國立臺灣大學管理學院財務金融學系

碩士論文

Department of Finance

College of Management

National Taiwan University

Master Thesis

Riskiness 在選擇權避險策略上的應用

The Application of "*Riskiness*" on the Option Hedging Strategy

蔡佩汝

Pei-Ju Tsai

指導教授：曾郁仁 博士

Advisor: Larry Y. Tzeng, Ph.D.

中華民國 101 年 6 月

June 2012

國立臺灣大學碩士學位論文

口試委員會審定書

Riskiness 在選擇權避險策略上的應用

The application of "*Riskiness*" on the option hedging strategy

本論文係蔡佩汝君（R99723029）在國立臺灣大學財務金融學系、所完成之碩士學位論文，於民國一 O 一年六月二十五日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：　曾郁仁　（簽名）

（指導教授）

王仁宏　　黃瑞卿

系主任、所長：　胡星陽　（簽名）

致謝

一晃眼，碩士班兩年的生活就這樣結束了，回想過去這一切，要感謝身邊許多的貴人，才會有現在這樣的我。

兩年前，帶著一個行李箱，就這樣第一次離開家到外地讀書。一開始的不適應，渾渾噩噩的虛度了快一年，還不斷懷疑著自己是否真的適合讀財金，幸運的是身邊都有同學、師長和家人的關心。碩一下時，鼓起了勇氣寄信給曾郁仁老師，老師不因為我沒上過他的課就打發我，他認真的訴說著他感興趣的議題，就這樣開啟了我跟老師一連串的接觸。論文期間，老師不斷地告訴我，有任何問題隨時都可以寄封信給他，因此當我遇到瓶頸時，我總是在信的開頭跟老師說我又崩潰了，但老師都一一的將問題給擊退。所以要感謝曾郁仁老師的指導和支持，還有黃瑞卿教授和王仁宏教授，於口試期間提供的寶貴意見，使我能修改論文中不足，如期完成這篇論文。

另外還要感謝我的同學們，在我課業跟不上進度時，總是熱心的提供資源，並且耐心的解說給我聽。還有我的左右護法：怡婷和馬克，總是願意陪伴我一起闖蕩，和我分享他們的經驗，使我能夠不斷學習成長。特別是怡婷，在我論文不知如何下手時，一一的幫我分析講解，讓我在期貨與選擇權的定價方式、模擬方法能有更近一步的了解。沒有你們，我的論文可能就無法如此順利，碩士生活也無法過得這麼多采多姿、無憂無慮。

最後還要感謝成大的老師們，給予我程式上的指導，讓我能夠順利地跑出模擬結果。雖然到台北已經兩年，仍無法愛上這一個城市，但我愛你們這些人：財金所的老師們和同學們，即使以後大家各奔東西，我還是會記得這兩年的點點滴滴，不會忘記曾經幫助我的大家，謹將此論文作為兩年來辛苦耕耘的成果獻給各位。

蔡佩汝 謹致

中華民國 101 年 6 月

中文摘要

風險是許多經濟決策和管理決策的重要一環，也是近年來越來越受重視的問題。衍生性商品是用來規避因利率、匯率和其它市場因素造成的風險的主要工具。我們使用 2008 年 Aumann 和 Serrano (2008)所提出的風險指數 *Riskiness*，來分析期初購買保護性賣權和股票為避險策略的投資組合，在不同的波動率σ、距到期日時間T、股票報酬率μ和股利殖利率q下，*Riskiness* 和執行價格間的關係。我們模擬發現，當波動率越大、距到期日時間越長和標的物期望報酬越小，都會造成風險指標 *Riskiness* 越大。當股利殖利率越大，避險策略整體風險值會越大，最適執行價格遞減，對期望報酬結構上的影響不大。而波動率對風險值的影響較距到期日時間還大，前者是二次函數的關係，後者大略是線性函數的影響。

關鍵字：Riskiness、避險策略、最適執行價格、賣權、股票

ABSTRACT

Recently, risk has become more and more serious and risk management is important in economics and management decision making. Derivatives are the main tool to hedge the risk caused by interest rates, exchange rates and other market factors. We use an index of riskiness proposed by Aumann and Serrano (2008) to analyze the relationship between the *Riskiness* and the strike price of hedge portfolio, which buy a stock and a protective put at the beginning. Our simulation found that the greater the volatility, the longer the time to maturity and the smaller the expected underlying asset's return, will cause the greater the index of *Riskiness*. The greater the dividend yield, the risk value is larger, the optimal strike price decrease and has little effect on the structure of portfolio expected returns. The impact of volatility on the *Riskiness* more than from the maturity, the former is a quadratic function, the latter is just a linear function.

Keywords: *Riskiness, Hedging strategy, Optimal strike price, Put option, Stock*

目錄

圖目錄

表目錄

第一章　緒論

風險是許多經濟決策和管理決策的重要一環，也是在最適資產配置、金融風險管理和衍生性商品定價的核心問題。在最適資產配置和風險管理決策時，投資者普遍依靠投資組合的報酬和風險，認為個股的期望報酬和風險是決策的關鍵。許多經理人在管理資產的時候，常會投資在無風險資產上，來保護其客戶的財富，但是到目前為止，沒有人證明，投資在無風險資產上其控制風險的表現會超過每一個替代的避險策略，相反地，在特地情況下，使用衍生性商品來降低風險表現可能優於債券(Schied, 2006)。

衍生性商品是一種用來規避因利率、匯率和其它市場因素所造成的風險很受歡迎的工具。目前最流行的衍生性商品是期貨(futures)、選擇權(options)和互換(swaps)，此三者是其它更複雜的衍生性商品之基礎。而在風險管理中，風險指標通常需決定許多參數，像是如何決定最適的履約價格和最適的避險比率，這些問題在 Ahn et al. (1999), Annaert et al. (2007), Deelstra et al. (2010)都有討論到如何在有限的預算下使用賣權(put option)來規避市場風險，其避險的方式是在一定的信心水準下，將潛在損失降到最小，這就是我們所知道的風險值(Value-at-Risk, VaR)方法。

