定參數

Item	Notation	Value	Unit	Item	Notation	Value	Unit
前輪軸至質心距離	l_1	0.724	m	全車質量	m	48.3	kg
後輪軸至質心距離	l_2	0.719	m	x 軸轉動慣量	I_x	12.1	$kg \cdot m^2$
左輪軸至質心距離	w_1	0.3065	m	y 軸轉動慣量	I_y	36.7	$kg \cdot m^2$
右輪軸至質心	w_2	0.3135	m	右前輪轉動慣量	I_{fR}	0.3	$kg \cdot m^2$
質心離地高度	h	0.4896	m	左前輪轉動慣量	I_{fL}	0.3	$kg \cdot m^2$
軸距	p	1.43	m	後輪轉動慣量	I_r	0.5	$kg \cdot m^2$
前輪輪距	w	0.62	m	前輪初始半徑	r_f^0	0.3302	m
前叉偏移量	d	0.048	m	後輪初始半徑	r_r^0	0.3302	m
左輪轉向初始位置	Δ_{fL}	-1	deg	前輪胎寬	t_f	0.025	m
右輪轉向初始位置	Δ_{fR}	3.5	deg	後輪胎寬	t_r	0.025	m
縱向最大靜摩擦係數	μ_{dp}	0.8	—	輪胎垂直剛性	k_z	30000	N/m
橫向最大靜摩擦係數	μ_{dp}	0.8	—	重力加速度	g	9.81	m/s^2

6.1.2 模型架構

Simulink 的模型架構包函車輛動力學模型、軌跡生成、循跡駕駛演算法、以及提供使用者監控的循跡視覺化視窗，同時也建立了資料中心方便使用者監測及擷取整台車在行駛時的狀態輸出。整體的架構如下：

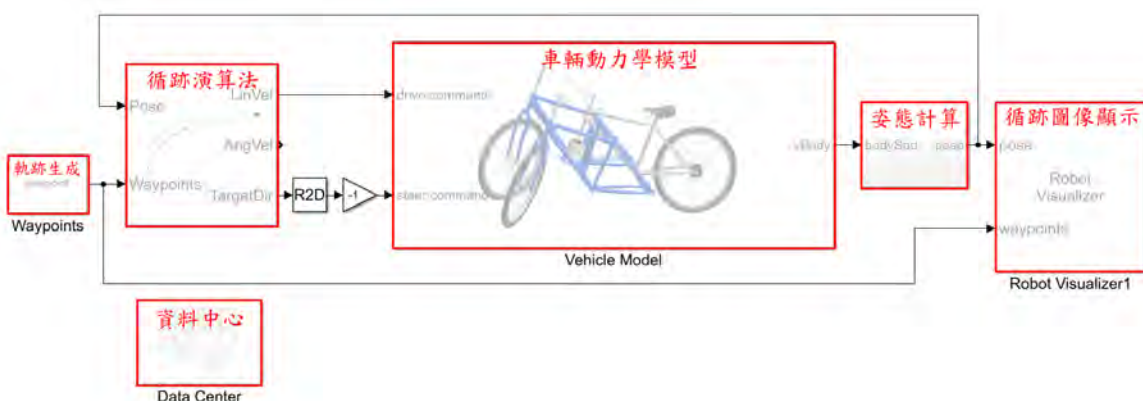


圖 6.3: 全車控制之 Simulink 模型

圖6.3中的車輛動力學模組內，又可細分為轉向次系統、推進次系統、阻力模型、動



力學(底盤)模型、正向力分配等次系統，各個次系統建立自己的 Simulink 模組後，再連接其次系統之間資訊的流動。車輛動力學模組中，由各個次系統所組成的 Simulink 架構如圖6.4。各個次系統的建置方法及所運用到的物理模型及對次系統的搭配方法建立 Simulink 模型之流程皆列於附錄A。

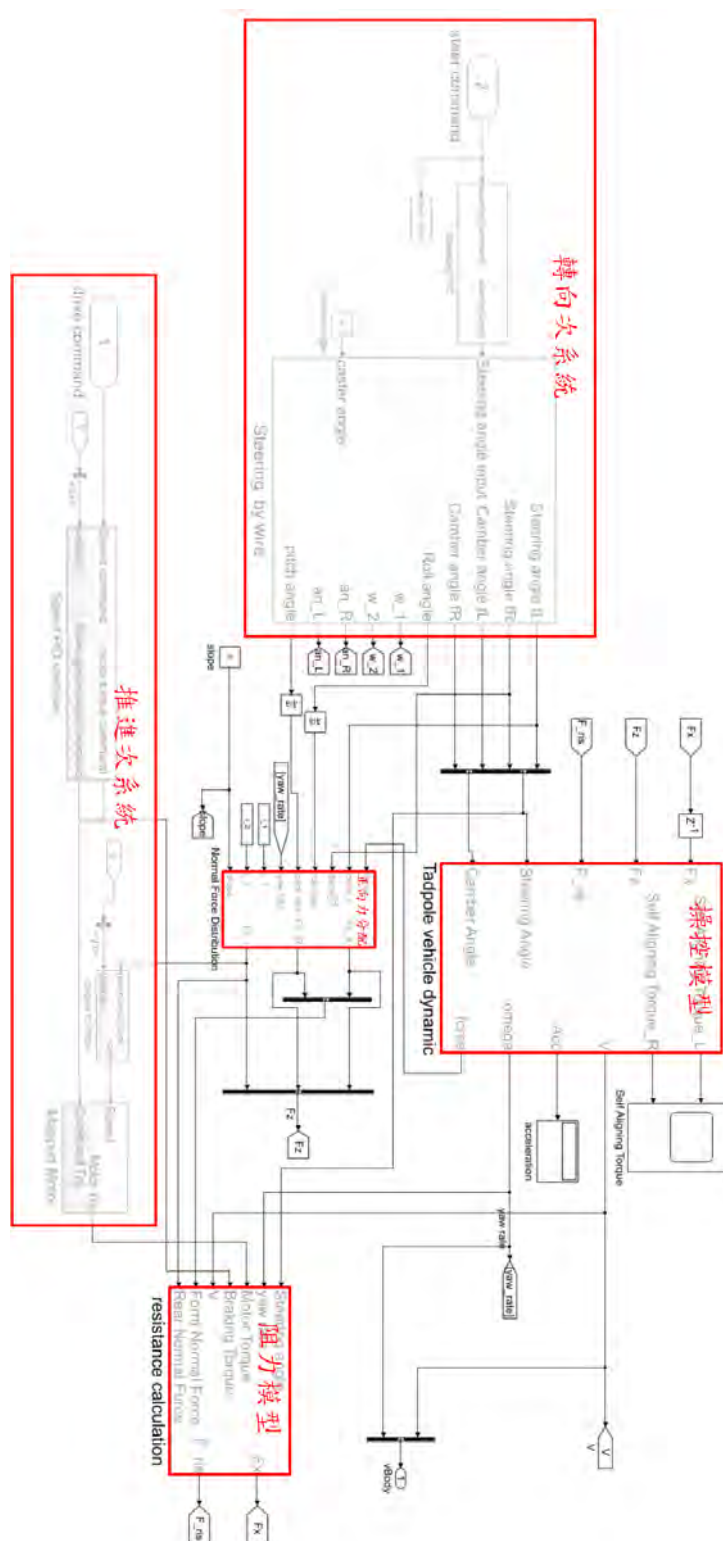


圖 6.4: 由各次系統模組所組成的車輛動力學模組之 Simulink 模型



6.1.3 不確定模型參數

對於車輛模型中較難透過直接量測、僅能透過動態行為進行推估、同時又有可能較顯著的影響系統行為的參數，本研究將其歸類至需要被進行校準的不確定模型參數。本小節將針對本研究所選定的 6 項不確定模型參數進行介紹，節錄部分物理方程式進行其意義之說明，以及其區間的訂定方式。不確定模型參數的區間訂定如表 6.3 所示：

表 6.3: 不確定參數分佈區間

參數	項目	符號	下界	上界	單位
θ_1	z 軸轉動慣量	I_z	30	90	kg . m ²
θ_2	側偏剛性	C_α	500	1500	N/rad
θ_3	外傾剛性	C_β	25	75	N/rad
θ_4	回正參數	SAP	0	0.03	m
θ_5	滾動阻力係數	μ_{r0}	0.0045	0.0135	—
θ_6	滾動阻力係數 1	μ_{r1}	0.0002	0.00075	v ⁻²

所選擇的不確定參數與對應的物理模型如下：

• z 軸轉動慣量

由式 6.1 所示，偏移角速度 (Yaw Rate) $\dot{\psi}$ 會直接由 Z 軸轉動慣量 I_z 影響。由於此車輛沒有懸吊系統，經由計算後確認在車輛進行轉向時，滾轉和傾斜角的變化極小可忽略，因此僅將 Z 方向之慣量歸類為不確定模型參數，影響轉轉與傾斜角方向的 x 與 y 軸轉動慣量則假設為確定之模型規格參數。

$$\dot{\psi} = \int \frac{\sum M + (I_x - I_y)\dot{\phi}\dot{\theta}}{I_z} dt \quad (6.1)$$

透過 3D 電腦繪圖軟體直接透過材料性質及幾何形狀計算車輛之 z 軸轉動慣量，得到慣量約為 45 kg . m²。考量到繪圖的尺寸誤差，以及各項掛載之硬體尚未列入計算，且對於材料係數的掌握不足，因此建立較大的不確定區間為 30 至 90，較能確定真實系統之 z 軸轉動被包含在該區間內。

• 側偏剛性

當輪胎因側滑角 α 所產生之形變而生成側滑力時，該側滑力在輪胎的線性操作區間時，可以經驗公式表達為：

$$F_{side-slip} = C_\alpha \alpha \quad (6.2)$$

其中 C_α 即為側偏剛性。根據 [136]， C_α 會受到正向力大小影響，但由於在此案例中，因車輛加減速所產生的正向力變化仍不足以對 C_α 造成太大的改變，因此可將

其視為定值。於 [136] 推算 C_α 的大小約落在 1000 左右，但考量到不同輪胎之間的差異，對該數值的預測範圍則設定為較大的 500 至 1000 之間。



- **外傾剛性**

當車輛具有後傾角時，輪胎於轉向會產生外傾角 β 所產生一側向力時，該力大小可簡化為一線性模型：

$$F_{\text{camber}} = C_\beta \beta \quad (6.3)$$

其中 C_β 即為外傾剛性。根據 [136] 推算 C_β 的約介於 50-60 之間，且受到正向力的不同所影響。與側偏剛性相同，在本案例中忽略正向力變化對 C_β 的影響，也同樣考量不同輪胎和車種之間的差異，因此將該數值的預測範圍設定為 25 至 75。

- **回正參數**

在車輛行進間，輪胎與地面接觸面因形變而使側向力作用位置並不會與轉向軸位於同一個 z 軸上，因而產生的一力臂，該稱為 SAP (Self-Aligning Parameter)。因此該力矩又被稱為回正力矩 (Self-Aligning Torque) M_{SAT} ，其模型可表示為：

$$M_{SAT} = -SAP \times F_y \quad (6.4)$$

對 SAP 而言，較難找到相對應的規格資料來進行假設，僅能透過於其他研究案例所進行之量測作為假設，且由於本案例所使用之車輛重量較小， SAP 同樣也有可能可以忽略。在各種不確定下，則將參數範圍設定為 0 至 0.3 之間。

- **滾動阻力係數**

滾動阻力 (Rolling Resistance) 會對於行駛間的車輛施加一輪胎朝向相反的阻力，其不確定會決定在固定扭力輸出時車輛的行進速度。滾動阻力大小與輪胎的形變和滾動的速度有直接的關係，而形變與正向力有直接關聯，因此透過經驗公式可將滾動阻力模型近似為：

$$F_r = -\mu_r F_z \quad (6.5)$$

其中，滾動阻力係數 μ_r 之數值解可以二階方程式近似為：

$$\mu_r = \mu_{r0} + \mu_{r1} v_x^2 \quad (6.6)$$

由 [136] 所提供的案例中，設定 $\mu_{r0} = 9.91 \times 10^{-3}$ 及 $\mu_{r1} = 1.95 \times 10^{-5}$ 。考量到其不確定性，則分別增加 50% 的不確定性，設定 μ_{r0} 的區間為 0.0045 至 0.0135 及 μ_{r1} 的區間為 0.0002 至 0.00075。

由於資訊管道及量測方法並不完全，本研究無法精確且有系統的設定不確定模型參數的區間。但由於本研究所討論的核心為如何透過調整操作對模型參數的全域敏感度進行調整，因此只要在分析過程中將此區間固定不變，不同操作下全域敏感度指標的變化仍然可以有效的表達模型參數能否被有效的觀察並進行比較。



6.2 路徑參數化與車輛模型駕駛

參數化的路徑在此案例中被作為輸入至閉迴路駕駛的操控指令。因著將路徑參數化，最佳化方法可被應用於求解最佳路徑參數，在此案例中即為最佳操作參數。本節將探討四組不同參數化軌跡，並說明其參數化幾何模型及可參作之參數範圍。

6.2.1 車道變換

車道變換 (Double Lane Change) 是車輛動態測試中常被使用的情境 [8]，車輛在一般駕駛皆會碰到此情境外，也是用來評估乘客舒適度的一大測試方法。然而，ISO 所規範的車道變化測試方式所限制的操作範圍非常大，而 Tsai 和 Peng 都曾提出在不同的超车情境下對於車輛的動態都會有所不同 [17, 18]。因此，針對車道變換的操控情境，本研究參考 [18] 的軌跡建構方式，建立由兩個幾何參數所控制的車道變換軌跡。

為了使車道變換的軌跡能更平滑，Tsai 提出若以 G2 曲率連接車道變換軌跡與直行軌跡 [18]，可減少循跡轉向時的橫向加速度。為了能將預期的軌跡設為可調整的操作參數，使用兩段三次貝茲曲線規畫參考軌跡，連接車道變換的起點與終點。貝茲曲線 (Bézier curves) 是一種參數化曲線 [137]，以 t 為輸入，三次貝茲曲線函數 $B(t)$ 如式 6.7，而組成貝茲曲線的參數則列於圖 6.5 [18] 中。

$$B(t) = P_0(1-t)^3 + 3P_1(1-t)^2 + 3P_2t^2(1-t) + P_3t^3, t \in [0, 1] \quad (6.7)$$

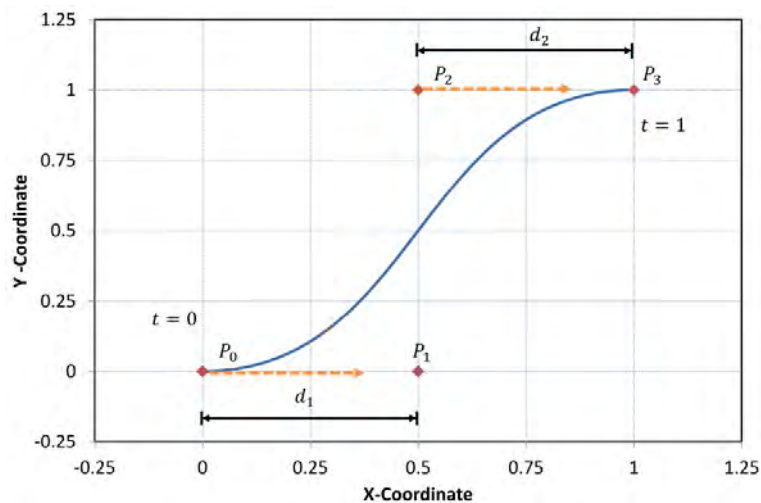


圖 6.5: 三次貝茲曲線示意圖 [18]

一般的貝茲曲線有四個控制點 P_0, P_1, P_2, P_3 ，其中 P_0 與 P_3 固定不動，為變換車道的起點與終點，直接與執行軌跡連接。而 P_1 及 P_2 僅能在 X 方向上調整，各自的 Y 座標則分別與 P_0 與 P_3 對齊，可使軌跡以 G2 連續性連接。為使參數易於被調整，本研究選擇設定圖 6.5 中 d_1 與 d_2 為貝茲曲線的軌跡參數，藉由不同的組合可產生不同的軌跡，也能代表不同的駕駛風格。將所建立的貝茲曲線進行鏡射後，即可得到由變換車道切換回原先車道的軌跡曲線。圖 6.6 為不同軌跡參數下的貝茲曲線。

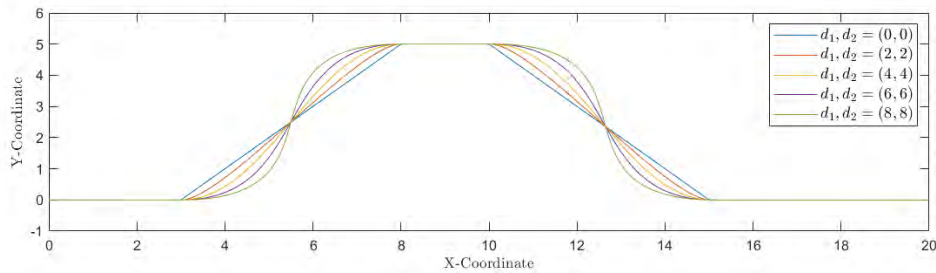


圖 6.6: 不同參數下之貝茲曲線

本研究中建立貝茲曲線的操作參數 $(x_1, x_2) = (d_1, d_2)$ ，且 $d_1 \in [0, 8], d_2 \in [0, 8]$ ，並自操作參數的設計空間中建立具有 5 種水準的全因子設計進行 25 組的取樣。

6.2.2 定轉角轉向

定轉角轉向 (Steady State Cornering)，或稱為穩態轉向，同樣也是 ISO 規範下的車輛動態測試方法 [10]。與車道變換的不同是，定轉角轉向之所為穩態測試，是因為車輛的所有角速度及角加速度在操作過程中皆為 0 [56]，也因此穩態測試多半被用於測試與加速無關的車輛性能。本研究認為使用定轉角轉向也能夠激發不同的參數，因此也採用定轉角轉向作為測試。

定轉角轉向分別由循圓半徑 r 及循跡速度 v_{req} 兩個參數所組成，其中循圓半徑決定軌跡的幾何形狀，而循跡速度則改變循跡演算法內部參數。定轉角轉向的軌跡方程式可表示為：

$$\begin{cases} x = r \cos(2rt - \frac{\pi}{2}) \\ y = r \sin(2rt - \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad (6.8)$$

對定轉角轉向的操作模式的操數化中，設定操作參數 $(x_1, x_2) = (r, v_{req})$ 且 $r \in [2, 6], v_{req} \in [0.8, 2]$ ，同樣對於操作參數的設計空間中建立具有 5 種水準的全因子設計進行 25 組的取樣。不同循圓半徑的軌跡如圖 6.7 所示。

6.2.3 啾頻

啾頻 (Chirp Sine) 為系統識別中常用於「掃頻」(Sweep) 之輸入訊號類型，為一種固定振幅、角頻率隨時間改變的函數 [138]。在車輛駕駛中，雖然不使用啾頻進行掃頻，

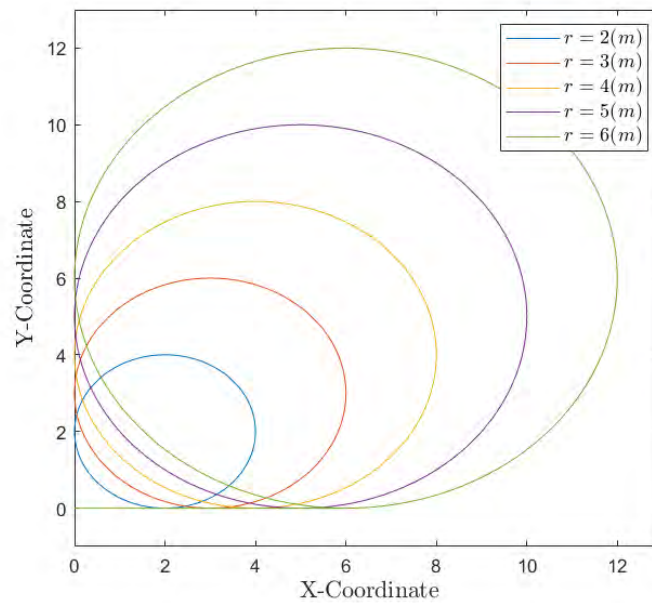


圖 6.7: 不同參數下之定轉角軌跡

但以啾頻作為軌跡仍然可以使車輛的轉向角在行駛間不斷在改變，同時改變曲線震盪頻率，具有高度的動態，因此選擇以啾頻作為激發用操作參數的選項之一。在此案例中，啾頻分為正啾頻與逆啾頻，其中正啾頻的角頻率隨時間而變大，而逆啾頻的角頻率則隨之變小。

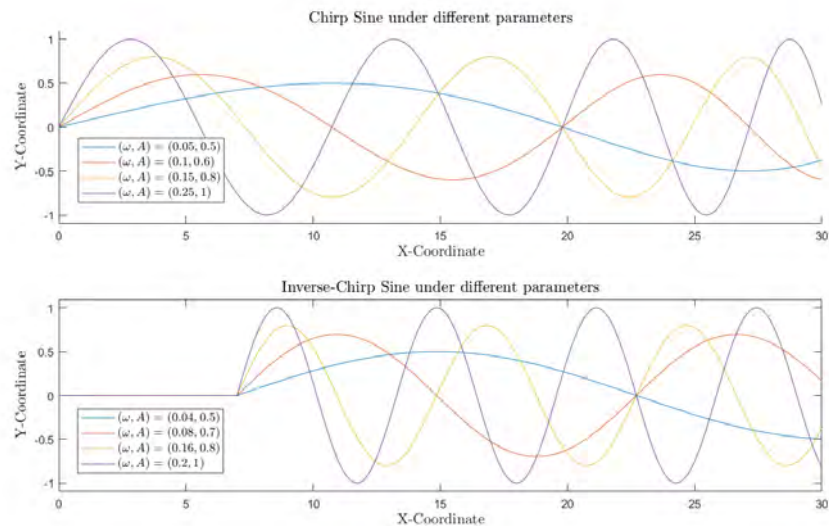


圖 6.8: 正啾頻與逆啾頻於不同參數下之軌跡

正啾頻數學模型可表示如下：



$$(x_{chirp}, y_{chirp}) = \begin{cases} x = 0.2t \\ y = A \sin((0.5 + 0.05e^{\lambda t})\omega t) \end{cases} \quad (6.9)$$

此模型由振幅 A 、衰減常數 λ 、及角頻率 ω 所組成，而在案例中設定操作參數 $(x_1, x_2) = (A, \lambda)$ ，其中 $A \in [0.5, 1]$ ， $\lambda \in [0.05, 0.25]$ ，而 ω 固定為 0.01。

逆啾頻數學模型可表示如下：

$$(x_{inv.chirp}, y_{inv.chirp}) = \begin{cases} x = 0.2t \\ y = A \sin((1 - 10^{-8}e^{\lambda t})\omega t) \end{cases} \quad (6.10)$$

同樣的，逆啾頻也由振幅 A 、衰減常數 λ 、及角頻率 ω 所組成，而在案例中設定操作參數 $(x_1, x_2) = (A, \lambda)$ ，其中 $A \in [0.5, 1]$ ， $\lambda \in [0.04, 0.2]$ ，而 ω 固定為 0.1。不同參數下的啾頻軌跡如圖 6.8 所示。

本研究將針對所定義的四種不同型態之駕駛方式來進行模擬與最佳化操作，並嘗試透過四種操作方式激發參數並進行參數的校準。操作方式的增加與否則會在完成實驗後討論。

6.2.4 閉迴路駕駛與開迴路駕駛

在此案例中，操作參數、閉迴路駕駛、與開迴路駕駛的關係如圖 6.9 所示。在本研究中，閉迴路駕駛表示操作參數輸入至模擬模型中，而產出控制指令的流程；開迴路駕駛則為駕駛執行控制指令的模組，兩者的 Simulink 架構不同。

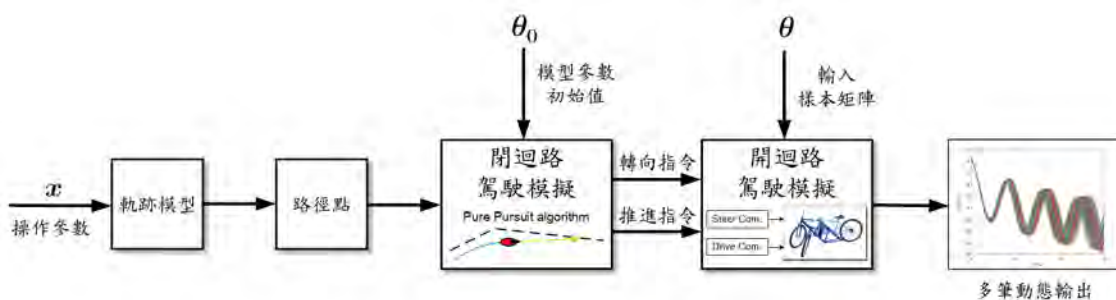


圖 6.9: 操作參數、閉迴路駕駛、與開迴路駕駛關係

閉迴路使用純追蹤法 (方法細節可參考附錄 A.6.1) 對於透過由操作參數所生成的軌跡進行循跡駕駛，駕駛架構如圖 6.10 所示，可分為三步驟：

1. 建立路徑點

將操作參數輸入至路徑產生函數並生成對應的路徑點，並輸入至純追蹤演算法中。



2. 車輛循跡駕駛

選擇不確定模型參數的中位數值作為閉迴路駕駛模型的模型型參數 θ_0 ，並讓該車輛模型進行循跡駕駛。

3. 記錄控制指令

在循跡駕駛的過程中，以時間序列記錄整趟駕駛的轉向指令及推進指令。

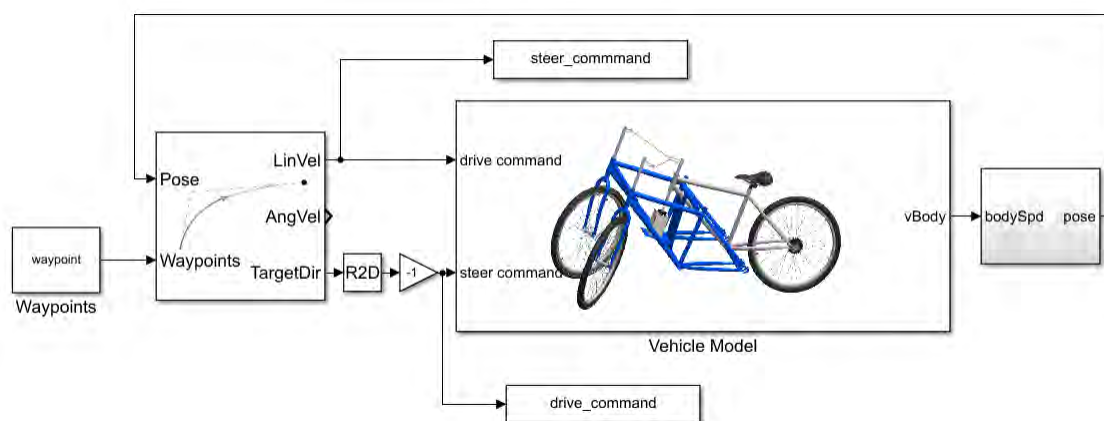


圖 6.10: 閉迴路駕駛模擬架構

由閉迴路駕駛模型產生的操控指令時間序列後，將時間序列輸入至開迴路駕駛模型中，如圖6.11所示，使開迴路模型無論模型參數為何，車輛的轉向馬達及動力馬達皆可輸出相同的動態。將透過低差異取樣所建立的不確定模型參數樣本矩陣輸入至開迴路駕駛模擬後，即可生成多筆狀態輸出，進行資料分析。

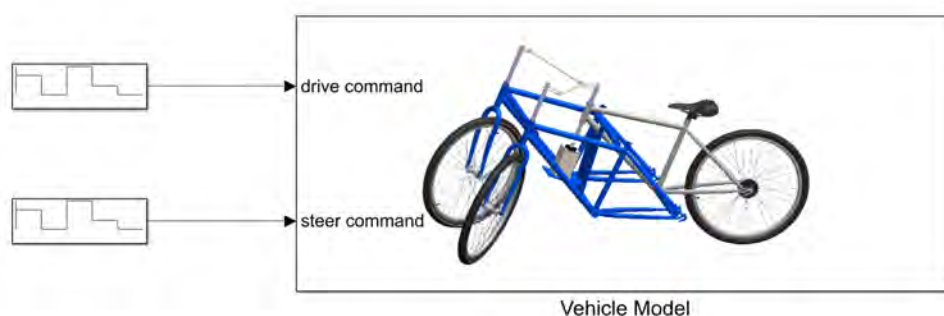


圖 6.11: 開迴路駕駛架構圖

6.3 參數激發與校準之操作流程

本節將介紹如將所提出之方法應用於真實系統中，首先先介紹車輛中不確定模型參數的產生和分佈區間，接著會針對方法使用上的流程進行說明。



6.3.1 模型運作概述

車輛系統的運作方式可以相同的數學式表達為：

$$\mathbf{y}(t) = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) \quad (6.11)$$

其中，操作參數 \mathbf{x} 為控制車輛路徑的幾何參數，透過循跡演算法將循跡駕駛過程的控制指令做為系統之輸入；而不確定模型參數 $\boldsymbol{\theta}$ 則先對該參數建立可能的分佈區間，在以低差異取樣方法自該分佈區間中建立系統輸入的樣本矩陣。系統的輸出 $\mathbf{y}(t)$ 為車輛之狀態 (State)，皆為時間函數。在此案例中，選擇做為被觀察且用於計算全域敏感度的輸出狀態為：車輛於全域座標 X 軸與 Y 軸之位置、以及於車體座標 z 軸上的偏移角速度 ψ 。

6.3.2 完整操作流程

清楚定義輸入及輸出後，即可將模擬模型應用於方法中。所提出方法之流程可參考圖3.1，將車輛模型置入此流程中，可得到操作流程如圖6.12所示。流程同樣分為激發操作生成與參數估測兩大階段，操作內容與前述案例相似。車輛不確定參數激發與校準流程的流程說明如下：

1. 系統建立

對系統操作參數空間的設計及實驗設計，建立系統操作參數的輸入樣本矩陣，同時對不確定模型參數也進行第一次低差異取樣，並建立不確定模型參數輸入樣本矩陣。

2. 替代模型建立

將系統參數轉換為駕駛路徑，以閉迴路循跡駕駛生成駕駛指令，並將駕駛指令與模型參數輸入樣本矩陣輸入至開迴路駕駛模擬中，得到觀察狀態的動態輸出資料。將動態資料以 K-L 轉換進行主成分分析，並以 Kriging 模型擬合輸入模型參數與主成分之重要係數。建立 Kriging 模型時加入 EGO 流程，有效增進模型的擬合準確性。

3. 全域敏感度分析

在每一組輸出狀態中，計算各個重要係數中各個模型參數之全域敏感度指標，並透過變異數進行加權平均得到輸出狀態的單一全域敏感度指標；計算各輸出狀態的單一全域敏感度指標後，將各輸出狀態同樣以自訂權重進行加權平均，得到能代表系統在該操作參數下之單一組全域敏感度指標。

4. 建立目標函數

依序對所有的操作參數組合進行全域敏感度指標的建立後，以 Kriging 模型分別建立操作參數的輸入樣本與各個主效應指標與總效應指標的替代模型，進而將建立以操作參數為設計變數之目標函數。

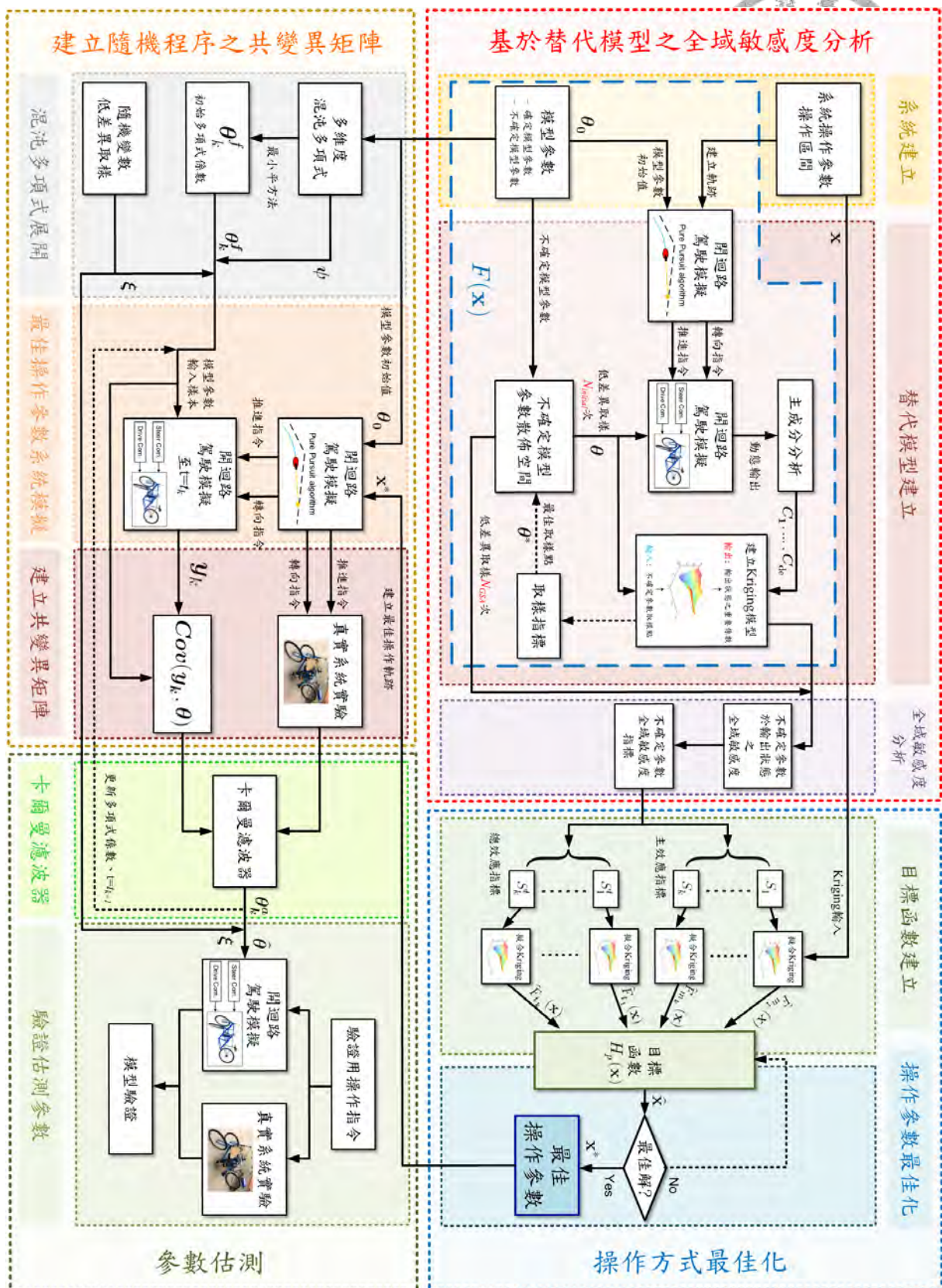


圖 6.12: 車輛不確定參數激發與校準流程



5. 操作參數最佳化

以 DIRECT 演算法計算目標函數之最佳解，作為激發模型參數的最佳操作參數。

6. 混沌多項式展開

根據不確定模型參數的分佈建立多維度混沌多項式，並以低差異取樣建立另一個輸入樣本矩陣，並最小平方法計算混沌多項式的係數。

7. 最佳操作參數系統模擬

將最佳操作參數及模型參數中位數輸入至閉迴路循跡駕駛模型，並記錄操控指令，與輸入樣本矩陣一起輸入至開迴路駕駛模擬至取樣時間點。

8. 建立共變異矩陣

以取樣時間點之系統輸出狀態與對應的模型參數建立誤差共變異矩陣。同時也建立真實系統量測的量測誤差共變異矩陣。

9. 卡爾曼濾波器

將閉迴路循跡駕駛所紀錄的操縱指令作為真實系統的輸入進行實驗，並記錄系統於取樣時間的狀態輸出。將量測所得的輸出與系統模擬輸出以卡爾曼濾波器整合，並更新混沌多項式係數。將隨機亂數取樣代入混沌多項式後，可得到更新後的不確定參數分佈，並輸入重新輸入至系統中，即可透過下一個取樣時間點的量測及模擬輸出狀態更新不確定模型參數之分佈。

10. 驗證估測參數

將估測之模型參數分別輸入至開迴路駕駛模擬及真實系統中，透過開迴路駕駛模擬建立動態軌跡不確定性之信賴區間後，檢定模擬及真實系統之動態於量測不確定性下是否能被視為相同，完成模型驗證。

此操作流程以車輛系統為範例，也期望可作為一般複雜動態系統所之參數激發與校準流程。後續節中會詳細說明本案例在操作上的細節及所需要進行的評估，藉由工程案例之應用驗證方法的可行性，同時也對方法的優化和未來工作進行討論。

6.4 Kriging 模型擬合準確度評估

使用基於替代模型之全域敏感度於工程案例中時，替代模型能否有效的替代系統是首要評估的，且需要透過擬合準確度來修正初始取樣的次數以保證模型的擬合準確性。本節首先介紹在此案例中以 Kriging 模型搭配 EGO 建立替代模型的流程，並探討 Kriging 模型在不同的駕駛軌跡中初始取樣次數與模型擬合準確度的關係，最後決定不同情境中的模型取樣次數，並評估方法可行性。

6.4.1 Kriging 模型建立

此案例中的 Kriging 模型所替代的對象為不確定模型參數的取樣位置與車輛輸出狀態的重要係數的關係，可以圖6.13表示：

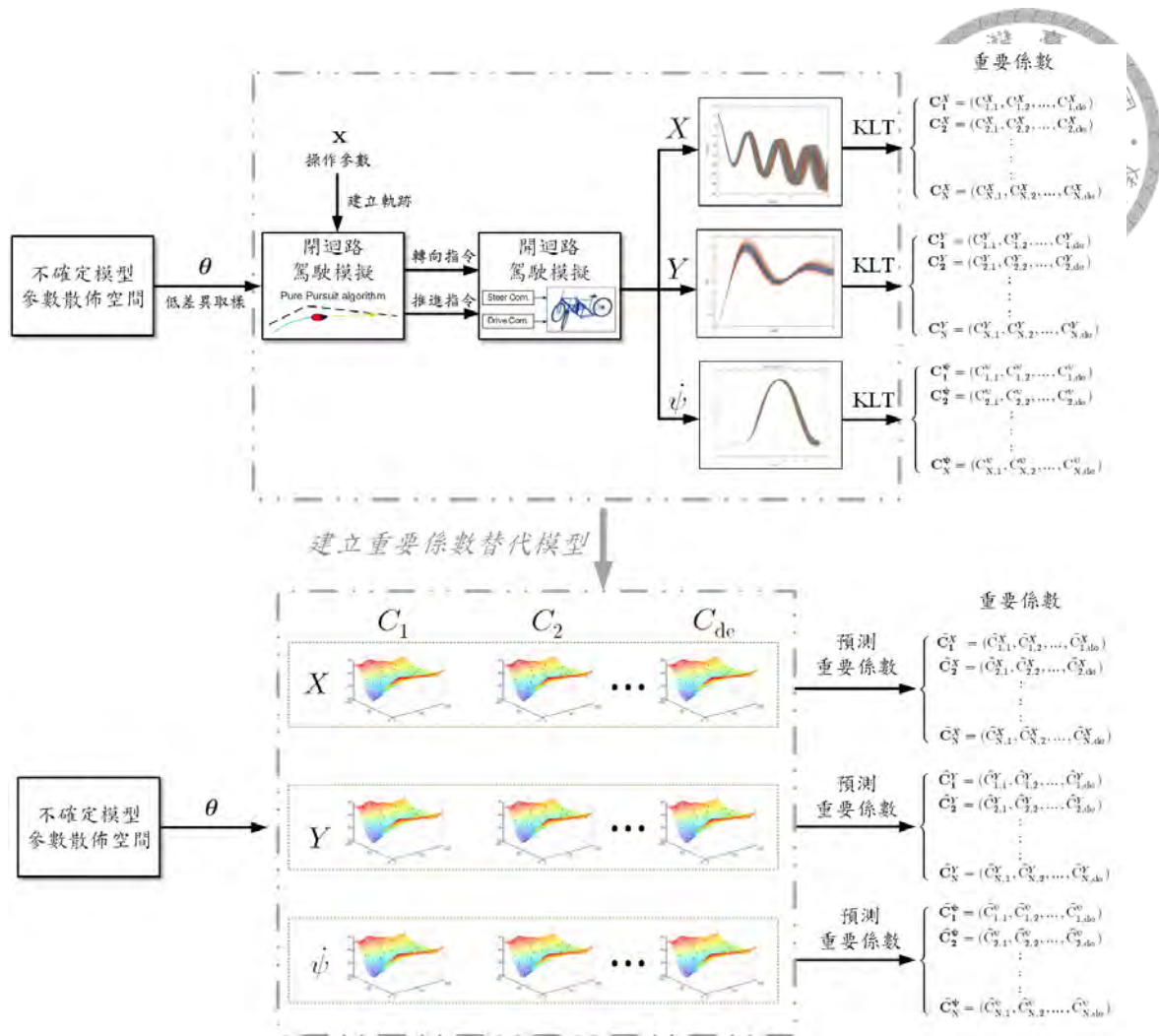


圖 6.13: 以 Kriging 模型替代車輛動態輸出之重要係數示意圖

建立替代模型的步驟如下：

1. 建立初始取樣之輸入樣本矩陣

由表6.3的參數分佈範圍組成的模型參數設計空間，以低差異取樣 $N_{initial}$ 次、建立 $N_{initial} \times 6$ 的輸入樣本矩陣。

2. 以閉迴路駕駛模擬生成操控指令

以操作參數 x 生成軌跡、不確定模型參數的中位數作為初始的模型參數 θ_0 ，並將 x 及 θ_0 ，輸入至閉迴路駕駛模擬中，以時間序列記錄循跡駕駛過程中的轉向馬達及動力馬達的控制指令。

3. 閉迴路駕駛模擬

將控制指令及不確定模型參數的輸入樣本矩陣輸入至閉迴路駕駛模擬中，分別記錄在 X 、 Y 、和 ψ 三個輸出狀態各自的 $N_{initial}$ 筆輸出動態，同時將輸出資料以資料點的内插壓縮為長度為 10000 個取樣點的序列，輸出資料以矩陣表示如下：



$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{1,1}(1) & X_1(2) & \cdots & X_1(10000) \\ X_2(1) & X_2(2) & \cdots & X_2(10000) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{N_{initial}}(1) & X_{N_{initial}}(2) & \cdots & X_{N_{initial}}(10000) \end{bmatrix}_{N_{initial} \times 10000}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1(1) & Y_1(2) & \cdots & Y_1(10000) \\ Y_2(1) & Y_2(2) & \cdots & Y_2(10000) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{N_{initial}}(1) & Y_{N_{initial}}(2) & \cdots & Y_{N_{initial}}(10000) \end{bmatrix}_{N_{initial} \times 10000}$$

$$\dot{\psi} = \begin{bmatrix} \dot{\psi}_1(1) & \dot{\psi}_1(2) & \cdots & \dot{\psi}_1(10000) \\ \dot{\psi}_2(1) & \dot{\psi}_2(2) & \cdots & \dot{\psi}_2(10000) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{\psi}_{N_{initial}}(1) & \dot{\psi}_{N_{initial}}(2) & \cdots & \dot{\psi}_{N_{initial}}(10000) \end{bmatrix}_{N_{initial} \times 10000}$$

4. 以 K-L 轉換進行主成分分析

對 \mathbf{X} 、 \mathbf{Y} 、及 $\dot{\psi}$ 進行主成分分析，將每一組取樣的狀態輸出以重要係數表示，可得到：

$$\mathbf{C}^X = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^X \\ \mathbf{C}_2^X \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{N_{initial}}^X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1,1}^X & \cdots & C_{1,de}^X \\ C_{2,1}^X & \cdots & C_{2,de}^X \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N_{initial},1}^X & \cdots & C_{N_{initial},de}^X \end{bmatrix}_{N_{initial} \times de}$$

$$\mathbf{C}^Y = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^Y \\ \mathbf{C}_2^Y \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{N_{initial}}^Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1,1}^Y & \cdots & C_{1,de}^Y \\ C_{2,1}^Y & \cdots & C_{2,de}^Y \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N_{initial},1}^Y & \cdots & C_{N_{initial},de}^Y \end{bmatrix}_{N_{initial} \times de}$$

$$\mathbf{C}^{\dot{\psi}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{\dot{\psi}} \\ \mathbf{C}_2^{\dot{\psi}} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{N_{initial}}^{\dot{\psi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1,1}^{\dot{\psi}} & \cdots & C_{1,de}^{\dot{\psi}} \\ C_{2,1}^{\dot{\psi}} & \cdots & C_{2,de}^{\dot{\psi}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N_{initial},1}^{\dot{\psi}} & \cdots & C_{N_{initial},de}^{\dot{\psi}} \end{bmatrix}_{N_{initial} \times de}$$

5. 建立替代模型

以不確定模型參數的樣本矩陣為輸入，分別以每個狀態的第 1 至第 de 個重要係數為系統輸出，進行 Kriging 模型的擬合。例如，若對 X 座標的輸出矩陣 \mathbf{C}^X 進行主成分分析後得到 de 組重要係數，則需要建立 de 個 Kriging 模型來預測每個 X 座標中的重要係數。

6. 以取樣指標決定 EGO 取樣位置

由於建立的 Kriging 模型數量非常多，以取樣指標決定下一個最佳取樣位置時，以所有的 Kriging 模型中，變異數 (特徵值) 最大者做取樣指標的計算。例如， C_1^X 為所有 Kriging 模型中具有最大的變異數，則計算用於預測 C_1^X 的 Kriging 模型中變異數最大處為最佳取樣位置。由於重要係數在 K-L 轉換中已經被一般化至變異數等於 1，因此設定 EGO 的啟動條件為目標 Kriging 模型的最大變異數大於 0.05 時才啟動，且迭代次數不超過 50 次。EGO 於此案例中的流程可表示如圖所示。

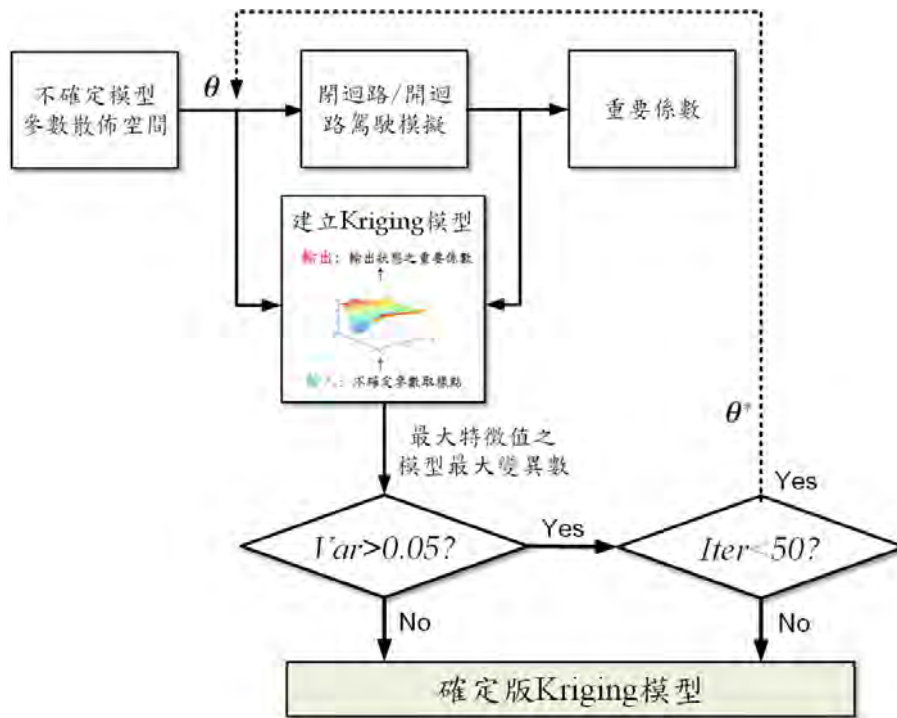


圖 6.14: EGO 於車輛案例之流程圖

6.4.2 Kriging 模型準確度評估

由於在不同的操作方式下，所呈現的 Kriging 模型、主成分分析的結果、甚至截斷數 de 都是不一樣的。為了確保在每一種操作下，Kriging 模型對於預測的重要係數可以有一定的準確度，因此在此案例中，針對每一種操作，透過對不同的取樣次數與模型準確度進行探討，並呈現在選擇的初始取樣次數下 Kriging 模型的擬合和軌跡的預測結果。

選擇初始取樣次數的依據主要有二：

- R^2 及 $RAAE$ 兩指標隨著取樣次數的增加而優化的程度趨緩
- $R^2 > 0.95$ 且 $RAAE < 0.05$

以這兩項原則決定初始取樣次數後，對該 Kriging 模型準確度評估以交叉驗證方式進行，流程如下：

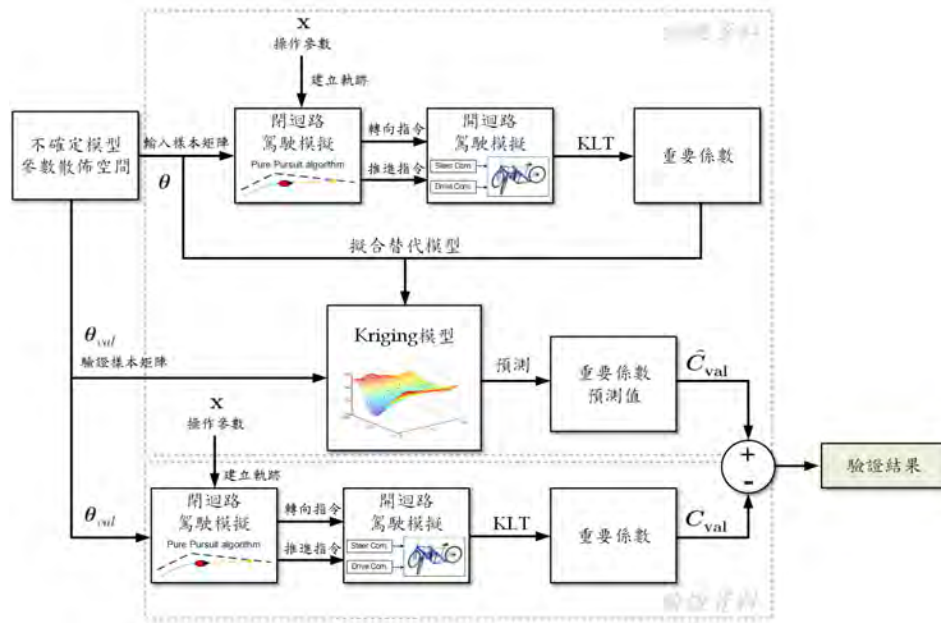


圖 6.15: 車輛案例之 Kriging 模型準確度驗證流程

1. 建立訓練資料及 Kriging 模型

以低差異取樣方法建立不同初始取樣次數之輸入樣本矩陣做為 Kriging 模型的訓練集，輸入至模型中進行模擬並對動態輸出以 K-L 轉換進行主成分分析，得到對應之重要係數後，搭配 EGO 建立 Kriging 模型。

2. 建立驗證資料

以低差異取樣方法建立另一組驗證樣本矩陣，輸入至模型中進行模擬並對動態輸出以 K-L 轉換進行主成分分析，得到該重要係數 C_{val} ，以此資料做為驗證資料。在本案例中設定驗證樣本數量 N_{val} 為 1200 次。

3. 模型驗證及準確度評估

將驗證樣本矩陣輸入至 Kriging 模型中，得到重要係數的預測值 \hat{C}_{val} 。比較 C_{val} 與 \hat{C}_{val} 的差異及對還原動態的重現性。在驗證流程中，每一種操作方式可以建立四種表現 Kriging 模型準確度的表達方式：

- **誤差分佈百分比**：以直方圖呈現誤差百分比的分佈
- **單一輸出資料比較**：比較單一組來自真實系統的輸出動態、經由 K-L 轉換而重組的動態、以及經由 Kriging 模型預測之重要係數所重組的動態之間的差異
- **全體資料散佈差異**：比較所有來自真實系統的輸出動態、經由 K-L 轉換而重組的動態、以及經由 Kriging 模型預測之重要係數所重組的動態之散佈程度的差異
- **重要係數比較圖**：比較經由計算所得的重要係數及透過 Kriging 模型所預測之重要係數的差異。在此選擇前 200 筆驗證資料的重要係數進行比較



以下整理以任選一組之車道變換、定轉角轉向、正啾頻、及逆啾頻的操作參數 \mathbf{x}_0 輸入系統，進行 Kriging 模型擬合時，不同的初始取樣次數所對應的 R^2 和 $RAAE$ 。列於表6.6至表B.3中。各個操作所輸入的操作參數 \mathbf{x}_0 如下：

表 6.4: 任意選擇之操作參數

	車道變換	定轉角轉向	正啾頻	逆啾頻
(x_1, x_2)	(4,2)	(4,1)	(0.15,0.75)	(0.1,0.75)
模擬時間 (s)	21	50	30	30

表6.5中也列出每一種操作下，各個重要係數所對應到的共變異矩陣特徵值。由於每一組重要係數在 K-L 轉換中已經被一般化至平均為 0、變異數為 1 的集合，因此特徵值也可被用於表達重要係數的變異量。

表 6.5: 四種操作中重要係數所對應特徵值

	車道變換	定轉角轉向	正啾頻	逆啾頻	
X	C_1	43.6405	429.9338	19.1735	21.7364
	C_2	3.158	8.5212	0.1132	0.1093
	C_3	—	4.5489	—	—
	C_4	—	0.3903	—	—
	Sum	46.7985	443.3942	19.2867	21.8457
Y	C_1	11.5837	692.7774	26.4496	2.802
	C_2	3.7363	3.4223	0.2619	0.1679
	C_3	0.8454	0.4786	0.1562	0.0041
	Sum	16.1654	696.6783	26.8677	2.974
$\dot{\psi}$	C_1	0.242	0.1071	0.4422	0.0262
	C_2	0.0443	0.0013	0.0187	0.0084
	C_3	0.0169	0.000003	0.0012	9.38E-06
	C_4	—	—	0.0005	—
	Sum	0.3032	0.108403	0.4626	0.03461

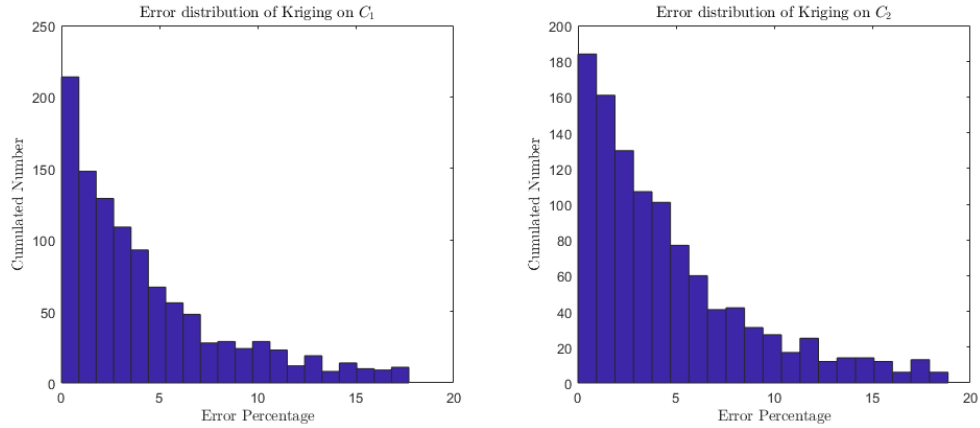
表6.6、表B.1至表B.3中，分別列出三個觀測狀態的重要係數，且在每一個觀測狀態中，以重要係數所對應的特徵值做為權重，以加權平均方式將各個重要係數的擬合準確度評估指標求出。

表 6.6: 車道變換操作下不同初始取樣次數之 R^2 和 $RAAE$

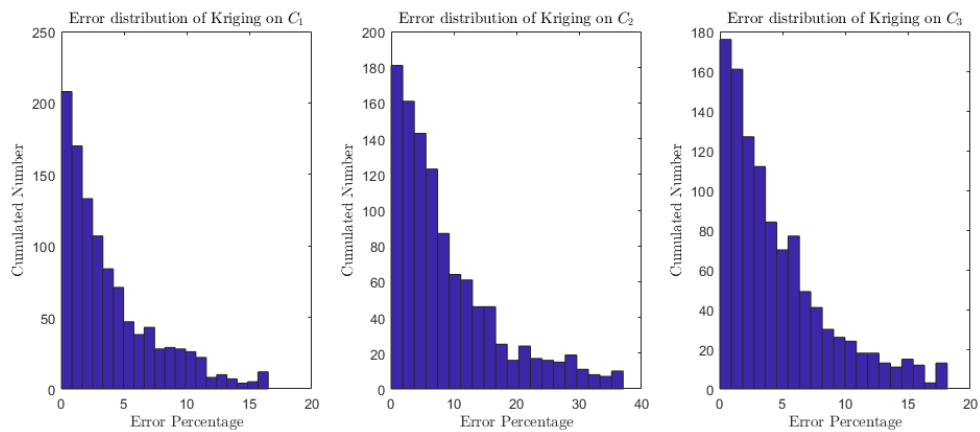
R^2									
$N_{initial}$	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000
X	C_1	0.9242	0.9267	0.9667	0.9796	0.9883	0.9905	0.9929	0.9943
	C_2	0.9417	0.9662	0.9781	0.9877	0.9922	0.9933	0.9953	0.9961
	fusion	0.9243	0.927	0.9668	0.9797	0.9884	0.9905	0.9929	0.9953
Y	C_1	0.9517	0.9687	0.9827	0.9897	0.9937	0.9947	0.9958	0.9964
	C_2	0.9588	0.9718	0.9818	0.9879	0.9924	0.9936	0.9948	0.9956
	C_3	0.8037	0.8418	0.8584	0.8817	0.9098	0.9144	0.9208	0.92
	fusion	0.9515	0.9685	0.9824	0.9894	0.9934	0.9945	0.9956	0.9962
ψ	C_1	0.9327	0.9538	0.9717	0.983	0.9903	0.9921	0.9944	0.9953
	C_2	0.9356	0.9565	0.9697	0.9746	0.9826	0.9843	0.986	0.9879
	C_3	0.9402	0.9543	0.9671	0.9736	0.9792	0.9796	0.9805	0.9815
	fusion	0.9328	0.9538	0.9716	0.9827	0.99	0.9918	0.9937	0.995
$RAAE$									
$N_{initial}$	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000
X	C_1	0.1741	0.1642	0.1048	0.0831	0.0656	0.0576	0.0513	0.0438
	C_2	0.1405	0.1047	0.0822	0.0617	0.0489	0.0444	0.0381	0.0338
	fusion	0.1739	0.1639	0.1046	0.083	0.0655	0.0575	0.0512	0.0438
Y	C_1	0.1419	0.1103	0.0811	0.0638	0.0516	0.0462	0.0418	0.0382
	C_2	0.1237	0.0994	0.0796	0.06398	0.0522	0.0487	0.0443	0.041
	C_3	0.2833	0.2555	0.2408	0.2252	0.2028	0.1992	0.1911	0.1949
	fusion	0.142	0.1104	0.0814	0.0642	0.052	0.0466	0.0422	0.0386
ψ	C_1	0.1654	0.1302	0.0976	0.0766	0.0604	0.0531	0.0472	0.04502
	C_2	0.1553	0.125	0.1087	0.0991	0.0838	0.08	0.0774	0.0725
	C_3	0.157	0.1336	0.1191	0.1066	0.0976	0.0974	0.0963	0.0948
	fusion	0.1651	0.1301	0.0981	0.0774	0.0613	0.0542	0.0484	0.0415