另外有些人是利用避險策略來保護在不同市場條件下的長期投資部位，其避險策略是希望在牛市的情況下，可以有非負或正的報酬；在熊市的情況下，可以彌補其多頭部位的損失。有論文指出，在衰退的市場中，購買賣權是可以提供保障的，而市場的波動率(Volatility)是建立長期避險投資組合是否能獲利的一個關鍵因素。其它也有利用條件風險值(Conditional Value-at-Risk, CVaR)來做為投資上風險管理的方法，此方法改良了風險值的厚尾問題，使得潛在的巨大損失得以考慮進去。

在 2008 年，Aumann 和 Serrano (2008)提出了一個風險的經濟指數”*Riskiness*”，此指數引進了風險偏好(Risk aversion)的概念，期望較不風險趨避的投資者，會接

受風險較高的賭局；資產的風險增加時，一些以前願意持有資產的風險趨避經理人，紛紛將資產售出。此指數有許多良好的特性，像是正齊次性(positively homogeneous)、連續性和次可加性(subadditivity)，還有一階和二階隨機優越(first- and second-order stochastic dominance)等，下一章節將會詳細介紹。

此篇論文我們將探討的是一個大家最熟悉的投資組合保險策略(portfolio insurance)，也就是購買一個保護性賣權(protected put)作為投資股票(stock)時的避險策略。前人實證的結果顯示出，使用 VaR 和 CVaR 運用到投資組合保險策略上都有不錯的結果，但這兩種方法都有其缺點，因此我們引進 *Riskiness* 這個指數，來做為選擇最適執行價格的依據。

我們利用 Aumann 和 Serrano 的風險指數，來分析期初購買保護性賣權和股票為避險策略的投資組合，在不同的波動率和距到期日時間之下，其風險是如何變化的，進而找出在特定波動率和距到期日時間下，哪一個執行價格的保護性賣權風險是最小的。接下來第二章將回顧一些風險值的計算和其優缺點，第三章是介紹模型和選擇權定價的觀念，以及模擬的方法和流程，第四章則呈現此模擬的結果，最後則是此篇論文的結論及未來展望。

第二章　文獻回顧

2.1　風險指標回顧

最早的風險指標，由 Markowitz (1952)發表的平均數-變異數投資組合方法(Mean-Variance Portfolio Method)開始，也就是使用變異數(variance)或標準差(standard deviation)來做為風險測試的方法。往後陸陸續續有各式各樣的風險指標被提出。而在實證上用來找出賣權的最適執行價格的方法，廣泛使用的是風險值(VaR)和條件風險值(CVaR)。

摩根大通集團(JPMorgan Chase)為了更精準地衡量投資風險，在 1990 年代初期提出了風險值的概念。風險值(VaR)衡量方法因為理解容易、計算方便等原因，在業界中取得很高的地位，甚至被寫入法規裡。但是當損失不服從常態分配時，此指標會變得不穩定，事實上這是常發生的情況，因為在實證上，損失通常有厚尾的現象。另一個缺點是，它沒有考慮到極度損失的可能，因此無法區別損失的嚴重程度，也未考慮獲利面，且不符合次可加性，沒有分散投資組合風險的特質。因為風險值衡量方式的缺點，而衍生出了條件風險值(CVaR)，此方法將尾端的損失考慮進去，也就是計算「在給定損失超過 VaR 水準下的損失條件期望值」。條件期望值具有凸性(convexity)和連續性(coherency)，凸性在最適化過程中消除了區域極小(local minimum)與全部極小(global minimum)不同的可能性，使其在決定極小化風險的投資組合上較 VaR 有效率，因此使用 CVaR 的風險管理策略會比使用 VaR 作為風險衡量指標的風險管理策略來得好，但也來得保守。

這些風險的衡量方法大多描述的是分散性(dispersion)，較未考慮到投資組合的實際價值。例如，如果g和$g+c$各是一個賭局(gamble)，其中c是一個正的常數，那麼這些風險衡量指標會指出$g+c$這個賭局的風險較g大，卻忽略了$g+c$的報酬也較g大，會有這個缺點是因為它們不具有一階單調隨機優越的特性，也就是說，一個較好的賭局有較大的獲利和較低的損失，標準差、變異數當然會較大，但卻將它視為風險較高，這是不合理的。另外 VaR 和 CVaR 則是需要決定信心水準(confidence level)應該為何，但沒有人可以說哪一個信心水準值是恰當的。Aumann

和 Serrano 的 *Riskiness* 因具單調性(monotonicity)和對偶性(duality)且不需要參數設定，優於上述各種衡量方法。

2.2 風險指標 *Riskiness*

Aumann 和 Serrano 的風險指標 *Riskiness* 是一個很直觀的想法，它讓決策者可以很容易地判斷兩個投資選項哪一個風險較高，而不需要去考慮偏好順序，它跟其它風險指標一樣，將所有賭局的特性總結成一個數字，讓我們容易比較，而不是一個形容詞或字母評等。例如，可以告訴投資者一投資標的物的風險指數，他就可以自行判斷這個投資對他來說風險是否過大；或者是要求退休基金的投資不得超過規定的風險水準。*Riskiness* 是一個客觀的指標，對於所有人來說都是一樣的。

2.2.1 *Riskiness* 的概念

Riskiness 是建立在 von Neumann–Morgenstern 效用函數的架構上，此效用函數是嚴格單調(strictly monotonic)、嚴格凹性(strictly concave)且可兩次微分，並定義在整個實數線上。假設投資人的效用函數為 u，財富水準(wealth)為 w，當 $\mathrm{E}u(w+g)>u(w$，它會接受賭局 g，其中 E 代表期望值，而賭局(風險性資產) g 會依一定的機率分配，產生不確定的報酬，其中有一些是負的(虧損)，但是整體來說有正的期望報酬。

若有兩人 i 和 j，i 在某些財富水準下會接受一賭局，j 在任何財富水準下接受該賭局，那麼稱 i 的風險趨避程度均勻的(uniformly)不比 j 低；當 i 的風險趨避程度不比 j 低，j 的風險趨避程度沒有均勻的不比 i 低，那麼 i 較 j 風險趨避，可表示為 $i \rhd j$。對於每一個賭局 g 來說，有一個正數 $R=R(g)$ 滿足

$$\mathrm{E}\left[\exp\left(-\frac{g}{R}\right)\right]=1 \tag{2.1}$$

我們稱 R 為 g 的 *Riskiness*。此風險指標滿足對偶(duality)和正齊次(positively homogeneous)兩個公理。

假設有兩賭局 g 和 h，當風險指標 $R(g)>R(h)$，我們說賭局 g 風險較賭局 h 大。當 i 較 j 風險趨避時($i \triangleright j$)，i 接受賭局 g 在財富水準 w 下，且 $R(g)>R(h)$ ，此時 j 必然會接受賭局 h。更精確地說，當風險趨避程度較大者，接受了風險較大的賭局，風險趨避程度較小者必然會接受風險較小的賭局。這個情況就是滿足了對偶定理。

正齊次定理則是說，有一賭局 g 其風險指標是 $R(g)$，那麼我們可以說 $2g$ 的賭局，其風險是 g 的兩倍，而不只是風險較 g 高而已。用數學式子來表示，有一正數 t 和賭局 g ，存在 $R(tg)=tR(g)$ 的特性，也就是賭局 tg 的風險是賭局 g 的 t 倍。

2.2.2 *Riskiness* 的性質

1. 參數：風險指標 *Riskiness* 只和 g 本身的分配有關，不用考慮投資人的效用函數，或者是其財富水準。
2. 單調隨機優越：一階隨機優越(first-order dominates, FOD)是說投資人希望報酬越高越好，二階隨機優越(second-order dominates, SOD)則是看誰可以降低風險。如果 g 一階隨機優越於 h，那麼 g 的報酬累積機率永不大於 h 的累積機率：$F_g(w)\le F_h(w)$ ，$F(\cdot)$ 為累積機率函數，且至少存在一個值使得 $F_g(w)<F_h(w)$ ，效用函數一階導數大於 0 ($u'(w)>0$)。如果 g 的累積機率函數下的面積大於 h 的面積：$\int_{-\infty}^{w}F_g(x)dx\le\int_{-\infty}^{w}F_h(x)dx$ ，且存在不等式，g 二階隨機優越於 h。因此，g 一階、二階隨機優越於 h，那麼 $R(g)<R(h)$ ，是單調的。隨機優越理論使我們能夠比較一些風險選擇，不管我們認為其效用函數為何。
3. 連續性：當兩賭局非常相近時，它們的風險水準也會非常相近，這表示 *Riskiness* 具有連續性。
4. 複合式賭局(Compound Gambles)：賭局 g 和 h 有相同的風險值 r ，那麼複合式賭局有 p 的機率發生 g ，$1-p$ 的機率發生 h ，p 介於 0 和 1 之間，此賭局的風險值也是 r 。也就是說，複合式賭局的 *Riskiness* 會介於兩賭局的風險值之間。

5. 常態賭局：如果賭局 g 為常態分配：$g \sim N(\mu,\ \sigma^2)$，其風險值 $R(g)$ 為：

$$R(g) = \frac{Var(g)}{2E(g)} = \frac{\sigma^2}{2\mu}$$

6. 賭局加總：如果 g 和 h 是獨立且分配一致(independent identically distributed, i.i.d.)的賭局，風險值 *Riskiness* 為 r，賭局 $g+h$ 的風險值也為 r。所以 n 個 i.i.d.的賭局加總在一起的風險和每一個單獨分開的賭局有相同的風險，雖然期望值和標準差皆為單一賭局的 n 倍。
7. 次可加性(subadditivity)：如果 g 和 h 沒有互相獨立，兩賭局合併後的風險值不會大於其風險和：$R(g+h) \le R(g) + R(h)$。運用到投資上，若加入另一個風險標的，並不會使總風險增加。
8. 定義域(Domain)：我們定義賭局 g 有負值存在且 $E(g) > 0$，此情況下，風險指標 *Riskiness* 的值域會是整條正的實數線，介於 0 和∞之間，超過此定義域範圍，式子(2.1)無解。直覺來想，如果沒有負值發生的可能就沒有風險存在，$R(g) = 0$；當期望報酬小於 0 ($E(g) < 0$)，沒有一個風險趨避的投資人會接受 g，$R(g) = \infty$。
9. 強調損失面：因風險指標 *Riskiness* 是指數函數(exponential function)的形式，對於損失面的敏感度較獲利面大。通常說到風險，所聯想到的是可能的損失，有人說損失所冒的風險比只有一點點獲利還大，因而此特性符合實務上的考量。

綜合上述來看，風險指標 *Riskiness* 具備許多良好的性質，所以接下來我們將它運用到避險策略上，來找出最適的賣權執行價格。

第三章　研究方法

買入持有策略(Buy-and-Hold)是一個長期的投資策略，投資者買進股票並持有一段時間，因為他們相信長期來看經濟會成長，所以股價會增加又有股利可以領，交易次數減少，省下交易手續費和稅。但此策略缺乏整體的風險控管，容易造成巨大的損失。從 S&P500 指數來看，2000 年 4 月達到高峰 1516.35 點，隨著網路泡沫化(.com bubble)的發生，在 2002 年 9 月來到 827.37 點，隨後花了五年的時間從谷底爬上來；2007 年 10 月再度來到高峰 1557.59 點，但因金融海嘯的發生，2009 年 3 月跌至 683.38 點，時至今日(2012 年 6 月)，S&P500 指數仍未達到前兩段高峰。這 12 年來，S&P500 因兩次大災難造成指數停滯不前。

市場波動率在熊市時較大。價格下降的速度通常比增加的還快，如果沒有任何風險管理策略，幾天的大幅波動可能就會將花了好幾年所達成的報酬一夕之間消滅掉，因此買入持有策略在衰退的市場上會面臨巨大的風險。但人生難免會有不得已的事，因受人之託買了股票且必須要持有一段時間才能賣掉，這時候為了不想平白無故地輸錢，希望可以利用歐式選擇權(European option)中的賣權來規避現貨跌價的風險，那要買距到期日多長的時間、執行價格為何的賣權最適當呢？

3.1　模型和定價

3.1.1　股價模型

我們選擇的避險策略是一開始購買一股票和一賣權，此賣權執行價格為 K ，到期日是 T 。在時間點 0 的時候股價為 S_0 ，賣權的價格為 P_0 ，無風險利率為 r_f 。在時間點 T 時，此避險策略的時間成本為：

$$S_0 e^{r_f T} + P_0 e^{r_f T} \tag{3.1}$$

此時避險策略的市場價格為：

$$S_T + (K - S_T)^+ \tag{3.2}$$

投資組合的報酬為：

$$g = \left(S_T + (K - S_T)^+\right) - \left(S_0 e^{r_f T} + P_0 e^{r_f T}\right) \tag{3.3}$$