從表6.6中可以看到，在車道變換的操作方式下，當初始取樣次數到達 1800 次之後，指標成長的速度趨緩，同時 R^2 皆大於 0.99、 $RAAE < 0.05$ ；而從表B.1至表B.3中，當初始取樣次數到達 1400 次後，指標成長的速度明顯趨緩，且指標皆達到收斂目標。透過對初始取樣的測試，在車道變換的操作下，設定初始取樣次數為 1800 次，而其他操作下設定為 1400 次。以下將分別呈現四種操作所組的 Kriging 模型驗證結果。

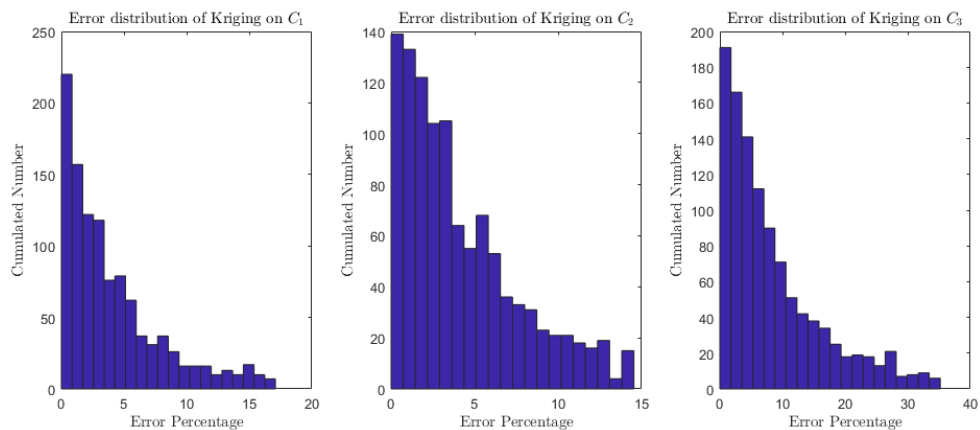
以車道變換為例，車道變換操作下 Kriging 模型驗證下的誤差分佈如圖6.16所示。在初始取樣次數為 1800 次時，大多數的重要係數的預測誤差大多集中於 10% 以內，而圖6.16(b) 中的 C_2 及圖6.16(c) 的 C_3 呈現較大的預測誤差。



(a) 車道變換操作中 X 之重要係數預測誤差百分比分佈



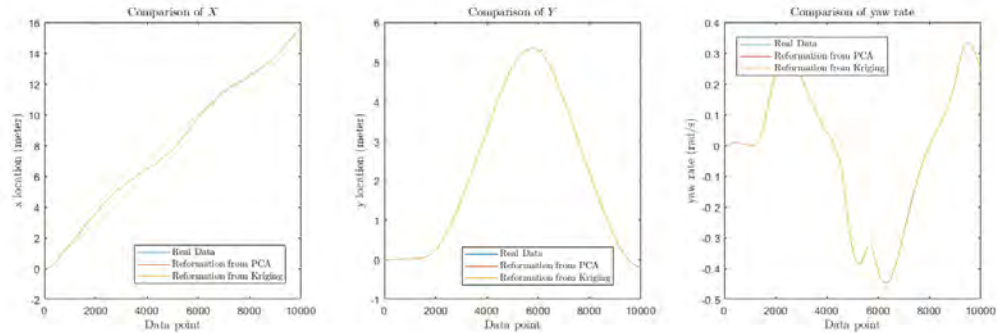
(b) 車道變換操作中 Y 之重要係數預測誤差百分比分佈



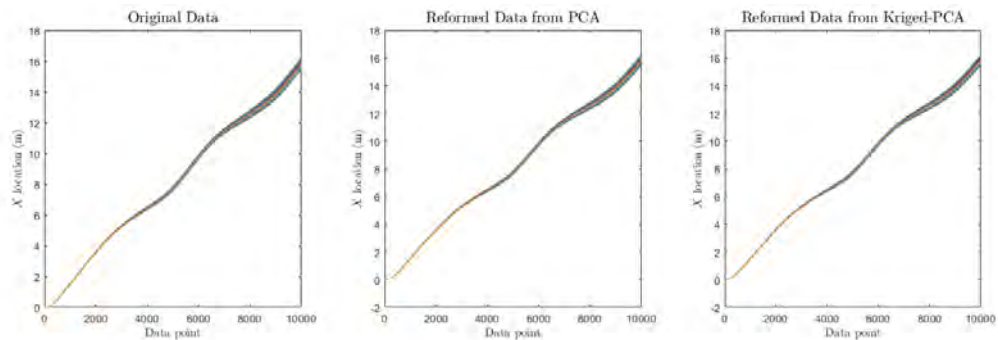
(c) 車道變換操作中 ψ 之重要係數預測誤差百分比分佈

圖 6.16: 車道變換操作下重要係數預測誤差百分比分佈

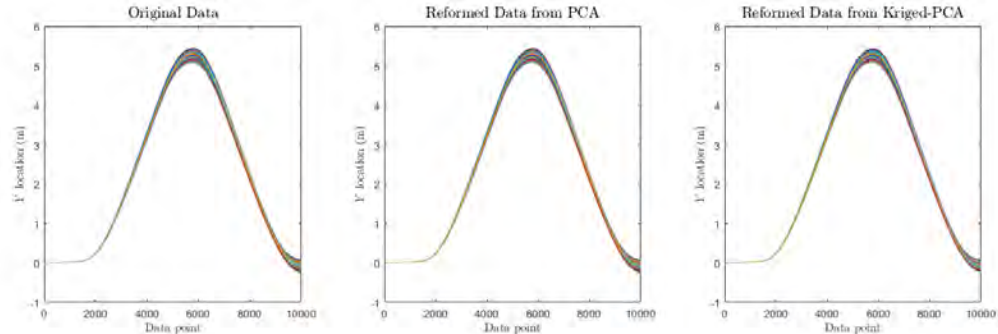
車道變換操作中原始輸出動態與還原動態之比較如下：



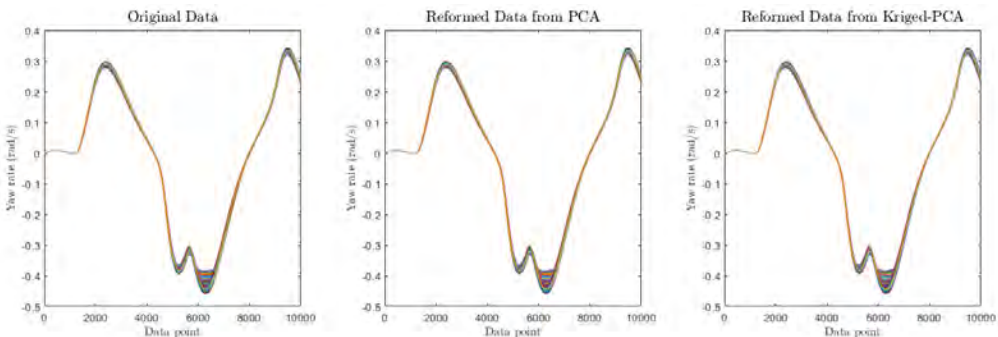
(a) 車道變換操作中原始動態、PCA 重組之動態、以 Kriging 模型預測重要係數重組之單一動態比較



(b) 車道變換操作中原始動態、PCA 重組之動態、以 Kriging 模型預測重要係數重組之 X 全體動態比較



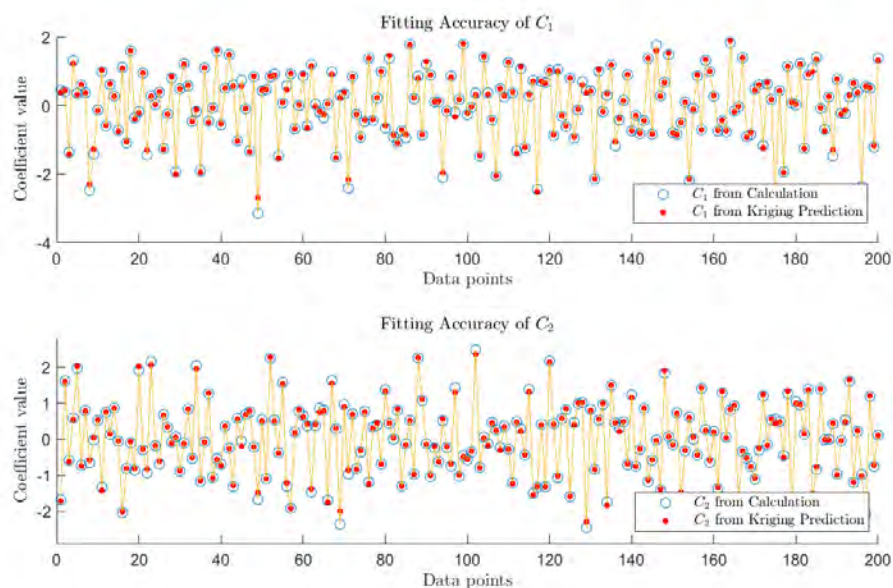
(c) 車道變換操作中原始動態、PCA 重組之動態、以 Kriging 模型預測重要係數重組之 Y 全體動態比較



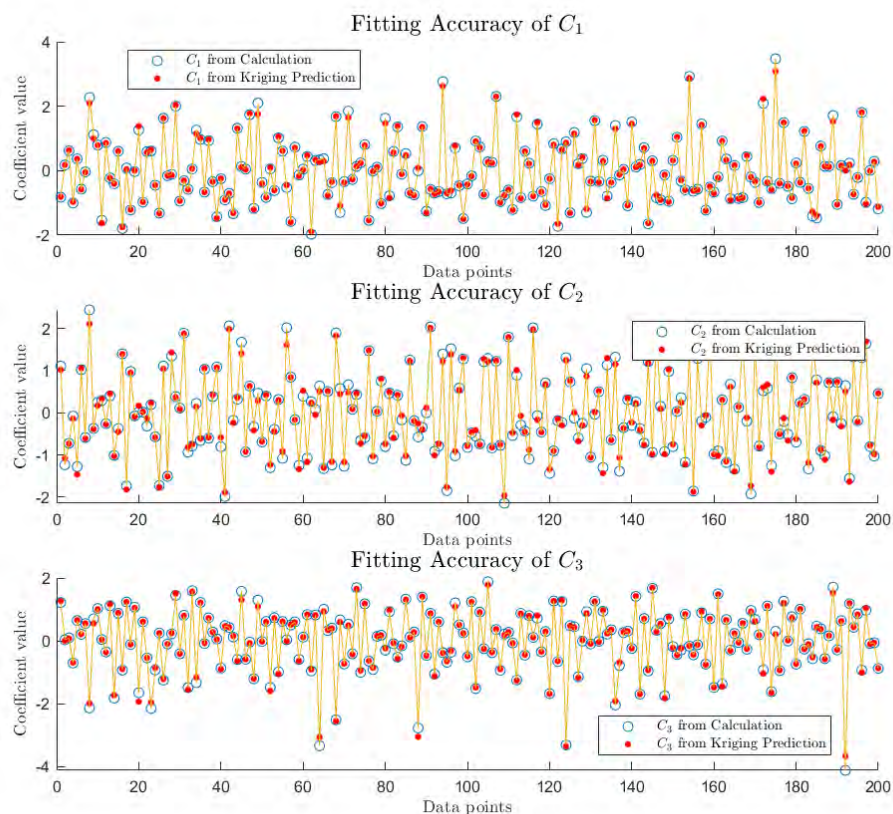
(d) 車道變換操作中原始動態、PCA 重組之動態、以 Kriging 模型預測重要係數重組之 $\dot{\psi}$ 全體動態比較

圖 6.17: 車道變換操作中原始動態、PCA 重組之動態、以 Kriging 模型預測重要係數重組動態比較

車道變換操作下重要係數與預測之重要係數比較 (比較前 200 筆資料) :



(a) 車道變換操作下 X 重要係數與預測之重要係數比較



(b) 車道變換操作下 Y 重要係數與預測之重要係數比較

圖 6.18: 車道變換操作下與 Y 重要係數與預測之重要係數比較

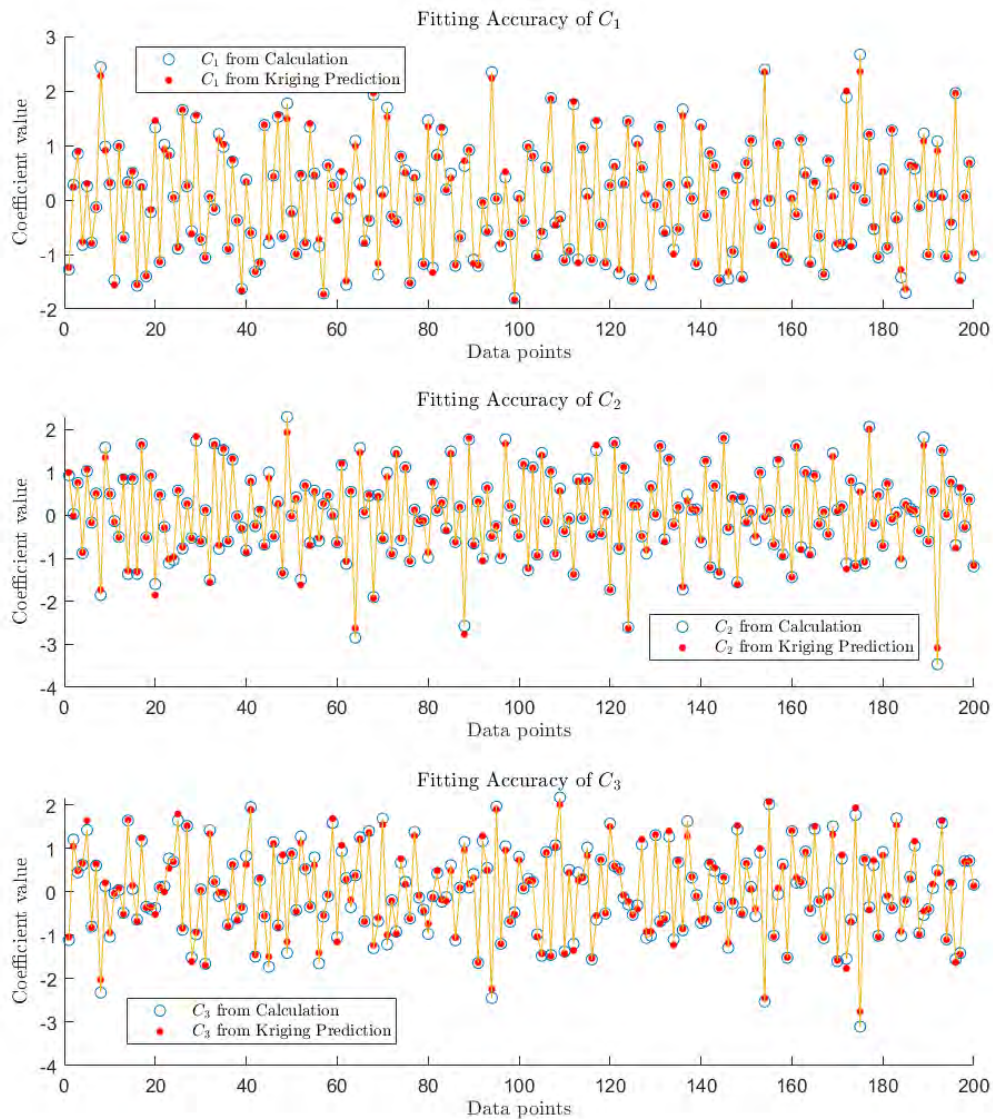


圖 6.19: 車道變換操作下 ψ 重要係數與預測之重要係數比較

儘管圖6.16中顯示 Kriging 模所預測的重要係數與實際值存在一定顯著的誤差，圖6.18及圖6.19藉由實際比較兩數值，也可看見 Kriging 模型對於較極端值的重要係數預測能力較差，但自圖6.17中可看出，以 Kriging 模型所預測的重要係數重組之動態曲線與原始動態曲線完全一致，並且對全體資料進行進行重組後的動態曲線之分佈，也與原始動態曲線的分佈非常相似。透過圖表可以認定當初始取樣次數為 1800 次時所建立之 Kriging 模型可以有效的預測動態資料的散佈狀況，因此在該取樣次數下，所計算出的全域敏感度指標具有一定可信度。

其餘三種操作之 Kriging 模型準確度評估皆列於第B.2節。確認所選擇的操作參數可見立足夠可信度的 Kriging 模型後，即可將 Kriging 模型取代複雜系統，進行全域敏感度分析。



6.5 全域敏感度分析

決定初始取樣次數後，接下來則針對全域敏感度的執行進行探討。本節的目標為決定最適當的全域敏感度分析之取樣次數 N_{GSA} ，而此案例與數學案例不同，無法透過直接求解法計算全域敏感度指標的標準值，因此僅透過 N_{GSA} 與敏感度指標的收斂性進行觀察，並決定最佳取樣次數 N_{GSA} 。本節將說明如何應用動態系統的全域敏感度分析方法於此案例中，並透過收斂性分析選擇最適當之取樣次數 N_{GSA} 。

6.5.1 全域敏感度分析流程

面對具有多組輸出狀態的動態系統，會得到多組全域敏感度指標，因此需要透過加權平均方式對指標進行融合，以計算系統於操作下，不確定模型參數得等效全域敏感度指標，計算方式如下：

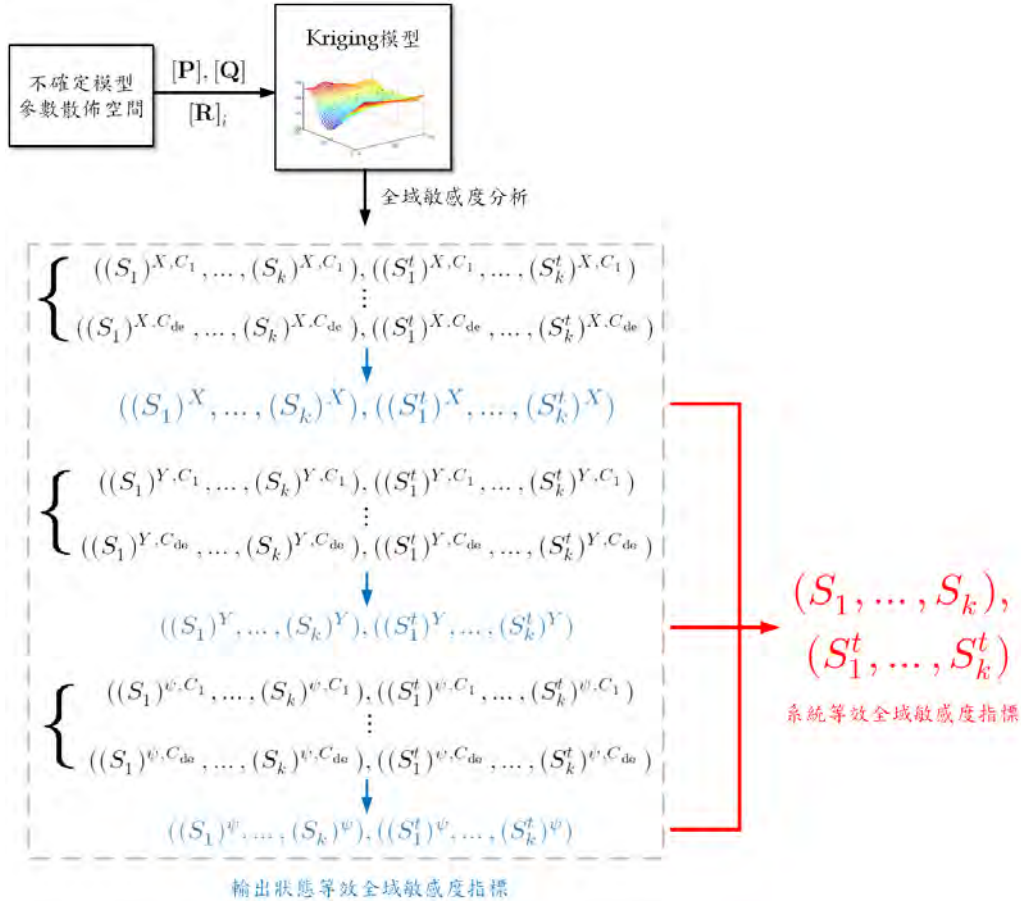


圖 6.20: 具有多組輸出狀態之全域敏感度指標融合示意圖

1. 建立獨立輸入樣本矩陣

以低差異取樣方法自不確定模型參數空間建立間兩個取樣次數為 N_{GSA} 之獨立輸入樣本矩陣 \mathbf{P} 及 \mathbf{Q} ，並建立 k 組獨立矩陣 $\mathbf{R}_i, i = [1, k]$ ，其中 k 為不確定模型參數個數。



2. 以替代模型預測重要係數

將 P 、 Q 、及 R_i 依序輸入至 Kriging 模型中，可得到三組輸出狀態 X 、 Y 、與 $\dot{\psi}$ 中，每一組輸入樣本的第 1 至第 d_e 組重要係數。

3. 全域敏感度指標計算及兩階段指標融合

計算各個輸出狀態中，每一組重要係數的主效應指標及總效應指標。第一次的指標融合中，將各組中 C_1 至 C_{d_e} 的全域敏感度指標以對應的特徵值做為權重，進行全域敏感度指標的融合，得到可代表不確定模型參數在該狀態中的全域敏感度。第二階段的指標融合則將代表各狀態的全域敏感度指標以自訂的權重融合為代表在該操作下的單一組指標。在指標融合的權重選擇上，則依據各個操作狀態中，觀測狀態變異的程度自定權重。例如， X 的共變異矩陣特徵值雖然較 Y 和 $\dot{\psi}$ 來的大，但不論在資料累積的方式上、資料的變異量、以及在設定輪速固定的情況下， X 的變異量所具有的參考價值較低； Y 的變異量在各操作中相對顯著，是評估車輛姿態的主要關鍵，因此權重較大；偏移角速度雖然同樣影響姿態較多，但量值本身較小，較不容易呈現顯著差異，因此將權重縮小。根據圖 6.17、圖 B.2、圖 B.6、和圖 B.10 中三種輸出狀態的資料散佈情形以及數值大小，各個操作方式下重新分配的指標融合權重如下表：

表 6.7: 各種操作下不同輸出狀態之全域敏感度指標融合權重

觀測狀態	車道變換	定轉角轉向	正啾頻	逆啾頻
X	0.1	0.4	0.05	0.05
Y	0.7	0.4	0.85	0.85
$\dot{\psi}$	0.2	0.2	0.1	0.1

6.5.2 全域敏感度分析準確度評估

建立了計算等效全域敏感度指標的方法後，本小節將探討用於計算全域敏感度指標的取樣次數 N_{GSA} 與指標收斂性的關係。

在這個案例中，分別以 $N_{GSA} = [1500, 5000, 10000, 20000, 30000, 40000, 60000, 120000]$ 進行全域敏感度分析，並找出兩項全域敏感度指標與取樣次數的關聯。與數學模型為案例的狀況不同是，在工程案例中並無法透過直接求解法或非常大的樣本數來計算全域敏感度指標，因此針對收斂性僅由曲線的特性判斷。

圖 6.21、圖 B.13 至圖 B.15 為四種不同的操作方式在表 6.4 的操作參數下，全域敏感度與 N_{GSA} 的關係圖。從圖中可以看到，在 N_{GSA} 數量到達 5000 次時，敏感度指標的隨著取樣次數而偏移的數值大小約在 0.01 以內；若 N_{GSA} 達到 40000 次，敏感度指標的偏移量則小於 0.001，並且圖中曲線呈現較明顯的收斂情形。透過全域敏感度分析的準確度評估，本研究在考量計算成本及指標準確度後，將以 $N_{GSA} = 40000$ 做為本案例在後續分析和最佳化時使用的演算參數。

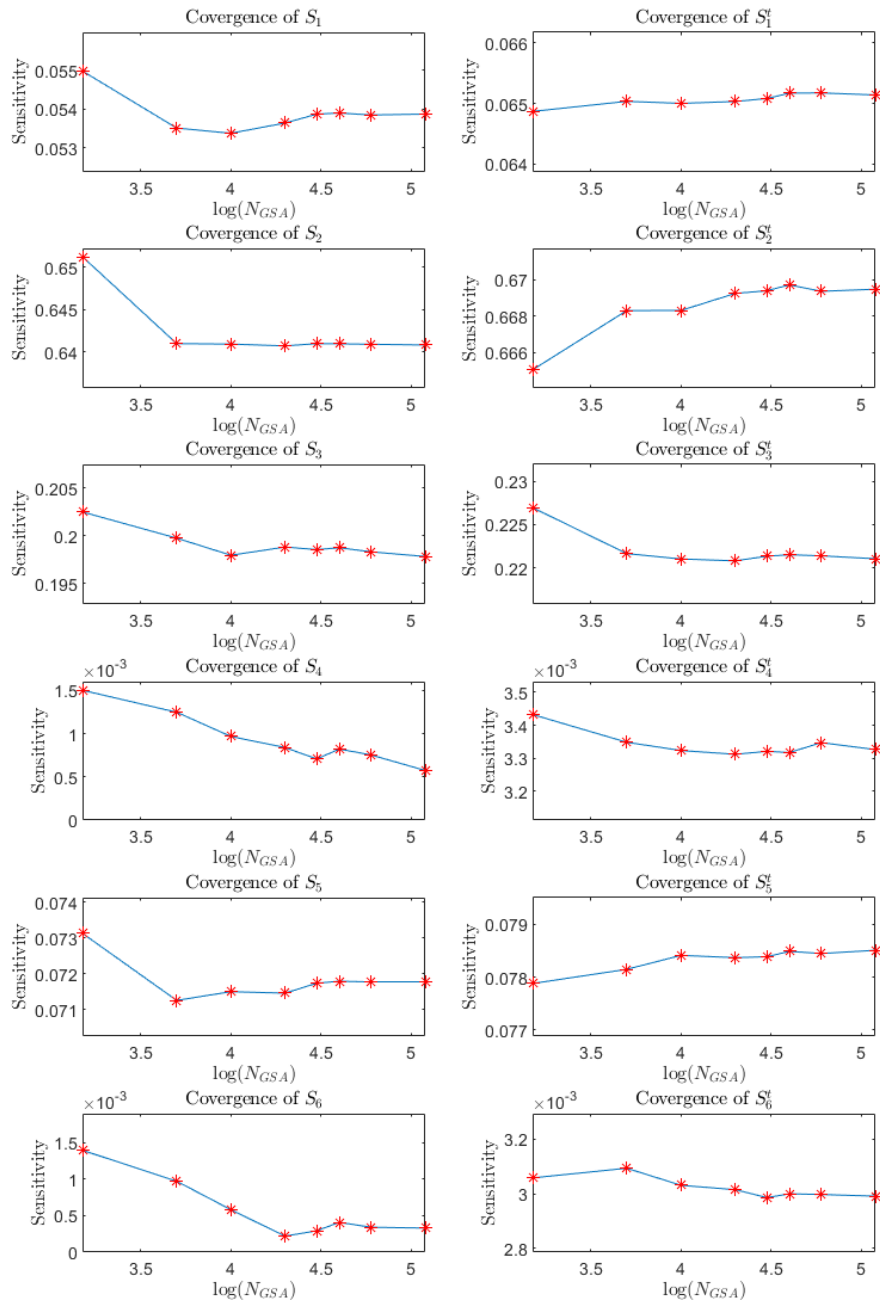
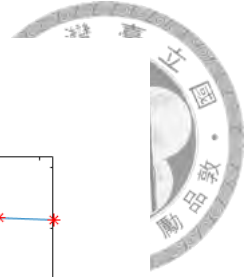
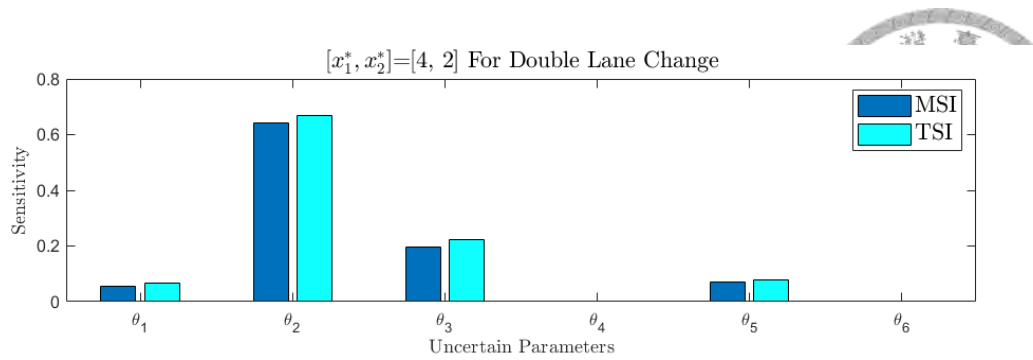
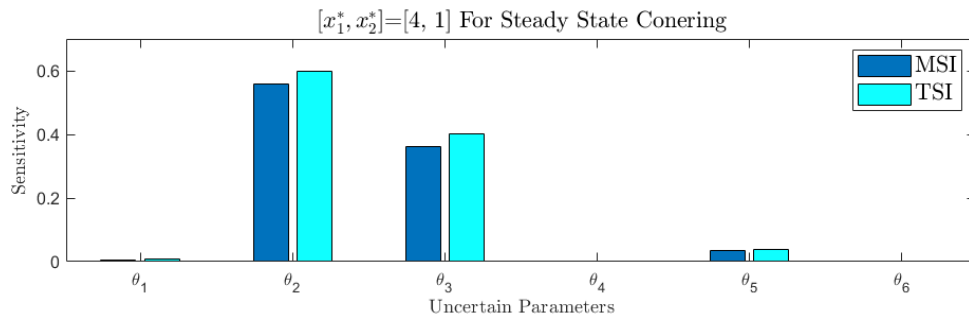


圖 6.21: 車道變換操作下取樣次數與全域敏感度指標關係

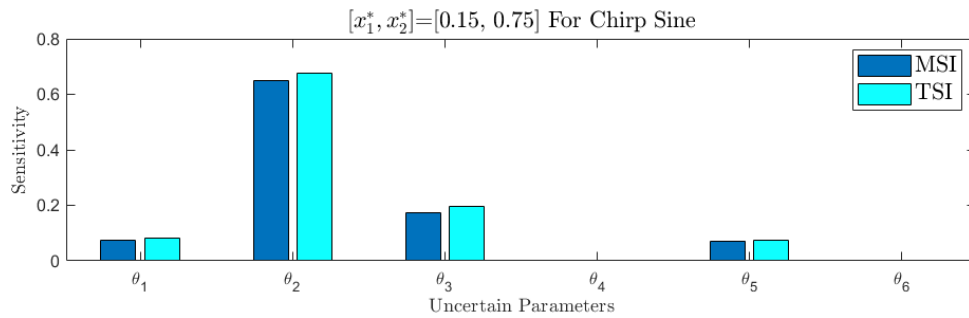
將 $N_{GSA} = 40000$ 代入表 6.4 中的四種操作下生成的 Kriging 模型並進行全域敏感度分析後，可得到主效應指標及總效應指標如圖所示：



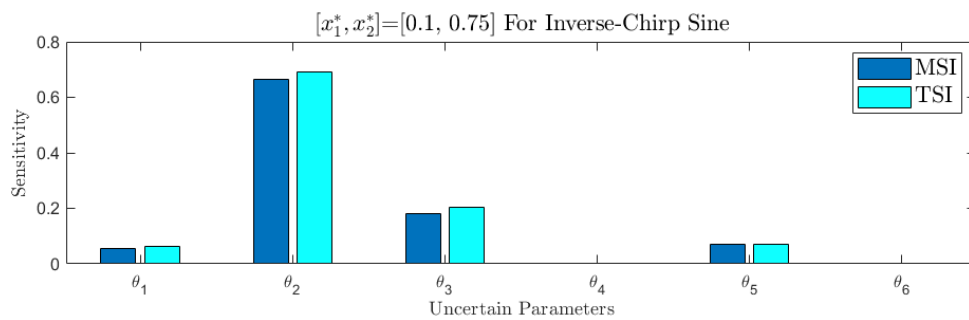
(a) 於車道變換操作下任意選擇操作參數之全域敏感度指標



(b) 於定轉角轉向操作下任意選擇操作參數之全域敏感度指標



(c) 於正啾頻操作下任意選擇操作參數之全域敏感度指標



(d) 於逆啾頻操作下任意選擇操作參數之全域敏感度指標

圖 6.22: 於不同操作下任意選擇操作參數之全域敏感度指標

6.6 最佳化操作參數

決定了各個操作方式下所需要的初始取樣次數及全域敏感度分析時所需要的樣本數後，可進行操作參數的最佳化。本節首先介紹最佳化方法的操作流程，並呈現於不同操



作方式下激發各個模型參數的最佳操作參數組合。

6.6.1 最佳化流程

在此案例中，由於取樣成本非常高，因此僅能以替代模型法來進行最佳化。以替代模型法進行最佳化時，首要完成的即是建立指標生成函數 $\hat{F}(\mathbf{x})$ ，如圖6.23所示，用以替代全域敏感度的計算過程，並且建立連續曲面。在此案例中，指標生成函數由多個 Kriging 模型所組成，例如，用於預測 θ_i 的主效應及總效應指標的指標生成函數可表示為 \hat{F}_{m_i} 及 \hat{F}_{t_i} 。指標生成函數同樣由操作參數 \mathbf{x} 的取樣擬合而來，以於6.2節中不同操作下操作參數的區間組成 \mathbf{x} 的二維設計空間，並以 5 種水準的全因子設計生成 25 個樣本點，並計算出六個不確定模型參數之主效應指標、總效應指標、及系統總變異數。再分別對這些指標進行 Kriging 模型之擬合，即可得到 \hat{F}_{m_i} 、 \hat{F}_{t_i} 、及 \hat{F}_{var} 。其中，考量到不同的輸出狀態之間變異數所代表的重要性不同，因此在此案例中以最能代表動態變異量的 Y 的總變異數代表系統的總變異數。

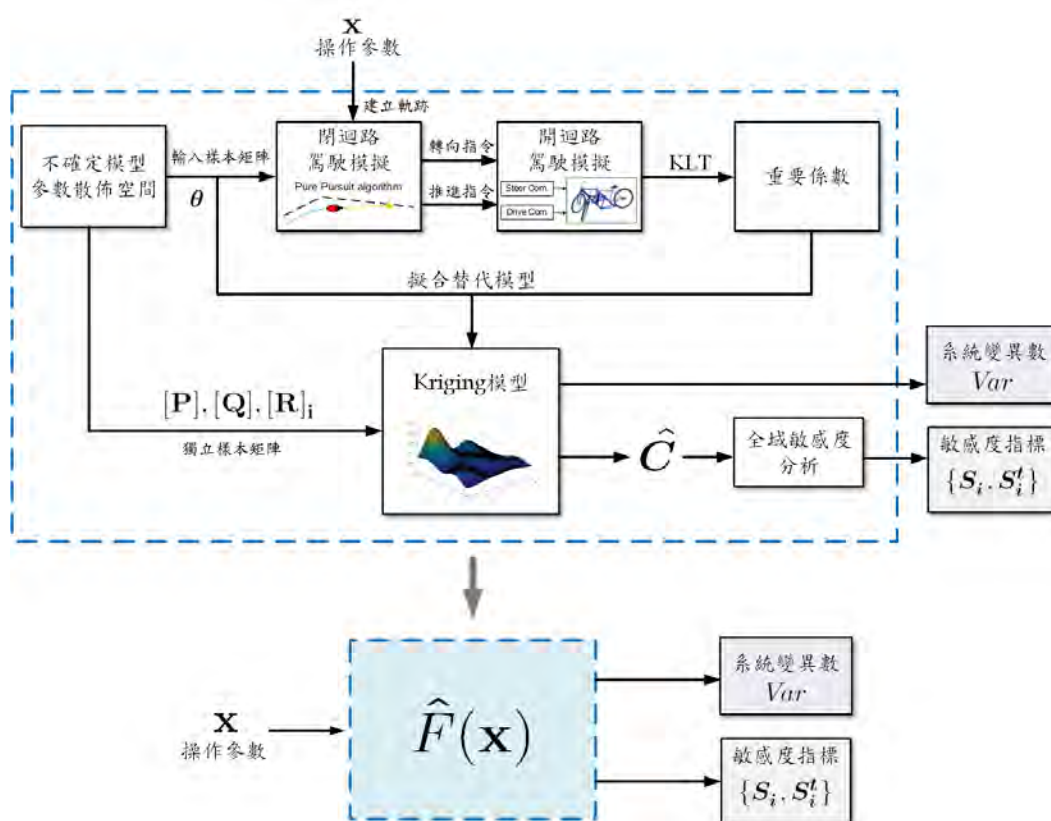


圖 6.23: 用於車輛工程案例之指標生成函數示意圖

完成指標生成函數的建立後，即可根據式3.50將目標函數改寫為：



$$H_p(\hat{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{S}}^t) = \frac{1}{\left(\hat{Var}^{\frac{1}{3}}\right)} \left(\frac{\hat{S}_1^t - \hat{S}_1}{\hat{S}_1} + \frac{S_2 + S_3}{\hat{S}_1} \right)$$

$$= \frac{1}{\left(\hat{F}_{var}(\mathbf{x})\right)^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{\hat{F}_{t_i}(\mathbf{x}) - \hat{F}_{m_i}(\mathbf{x})}{\hat{F}_{m_i}(\mathbf{x})} + \frac{\hat{F}_{m_1}(\mathbf{x}) + \cdots + \hat{F}_{m_k}(\mathbf{x}) - \hat{F}_{m_i}(\mathbf{x})}{\hat{F}_{m_i}(\mathbf{x})} \right), i = 1, \dots, k$$

(6.12)

考慮到此案例中的變異數變化幅度較大，爲了不使目標函數受變異數所影響的比例過大，因此將變異數開三次方根，縮小變異數對目標函數的作用。由此可將目標函數轉爲操作參數 \mathbf{x} 的函數。以操作參數爲設計變數，以設計用於激發 θ_1 爲例，所建立的最佳化一般式可表示如下：

$$\min H_p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\left(\hat{F}_{var}(\mathbf{x})\right)^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{\hat{F}_{t_1}(\mathbf{x}) - \hat{F}_{m_1}(\mathbf{x})}{\hat{F}_{m_1}(\mathbf{x})} + \frac{\hat{F}_{m_1}(\mathbf{x}) + \cdots + \hat{F}_{m_6}(\mathbf{x}) - \hat{F}_{m_1}(\mathbf{x})}{\hat{F}_{m_1}(\mathbf{x})} \right)$$

w.r.t \mathbf{x}

s.t. $\forall \{\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}\} \in \mathcal{F}$

(6.13)

以 DIRECT 演算法對 \mathbf{x} 進行演算，可得到用於激發不同模型參數之最佳操作參數。

6.6.2 於不同操作方式下之最佳化操作參數

透過上述流程，於四種不同的操作方式下，用於激發 θ_1 至 θ_6 的最佳操作參數整理於表6.8。由最佳化結果所對應到各個參數的全域敏感度指標列則表示於圖6.24至圖6.27。

表 6.8: 不同操作下激發特定不確定模型參數之最佳操作參數

操作方式	(x_1, x_2)			
	車道變換 (d_1, d_2)	定轉角轉向 (軌跡半徑, 速度)	正啾頻 $(\omega, \text{振幅})$	逆啾頻 $(\omega, \text{振幅})$
激發目標				
θ_1	(0.40669, 6.5813)	(2.8194, 2.0000)	(0.2434, 0.9905)	(0.2000, 0.7327)
θ_2	(5.8253, 1.1578)	(2.0011, 0.9078)	(0.0500, 0.5666)	(0.2000, 0.8762)
θ_3	(7.52e-6, 2.8891)	(2.8775, 1.2097)	(0.0500, 0.5339)	(0.0400, 0.5350)
θ_4	(2.25e-5, 2.9651)	(2.3086, 2.0000)	(0.2284, 0.9999)	(0.1169, 1.0000)
θ_5	(4.7821, 7.9999)	(2.7722, 0.8346)	(0.2499, 0.8230)	(0.2000, 0.7257)
θ_6	(0.8015, 6.5759)	(2.8692, 2.0000)	(0.2499, 0.9021)	(0.1169, 1.0000)

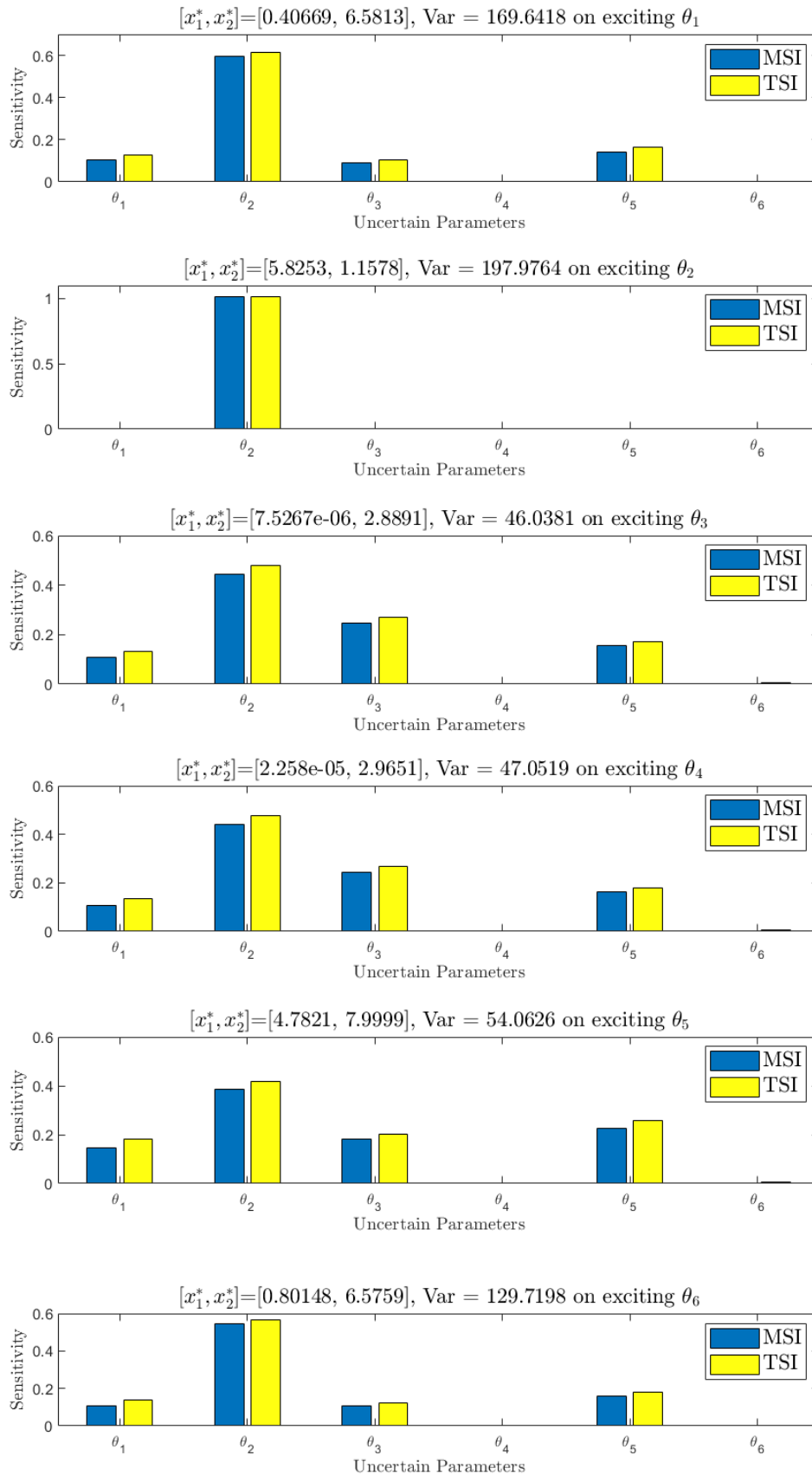


圖 6.24: 於車道變換操作下激發各個不確定參數之全域敏感度指標

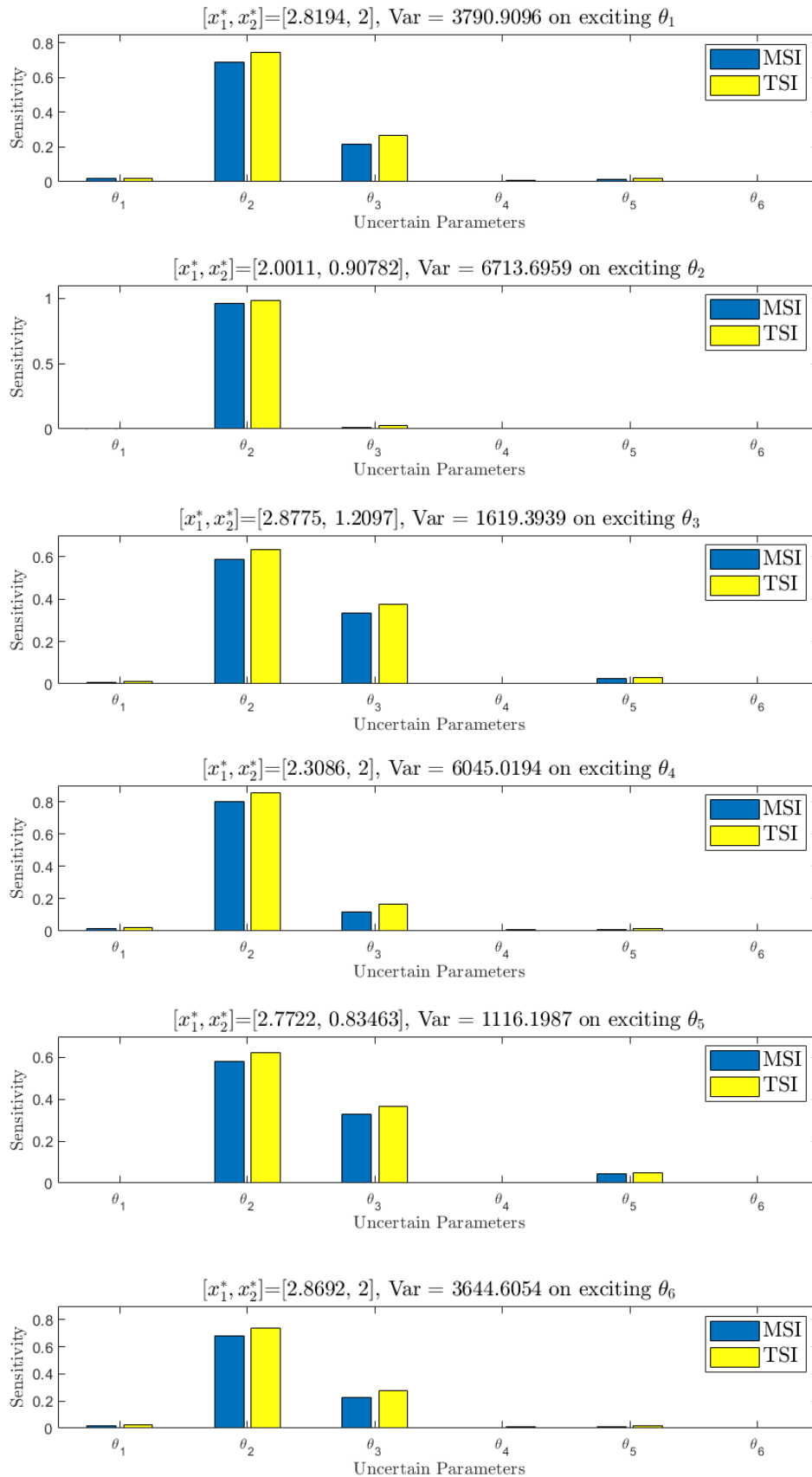


圖 6.25: 於定轉角轉向操作下激發各個不確定參數之全域敏感度指標

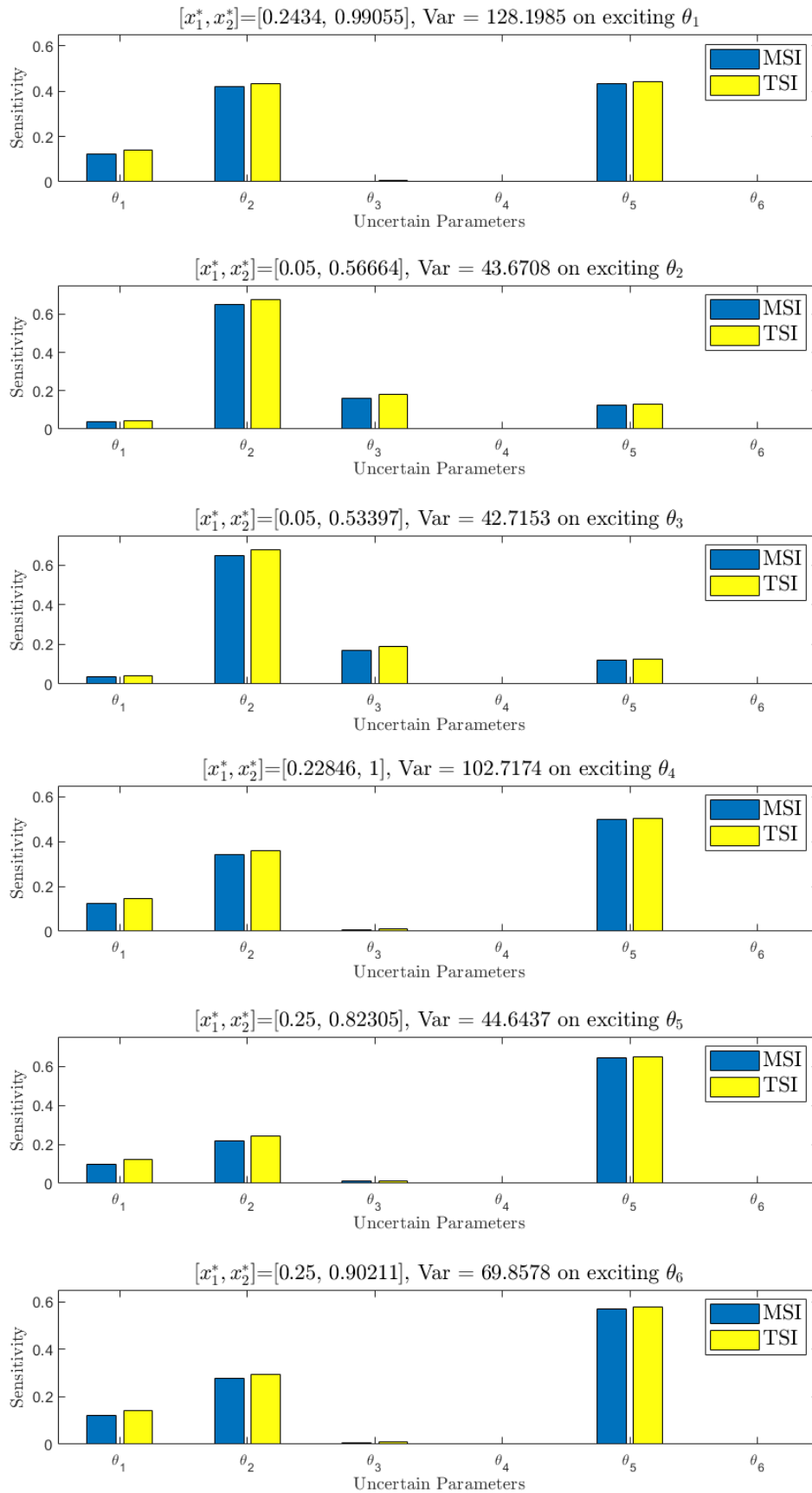


圖 6.26: 於正啣頻操作下激發各個不確定參數之全域敏感度指標

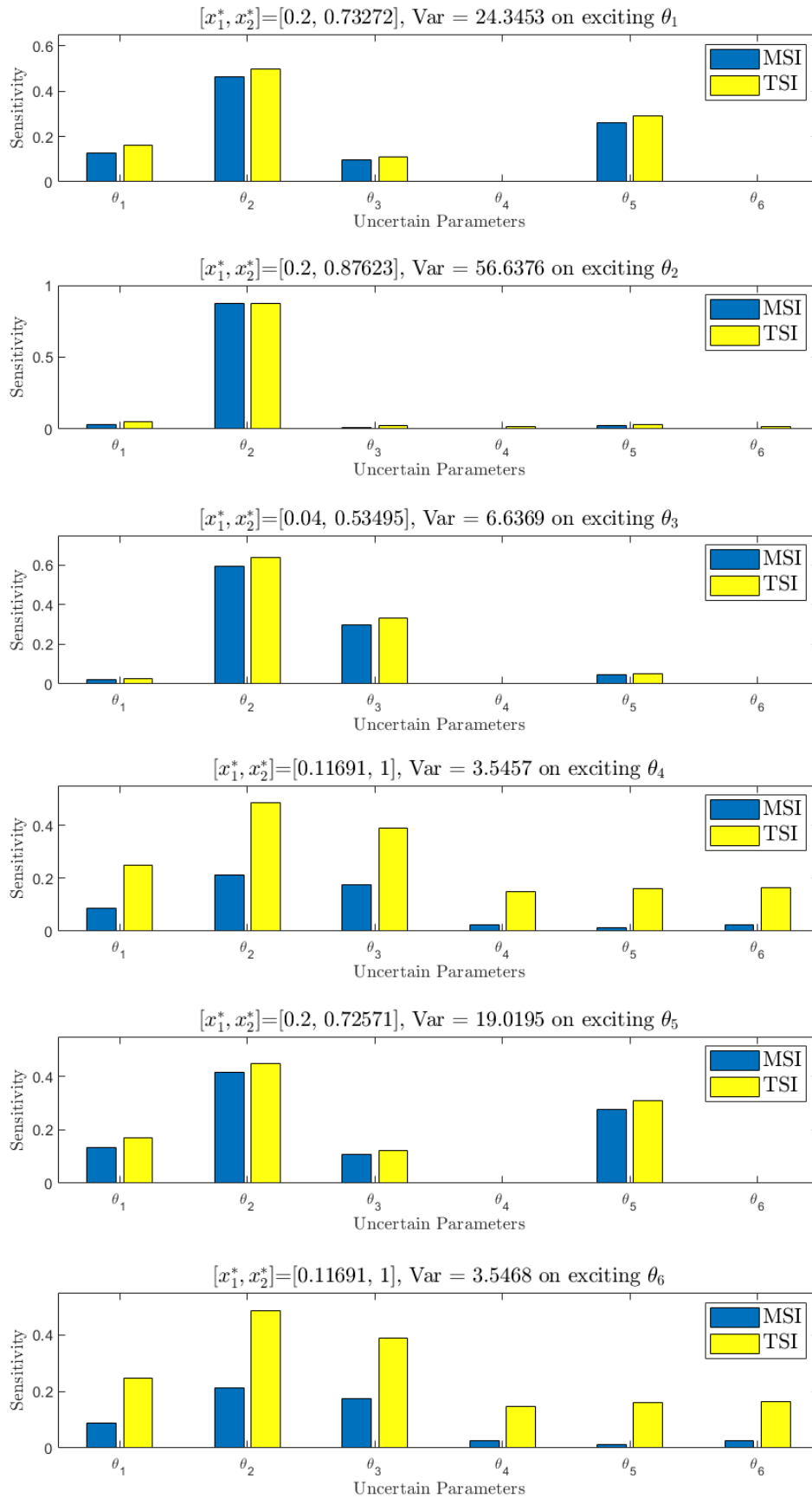


圖 6.27: 於逆啾頻操作下激發各個不確定參數之全域敏感度指標

在車道變換的操作中，圖6.24中可看見 θ_2 在此操作中所貢獻的變異量非常的顯著，在激發 θ_2 時，甚至幾乎貢獻了所有的變異量。在激發 θ_3 、 θ_5 的操作參數中，可以看見兩者的主效應指標明顯的較其他組實驗的數值較大，但同時也發現這兩組實驗的總變異量僅是變異量最大的操作(激發 θ_2) 的 0.25 倍。因此在該操作下雖然能有效的凸顯參數的主效應和總效應，但能否在變異數較小的條件下，在真實實驗加入量測雜訊後，參數偏差所造成的差異仍然能被有效的識別並對系統進行參數的調整仍然需要由後續流程確認。

在定轉角轉向中的操作中，圖6.25中顯示 θ_2 及 θ_3 所代表的側偏剛性和外傾剛性在此操作下，在任意一組最佳操作參數下主效應指標及總效應指標都相較於其他參數更顯著，而其他參數只有在總變異量下降的特定操作下，能貢獻較高比例的變異量。由於定轉角轉向屬於穩態操作，因此在與側向加速度較有相關的參數 θ_1 影響較不顯著，但可有效激發輪胎上的側偏剛性和外傾剛性。

在正啾頻的操作中，圖6.26可見 θ_2 的效應相較於前兩者降低許多，且 θ_1 、 θ_3 、和 θ_5 在經由激發後，在主效應指標上很明顯被凸顯，且總變異數並沒有同時下降。 θ_4 和 θ_6 在此操作下依然無法有效的被激發。值得注意的是，在激發 θ_4 與 θ_5 的實驗中， θ_5 的主效應與總效應指標在兩組最佳操作中差距非常小，但總變異量卻有顯著的差異，因此以兩組最佳操作進行參數校準時，可從校準結果來探討總變異量與校準的關係和影響。

在逆啾頻的操作中，圖6.27中顯示在用於激發不同的不確定模型參數時，對應到的目標激發參數之效應都能被顯著的激發，特別是 θ_4 與 θ_6 在主效應上較容易被觀察。然而，在激發 θ_4 與 θ_6 的實驗中，系統的總變異量遠少於用於激發 θ_2 的最佳操作，因此 θ_4 與 θ_6 的校準是否會受總變異量所影響，在此特性中也能被觀察。

綜合以上，透過建立指標生成函數及最佳化，呈現了以操控參數為設計變數進行激發不同不確定模型參數的模擬成果，同時也證實了儘管在同一種操作方法下，操作參數的不同對於各項參數的全域敏感度和變異程度也能造成非常大的差異。也因此，本研究也證實了所提出之方法對車輛系統之動態驗證的重要性及可行性，提供操作者一種能有效的進行實驗比對、誤差歸因、及設計動態驗證項目的程序。

6.7 模型參數校準

透過最佳化方法求出不同操作下，用於激發各個不確定模型參數的最佳操作參數後，本節將使用卡爾曼濾波器對不確定參數進行校準。然而，於數學模型操作卡爾曼濾波器時發現變異數的大小相對於模型參數的主效應指標，對於參數校準的影響似乎更大。本節首先將針對總變異數與目標參數的主效應指標對卡爾曼濾波器校準參數的影響，歸納出結果後，再提出一套整合各種操作的軌跡設計方法，並對該軌跡進行模擬與驗證。本節所包含的項目如下：

- 模擬實驗的架設及量測誤差的模擬
- 應用基於混沌多項式展開之卡爾曼濾波器校準車輛動力學模型中的不確定模型參數之操作流程



- 於不同的最佳操作參數下，以卡爾曼濾波器在模擬實驗中進行參數校準，並根據參數的校準狀況討論總變異數與目標參數主效應指標的取捨
- 根據上述結論，整合多種操作為單一軌跡，並重新進行參數校準

6.7.1 實驗架構

在此案例中，對於真實系統的實驗架構如下圖6.28所示。在實驗環境設計中，將同時觀察五個輸出狀態，分別是透過 IMU 直接量測車輛質心於車體座標的加速度 a_x 、 a_y 、及偏移角速率 $\dot{\psi}$ ，和透過空拍機錄製車輛行駛的 X 與 Y 座標位置，以動態影像分析軟體 Tracker 對的質心在全域作標下的位置。將五種狀態以時間序列記錄，並輸入至卡爾曼濾波器中做為真實系統的量測資訊。