其中 $(K-S_T)^+ = \max(K-S_T,\ 0)$ ，此為賣權在到期日的報酬函數(payoff function)。上述(3.3)式又可寫成下式：

$$g=\begin{cases} S_T-\left(S_0e^{r_fT}+P_0e^{r_fT}\right) & ,\text{if } S_T>K \\ K-\left(S_0e^{r_fT}+P_0e^{r_fT}\right) & ,\text{if } S_T\le K \end{cases} \tag{3.4}$$

若到期日股價低於合約執行價格，投資者可以執行賣權，使投資組合的價值符合要保金額；若期末股價高於合約執行價格，投資者則不必執行賣權，即可保有高於合約執行價格的投資組合價值，雖然會損失賣權成本，但並不限制其可能的最大利潤。

股價的模型採用幾何布朗運動(Geometric Brownian Motion, GBM)：

$$\frac{dS_t}{S_t}=\mu dt+\sigma dz_t \tag{3.5}$$

其中 S_t 是在時間點 $t\,(0<t\le T)$ 的股價，μ 是股價的期望年報酬率(rate of return)，σ 是股價的年波動率(volatility)，dz_t 是標準的衛納過程(Wiener process)，且 $dz_t \sim \phi(0,\ dt)$ ，$\phi(m,\ v)$ 代表常態分配，平均數為 m 變異數為 v。式子(3.5)中，μdt 這一項稱為漂移項(drift term)，μ 又可稱為漂移率(drift rate)，代表 z_t 的走勢；σdz_t 則稱為變異項(variance term)，σ^2 又稱為變異率(variance rate)，捕捉股票報酬的不確定性。因此，

$$\frac{dS_t}{S_t}\sim\phi\left(\mu dt,\ \sigma^2 dt\right) \tag{3.6}$$

式子(3.5)也可改寫為：

$$dS_t=\mu S_t dt+\sigma S_t dz_t \tag{3.7}$$

並可推導出股價 S_T 服從對數常態分配(lognormal distribution)，

$$\ln S_T\sim\phi\left(\ln S_0+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T,\ \sigma^2T\right) \tag{3.8}$$

$$E(S_T)=S_0e^{\mu T} \tag{3.9}$$

$$Var(S_T)=S_0^2e^{2\mu T}(e^{\sigma^2T}-1) \tag{3.10}$$

另一方面，我們也可以從這特性導出連續複利下的報酬率分配。假設r是在 0 到T之間連續複利的年報酬率，那麼$S_T = S_0 e^{rT} \Rightarrow r = \frac{1}{T}\ln\frac{S_T}{S_0}$，從式子(3.8)我們可推得

$$r \sim \phi\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2},\ \frac{\sigma^2}{T}\right) \tag{3.11}$$

年報酬率服從常態分配，當距到期日時間T越長，報酬率的標準差會下降，又因為$\ln$是非線性的函數，所以$\mathrm{E}(r) < \mu$。

3.1.2 選擇權定價

假設市場上有n個不同執行價格K_i的賣權，$i = 1, 2, \cdots, n$，其在時間點 0 的價格採用 Black-Scholes 定價公式並表示為P_i，

$$P_i = K_i e^{-r_f T} N(d_1) - S_0 N(d_2) \tag{3.12}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{K_i}{S_0}\right) - \left(r_f - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{K_i}{S_0}\right) - \left(r_f + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

函數$N(x)$代表標準常態分配$\phi(0,1)$的累積密度函數(cumulative probability distribution)，也就是標準常態分配下小於x的機率。

如果發放股利的話，當股利殖利率為q，需先調整標的股價如(3.13)式，

$$S' = S_0 e^{-qT} \tag{3.13}$$

接著再將S'代入(3.12)式中替換掉S_0，即可求得發放股利下的賣權價格。

3.2 風險指標 *Riskiness* 的衡量

由前述式子(3.4)可以知道避險策略的報酬函數，又知道在幾何布朗運動(GBM)下，股價 S_T 的分配為(3.8)式，套用到風險指標 *Riskiness* 的概念下，此時 g 的分配只和 S_T 的分配有關，所以式子(2.1)可寫成：

$$\int_0^{K_i} e^{-\frac{K_i-\left(S_0e^{r_fT}+P_ie^{r_fT}\right)}{R}} f(S_T)dS_T + \int_{K_i}^{\infty} e^{-\frac{S_T-\left(S_0e^{r_fT}+P_ie^{r_fT}\right)}{R}} f(S_T)dS_T = 1 \tag{3.14}$$

$f(x)$ 代表 x 的機率密度函數(density function)。

從報酬率的角度來看，由式子(3.11)我們知道年報酬率服從常態分配，因此設 $S_T = S_0e^{rT}$，$r \sim \phi\left(a,\ b^2\right)$，那麼 g 則為常態分配，其風險指標 *Riskiness* 計算公式為：

$$\int_{-\infty}^{r_{K_i}} e^{-\frac{K_i-\left(S_0e^{r_fT}+P_ie^{r_fT}\right)}{R}} f(r)dr + \int_{r_{K_i}}^{\infty} e^{-\frac{S_0e^{rT}-\left(S_0e^{r_fT}+P_ie^{r_fT}\right)}{R}} f(r)dr = 1 \tag{3.15}$$

其中 r_{K_i} 是 $S_T = K_i$ 時的報酬率，也就是使 $S_0e^{r_{K_i}T} = K_i$ 的值，$r_{K_i} = \ln(K_i/S_0)/T$。觀察上式(3.15)，可以發現左邊和報酬率 r 無關，因此可以化簡為：

$$e^{-\frac{K_i-\left(S_0e^{r_fT}+P_ie^{r_fT}\right)}{R}} \Phi\left(r_{K_i}\right) + \int_{r_{K_i}}^{\infty} e^{-\frac{S_0e^{rT}-\left(S_0e^{r_fT}+P_ie^{r_fT}\right)}{R}} f(r)dr = 1 \tag{3.16}$$

$\Phi(x)$ 代表常態分配 $\phi\left(a,\ b^2\right)$ 下 x 的累積密度函數。

在研究過程中，我們採用的是由報酬率角度來看的風險指標，因此我們的目的就是找出式子(3.16)中的 R，在不同的執行價格 K_i 下分別是多少？在計算上，我們將式子(3.16)改成

$$e^{-\frac{K_i-\left(S_0e^{r_fT}+P_ie^{r_fT}\right)}{R}} \Phi\left(r_{K_i}\right) + \int_{r_{K_i}}^{\infty} e^{-\frac{S_0e^{rT}-\left(S_0e^{r_fT}+P_ie^{r_fT}\right)}{R}} f(r)dr - 1 = 0 \tag{3.17}$$

並使用勘根定理，找出此方程式的實數解，即為我們所要的 *Riskiness*。在介紹 *Riskiness* 的性質的時候有提到，其定義域要在正的實數線上，所以 $\mathrm{E}(g)$ 是否大於 0 是很重要的，計算前必須先確認其是否為正數，而此避險策略期望值為：

$$\mathrm{E}[g] = \int_{-\infty}^{r_{K_i}} K_i f(r)dr + \int_{r_{K_i}}^{\infty} S_0e^{rT} f(r)dr - \left(S_0e^{r_fT} + P_ie^{r_fT}\right) \tag{3.18}$$

3.3 各項變數對 *Riskiness* 的影響

在我們的模型中，有許多不同的變數會影響 *Riskiness* 的數值，像是在選擇權定價時的參數：執行價格 K_i，或者是模型中給定的參數：距到期日時間 T (time to maturity)、波動率 σ (Volatility)，這些都會影響到選擇權的價格，進而影響避險策略的成本、期望值和股價的分配情形。

在模擬的過程中，我們會給定 Black-Scholes 定價模型中所需的 r_f、T 和 σ，而股價的報酬率 r 限制它要大於無風險利率，也就是 $\mathrm{E}(r) > r_f$，因為股價報酬如果小於無風險利率，那麼我們就不需要投資，將錢定存起來就可得到較高的報酬。報酬率的分配設為 $r \sim \phi\left(a,\ b^2\right)$，整個避險策略的期望報酬率在不考慮任何交易成本之下，大約會是 $a - r_f$，因為需扣掉期初借錢的成本。在本研究中我們將分別探討：距到期日的時間、股價的波動率和股利殖利率，對於不同執行價格下的 *Riskiness* 影響為何？而它們對於避險策略的期望值影響又是如何？

第四章　研究結果

本篇論文採用的是統計軟體 R 來進行模擬的研究，我們所考慮的是標的物(underlying asset)是股票，避險工具是該股票選擇權，接下來將依序探討(1)波動率的變化對 *Riskiness* 的影響，(2)距到期日時間的長短對 *Riskiness* 的影響，(3)報酬率期望值 μ 對 *Riskiness* 的影響，(4)股利殖利率對 *Riskiness* 的影響。在看 *Riskiness* 的同時，也會觀察避險策略的期望值。

4.1　波動率 σ 對 *Riskiness* 的影響

在模擬實驗中，我們將 S_0 設為 500，r_f 設為 2%，年報酬率期望值 $\mathrm{E}(r)$ 為 5%，且先考慮未發放股利的股票選擇權，因股票選擇權在台灣的發行月份是二近月三季月，所以最長的距到期日時間不會超過一年，我們接下來將看 $T = 0.9$ 年下的波動率變化的影響。而我們觀察的執行價格範圍則是 $S_0 \pm 200$ 點的位置，因為合約發行的規定，此範圍已大致可以涵蓋市場上不同月份執行價格的分佈範圍。因此在模擬時的參數設定如表 1：

表 1、參數設定一欄表

參數輸入	
期初股價(S_0)	500
執行價格(K_i)	300~700
無風險利率(r_f)	2%
股利率(q)	0%
選擇權距到期日時間(T)	≤ 1 年
股票波動率(σ)	5%~40%
股票年報酬率分配$\phi(a,b^2)$	$\phi(5\%-\sigma^2/2,\ \sigma^2/T)$

在看風險指標 *Riskiness* 的影響之前，我們先看賣權價格，在不同的波動率下，它的變動為何？這是一個很重要的成本因素。

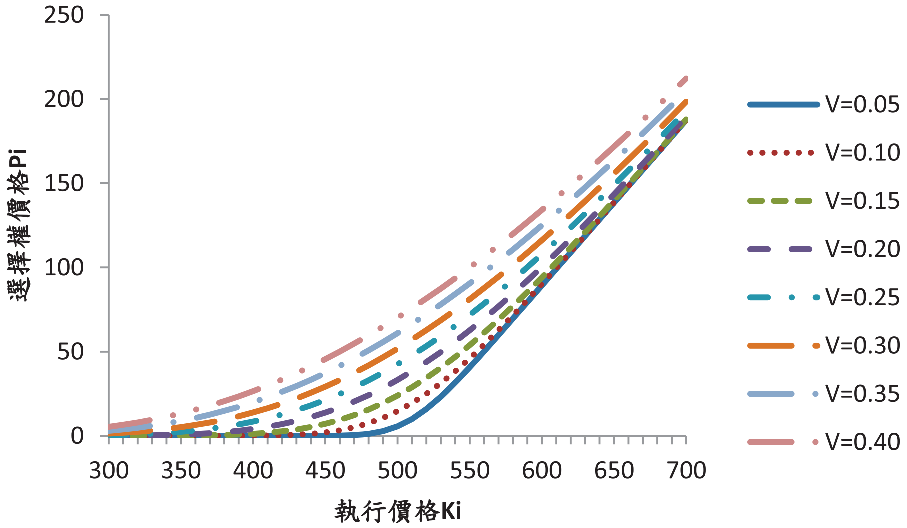

圖 1、在 $T = 0.9$ 時不同波動率下的選擇權價格

在圖 1 中，我們可以看到賣權價格隨著波動率的增加而增加，從價外進入價平以後，價格開始加速上升(斜率變大)。波動率越小，價平後上升幅度較大，因其在價外時，時間價值較小，從價外變為價內的可能性較低，相反地，從價內變成價外的可能也低。接下來我們來看，期望報酬和 *Riskiness* 之間的關係是如何呢？