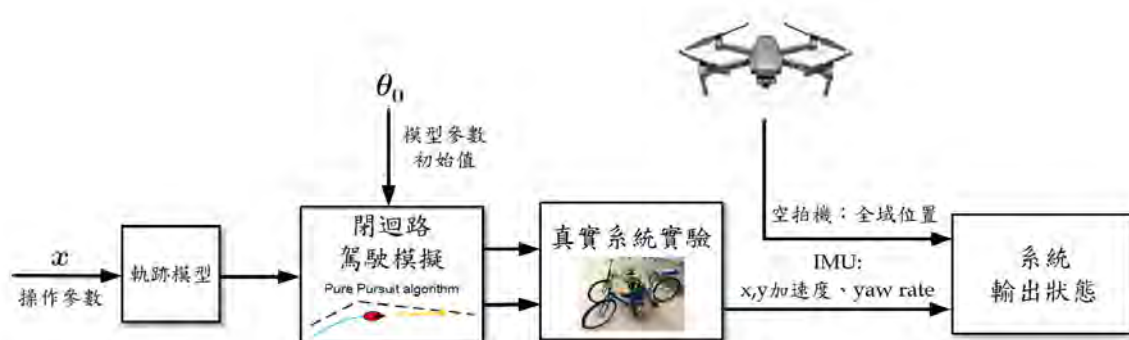


圖 6.28: 真實系統操作實驗環境設置示意圖

然而，本研究基於假設真實系統與模擬模型的唯一不同為參數的不一致，為了更聚焦於此假設，需要先忽略模型建構上未完整表達的物理模型，因此選擇以 Simulink 模型先進行模擬實驗，用以做為卡爾曼濾波器中的真實系統實驗。

以 Simulink 模型進行模擬實驗的關鍵主要有二：

- 設定模型參數：設定模擬實驗的模型參數為已知，可在參數校準流程進行後做為比對依據。模擬模型的真實模型由各個不確定模型參數的設計空間中以亂數表產生，所設定的參數如下：

表 6.9: 模擬實驗中真實系統之不確定參數數值

θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
I_z	C_α	C_β	SAP	μ_{r_0}	μ_{r_1}
48.8834	1413.4876	56.618	0.0029	0.007	5.23E-04

- 於模擬實驗中加入量測雜訊：考量到對於真實系統進行輸出狀態量測時感測器皆存在量測誤差，因此也在模擬實驗中加入量測誤差模型，讓模擬實驗能更接近真實實驗，同時也讓卡爾曼濾波器能夠在具有量測雜訊的情境下進行參數的校準。誤差變異數的設定方式可參考 [18, 104]。根據感測器的規格表以及對動態影像識別的誤差假設，將 Simulink 中的量測誤差設定為平均為 0 之白噪音，其誤差範圍如下：

表 6.10: 感測器誤差列表

量測目標	誤差項目	誤差範圍	分佈類型
a_x	IMU 加速度量測誤差	$\pm 3\%$	$N(0, (0.03a_x)^2)$
a_y	IMU 加速度量測誤差	$\pm 3\%$	$N(0, (0.03a_y)^2)$
$\dot{\psi}$	IMU 角速度量測誤差	$\pm 0.08726 \text{ rad/s}$	$N(0, 0.04363^2)$
X	空拍影像分析誤差	$\pm 0.05 \text{ m}$	$N(0, 0.025^2)$
Y	空拍影像分析誤差	$\pm 0.05 \text{ m}$	$N(0, 0.025^2)$

模擬實驗中的 Simulink 模型增加量測雜訊於操控模型 (圖A.40) 中。加入雜訊模型的 Simulink 架構如下：

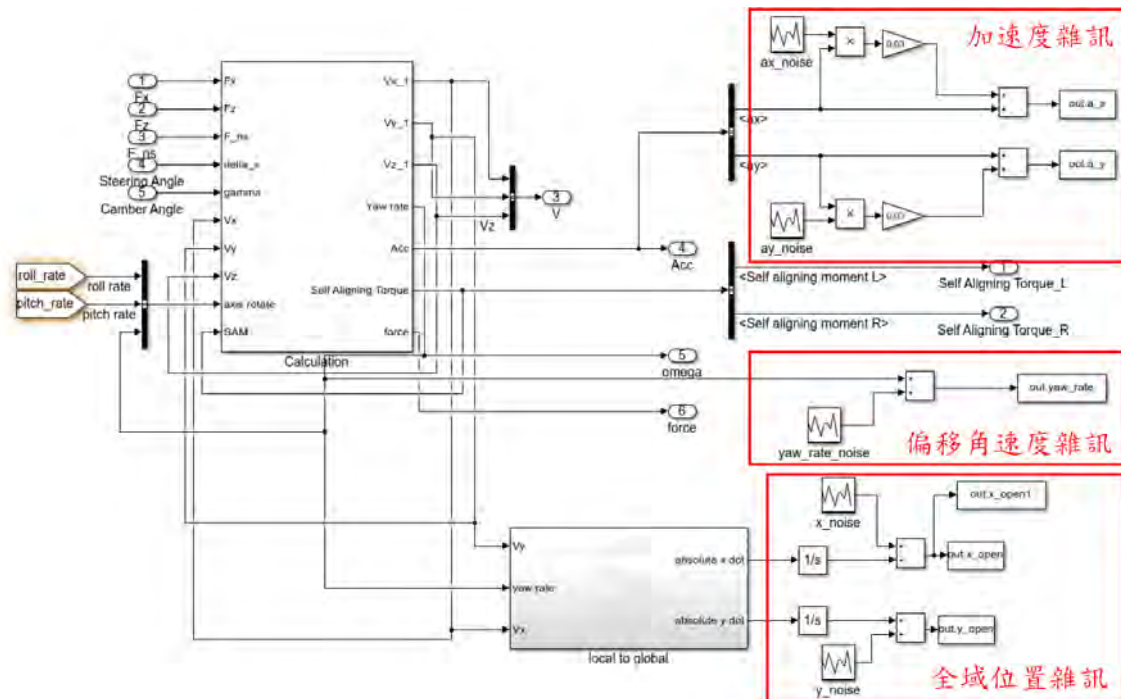


圖 6.29: Simulink 模型加入雜訊模型架構



6.7.2 參數校準流程

本小節將說明在此案例中，使用基於混沌多項式之卡爾曼濾波器於參數校準的流程，將卡爾曼濾波器所呈現的參數估測分佈之平均值做為參數校準的結果。以下流程以假設初始時間 $t = t_k$ 進行說明，設定初始時間為 $k = 1$ ，此方法操作流程如下：

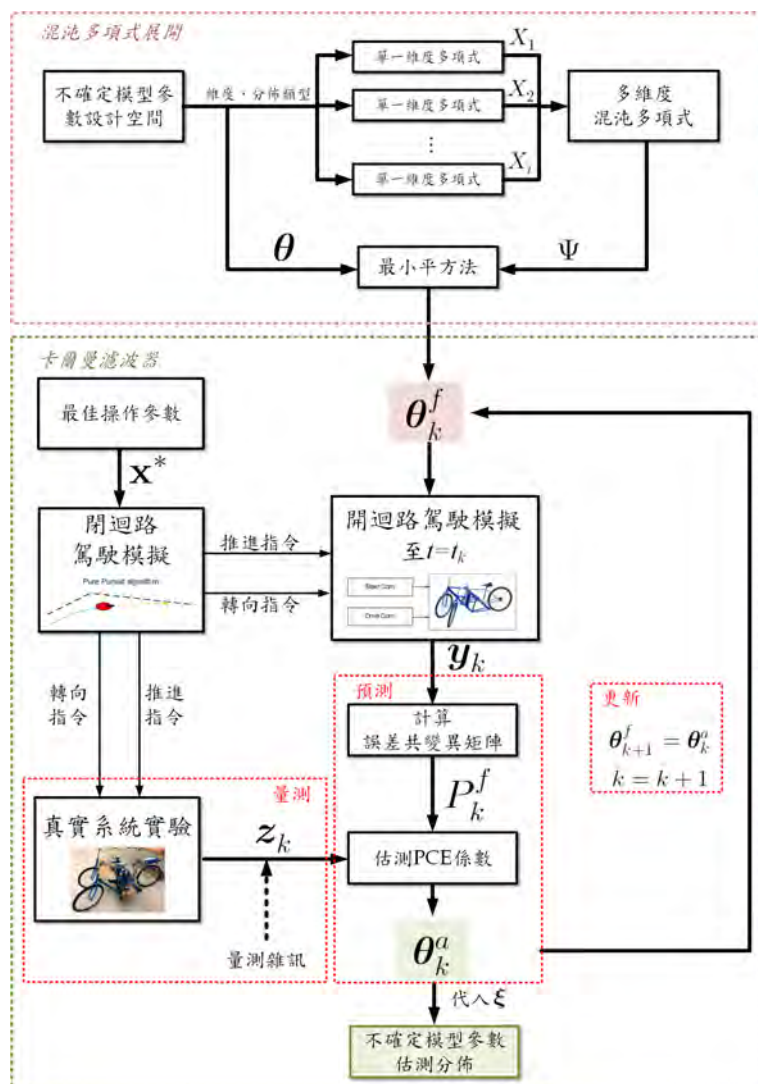


圖 6.30: 於車輛工程案例應用基於混沌多項式之卡爾曼濾波器於參數校準之流程

1. 建立單一維度混沌多項式

針對每個不確定模型參數先建立單一維度的混沌多項式模型。考量到不確定模型參數在尚未被校準前，不確定模型參數於設定的參數可能分佈區間內的出現機率皆相同，因此將每一組不確定模型參數的機率分佈設定為均勻分佈，即可採用表3.2建立6組單一維度的混沌多項式。

2. 建立多維度混沌多項式

將六組一維混沌多項式相乘，得到多維度混沌多項式。考量到混沌多項式的項數



會影響到混沌多項式在隨機程序中的預測準確性，且項數的多寡會直接影響到取樣次數和模擬成本，綜合考量下設定截斷係數 $p = 5$ ，建立具有 6 個維度、共有 462 項的多維度混沌多項式。

3. 計算混沌多項式係數初始值

自不確定模型參數的設計空間中以低差異取樣選取 N 個取樣點，其中 N 為混沌多項式項數的三倍。在建立低差異取樣時，將所建立的 Sobol 序列由 $[0, 1]$ 平移至 $[-1, 1]$ ，做為隨機變數 ξ ，再平移至各個維度的設計空間中，做為不確定模型參數的取樣 θ 。設每一個維度中的參數取樣，都是由隨機變數以混沌多項式做為函數而產生，因此將隨機變數 ξ 帶入混沌多項式中，以最小平方法求出所有混沌多項式的係數。以 θ_1 為例，所對應到的混沌多項式係數初始值，可得到：

$$\begin{bmatrix} \theta_{1,1} \\ \theta_{1,2} \\ \vdots \\ \theta_{1,1386} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1(\xi(1)) & \psi_2(\xi(1)) & \cdots & \psi_{462}(\xi(1)) \\ \psi_1(\xi(2)) & \psi_2(\xi(2)) & \cdots & \psi_{462}(\xi(2)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(\xi(1386)) & \psi_2(\xi(1386)) & \cdots & \psi_{462}(\xi(1386)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\theta_{1,k}^f)^1 \\ (\theta_{1,k}^f)^2 \\ (\theta_{1,k}^f)^3 \\ \vdots \\ (\theta_{1,k}^f)^{462} \end{bmatrix}$$

由最小平方法即可解出初始係數 $[(\theta_{1,k}^f)^1, (\theta_{1,k}^f)^2, \dots, (\theta_{1,k}^f)^{462}]$ 。係數以 $(\theta_{i,k}^f)^j$ 表示，其中 j 表示混沌多項式中第 j 個係數， i 為第 i 項不確定模型參數 θ_j ，而 k 為卡爾曼濾波器於第 k 次迭代，於初始係數中 $k = 1$ ， f 表示該係數為卡爾曼濾波器進行濾波前的係數預測值。

4. 卡爾曼濾波器設定

完成模擬實驗中的量測誤差設定後，可設定卡爾曼濾波器中的狀態量測矩陣 \mathbf{z}_k 、觀測矩陣 \mathbf{H} 及雜訊共變異矩陣 \mathbf{R}_k 。在此案例中，所觀測的狀態直接透過系統輸出直接取得，不需經過線性或非線性的疊加。系統的狀態量測矩陣 \mathbf{z}_k 可表示為：

$$\mathbf{z}_k = [z_{a_x}(t_k), z_{a_y}(t_k), z_{\dot{\psi}}(t_k), z_X(t_k), z_Y(t_k)]^T$$

對應的觀測矩陣 \mathbf{H} 可表示為：

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

而對應的雜訊共變異矩陣 \mathbf{R}_k 可表示為：



$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} R_{a_x,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{a_y,k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{\psi,k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{X,k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{Y,k} \end{bmatrix}$$

其中，

$$R_{a_x,k} = \max \{10^{-12}, (0.03z_{a_x}(t_k))^2\}$$

$$R_{a_y,k} = \max \{10^{-12}, (0.03z_{a_y}(t_k))^2\}$$

$$R_{\psi,k} = \max \{10^{-12}, 0.04363^2\}$$

$$R_{X,k} = \max \{10^{-12}, 0.025^2\}$$

$$R_{Y,k} = \max \{10^{-12}, 0.025^2\}$$

同時，考量模擬成本及混沌多項式所產的累積誤差，設定卡爾曼濾波器的迭代次數 $k = 8$ ，而 t_k 則由不同操作方式的模擬時間所決定。

5. 建立誤差共變異矩陣

將欲輸入至卡爾曼濾波器中的不確定模型參數取樣代入模擬模型中，並擷取模型於第 k 個時間點 t_k 的輸出狀態，分別以單一輸出矩陣記錄資料：

$$\mathbf{y}_{a_x,k} = [y_{a_x,1}(t_k), y_{a_x,2}(t_k), \dots, y_{a_x,1386}(t_k)]$$

$$\mathbf{y}_{a_y,k} = [y_{a_y,1}(t_k), y_{a_y,2}(t_k), \dots, y_{a_y,1386}(t_k)]$$

$$\mathbf{y}_{\psi,k} = [y_{\psi,1}(t_k), y_{\psi,2}(t_k), \dots, y_{\psi,1386}(t_k)]$$

$$\mathbf{y}_{X,k} = [y_{X,1}(t_k), y_{X,2}(t_k), \dots, y_{X,1386}(t_k)]$$

$$\mathbf{y}_{Y,k} = [y_{Y,1}(t_k), y_{Y,2}(t_k), \dots, y_{Y,1386}(t_k)]$$

建立 θ_1 至 θ_6 與輸出狀態的誤差共變異矩陣，此處的 θ_i 為向量形式 $\theta_i = [\theta_{i,1}, \theta_{i,2}, \dots, \theta_{i,1386}]$ ，在此將標準的誤差共變異矩陣簡化為兩個卡爾曼濾波器所需用的矩陣，分別是單一不確定模型參數與輸出狀態的 $(\mathbf{P}_{y,\theta})_k^f$ 以及輸出狀態的共變異矩陣 $(\mathbf{P}_{y,y})_k^f$ ，表示如下，其中 $P_{a,b}$ 表示 a, b 之共變異數：

$$(\mathbf{P}_{y,\theta})_k^f = \begin{bmatrix} (P_{a_x,\theta_1})_k^f & (P_{a_y,\theta_1})_k^f & (P_{\psi,\theta_1})_k^f & (P_{X,\theta_1})_k^f & (P_{Y,\theta_1})_k^f \\ (P_{a_x,\theta_2})_k^f & (P_{a_y,\theta_2})_k^f & (P_{\psi,\theta_2})_k^f & (P_{X,\theta_2})_k^f & (P_{Y,\theta_2})_k^f \\ (P_{a_x,\theta_3})_k^f & (P_{a_y,\theta_3})_k^f & (P_{\psi,\theta_3})_k^f & (P_{X,\theta_3})_k^f & (P_{Y,\theta_3})_k^f \\ (P_{a_x,\theta_4})_k^f & (P_{a_y,\theta_4})_k^f & (P_{\psi,\theta_4})_k^f & (P_{X,\theta_4})_k^f & (P_{Y,\theta_4})_k^f \\ (P_{a_x,\theta_5})_k^f & (P_{a_y,\theta_5})_k^f & (P_{\psi,\theta_5})_k^f & (P_{X,\theta_5})_k^f & (P_{Y,\theta_5})_k^f \\ (P_{a_x,\theta_6})_k^f & (P_{a_y,\theta_6})_k^f & (P_{\psi,\theta_6})_k^f & (P_{X,\theta_6})_k^f & (P_{Y,\theta_6})_k^f \end{bmatrix}_{6 \times 5}$$



$$(\mathbf{P}_{y,y})_k^f = \begin{bmatrix} (P_{a_x,a_x})_k^f & (P_{a_x,a_y})_k^f & (P_{a_x,\psi})_k^f & (P_{a_x,X})_k^f & (P_{a_x,Y})_k^f \\ (P_{a_y,a_x})_k^f & (P_{a_y,a_y})_k^f & (P_{a_y,\psi})_k^f & (P_{a_y,X})_k^f & (P_{a_y,Y})_k^f \\ (P_{\psi,a_x})_k^f & (P_{\psi,a_y})_k^f & (P_{\psi,\psi})_k^f & (P_{\psi,X})_k^f & (P_{\psi,Y})_k^f \\ (P_{X,a_x})_k^f & (P_{X,a_y})_k^f & (P_{X,\psi})_k^f & (P_{X,X})_k^f & (P_{X,Y})_k^f \\ (P_{Y,a_x})_k^f & (P_{Y,a_y})_k^f & (P_{Y,\psi})_k^f & (P_{Y,X})_k^f & (P_{Y,Y})_k^f \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

6. 輸出狀態混沌多項式展開

將輸出狀態以相同的多維度混沌多項式展開，以最小平方法計算在該時間點的輸出狀態所對應到的混沌多項式係數。以矩陣將多項式展開，以 $\mathbf{y}_{a_x,k}$ 為例，以混沌多項式展開的矩陣形式可表示為：

$$\begin{bmatrix} y_{a_x,1}(t_k) \\ y_{a_x,2}(t_k) \\ \vdots \\ y_{a_x,1386}(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1(\boldsymbol{\xi}(1)) & \psi_2(\boldsymbol{\xi}(1)) & \cdots & \psi_{462}(\boldsymbol{\xi}(1)) \\ \psi_1(\boldsymbol{\xi}(2)) & \psi_2(\boldsymbol{\xi}(2)) & \cdots & \psi_{462}(\boldsymbol{\xi}(2)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(\boldsymbol{\xi}(1386)) & \psi_2(\boldsymbol{\xi}(1386)) & \cdots & \psi_{462}(\boldsymbol{\xi}(1386)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (y_{a_x,k}^f)^1 \\ (y_{a_x,k}^f)^2 \\ (y_{a_x,k}^f)^3 \\ \vdots \\ (y_{a_x,k}^f)^{462} \end{bmatrix}$$

同樣的，係數以 $(y_{i,k}^f)^j$ 表示，其中 j 表示混沌多項式中第 j 個係數， i 表示不同輸出狀態，而 k 為卡爾曼濾波器於第 k 次迭代，於初始係數中 $k = 1$ ， f 表示該係數為卡爾曼濾波器進行濾波前的係數值。

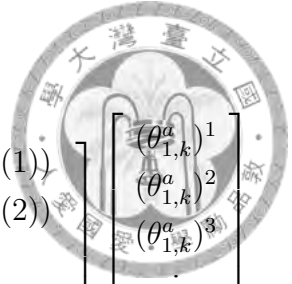
7. 預測係數

將所得到的各項矩陣代入卡爾曼濾波器中，更新不確定模型參數之混沌多項式的各項係數 $(\theta_{i,k})$ ， $j = 1, \dots, 462$ 。更新流程如下：

$$\begin{bmatrix} (\theta_{1,k}^a)^j \\ (\theta_{2,k}^a)^j \\ (\theta_{3,k}^a)^j \\ (\theta_{4,k}^a)^j \\ (\theta_{5,k}^a)^j \\ (\theta_{6,k}^a)^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\theta_{1,k}^f)^j \\ (\theta_{2,k}^f)^j \\ (\theta_{3,k}^f)^j \\ (\theta_{4,k}^f)^j \\ (\theta_{5,k}^f)^j \\ (\theta_{6,k}^f)^j \end{bmatrix} + (\mathbf{P}_{y,\theta})_k^f \mathbf{H}^T \left(\mathbf{R}_k + \mathbf{H}(\mathbf{P}_{y,y})_k^f \mathbf{H}^T \right)^{-1} \left(\mathbf{z}_k \delta_{1,j} - \mathbf{H} \begin{bmatrix} (y_{a_x,k}^f)^j \\ (y_{a_y,k}^f)^j \\ (y_{\psi,k}^f)^j \\ (y_{X,k}^f)^j \\ (y_{Y,k}^f)^j \end{bmatrix} \right)$$

8. 還原不確定模型參數分佈

完成估測不確定模型參數之混沌多項式的各項係數後，不確定模型參數的機率分佈方程式就可以對應的混沌多項式所組成，因此將 $\boldsymbol{\xi}$ 代入係數經更新的混沌多項式中，即可得到於 t_k 時的參數估測值。以估測 $\boldsymbol{\theta}_1$ 的參數為例，可以下列方式還原：



$$\hat{\theta}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{1,1} \\ \hat{\theta}_{1,2} \\ \vdots \\ \hat{\theta}_{1,1386} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1(\xi(1)) & \psi_2(\xi(1)) & \cdots & \psi_{462}(\xi(1)) \\ \psi_1(\xi(2)) & \psi_2(\xi(2)) & \cdots & \psi_{462}(\xi(2)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(\xi(1386)) & \psi_2(\xi(1386)) & \cdots & \psi_{462}(\xi(1386)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\theta_{1,k}^a)^1 \\ (\theta_{1,k}^a)^2 \\ (\theta_{1,k}^a)^3 \\ \vdots \\ (\theta_{1,k}^a)^{462} \end{bmatrix}$$

9. 更新模型參數

將估測的參數數值做為下一個時間點 t_{k+1} 的系統模擬之輸入，重複步驟 5 至 8，隨著系統的運動和時變不斷更新對模型參數的估測。將最後所得到的估測參數數值輸出，即可得到卡爾曼濾波器對不確定參數的最終估測。

6.7.3 於不同操作參數下之操數校準結果

為了有效率討論總變異數與主效應指標對卡爾曼濾波器校準參數的關係，本節選取了來自四個不同操作參數共 12 組操作參數，分別以卡爾曼濾波器進行參數校準。選取的實驗組別列於下表：

表 6.11: 選擇以卡爾曼濾波器進行參數校準之實驗組別列表

組別	操作方式	操作參數	激發目標	可觀察目標	備註
1	車道變換	(5.8253, 1.1578)	θ_2	θ_2	變異數最大
2	車道變換	(7.52e-6, 2.8891)	θ_3	$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_5$	變異數最小
3	車道變換	(4.7821, 7.7999)	θ_5	$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_5$	變異數較小
4	定轉角轉向	(2.0011, 0.9078)	θ_2	θ_2	變異數最大
5	定轉角轉向	(2.8775, 1.2097)	θ_3	$\theta_2, \theta_3, \theta_5$	變異數較小
6	定轉角轉向	(2.3086, 2)	θ_4	$\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$	變異數最大
7	正啾頻	(0.2434, 0.9905)	θ_1	$\theta_1, \theta_2, \theta_5$	變異數最大
8	正啾頻	(0.2284, 1)	θ_4	$\theta_1, \theta_2, \theta_4, \theta_5$	變異數較大
9	正啾頻	(0.2500, 0.8230)	θ_5	$\theta_1, \theta_2, \theta_5$	與 8 做比較
10	逆啾頻	(0.2, 0.73272)	θ_1	$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_5$	變異數較大
11	逆啾頻	(0.1169, 1)	θ_4	All	變異數最小
12	逆啾頻	(0.1169, 1)	θ_6	All	與 11 相同

比較各組實驗中不確定模型參數的取樣分佈與估測結果分佈，如下圖所示：

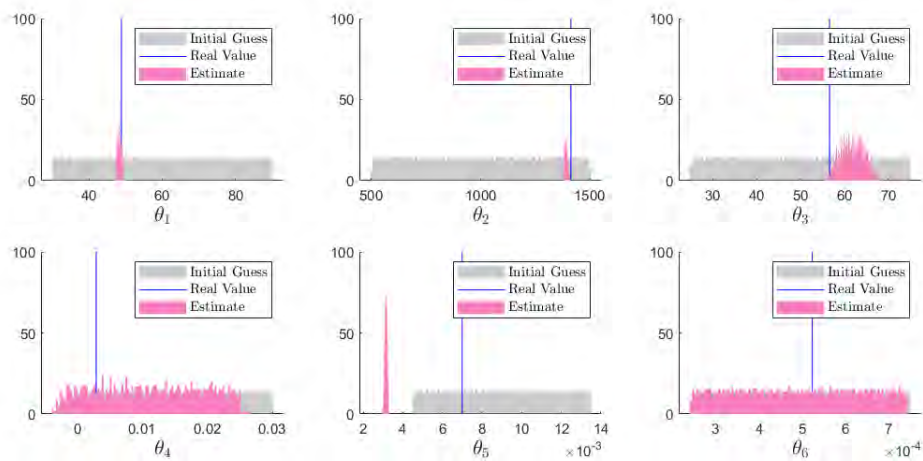


圖 6.31: 第 1 組實驗：於車道變換下激發 θ_2 之參數估測結果

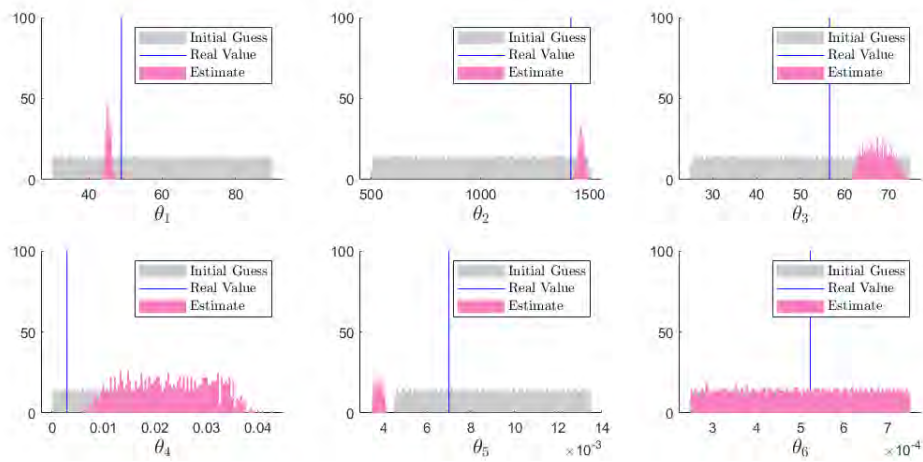


圖 6.32: 第 2 組實驗：於車道變換下激發 θ_3 之參數估測結果

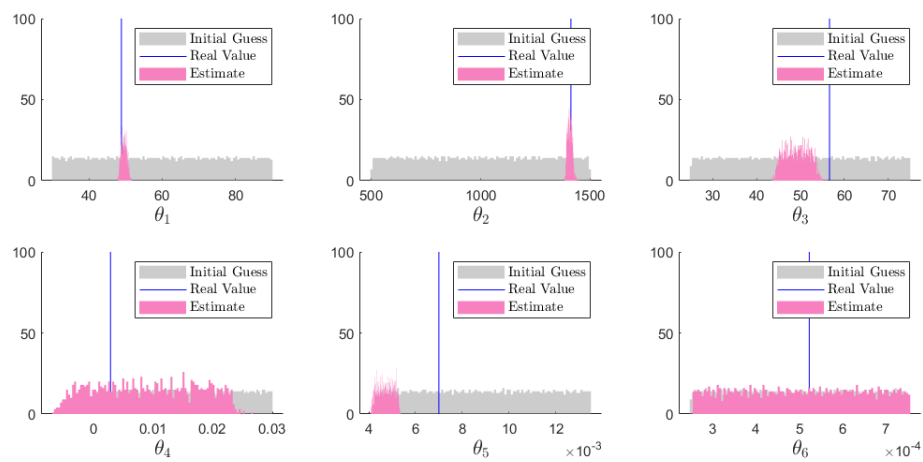


圖 6.33: 第 3 組實驗：於車道變換下激發 θ_5 之參數估測結果

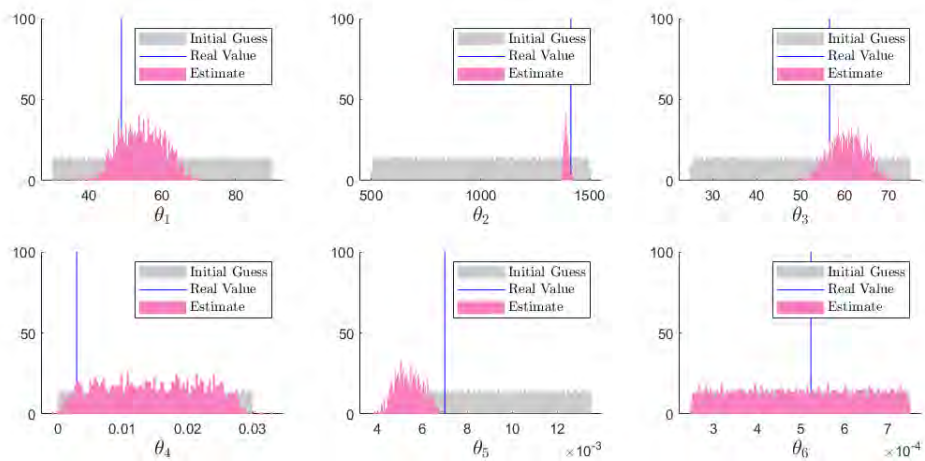


圖 6.34: 第 4 組實驗：於定轉角轉向下激發 θ_2 之參數估測結果

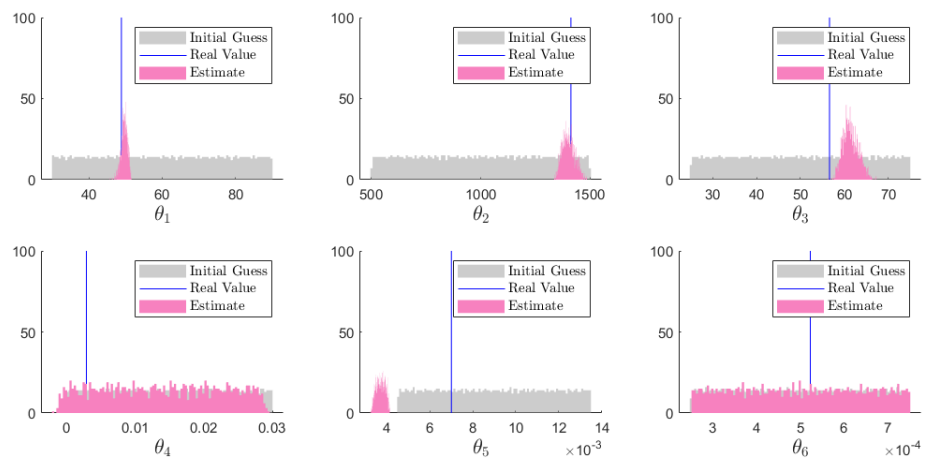


圖 6.35: 第 5 組實驗：於定轉角轉向下激發 θ_3 之參數估測結果

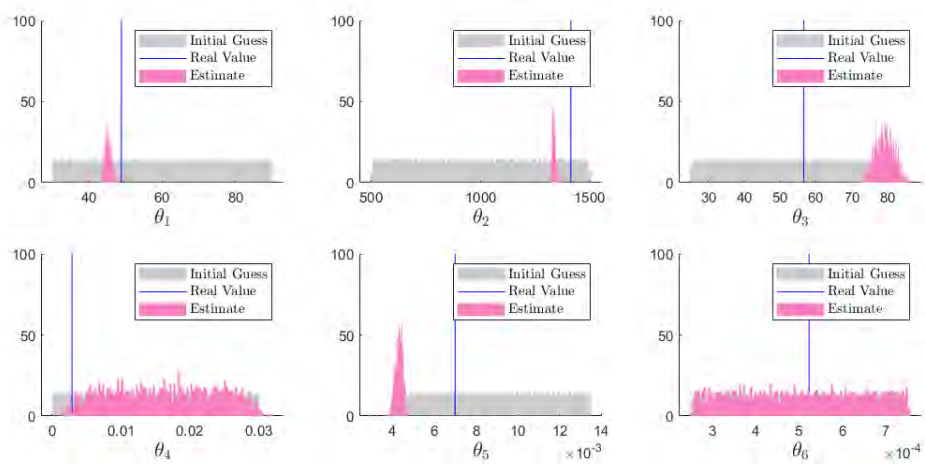


圖 6.36: 第 6 組實驗：於定轉角轉向下激發 θ_4 之參數估測結果

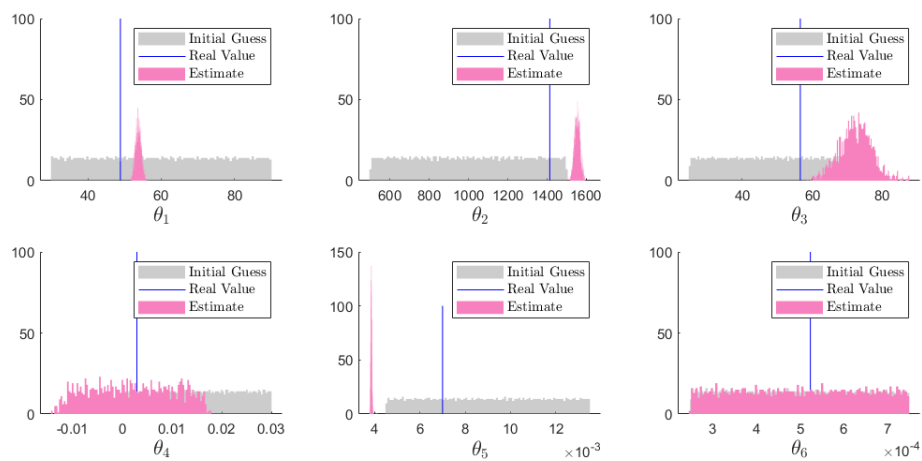


圖 6.37: 第 7 組實驗：於正啣頻下激發 θ_1 之參數估測結果

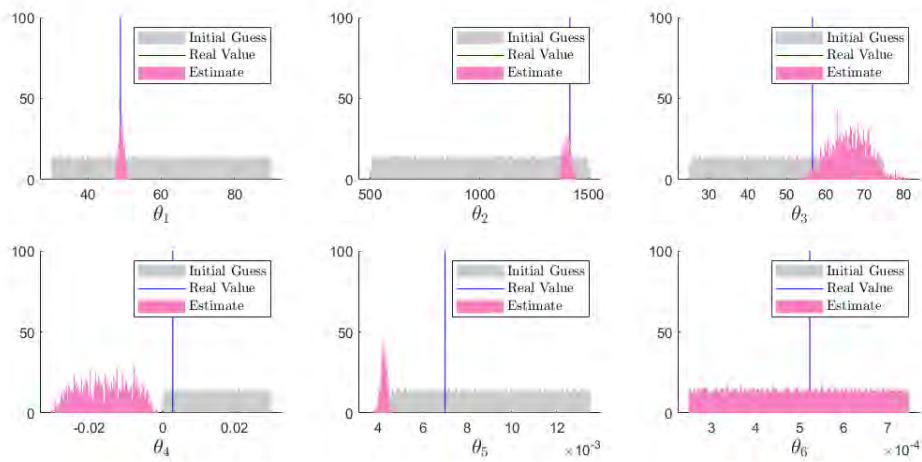


圖 6.38: 第 8 組實驗：於正啣頻下激發 θ_4 之參數估測結果

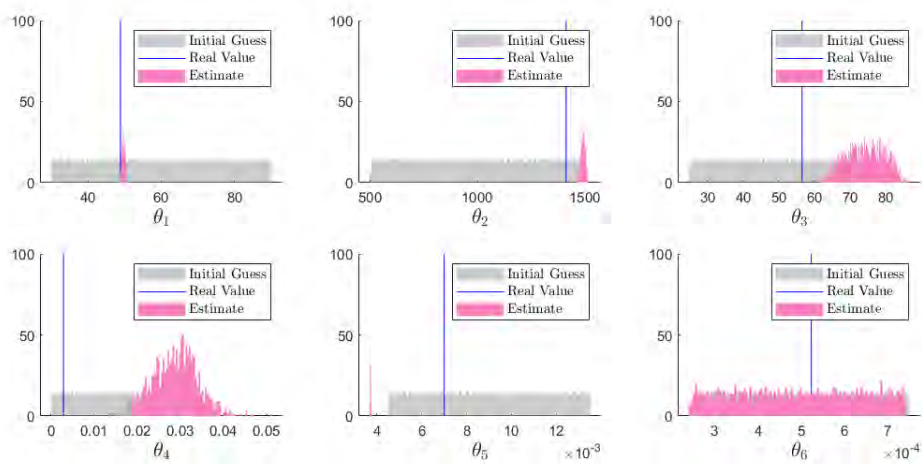


圖 6.39: 第 9 組實驗：於正啣頻下激發 θ_5 之參數估測結果

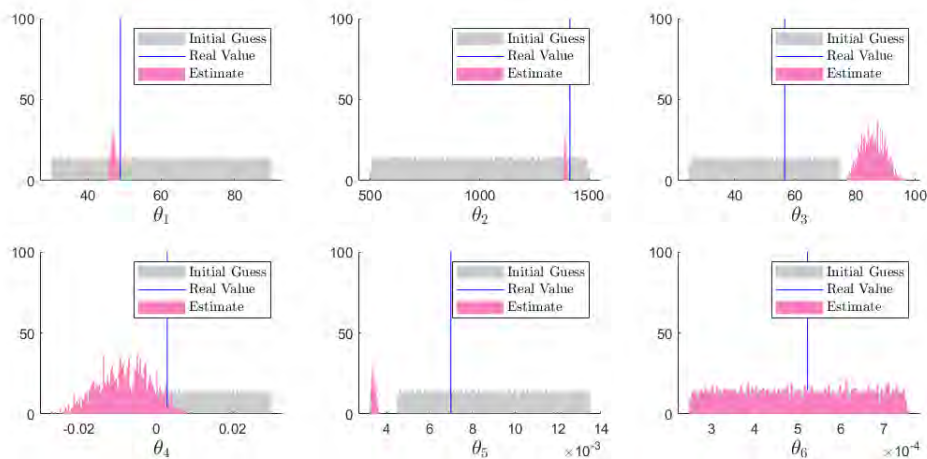


圖 6.40: 第 10 組實驗：於逆啾頻下激發 θ_1 之參數估測結果

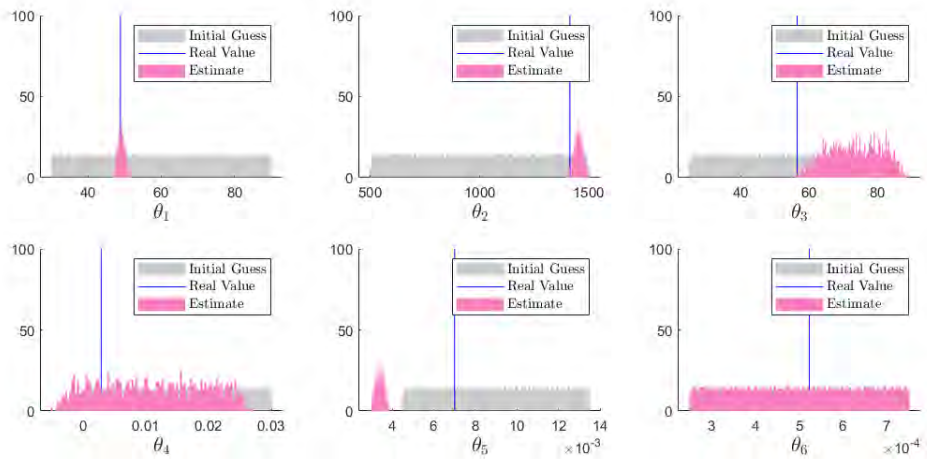


圖 6.41: 第 11、12 組實驗：於逆啾頻下激發 θ_4 與 θ_6 之參數估測結果

自圖6.31至圖6.41可歸納出幾點結果：

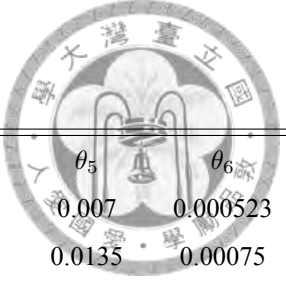
- **不確定模型參數的校準可行性**

θ_1 、 θ_2 、及 θ_5 屬於較容易識別的參數，而他們所對應到的全域敏感度指標也相對較大； θ_3 所呈現的分佈區間較大，對於其參數估測分佈無法縮小是較難透過全域敏感度分析所預期的，在刻意激發 θ_3 的實驗組別中， θ_3 分佈之標準差有些許變小，提升了對估測的信心水準。同時可以看到 θ_4 除了在第 9 組實驗中分佈區間較小外，在大多數實驗中並無法被校準，其分部區間與初始區間相異不大，且平均數有明顯的偏差； θ_6 在所有的實驗中皆無法被校準，分佈情形在各組實驗之間差異甚小。

- **多組解的可能性**

從各組實驗中可看到雖然卡爾曼濾波器對於參數的估測可以具有非常高的信心水準，但在參數的估測結果上與真實系統仍然是會有偏差的。舉例來說，在第 2

表 6.12: 第 1 至 6 組實驗之參數校準結果與分佈



Real Model		θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
	Real value	48.8834	1413.488	56.618	0.0029	0.007	0.000523
	u.b	90	1500	75	0.3	0.0135	0.00075
	l.b	30	500	25	0	0.0045	0.0002
1	Estimate	48.3925	1391.6	61.9386	0.011	0.0032	0.00049
	Error %	1.0042%	1.5485%	9.3974%	279.3103%	54.2857%	5.9992%
	Standard dev.	0.5665	6.3012	2.6775	0.0081	7.13E-05	1.44E-04
	95% u.b	49.50284	1403.95	67.1865	0.026876	0.00334	0.000775
	95% l.b	47.28216	1379.25	56.6907	-0.004876	0.00306	0.000209
2	Estimate	45.395	1459.9	67.5377	0.0226	0.0038	0.00051
	Error %	7.1362%	3.2835%	19.2866%	679.3103%	45.7143%	3.5155%
	Standard dev.	0.7301	13.8111	2.8831	0.0081	7.13E-05	1.44E-04
	95% u.b	46.825996	1486.97	73.188576	0.038476	7.45E-05	0.000788
	95% l.b	43.964004	1432.83	61.886824	0.006724	0.00366	0.000222
3	Estimate	49.6175	1408.9	49.212	0.0092	0.0047	0.00051
	Error %	1.5017%	0.3246%	13.0806%	217.2414%	32.8571%	3.5155%
	Standard dev.	0.7581	11.1911	2.7223	0.0083	3.29E-04	1.44E-04
	95% u.b	51.103376	1430.835	54.547708	0.025468	0.005345	0.000788
	95% l.b	48.131624	1386.965	43.876292	-0.007068	0.004055	0.000222
4	Estimate	54.4902	1392.8	60.6211	0.0145	0.0054	0.00049
	Error %	11.4697%	1.4636%	7.0704%	400%	22.8571%	6.3814%
	Standard dev.	6.1955	11.0053	4.0195	0.0076	6.05E-04	1.44E-04
	95% u.b	66.63338	1414.37	68.49932	0.029396	0.006586	0.000773
	95% l.b	42.34702	1371.23	52.74288	-0.000396	0.004214	0.000207
5	Estimate	49.6439	1403	61.461	0.0139	0.0037	0.0005
	Error %	1.5557%	0.742%	8.5538%	379.3103%	47.1429%	4.2797%
	Standard dev.	0.9006	29.0112	1.7816	0.0086	2.06E-04	1.44E-04
	95% u.b	51.409076	1459.862	64.952936	0.030756	0.004104	0.000784
	95% l.b	47.878724	1346.138	57.969064	-0.002956	0.003296	0.000218
6	Estimate	45.3897	1335.8	79.2302	0.0162	0.0043	0.0005
	Error %	7.147%	5.4962%	39.9382%	458.6207%	38.5714%	3.7065%
	Standard dev.	0.9067	7.9649	2.7095	0.0076	1.88E-04	1.44E-04
	95% u.b	47.166832	1351.411	84.54082	0.031096	0.004668	0.000787
	95% l.b	43.612568	1320.189	73.91958	0.001304	0.003933	0.000221

表 6.13: 第 7 至 11 組實驗之參數校準結果與分佈

7	Estimate	53.765	1553.8	61.9386	0.002	0.0039	0.0005
	Error %	9.9862%	9.9267%	9.3974%	31.0345%	44.2857%	4.8529%
	Standard dev.	0.7863	14.7255	4.742	0.0083	3.57E-05	1.44E-04
	95% u.b	55.306148	1582.662	71.23292	0.018268	0.00397	0.000781
	95% l.b	52.223852	1524.938	52.64428	-0.014268	0.00383	0.000215
8	Estimate	49.1612	1399.5	66.1529	-0.0157	0.0042	0.00049
	Error %	0.5683%	0.9896%	16.8408%	641.3793%	40%	5.9992%
	Standard dev.	0.7331	17.1441	5.0254	0.0071	1.40E-04	1.44E-04
	95% u.b	50.598076	1433.102	76.002684	-0.001784	0.004475	0.000775
	95% l.b	47.724324	1365.898	56.303116	-0.029616	0.003925	0.000209
9	Estimate	49.7341	1492.4	74.3278	0.0288	0.0037	0.00049
	Error %	1.7403%	5.5828%	31.2795%	893.1034%	47.1429%	5.9992%
	Standard dev.	0.4865	10.1731	5.4553	0.0053	2.20E-05	1.44E-04
	95% u.b	50.68764	1512.339	85.020188	0.039188	0.003743	0.000775
	95% l.b	48.78056	1472.461	63.635412	0.018412	0.003657	0.000209
10	Estimate	46.9991	1393.7	85.8917	-0.0082	0.0034	0.0005
	Error %	3.8547%	1.3999%	51.7039%	382.7586%	51.4286%	3.8976%
	Standard dev.	0.6896	4.2228	3.9329	0.0068	1.00E-04	1.44E-04
	95% u.b	48.350716	1401.977	93.600184	0.005128	0.003596	0.000786
	95% l.b	45.647484	1385.423	78.183216	-0.021528	0.003204	0.00022
11	Estimate	49.1893	1451.7	73.3713	0.011	0.0034	0.0005
	Error %	0.6258%	2.7034%	29.5901%	279.3103%	51.4286%	4.0887%
	Standard dev.	0.907	20.2429	7.7581	0.00083	2.05E-04	1.44E-04
	95% u.b	50.96702	1491.376	88.577176	0.0126268	0.003803	0.000785
	95% l.b	47.41158	1412.024	58.165424	0.0093732	0.002997	0.000219

至 4 組實驗中，定轉角轉向的操作下應該能使 θ_2 和 θ_3 可以同時被校準，然而自圖 6.34 至圖 6.36 中可以看到， θ_2 和 θ_3 仍然無法被準確估測，且分佈的情況皆不同。根據這組實驗以及卡爾曼濾波器的估測原理，本研究推測在參數估測時，因著量測不確定性而造成了對於分佈區間的模糊性，使兩次估測結果進行折積時不論參數估測的範圍或者準確度都有受到影響。另一個推測估測結果可能遭遇多組解的觀察為， θ_1 、 θ_2 、 θ_3 及 θ_5 的估測結果在不同組實驗中雖然校準的參數組合之結果不盡相同，但卻皆有相當高的信心水準。根據此現象，本研究推測，各組實驗所估測的參數為符合該操作下的參數組合，可在該組實驗中以 MLE 達到最適當估測，但同時該估測可能為多組解的其中之一。

• 估測結果超出可能分佈區間

各組對於 θ_5 的估測經常出現估測參數的分佈於初始分佈之外。針對此情境，考量到參數估測的結果並不符合工程意義，因此在後續的模型驗證中會忽略此參數之估測結果，改以參數於初始分佈中的中位數取代估測結果。



• 參數激發的效益

從各組實驗中可以很清楚的看見，總變異數越大，對於參數估測的分佈的標準差則越小，代表估測更具有信心水準。同時，自第 4 組實驗更可得知，該組的總變異量雖然大，但 θ_1 的所貢獻的變異量比例非常少，該組的變異來源幾乎都由 θ_2 及 θ_3 所主導，因此對 θ_1 明顯的呈現較大的估測分佈。由此可推論，激發預校準的參數在此方法中相當重要，不只在參數校準前先判斷參數是否有效被估測，同時透過最大化目標校準參數的變異量及整體的總變異量，使參數可以在高度信心水準下被估測與校準。

除了以上四點結果，本研究也發現使用卡爾曼濾波器於參數校準時所得到的校準結果並不唯一，推測原因為量測誤差導致觀測狀態進入卡爾曼濾波器時所呈現的誤差分佈較大，使卡爾曼濾波器在進行摺積時會對於選擇的區間有所偏差。解決這個狀況除了重複實驗之外，本研究也嘗試將上述四種獨立操作方式整合為單一軌跡進行測試，除了使各個參數可以有效的在各種操作區間被激發，同時透過多重的操作也期望可縮小參數的估測偏差。

6.7.4 單一整合軌跡之參數校準

前一小節針對各個操作下，分析不同的參數組合對於參數估測準確度的影響，推斷了參數能否被有信心的估測關鍵在於該參數所貢獻的總變異數需要被放大。同時也發現由於基於量測誤差的影響，卡爾曼濾波器在同一組實驗內估測可能會往具有偏差的數值收斂。本節整合四種操作下，在單一組實驗內有效激發不確定模型參數的實驗，建立單一軌跡，試圖透過多組獨立的操作來解決上述問題。

整合四種操作方法的軌跡(稱作整合軌跡)，選擇了第 1、2、7、及 10 組實驗的操作參數來建構單一軌跡，並預期可校準 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、及 θ_5 。整合軌跡如下：

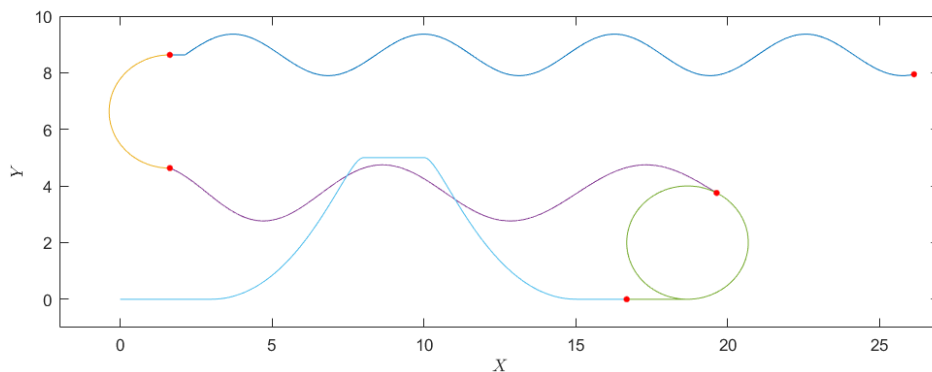


圖 6.42: 整合軌跡

在此操作中，模擬器設定總駕駛時間設定為 106 秒，可得到開迴路駕駛的軌跡如圖6.43所示。

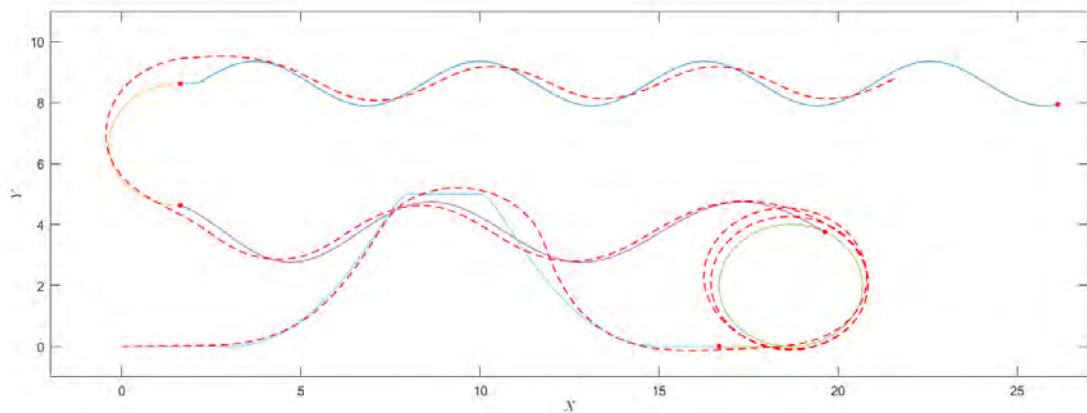


圖 6.43: 整合軌跡之閉迴路駕駛軌跡

以卡爾曼濾波器設計 16 個時間截取點進行迭代，得到各個不確定模型參數的估測如圖6.44，估測分佈的統計資訊則列於表6.14。由模擬結果可發現，使用整合軌跡做為操作下的參數校準結果明顯的與真實數值接近，同時不確定模型參數的分佈區間也變小，代表對於估測結果的信心水準非常高，可進入參數驗證階段。

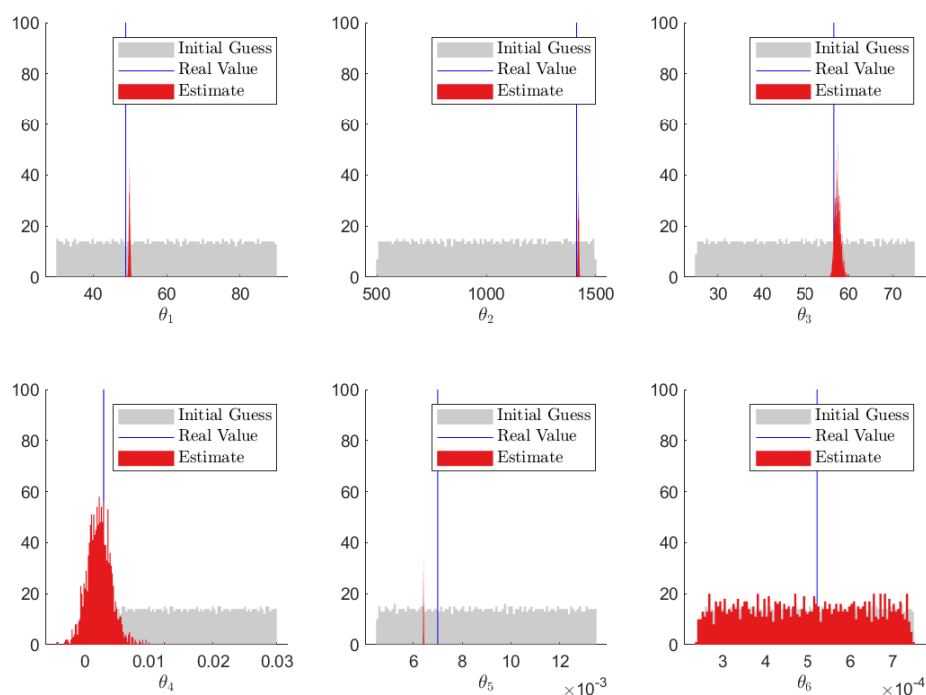


圖 6.44: 整合軌跡操作下之不確定模型參數估測分佈

表 6.14: 整合軌跡操作下之不確定模型參數估測結果與區間

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
Real	48.8834	1413.488	56.618	0.0029	0.007	0.000523
Estimate	49.9348	1422.5	57.6706	0.0023	0.0064	0.000495
Error/span %	1.7523%	0.9012%	2.1052%	2%	0.6667%	5.0909%
Standard dev.	0.202	2.7908	0.7202	0.0019	1.28E-05	1.44E-04
95% u.b	50.33072	1427.97	59.082192	0.006024	0.00642505	0.000778
95% l.b	49.53888	1417.03	56.259008	-0.001424	0.00637495	0.000212

6.8 模型驗證

完成參數的估測後，將模型參數代入模擬模型中，並加入不確定因素模型，多次模擬後計算各個狀態的信賴區間，並計算檢定統計量，以假設檢定判斷所校準的模型是否與真實系統相同。

在此案例中，模型驗證的流程如下：

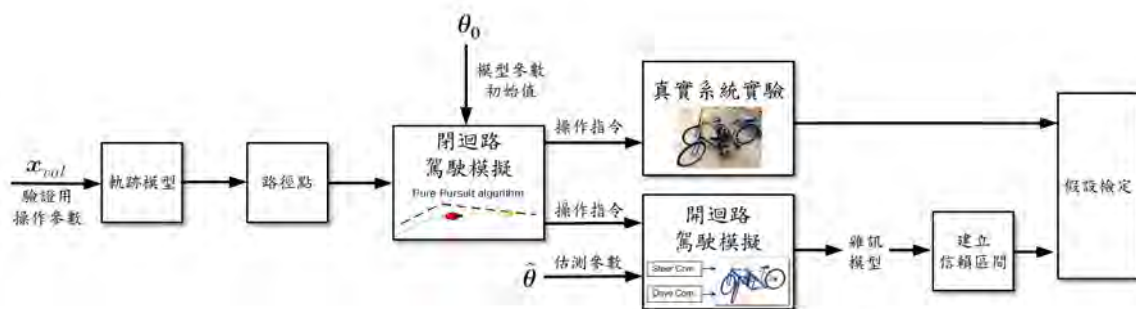


圖 6.45: 車輛系統校準模型驗證流程

1. 建立獨立的驗證軌跡

生成驗證軌跡的流程同樣為建立一組不同於校準參數時所使用的軌跡，另外生成一組軌跡，並透過閉迴路駕駛模擬得到其操作指令。此時的閉迴路駕駛模型所使用的參數組合為不確定模型參數於可行分佈區間的中位數 θ_0 。所生成的模型驗證軌跡如圖6.46所示。

2. 建立信賴區間

以透過卡爾曼濾波器所估測的各項參數之平均值作為該參數的估測值 $\hat{\theta}$ ，將其代入可模擬感測不確定性的閉迴路操作中，以前步驟所得到的操作指令駕駛 500 次，每一次操作分別將系統輸出狀態 $X, Y, a_x, a_y, \dot{\psi}$ 以 100000 個資料點所組成的向量記錄，並計算各個輸出狀態中的每一個資料點的平均值與標準差，並建立 95% 信賴區間。

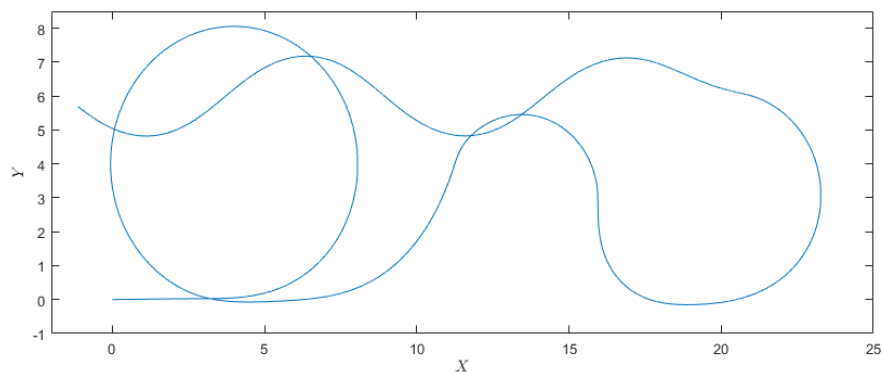


圖 6.46: 用於驗證車輛模型之軌跡

3. 假設檢定

以模型參數的真實值代入可模擬感測不確定性的開迴路操作中，以模擬實驗的結果做為真實實驗的輸出狀態 $X_{real}, Y_{real}, a_{x,real}, a_{y,real}, \dot{\psi}_{real}$ ，也同樣將每個輸出以 100000 個資料點所組成的向量記錄。依序針對各個狀態在每一個同位置的資料點進行假設檢定，計算真實實驗輸出於該信賴區間下的檢定統計量。計算所得到的 100000 個檢定統計量之幾何平均數，可得到每一個狀態的等效檢定統計量。將五個狀態的檢定統計量再進行幾何平均後，得到代表全系統的檢定統計量。在此案例中，同樣的以 95% 信心水準判斷兩模型是否可被視為相同：

- H_0 ：模擬模型與真實系統的輸出表現可被視為相同，即模型參數相同
- H_1 ：模擬模型與真實系統的輸出表現不可被視為相同，即模型參數不同

比較估測參數所模擬的軌跡分佈 (圖6.47淺色軌跡) 與真實實驗的軌跡 (圖6.47深紅色軌跡) 可發現，模擬模型的輸出與真實實驗的結果非常接近，僅在少部分過彎處具有些許的偏差，再加上量測不確定性，使兩者的差異更不容易區分。

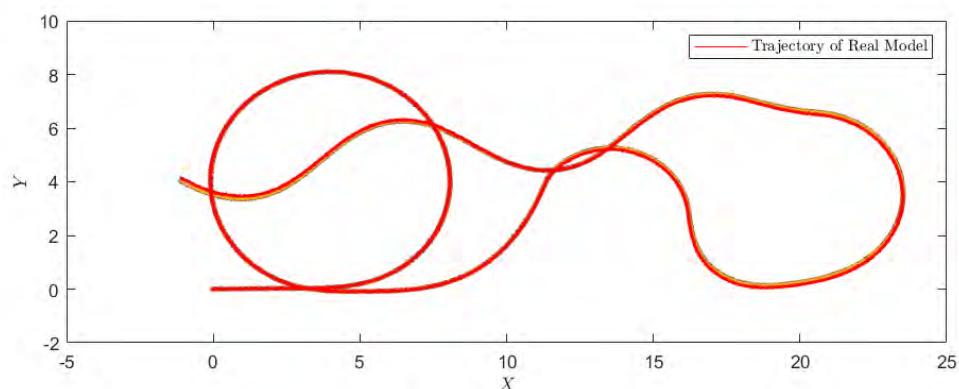


圖 6.47: 估測參數所模擬的軌跡分佈與真實實驗的軌跡比較圖

透過假設檢定計算所觀測的五項系統輸出以及全系統之檢定統計量，可得到結果如下表：

表 6.15: 各項輸出及全系統之假設檢定結果

	X	Y	a_x	a_y	ψ	Overall
統計檢定量	0.7659	0.8507	0.7718	0.7425	0.7369	0.7725
檢定結果	Reject H_1	Reject H_1	Reject H_1	Reject H_1	Reject H_1	Reject H_1

表6.15中可見，透過假設檢定，不論是各項輸出的檢定結果，或者以系統的等效檢定統計量進行檢定，都沒有足夠的證據推翻 H_0 ，即代表 H_0 成立，可於 95% 的信心水準下將所校準的模擬模型視為真實系統模型，完成參數校準。

6.9 小結

本章以三輪車系統做為工程案例，示範如何以將所提出之方法應用於複雜系統的參數激發與校準中。本案例以三輪車的 z 軸轉動慣量、側偏剛性、外傾剛性、 SAP 、以及兩個輪胎滾動阻力係數 μ_{r0} 與 μ_{r1} 做為不確定模型參數，並透過全域敏感度分析及最佳化操作，設計出可用於激發參數的軌跡與最佳操作。在該操作下，以基於混沌多項式展開之卡爾曼濾波器對參數進行估測，得到不確定模型參數的估測分佈。將其分佈的平均值作為代表模型的參數估測值，並以假設檢定比較模擬模型與真實系統之動態，透過假設檢定，在 95% 信賴區間下證實兩模型的參數相同。

本章從卡爾曼濾波器校準參數的結果來推論參數激發的必要性，可得到以下結論：

- 透過全域敏感度分析及操作設計來判斷參數是否可以有效被校準的可能性
- 參數是否被激發並非單以全域敏感度指標的大小為依據，而是判斷參數所能貢獻的總變異量是否能被放大
- 參數被激發與否對於參數能否被精準的校準影響較小，但對於參數估測的信心水準有顯著的影響
- 透過對參數的激發，設計用於校準參數之動態，能夠使參數有效的被校準，同時可解決部分多組解的問題，也說明了方法的可行性

儘管在此案例中參數被成功校準，但對於研究流程和設計上的邏輯，仍然有許多可討論之處。在後續的討論中也將列出可討論之細節，以及未來可延伸的方向。



結論與討論

7.1 研究成果與具體貢獻

動態系統的模型驗證過程倚賴著對正確的操作方式，並且需要清楚的了解模型校準過程中誤差的來源。本研究透過數學案例及工程案例，建立並示範了一套完整的參數驗證的流程，讓使用者可以了解如何透過系統化方法量化建立一套可以使參數的偏差在最有效率的操作下被看見，並且透過參數的校準建立具有高度可靠度的模擬模型，完成模型驗證。本研究的具體成果與貢獻如下：

- **對一般化模型參數之激發與校準方法**

本研究針對一般化系統建立一套系統化的操作流程，具體內容如下：

1. 將動態系統以一般化數學式表示，並提出以一般化的數學模型描述參數激發的機制。
2. 透過文獻回顧用於各種工程案例中的模型參數激發設計方法，歸納出系統化的設計模型參數的激發方法主要有兩個要素：參數化操作方式及量化參數偏差所造成的誤差。
3. 以 Kriging 模型做為替代模型，按照 DACE 架構建立對單一輸出模型的全域敏感度分析方法；同時以 K-L 轉換對動態系統的動態輸出進行主成分分析，提出一套整合 PCA 和 Kriging 模型於 Sobol 全域敏感度分析方法 (PCA-Kriged-Variance-Based Sensitivity Analysis Method)。
4. 透過不確定模型參數的主效應指標、總效應指標、及總變異數，建立用於激發特定不確定模型參數之目標函式。同時，也提出以替代模型作為整合全域敏感度指標的計算流程，建立指標生成函數的概念，加速最佳化流程。此方法也透過直接求解法進行驗證，確認了方法的可行性。
5. 在基於模擬模型與真實系統的差異全來自模型參數不同的假設下，提出一套基於 DACE 和 CAE 技術的參數激發與校準流程，透過區分系統的操作參數



和不確定模型參數，並透過全域敏感度指標建立最佳的激發操作，最後透過卡爾曼濾波器校準參數。透過以一般化數學模型呈現系統樣貌，以及數學模型和車輛模型案例，確認了此方法的可行性，更做為此方法能被一般化使用於各樣複雜系統的說明案例。

6. 透過對數學及工程案例進行全域敏感度分析、設計激發操作、設計操作方法、參數校準、到模型驗證流程，確認了所提出方法之可行性及參數激發與校準須互相搭配使用的必要性。

• 對單一輸出數學模型及動態輸出數學模型

本研究針對單一輸出數學模型及動態輸出數學模型進行方法的建構和可行性的驗證，具體成果如下：

1. 以交叉驗證方法對替代模型進行驗證，透過 R^2 、 $RAAE$ 、誤差分佈、曲線重組等方法，建立替代模型擬合準確度的評估機制。
2. 透過對初始取樣次數進行調整，並加入 EGO 流程以增加模型準確度，建立具有可信度的替代模型。
3. 建立並驗證指標生成函數進行激發操作的最佳化的可行性。
4. 以基於混沌多項式之卡爾曼濾波器進行參數校準，透過參數校準建立可靠的模型。

• 對車輛動力學模型

本研究針對車輛工程中所使用之車輛動力學模擬模型做為實踐方法之案例，具體結果如下：

1. 基於現有的三輪車硬體，整合摩托車動力學模型及車輛動力學模型，建立了三輪車的動力學模型，並以 Simulink 呈現三輪車的模擬模型。
2. 建立四種參數化的軌跡模型做為操作情境。
3. 建立線控操作車輛測試流程：開迴路與閉迴路操控模型的駕駛程序，完成對複雜系統之全域敏感度分析和誤差歸因。
4. 針對車輛模型中的不確定模型參數以基於替代模型之全域敏感度分法進行全域敏感度分析，且以所提出方法對每一個模型參數於四種參數化的操作方式下求出最佳操作參數，並整合為單一操作軌跡之最佳設計。
5. 應用基於混沌多項式展開之卡爾曼濾波器對不確定模型參數進行估測，透過假設檢定，使校準後的模型可與真實系統 (模擬實驗) 的輸出於 95% 信心水準下可被視為相同。

• 學術發表

本研究將部分研究內容發表於 ASME IDETC-CIE (2020) Design Automation Conference (DAC)，論文名稱：Designing Excitation Maneuvers with Maximal Parameter Sensitivity for an X-by-Wire Autonomous Tricycle



7.2 討論

本研究在方法的建立、驗證，以及在案例的探討中，有許多的假設和近似於操作當中。在方法的選擇和自行建構的操作流程中，也存在著許多可以深入探討的議題。以下則將對於研究中的邏輯和可以討論的問題進行整理，也期望這部分的問題可以提供方法優化的方向。

1. 模型進行參數校準前需要先設計激發動態的必要性

本研究認為設計激發動態再進行參數校準是模型驗證階段非常重要的流程，不僅有效率的使參數的偏差被放大、增加校準的準確性，透過複合式的動態設計也能有效的解決可行參數具有多組解的處境。雖然使用未被激發的動態進行參數校準同樣也可以得到可行解，但若缺少全域敏感度分析及參數激發流程，則無法有效的提高校準參數的信心水準，同時若參數具有多組解，也較難被察覺。本研究提出之方法從模型校準的觀點出發進行設計，在方法中同時考慮了誤差歸因、最大化誤差效應、到設計操作，是一套以校準模擬模型參數出發的系統化方法，可有效的完成模型驗證。

2. 模型參數之全域敏感度指標大小與估測信心水準的關聯

全域敏感度指標的大小在某種程度也代表了參數是否被激發與否，然而自參數校準的實驗結果來判斷，卻發現參數的全域敏感度指標與參數校準的準確性和信心水準似乎並沒有直接的關聯。本研究針對此問題提出以下推測：

- (a) 全域敏感度為同一組實驗內對於所有變量而言的相對值，也因此該參數所提供的變異直接相關的還包含系統的總變異量。因此，參數能否被有效的校準，系統的總變異數與全域敏感度指標都有直接的影響。
- (b) 全域敏感度僅能代表該參數的偏移量可以容易被觀察，但當單一參數被調整時，同時也會面臨與其他參數的交互作用之影響，而使模型無法藉由調整單一模型參數被校準。

3. 指標生成函數並沒有進行準確度評估

在本研究中指標生成函數同樣為替代模型，但卻沒有進行準確度評估和取樣次數的最佳化選擇，僅在兩數學案例中有透過直接求解法與其結果進行比較。不進行準確度評估的原因主要有三：

- 單一次取樣成本太高，準確度評估的執行可行性並不高。在車輛工程案例中，面對操作參數所組成的二維設計空間，接採用 5 個水準的全因子設計，使樣本點可以平均的散佈在設計空間中。若要使擬合指標生成函數的取樣更有效率，也可搭配 EGO，以取樣指標決定取樣位置，達到最有效率之取樣。
- 指標生成函數的準確度若不高，對結果所造成的直接影響並不大。由於 Kriging 模型的特性為，參與擬合的樣本數值在模型中並不會改變，因此指標生成函數所提供的僅為由趨勢進行預測，得到可能激發不確定模型參數的

操作參數。並且，卡爾曼濾波器校準參數的能力並不會因為操作參數有些許的偏差而改變。

- 操作參數在真實實驗中，得由真實系統執行，其執行上並不能完全準確的按照操作參數所生成的指令運作，在控制上會存在誤差。因此，最佳操作參數僅是在巨觀上提供一個操作的依據，而非精準控制的指令，所以本研究對指標生成函數的準確度要求並沒有深入探討。

4. 截斷數的選擇

在本研究中所使用的主成分分析與混沌多項式展開中，皆為了提高計算效能而對其展開後的數學方程式進行截斷，僅保留部分資料。而根據文獻，使用混沌多項式展開時，對於多項式所保留的項數在操作多次後累積誤差會顯著的影響結果。因此，如何正確的選擇截斷數，在估測的準確度和運算成本之間進行取捨，也值得討論。

5. 不確定模型參數的設計空間選擇

對於不確定模型參數的設計空間之選擇，對於全域敏感度指標或許會產生較大的影響。例如在本研究中，側偏剛性的設計區間較大，或者這個區間的設計對系統的影響是大的，以至於在所有的全域敏感度分析實驗中，該參數所貢獻的變異量會占據大多數，同時也會使得其他參數的全域敏感度指標較小，導致最佳化操作函數的效果有限。因此，選擇適當的參數區間，使各個參數在尚未被激發時所呈現的敏感度指標差異可以縮小是可以調整和優化的程序。

6. 卡爾曼濾波器的收斂機制

本研究雖然使用卡爾曼濾波器進行參數校準，卻無法明確清楚在實務上使卡爾曼濾波器收斂最快且最準確的資料型態為何者，也因此研究過程中不斷的嘗試使用變異數最大以及參數的全域敏感度指標最大者來進行實驗與比較。根據卡爾曼濾波器的理論，應該能支持本研究在於敏感度最大化的狀態下調整參數的設定，但由於量測雜訊的加入，使得全域敏感度在主效應指標被放大時，同時需要使總變異數最大化，才能使卡爾曼濾波器掌握參數偏差的存在。

7. 目標函式的建立方法

本研究在制定目標函式的過程中，僅是直觀的考慮主效應指標、總效應指標如何搭配才能使目標參數被有效凸顯，並且由於實驗需要跨組別比較，因此也把變異數納入目標函式中。然而，變異數要如何參與在目標函式中，也是值得探討的議題。當變異數加入了目標函式，若變異數的量值變化較大，會呈現變異數主導(Dominate)了目標函數及最佳解，使主效應指標與總效應指標對最佳解的影響比例降低。在本研究的車輛案例中，將變異數開三次方根以降低變異數的變化對最佳解的影響。面對此問題，甚至在進行跨組別(操作方式)的比較或者最佳化，可能需要建立一套能將變異數一般化的機制，使變異數對目標函數的影響不至於大過全域敏感度指標，也確保操數的激發能有效的呈現參數的單一影響程度，而非激發最大變異數。



8. 卡爾曼濾波器的估測不確定性

以卡爾曼濾波器進行的參數估測結果，會因著量測雜訊本身具有不確定性，而生成不同的估測結果。本研究建議在模擬成本的允許情況下，可重複實驗增加樣本數量以縮小估測參數的變異數，或者採取複合操作方式使卡爾曼濾波器的摺積區段可以被改變，提升參數估測的準確度。

9. 指標融合的權重選擇

若系統同時參與全域敏感度分析的輸出狀態超過一組，例如車輛案例中同時具有三組輸出狀態，則可以對決定指標融合的權重選擇建立更系統化之方法。在指標融合的程序中，面臨到輸出狀態的單位和尺度本身就不同，無法再以總變異數進行加權平均。因此，如何客觀的針對輸出狀態的重要性，甚至考慮感測器的誤差，有系統的分配權重，也是值得探討的問題。

10. 參數較準方法選擇

使用基於混沌多項式之卡爾曼濾波器來校準模型參數之方法對本研究而言可能不是最適合的。考量到本研究所預期的目標為設計一個使單一模型參數可以被激發的環境，讓開發者可透過調整該模型參數使模擬模型與真實系統誤差最小。然而，卡爾曼濾波器並沒有設定可讓開發者針對單一參數進行微調的機制，因此較難呈現參數激發與參數校準的關聯性。本研究認為，若以梯度下降的最佳化演算法，或許更能體現參數是否被激發對於參數校準的影響。儘管如此，卡爾曼濾波器卻同時解決了參數之間耦合的問題，在同時校準多組參數下，可忽略校準單一參數時因交互作用而無法準確校準模型的困境。

11. 多組解

在參數校準的實驗中，每一組實驗所呈現的校準結果皆不相同，且組別之間差異和趨勢都不一樣。從此現象可推論，參數在被校準時，仍然會遭遇到多組解的狀況。面對這種狀況，使用者在測試環境中，選擇一組能做為代表之參數組合，且未必為系統的真實參數。對此，本研究採用整合後的單一軌跡，整合多組獨立的動作，透過多變的操作減少參數陷入局部最佳解中。

7.3 未來工作

本研究也整理研究過程中的假設及嘗試過的問題，提供未來可基於本研究的成果，繼續發展的方向。

1. 以真實系統進行實驗並執行參數校準

本研究並未以真實系統進行實驗，僅針對所建立之模擬模型以模擬實驗取代，為較不完整之處。未來也期望能以真實系統進行所規畫之實驗，對未知參數進行校準，同時也了解模型與真實車輛的差距，並規畫模型優化方向。



2. 比較使用最佳化設計操作與否的模型驗證結果

本研究雖然在參數校準的實驗中以非常多組實驗比較並討論目標參數在被激發與否時對於模型校準結果的影響，但並未針對於使用最佳化設計操作與否的模型驗證結果進行系統化的比較。該論點可作為未來研究探討之重點。

3. 車輛模型之完整性及系統識別

本研究所建構車輛模型是由非常多簡化的物理模型所組成，例如輪胎的操作僅限於線性操作區間、轉向馬達以 PI 控制器取代延遲的特性、聯軸器未建模... 等，都是可以持續建構完整模型的方向。

4. 以狀態方程建構車輛模型

本研究在基於對車輛動力學模型的建構尚未熟悉時以 Simulink 完成建模。然而，若使用卡爾曼濾波器進行參數校準，由於 Simulink 模型無法實現該方法中所建議使用的 One-step ahead 模型，因此對下一個擷取時間的估測得要將估測後的模型參數帶入系統後從初始開始模擬，不僅降低了估測的效率，也失去了卡爾曼濾波器對於誤差共變異矩陣和輸出狀態的估測能力無法被使用。若以狀態方程建構車輛動力學模型，則可使卡爾曼濾波器與參數校準流程更匹配。同時，狀態方程的計算速度也優於 Simulink 模型，面對應用本研究之方法於更複雜的系統時，使用狀態方程也可以加速模擬時間，提升應用層面。

5. 以混沌多項式展開計算卡爾曼濾波器之誤差共變異矩陣

混沌多項式搭配卡爾曼濾波器的應用中，透過向量的特性，其係數可以於濾波器中對系統的誤差共變異矩陣進行估測，以降低運算成本。在本研究中由於模型特性的不同並沒有使用此方法，在未來的研究中可嘗試此方法，並針對其準確度進行討論。

6. 同時校準多組參數

在以車輛工程案例做為複雜系統的案例時，僅針對 6 個不確定參數進行校準。若將此方法應用於模型更複雜、取樣成本更高、且不確定模型參數更多的複雜系統時，不論是在初始取樣、模型驗證、到卡爾曼濾波器的應用，都會是另一大挑戰。如何有效的對替代模型的準確度進行取捨、甚至卡爾曼濾波器是否能同時校準更多組參數，都是可深入探討的議題。

7. 探討模擬模型與真實系統之間的模型不完整性量化與激發

本研究在基於模型參數的偏差為模擬模型與真實系統的唯一差異的假設下進行研究，然而模擬模型與真實系統之間可能本身還存在著模擬模型所未包含的物理特性沒有被建立在模型中。未來可探討如何在同時考量參數的偏差以及模型的不完整性下，將模型的誤差歸因至二者，並且提出優化模型的具體策略，使模型建構更完整。

8. 模型的完整度與預測能力的關係探討

面對各項次系統所建立的模型而言，模型越精確則建構的成本越高。如何在基於

本研究的成果中，對於模型的清晰程度進行明確的定義，並且能針對系統的不同操作，計算出最佳的模型開發精度，使需求與模型清晰度能有系統性的匹配，是未來可延伸探討的議題。



車輛模型建構

本附錄主要介紹車輛系統的硬體規格及模擬模型的建置，特別著重在模擬模型之力學根據，並強調如何將數學及物理定理呈現於 Simulink 模型中，同時也說明在模型建構中所忽略或線性化處理的部份。對此案例而言，車輛動力學模型概念的建立參考自 [16,22,136,139–144]，而三輪車模型的建構則參考 [145–150]。

在本章中所建立的車輛動態方程式是根據 ISO-8855:2011 [151] 所訂定的車輛座標系統，如圖A.1 [151] 所示。

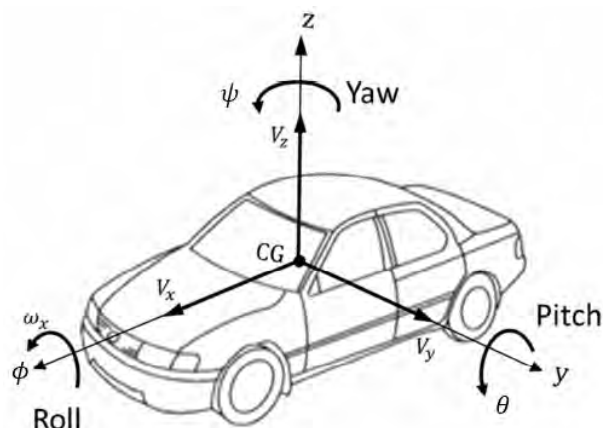


圖 A.1: ISO 規範之車輛座標系

該座標系為局部座標，固定於車輛質心位置，並以車輛的質心為原點車體座標原點， x 方向為車頭指向、 z 方向垂直地面射出。另建立全域座標系，以 X, Y, Z 表示三軸，且坐標系為固定、不隨車體一定而改變，如圖A.2所示。

本章期望透過對模擬模型中的物理和數學模型建構過程呈現詳細的紀錄，在未來可持續修正模型細節、也方便模型驗證能順利進行。

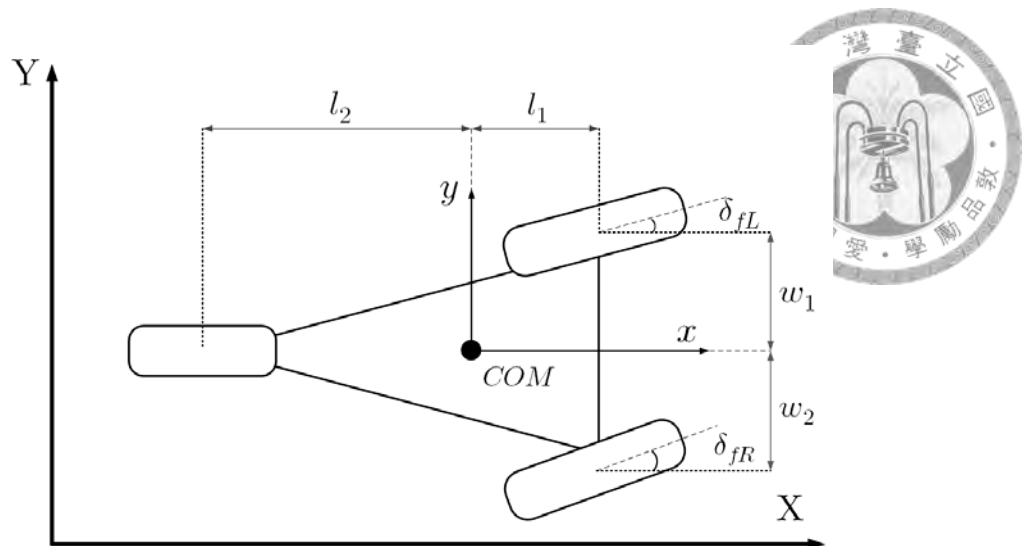


圖 A.2: 車體座標與全域座標、幾何長度標示

A.1 車輛模型建構方法

Allen 及 Kutluay 曾在論文中提到：「一個模型必須要夠好，但不是更好，且模型的複雜度必須由他的使用方式來決定。」[3]。因此，對於車輛模型的建立，在各種不同的研究用途及目標中皆有所差異。本節將對車輛動力學模型進行分類以及案例的探討，透過了解不同建立模型的方式來確定本研究模型建立的目標及方向。

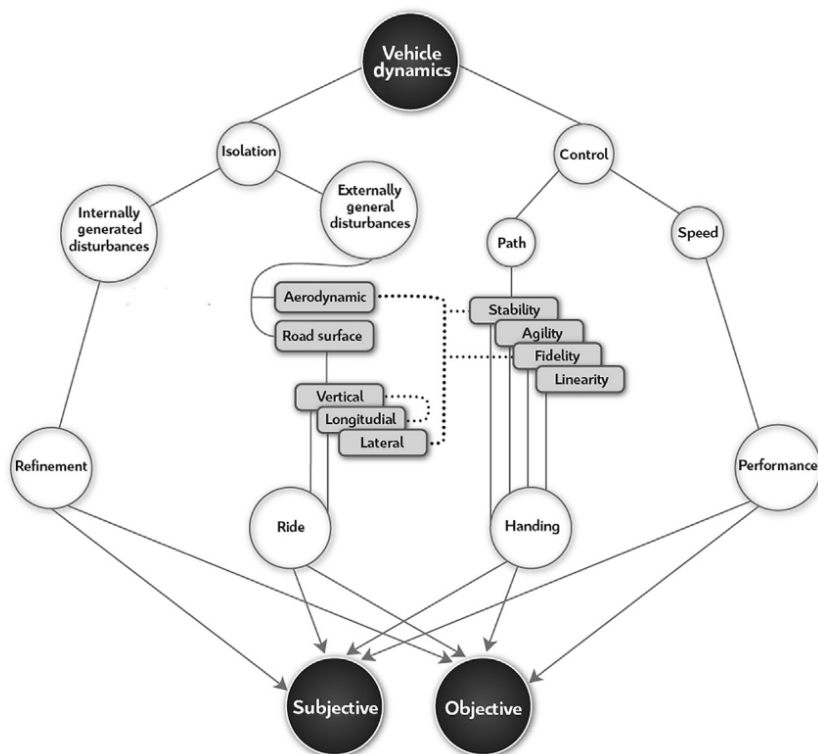


圖 A.3: 車輛動力學簡述 [152]

車輛動力學領域主要對於車輛的行為分為兩個面向進行探討——車輛設計的獨立性 (Isolation) 以及車輛的控制性 (Control)。如圖A.3 [152] 所示，可以看見在車輛動力學領域中考量的議題和處理的任務之間複雜的交互影響。獨立性探討的是車輛要如何與環境互動，例如在固定的輸入下能否降低外界的干擾影響車輛的震動等行為；控制性著重於面對駕駛策略，車輛能如何有最佳的表現，同時也能讓駕駛及乘客有最舒適和簡易的乘車經驗。而連接這兩者的橋樑，如圖A.3灰色著色處，即為車輛動力學模型，觀察的是以駕駛命令及環境參數為輸入時，系統輸出的物理量與時間的關係。透過具有一定可信度的車輛動力學模型，工程師即可針對系統所輸出的物理量，進行乘客舒適度 (NVH) 的最佳化 [153]、輸出效率的最佳化 [154]、駕駛策略 [155] 等研發工程。本研究所探討的模型驗證，則會著重探討這個領域。

A.1.1 車輛動力學模型

最早的車輛動力學模型為單軌式的腳踏車模型 (Bicycle Model or Single Track Model)，最早可追溯至 1940 年代，且至今仍在研究中被使用 [3]。1957 年，Segel 首先提出第一個應用於時域的模型，可完整計算整車運動與時間的關係 [156]；1975 年，McRuer 和 Klein 則深入探討車輛動態在頻域的響應 [157]，首次將車輛動力學模型應用於分析頻率，開啓了另一個車輛工程的研究領域。從此之後，車輛動力學模型逐漸形成一門成熟的學問。

一般而言，完整的車輛動力學模型 (Vehicle Dynamic Model) 包含的元素和之間的互動方式可繪製成下圖A.4 [158] 的方塊圖：

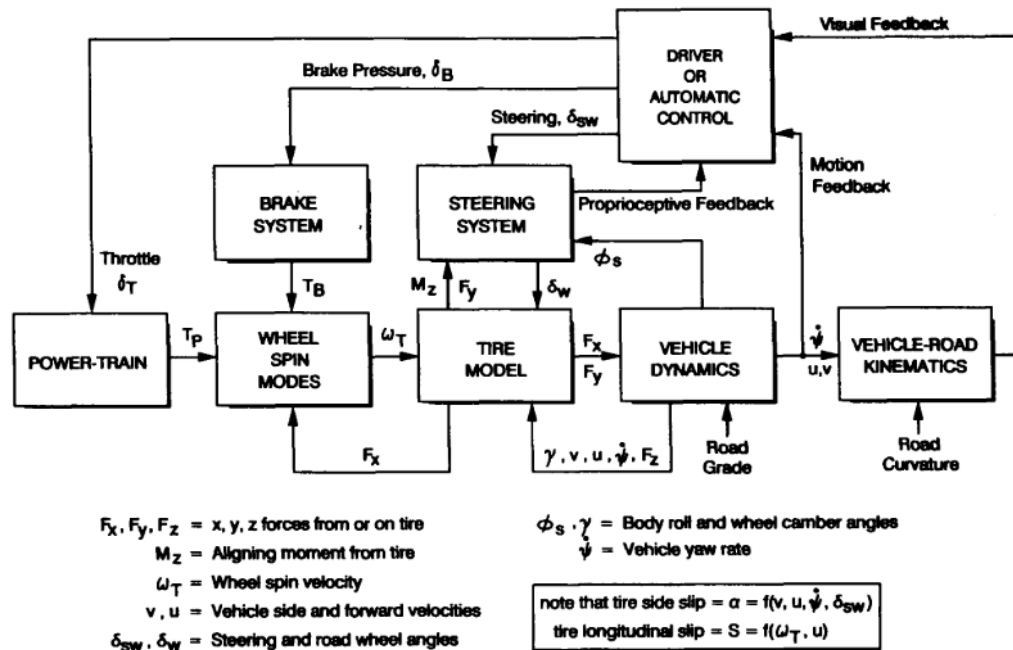


圖 A.4: 車輛動力學模型基本架構 [158]

圖A.4中可見，模型包含的元素有：



- **動力學模型 (Dynamics Model)**：在部分文獻中會因著重的面向不同而被稱為底盤模型 (Chassis Model) 或者操作模型 (Handling Model)，主要為整合次系統所輸出的力和力矩，透過牛頓力學計算簧上質量 (Sprung Mass) 與簧下質量 (Unsprung Mass) 的動態及互動方式。
- **輪胎模型 (Tire Model)**：包括輪胎因正向力、側滑、側傾所產生的側向力及縱向力模型。
- **動力鏈模型 (Power train Model)**：包括引擎或馬達提供的扭矩及傳動機構模型，可表現動力是如何透過馬達傳遞至輪胎。
- **轉向模型 (Steering Model)**：包含轉向機構，若有外力輔助轉向裝置，也須將其控制器及匹配建模。
- **煞車模型 (Braking Model)**：煞車機構的輸入與輸出關係之模型，包含機構的運動及下層控制器。
- **駕駛模型 (Driver Model)**：提供整合性的煞車、油門、及轉向指令。
- **車輛動態模型 (Vehicle/Road Kinematic Model)**：計算車輛相對於地面的位置及車頭朝向。

上述的每個元素，各自都可以組成一個次系統，透過彼此的輸入與輸出關係，整合成車輛最後的動態行為輸出。隨著車輛系統的複雜性越來越高，非線性的車輛動力學模型也難以直接計算，加上車輛具有高度安全性和性能輸出的要求，對於開發產品的結果須有一定程度的掌握，無法透過近似或者多次嘗試就得到合理的結果，因此研發過程中僅能仰賴電腦進行輔助工程進行車輛動力學模型的整合。

A.1.2 車輛動力學模型種類

可應用於建立車輛模型的電腦輔助軟體非常多種，研發者可根據需求使用不同的模型。以下整理常見於建立車輛動力學模型的方法和工具，並介紹其應用上劣及普遍被應用之研究領域。

- **狀態方程模型**

狀態方程模型將車輛次系統之間的輸入與輸出關係以線性系統的方式表示。在模型的使用上，若將探討的物理量皆在時域，且模擬時的時間間隔非常小，即可將次系統與元件的物理模型或動態方程進行線性化展開，且當探討對象是車輛的動態時，更適合做為計算下一時間 (One-step Ahead) 的模型 [104]。狀態方程模型對於模型的階數、動態的時變關係能有清楚的掌握，使用電腦軟體進行矩陣的數值運算也非常快速。因此，狀態方程模型大多應用於自動駕駛策略的開發與控制器設計、應用矩陣關係進行參數校準 [56] 等。然而，此方法並不適合應用於模擬較複雜的車輛模型，因為對於高度非線性化的複雜系統皆會進行線性簡化或降階處

理。對開發者而言，建立狀態方程模型除了需要了解車輛系統及元件的動態方程式，對於系統模型的調整較沒有彈性，因此對車輛模型而言，狀態方程模型大多應用於策略的開端，較少被應用於車輛硬體開發階段的設計與分析。

• Simulink 模型

Simulink 模型多為根據前章節所提的車輛動力學模型建立而成 [159]。對四輪車及二輪的腳踏車模型進行建模的研究非常多，但依照所選定的目的不同，所使用的自由度、模型的複雜程度皆不同。Simulink 的優點為，對於研究或開發者而言，模型的建立可完全依照使用者對模型細緻度需求所建立。由於 Simulink 的環境中，可對於次系統建立模組，在使用上僅需要考慮次系統之間的輸入與輸出關係，並對於系統整合的物理量有適當的整合即可運用，對次系統選配上的修改，也較有修改模型的彈性，如圖A.5所示 [160]。但也因著 Simulink 的自由開發環境，Simulink Model 的準確度則倚賴著模型開發者對車輛次系統及元件的了解程度，以及對於運動方程式的建構。

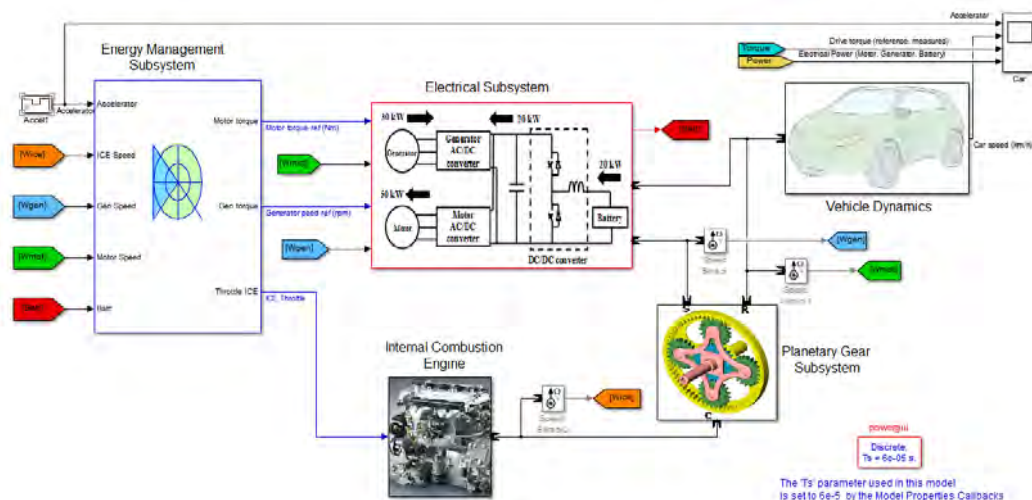


圖 A.5: 使用 Simulink 建構車輛動力學模型 [160]

Simulink 模型由於可以與 Matlab 環境做直接的配合，且運算快速、模型建構快速、可自由地設定車輛參數和元件及次系統選配，因此 Simulink 模型被廣泛使用於參數校準模型、模擬駕駛行為、及動力能耗等研究領域。實際案例像 Nasir 等人使用 Simulink 建立了 9 個自由度的四輪車模型，並透過車道變換及步階轉角與實際模型進行驗證 [16]；Martino 運用 Simulink 建立車輛及輪胎模型，模擬不同輪胎在不同的行車環境中對車輛的性能影響 [161]；Ahmad 等人也透過 Simulink 建立 14-DOF 車輛模型，並透過更換兩種不同的輪胎，探討駕駛行為對車輛動態影響，也透過轉向控制器的參數設定降低過彎打滑機率 [162]。

• ADAMS 模型

ADAMS 全名為 Automatic Dynamic Analysis of Mechanical System，集建模、求解、可視化技術於一體的虛擬樣機軟體，是目前世界上使用最多的機械系統仿

真分析軟體。ADAMS 可以直接透過以組合元件 CAD 來建構複雜的機械系統，並在虛擬實境中模仿其運動過程，在不須對動態系統進行耗時的建模和原型機測試即可快速分析多種參數組合進行最佳化和動態 [163]，其介面如圖 A.6 所示 [164]。與其他模型不同在於，ADAMS 的求解器皆是透過剛體動力學進行數值求解，因此對於系統之間力的傳導和特性可以被完整分析。在車輛工程中，ADAMS 最常被應用於分析駕駛性能與穩定性 [164] 及開發懸吊系統 [165]。

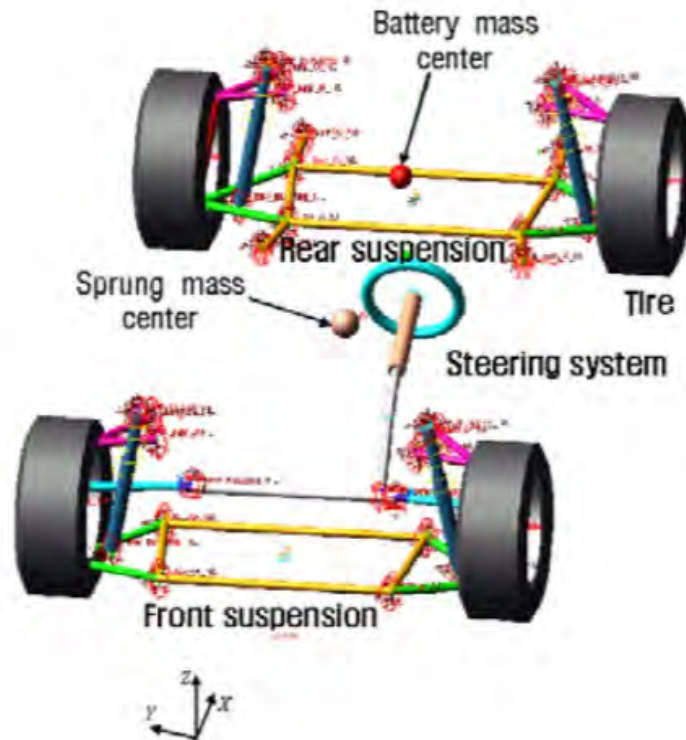


圖 A.6: ADAMS 模型示意圖 [164]

經過文獻搜尋及嘗試，本研究認為狀態方程雖然在應用上比較接近研究目的，且有許多相關的方法可被應用，但在考量模型的複雜度、非線性程度、以及模型的建構難易度，並不考慮使用；而 ADAMS 雖然在模型建構上非常容易，且對系統的物理及數學知識並不需具備得非常完整，但對於系統在參數上的設定上缺乏彈性，因此在無法簡化或以巨觀角度建置系統模型時，不確定的參數數量反而過多，使分析更無法準確。因此，經由比較後，本研究決定使用 Simulink 建立車輛動力學模型。

A.2 轉向次系統

轉向次系統是決定車輛運動最重要的次系統，而模擬模型能否與真實系統進行匹配的一大關鍵也在於轉向模型能否精確的表達系統的轉向機構的幾何狀態。本節將介紹轉向的指令輸入，至連桿進行傳動後轉動前輪，並透過幾何關係得到等效的轉向角。同時，

由於本車並不包含懸吊系統，因此傾斜角 (Pitch Angle) 和滾轉角 (Roll Angle) 都可以直接從轉向機構中計算而得。整個轉向次系統的 Simulink 架構如圖 A.7 所示，包函了轉向馬達的角度輸入 PID 控制器以及轉向機構，而轉向傳動機構又可分為轉向連桿模型與等效轉角計算兩個模組，如圖 A.8 所示。

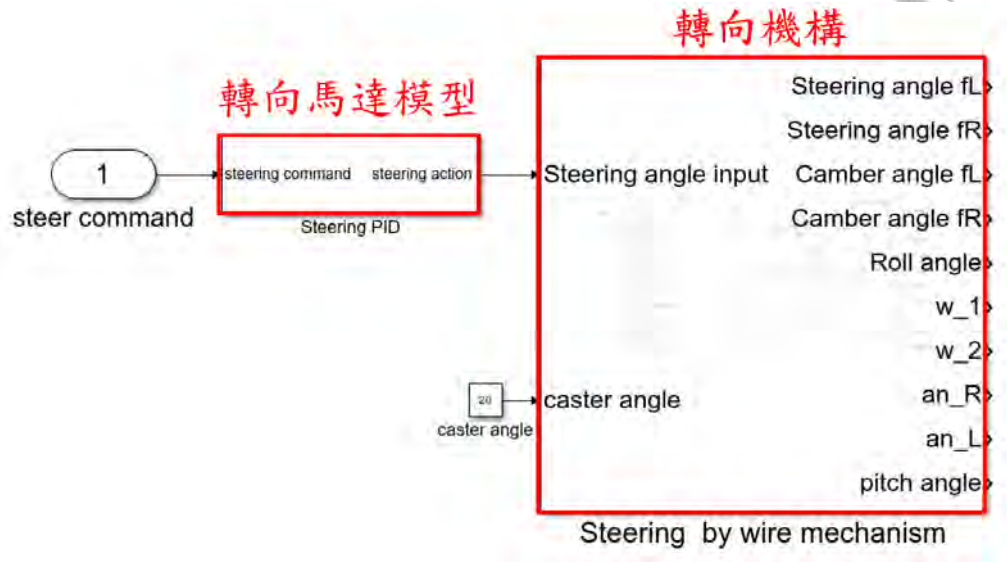


圖 A.7: 轉向次系統模組 Simulink 架構

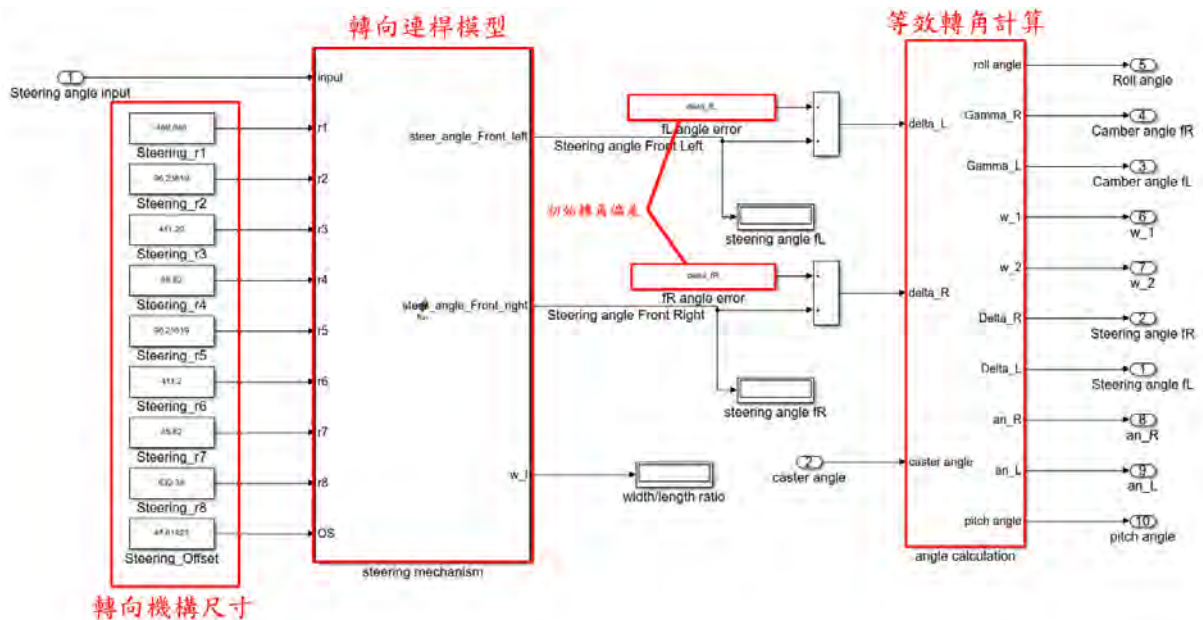


圖 A.8: 轉向機構 Simulink 架構



A.2.1 轉向馬達

在車輛模型中，線控轉向模型所需要表達的是馬達的指令如何被傳遞至轉向機構當中。在真實車輛中，所使用的轉向馬達輸出扭矩應可以順利帶動機構的運作，因此在這個模型中僅考慮馬達透過聯軸器，再帶動轉向機構時機構的作動與指令下達時間的延誤時間。由於目前尚無法對馬達參數與聯軸器進行完整的系統識別與模型建立，因此僅建立 PI 控制器來模擬作動的延遲和避免過衝 (Overshoot)。考量到轉向機構的本身的轉角限制，另外增加一柵欄將輸入訊號限定在 $-50^\circ \sim 50^\circ$ 之間。轉向馬達模型建置於圖 A.7 的 Steering PID 模組中，架構如下：

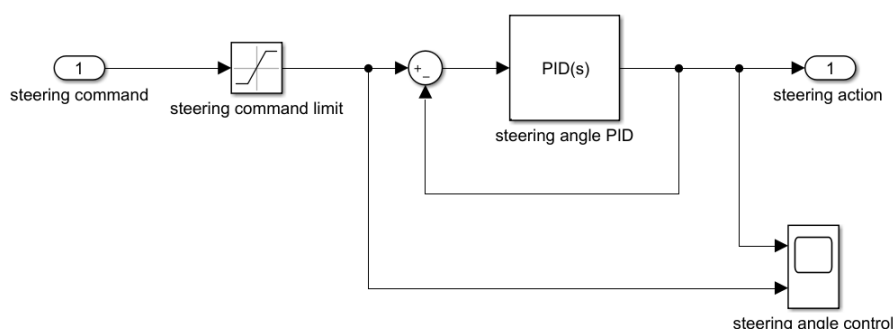
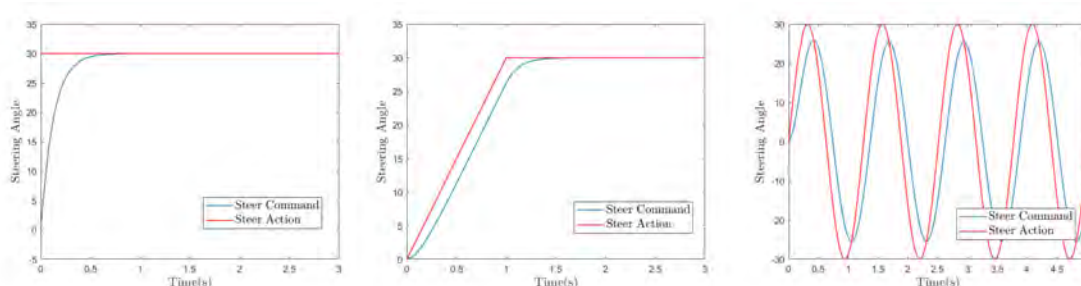


圖 A.9: 轉向馬達 PID 等效模型

設定控制器中， $K_p = 0.01$, $K_I = 8$ 時，控制器在不同輸入訊號下的響應如下：



(a) 轉向馬達之步階響應

(b) 轉向馬達之斜坡響應

(c) 轉向馬達之正弦輸入響應

圖 A.10: 轉向馬達於不同輸入訊號下之響應

從馬達的響應可看出，步階響應有約 0.3 秒的暫態時間，且在斜坡響應和正弦輸入響應中也有約 0.2 秒的延遲，較符合真實系統中轉向系統的運動狀態。由於真實系統中的聯軸器為二階系統，在缺乏可靠的鑑別下選擇忽略阻尼效應，同時也忽略轉向連桿的在做動時的慣性，因此在轉向模型的響應中僅單純的考慮角度的關係，在模擬中並不會出現震盪。



A.2.2 轉向連桿

轉向連桿為一個六桿七接頭機構，具有一個自由度。如圖A.11所示，轉向馬達控制於 θ_{input} 處輸入轉向角度，由 δ_{fL}^{temp} 及 δ_{fR}^{temp} 輸出轉向角於左輪及右輪。由於轉向機構所構成的平面與水平面具有 20 度的後傾角 (Caster Angle)，因此 δ_{fL}^{temp} 及 δ_{fR}^{temp} 僅是轉向機構的輸出，而並非車輛真實的轉向角度，在下個小節中會針對後傾效應進行等效轉向角的換算。

轉向連桿機構的模型所呈現的是以馬達帶動的轉向角為輸入，以連桿連接兩前輪前叉的接頭轉向角度為輸出。為了方便分析，可以將六桿七接頭機構拆解為兩個對稱且相依的四桿四接頭機構，如圖A.11所示。其中， θ_2 與 θ_5 的角位移由轉向馬達所控制，兩者角位移量相同但方向相反； θ_4 及 θ_7 的角位移則分別代表 δ_{fL}^{temp} 與 δ_{fR}^{temp} 的轉動角度。

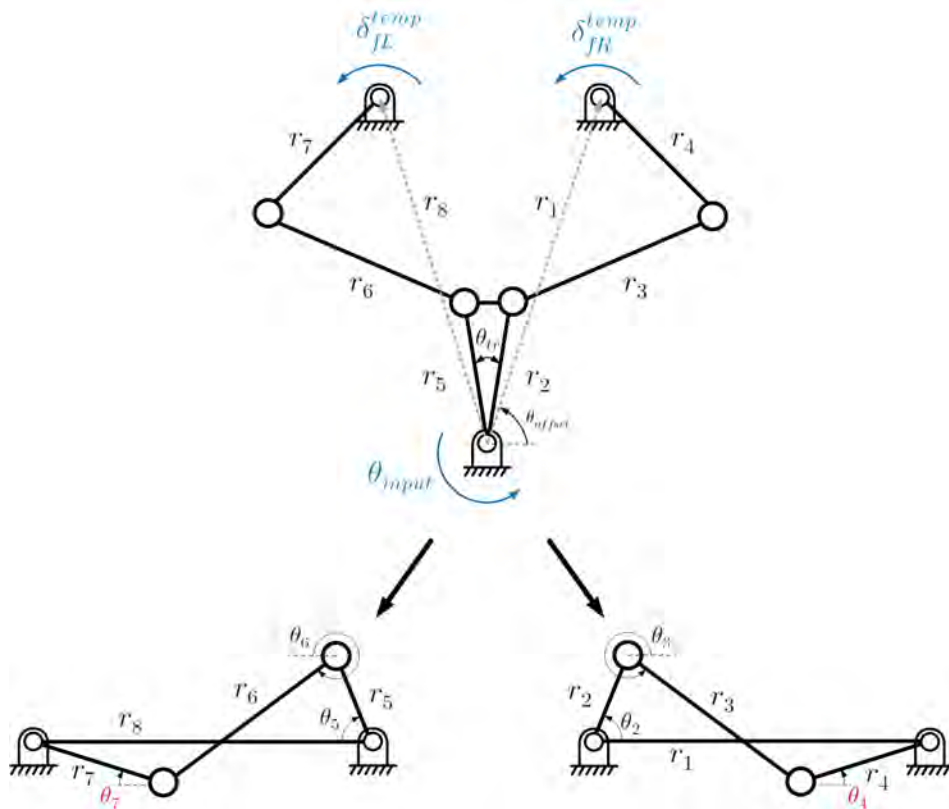


圖 A.11: 轉向連桿機構分解示意圖

各桿件及規格參數列於下表：

表 A.1: 連桿規格表 (長度單位：mm)

r_1	r_2	r_3	r_4	θ_{tr}
469.048	96.236	411.2	85.82	17.93°
r_5	r_6	r_7	r_8	θ_{offset}
96.236	411.2	85.82	469.048	47.618°

將轉向機構拆解為四連桿的分析後，即可透過向量迴路法 (Loop-closure equation) 取得連桿角度資訊 [166]。操作步驟如下：



1. 計算 θ_2 與 θ_5 初始位置

在將連桿分解為四連桿機構時，將設定兩組連桿的地桿 r_1 與 r_8 在水平位置，因此首先須將 θ_2 與 θ_5 分別定義為 r_2 與 r_1 、 r_5 與 r_8 的夾角，可表示為：

$$\theta_{2,0} = \frac{\pi}{2} - \theta_{tr} - \theta_{offset} \quad (A.1)$$

$$\theta_{5,0} = \pi - \theta_{2,0} - \theta_{tr} - \theta_{offset} \quad (A.2)$$

2. 計算 θ_4 與 θ_7 之初始位置

代入 $\theta_{2,0}$ 與 $\theta_{5,0}$ ，透過向量迴路法可將 $\theta_{4,0}$ 與 $\theta_{7,0}$ 表示為：

$$\theta_{4,0} = 2 \tan^{-1} \left[\frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4d_1e_1}}{2d_1} \right] + \theta_{offset} + 2\pi \quad (A.3)$$

$$\theta_{7,0} = - \left(2 \tan^{-1} \left[\frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4d_2e_2}}{2d_2} \right] + \theta_{offset} - \pi \right) \quad (A.4)$$

其中，

$$b_1 = \sin(2\theta_{2,0}) \quad (A.5)$$

$$b_2 = \sin(2\theta_{7,0})$$

$$d_1 = -h_1 + (1 - h_3) \cos(\theta_{2,0}) + h_5 \quad (A.6)$$

$$d_2 = -h_1 + (1 - h_3) \cos(\theta_{7,0}) + h_5$$

$$e_1 = h_1 - (1 + h_3) \cos(\theta_{2,0}) + h_5 \quad (A.7)$$

$$e_2 = h_1 - (1 + h_3) \cos(\theta_{7,0}) + h_5$$

$$h_1 = \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_8}{r_5} \quad (A.8)$$

$$h_3 = \frac{r_1}{r_4} = \frac{r_8}{r_7} \quad (A.9)$$

$$h_5 = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + r_4^2}{2r_2r_4} = \frac{r_8^2 + r_5^2 - r_6^2 + r_7^2}{2r_5r_7} \quad (A.10)$$

3. 計算加入轉向輸入後 θ_4 與 θ_7 的位置

將輸入 θ_{input} 輸入模型中，定義逆時鐘方向為正，可得到 θ_2 與 θ_5 的位置：

$$\theta_2 = \theta_{2,0} + \theta_{input} \quad (A.11)$$



$$\theta_5 = \pi - \theta_2 - \theta_{tr} - \theta_{offset} \quad (A.12)$$

將 θ_2 及 θ_5 代入式A.3至式A.10中，即可得到 θ_4 及 θ_7 。

4. 計算轉向機構輸出角度

轉動機構輸出角度為所帶動的兩前叉的位移角度 δ_{fL}^{temp} 與 δ_{fR}^{temp} ，可由下式取得：

$$\delta_{fR}^{temp} = \theta_7 - \theta_{7,0} \quad (A.13)$$

$$\delta_{fL}^{temp} = \theta_4 - \theta_{4,0} \quad (A.14)$$

轉向模型之輸入與輸出關係可以下圖表示：

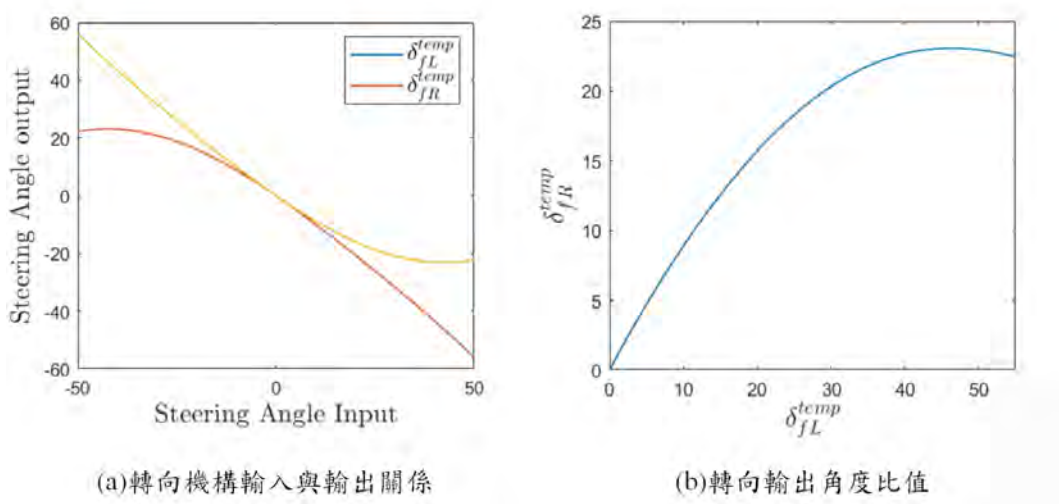


圖 A.12: 轉向機構輸入與輸出之關係

A.2.3 後傾效應

由於車輛的轉向機構本身具有後傾角 ϵ ，使得轉向輪在轉彎時與地面的夾角並非呈現 90° ，也因此車輛的轉向特性需要經過另一層換算。後傾效應在一般的車輛動力學中較少被提到，但在摩托車動力學 (Motorcycle Dynamics) 中特別被強調。本小節針對幾項後傾角所帶來的效應進行探討 [167]：

• 曳距 Trail

曳距為輪胎與地面接觸點至前叉轉軸的距離，可細分為投影於地面的距離上、輪胎與地面接觸點至轉軸軸線延伸與地面接觸的一般曳距 (Trail) a ，以及輪胎與地面接觸點至前叉轉軸的幾何最短距離，稱之為垂直曳距 (Normal Trail) a_n ，如圖A.13 [167] 所示。

曳距雖然為一段尺度不大的物理量，卻成了側向力作用於前叉上的力臂，使得前叉轉軸上的另一個回正力矩來源，如圖A.14 [167] 所示，因此仍然不容忽略。

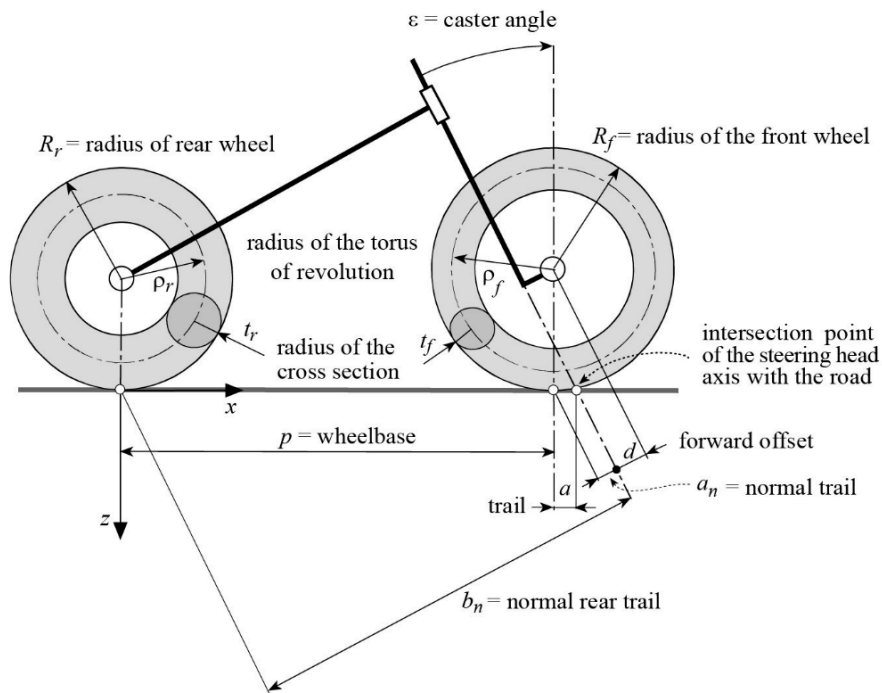


圖 A.13: 曳距示意圖 [167]

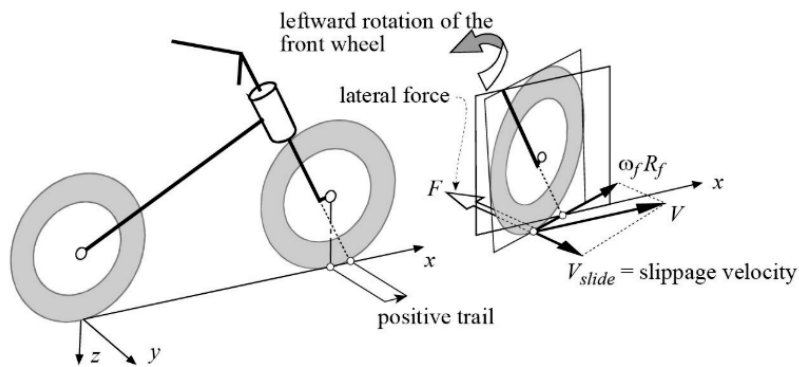
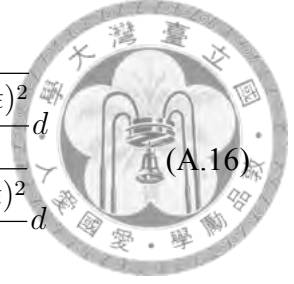


圖 A.14: 曳距作用於車輛示意圖 [167]