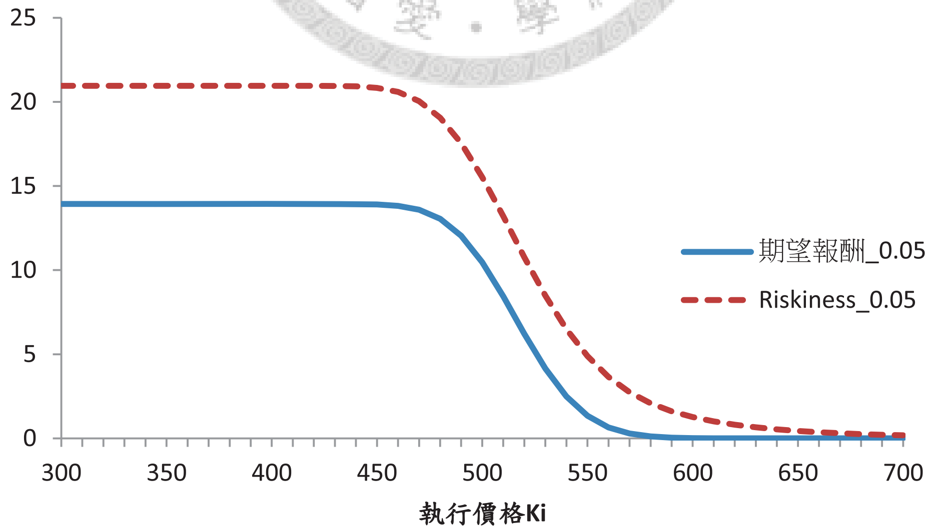

圖 2、在 $S_0 = 500,\ T = 0.9,\ \sigma = 0.05$ 的期望報酬和 *Riskiness* 的關係

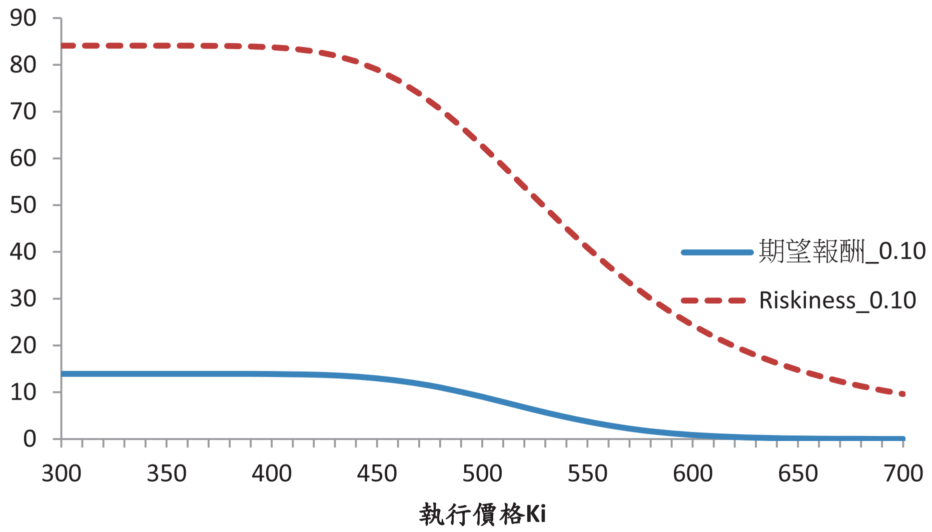

圖 3、在 $S_0 = 500,\ T = 0.9,\ \sigma = 0.10$ 的期望報酬和 *Riskiness* 的關係

從圖 2 和圖 3 比較來看，可以看到期望報酬和 *Riskiness* 是同方向變動，而在期初股價和距到期相同不變的情況下，波動度越大者，期望報酬和 *Riskiness* 之間的差距越大，當波動率變成兩倍時，它的風險值變成四倍，這是合理的，雖然兩者的期望值幾乎是差不多的，但是波動率大，表示股價的波動大，不確定性也大，造成風險增加。另外，在此例子中，如果是用一般傳統的風險指標，通常都是判斷哪一個的期望報酬較高，但因其期望報酬的差距非常微小，容易造成判斷錯誤。

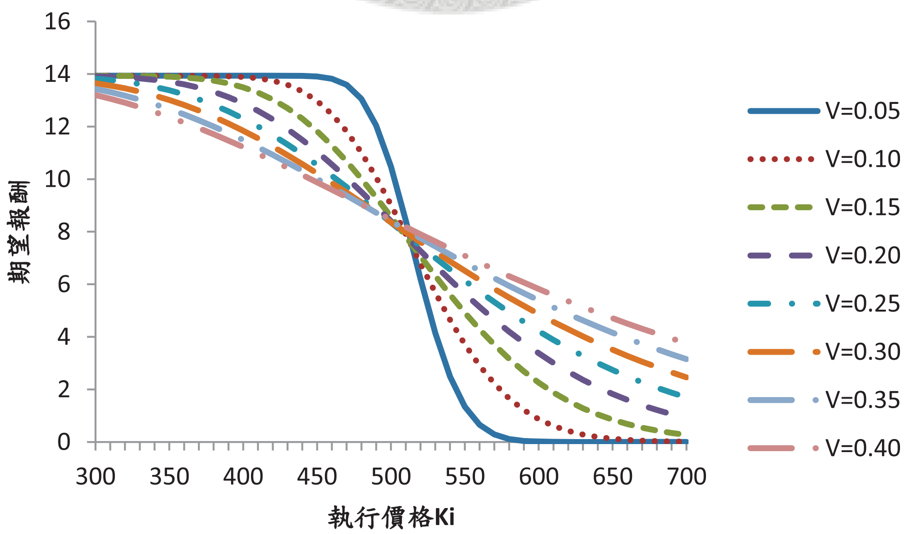

圖 4、在 $T = 0.9$ 時，不同波動率下期望報酬和執行價格的關係

上圖 4 中，我們想知道的是波動率對避險策略期望報酬的影響，期望報酬的單位是(元)。很明顯地，我們可以看到過了價平後，有扭轉的現象，也就是在價外時，波動率越小的，期望報酬越大；到了價內以後，波動率越大期望報酬越大。這情況我們可以從股價的年報酬率分配來看，$r \sim \phi(\mu-\sigma^2/2,\ \sigma^2/T)$，在價外時因賣權的價格非常小，不需要付出什麼成本，所以主要就是看股票的期望值，又 $\mathrm{E}(r)=\mu-\sigma^2/2$，$\mu$ 相同，波動率 σ 越小，$\mathrm{E}(r)$ 越大，兩者間呈反向關係。在價內時，從前面知道賣權價格會開始快速飆升，這時賣權同時擁有時間價值和內含價值，因此也要考慮選擇權的報酬影響。從選擇權定價的理論中，我們知道其報酬和 σT 有關，其中 $0<\sigma<1$，所以 $\sigma T > \sigma^2/2$，因此買價內的選擇權對於整體的期望報酬來說是有利的。另外也可以看到，期望報酬曲線隨著波動率的增加而越平滑。