一般曳距及垂直曳距分別可下式中得到：

$$a_{n,R} = R_f \frac{\cos \delta_R^{temp} \sin \epsilon}{\sqrt{1 - (\sin \delta_R^{temp} \sin \epsilon)^2}} - d$$

$$a_{n,L} = R_L \frac{\cos \delta_L^{temp} \sin \epsilon}{\sqrt{1 - (\sin \delta_L^{temp} \sin \epsilon)^2}} - d$$
(A.15)



$$\begin{aligned} a_R &= R_f \tan \epsilon \cos \delta_R^{temp} - \frac{\sqrt{1 - (\sin \delta_R^{temp} \sin \epsilon)^2}}{\cos \epsilon} d \\ a_L &= R_f \tan \epsilon \cos \delta_L^{temp} - \frac{\sqrt{1 - (\sin \delta_L^{temp} \sin \epsilon)^2}}{\cos \epsilon} d \end{aligned} \quad (A.16)$$

• 等效轉向角 Kinematic Steering Angle

又作「動態轉向角」。由於轉向機構所在的平面與地面夾有後傾角，因此轉向角的效應需要經由投影取得，如圖A.15 [167] 所示。

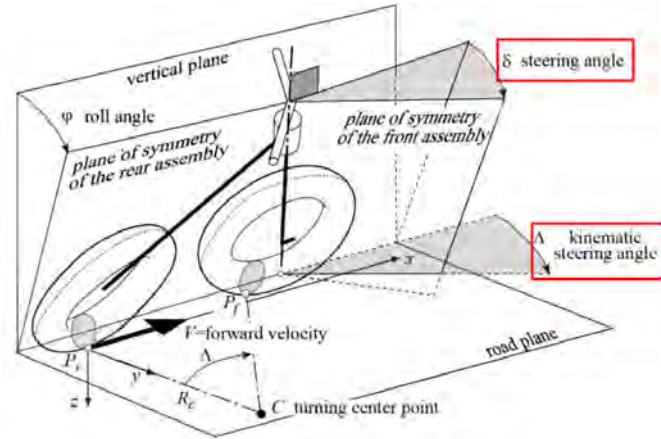


圖 A.15: 等效轉向角示意圖 [167]

等效轉向角可由下式計算得到。其中 ϕ 為車輛之傾斜角。

$$\begin{aligned} \delta_R &= \arctan \left(\frac{\sin \delta_R^{temp} \cos(\epsilon)}{\cos \phi \cos \delta_R^{temp} - \sin \phi \sin \delta_R^{temp} \sin(\epsilon)} \right) \\ \delta_L &= \arctan \left(\frac{\sin \delta_L^{temp} \cos(\epsilon)}{\cos \phi \cos \delta_L^{temp} - \sin \phi \sin \delta_L^{temp} \sin(\epsilon)} \right) \end{aligned} \quad (A.17)$$

A.2.4 重心偏移

在存在後傾角的轉向機構中，當轉向機構轉向時，輪胎與地面的接觸點也會隨之改變，進而改變車輛的重心位置和傾斜角與滾轉角，如圖A.16 [167] 所示。

設轉向機構做動時輪胎與地面的接觸點 P_f 相對於未轉向時的原接觸點在 x 方向的位移為 x_{Pf} ，在 y 方向上的位移為 y_{Pf} ，將滾轉角 μ 及傾斜角 ϕ 代入，則 x_{Pf} 與 y_{Pf} 可以下式求得：

$$\begin{aligned} x_{Pf,R} &= (c_{1,R} + c_{2,R}) \sin \mu + (c_{4,R} + c_{5,R}) \cos \mu \\ x_{Pf,L} &= (c_{1,L} + c_{2,L}) \sin \mu + (c_{4,L} + c_{5,L}) \cos \mu \end{aligned} \quad (A.18)$$

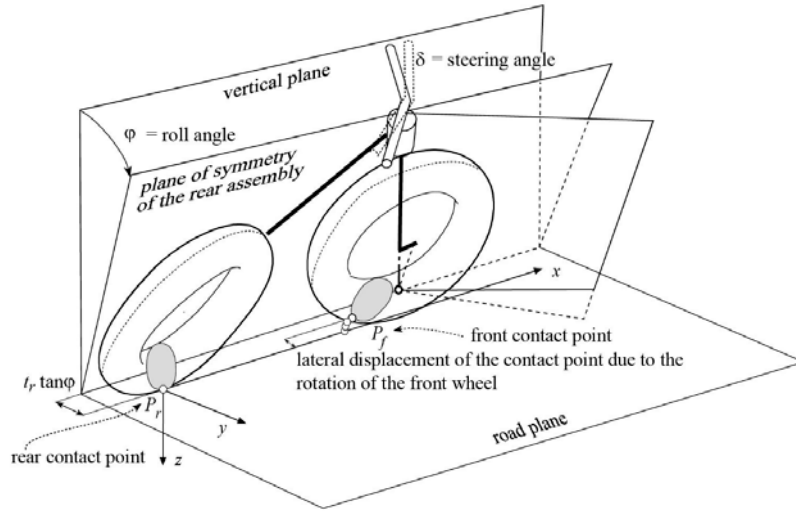


圖 A.16: 輪胎與地面接觸點於轉向時移動示意圖 [167]

$$\begin{aligned} y_{Pf,R} &= -(c_{1,R} + c_{2,R}) \cos \mu + (c_{4,R} + c_{5,R}) \sin \mu \sin \phi + c_{3,R} \cos \phi - (t_f - t_r) \\ y_{Pf,L} &= -(c_{1,L} + c_{2,L}) \cos \mu + (c_{4,L} + c_{5,L}) \sin \mu \sin \phi + c_{3,L} \cos \phi - (t_f - t_r) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

其中

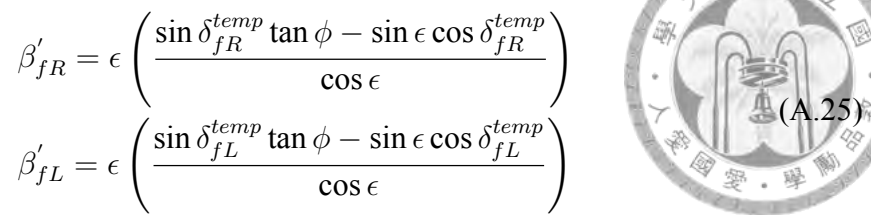
$$\begin{aligned} c_{1,R} &= d \sin \epsilon (1 - \cos \delta_{fL}^{temp}) + t_r - t_f \\ c_{1,L} &= d \sin \epsilon (1 - \cos \delta_{fR}^{temp}) + t_r - t_f \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned} c_{2,R} &= \rho_f \left[\cos \epsilon \cos(\beta'_{fR} - \epsilon) - \cos \delta_{fR}^{temp} \sin \epsilon \sin(\beta'_{fR} - \epsilon) - 1 \right] \\ c_{2,L} &= \rho_f \left[\cos \epsilon \cos(\beta'_{fL} - \epsilon) - \cos \delta_{fL}^{temp} \sin \epsilon \sin(\beta'_{fL} - \epsilon) - 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} c_{3,R} &= d \sin \delta_{fR}^{temp} + \rho_f \sin \delta_{fR}^{temp} \sin(\beta'_{fR} - \epsilon) \\ c_{3,L} &= d \sin \delta_{fL}^{temp} + \rho_f \sin \delta_{fL}^{temp} \sin(\beta'_{fL} - \epsilon) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} c_{4,R} &= p - d \cos \epsilon (1 - \cos \delta_{fR}^{temp}) \\ c_{4,L} &= p - d \cos \epsilon (1 - \cos \delta_{fL}^{temp}) \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} c_{5,R} &= \rho_f \left[\sin \epsilon \cos(\beta'_{fR} - \epsilon) + \cos \delta_{fR}^{temp} \cos \epsilon \sin(\beta'_{fR} - \epsilon) \right] \\ c_{5,L} &= \rho_f \left[\sin \epsilon \cos(\beta'_{fL} - \epsilon) + \cos \delta_{fL}^{temp} \cos \epsilon \sin(\beta'_{fL} - \epsilon) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$


$$\begin{aligned} w_1^n &= w_1 \pm y_{Pf,L} \\ w_2^n &= w_2 \mp y_{Pf,R} \end{aligned} \tag{A.26}$$
[illegible]
$$\begin{aligned}\Delta h_R &= \left(1 - \sqrt{1 - \sin^2 \delta_R^{temp} \sin^2 \epsilon}\right) R_f \\ \Delta h_L &= \left(1 - \sqrt{1 - \sin^2 \delta_L^{temp} \sin^2 \epsilon}\right) R_f\end{aligned}\tag{A.27}$$
$$\Delta h_{COM} = \frac{l_2}{p} \left(\Delta h_L + (\Delta h_R - \Delta h_L) \frac{w_2^n}{w_1^n + w_2^n} \right) \quad (\text{A.28})$$

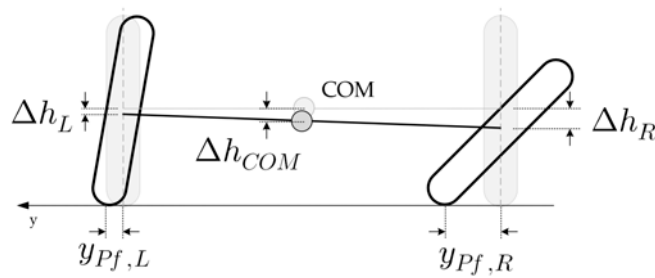


圖 A.18: 轉向時重心下降示意圖

透過後傾角與輪子的幾何關係，並隨著轉向角更新 w_1^n 、 w_2^n 、與 Δh_{COM} ，以及下個小節所介紹的傾斜角 ϕ 與滾轉角 θ ，即可得到車輛的重心位置。

A.2.5 傾斜角與滾轉角

由於本車輛系統中並沒有裝載懸吊系統，因此車輛的傾斜角 θ 與滾轉角 ϕ 在三輪都未離地時，僅由轉向時的重心偏移所造成。因此，傾斜角與滾轉角的計算都仰賴著以上所提及的幾何關係。

• 傾斜角

在此案例中，重心的降低是造成傾斜角的原因，如圖A.19所示，可以透過前軸的重心降低距離及 x 方向的重心位置求出傾斜角：

$$\theta = \arctan\left(\frac{\Delta h_{COM}}{l_2}\right) \quad (A.29)$$

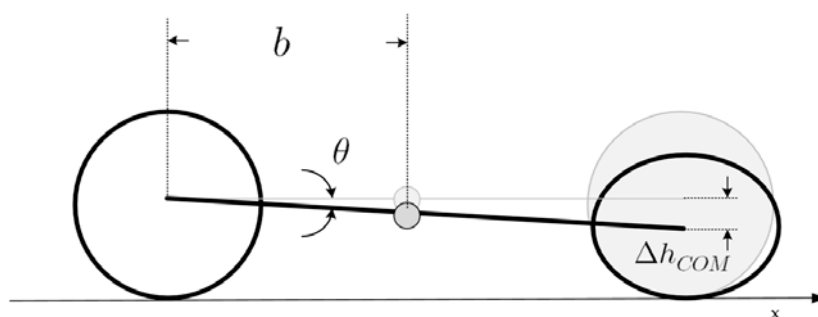


圖 A.19: 傾斜角之幾何關係示意圖

• 滾轉角

滾轉角的計算在本案例中較為複雜。同樣的，如圖A.18所示，透過前軸在轉彎時的重心下降，可以得到滾轉角 ϕ 應為：

$$\phi = \arccos\left(\frac{h - \Delta h_{COM}}{h}\right) \quad (A.30)$$

然而，在計算 Δh_{COM} 時所需代入的 y_{Pf} 、 $c_1 \sim c_5$ 等皆為 ϕ 的函數，因此在計算上需要透過遞迴運算，當透過計算所得到的 ϕ 與所假設的 ϕ_0 相符時，即表示 θ 為模型運算之結果。運算流程如下：

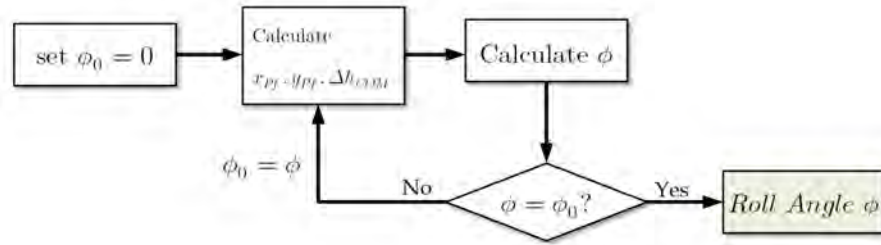


圖 A.20: 計算滾轉角流程圖

1. 將滾轉角初始值 ϕ_0 設為 0
2. 將 ϕ_0 代入式A.19至式A.30中，由轉向幾何關係計算出應有的滾轉角 ϕ
3. 判斷計算所得的 ϕ 是否與假設之初始值 ϕ_0 相等。所謂相等定義為誤差於 1% 內即可認定為相等
4. 若判定兩角度不相等，則令 $\phi_0 = \phi$ ，重複步驟 2~3，直到兩角度可被認定為相等
5. 若判定兩角度相等，則輸出 ϕ 作為車輛最終的滾轉角

A.2.6 外傾角

外傾角 (Camber Angle) 為輪胎平面與車身之間的角度，以 β 表示。在本案例中將外傾角沿 x 軸正向以順時針旋轉的定義為負向，逆時針旋轉為正向，使其可與兩輪的轉角同向，如圖A.21 [167] 所示為正向外傾角之示意圖，其計算可由下式所得：

$$\begin{aligned}\beta_{fR} &= \arcsin(\cos \delta_{fR}^{temp} \sin \phi + \cos \phi \sin \delta_{fR}^{temp} \sin \epsilon) \\ \beta_{fL} &= \arcsin(\cos \delta_{fL}^{temp} \sin \phi + \cos \phi \sin \delta_{fL}^{temp} \sin \epsilon)\end{aligned}\quad (A.31)$$

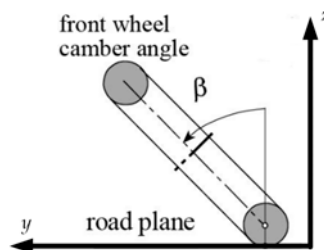


圖 A.21: 外傾角示意圖 [167]



A.3 推進次系統

真實車輛的推進次系統由線控驅動次系統 (Drive-By-Wire, DBW) 及線控煞車次系統 (Brake-By-Wire, BBW) 所組成。在對應的模型中，推進次系統模組則包含驅動及制動兩種行為，但煞車機構模型由於缺乏完整的系統鑑別因此無法被完整的建立，僅僅透過 PID 控制器輸出一制動力替代煞車機構的運作。

圖A.22為推進次系統的系統架構，包含了輪速轉換模組、PID 控制器模組、馬達模組、以及推進力整合模組。其中，為方便起見推進力整合模組被建置於阻力模型中。本節將針對上述模組進行模型建構之說明。

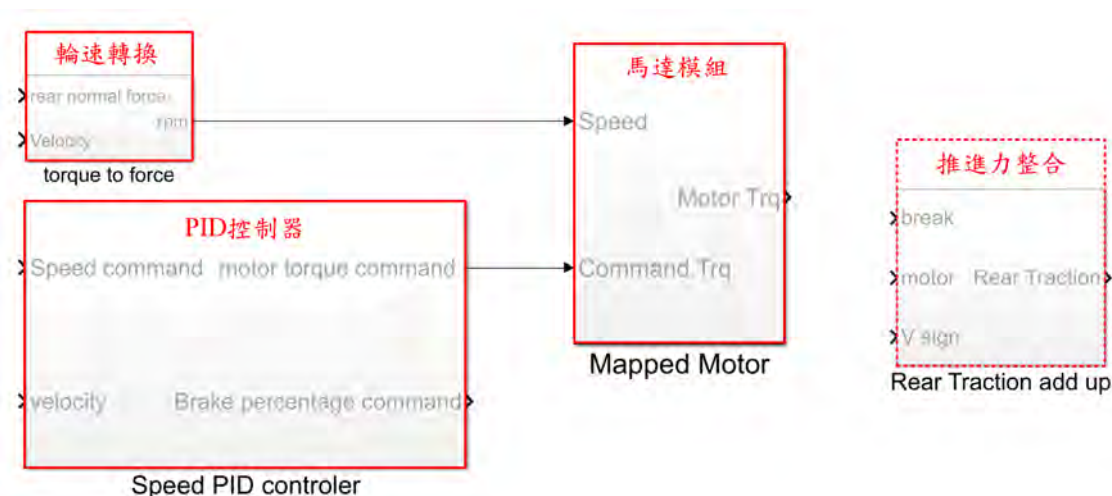


圖 A.22: 推進次系統 Simulink 架構

A.3.1 PID 控制器

PID 控制器對整車的於 x 方向的速度 v_x 進行速度控制，其中 PID 控制器的輸出若為正，則輸出為正的力矩訊號至馬達中；反之若輸出為負，則輸出為負的力矩訊號替代煞車機構輸出。PID 控制器架構如圖所示：

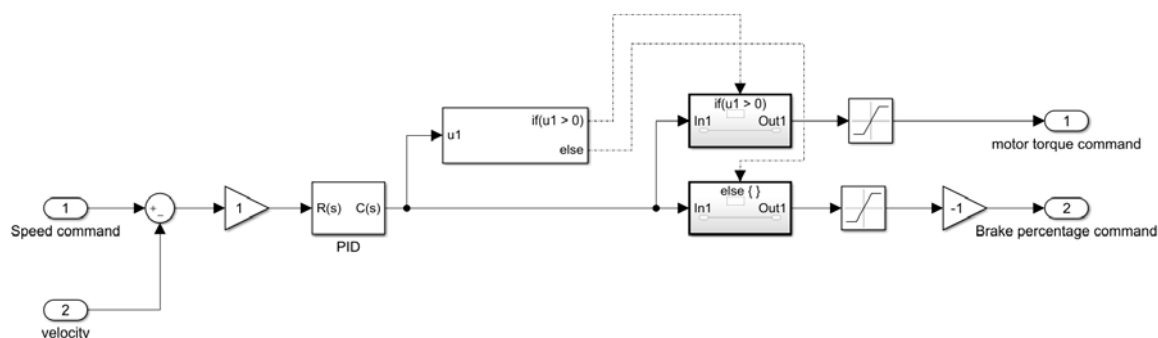


圖 A.23: 推進次系統 PID 控制器 Simulink 架構

在本研究對模型的操作中，由於缺乏對馬達驅動器的完整鑑別，因此為了使馬達的輸出可以較準確被模型表現，在實驗中所皆給定車輛系統固定速度，讓車輛可以等速前進。因此，PID 控制器最需要表達的即是車輛加速的暫態。在 Simulink 模擬中，則建立 PI 控制器，其中 $K_p = 200$ 及 $K_I = 5$ 。其中為了使控制器的輸出為扭力，因此設定 K_p 同時有放大 Gain 訊號至扭矩輸出之作用。以控制車輛於 $v = 1(m/s)$ 下等速進行為例，速度命令與車速的關係可顯示於圖。由圖中可看出，車輛的加速度大約控制在 $a = 1(m/s^2)$ 。

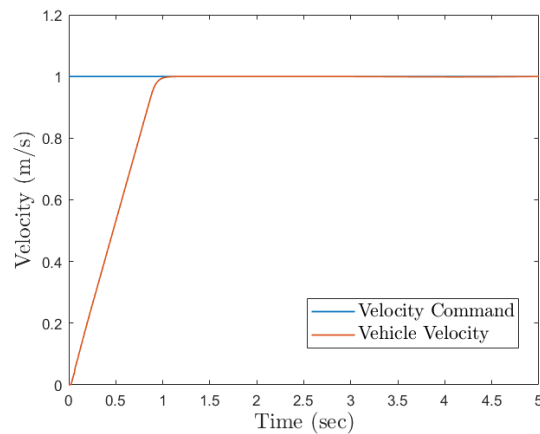


圖 A.24: 推進系統 PID 控制器之輸入與系統響應關係

A.3.2 輪速轉換

根據運動學及輪胎等效半徑的換算，可得到輪速轉換之 Simulink 架構如下圖A.25所示。

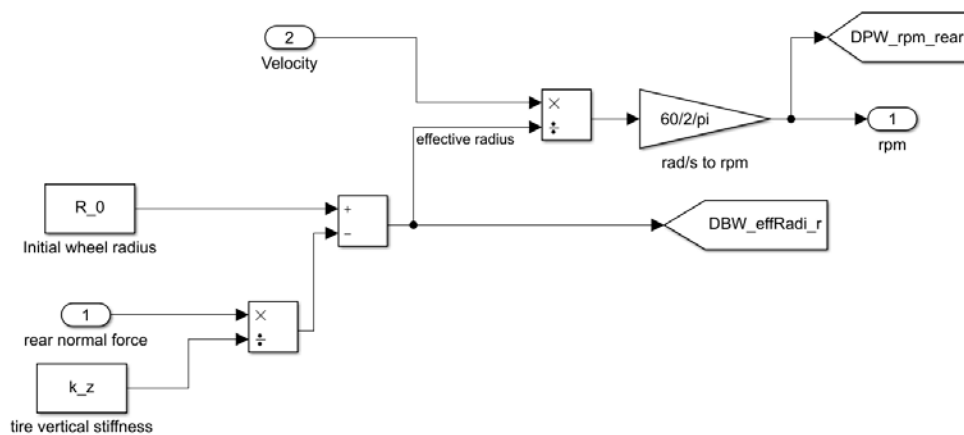


圖 A.25: 速度轉換為輪速之 Simulink 架構

轉速轉換模組的功能為將回授所得的車輛速度 (m/s) 轉換為動力輪的角速度 (rpm)，以便馬達模組使用。根據物體滾動的運動學，可得到輪速為：



$$\omega_r = \frac{V}{r_r^{eff}} \quad (A.32)$$

其中， r_r^{eff} 為後輪的等效半徑。假設後輪輪胎在未受力時半徑為 r_r^0 ，於半徑在受後輪正向力 F_{zr} 上的行為可近似於線性彈簧，且彈力係數為 k_z ，則後輪的等效半徑 [136] 可表示為：

$$r_r^{eff} = r_r^0 - F_{zr} k_z \quad (A.33)$$

A.3.3 馬達模型

PID 控制器所輸出的扭矩命令，首先進入到馬達模組後，再輸入至系統中。馬達模組的功能即為限制動力輪於當下的轉速所能輸出的最大扭矩。因此在 Simulink 中建立馬達模型，所需要的資訊為馬達的扭矩與轉速的關係。馬達的扭矩與輸入關係如下：

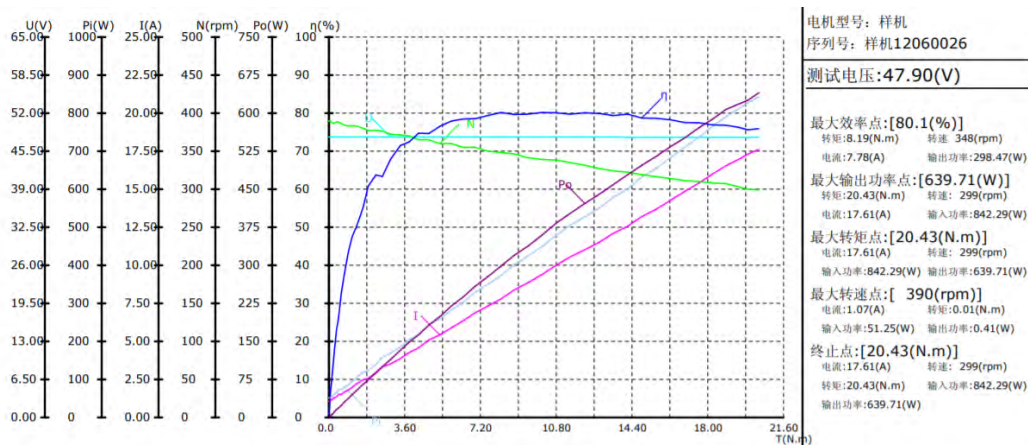


圖 A.26: 馬達動力曲線測試結果

在 Simulink 架構中，要計算馬達在該轉速下所輸出的輸出扭矩，除了限定輸出扭矩的最大值 τ_{max} 外，也假設在扭力輸出指令小於該輪速所能輸出之最大扭矩時，則該扭力可被直接輸入至系統中。馬達模組的 Simulink 架構如下圖所示。

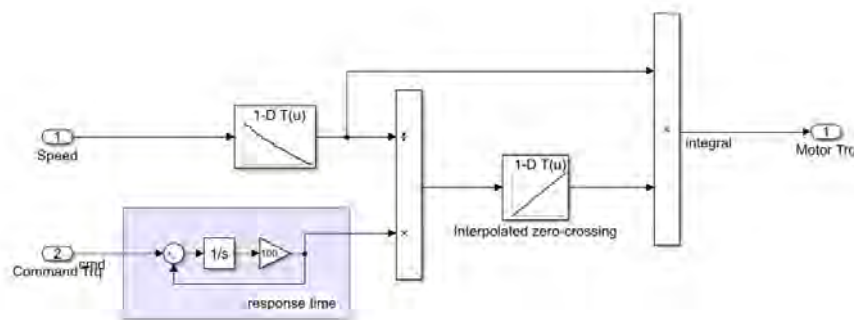


圖 A.27: 馬達模組 Simulink 架構



A.3.4 推進力整合

馬達與煞車作用於同一輪上時會出現多種情境，若再加入倒檔的情境，則需要將馬達與煞車的合力矩輸出進行探討及分類。在此模型中，將推進力整合模組建置於阻力模型當中以便操作。

在此模型中，令使車輛能具有正向加速度 a_x 的馬達扭矩 τ_{motor} 符號為正，且令使車輛具有負向加速度的煞車扭矩 τ_{brake} 符號為負。其中，煞車扭矩的方向與車輛行徑方向恆為相反，且作用時僅會使速度的量值 $|v_x|$ 減少而不會增加。推進力整合的情境分類共分為三階段：馬達扭矩 τ_{motor} 是否大於 0、馬達扭矩的量值是否大於煞車扭矩的量值、以及車輛前進速度 v_x 的方向性。三階層的判斷架構及情境如下：

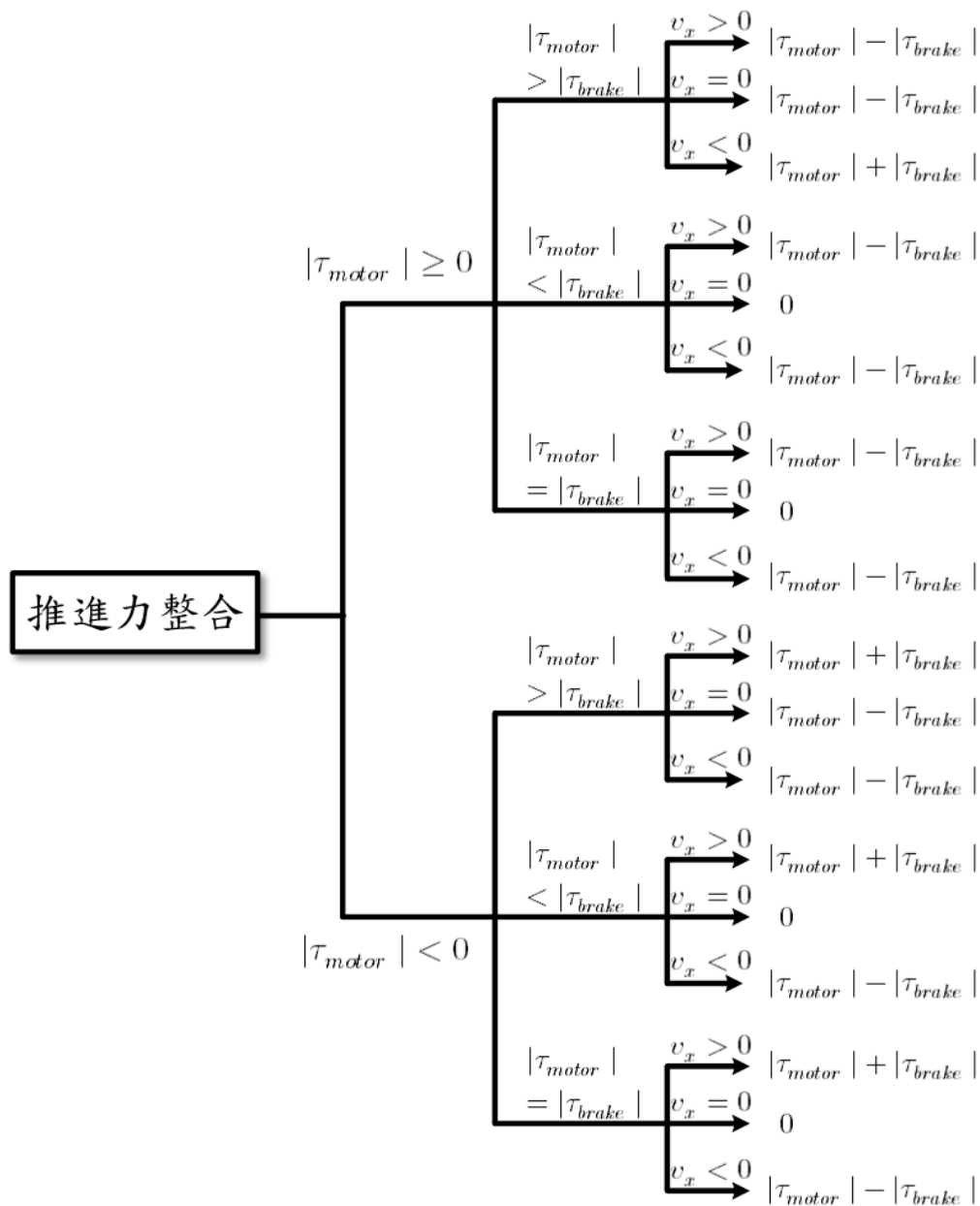


圖 A.28: 推進力整合之情境



取其中一組分支為例，各階段的 Simulink 架構如下：

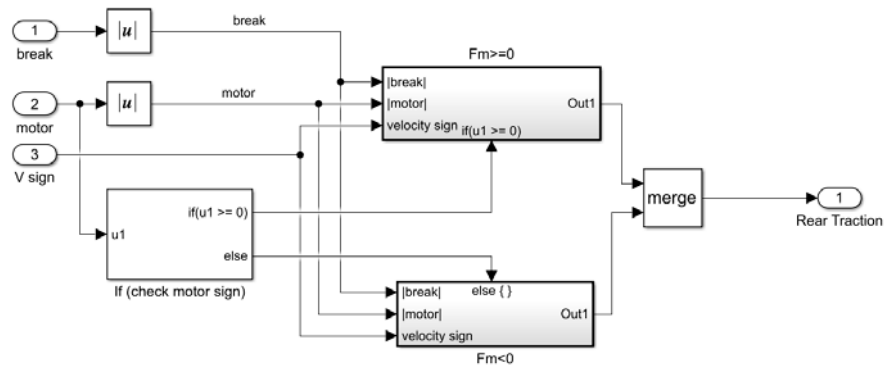


圖 A.29: 第一階：馬達扭矩 τ_{motor} 是否大於 0

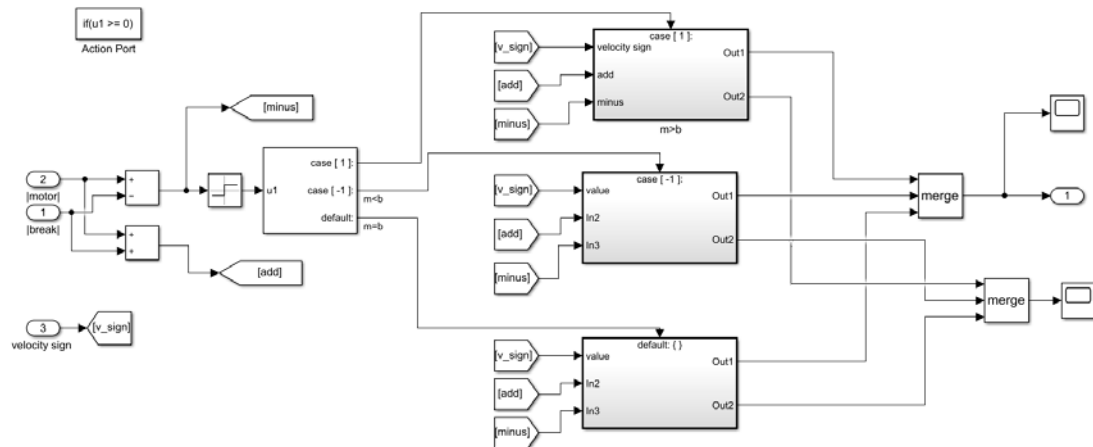


圖 A.30: 第二階：馬達扭矩量值是否大於煞車扭矩量值

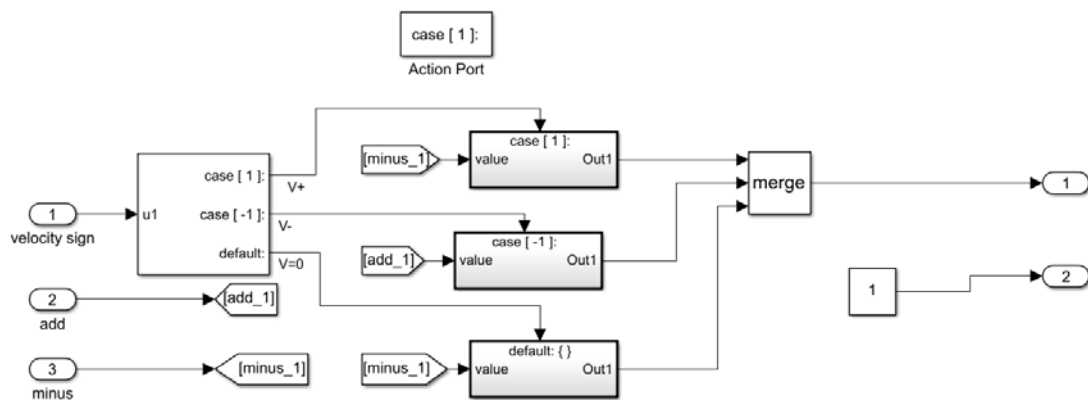


圖 A.31: 第三階：判斷車輛前進速度 v_x



A.4 阻力模型

在此案例中將車輛的阻力成因歸因於輪胎的滾動阻力、空氣阻力、及坡度阻力，分別將建置於 Simulink 模型的阻力模型架構中，如圖所示。其中，在阻力模型中也加入了輪胎的滑動判斷，判斷輪胎的牽引力與最大靜摩擦力的關係。本節將介紹各種阻力模組建置的方法及物理模型。

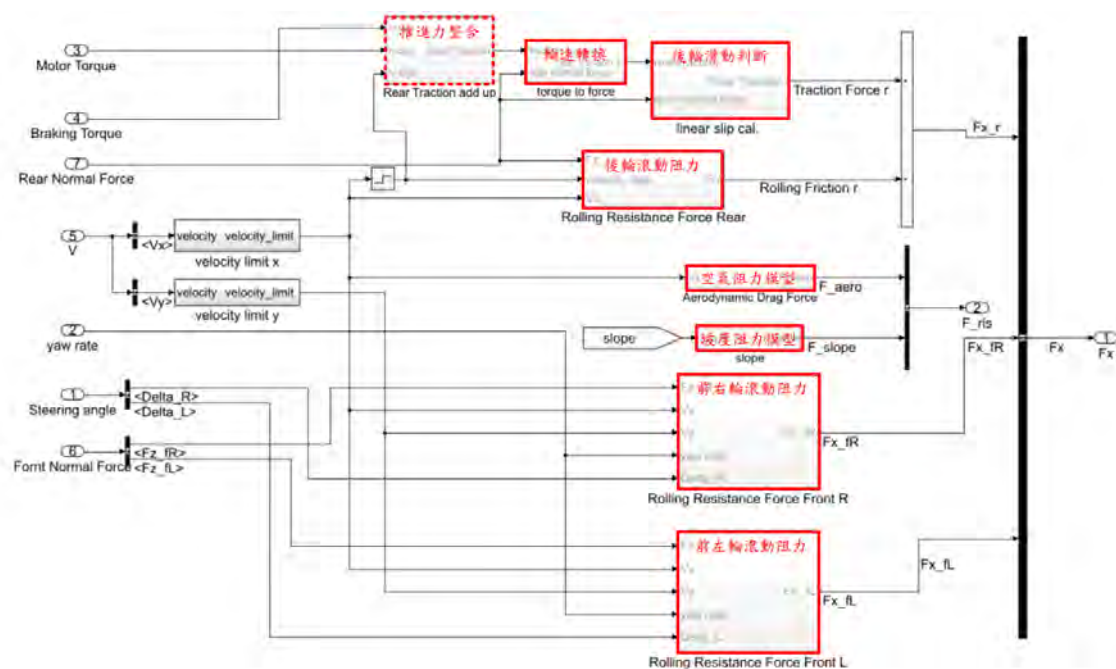


圖 A.32: 阻力模型 Simulink 架構

A.4.1 滑動判斷

滑動判斷是根據輪胎與地面接觸點所受的力與最大靜摩擦力進行比較，若小於最大靜摩擦力則表示未打滑，可輸出該力原始大小；若大於最大靜摩擦力，則輸出最大靜摩擦力值，方向與原始方向相同。滑動的判斷在此案例中僅針對作為動力輪的後輪，並假設被動的前輪並不會有滑動現象。

最大靜摩擦力公式如下 [136]：

$$F_s = \mu_{dp} F_{zr} \quad (\text{A.34})$$

其中， μ_{dp} 為最大靜摩擦係數，與輪胎和接觸地面性質有關 [136]。在此案例中，則假設在車輛一般操作乾路面下幾乎不產生滑動，設定 $\mu_{dp} = 0.8$ 。在圖A.32中，經由推進力整合模組所輸出的輸出扭矩首先須再經由換算將其轉為輪胎與地面接觸點之受力。滑動判斷模組即可被建構如下：

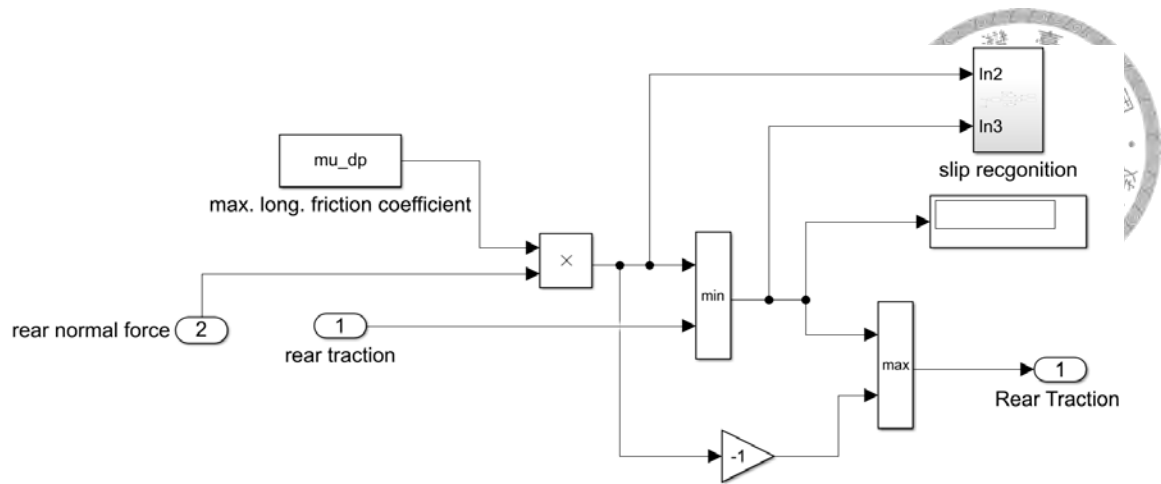


圖 A.33: 滑動判斷模組示意圖

A.4.2 滾動阻力模型

滾動阻力模型 (Rolling Resistance Model) 為輪胎在非剛體滾動時，因著形變而產生的阻力。圖A.34 [167] 將輪胎以彈簧結構模型表示，當輪胎同時受到正向力及轉動扭矩時，輪胎下緣會因為在垂直方向受力和形變量不同，使得較接近輪胎內徑側開始產生位移時，與地面接觸側仍保持靜止。此時輪胎在運動上則會將部分的扭矩輸入能量轉換為用於帶動形變的能量，這種能耗現象即被認定為滾動阻力的成因。

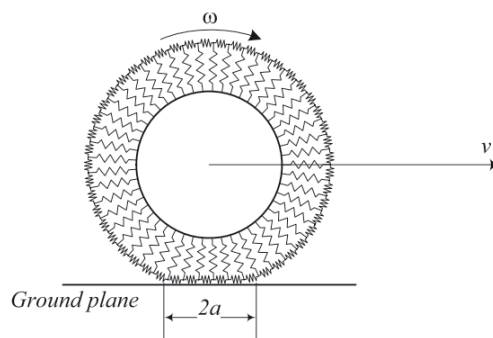


圖 A.34: 滾動阻力原理示意圖 [167]

滾動阻力的大小與輪胎的形變和滾動的速度有直接的關係，而形變與正向力有直接關聯，因此透過經驗公式可將滾動阻力模型近似為：

$$F_r = -\mu_r F_z \quad (\text{A.35})$$

其中，滾動阻力係數 μ_r 之數值解可以二階方程式近似為：

$$\mu_r = \mu_{r0} + \mu_{r1} v_x^2 \quad (\text{A.36})$$

其中， μ_{r0} 及 μ_{r1} 為系統中之不確定參數。因此，後輪的滾動阻力模組可建構如下：

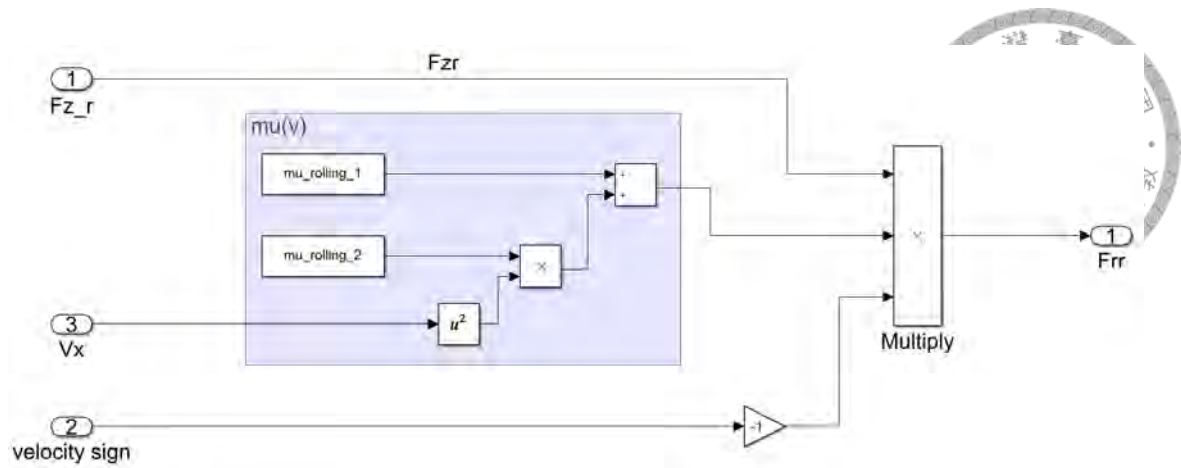


圖 A.35: 後輪滾動阻力模組架構

前輪的阻力模型與後輪有些許不同，由於滾動阻力的作用方向與輪胎共平面，因此仍需要將車輛質心位置的速度透過座標轉換轉為前左輪與前右輪平面上的速度 v_x^{fR} 及 v_y^{fL} 。轉換方式如下：

$$\begin{aligned} v_x^{fR} &= v_x \cos \delta_R + v_y \sin \delta_R + \psi(l_1 \sin \delta_R + w_2 \cos \delta_R) \\ v_y^{fR} &= v_x \cos \delta_L + v_y \sin \delta_L + \psi(l_1 \sin \delta_L - w_1 \cos \delta_L) \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

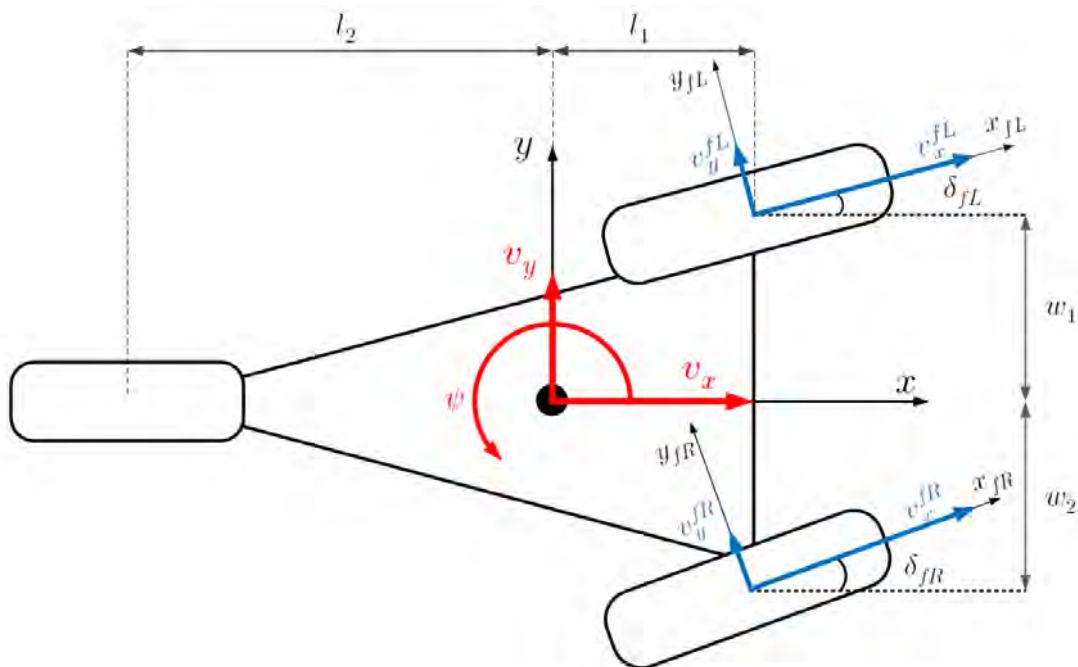


圖 A.36: 質心速度與輪胎速度示意圖

以前右輪的滾動阻力模型為例，Simulink 架構如下：

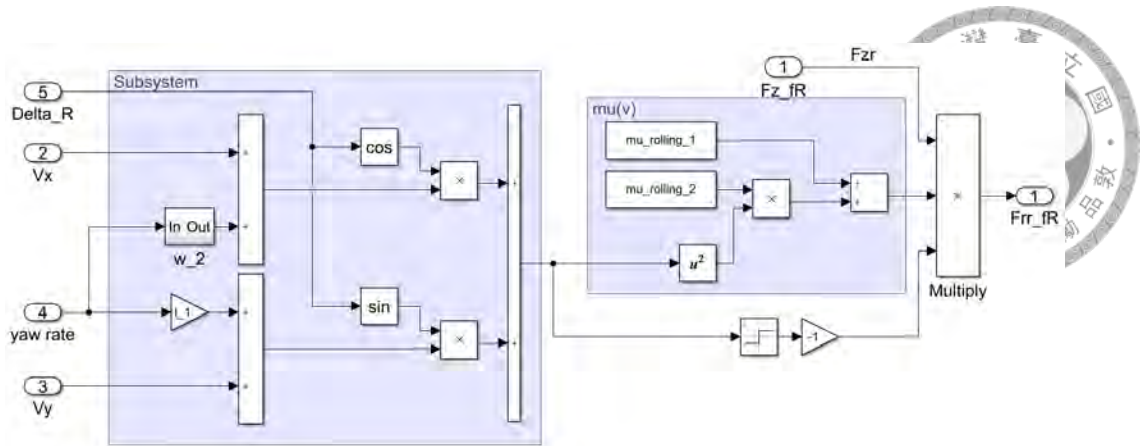


圖 A.37: 前右輪滾動阻力模組架構

A.4.3 空氣阻力模型

空氣阻力模型公式為：

$$F_w = \frac{1}{2} \rho A C_D v_w^2 \quad (\text{A.38})$$

其中空氣密度 $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ ，迎風面積設為 $A = 1 \text{ m}^2$ ，風阻係數 $C_D = 0.25$ ，且由於車輛行駛速度較低，因此假設風速 $v_w = v_x$ 。空氣阻力模組可以建構為：

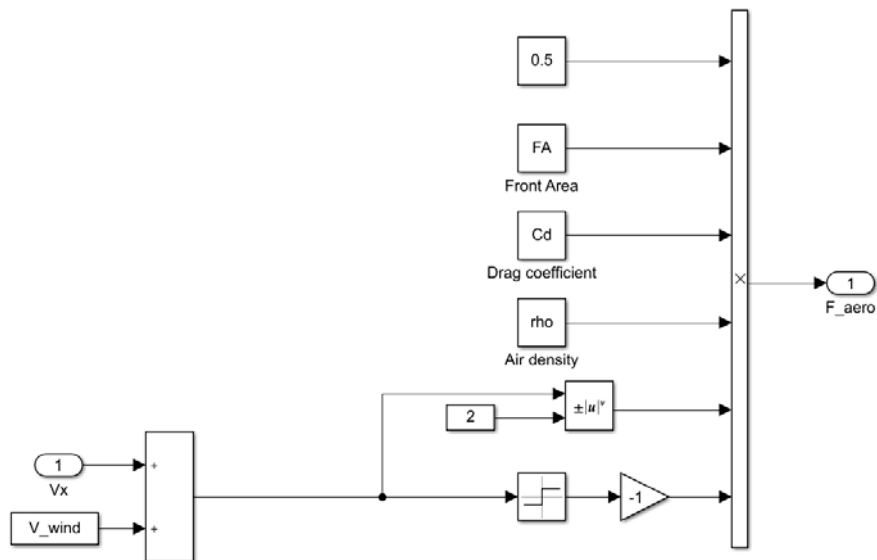


圖 A.38: 空氣阻力模組架構

A.4.4 坡度阻力模型

坡度阻力模型為車輛在坡面上行駛時，重力於平行斜面之分量，可表示如下：



$$F_i = mg \sin \gamma \quad (\text{A.39})$$

其中， γ 為斜坡坡度，在本案例中假設車輛皆在平面上操作，因此設定 $\gamma = 0$ 。由此可建構坡度阻力模組為：

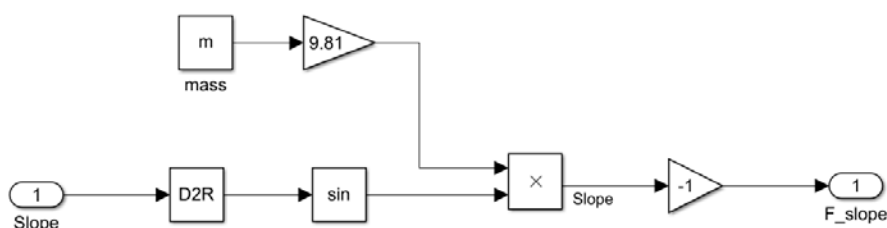


圖 A.39: 坡度阻力模組架構

A.5 操控模型

車輛的操控模型 (Vehicle Handling Model) 是決定車輛如何移動的核心，也是所有的車輛動力學模型皆共同擁有的模型。在前面幾節中，將部份車輛的受力方式和力的計算、角度的換算進行建模，而本節所探討的即是這些物理量如何影響車輛的行進。操控模型的 Simulink 架構可分為局部的動態計算以及全域的位置轉換，如圖A.40所示。

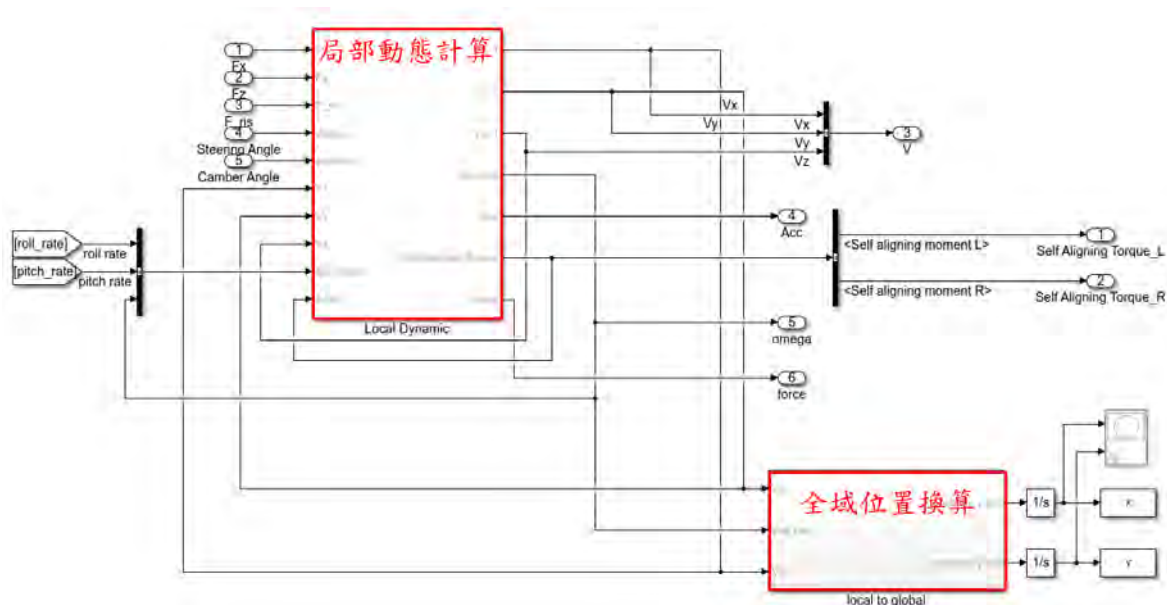


圖 A.40: 操控模型 Simulink 架構

其中局部的動態計算又可分細分為：系統輸入與力整合、側滑角計算、偏行率計算、回正力矩計算、局部動態計算。其 Simulink 架構如圖A.41所示。



A.5.1 側滑角

側滑角 (Side-slip Angle) 是輪胎軸線方向和輪胎行進方向之間的夾角。當前輪指向改變時，由於地面摩擦力及輪胎內部形變的關係，輪胎和地面的接觸面並不會立刻跟隨輪胎的其他部分改變運動方向，而會發生一定的扭曲。這種扭曲使得輪胎指向改變的時候，輪胎指向和車頭指向所生成的夾角即稱為側滑角，如圖A.42所示：

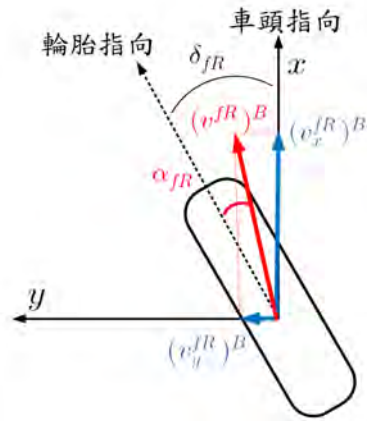


圖 A.42: 前右輪側滑角示意圖

其中， $(v^{fR})^B$ 及 $(v^{fL})^B$ 為輪軸位置的速度。前輪之側滑角 α 計算方式如下：

$$\alpha_{fR} = \delta_{fR} - \arctan \frac{(v_y^{fR})^B}{(v_x^{fR})^B} = \delta_{fR} - \arctan \frac{v_y + l_1\psi}{v_x + w_2\psi} \quad (\text{A.40})$$

$$\alpha_{fL} = \delta_{fL} - \arctan \frac{(v_y^{fL})^B}{(v_x^{fL})^B} = \delta_{fL} - \arctan \frac{v_y + l_1\psi}{v_x - w_1\psi}$$

後輪的側滑角計算則為：

$$\alpha_r = -\arctan \frac{(v_y^r)^B}{(v_x^r)^B} = -\arctan \frac{v_y^r - l_2\psi}{v_x^r} \quad (\text{A.41})$$

根據側滑角公式所建立的側滑角模組如圖所示。

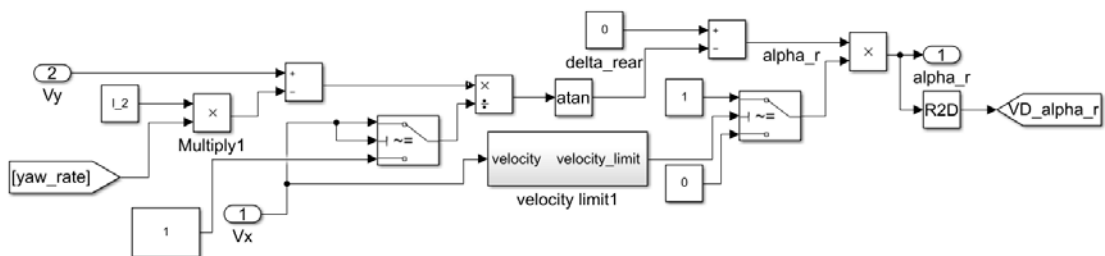


圖 A.43: 後輪側滑角模組架構

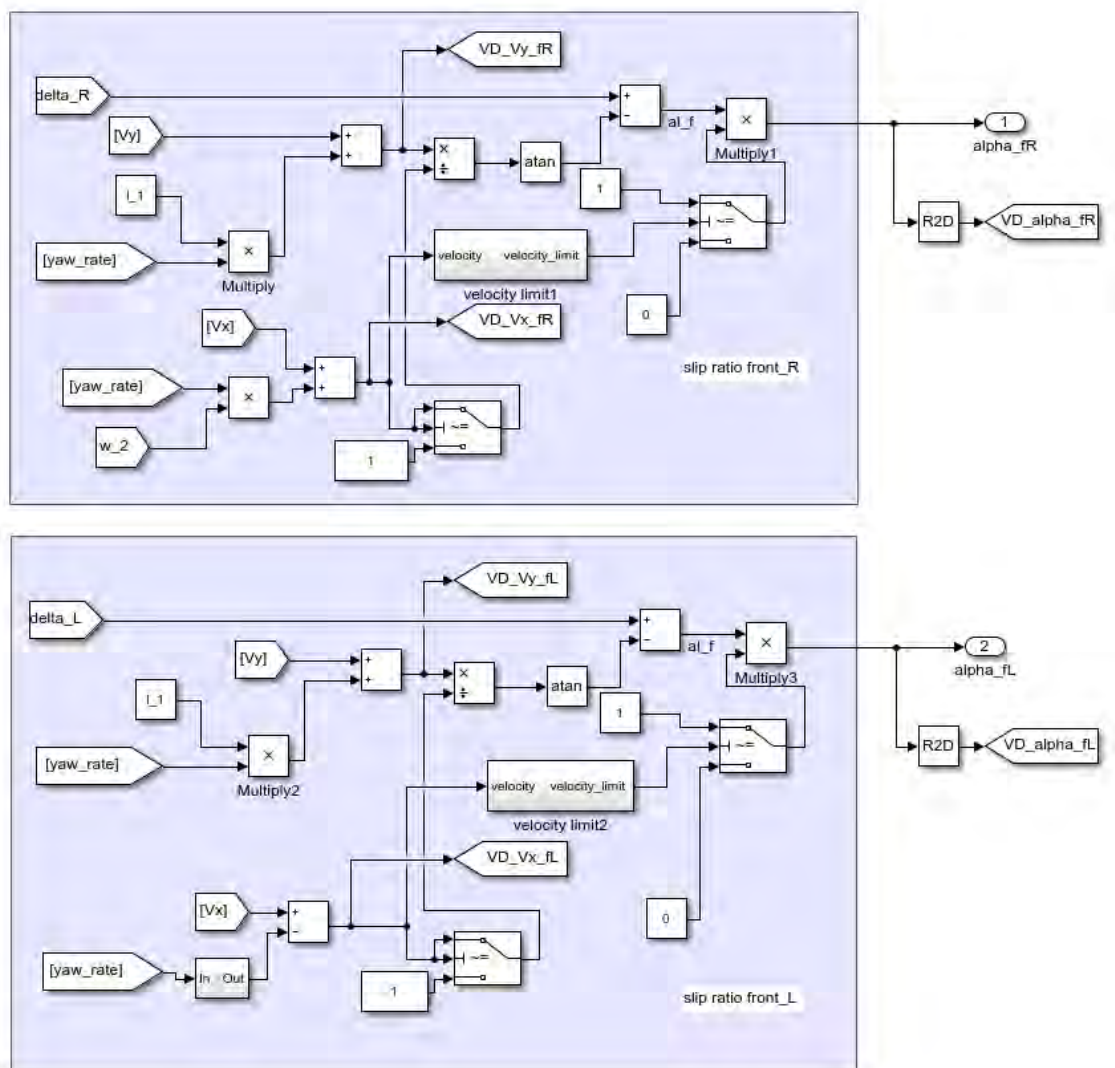


圖 A.44: 前輪側滑角模組架構

A.5.2 側向力合成

在了解如何計算側滑角 α 及外傾角 β 後，即可透過輪胎模型來計算地面對輪胎所施的力。因側滑角所產生的側向力在線性區間操作時可表示為：

$$F_{side-slip} = C_{\alpha}\alpha \quad (A.42)$$

而因外傾角所產生的外傾力，在線性操作區間時也可以表示為：

$$F_{camber} = C_{\beta}\beta \quad (A.43)$$

從兩式中可看見，側向力的產生與側滑角和外傾角呈現比例關係，而 C_{α} 為側偏剛性 (Cornering Stiffness)， C_{β} 為外傾剛性 (Camber Stiffness)。因此，此案例中三個輪子所受的側向力分別為：



$$\begin{aligned} F_y^{fR} &= C_\alpha \alpha_{fR} + C_\beta \beta_{fR} \\ F_y^{fL} &= C_\alpha \alpha_{fL} + C_\beta \beta_{fL} \\ F_y^r &= C_\alpha \alpha_r + C_\beta \beta_r \end{aligned} \quad (A.44)$$

以前右輪為例，側向力模組 Simulink 架構如下：

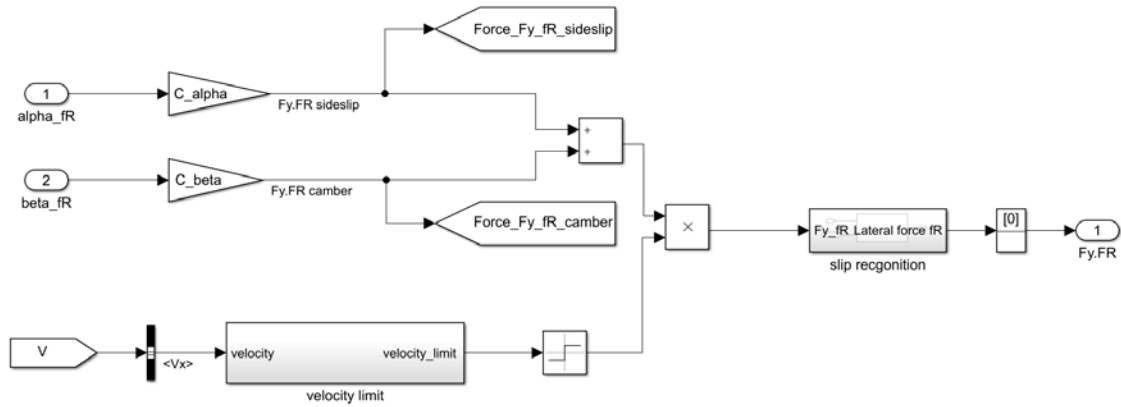


圖 A.45: 右前輪側向力模組架構

側向力作用時，輸出的等效性同樣受到側向靜摩擦力所限制：若經由合成的側向力大於輪胎於正向力作用下所能承擔的最大靜摩擦力，則輪胎呈現打滑，輸出的等效側向力為最大靜摩擦力。在 Simulink 架構中所使用的滑動判斷模組與圖A.33相同。

側向力對車輛而言，會顯著的影響車輛的轉彎性能，在模型建構中，側偏剛性及外傾剛性的準確與否或許也直接的影響了模型與真實系統的相似性。然而，要側向剛性和外傾剛性皆不易取得也不易量測。因此，本研究將 C_α 與 C_β 設定為不確定模型參數，並期望透過本研究之方法能在實驗過程中有效的校準參數。

A.5.3 回正力矩

在沒有後傾角的轉向輪中，回正力矩 (Self Aligning Moment) 是輪胎產生側偏時，因輪胎形變及回彈而作用於輪胎，為繞著 z 軸的力矩，也是使輪胎回正的主要力矩。然而，因著後傾角的設計，使轉向機構的產生曳距，如圖A.13，在輪胎的回正上，一部分的力矩來自輪胎所受之側向力與曳距所產生的力矩，而另一部分則為輪胎受壓縮力，因形變而產生的一力臂，該稱為 SAP (Self-Aligning Parameter)。因此，在忽略回正力矩於後輪的作用下，前兩輪的回正力矩的大小可表示為：

$$\begin{aligned} M_{SAT}^{fR} &= -(a^{fR} + SAP) F_y^{fR} \\ M_{SAT}^{fL} &= -(a^{fL} + SAP) F_y^{fL} \end{aligned} \quad (A.45)$$

其 Simulink 架構可表示為：

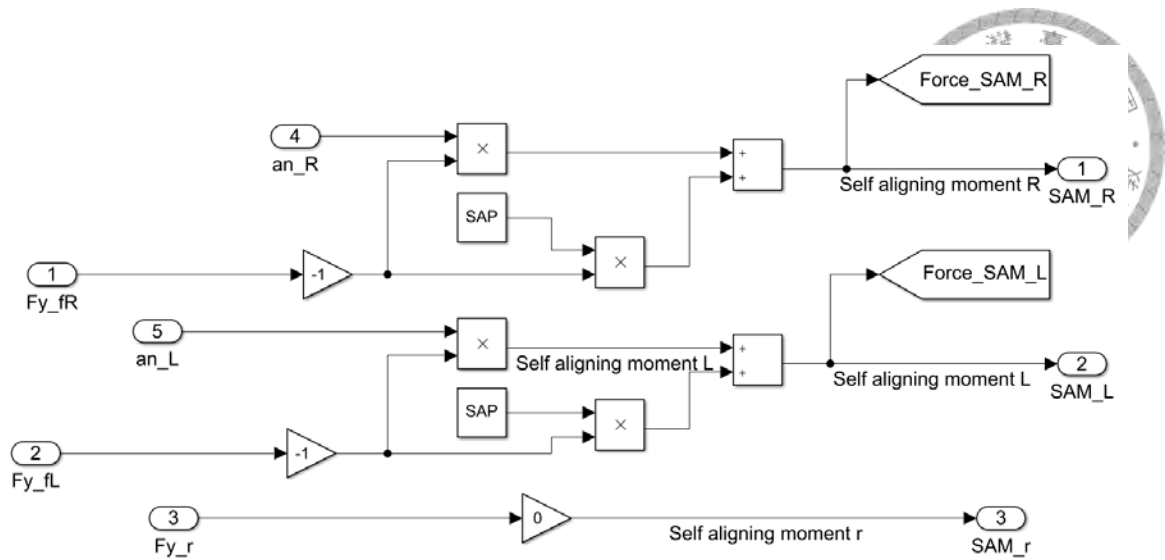


圖 A.46: 回正力矩模組架構

A.5.4 偏移角速度

建立各個輪胎的側向力及回正力矩後，將推進力、滾動阻力、及其他阻力之合力做為後輪於 x 方向的合力 F_x^r ，而前輪為被動輪，在 x 方向上僅受滾動阻力作用。由此可得到三輪車的自由體圖 (俯視) 如下：

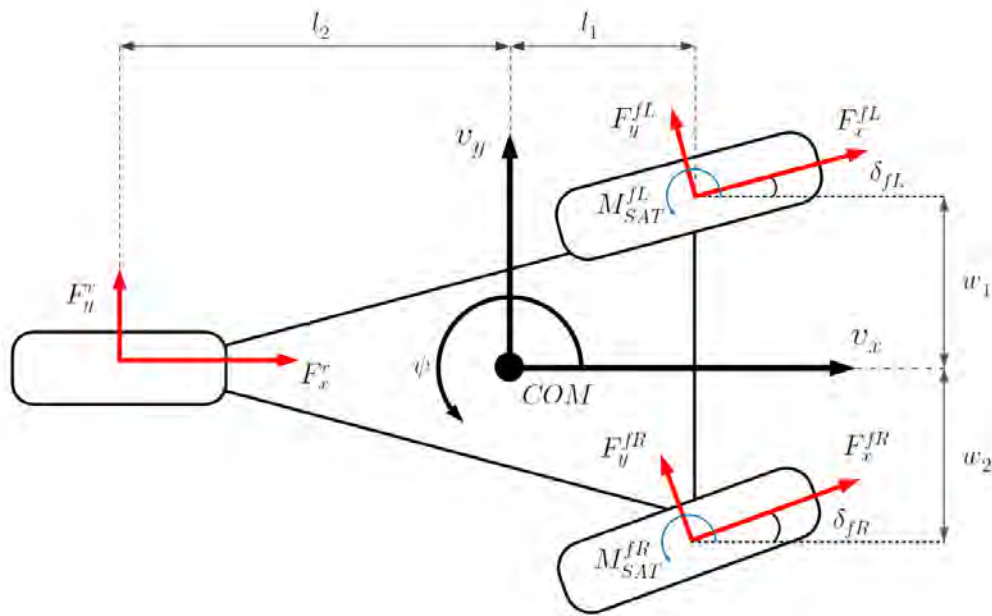


圖 A.47: 三輪車之自由體圖

透過自由體圖，即可由合力矩求出沿 z 軸旋轉的偏移角加速度。根據 [148, 168] 可建立沿 z 軸旋轉的動態為：

$$\sum M = I_z \ddot{\psi} - (I_x - I_y) \dot{\phi} \dot{\theta} \quad (\text{A.46})$$



因此，偏移角速度可由下式計算而得：

$$\dot{\psi} = \int \frac{\sum M + (I_x - I_y)\dot{\phi}\dot{\theta}}{I_z} dt \quad (\text{A.47})$$

其中， $\sum M$ 為車輛之合力矩，為了方便分析，Simulink 架構中將力矩以力臂分成 l_1, l_2, w_1, w_2 四組，並加入回正力矩。偏移角速度計算模組架構如下圖所示：

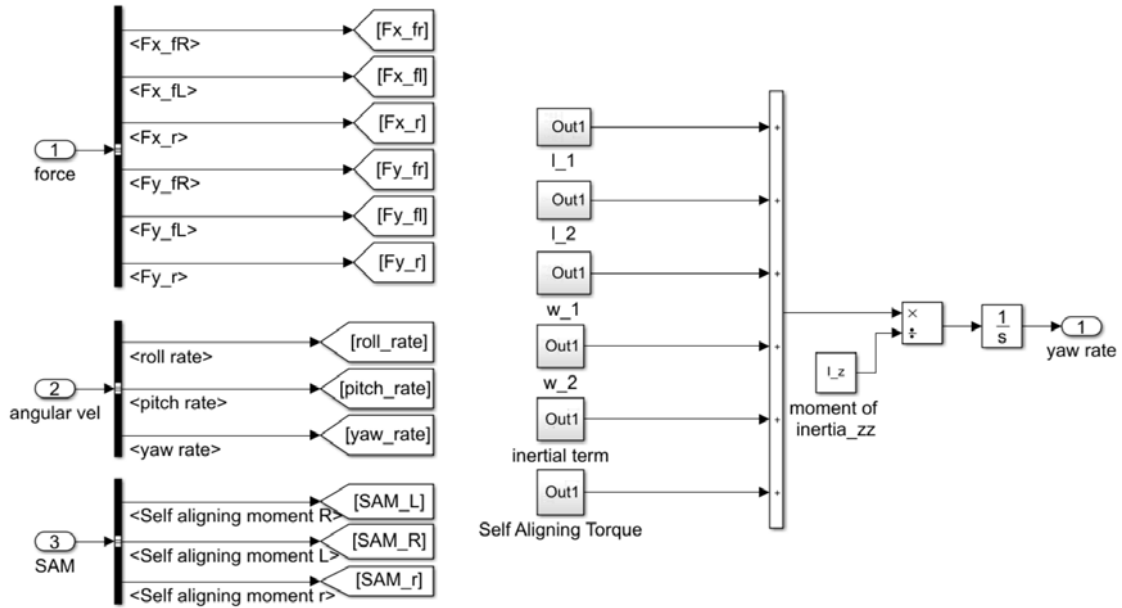


圖 A.48: 偏移角速度計算

根據圖A.47，回正力矩和以 l_1, l_2, w_1, w_2 為力臂之力矩分量可表示為：

$$M_{SAT} = M_{SAT}^{fR} + M_{SAT}^{fL} + M_{SAT}^r \quad (\text{A.48})$$

$$M_{l_1} = l_1 (F_x^{fL} \sin \delta_L + F_y^{fL} \cos \delta_L + F_x^{fR} \sin \delta_R + F_y^{fR} \cos \delta_R) \quad (\text{A.49})$$

$$M_{l_2} = -l_2 F_y^r \quad (\text{A.50})$$

$$M_{w_1} = w_1 (-F_x^{fL} \cos \delta_L + F_y^{fL} \sin \delta_L) \quad (\text{A.51})$$

$$M_{w_2} = w_2 (-F_y^{fR} \sin \delta_R + F_x^{fR} \cos \delta_R) \quad (\text{A.52})$$

最後可得到



$$\sum M = M_{SAT} + M_{l_1} + M_{l_2} + M_{w_1} + M_{w_2} \quad (A.53)$$

針對偏移角速度的計算，考量到滾轉角及傾斜角的角速度非常小，固推測 I_x 及 I_y 相較於 I_z 影響系統的成分較少，且 I_z 為不可直接量測之參數，因此也將 I_z 設定為需校準的不確定模型參數。

A.5.5 等效質量

在計算 x 方向的加速度時，輸入的動能不只用於提供車輛加速度，在帶動輪胎旋轉時也會消耗一部分的能量 [169]。車輛加速的動能及三個輪子的動能分別為：

$$K_{veh} = \frac{1}{2} m_{veh} v_x^2 \quad (A.54)$$

$$K_{wheel} = \frac{1}{2} (I_{fR} \omega_{fR}^2 + I_{fL} \omega_{fL}^2 + I_r \omega_r^2) \quad (A.55)$$

忽略內側輪與外側輪的輪速差異，設 $\omega_{fR} = \omega_{fL} = \frac{v_x}{r_f}$ ，且 $I_{fR} = I_{fL} = I_f$ ，則可將系統總能量表示如下，且等效質量可從能量方程式中求得：

$$\begin{aligned} K_{whole} &= \frac{1}{2} m_{veh} v_x^2 + \frac{1}{2} (I_{fR} \omega_{fR}^2 + I_{fL} \omega_{fL}^2 + I_r \omega_r^2) \\ &= \frac{1}{2} m_{veh} v_x^2 + \frac{1}{2} \left(I_{fR} \left(\frac{v_x}{r_f} \right)^2 + I_{fL} \left(\frac{v_x}{r_f} \right)^2 + I_r \left(\frac{v_x}{r_r} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(m_{veh} + 2 \frac{I_f}{r_f^2} + \frac{I_r}{r_r^2} \right) v_x^2 \\ &= \frac{1}{2} m_{eq} v_x^2 \end{aligned} \quad (A.56)$$

因此，計算 x 方向時，可以等效質量模組替代車輛的質量參數。等效質量模組架構如下：

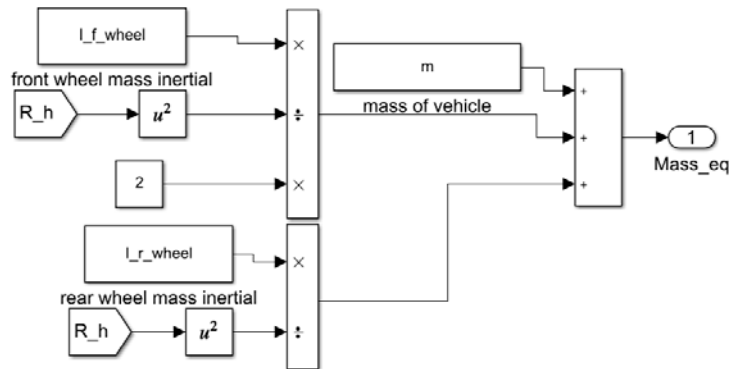


圖 A.49: 等效質量模組架構



A.5.6 正向力分配

正向力分配模組之 Simulink 架構如下圖所示：

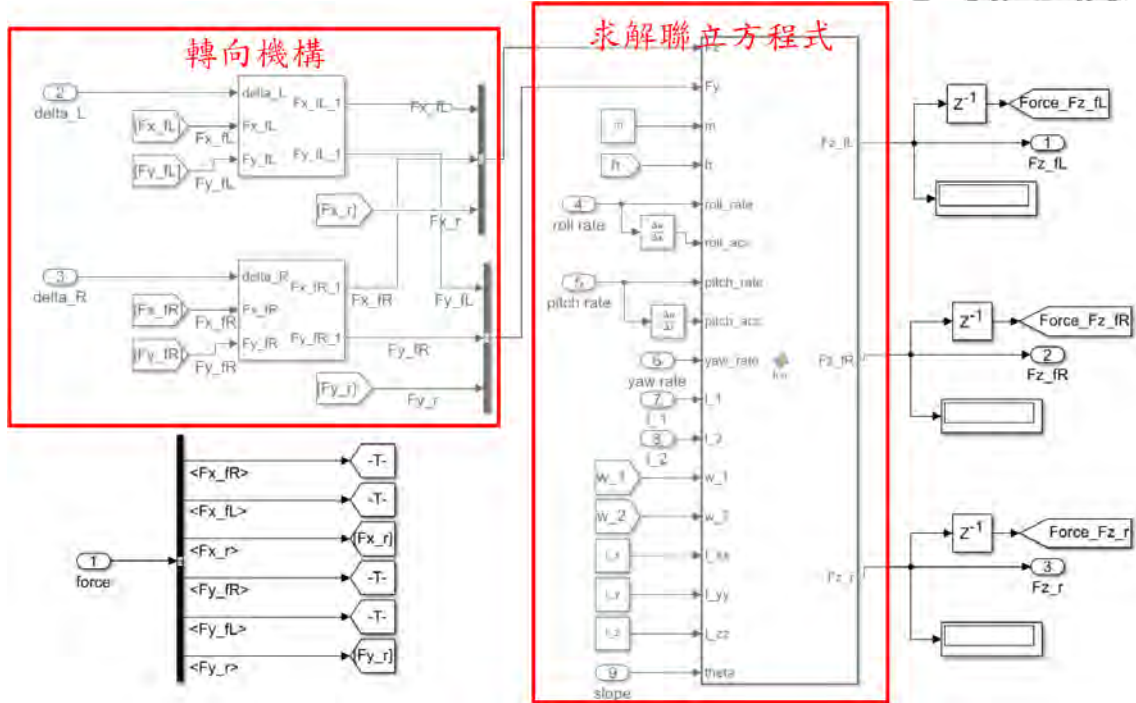


圖 A.50: 正向力分配模組架構

地面透過三個輪子給車輛的正向力會因著車輛在六個自由度的運動而改變。在六軸的運動中，假設輪胎皆不離地，可以列出與正向力相關的加速度與角加速度之動態方程式：

$$\begin{cases} mg \cos \theta = F_z^{fR} + F_z^{fL} + F_z^r \\ I_y \ddot{\theta} = -F_z^{fR} l_1 - F_z^{fL} l_1 + F_z^r l_2 - (m_{eq} a_x h) + (I_z - I_x) \dot{\psi} \dot{\phi} \\ I_x \ddot{\phi} = F_z^{fL} w_1 - F_z^{fR} w_2 + (m a_y h) + (I_y - I_z) \dot{\theta} \dot{\psi} \end{cases} \quad (A.57)$$

其中，

$$m_{eq} a_x = (F_x^{fL})^B + (F_x^{fR})^B + (F_x^r)^B \quad (A.58)$$

$$m a_y = (F_y^{fL})^B + (F_y^{fR})^B + (F_y^r)^B \quad (A.59)$$

而 $(F)^B$ 為以車輛質心座標所表示的力分量，因此由輪胎模型所得到的力需要再進行一次座標轉換：



$$\begin{aligned}
 (F_x^{fL})^B &= F_x^{fL} \cos \delta_L - F_y^{fL} \sin \delta_L \\
 (F_y^{fL})^B &= F_x^{fL} \sin \delta_L + F_y^{fL} \cos \delta_L \\
 (F_x^{fR})^B &= F_x^{fR} \cos \delta_L - F_y^{fR} \sin \delta_L \\
 (F_y^{fR})^B &= F_x^{fR} \sin \delta_L + F_y^{fR} \cos \delta_L
 \end{aligned}
 \tag{A.60}$$

將式A.57中未知的正向力與其他已知項分離，以矩陣表示，可表示為：

$$\begin{bmatrix} -l_1 & -l_1 & l_2 \\ 1 & 1 & 1 \\ w_1 & -w_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_z^{fL} \\ F_z^{fR} \\ F_z^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_y \ddot{\theta} + ((F_x^{fL})^B + (F_x^{fR})^B + (F_x^r)^B) h - (I_z - I_x) \dot{\psi} \dot{\phi} \\ mg \cos \theta \\ I_x \ddot{\phi} - ((F_y^{fL})^B + (F_y^{fR})^B + (F_y^r)^B) h - (I_y - I_z) \dot{\theta} \dot{\psi} \end{bmatrix}
 \tag{A.61}$$

除正向力為未知外，其於項次皆為已知物理量，因此可由反矩陣求出 F_z^{fL} 、 F_z^{fR} 、及 F_z^r 。

A.5.7 局部動態

計算出車輛的受力後，即可透過車輛的受力計算車輛在該受力下的動態，並對其位移進行累進 [144]。圖A.51為車輛在連續兩個取樣點時的運動狀態，其中 v_x, v_y, v_z 為車輛在相對於全域固定座標 X, Y, Z 的速度於車體座標 x, y, z 方向上之投影。

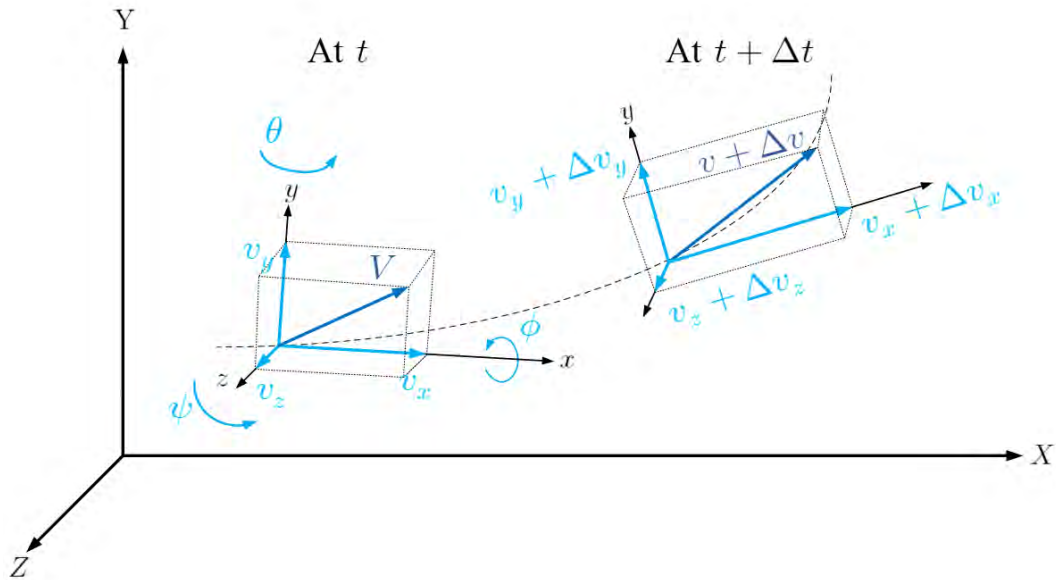


圖 A.51: 以固定於車體座標分析空間運動示意圖

在車輛由 t 運行至 $t + \Delta t$ 時，於車體座標之 x, y, z 方向因受力所產生的速度變化量可表示為：



$$\begin{aligned}
 a_x dt &= (v_x + \Delta v_x) \cos \Delta \psi - v_x - (v_y + \Delta v_y) \sin \Delta \psi + (v_z + \Delta v_z) \sin \Delta \theta \\
 a_y dt &= (v_y + \Delta v_y) \cos \Delta \psi - v_y + (v_x + \Delta v_x) \sin \Delta \psi - (v_z + \Delta v_z) \sin \Delta \phi \\
 a_z dt &= (v_z + \Delta v_z) \cos \Delta \theta - v_z + (v_y + \Delta v_y) \sin \Delta \phi - (v_x + \Delta v_x) \sin \Delta \theta
 \end{aligned} \quad (A.62)$$

假設 $\Delta \theta, \Delta \psi, \Delta \phi$ 為小角度，將三角函數近似後可得到：

$$\begin{aligned}
 a_x dt &= \Delta v_x - v_y \Delta \psi + v_z \Delta \theta \\
 a_y dt &= \Delta v_y + v_x \Delta \psi - v_z \Delta \phi \\
 a_z dt &= \Delta v_z + v_y \Delta \phi - v_x \Delta \theta
 \end{aligned} \quad (A.63)$$

將等號兩側對時間微分後，可得到：

$$\begin{aligned}
 a_x &= \frac{\sum (F_x)^B}{m_{eq}} = \frac{dv_x}{dt} - v_y \frac{d\psi}{dt} + v_z \frac{d\theta}{dt} = \dot{v}_x - v_y \dot{\psi} + v_z \dot{\theta} \\
 a_y &= \frac{\sum (F_y)^B}{m} = \frac{dv_y}{dt} + v_x \frac{d\psi}{dt} - v_z \frac{d\phi}{dt} = \dot{v}_y + v_x \dot{\psi} - v_z \dot{\phi} \\
 a_z &= \frac{\sum (F_z)^B}{m} = \frac{dv_z}{dt} + v_y \frac{d\phi}{dt} - v_x \frac{d\theta}{dt} = \dot{v}_z + v_y \dot{\phi} - v_x \dot{\theta}
 \end{aligned} \quad (A.64)$$

其中， a_x, a_y, a_z 為車輛質心於車體座標 x, y, z 方向上由受力產生的加速度，而各方向之合力可由輪胎受力轉換至與車體座標平行之向量，可由式A.60求得。因此，車輛質心位相對於全域座標、在車體座標上的加速度分量可表示為：

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_x &= \frac{\sum (F_x)^B}{m_{eq}} + v_y \dot{\psi} - v_z \dot{\theta} \\
 \dot{v}_y &= \frac{\sum (F_y)^B}{m} - v_x \dot{\psi} + v_z \dot{\phi} \\
 \dot{v}_z &= \frac{\sum (F_z)^B}{m} - v_y \dot{\phi} + v_x \dot{\theta}
 \end{aligned} \quad (A.65)$$

將加速度分量積分後，即可得到速度分量 v ，再將速度分量代回系統中，持續迭代計算下個時間點的動態。以計算 v_x 為例，Simulink 架構可如圖??所示，其中，由加速度積分至速度的數值積分使用 Simulink 內建數值積分演算法，累積誤差較小，因此在時間區間小的時候可被使用。

A.5.8 全域動態及位置換算

車輛動力學模型的最後一項輸出為：將於車體座標上的動態資訊轉換至全域座標中。設車輛開始行駛時，車輛的質心位置位於全域作標之原點，且車頭朝向與 X 軸平行。首先，將偏移角速度對時間積分，得到相對於偏移角 ψ ，同時也是車頭 x 的指向全域作標 X 軸的夾角。將車體的速度分量經由座標轉換至全域作標上，關係如下：

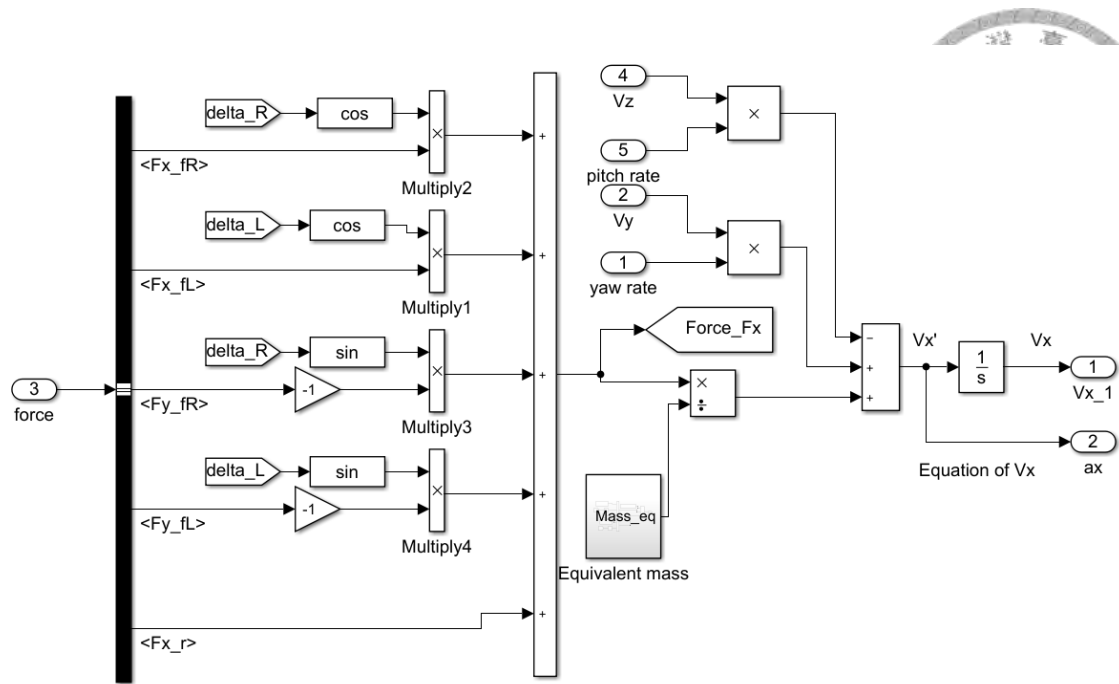


圖 A.52: 計算 v_x 之局部動態模組架構

$$\begin{aligned} V_X &= v_x \cos \psi - v_y \sin \psi \\ V_Y &= v_x \sin \psi + v_y \cos \psi \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

最後，將 V_X, V_Y 對時間積分後，即可得到車輛質心於全域座標中的位置和路徑。將由車體座標的速度分量換至全域座標上的 Simulink 架構如下：

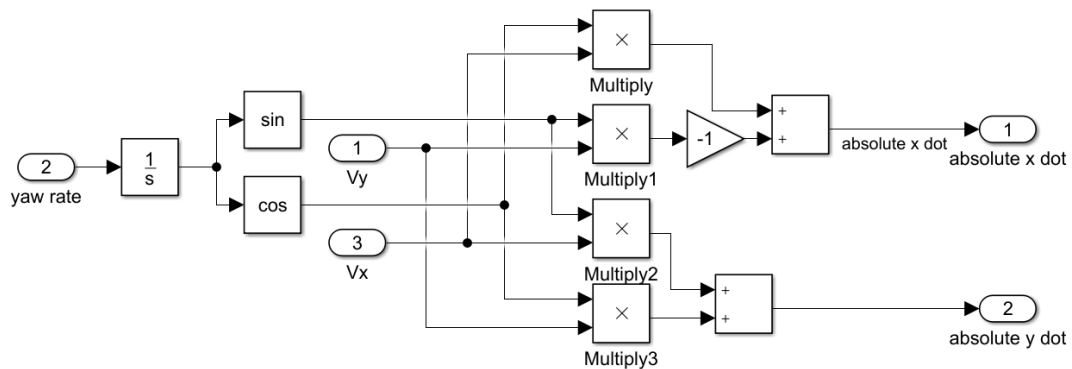


圖 A.53: 全域速度計算模組架構

如此一來，即完成根據車輛動力學模型的建置，可得到車輛在輸入轉向指令與推近指令下的動態輸出。在後續節中，也將持續說明如何對車輛模型輸入操控指令。



A.6 駕駛指令輸入

透過對駕駛軌跡進行參數化後，同時完成了對操作參數的定義。本節將介紹如何讓使車輛進行循跡駕駛，並如何在線控駕駛的車輛中實現所提出之方法。

A.6.1 循跡駕駛演算法

對無人車而言，對於規劃好的全域路徑 (Global path) 可轉變為以一系列的路徑點 (Global Waypoint) 所構成，這些路徑僅需要包含空間位置和姿態的信息，但不需要與時間相關。無人車對軌跡的追蹤方法目前可分為兩大類：基於幾何追蹤方法 (Geometric path tracking method) 以及基於模型預測方法 (Model driven state estimation)，而本案例所使用為基於幾何追蹤法中廣泛使用的追蹤方法：純追蹤法 (Pure Pursuit)。

純追蹤法的概念為假設車輛在循跡和轉向過程中速度變化非常小及轉向角度極小，可線性化偏移角變化率與輪胎轉角的關係，透過改變轉向角使車輛追蹤距離前視距離 (Lookahead distance) 最近的路徑點，並以目標姿態及現有姿態的差值進行負回授控制。純追蹤法的演算法可分為幾個步驟 [170]：

1. 決定車輛質心位置

演算法的所需的車輛質心位置資訊包含質心於全域座標中的 X, Y 座標位置及姿態。

2. 決定追蹤點

在幾何追蹤法中，追蹤點被定義為與車輛質心距離小於前視距離的點，而在追蹤過程中非常有可能會出現多組追蹤目標的可能。因此純追蹤法對於追蹤點的選擇定義為路徑上與前視點最接近的位置。因此，前視距離的選擇會對車輛循跡的決策產生非常大的影響，如圖A.54 [171] 所示，過小的前視距離會使車輛快速的改變姿態，卻可能會出現擺盪；過大的前視距離則會使車輛在循跡駕駛時忽略較銳利及複雜的路徑轉角，呈現較圓滑的駕駛策略。

3. 決定目標點位置

計算出路徑上距離前視點最近的位置後，計算該位置的全域座標以及該位置與車輛質心位置的距離。

4. 轉換目標點至車體座標系

將目標點的全域座標轉換為車輛質心的車體座標位置，並計算欲達到目標點所需改變的轉向角度。轉向角計算可參考 [155]。

5. 執行循跡並更新車輛位置

隨著車輛行駛的過程進行回授控制，如圖A.55 [155] 所示，並重複前述步驟，循序更新車輛位置及所需轉向角。在此案例中，假設在循跡過程中的行駛速度皆不改變，因此回授僅針對轉向角度進行修正。

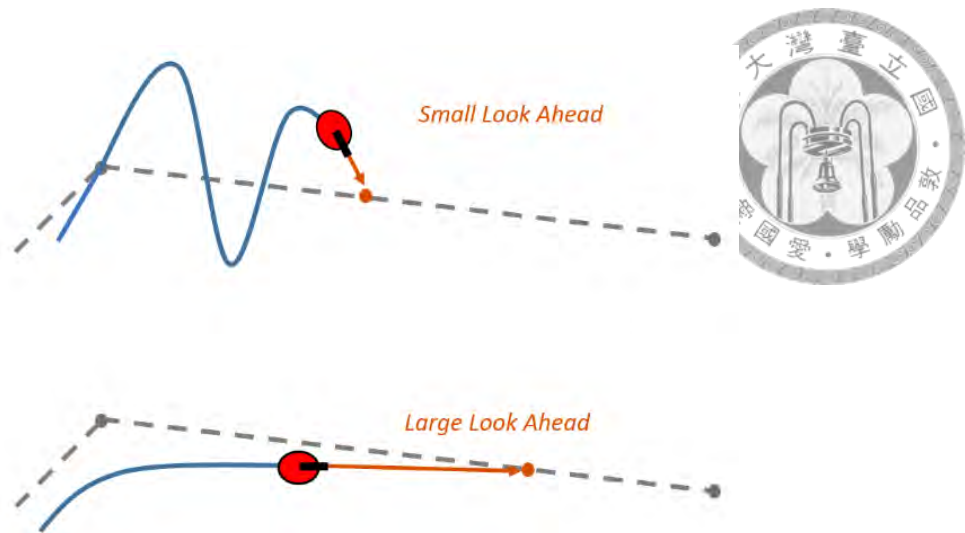


圖 A.54: 不同前視距離對循跡演算法之影響示意圖 [171]

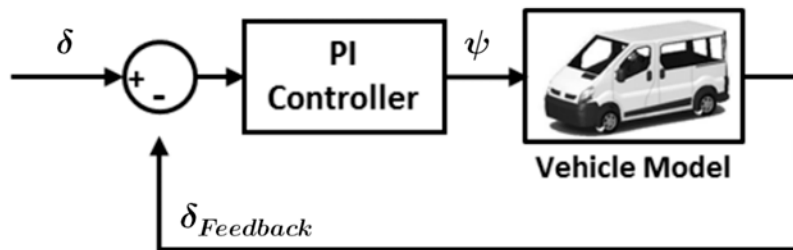


圖 A.55: 轉向回授控制 [155]

在本案例中，循跡演算法使用 Matlab Robotic System Toolbox 中的 Pure Pursuit Controller 作為回授控制器，並設定前視距離為 1.2 公尺，而目標速率則依照除了定轉角轉向外，皆設定為 1 m/s。完成循跡演算法的建立後，即可對模擬模型進行開迴路駕駛和閉迴路駕駛模擬。

A.6.2 模擬環境建置及資料蒐集

在建置 Simulink 模型時，在模擬環境上的設定也會對模擬結果產生影響。在本小節中則整理了對於模擬環境上的設定，提供權衡演算時間及演算準確度的方法，也可在未來工作中持續優化。

• 取樣時間

在此案例中的數值求解器設定所使用的取樣時間固定為 0.001 秒。由於在 Simulink 的架構中，有許多需由迴圈迭代、在時間間隔夠短的條件下才能校準確計算。在開迴路的模擬中需進行大量的蒙地卡羅取樣，為了降低模擬成本，因此暫時不將時間間隔再調降。若需要進行單次以求精準的模擬，建議可將時間間隔降為 $1e-4$ 秒。



- **數值解方法**

在此案例中設定求解器的數值解方法為 ODE4(Runge-Kutta)，可在有效率的運算中同時保有較好品質的積分和內插。若要降低演算時間，可使用 ODE1(Euler) 進行演算。

- **資料中心**

在 Simulink 模擬中，數值顯示方塊 (Display,Scope) 會使模擬速度變緩，但兩者在模型中對於各個物理量之監控仍不可缺少。為了使演算速度可以維持一定品質，建議可建立一個獨立的輸出資訊整合介面，如圖6.3中的資料中心，在進行大量取樣和模擬時，可以註解方式將該方塊隱藏，可降低演算成本。

- **平行運算**

在進行多次取樣和模擬時，由於不同組實驗之間並沒有先後和互相影響之關係，因此透過平行運算可將計算工作分散至不同核心中。在此案例中所使用的為 Matlab 附加的 Parallel Computing Toolbox，可將計算分散至 CPU 的所有核心中。

- **動態資料內插**

考量到動態輸出資料在進行 K-L 轉換時，共變異矩陣的矩陣大小會由取樣點的數量決定，且 Matlab 無法求解過大的共變異矩陣特徵。因此，對於所有狀態的輸出資料，都先將動態資料壓縮為由 10000 次取樣所組成的序列。此案例用片段式的三次 Spline 內插法以縮小內插時所產生的誤差。

A.7 小結

本附錄介紹了本研究中作為探討目標的真實系統及模擬模型架構。首先，介紹了真實系統的硬體配置，瞭解系統的規格及參數的成分，並建立系統的操控方法。

針對真實系統的模型建構，分別介紹動力學模型的建構及駕駛模擬的環境建立。在動力學模型的建構上，介紹了以 Simulink 逆向建構模型模型的方法，並在過程中選出需要被校準的參數，分別是： z 軸轉動慣量 I_z 、側偏剛性 C_α 、外傾剛性 C_β 、兩個輪胎滾阻係數 μ_0 和 μ_1 、及 SAP 共六個不確定模型參數；在模擬駕駛環境的建立上，介紹四種參數化軌跡模型的建構方法，並設定操作參數，同時說明操作參數如何透過閉迴路駕駛模擬和開迴路駕駛進行系統模擬。

完成模型建構和模擬環境的建立後，即可用所提出之方法對此模型進行不確定參數的激發、校準、及驗證。



車輛工程案例之準確度評估

本附錄為補充第6.4.2節對於不同案例之 Kriging 模型準確度之探討。於正文中僅針對車道變換案例進行說明，而對於其他三種操作方式的準確度評估資料則列於此。

B.1 Kriging 模型準確度評估指標

下表分別為定轉角轉向、正啾頻、與逆啾頻操作下，初始取樣數與各個重要係數之 Kriging 模型的準確度評估指標 R^2 與 $RAAE$ 之關係：

表 B.1: 定轉角轉向操作下不同初始取樣次數之 R^2 和 $RAAE$

R^2									
$N_{initial}$	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000
X	C_1	0.9411	0.9592	0.9750	0.9842	0.9918	0.9939	0.9955	0.9963
	C_2	0.6727	0.7483	0.7912	0.8991	0.9328	0.9349	0.9488	0.9459
	C_3	0.9370	0.9616	0.9779	0.9767	0.9847	0.9847	0.9872	0.9893
	C_4	0.8849	0.9131	0.9089	0.9658	0.9651	0.9686	0.9734	0.9432
	fusion	0.9311	0.9515	0.9683	0.9809	0.9895	0.9915	0.9935	0.9942
Y	C_1	0.9352	0.9547	0.9711	0.9820	0.9905	0.9929	0.9947	0.9956
	C_2	0.7093	0.7559	0.8179	0.9080	0.9409	0.9486	0.9570	0.9574
	C_3	0.9164	0.9401	0.9566	0.9700	0.9821	0.9820	0.9866	0.9879
	fusion	0.9271	0.9475	0.9656	0.9794	0.9887	0.9912	0.9933	0.9942
$\dot{\psi}$	C_1	0.9287	0.9494	0.9671	0.9804	0.9896	0.9919	0.9939	0.9949
	C_2	0.9466	0.9644	0.9771	0.9815	0.9894	0.9907	0.9935	0.9948
	C_3	0.7406	0.7694	0.8674	0.8978	0.9394	0.9474	0.9502	0.9688
	fusion	0.9296	0.9501	0.9676	0.9804	0.9895	0.9918	0.9938	0.9949
$RAAE$									
$N_{initial}$	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000
X	C_1	0.1505	0.1221	0.0874	0.0712	0.0525	0.0449	0.0396	0.0359
	C_2	0.2929	0.2524	0.2062	0.1572	0.1295	0.1256	0.1178	0.1168
	C_3	0.1625	0.1267	0.0987	0.1059	0.0791	0.0852	0.0818	0.0747
	C_4	0.1923	0.1565	0.1564	0.1056	0.1084	0.1007	0.0923	0.0870
	fusion	0.1561	0.1270	0.0921	0.0752	0.0560	0.0489	0.0435	0.0399
Y	C_1	0.1559	0.1266	0.0916	0.0746	0.0552	0.0473	0.0418	0.0381
	C_2	0.2716	0.2487	0.1903	0.1451	0.1190	0.1060	0.1026	0.0986
	C_3	0.1597	0.1280	0.1012	0.0892	0.0624	0.0621	0.0577	0.0526
	fusion	0.1660	0.1310	0.0951	0.0771	0.0575	0.0494	0.0440	0.0403
$\dot{\psi}$	C_1	0.1613	0.1310	0.0954	0.0770	0.0577	0.0496	0.0446	0.0407
	C_2	0.1356	0.1039	0.0787	0.0707	0.0504	0.0470	0.0416	0.0367
	C_3	0.2642	0.2350	0.1831	0.1639	0.1264	0.1139	0.1107	0.0901
	fusion	0.1599	0.1296	0.0946	0.0767	0.0574	0.0495	0.0445	0.0405

表 B.2: 正啣頻操作下不同初始取樣之 R^2 和 $RAAE$

R^2										
$N_{initial}$	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	
X	C_1	0.961	0.9799	0.9888	0.9928	0.9953	0.9963	0.9973	0.9975	0.9977
	C_2	0.9428	0.96	0.9702	0.9792	0.988	0.9907	0.9935	0.9942	0.9951
	fusion	0.9609	0.9798	0.9887	0.9928	0.9953	0.9963	0.9973	0.9975	0.9977
Y	C_1	0.9551	0.9722	0.9845	0.9906	0.9946	0.9957	0.9966	0.9972	0.9974
	C_2	0.9438	0.9619	0.9712	0.9794	0.9874	0.9894	0.993	0.9939	0.9947
	C_3	0.9304	0.957	0.9761	0.9836	0.9912	0.9923	0.9937	0.9945	0.9951
	fusion	0.9548	0.972	0.9844	0.9904	0.9945	0.9957	0.9966	0.9971	0.9974
$\dot{\psi}$	C_1	0.9347	0.9538	0.9729	0.9836	0.9917	0.9934	0.9949	0.996	0.9966
	C_2	0.9486	0.9652	0.9752	0.9814	0.9891	0.9904	0.9934	0.9947	0.9954
	C_3	0.9507	0.9742	0.9854	0.9899	0.9935	0.9947	0.9963	0.9963	0.9966
	C_4	0.8085	0.8581	0.9171	0.9351	0.9557	0.9593	0.9651	0.9747	0.9774
	fusion	0.939	0.9575	0.9738	0.983	0.991	0.9925	0.9945	0.9956	0.9962
$RAAE$										
$N_{initial}$	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	
X	C_1	0.1261	0.0925	0.0669	0.0542	0.0442	0.0377	0.0314	0.0297	0.0278
	C_2	0.1409	0.1135	0.0889	0.0762	0.0567	0.0497	0.0441	0.0415	0.0377
	fusion	0.1262	0.0926	0.067	0.0543	0.0443	0.0378	0.0314	0.0298	0.0279
Y	C_1	0.1282	0.1001	0.0728	0.0605	0.0463	0.04	0.035	0.0316	0.0292
	C_2	0.1334	0.1048	0.0837	0.0705	0.0519	0.0502	0.0421	0.0403	0.0368
	C_3	0.164	0.126	0.091	0.0773	0.0594	0.0561	0.0509	0.0485	0.0459
	fusion	0.1284	0.1003	0.073	0.0607	0.0464	0.0402	0.0352	0.0318	0.0294
$\dot{\psi}$	C_1	0.1523	0.1239	0.0883	0.0715	0.0541	0.0468	0.0419	0.0376	0.0332
	C_2	0.1317	0.1015	0.0786	0.0688	0.0492	0.0467	0.04	0.0357	0.0324
	C_3	0.1403	0.1023	0.0757	0.0616	0.0497	0.0442	0.0375	0.0372	0.0352
	C_4	0.2361	0.1924	0.1484	0.1324	0.1114	0.1079	0.0961	0.0844	0.077
	fusion	0.1461	0.117	0.0853	0.0705	0.0526	0.0467	0.0413	0.037	0.033

表 B.3: 逆啾頻操作下不同初始取樣次數之 R^2 和 $RAAE$

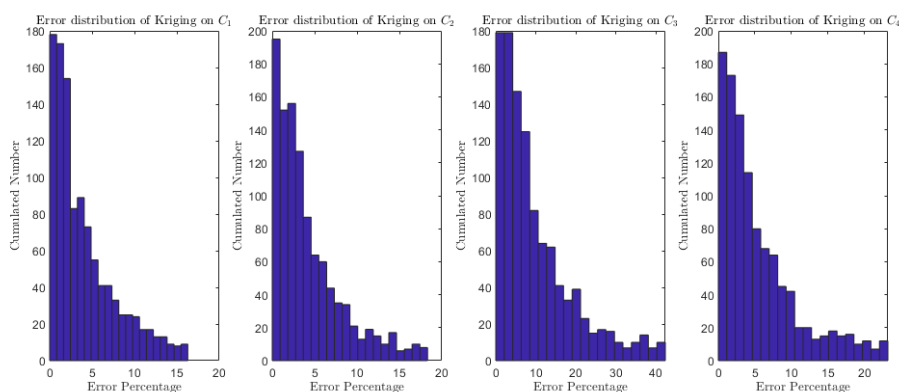
R^2									
$N_{initial}$	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000
X	C_1	0.9629	0.9801	0.9888	0.993	0.9954	0.9964	0.9974	0.9976
	C_2	0.9342	0.9545	0.9676	0.9786	0.9877	0.9905	0.9933	0.9939
	fusion	0.9627	0.98	0.9887	0.9929	0.9954	0.9964	0.9973	0.9977
Y	C_1	0.9403	0.9575	0.9735	0.9843	0.9918	0.9936	0.9952	0.9961
	C_2	0.9483	0.9656	0.9768	0.9826	0.9897	0.9909	0.9936	0.995
	C_3	0.9423	0.9672	0.9799	0.9862	0.991	0.9924	0.9931	0.9934
	fusion	0.9408	0.958	0.9737	0.9842	0.9917	0.9934	0.9951	0.9966
ψ	C_1	0.934	0.9535	0.973	0.9835	0.9918	0.9934	0.9948	0.996
	C_2	0.9466	0.9636	0.9737	0.9803	0.9883	0.9898	0.9931	0.9943
	C_3	0.7546	0.7959	0.8884	0.9104	0.9424	0.9529	0.9548	0.9647
	fusion	0.937	0.9559	0.9732	0.9827	0.9909	0.9925	0.9944	0.9958
$RAAE$									
$N_{initial}$	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000
X	C_1	0.1216	0.0908	0.0658	0.0536	0.0432	0.0364	0.0308	0.0285
	C_2	0.1464	0.1193	0.0921	0.077	0.0587	0.0514	0.0447	0.0425
	fusion	0.1218	0.0909	0.0659	0.0537	0.0432	0.0365	0.0308	0.027
Y	C_1	0.1461	0.1189	0.0867	0.0695	0.0521	0.0449	0.0397	0.036
	C_2	0.1306	0.101	0.0785	0.0681	0.0501	0.0466	0.0413	0.0365
	C_3	0.1544	0.1184	0.0967	0.0827	0.0673	0.0613	0.0595	0.057
	fusion	0.1452	0.1179	0.0863	0.0694	0.052	0.045	0.0398	0.0361
ψ	C_1	0.1532	0.1241	0.0884	0.0714	0.0543	0.0469	0.0422	0.0378
	C_2	0.1314	0.1024	0.0799	0.069	0.0494	0.0467	0.0401	0.036
	C_3	0.262	0.225	0.1683	0.1504	0.1254	0.1109	0.1067	0.0983
	fusion	0.1479	0.1189	0.0864	0.0708	0.0531	0.0469	0.0417	0.0374



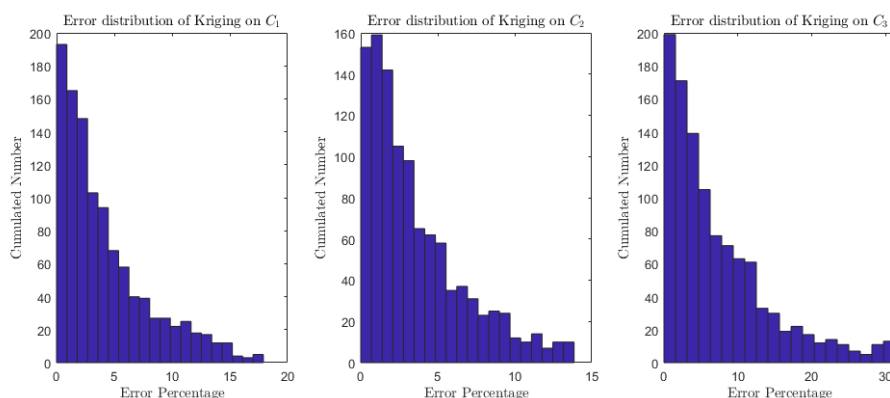
B.2 Kriging 模型之輸出比較

定轉角轉向

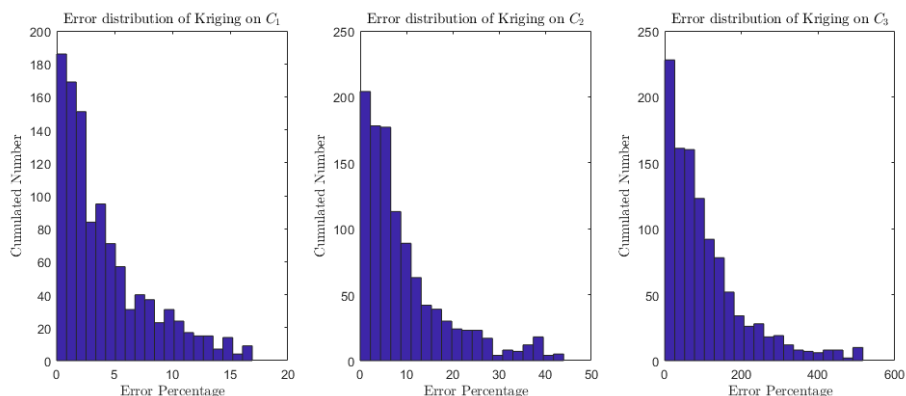
圖B.1中可見，各項重要係數的誤差百分比多及中於 10% 至 15% 之間，唯獨在 ψ 的第三組重要係數，誤差百分比分佈於 400% 為多數。由於該重要係數對應的特徵值相對較小，是否會對整體的準確度造成較大的影響仍須從其他比較判斷。



(a) 定轉角轉向操作中 X 之重要係數預測誤差百分比分佈



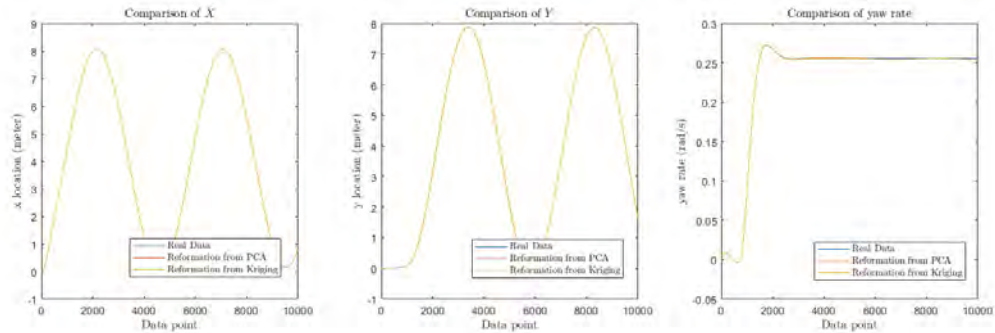
(b) 定轉角轉向操作中 Y 之重要係數預測誤差百分比分佈



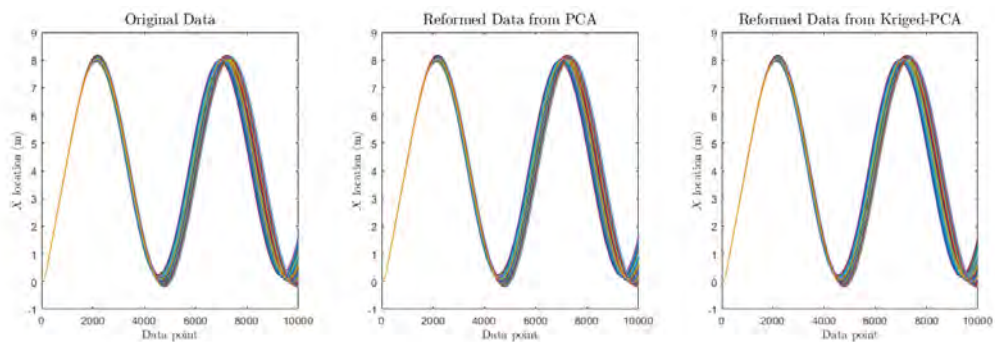
(c) 定轉角轉向操作中 ψ 之重要係數預測誤差百分比分佈

圖 B.1: 定轉角轉向操作下重要係數預測誤差百分比分佈

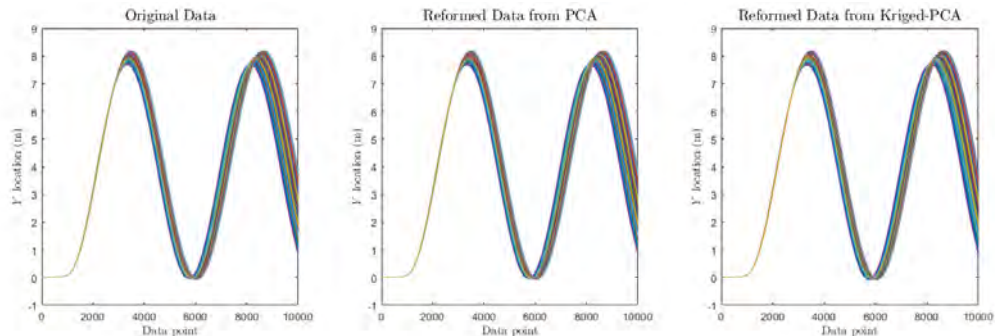
定轉角轉向操作下原始輸出動態與還原動態之比較如下：



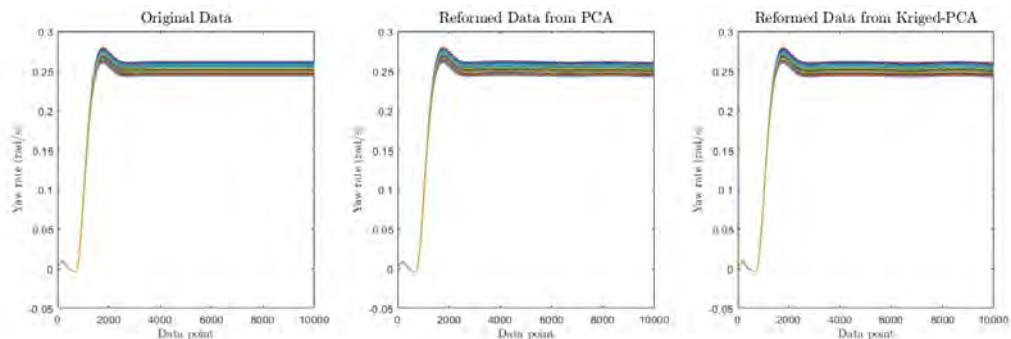
(a) 定轉角轉向操作中原始動態、PCA 重組之動態、以 Kriging 模型預測重要係數重組之單一動態比較



(b) 定轉角轉向操作中原始動態、PCA 重組之動態、以 Kriging 模型預測重要係數重組之 X 全體動態比較



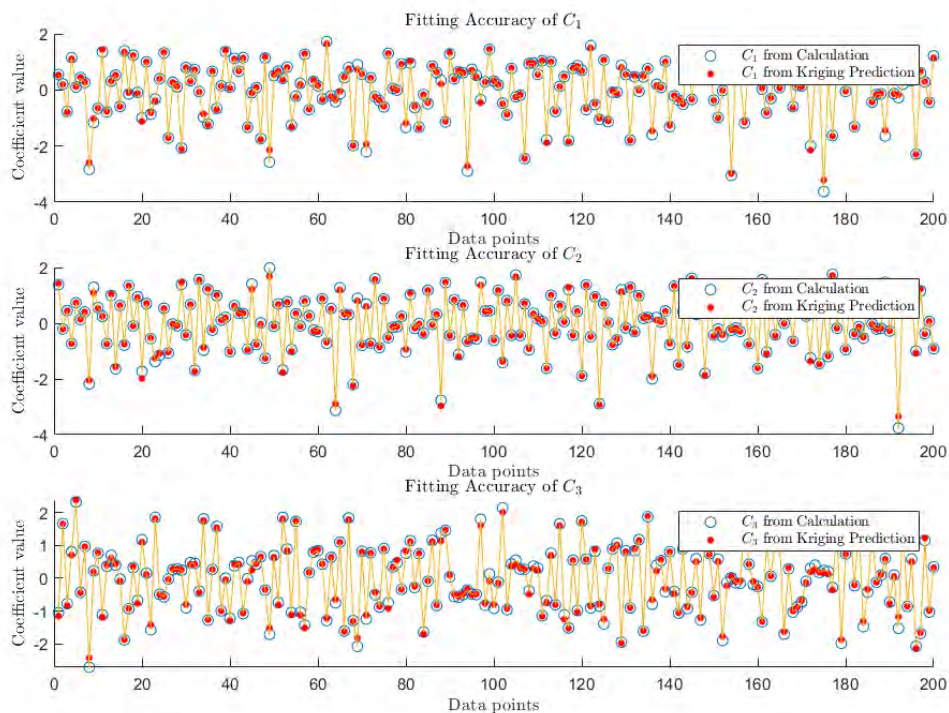
(c) 定轉角轉向操作中原始動態、PCA 重組之動態、以 Kriging 模型預測重要係數重組之 Y 全體動態比較