圖 5 呈現 *Riskiness* 和波動率的關係，可以很清楚地觀察到，風險指標 *Riskiness* 隨著波動率越大而越大，可以想成說，波動率大，賣權很容易一翻兩瞪眼，一下子從價內變成價外，所以風險較大。圖中，每一個區間(0.05)中的差距值越來越大，但是增加的比例是越來越小的。也就是說，波動率為 0.10 時其風險值在價外的情況下，是波動率 0.05 的 4 倍，但波動率 0.40 的 *Riskiness* 是波動率 0.35 的 1.32 倍。另外從圖 6 中可以看到相同執行價格下，波動率增加，風險值不是線性的增加，因此可以知道波動率對風險的影響是二次函數的關係。

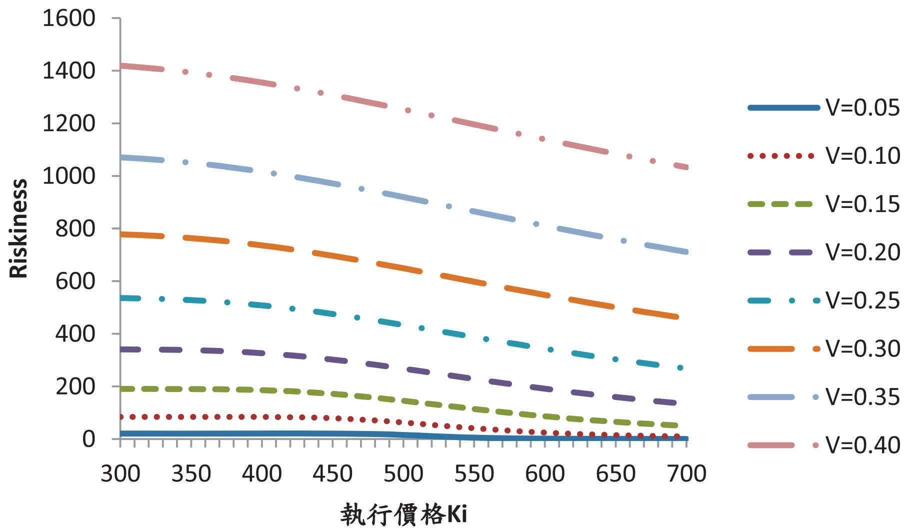

圖 5、在 $T=0.9$ 時，不同波動率下 *Riskiness* 和執行價格的關係

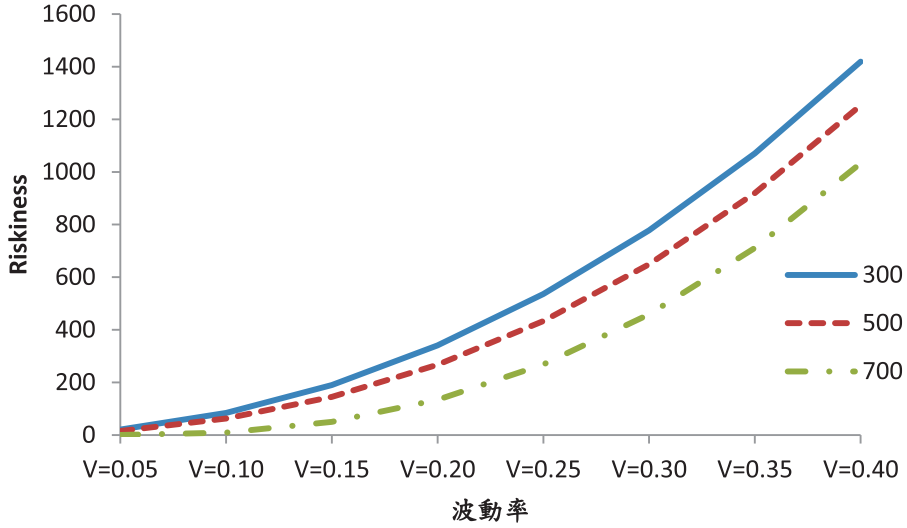

圖 6、執行價格為 300、500 和 700 下的 *Riskiness* 和波動率的關係

4.2 距到期日時間 T 對 *Riskiness* 的影響

這一小節，我們將討論距到日時間的影響。同樣的，我們先看對期望報酬的影響，如下圖 7。我們模擬的是距到期日 0.5 年到 0.9 年間，波動率為 0.4 的情況下，可以看到它是很平滑的，和圖 4 中波動率為 0.4 的曲線差不多，距到期日時間越長，期望值越大，這也是合理的，因為 r 是年報酬率，所以一段時間的期望報酬為 $T\times \mathrm{E}(r)$，持有時間越長，期望報酬就越大。在波動率為 0.1 的時候，也有同樣的情形。