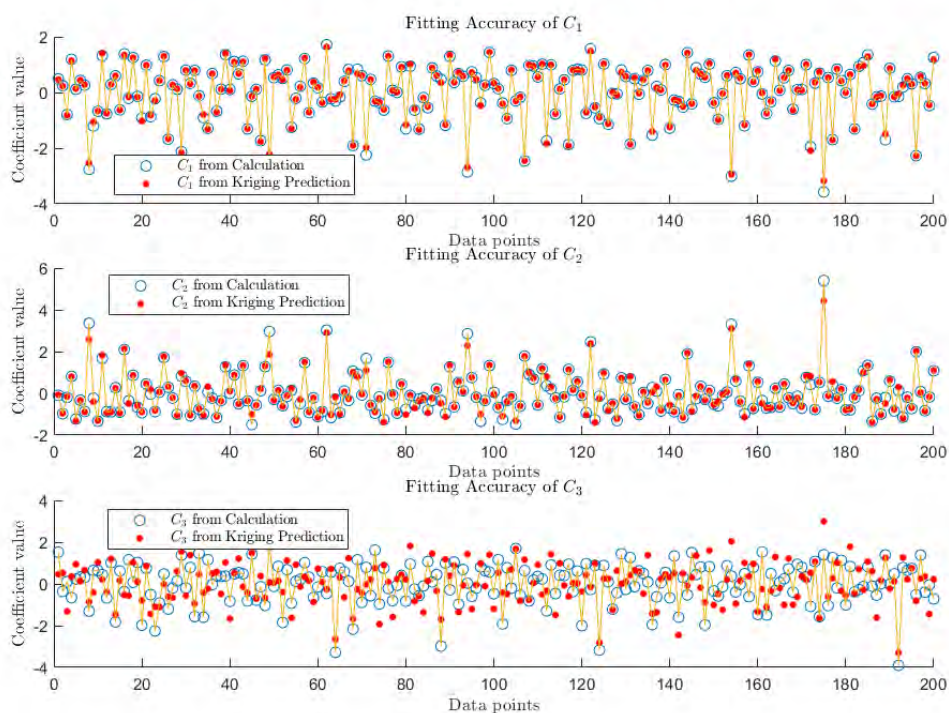
(d) 定轉角轉向操作中原始動態、PCA 重組之動態、以 Kriging 模型預測重要係數重組之 ψ 全體動態比較

圖 B.2: 定轉角轉向操作中原始動態、PCA 重組之動態、以 Kriging 模型預測重要係數重組動態比較

定轉角轉向操作下重要係數與預測之重要係數比較 (比較前 200 筆資料):



(a) 定轉角轉向操作下 Y 重要係數與預測之重要係數比較



(b) 定轉角轉向操作下 ψ 重要係數與預測之重要係數比較

圖 B.3: 定轉角轉向操作下 Y 與 ψ 重要係數與預測之重要係數比較

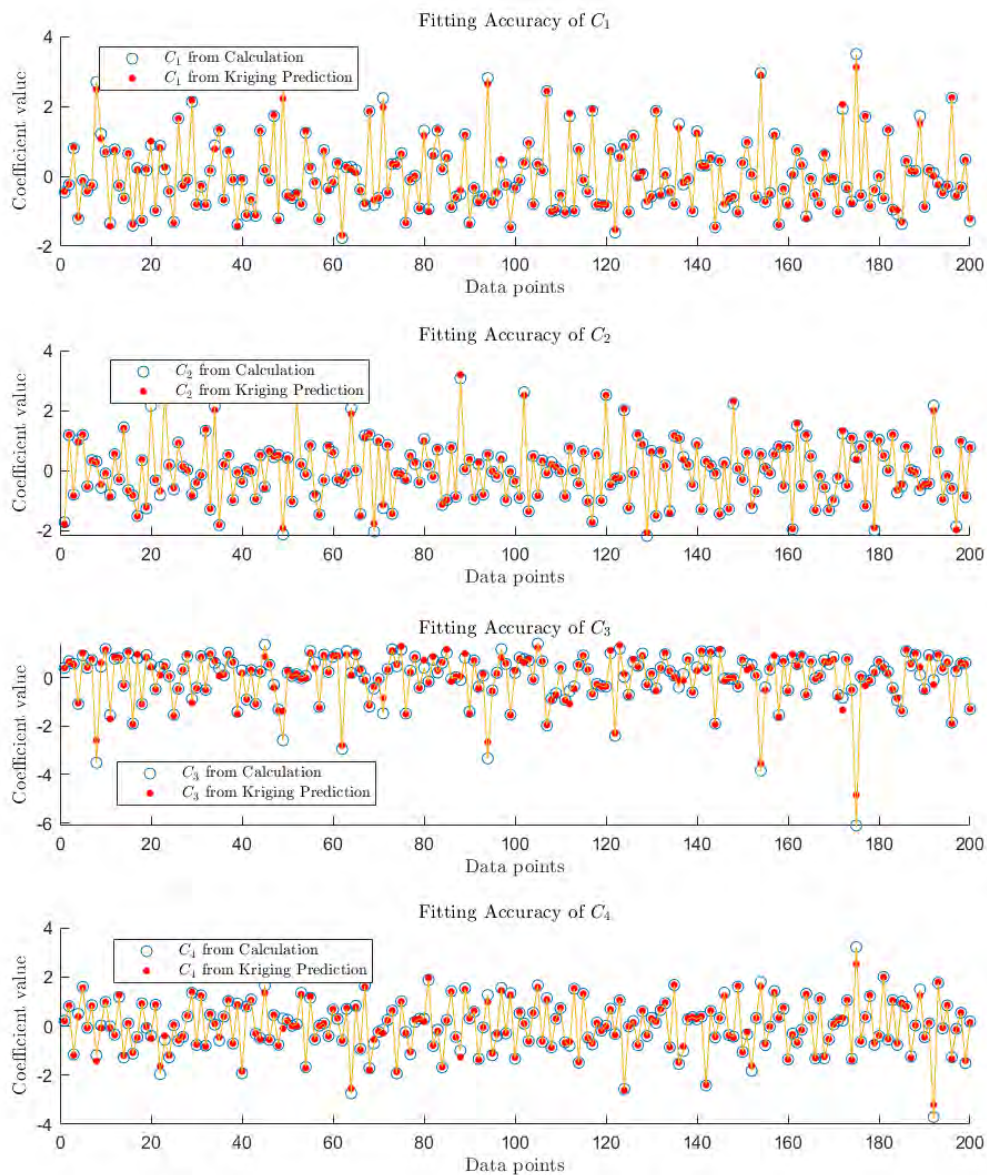
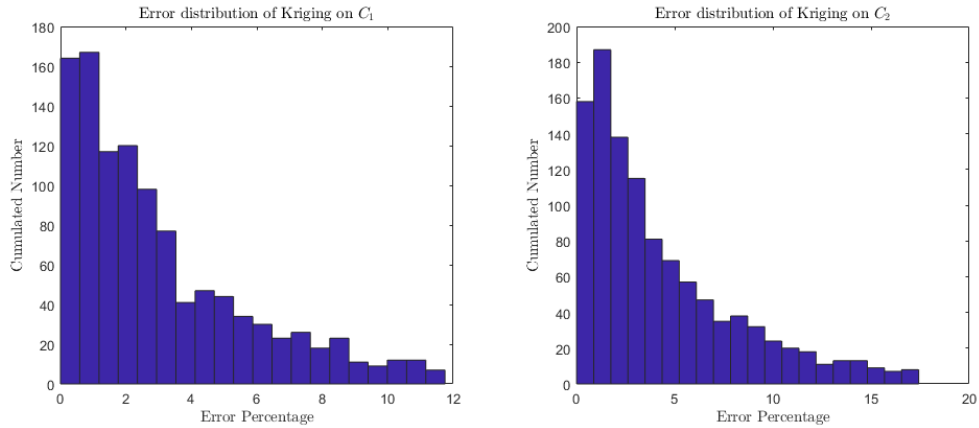


圖 B.4: 定轉角轉向操作下 X 重要係數與預測之重要係數比較

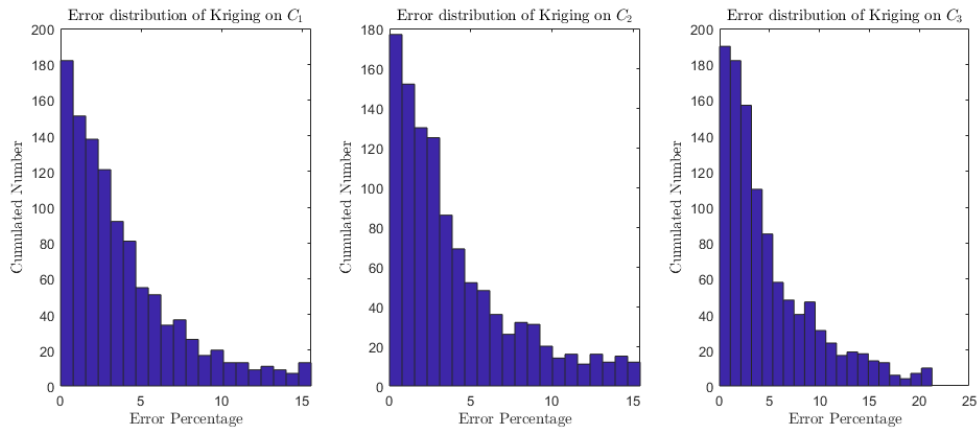
自圖B.2(a)中可見，K-L轉換重組偏移角速度 $\dot{\psi}$ 的動態與原始動態有較顯著的差異，而由Kriging模型還原的動態也同樣呈現的些許的偏差。自圖B.3及圖B.4中也可看到，Kriging模型對於 $\dot{\psi}$ 的 C_3 所呈現無效的預測，而對於極值外的重要係數幾乎可以有準確的預測。圖B.2也顯示，雖然預測與實際值存在一定的誤差，但將全體資料重組後的分佈進行比較，可發現分佈的狀態是非常相似的。因此，以初始取樣次數為1400次的Kriging模型被認定為可有效的替代真實系統，進行全域敏感度分析。

正啾頻

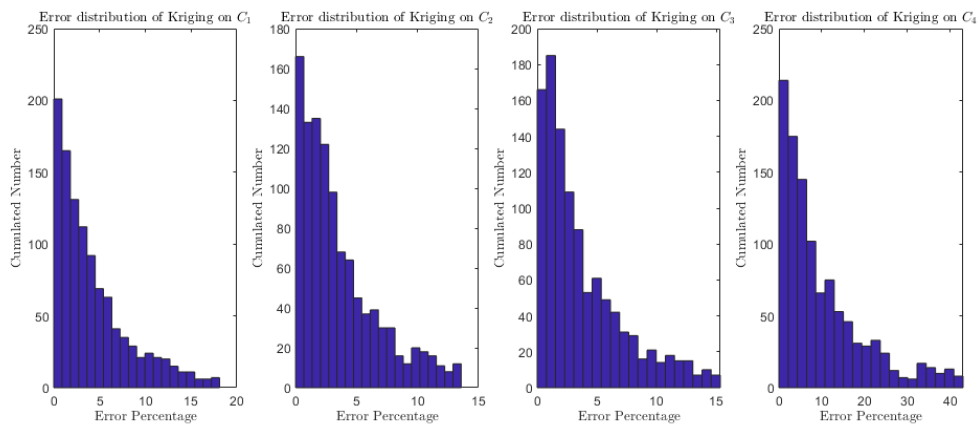
正啾頻操作下 Kriging 模型驗證下的誤差分佈如圖B.5所示，可看見誤差分佈幾乎集中於 10% 以內，少部分誤差會超過 15%。其中，偏移角速度在 C_4 的預測較不準確，誤差分佈集中在 20% 內。



(a) 正啾頻操作中 X 之重要係數預測誤差百分比分佈



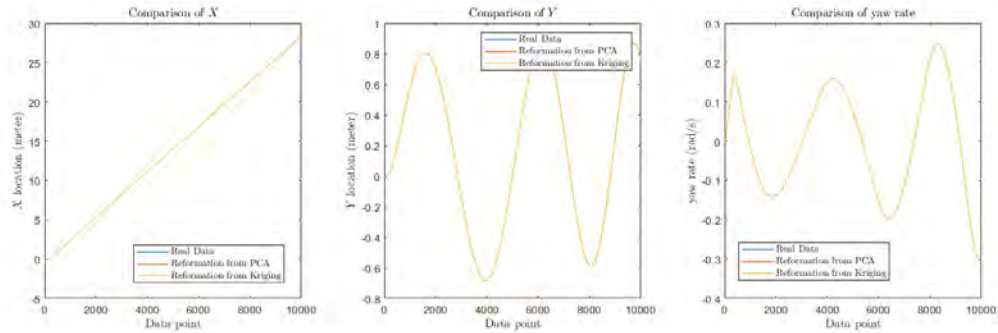
(b) 正啾頻操作中 Y 之重要係數預測誤差百分比分佈



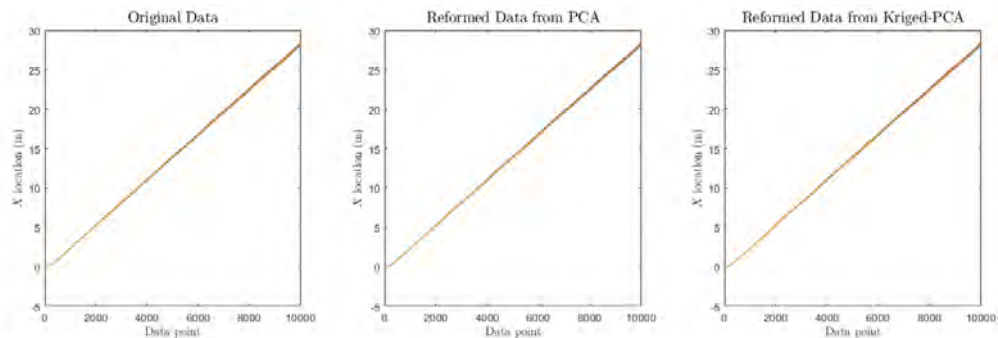
(c) 正啾頻操作中 $\dot{\psi}$ 之重要係數預測誤差百分比分佈

圖 B.5: 正啾頻操作下重要係數預測誤差百分比分佈

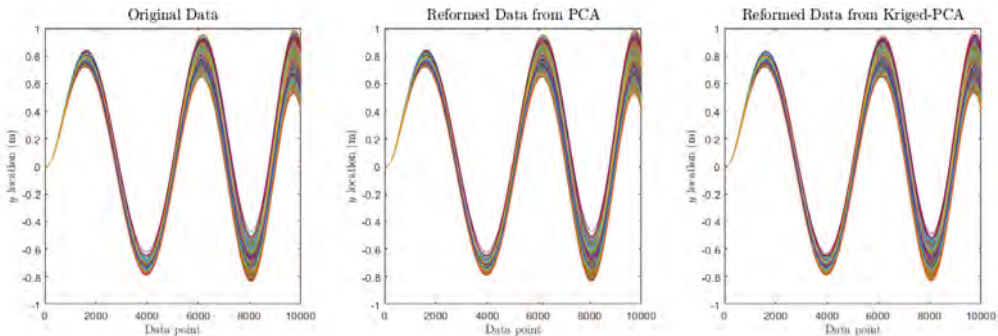
正啾頻操作下原始輸出動態與還原動態之比較如下：



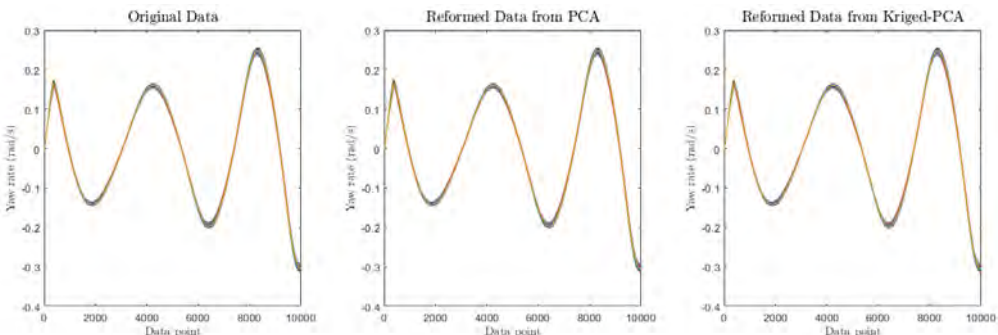
(a) 正啾頻操作中原始動態、PCA 重組之動態、以 Kriging 模型預測重要係數重組之單一動態比較



(b) 正啾頻操作中原始動態、PCA 重組之動態、以 Kriging 模型預測重要係數重組之 X 全體動態比較



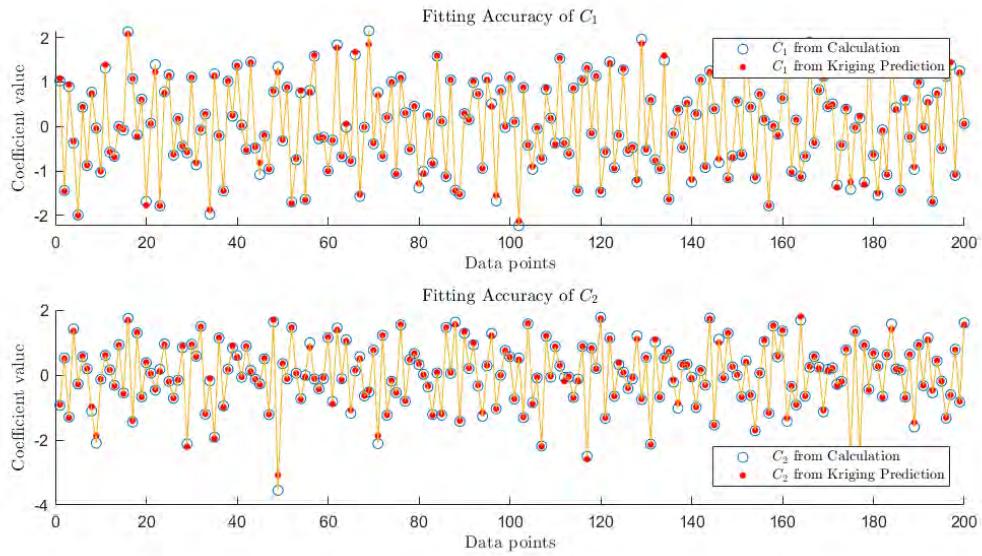
(c) 正啾頻操作中原始動態、PCA 重組之動態、以 Kriging 模型預測重要係數重組之 Y 全體動態比較



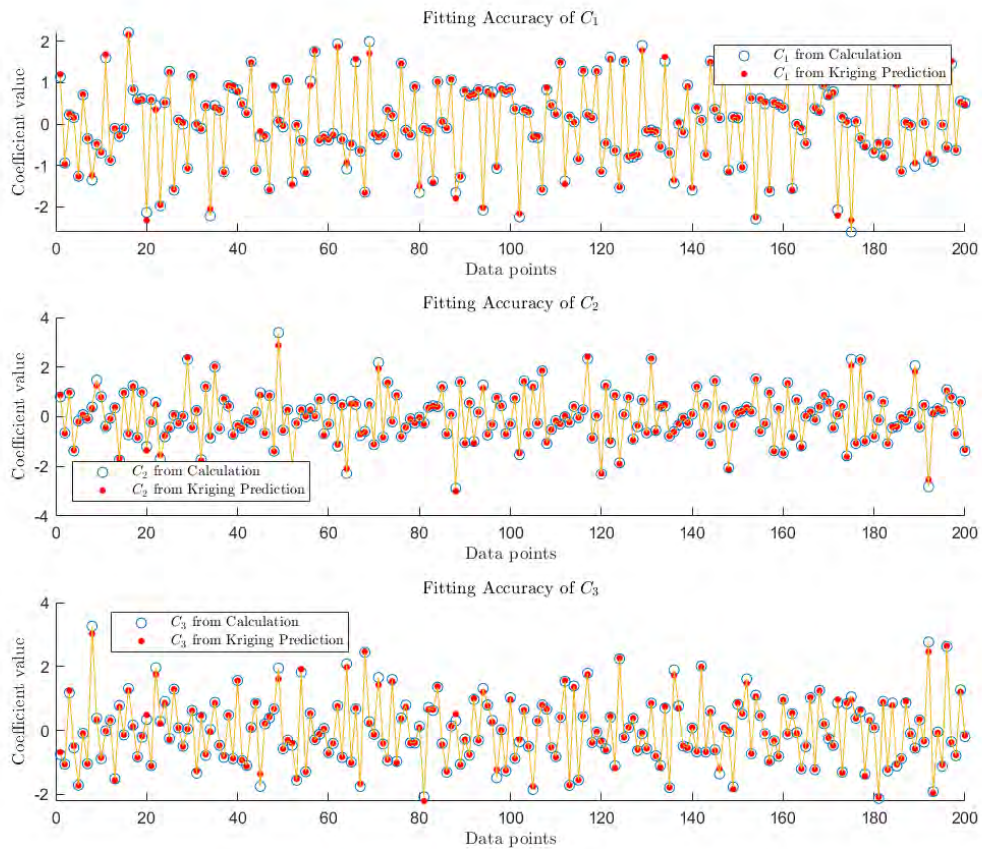
(d) 正啾頻操作中原始動態、PCA 重組之動態、以 Kriging 模型預測重要係數重組之 $\dot{\psi}$ 全體動態比較

圖 B.6: 正啾頻操作中原始動態、PCA 重組之動態、以 Kriging 模型預測重要係數重組動態比較

正啾頻操作下重要係數與預測之重要係數比較 (比較前 200 筆資料):



(a) 正啾頻操作下 X 重要係數與預測之重要係數比較



(b) 正啾頻操作下 Y 重要係數與預測之重要係數比較

圖 B.7: 正啾頻操作下 X 與 Y 重要係數與預測之重要係數比較

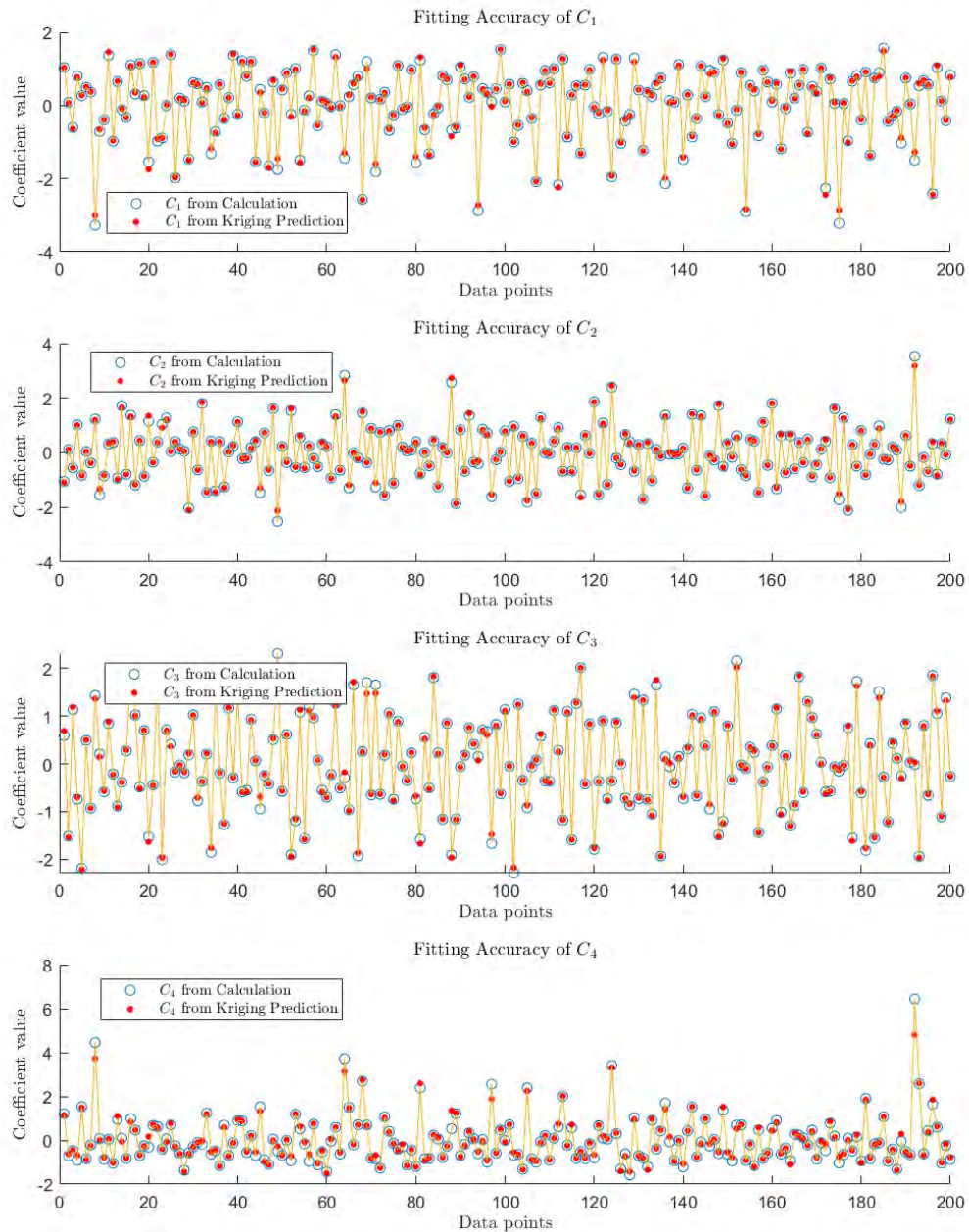


圖 B.8: 正啾頻操作下 ψ 重要係數與預測之重要係數比較

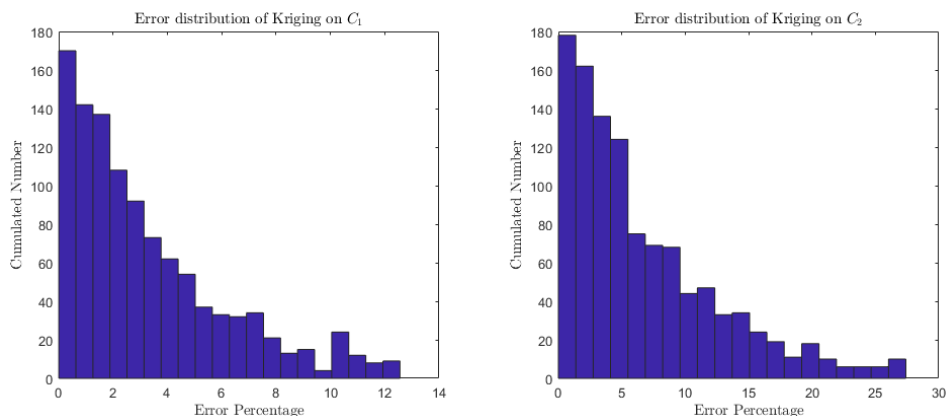
自圖B.6(a)中可看出，在系統的三個觀測狀態中，由 K-L 重組及透過 Kriging 模型預測的重要係數重組之動態，與原始動態完全重合；而圖B.6(b)至圖B.6(d)中則可看見，兩種動態重組的方式皆可呈現與原始資料幾乎相同的動態曲線分佈。圖B.7及圖B.8中則可看到 Kriging 模型對於越接近 0 的重要係數有較準確的預測能力，而對於較極端的重要參數則無法有準確的預測。雖然從 Kriging 模型的誤差百分比分佈較廣，但論重要係數的比較或者資料重組的還原能力，Kriging 模型所呈現的預測能力仍然可有效的預

測模型輸出，也因此認定在正啾頻的操作下，以初始取樣次數 1400 次所擬合的 Kriging 模型替代模擬模型對重要係數進行全域敏感度分析的方法是可行的。

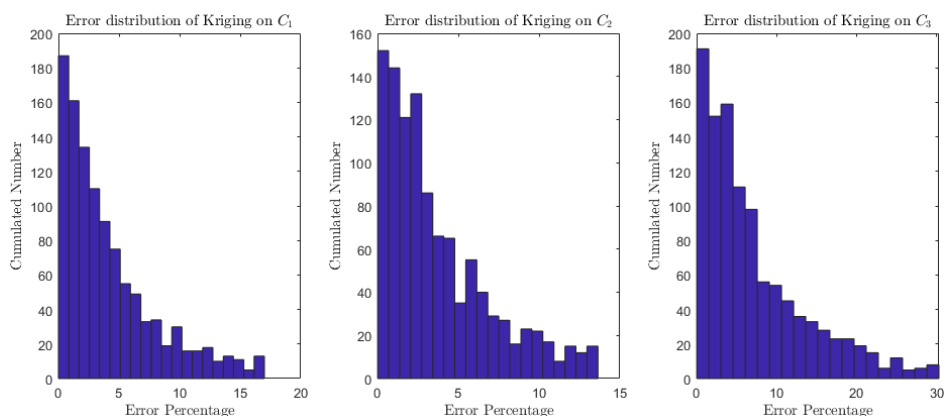


逆啾頻

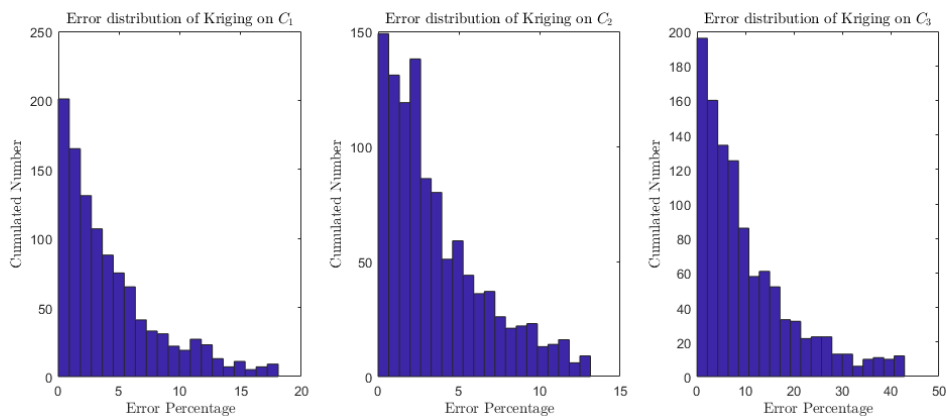
逆啾頻操作下 Kriging 模型驗證下的誤差分佈如下：



(a) 逆啾頻操作中 X 之重要係數預測誤差百分比分佈



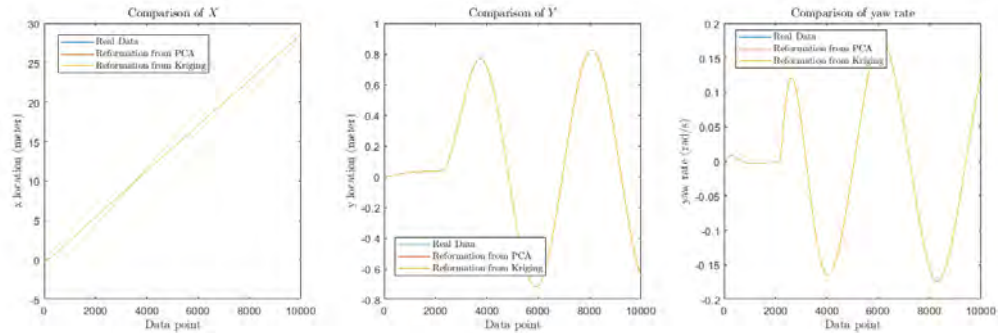
(b) 逆啾頻操作中 Y 之重要係數預測誤差百分比分佈



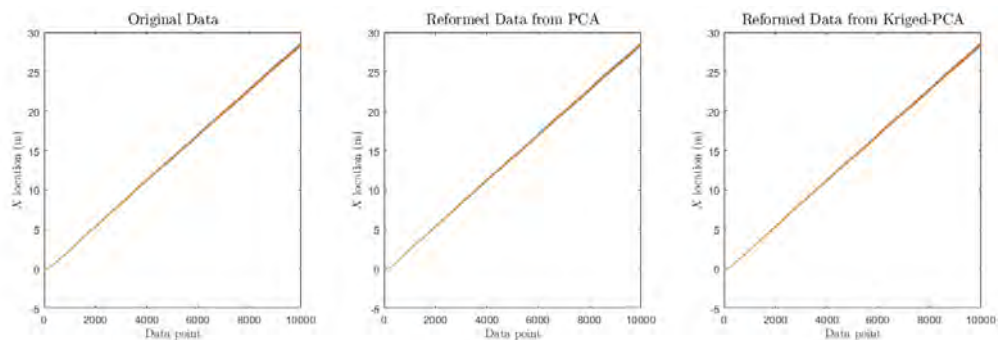
(c) 逆啾頻操作中 ψ 之重要係數預測誤差百分比分佈

圖 B.9: 逆啾頻操作下重要係數預測誤差百分比分佈

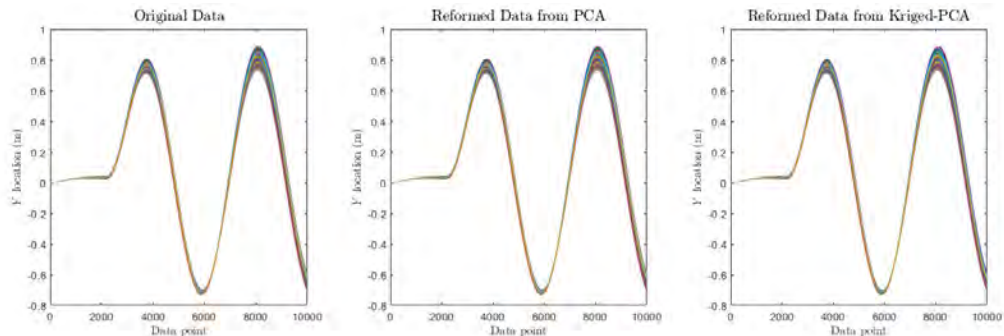
逆啾頻操作下原始輸出動態與還原動態之比較如下：



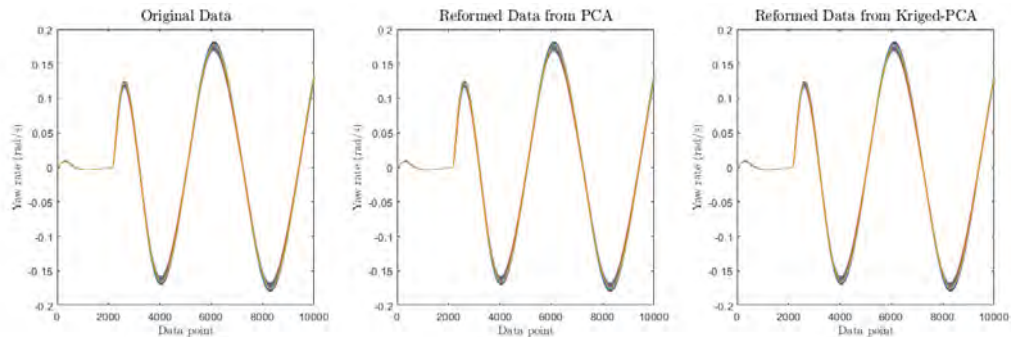
(a) 逆啾頻操作中原始動態、PCA 重組之動態、以 Kriging 模型預測重要係數重組之單一動態比較



(b) 逆啾頻操作中原始動態、PCA 重組之動態、以 Kriging 模型預測重要係數重組之 X 全體動態比較



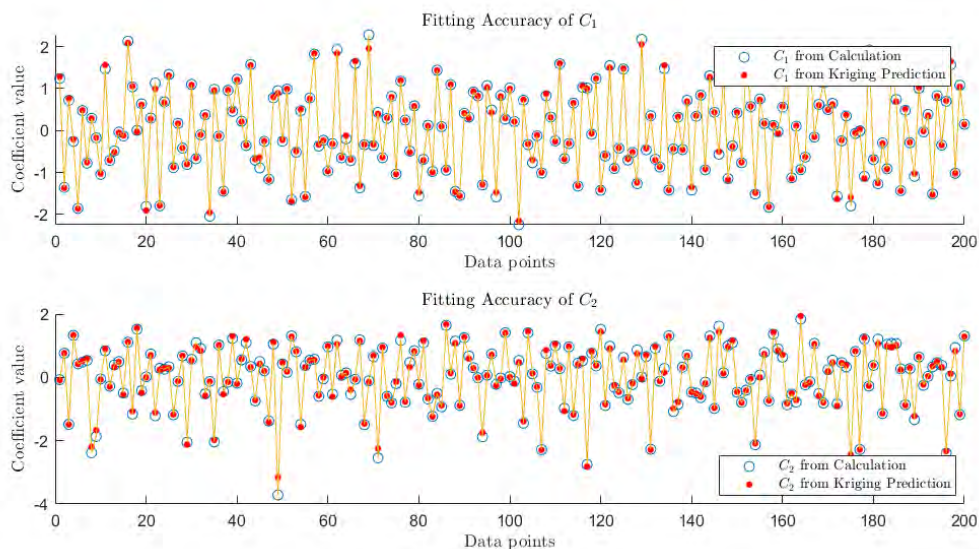
(c) 逆啾頻操作中原始動態、PCA 重組之動態、以 Kriging 模型預測重要係數重組之 Y 全體動態比較



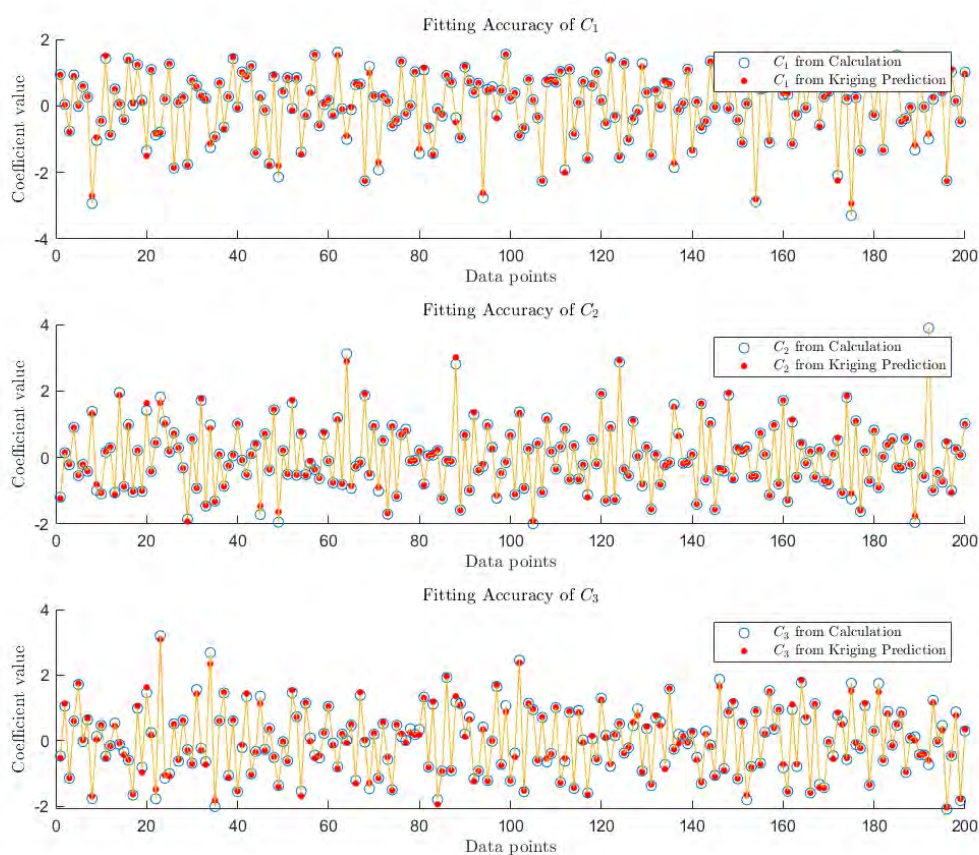
(d) 逆啾頻操作中原始動態、PCA 重組之動態、以 Kriging 模型預測重要係數重組之 $\dot{\psi}$ 全體動態比較

圖 B.10: 逆啾頻操作中原始動態、PCA 重組之動態、以 Kriging 模型預測重要係數重組動態比較

逆啾頻操作下重要係數與預測之重要係數比較 (比較前 200 筆資料):



(a) 逆啾頻操作下 X 重要係數與預測之重要係數比較



(b) 逆啾頻操作下 Y 重要係數與預測之重要係數比較

圖 B.11: 逆啾頻操作下 X 與 Y 重要係數與預測之重要係數比較

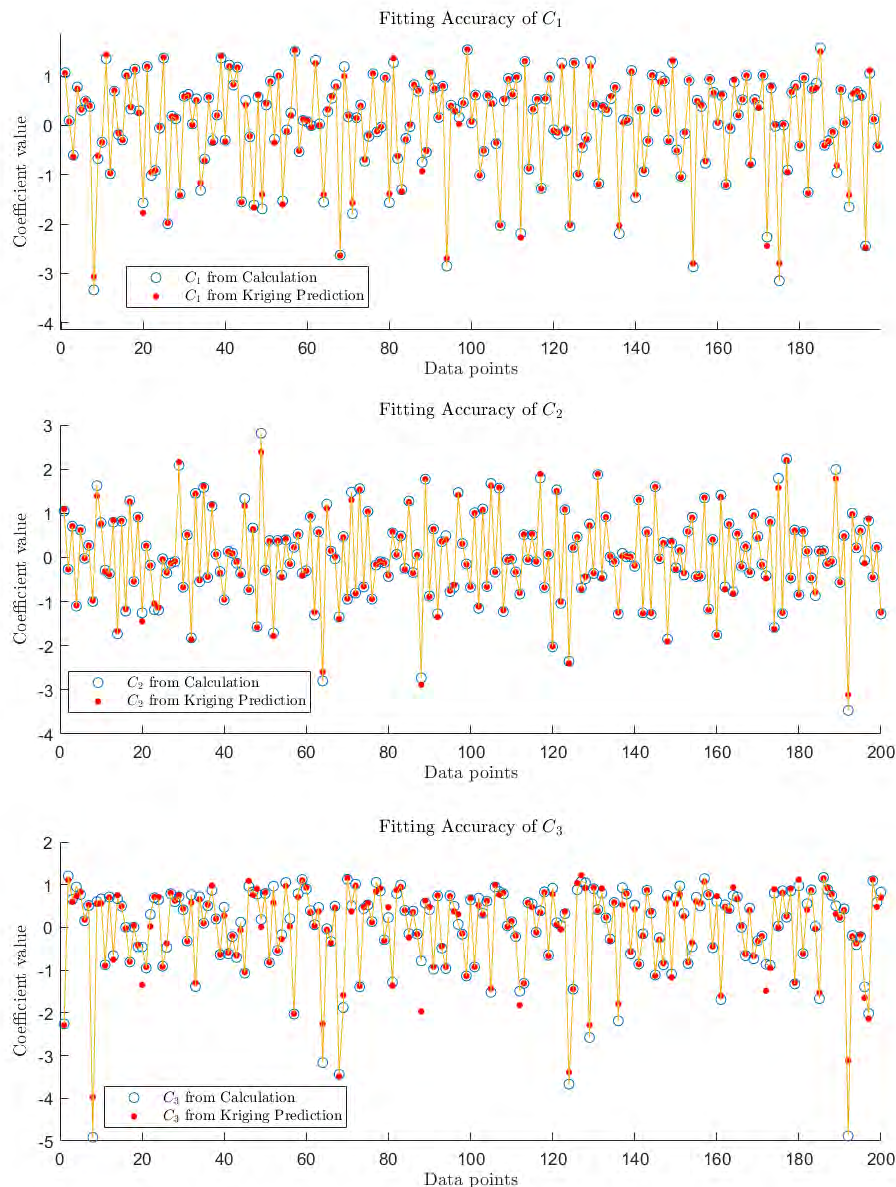


圖 B.12: 逆啾頻操作下 ψ 重要係數與預測之重要係數比較

逆啾頻操作下，由圖B.9所呈現的誤差分佈與正啾頻相似，同樣也在偏移角速度的 C_3 有較差的預測能力，誤差集中於 20% 內，而其他重要係數的預測誤差大多集中於 10% 以內。對於 Kriging 模型對動態的重組而言，無論是圖B.10任意選擇一筆資料進行比較或是圖B.10(b) 至B.10(d)，所還原之資料與原始資料幾乎無法分變差異。圖B.11及圖B.12顯示 Kriging 模型所預測的重要係數與真實的重要係數的偏差狀況，可見 Kriging 模型在大多情況下對於極端數值無法有較準確的預測，且對於預測偏移角速度的 C_3 也呈現較明顯的偏差。儘管如此，由於 Kriging 模型的預測重要係數對動態的重組具有高度還原性，因此認定在逆啾頻的操作下，初始取樣次數為 1400 次能夠建構出足夠信心程度之替代模型，並可用於全域敏感度分析。



B.3 取樣次數與全域敏感度指標之關係

本附錄為補充第6.5.2節中，於定轉角轉向、整啞頻、和逆啞頻之操作下取樣次數與全域敏感度指標之收斂關係。

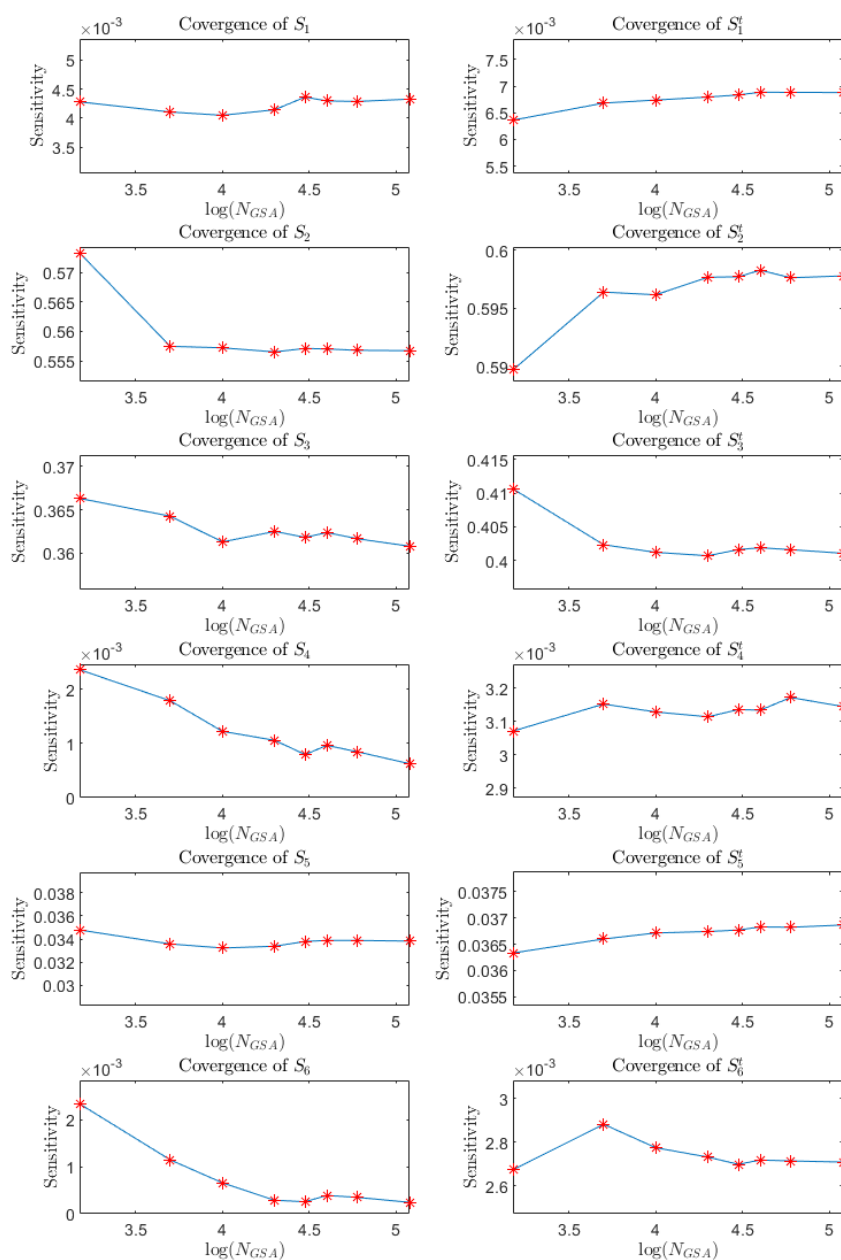


圖 B.13: 定轉角轉向操作下取樣次數與全域敏感度指標關係

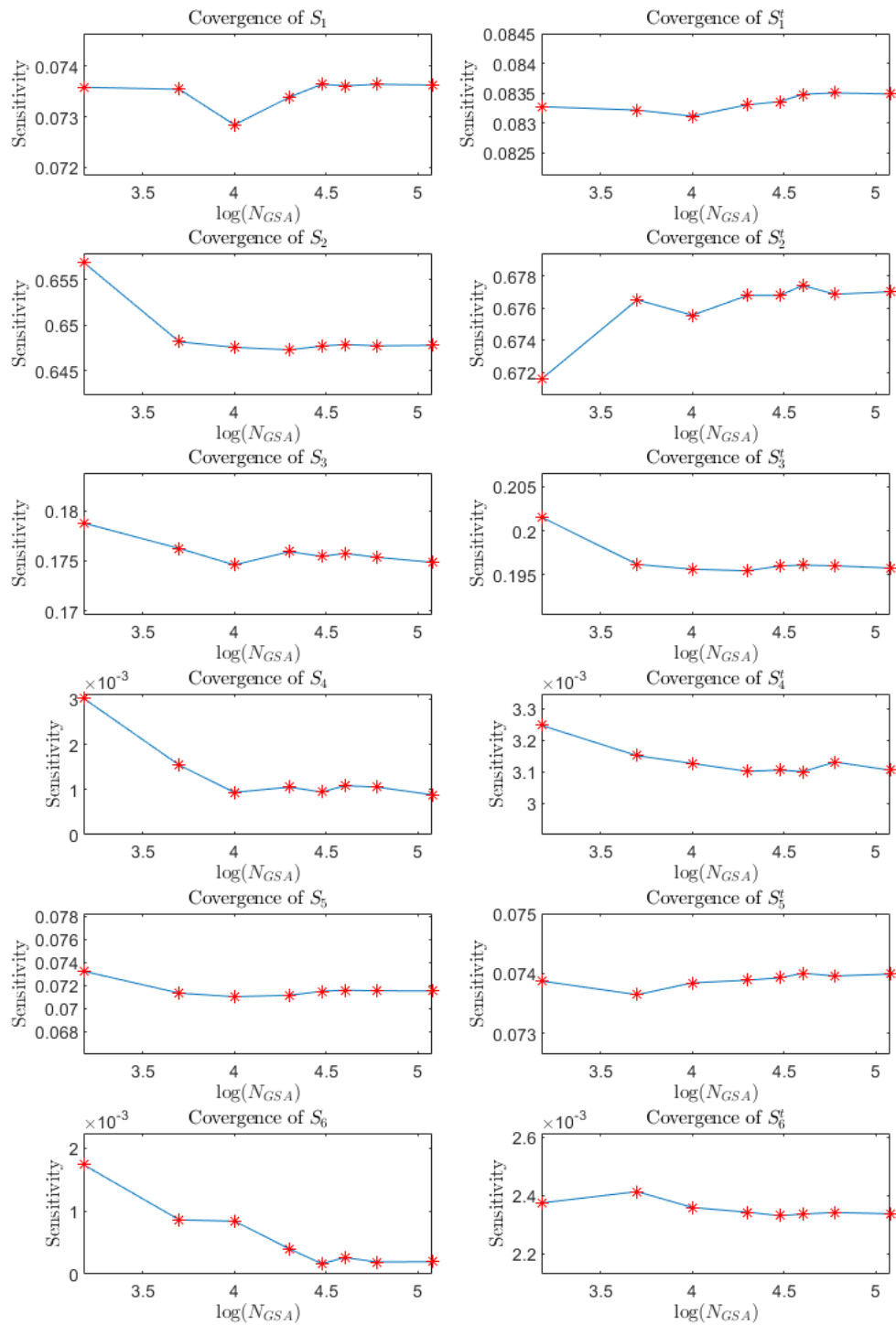


圖 B.14: 正啣頻操作下取樣次數與全域敏感度指標關係

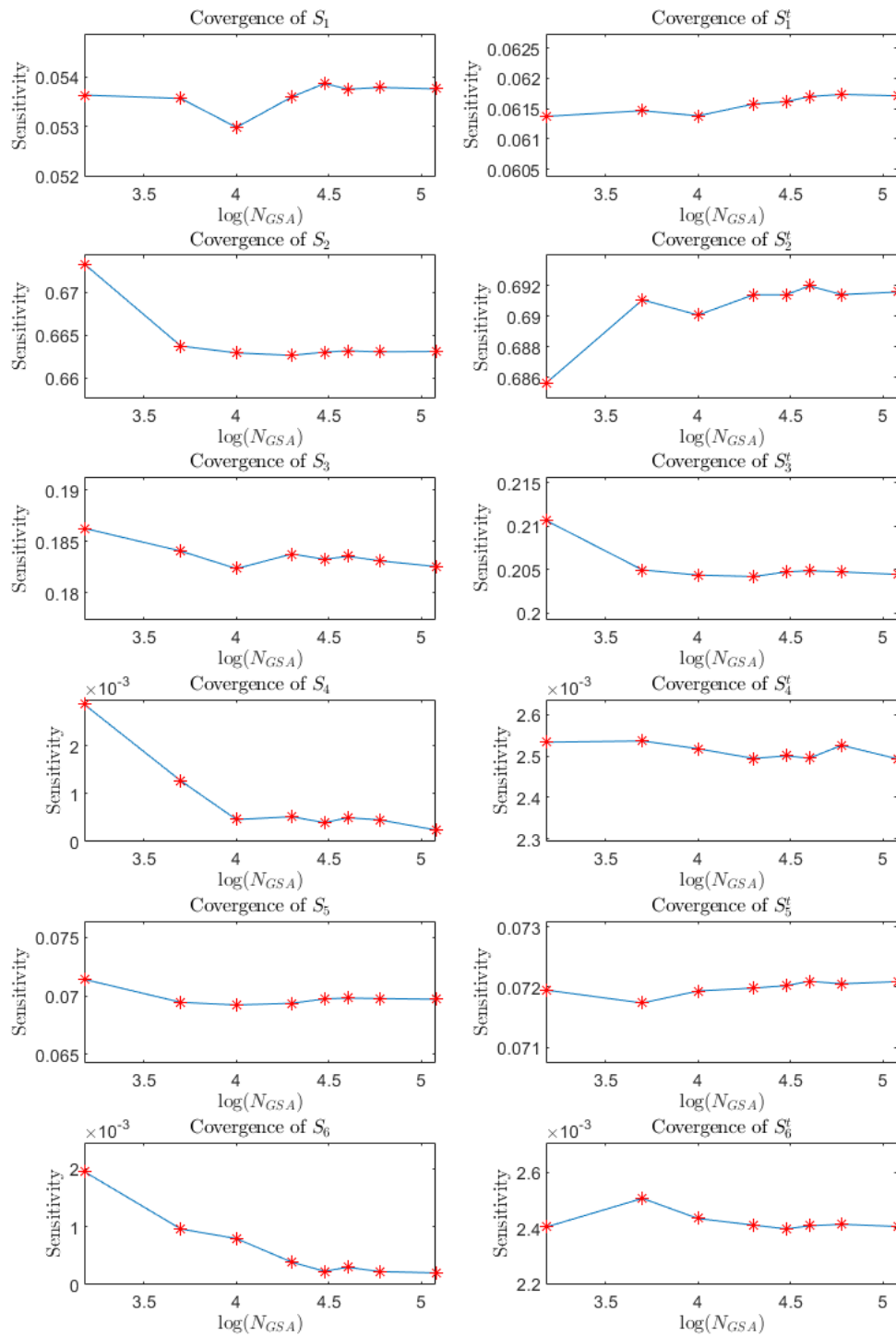


圖 B.15: 逆啾頻操作下取樣次數與全域敏感度指標關係



Matlab Code

此附錄附上用於數學模型之激發與校準所使用的 Matlab 程式碼，包含直接求解法與基於替代模型求解法之全域敏感度分析與激發，以及基於混沌多項式展開之卡爾曼濾波器的程式碼。其餘的程式碼與 Simulink 模型皆開放 Github 供自由使用。網址：<https://github.com/ypchen514/Codes-for-Master-Thesis.git>

C.1 單一輸出數學模型

C.1.1 數學模型

```
1 function y = g(alpha ,p1 ,p2 ,p3 ,p4 ,matrix )
2 for i = 1:size(matrix ,1)
3     R = matrix(i ,:);
4     y(i) = alpha+exp(p1 .*((R(1)-1)^2+R(2).^2)+p2 .* (R(3)^2+R
        (4)^2))+exp(p3 .* (R(1)^2+(R(2)-1)^2)+p4 .* (R(3)^2+R
        (4)^2));
5 end
6
7 end
```

C.1.2 全域敏感度分析主程式

```
1 clear
2 clc
3 close all
4
5 sys_par = [1000,0.0001,1e4];
```



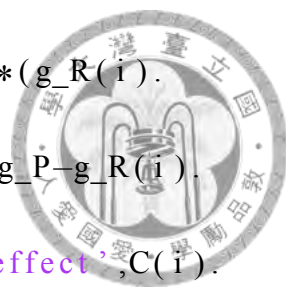
```
6
7  for s = 1:size(sys_par,1)
8
9  %% Parameters
10 % fixed system parameters
11  alpha = 1;
12 % tunable system parameters
13  p1 = -2;
14  p2 = -0.5;
15  p3 = -2;
16  p4 = -0.5;
17
18 % define design variables
19  x1_lb = 0;
20  x1_ub = 1;
21  x1_delta = x1_ub-x1_lb;
22  x2_lb = 0;
23  x2_ub = 1;
24  x2_delta = x2_ub-x2_lb;
25  x3_lb = 0;
26  x3_ub = 1;
27  x3_delta = x3_ub-x3_lb;
28  x4_lb = 0;
29  x4_ub = 1;
30  x4_delta = x4_ub-x4_lb;
31 % uncertainty
32 N_s = sys_par(s,1); % take N times sampling
33 N = sys_par(s,3);% N times sampling for kriging sensitivity
    analysis
34 tic
35 %% sampling for kriging
36 Q = sobolset(4,'skip',200000);% create a different sobol
    sequence
37 Q_ss_1 = net(Q,N_s);
38 input = Q_ss_1;% N_s by 4 matrix as input for 4 variables
    and N_s sampling
39 output = g(alpha,p1,p2,p3,p4,input)';
40 krig_sampling_time = toc
41 %% fitting
```




```
42 lb = [0,0,0,0];
43 ub = [1,1,1,1];
44 fittype = 1;
45 SCFtype = 1;
46 max_variance = 1;
47 run_num = 0;
48
49 %% Infill sampling
50 while max_variance > sys_par(s,2)
51     run_num = run_num+1;
52     % find next
53     kparam = f_variogram_fit(input, output, lb, ub);
54     [x_next, variance_next] = f_find_kriging_max_variance(
        kparam);
55     output_next = g(alpha, p1, p2, p3, p4, x_next)';
56     max_variance = abs(max(variance_next));
57     % recurrent
58     input = [input; x_next];
59     output = [output; output_next];
60 end
61 total_krig_sample = length(output);
62 EGO_time = toc
63 %% Sensitivity Analysis
64 % fp_krig = f_predictkrige(xp, kparam);
65 Q = sobolset(8, 'skip', 20000000); % create a different sobol
    sequence
66 Q_ss = net(Q, N);
67 % Q_ss = lhsdesign(N, 8, 'smooth', 'off');
68 % load('Q_ss');
69
70 P1 = x1_lb + (Q_ss(:, 1) * x1_delta);
71 P2 = x2_lb + (Q_ss(:, 2) * x2_delta);
72 P3 = x3_lb + (Q_ss(:, 3) * x3_delta);
73 P4 = x4_lb + (Q_ss(:, 4) * x4_delta);
74 Q1 = x1_lb + (Q_ss(:, 5) * x1_delta);
75 Q2 = x2_lb + (Q_ss(:, 6) * x2_delta);
76 Q3 = x3_lb + (Q_ss(:, 7) * x3_delta);
77 Q4 = x4_lb + (Q_ss(:, 8) * x4_delta);
78
```



```
79 GSA_sampling_time = toc
80
81 for j = 1:1
82 %% Calculation
83 P = [P1, P2, P3, P4];
84 Q = [Q1, Q2, Q3, Q4];
85
86 pack_size = 1e4;
87 N_pack = floor(N/ pack_size);
88 parfor i = 1:N_pack
89 %     if i <= N_pack
90         g_P_pack = f_predictkrige(P((i-1)*pack_size+1:i*
            pack_size,:), kparam);
91         g_Q_pack = f_predictkrige(Q((i-1)*pack_size+1:i*
            pack_size,:), kparam);
92         g_P(i) = struct('no',i,'value',g_P_pack);
93         g_Q(i) = struct('no',i,'value',g_Q_pack);
94 end
95
96 temp_P = [];
97 temp_Q = [];
98 for i = 1:N_pack
99     temp_P = [temp_P;g_P(i).value];
100    temp_Q = [temp_Q;g_Q(i).value];
101 end
102 g_P = temp_P';
103 g_Q = temp_Q';
104
105 sub_time = toc
106 var_g = 1/N*(sum(g_P.^2))-(1/N*sum(g_P))^2; %Total variance
107
108 for i = 1:4
109     PP = P;
110     QQ = Q;
111     PP(:,i) = QQ(:,i);
112     R(i) = struct('number',i,'in',PP); % will generate R
        matrix as sample matrix
113     g_R(i) = struct('no',i,'value',g(alpha,p1,p2,p3,p4,R(i)
        ).in));% calulate each g(R^j)
```



```

114     C(i) = struct('no',i,'value',1/N*(sum(g_Q.*(g_R(i).
        value-g_P))));
115     D(i) = struct('no',i,'value',1/(2*N)*sum((g_P-g_R(i).
        value).^2));
116     Sj(i) = struct('design_variable',i,'main_effect',C(i).
        value/var_g,'total_effect',D(i).value/var_g);
117
118 end
119
120 Sj_s(j) = struct('no',j,'S1',Sj(1).main_effect,'S2',Sj(2).
        main_effect,'S3',Sj(3).main_effect,'S4',Sj(4).
        main_effect);
121
122 end
123 total_time = toc
124
125 % simulation data
126 Sim_data(s) = struct('Ini_sp',sys_par(s,1),'max_var',
        sys_par(s,2),'MCS_sp',sys_par(s,3),'Krig_samp_t',
        krig_sampling_time,'EGO_N',total_krig_sample,'EGO_t',
        EGO_time,'GSA_sam_t',GSA_sampling_time,'total_t',
        total_time,'Sj',Sj)
127
128 clear g_P;
129 clear g_Q;
130 end

```

C.2 動態輸出數學模型

C.2.1 數學模型 + 主成分分析

```

1 function [C1,C2,C3,C4,C5,lambda,y_e] = g(a_e,b_e,c_e,e_e,x1
    ,x2,x3)
2
3 % Time spand
4 t = linspace(0,15,1500);
5 % Design parameters
6


```



```
7 %% Math model
8 % Experiment model
9 y_e = a_e.*x1.*cos((b_e+x2)./a_e.*t) + c_e.*log(x2).*(sin(t)
    ./x1)+sqrt(x2*t).*b_e*x3)-3+e_e;
10
11 %% Principle Component Analysis (PCA)
12 Yc = y_e-mean(y_e);
13 T = cov(Yc); % Covariance Matrix
14 [L eig_val] = eig(T);
15 eig_val = eig(T);
16 [lambda index_eig_val] = sort(eig_val,'descend');% lambda
    is the eigen value sort in order
17
18 % decreasing dimension
19 theta = 0;
20 i = 1;
21 while theta<0.999
22     trace = sum(lambda);
23     num = sum(lambda(1:i));
24     theta = num/trace;
25     i = i+1;
26 end
27 d = 5;
28
29 for i = 1:d
30     C(:,i) = 1/sqrt(lambda(i))*Yc*L(:,index_eig_val(i));
31 end
32
33 lambda = lambda(1:d);
34
35 C1 = C(:,1);
36 C2 = C(:,2);
37 C3 = C(:,3);
38 C4 = C(:,4);
39 C5 = C(:,5);
```

C.2.2 全域敏感度分析

```
1 %% Global Sensitivity Analysis on PC score
```



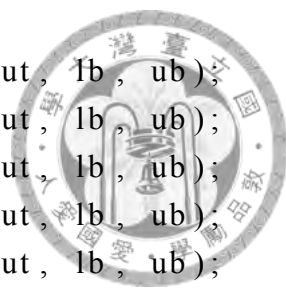
```

2 % The main purpose is to find the PC score of each basis
   function that
3 % compose a sample function
4 % Under this method, the output of a simulation will be the
   PC scores
5 % Thus, sensitivity analysis can be done by analyze the
   change in
6 % a fusion of Pc scores by a weighted sum due to different
   operation
7 % parameters
8 clc
9 clear
10 close all
11
12 tic
13 N_sample_e = 300;
14 %% Model parameters
15 % Operation parameters
16 x1 = 10;
17 x2 = 0.5;
18 x3 = 10;
19 % Random Parameters by Low-discrepancy Sampling
20 Q = sobolset(8,'skip',5000000);% create a different sobol
   sequence
21 Q_ss = net(Q,N_sample_e);
22 P_a = (Q_ss(:,1)-0.5)*0.1+1; % uncertainty of a
23 P_b = (Q_ss(:,2)-0.5)*0.1+1; % uncertainty of b
24 P_c = (Q_ss(:,3)-0.5)*0.1+1; % uncertainty of c
25 P_n = norminv(Q_ss(:,4),0,0.01); % sensing error e_e
26
27 %% Build Kriging Replacing the Math System
28 % Kriging input: P_a,P_b,P_c,P_n
29 % Kriging output: C1,C2,C3,C4,C5
30 Krig_in = [Q_ss(:,1) Q_ss(:,2) Q_ss(:,3) Q_ss(:,4)]; % Q_ss
   from 0~1
31 [C_1_out, C_2_out, C_3_out, C_4_out, C_5_out, lambda_g, y_e] =
   g(P_a,P_b,P_c,P_n,x1,x2,x3); %P varies as its possible
   range
32 plot(y_e(:, :) ');

```




```
33 start_toc = toc;
34 % Build Kriging
35 lb = [0,0,0,0];
36 ub = [1,1,1,1];
37 fittype = 1;
38 SCFtype = 1;
39 max_variance = 1;
40 run_num = 0;
41
42 kparam_C1 = f_variogram_fit(Krig_in , C_1_out , lb , ub);
43 kparam_C2 = f_variogram_fit(Krig_in , C_2_out , lb , ub);
44 kparam_C3 = f_variogram_fit(Krig_in , C_3_out , lb , ub);
45 kparam_C4 = f_variogram_fit(Krig_in , C_4_out , lb , ub);
46 kparam_C5 = f_variogram_fit(Krig_in , C_5_out , lb , ub);
47
48 krig_fit_toc = toc;
49 %% EGO
50 CVar = 0.05; % converge variance = 0.05
51 trial = 0;
52 [x_next , variance_next] = f_find_kriging_max_variance(
    kparam_C1);
53 while abs(variance_next) >= CVar && trial <= 50
54     Krig_in = [Krig_in;[ x_next(1) x_next(2) x_next(3)
        x_next(4)]];
55     P_a = [P_a;(x_next(1)-0.5)*0.1+1];
56     P_b = [P_b;(x_next(2)-0.5)*0.1+1];
57     P_c = [P_c;(x_next(3)-0.5)*0.1+1];
58     P_n = [P_n;normrnd(0,0.01)];
59     [C_1_out , C_2_out , C_3_out , C_4_out , C_5_out , lambda_g ,
        y_e] = g(P_a,P_b,P_c,P_n,x1,x2,x3); %P varies as its
        possible range
60 % Build Kriging
61 lb = [0,0,0,0];
62 ub = [1,1,1,1];
63 fittype = 1;
64 SCFtype = 1;
65 max_variance = 1;
66 run_num = 0;
67
```



```

68     kparam_C1 = f_variogram_fit(Krig_in , C_1_out , lb , ub);
69     kparam_C2 = f_variogram_fit(Krig_in , C_2_out , lb , ub);
70     kparam_C3 = f_variogram_fit(Krig_in , C_3_out , lb , ub);
71     kparam_C4 = f_variogram_fit(Krig_in , C_4_out , lb , ub);
72     kparam_C5 = f_variogram_fit(Krig_in , C_5_out , lb , ub);
73     [x_next, variance_next] = f_find_kriging_max_variance(
        kparam_C1);
74     trial = trial + 1;
75 end
76 EGO_toc = toc;
77 %% Coefficient Prediction
78 N_krig_sample = 4000;
79 Q = sobolset(8, 'skip', 4000000); % create a different sobol
    sequence
80 Q_krig = net(Q, N_krig_sample);
81
82 % P
83 PC_p1 = f_predictkrige(Q_krig(:, 1:4), kparam_C1);
84 PC_p2 = f_predictkrige(Q_krig(:, 1:4), kparam_C2);
85 PC_p3 = f_predictkrige(Q_krig(:, 1:4), kparam_C3);
86 PC_p4 = f_predictkrige(Q_krig(:, 1:4), kparam_C4);
87 PC_p5 = f_predictkrige(Q_krig(:, 1:4), kparam_C5);
88
89 % Q
90 PC_q1 = f_predictkrige(Q_krig(:, 5:8), kparam_C1);
91 PC_q2 = f_predictkrige(Q_krig(:, 5:8), kparam_C2);
92 PC_q3 = f_predictkrige(Q_krig(:, 5:8), kparam_C3);
93 PC_q4 = f_predictkrige(Q_krig(:, 5:8), kparam_C4);
94 PC_q5 = f_predictkrige(Q_krig(:, 5:8), kparam_C5);
95
96 var_g1 = 1/N_sample_e*(sum(PC_p1.^2)) - (1/N_sample_e*sum(
    PC_p1))^2;
97 var_g2 = 1/N_sample_e*(sum(PC_p2.^2)) - (1/N_sample_e*sum(
    PC_p2))^2;
98 var_g3 = 1/N_sample_e*(sum(PC_p3.^2)) - (1/N_sample_e*sum(
    PC_p3))^2;
99 var_g4 = 1/N_sample_e*(sum(PC_p4.^2)) - (1/N_sample_e*sum(
    PC_p4))^2;

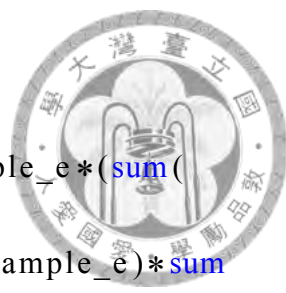
```

```

100 var_g5 = 1/N_sample_e*(sum(PC_p5.^2))-(1/N_sample_e*sum(
    PC_p5))^2;
101
102
103
104 for i = 1:4
105     PP = Q_krig(:,1:4);
106     QQ = Q_krig(:,5:8);
107     PP(:,i) = QQ(:,i);
108     R(i) = struct('number',i,'input',PP);
109     g1_R(:,i)=f_predictkrige(R(i).input(:,1:4),kparam_C1);
110     g2_R(:,i)=f_predictkrige(R(i).input(:,1:4),kparam_C2);
111     g3_R(:,i)=f_predictkrige(R(i).input(:,1:4),kparam_C3);
112     g4_R(:,i)=f_predictkrige(R(i).input(:,1:4),kparam_C4);
113     g5_R(:,i)=f_predictkrige(R(i).input(:,1:4),kparam_C5);
114
115     % Sensitivity of C1
116     num_C1(i) = struct('no',i,'value',1/N_sample_e*(sum(
        PC_q1.*(g1_R(:,i)-PC_p1))));
117     num_D1(i) = struct('no',i,'value',1/(2*N_sample_e)*sum(
        ((PC_p1-g1_R(:,i)).^2));
118     S_C1(i) = struct('design_variable',i,'main_effect',abs(
        num_C1(i).value/var_g1),'total_effect',abs(num_D1(i)
        ).value/var_g1));
119     % Sensitivity of C2
120     num_C2(i) = struct('no',i,'value',1/N_sample_e*(sum(
        PC_q2.*(g2_R(:,i)-PC_p2))));
121     num_D2(i) = struct('no',i,'value',1/(2*N_sample_e)*sum(
        ((PC_p2-g2_R(:,i)).^2));
122     S_C2(i) = struct('design_variable',i,'main_effect',abs(
        num_C2(i).value/var_g2),'total_effect',abs(num_D2(i)
        ).value/var_g2));
123     % Sensitivity of C3
124     num_C3(i) = struct('no',i,'value',1/N_sample_e*(sum(
        PC_q3.*(g3_R(:,i)-PC_p3))));
125     num_D3(i) = struct('no',i,'value',1/(2*N_sample_e)*sum(
        ((PC_p3-g3_R(:,i)).^2));
126     S_C3(i) = struct('design_variable',i,'main_effect',abs(
        num_C3(i).value/var_g3),'total_effect',abs(num_D3(i)

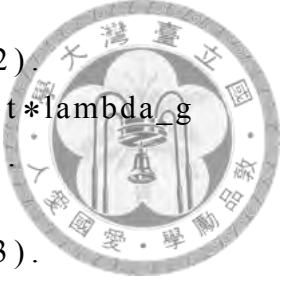
```



```

        ).value/var_g3));
127 % Sensitivity of C4
128 num_C4(i) = struct('no',i,'value',1/N_sample_e*(sum(
        PC_q4.*(g4_R(:,i)-PC_p4))));
129 num_D4(i) = struct('no',i,'value',1/(2*N_sample_e)*sum
        ((PC_p4-g4_R(:,i)).^2));
130 S_C4(i) = struct('design_variable',i,'main_effect',abs(
        num_C4(i).value/var_g4),'total_effect',abs(num_D4(i)
        ).value/var_g4));
131 % Sensitivity of C5
132 num_C5(i) = struct('no',i,'value',1/N_sample_e*(sum(
        PC_q5.*(g5_R(:,i)-PC_p5))));
133 num_D5(i) = struct('no',i,'value',1/(2*N_sample_e)*sum
        ((PC_p5-g5_R(:,i)).^2));
134 S_C5(i) = struct('design_variable',i,'main_effect',abs(
        num_C5(i).value/var_g5),'total_effect',abs(num_D5(i)
        ).value/var_g5));
135 end
136 total_var = sum(lambda_g);
137 S_1 = (S_C1(1).main_effect*lambda_g(1)+S_C2(1).main_effect*
        lambda_g(2)+S_C3(1).main_effect*lambda_g(3)+S_C4(1).
        main_effect*lambda_g(4)+S_C5(1).main_effect*lambda_g
        (5))/total_var;
138 S_2 = (S_C1(2).main_effect*lambda_g(1)+S_C2(2).main_effect*
        lambda_g(2)+S_C3(2).main_effect*lambda_g(3)+S_C4(2).
        main_effect*lambda_g(4)+S_C5(2).main_effect*lambda_g
        (5))/total_var;
139 S_3 = (S_C1(3).main_effect*lambda_g(1)+S_C2(3).main_effect*
        lambda_g(2)+S_C3(3).main_effect*lambda_g(3)+S_C4(3).
        main_effect*lambda_g(4)+S_C5(3).main_effect*lambda_g
        (5))/total_var;
140 S_n = (S_C1(4).main_effect*lambda_g(1)+S_C2(4).main_effect*
        lambda_g(2)+S_C3(4).main_effect*lambda_g(3)+S_C4(4).
        main_effect*lambda_g(4)+S_C5(4).main_effect*lambda_g
        (5))/total_var;
141 St_1 = (S_C1(1).total_effect*lambda_g(1)+S_C2(1).
        total_effect*lambda_g(2)+S_C3(1).total_effect*lambda_g
        (3)+S_C4(1).total_effect*lambda_g(4)+S_C5(1).
        total_effect*lambda_g(5))/total_var;

```



```

142 St_2 = (S_C1(2).total_effect*lambda_g(1)+S_C2(2).
        total_effect*lambda_g(2)+S_C3(2).total_effect*lambda_g
        (3)+S_C4(2).total_effect*lambda_g(4)+S_C5(2).
        total_effect*lambda_g(5))/total_var;
143 St_3 = (S_C1(3).total_effect*lambda_g(1)+S_C2(3).
        total_effect*lambda_g(2)+S_C3(3).total_effect*lambda_g
        (3)+S_C4(3).total_effect*lambda_g(4)+S_C5(3).
        total_effect*lambda_g(5))/total_var;
144 St_n = (S_C1(4).total_effect*lambda_g(1)+S_C2(4).
        total_effect*lambda_g(2)+S_C3(4).total_effect*lambda_g
        (3)+S_C4(4).total_effect*lambda_g(4)+S_C5(4).
        total_effect*lambda_g(5))/total_var;
145
146 % Fusion
147 S_overall = [S_1 St_1;S_2 St_2;S_3 St_3;S_n St_n];
148 overall_toc = toc;
149 EGO_number = N_sample_e + trial;
150 Kriging_fitting_time = krig_fit_toc - start_toc;
151 EGO_time = EGO_toc - krig_fit_toc;
152 GSA_time = overall_toc - EGO_toc;
153 toc_out = [EGO_number Kriging_fitting_time EGO_time
            GSA_time overall_toc];


```

C.2.3 最佳化主程式

```

1 %% Kriging Optimization Algorithm -- Main
2 % main file
3 clc
4 clear
5
6 load('S1_krig.mat');
7 load('S2_krig.mat');
8 load('S3_krig.mat');
9 load('St1_krig.mat');
10 load('St2_krig.mat');
11 load('St3_krig.mat');
12 load('Var.mat');
13
14 count = 0;

```



```

15
16 global S1_krig S2_krig S3_krig St1_krig St2_krig St3_krig
    Var_krig count
17 global S1_est S2_est S3_est St1_est St2_est St3_est var_est
18
19 S_1 = S1_est;
20 S_2 = S2_est;
21 S_3 = S3_est;
22 St_1 = St1_est;
23 St_2 = St2_est;
24 St_3 = St3_est;
25 Var = var_est;
26
27
28 tic
29 % setting
30 options.conTol = 1e-6;
31 options.display = 0;
32 fileInfo.fName = 'obj';
33 % algorithm
34 result = UMDIRECT( fileInfo,[5,0,0],[10,0.5,10], options);
35 % result
36 x_best = result.xBest;
37 y_best = result.fBest;
38 toc
39
40 history = result.rect.x;

```

C.2.4 拘束條件

```

1 %% Objective function
2 function cost = obj(x)
3
4 global S1_krig S2_krig S3_krig St1_krig St2_krig St3_krig
    Var_krig count
5 global S1_est S2_est S3_est St1_est St2_est St3_est var_est
6
7 count = count + 1;
8


```



```
9 S1_est(count) = f_predictkrige(x, S1_krig);
10 S2_est(count) = f_predictkrige(x, S2_krig);
11 S3_est(count) = f_predictkrige(x, S3_krig);
12 St1_est(count) = f_predictkrige(x, St1_krig);
13 St2_est(count) = f_predictkrige(x, St2_krig);
14 St3_est(count) = f_predictkrige(x, St3_krig);
15 var_est(count) = f_predictkrige(x, Var_krig);
16
17 cost = ((St1_est(count)-S1_est(count))/S1_est(count) + (
    S2_est(count)+S3_est(count))/S1_est(count))/var_est(
    count);
18 % cost = ((St2_est(count)-S2_est(count))/S2_est(count) + (
    S1_est(count)+S3_est(count))/S2_est(count))/var_est(
    count);
19 % cost = ((St3_est(count)-S3_est(count))/S3_est(count) + (
    S2_est(count)+S1_est(count))/S3_est(count))/var_est(
    count);
```

C.2.5 基於混沌多項式之卡爾曼濾波器


```
1 %% Polynomial Chaos Expansion Based Kalman — Time
    Dependent Output Case
2 % We use a time-dependent output model as an example
3 % y_e = a_e.*x1.*cos((b_e+x2)./a_e.*t) + c_e.*log(x2).*(sin
    (t./x1)+sqrt(x2*t)).*b_e*x3)-3+e_e;
4 clear
5 clc
6 close all
7 % Create Legendre Function
8 % Variable 1
9 syms x_1
10 phi_1 = [1;x_1;1/2*(3*x_1^2-1);1/2*(5*x_1^3-3*x_1);...% 0-3
    1/8*(35*x_1^4-30*x_1^2+3);1/8*(63*x_1^5-70*x_1^3+15*x_1
    );... % 4-5
    1/16*(231*x_1^6-315*x_1^4+105*x_1^2-5);1/16*(429*x_1
    ^7-693*x_1^5+315*x_1^3-35*x_1)]; % 6-7
13 subs(phi_1, 0.5);
14
15 % Variable 2
```



```

16 syms x_2
17 phi_2 = [1;x_2;1/2*(3*x_2^2-1);1/2*(5*x_2^3-3*x_2);...% 0-3
18         1/8*(35*x_2^4-30*x_2^2+3);1/8*(63*x_2^5-70*x_2^3+15*x_2
19         );... % 4-5
20         1/16*(231*x_2^6-315*x_2^4+105*x_2^2-5);1/16*(429*x_2
21         ^7-693*x_2^5+315*x_2^3-35*x_2)]; % 6-7
22
23 % Variable 3
24 syms x_3
25 syms x_3
26 phi_3 = [1;x_3;1/2*(3*x_3^2-1);1/2*(5*x_3^3-3*x_3);...% 0-3
27         1/8*(35*x_3^4-30*x_3^2+3);1/8*(63*x_3^5-70*x_3^3+15*x_3
28         );... % 4-5
29         1/16*(231*x_3^6-315*x_3^4+105*x_3^2-5);1/16*(429*x_3
30         ^7-693*x_3^5+315*x_3^3-35*x_3)]; % 6-7
31
32 %% Multivariate Polynomials
33 % The polynomial chaos expansion term are the same for
34 % input and system
35 % output. So, we only need to do this process once to
36 % generate
37
38 % Multiply Term
39 P = 7; % truncation , P is the highest order of the
40 % polynomial
41 phi_term1 = [0;1;2;3;4;5;6;7];
42 phi_term2 = [0;1;2;3;4;5;6;7];
43 phi_term3 = [0;1;2;3;4;5;6;7];
44 PHI = [];
45 location = [];
46 Pos = 0;
47 for i = 1:length(phi_term1)
48     for j = 1:length(phi_term2)
49         for l = 1:length(phi_term3)
50             if phi_term1(i)+phi_term2(j)+phi_term3(l) <= P
51                 Mul = [i-1,j-1,l-1];
52                 Pos = Pos+1;
53                 order = sum(Mul);
54                 if nnz(Mul) ==1

```



```

48         location = [location;[Pos,order]];
49     end
50     PHI_temp = phi_1(i)*phi_2(j)*phi_3(1);
51     PHI = [PHI;PHI_temp]; % final multivariate
                             polynomial equation
52     end
53     end
54 end
55 end
56
57 %% Collocation Point
58 Qs = sobolset(3);
59 Q = net(Qs,3*length(PHI)); % 0~1
60
61
62 %% Coefficient
63 % By giving random variable(0-1) with n dimension , we can
    use polynomial
64 % chaos expansion to infer what system input is.
65
66 % Define x
67 x = (Q-0.5)*2; % -1 <= x <= 1, this is the random variable
    for PCE estimation
68 x1 = ((x(:,1)/2+0.5)-0.5)*0.1+1;
69 x2 = ((x(:,2)/2+0.5)-0.5)*0.1+1;
70 x3 = ((x(:,3)/2+0.5)-0.5)*0.1+1;
71
72 % sub Collocation point in polynomial
73 phi = double(subs(PHI',{x_1,x_2,x_3},{x(:,1),x(:,2),x
    (:,3)}))); % create collocation point
74
75 % Define polynomial coefficient of x by Least Square
76 C_x1 = double(inv(phi'*phi)*phi'*x1);
77 C_x2 = double(inv(phi'*phi)*phi'*x2);
78 C_x3 = double(inv(phi'*phi)*phi'*x3);
79
80 % Reconstruct model input in PCE form adding calculated
    coefficient
81 x1_re = PHI'*C_x1;

```




```
82 x2_re = PHI'*C_x2;
83 x3_re = PHI'*C_x3;
84
85 %% Output
86 % Generate system output with uncertain model parameters
87 p1 = 5.0333;
88 p2 = 0.0278;
89 p3 = 9.8444;
90 time_space = 100;
91 terminal_time = 15;
92 t = linspace(0,terminal_time,time_space);
93 y_e = x1.*p1.*cos((x2+p2)./x1.*t) + x3.*log(p2).*(sin(t./p1
    )+sqrt(p2*t).*x2*p3)-3;
94 figure
95 plot(t,y_e);
96
97 %% Extended Kalman Filter
98 desire_piece = 10;
99 k = terminal_time/desire_piece;
100 % Real model
101 % assume x1_real = 0.95, x2_real = 1.01, x3_real = 1.04
102 x1_real = 1.015;
103 x2_real = 1.01;
104 x3_real = 1.04;
105
106 y_exp = x1_real.*p1.*cos((x2_real+p2)./x1_real.*t) +
    x3_real.*log(p2).*(sin(t./p1)+...
107     sqrt(p2*t).*x2_real*p3)-3+normrnd(0,0.1,1,
    time_space);
108
109 % Kalman Filter
110 % 1. Simulation under the predict parameters
111 % 2. Predict covariance matrix
112 % 3. Estimate coefficient of each parameters
113
114 H = 1;
115 R = 0.01;
116 for j = 1:desire_piece+1
117     % Simulation to desire time
```



```

118     t_k = k*(j-1);
119     x1_kf = phi*C_x1;
120     x2_kf = phi*C_x2;
121     x3_kf = phi*C_x3;
122
123     y_sim_kf = x1_kf.*p1.*cos((x2_kf+p2)./x1_kf.*t_k) +
        x3_kf.*log(p2).*(sin(t_k./p1)+...
124         sqrt(p2*t_k).*x2_kf*p3)-3+normrnd(0,0.01,
            length(Q),1);
125
126     % Real model output at t = t_k
127     z_k = interp1(t,y_exp,t_k);
128     % PCE of y_sim_kf
129     C_y_kf = double(inv(phi'*phi)*phi'*y_sim_kf);
130     % Calculate covariance matrix
131     P = cov([y_sim_kf,x1_kf,x2_kf,x3_kf]);
132     Pyy = P(1,1);
133     P_x1_y = P(1,2);
134     P_x2_y = P(1,3);
135     P_x3_y = P(1,4);
136     % Update coefficient of each polynomial at a time
137     for i = 1:length(PHI)
138         % Kernal Delta function
139         if i ==1
140             delta = 1;
141         else
142             delta = 0;
143         end
144         C_x1_a(i) = C_x1(i)+P_x1_y*H'*inv(R+H*Pyy*H)*(z_k*
            delta-H*C_y_kf(i));
145         C_x2_a(i) = C_x2(i)+P_x2_y*H'*inv(R+H*Pyy*H)*(z_k*
            delta-H*C_y_kf(i));
146         C_x3_a(i) = C_x3(i)+P_x3_y*H'*inv(R+H*Pyy*H)*(z_k*
            delta-H*C_y_kf(i));
147     end
148     C_x1 = C_x1_a';
149     C_x2 = C_x2_a';
150     C_x3 = C_x3_a';
151 end

```



```
152 % Final Value
153 x1_final = phi*C_x1;
154 x2_final = phi*C_x2;
155 x3_final = phi*C_x3;
156 x1_target = x1_real*ones(0.2*length(x1_final),1);
157 x2_target = x2_real*ones(0.2*length(x2_final),1);
158 x3_target = x3_real*ones(0.2*length(x3_final),1);
159
160 %% Plot result
161 subplot(1,3,1)
162 hist([x1,x1_final],100);
163 hold on
164 plot([x1_real x1_real],[0,200]);
165 mean(x1_final);
166 xlabel('$x_1$', 'interpreter', 'latex', 'fontsize', 16)
167 legend('Initial Distribution', 'Estimate by KF', 'Real Value'
        , 'Interpreter', 'latex')
168 subplot(1,3,2)
169 hist([x2,x2_final],100);
170 hold on
171 plot([x2_real x2_real],[0,200]);
172 mean(x2_final);
173 xlabel('$x_2$', 'interpreter', 'latex', 'fontsize', 16)
174 legend('Initial Distribution', 'Estimate by KF', 'Real Value'
        , 'Interpreter', 'latex')
175 subplot(1,3,3)
176 hist([x3,x3_final],100);
177 hold on
178 plot([x3_real x3_real],[0,200]);
179 mean(x3_final);
180 xlabel('$x_3$', 'interpreter', 'latex', 'fontsize', 16)
181 legend('Initial Distribution', 'Estimate by KF', 'Real Value'
        , 'Interpreter', 'latex')
182 subtitle('Parameter Estimation with Extended Kalman Filter'
        )
183 figure
184 y_val = mean(x1_final).*p1.*cos((mean(x2_final)+p2)./mean(
        x1_final).*t) + mean(x3_final).*log(p2).*(sin(t./p1)+...
185         sqrt(p2*t).*mean(x2_final)*p3)-3;
```


```
186 plot(y_exp);  
187 hold on  
188 plot(y_val);
```




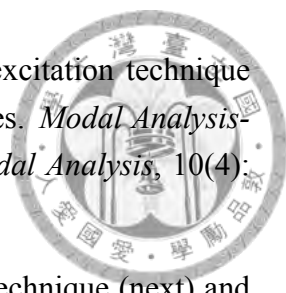



參考文獻

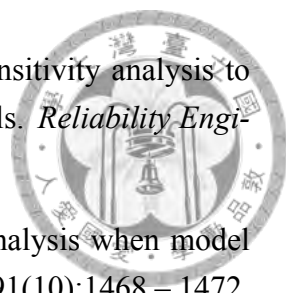
- [1] J. Sacks, W. Welch, T. Mitchell, and H. Wynn. Design and analysis of computer experiments. with comments and a rejoinder by the authors. *Statistical Science*, 4, 01 1989.
- [2] L. E. Schwer. Guide for verification and validation in computational solid mechanics. 2009.
- [3] E. Kutluay and H. Winner. Validation of vehicle dynamics simulation models —a review. *Vehicle System Dynamics*, 52(2):186–200, 2014.
- [4] F. Braghin, F. Cheli, S. Melzi, and F. Resta. Tyre wear model: Validation and sensitivity analysis. *Meccanica*, 41:143–156, 01 2006.
- [5] R. W. Allen, T. J. Rosenthal, D. H. Klyde, K. J. Owens, and H. T. Szostak. Validation of ground vehicle computer simulations developed for dynamics stability analysis. In *SAE Technical Paper*. SAE International, 02 1992.
- [6] M. C. Kennedy and A. O’Hagan. Supplementary details on Bayesian Calibration of Computer Models. 5:300, 1384.
- [7] M. Blundell and D. Harty. *Multibody systems approach to vehicle dynamics*. Elsevier, 2004.
- [8] ISO Central Secretary. Passenger cars - test track for a severe lane-change manoeuvre - part 1: Double lane-change. Standard ISO/TR 3888-1:2018, International Organization for Standardization, Geneva, CH, 2018.
- [9] ISO Central Secretary. Passenger cars —test track for a severe lane-change manoeuvre —part 2: Obstacle avoidance. Standard ISO/TR 3888-2:2011, International Organization for Standardization, Geneva, CH, 2011.
- [10] ISO Central Secretary. Passenger cars —steady-state circular driving behaviour —open-loop test procedure. Standard ISO/TR 4318:2012, International Organization for Standardization, Geneva, CH, 2012.


- 
- [11] ISO Central Secretary. Road vehicles —lateral transient response test methods — open-loop test methods. Standard ISO/TR 7401:2012, International Organization for Standardization, Geneva, CH, 2012.
- [12] ISO Central Secretary. Passenger cars —braking in a turn —open-loop test method. Standard ISO/TR 7975:2019, International Organization for Standardization, Geneva, CH, 2019.
- [13] ISO Central Secretary. Passenger cars —power-off reaction of a vehicle in a turn —open-loop test method. Standard ISO/TR 9816:2018, International Organization for Standardization, Geneva, CH, 2018.
- [14] National Highway Traffic Safety Administration. Laboratory test procedure for dynamic rollover: the fishhook maneuver test procedure. Technical report, 2013.
- [15] E. Kutluay and H. Winner. Assessment methodology for validation of vehicle dynamics simulations using double lane change maneuver. In *Proceedings of the 2012 Winter Simulation Conference (WSC)*, pages 1–12, Dec 2012.
- [16] M. Z. M. Nasir, K. Hudha, M. Z. Amir, and F. A. A. Kadir. Modelling, simulation and validation of 9 dof vehicles model for automatic steering system. In *Applied Mechanics and Materials*, volume 165, pages 192–196. Trans Tech Publ, 2012.
- [17] Y. Peng and X. Yang. Comparison of various double-lane change manoeuvre specifications. *Vehicle System Dynamics*, 50(7):1157–1171, 2012.
- [18] H.-T. Tsai. Analysis the impact of sensing error for vehicle overtaking maneuver using global sensitivity. Master’s thesis, National Taiwan University, 2019.
- [19] J. P. Maurice. Short wavelength and dynamic tyre behaviour under lateral and combined slip conditions. *PhD thesis TU Delft*, 2000.
- [20] D. Wesemeier and R. Isermann. Identification of vehicle parameters using stationary driving maneuvers. *Control Engineering Practice*, 17(12):1426 – 1431, 2009. Special Section: The 2007 IFAC Symposium on Advances in Automotive Control.
- [21] Z.-F. Wang, M.-M. Dong, L. Gu, J.-J. Rath, Y.-C. Qin, and B. Bai. Influence of road excitation and steering wheel input on vehicle system dynamic responses. *Applied Sciences*, 7(6):570, 2017.
- [22] J. D. Setiawan, M. Safarudin, and A. Singh. Modeling, simulation and validation of 14 dof full vehicle model. In *International Conference on Instrumentation, Communication, Information Technology, and Biomedical Engineering 2009*, pages 1–6, Nov 2009.

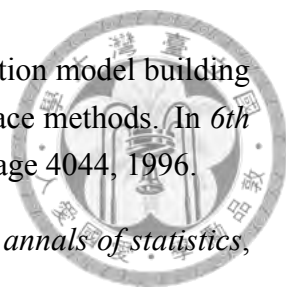
- 
- [23] T.R. Gawade, S. Mukherjee, and D. Mohan. Six-degree-of-freedom three-wheeled-vehicle model validation. *Proceedings of The Institution of Mechanical Engineers Part D-Journal of Automobile Engineering - PROC INST MECH ENG D-JAUTO*, 219:487–498, 04 2005.
- [24] S. Yang and J. Kim. Validation of the 6-dof vehicle dynamics model and its related vba program under the constant radius turn manoeuvre. *International Journal of Automotive Technology*, 13, 06 2012.
- [25] M. Wielitzka, A. Busch, M. Dagen, and T. Ortmaier. Unscented Kalman Filter for State and Parameter Estimation in Vehicle Dynamics. *Kalman Filters - Theory for Advanced Applications*, 2018.
- [26] N. K. Gupta and W. E. Hall Jr. Input design for identification of aircraft stability and control derivatives. Technical Report NASA CR-2493, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D. C. 20546, February 1975.
- [27] W. Wells and S. Ramachandran. Multiple control input design for identification of light aircraft. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(6):985–987, 1977.
- [28] M. S. Roeser. Multi-axis maneuver design for aircraft parameter estimation. In *Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress 2018*, Workshop Item, Friedrichshafen, Germany, 2018.
- [29] G. Calefiore, M. Indri, and B. Bona. Robot dynamic calibration: Optimal excitation trajectories and experimental parameter estimation. *Journal of Robotic Systems*, 18(2):55–68, 2001.
- [30] J. Swevers, C. Ganseman, D. Bilgin Tükel, J. De Schutter, and H. Van Brussel. Optimal robot excitation and identification. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 13(5):730–740, 1997.
- [31] E. Villagrossi, G. Legnani, N. Pedrocchi, F. Vicentini, L. M. Tosatti, F. Abbà, and A. Bottero. Robot dynamic model identification through excitation trajectories minimizing the correlation influence among essential parameters. *ICINCO 2014 - Proceedings of the 11th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*, 2(January 2016):475–482, 2014.
- [32] W. Rackl, R. Lampariello, and G. Hirzinger. Robot excitation trajectories for dynamic parameter estimation using optimized B-splines. *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2042–2047, 2012.


- 
- [33] G.H. James, T. G. Carne, J. P. Lauffer, et al. The natural excitation technique (next) for modal parameter extraction from operating structures. *Modal Analysis-the International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 10(4):260, 1995.
- [34] J.M. Caicedo. Practical guidelines for the natural excitation technique (next) and the eigensystem realization algorithm(era) for modal identification using ambient vibration. *Experimental Techniques*, 35(4):52–58, 2011.
- [35] K. S. Narendra and A. M. Annaswamy. Persistent excitation in adaptive systems. *International Journal of Control*, 45(1):127–160, 1987.
- [36] R. Fales. Robust control design for an electrohydraulic wheel loader system with a human-in-the-loop assessment in a virtual environment. 2004.
- [37] C. Xu and G. Gertner. Extending a global sensitivity analysis technique to models with correlated parameters. *Computational Statistics Data Analysis*, 51(12):5579 – 5590, 2007.
- [38] M. Crosetto and S. Tarantola. Uncertainty and sensitivity analysis: tools for gis-based model implementation. *International Journal of Geographical Information Science*, 15(5):415–437, 2001.
- [39] M. Rodriguez-Fernandez and J. Banga. Global sensitivity analysis of a biochemical pathway model. volume 49, pages 233–242, 01 2008.
- [40] N. Bilal. Implementation of Sobol ’ s Method of Global Sensitivity Analysis to a Compressor Simulation Model. *22nd International Compressor Engineering Conference at Purdue*, pages 1–10, 2014.
- [41] A. Saltelli, S. Tarantola, and K.-S. Chan. A quantitative model-independent method for global sensitivity analysis of model output. *Technometrics*, 41(1):39–56, 1999.
- [42] Y. Qin, Z. Wang, C. Xiang, M. Dong, C. Hu, and R. Wang. A novel global sensitivity analysis on the observation accuracy of the coupled vehicle model. *Vehicle System Dynamics*, 57(10):1445–1466, 2019.
- [43] B. Iooss and P. Lemaître. A review on global sensitivity analysis methods. *Operations Research/ Computer Science Interfaces Series*, 59:101–122, 2015.
- [44] G. J. McRae, J. W. Tilden, and J. H. Seinfeld. Global sensitivity analysis—a computational implementation of the fourier amplitude sensitivity test (fast). *Computers & Chemical Engineering*, 6(1):15–25, 1982.

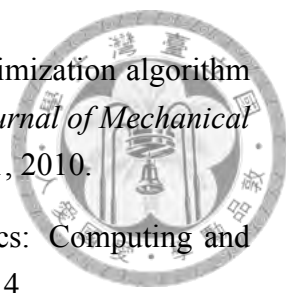
- 
- [45] I. M. Sobol. Sensitivity Estimates for Nonlinear Mathematical Models. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, 9(4):435–447, 2013.
- [46] A. Saltelli, M. Ratto, T. Andres, F. Campolongo, J. Cariboni, D. Gatelli, M. Saisana, and S. Tarantola. *Global sensitivity analysis: the primer*. John Wiley & Sons, 2008.
- [47] D.M. King and B.J.C. Perera. Morris method of sensitivity analysis applied to assess the importance of input variables on urban water supply yield —a case study. *Journal of Hydrology*, 477:17 – 32, 2013.
- [48] D. C. Montgomery. *Design and analysis of experiments*. John wiley & sons, 2017.
- [49] A. Saltelli, P. Annoni, I. Azzini, F. Campolongo, M. Ratto, and S. Tarantola. Variance based sensitivity analysis of model output. design and estimator for the total sensitivity index. *Computer Physics Communications*, 181(2):259–270, 2010.
- [50] S. Kucherenko, M. Rodriguez-Fernandez, C. Pantelides, and N. Shah. Monte carlo evaluation of derivative-based global sensitivity measures. *Reliability Engineering System Safety*, 94(7):1135 – 1148, 2009. Special Issue on Sensitivity Analysis.
- [51] N. Magdy, M. A. Sakr, T. Mostafa, and K. El-Bahnasy. Review on trajectory similarity measures. In *2015 IEEE Seventh International Conference on Intelligent Computing and Information Systems (ICICIS)*, pages 613–619, Dec 2015.
- [52] Y.-S. Moon and J. Kim. Fast normalization-transformed subsequence matching in time-series databases. *IEICE transactions on information and systems*, 90(12), 2007.
- [53] Y. Lepage. A combination of wilcoxon’s and ansari-bradley’s statistics. *Biometrika*, 58(1):213–217, 1971.
- [54] J. Frank and J. Massey. The kolmogorov-smirnov test for goodness of fit. *Journal of the American Statistical Association*, 46(253):68–78, 1951.
- [55] D. J. Berndt and J. Clifford. Using dynamic time warping to find patterns in time series. In *Proceedings of the 3rd International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, pages 359–370, 1994.
- [56] M. Karkee and B. L. Steward. Local and global sensitivity analysis of a tractor and single axle grain cart dynamic system model. *Biosystems Engineering*, 106(4): 352–366, 2010.
- [57] J. Guo, S. Du, Yao W., and S. Zeng. Time-dependent global sensitivity analysis for long-term degeneracy model using polynomial chaos. *Advances in Mechanical Engineering*, 6:719825, 2014.


- 
- [58] M. Lamboni, H. Monod, and D. Makowski. Multivariate sensitivity analysis to measure global contribution of input factors in dynamic models. *Reliability Engineering System Safety*, 96(4):450 – 459, 2011.
- [59] C. Katherine, D. M. Michael, and J. W. Brian. Sensitivity analysis when model outputs are functions. *Reliability Engineering System Safety*, 91(10):1468 – 1472, 2006. The Fourth International Conference on Sensitivity Analysis of Model Output (SAMO 2004).
- [60] R. C. Smith. *Uncertainty Quantification: Theory, Implementation, and Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, USA, 2013.
- [61] T. Sumner, E. Shephard, and I. Bogle. A methodology for global-sensitivity analysis of time-dependent outputs in systems biology modelling. *Journal of The Royal Society Interface*, 9(74):2156–2166, 2012.
- [62] M. De Lozzo and A. Marrel. Sensitivity analysis with dependence and variance-based measures for spatio-temporal numerical simulators. *Stochastic environmental research and risk assessment*, 31(6):1437–1453, 2017.
- [63] A. Alexanderian, P. A. Gremaud, and R. C. Smith. Variance-based sensitivity analysis for time-dependent processes. *Reliability Engineering System Safety*, 196:106722, 2020.
- [64] T.J. Santner, B. J. Williams, and W. Notz. *The design and analysis of computer experiments*, volume 1. Springer, 2003.
- [65] U. M. Diwekar and J. R. Kalagnanam. Efficient sampling technique for optimization under uncertainty. *AIChE Journal*, 43(2):440–447, 1997.
- [66] Y.-T. Wu. Efficient probabilistic design by converting reliability constraints to approximately equivalent deterministic constraints. *Journal of Inter-grated Design and Process Sciences*, 2(4):13–21, 1998.
- [67] R. R. Barton. Simulation metamodels. In *1998 Winter Simulation Conference. Proceedings (Cat. No. 98CH36274)*, volume 1, pages 167–174. IEEE, 1998.
- [68] W. Chen, R. Garimella, and N. Michelena. Robust design for improved vehicle handling under a range of maneuver conditions. *Engineering Optimization*, 33(3): 303–326, 2001.
- [69] N. V. Queipo, R. T. Haftka, W. Shyy, T. Goel, R. Vaidyanathan, and P. K. Tucker. *Surrogate-based analysis and optimization*, volume 41. 2005.


- 
- [70] T. J. Santner and B. J. Williams and W. I. Notz. *The Design and Analysis of Computer Experiments*, volume 46. 2004.
- [71] R. Jin. *Enhancements of Metamodeling Techniques in Engineering Design*. PhD thesis, University of Illinois at Chicago, Chicago, IL, 2004.
- [72] J. Hammersley. *Monte carlo methods*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [73] L. Kuipers and H. Niederreiter. *Uniform distribution of sequences*. Courier Corporation, 2012.
- [74] A. Keller. Quasi-monte carlo radiosity. In *Rendering Techniques '96*, pages 101–110. Springer, 1996.
- [75] H. Niederreiter. *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods*, volume 63. Siam, 1992.
- [76] G. Taguchi. Quality engineering (taguchi methods) for the development of electronic circuit technology. *IEEE Transactions on Reliability*, 44(2):225–229, 1995.
- [77] T. Wong, W. Luk, and P. Heng. Sampling with hammersley and halton points. *Journal of Graphics Tools*, 2(2):9–24, 1997.
- [78] R. L. Iman. Latin Hypercube Sampling. *Encyclopedia of Quantitative Risk Analysis and Assessment*, (January 1999), 2008.
- [79] I. M. Sobol. On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 7(4): 784–802, 1967.
- [80] I. Krykova. Evaluating of path-dependent securities with low discrepancy methods. Master's thesis, Worcester Polytechnic Institute, 2004.
- [81] R. R. Barton and M. Meckesheimer. Metamodel-based simulation optimization. *Handbooks in operations research and management science*, 13:535–574, 2006.
- [82] G. E. P. Box and K. B. Wilson. On the experimental attainment of optimum conditions. *Journal of the royal statistical society: Series b (Methodological)*, 13(1): 1–38, 1951.
- [83] M. S. Phadke. *Quality engineering using robust design*. Prentice Hall PTR, 1995.
- [84] D. G. Luenberger. *Optimization by vector space methods*. John Wiley & Sons, 1997.


- 
- [85] R. Unal, R. Lepsch, W. Engelund, and D. Stanley. Approximation model building and multidisciplinary design optimization using response surface methods. In *6th Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, page 4044, 1996.
 - [86] J. H. Friedman. Multivariate adaptive regression splines. *The annals of statistics*, pages 1–67, 1991.
 - [87] A. Sudjianto, L. Juneja, H. Agrawal, and M. Vora. Computer aided reliability and robustness assessment. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 5(02):181–193, 1998.
 - [88] N. Cressie. The origins of kriging. *Mathematical geology*, 22(3):239–252, 1990.
 - [89] A. J. Booker, J.E. Dennis, P. D. Frank, D. B. Serafini, and V. Torczon. Optimization using surrogate objectives on a helicopter test example. In *Computational Methods for Optimal Design and Control*, pages 49–58. Springer, 1998.
 - [90] S. Chen, T. Shi, D. Wang, and J. Chen. Multi-objective optimization of the vehicle ride comfort based on kriging approximate model and nsga-ii. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 29(3):1007–1018, 2015.
 - [91] M. J. Sasena. *Flexibility and efficiency enhancements for constrained global design optimization with kriging approximations*. PhD thesis, University of Michigan Ann Arbor, MI, 2002.
 - [92] R. Jin, W. Chen, and T. W. Simpson. Comparative studies of metamodelling techniques under multiple modelling criteria. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 23(1):1–13, 2001.
 - [93] R. Oliva. Model calibration as a testing strategy for system dynamics models. *European Journal of Operational Research*, 151(3):552–568, 2003.
 - [94] A. Tarantola. *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*, volume 89. siam, 2005.
 - [95] J. P. Bishwal. *Parameter estimation in stochastic differential equations*. Springer, 2007.
 - [96] M. Karkee and B. L. Steward. Parameter estimation and validation of a tractor and single axle towed implement dynamic system model. *Computers and electronics in agriculture*, 77(2):135–146, 2011.
 - [97] M.-H. Lee. *Identification and Calibration of Complex Model Parameters via Multiple Performance Deviations*. Master’s thesis, National Taiwan University, 2018.


- 
- [98] Y.-H. Chu. *Model Validation on Engineering System with Dynamic Performances Using Statistical Similarity and Fitness Metrics*. Master's thesis, National Taiwan University, 2017.
- [99] Z. Wang, Y. Fu, R. J. Yang, S. Barbat, and W. Chen. Validating Dynamic Engineering Models under Uncertainty. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 138(11), 2016.
- [100] Y.-I. Lin. *Identifying Parameter Uncertainties in Model Calibration of Complex Systems*. Master's thesis, National Taiwan University, 2016.
- [101] R. E. Kalman. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering*, 82(1):35–45, 03 1960.
- [102] G. Terejanu. Extended kalman filter tutorial. *Technical Report: Extended Kalman Filter Tutorial*, page 7, 2003.
- [103] R. Astroza, H. Ebrahimian, and J. P. Conte. Material parameter identification in distributed plasticity fe models of frame-type structures using nonlinear stochastic filtering. *Journal of Engineering Mechanics*, 141(5):04014149, 2015.
- [104] E. D. Blanchard, A. Sandu, and C. Sandu. A polynomial chaos-based kalman filter approach for parameter estimation of mechanical systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, 132(6):1–18, 2010.
- [105] G. Saad, R. Ghanem, and S. Masri. Robust system identification of strongly nonlinear dynamics using a polynomial chaos-based sequential data assimilation technique. In *48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, page 2211, 2007.
- [106] J. Li and D. Xiu. A generalized polynomial chaos based ensemble kalman filter with high accuracy. *Journal of computational physics*, 228(15):5454–5469, 2009.
- [107] A. H.C. Smith, A. Monti, and F. Ponci. Indirect measurements via a polynomial chaos observer. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 56(3):743–752, 2007.
- [108] R. E. Caflisch. Monte carlo and quasi-monte carlo methods. *Acta numerica*, 7:1–49, 1998.
- [109] E.J. Watson. Primitive polynomials (mod 2). *Math. Comp*, 16(368):1962, 1962.
- [110] Y.-C. Huang. *A Modified Efficient Global Optimization Algorithm for Maximal Reliability within a Probabilistic Constrained Space*. Master's thesis, National Cheng Kung University, Tainan, Taiwan, 2009.

- 
- [111] Y.-C. Huang and K.-Y. Chan. A modified efficient global optimization algorithm for maximal reliability in a probabilistic constrained space. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 132(6):0610021–06100211, 2010.
 - [112] M.A. Oliver and R. Webster. A tutorial guide to geostatistics: Computing and modelling variograms and kriging. *CATENA*, 113:56 – 69, 2014.
 - [113] D. R. Jones, M. Schonlau, and W. J. Welch. Efficient global optimization of expensive black-box functions. *Journal of Global optimization*, 13(4):455–492, 1998.
 - [114] H. J. Kushner. A New Method of Locating the Maximum Point of an Arbitrary Multipeak Curve in the Presence of Noise. *Journal of Basic Engineering*, 86(1): 97–106, 03 1964.
 - [115] H. Gao, J. Wang, and P. Zhao. The updated kriging variance and optimal sample design. *Mathematical Geology*, 28(3):295–313, 1996.
 - [116] M. Sasena, P. Papalambros, and P. Goovaerts. Global optimization of problems with disconnected feasible regions via surrogate modeling. In *9th AIAA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, page 5573, 2002.
 - [117] N. J. D. Nagelkerke et al. A note on a general definition of the coefficient of determination. *Biometrika*, 78(3):691–692, 1991.
 - [118] J. Haase. *Models, Methods, and Tools for Complex Chip Design*. Springer, 2016.
 - [119] W. Chen, R. Jin, and A. Sudjianto. Analytical variance-based global sensitivity analysis in simulation-based design under uncertainty. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 127(5):875–886, 2005.
 - [120] K. Pearson. On lines and planes of closest fit to systems of points in space. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 2(11):559–572, 1901.
 - [121] L. Wang. *Karhunen-Loeve expansions and their applications*. PhD thesis, London School of Economics and Political Science (United Kingdom), 2008.
 - [122] D. Whitley. A genetic algorithm tutorial. *Statistics and computing*, 4(2):65–85, 1994.
 - [123] D. Finkel. Direct optimization algorithm user guide. Technical report, North Carolina State University. Center for Research in Scientific Computation, 2003.
 - [124] D. R. Jones, C. D. Perttunen, and B. E. Stuckman. Lipschitzian optimization without the lipschitz constant. *Journal of optimization Theory and Applications*, 79(1): 157–181, 1993.

- 
- [125] D. Jones. The direct global optimization algorithm. *Encyclopedia of Optimization*, 1, 01 2001.
 - [126] T. Crestaux, O. Le Maître, and J. M. Martinez. Polynomial chaos expansion for sensitivity analysis. *Reliability Engineering and System Safety*, 94(7):1161–1172, 2009.
 - [127] N. Wiener. The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60(4): 897–936, 1938.
 - [128] D. Xiu and G. E. Karniadakis. The Wiener-Askey Polynomial Chaos for Stochastic Differential Equation. 14(2):334–358, 2003.
 - [129] D. Xiu and G. E. Karniadakis. Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos. *Journal of computational physics*, 187(1):137–167, 2003.
 - [130] C Sandu, A Sandu, B. J. Chan, and M. Ahmadian. Treatment of constrained multi-body dynamic systems with uncertainties. Technical report, SAE Technical Paper, 2005.
 - [131] L. Li, C. Sandu, and A. Sandu. Modeling and simulation of a full vehicle with parametric and external uncertainties. In *ASME 2005 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, pages 209–214. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, 2005.
 - [132] A. Sandu, C. Sandu, and M. Ahmadian. Modeling multibody systems with uncertainties. Part I: Theoretical and computational aspects. *Multibody System Dynamics*, 15(4):369–391, 2006.
 - [133] Wolfram mathworld - legendre polynomial. <https://mathworld.wolfram.com/LegendrePolynomial.html>. Accessed: 2020-04-9.
 - [134] B. Sudret. Polynomial chaos expansions and stochastic finite element methods. *Risk and reliability in geotechnical engineering*, pages 265–300, 2014.
 - [135] Object tracking: Kalman filter with ease. <https://www.codeproject.com/Articles/865935/Object-Tracking-Kalman-Filter-with-Ease>. Accessed: 2020-04-9.
 - [136] R. N. Jazar. *Vehicle dynamics: theory and application*. Springer, 2017.
 - [137] H. Bellem, T. Schöenberg, J. F. Krems, and M. Schrauf. Objective metrics of comfort: developing a driving style for highly automated vehicles. *Transportation research part F: traffic psychology and behaviour*, 41:45–54, 2016.

- 
- [138] L. Ljung. System identification. *Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering*, pages 1–19, 1999.
- [139] E. P. Ping, K. Hudha, and H. Jamaluddin. Hardware-in-the-loop simulation of automatic steering control for double lane change and sine steer manoeuvres. *International journal of vehicle autonomous systems*, 10(1-2):67–104, 2012.
- [140] K. Berntorp. Derivation of a six degrees-of-freedom ground-vehicle model for automotive applications. *Department of Automatic Control, Lund University, Sweden, Technical Report ISRN LUTFD2/TFRT–7627–SE*, 2013.
- [141] M. Mondek and M. Hromčík. Linear analysis of lateral vehicle dynamics. In *2017 21st International Conference on Process Control (PC)*, pages 240–246. IEEE, 2017.
- [142] C. C. Ihueze and P. S. Ebisike. Dynamic analysis of instability in three-wheeler automobile vehicle. *Archives of Current Research International*, pages 1–10, 2018.
- [143] F. Ahmad, K. Hudha, and M. H. Harun. Pneumatically actuated active suspension system for reducing vehicle dive and squat. *Jurnal mekanikal*, 28(1), 2009.
- [144] J.-Y. Wong. *Theory of ground vehicles*. John Wiley & Sons, 2008.
- [145] J. C. Huston, B. J. Graves, and D. B. Johnson. Three wheeled vehicle dynamics. *SAE Transactions*, pages 591–604, 1982.
- [146] A. Zandieh. Dynamics of a three_wheel vehicle with tadpole design. Master’s thesis, University of Waterloo, 2015.
- [147] L. Wibowo, G. Pratama, E. Surojo, et al. Simulation and analysis of three wheeled reverse trike vehicles with pid controller. In *American Institute of Physics Conference Series*, volume 1983, 2018.
- [148] M.A. Saeedi and R. Kazemi. Stability of three-wheeled vehicles with and without control system. 2013.
- [149] J. Berote, J. Darling, and A. Plummer. Lateral dynamics simulations of a three-wheeled tilting vehicle. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 229(3):342–356, 2015.
- [150] M.K. Naidu and T. Rao, S. S. and Tejesh. Ride analysis of three wheeled vehicle using matlab/simulink. *International Journal on Manufacturing and Material Science*, 2(1):22, 2012.

- 
- [151] M. Kissai, B. Monsuez, X. Mouton, D. Martinez, and A. Tapus. Adaptive robust vehicle motion control for future over-actuated vehicles. *Machines*, 7(2):26, 2019.
 - [152] M. Blundell and D. Harty. *The Multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics*. Elsevier, Netherlands, 2014. This book is not available on the repository.
 - [153] S. Lu, H. Feng, Z. Zuo, L. Kang, and B. Yu. NVH optimization of vehicle powertrain. In *Proceedings of the FISITA 2012 World Automotive Congress*, pages 141–149. Springer, 2013.
 - [154] A. Morozov, K. Humphries, T. Zou, S. Martins, and J. Angeles. Design and optimization of a drivetrain with two-speed transmission for electric delivery step van. 12 2014.
 - [155] S.-L. Tsai. *The Research for Active Safety Control Strategy Integrating Adaptive Cruise Control and Auto-Overtaking*. Master’s thesis, National Taiwan University, 2017.
 - [156] L. Segel. Theoretical prediction and experimental substantiation of the response of the automobile to steering control. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers: Automobile Division*, 10(1):310–330, 1956.
 - [157] H. K. Richard, T. M. Duane, H. W. David, W. A. Robert, and R. W. Humes. Automobile controllability. driver/vehicle response for steering control. volume ii. supporting experimental results. 1975.
 - [158] R. W. Allen and T. J. Rosenthal. Requirements for vehicle dynamics simulation models. Technical report, SAE Technical Paper, 1994.
 - [159] L.V. Radionova and A.D. Chernyshev. Mathematical model of the vehicle in matlab simulink. *Procedia engineering*, 129:825–831, 2015.
 - [160] Hybrid electric vehicle (hev) power train using battery model. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/33310-hybrid-electric-vehicle-hev-power-train-using-battery-model>. Accessed: 2020-03-31.
 - [161] R. D. Martino. *Modelling and Simulation of the Dynamic Behaviour of the Automobile*. PhD thesis, 2005.
 - [162] F. Ahmad, S. A. Mazlan, H. Zamzuri, H. Jamaluddin, K. Hudha, and M. Short. Modelling and validation of the vehicle longitudinal model. *International Journal of Automotive and Mechanical Engineering*, 10(1):2042–2056, 2014.

- 
- [163] Adams the multibody dynamics simulation solution. <https://www.mscsoftware.com/product/adams>. Accessed: 2020-03-31.
- [164] D. Kim, S. Hwang, and H. Kim. Vehicle stability enhancement of four-wheel-drive hybrid electric vehicle using rear motor control. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 57(2):727–735, 2008.
- [165] N. Orlandea and M.A. Chace. Simulation of a vehicle suspension with the adams computer program. Technical report, SAE Technical Paper, 1977.
- [166] W. L. Cleghorn and N. Dechev. *Mechanics of machines*, volume 82. Oxford University Press New York, 2016.
- [167] V. Cossalter. *Motorcycle dynamics*. Lulu. com, 2006.
- [168] R.C. Hibbeler. *Engineering Mechanics: Dynamics*. MasteringEngineering Series. Prentice Hall, 2010.
- [169] W. J. Palm. *System dynamics*. McGraw-Hill Science New York, 2014.
- [170] R. C. Coulter. Implementation of the pure pursuit path tracking algorithm. Technical report, Carnegie-Mellon UNIV Pittsburgh PA Robotics INST, 1992.
- [171] Mathwork help center: Pure pursuit controller. <https://www.mathworks.com/help/robotics/ug/pure-pursuit-controller.html>. Accessed: 2020-05-5.