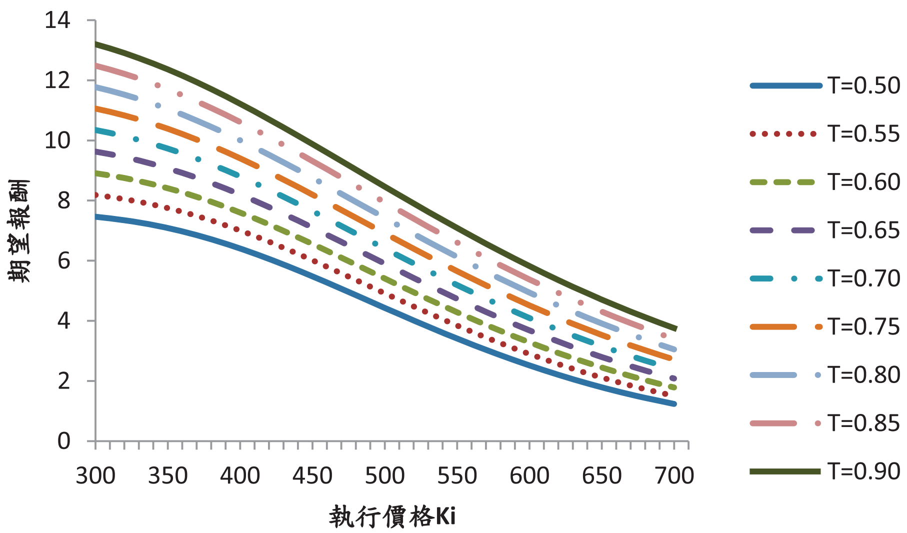

圖 7、在 $\sigma = 0.4$ 時，不同距到期日時間下的期望報酬和執行價格的關係

圖 8 是在波動率為 0.1、0.2、0.3 和 0.4 下的 *Riskiness* 和距到期日的關係，為什麼要看四個不同情況呢？我們可以發現一件有趣的事，仔細觀察，價內和價外的情形不同。波動率較小時，價外有一區間風險值隨著 T 越大而越小。

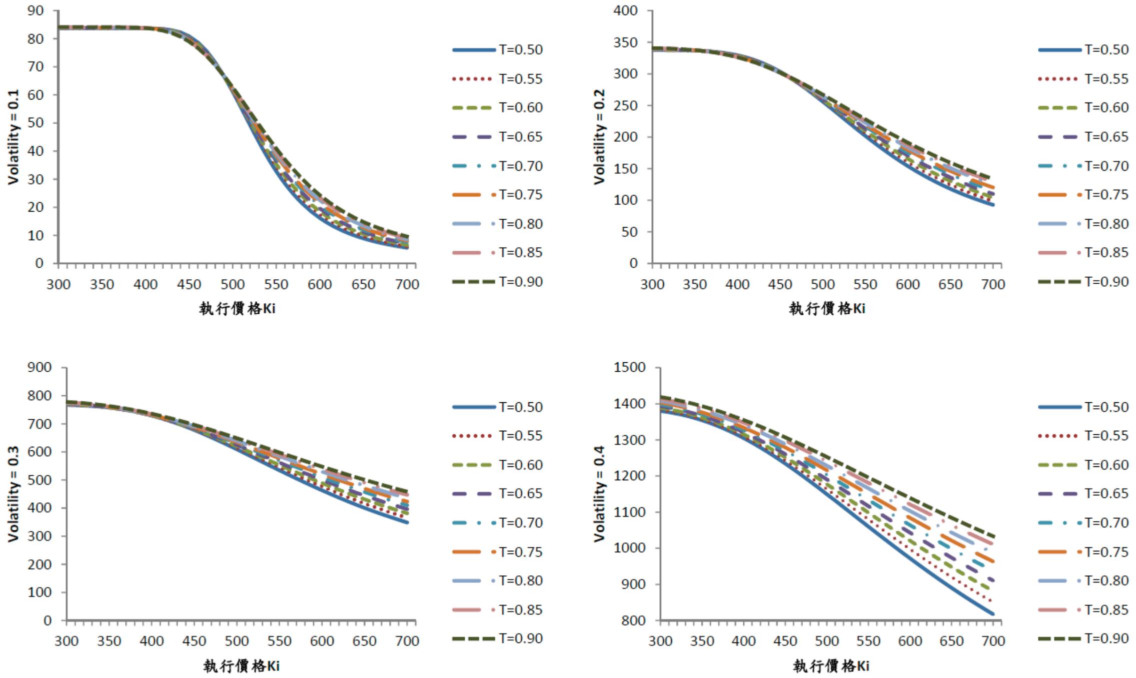

圖 8、不同波動率和距到期日時間下 *Riskiness* 和執行價格的關係

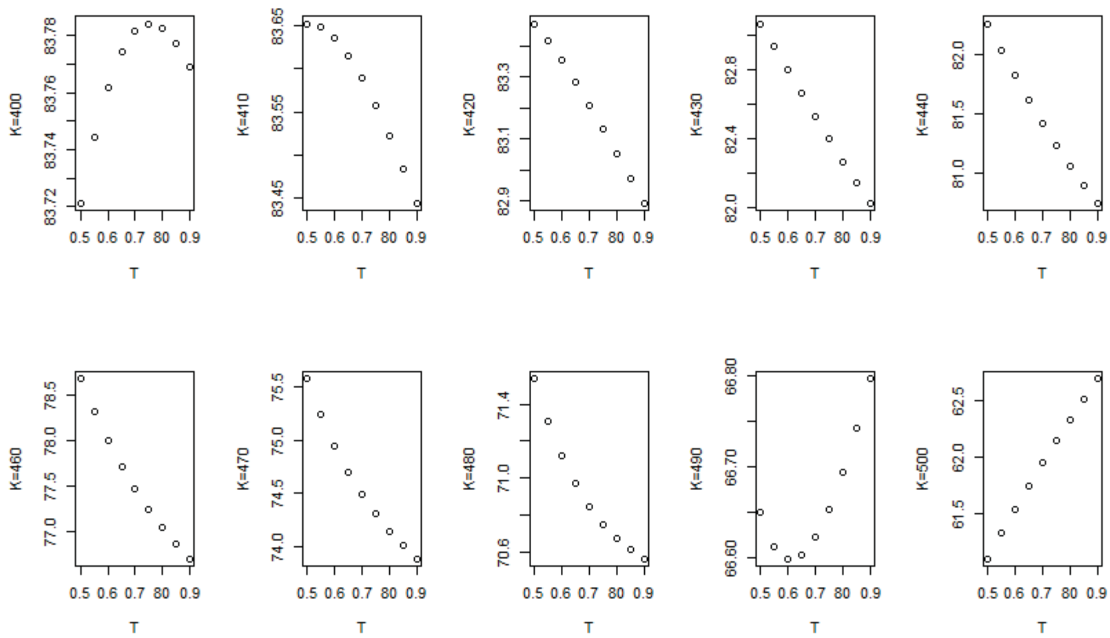

圖 9、在 $\sigma = 0.1$ 時，不同執行價格下 *Riskiness* 隨著時間的變化

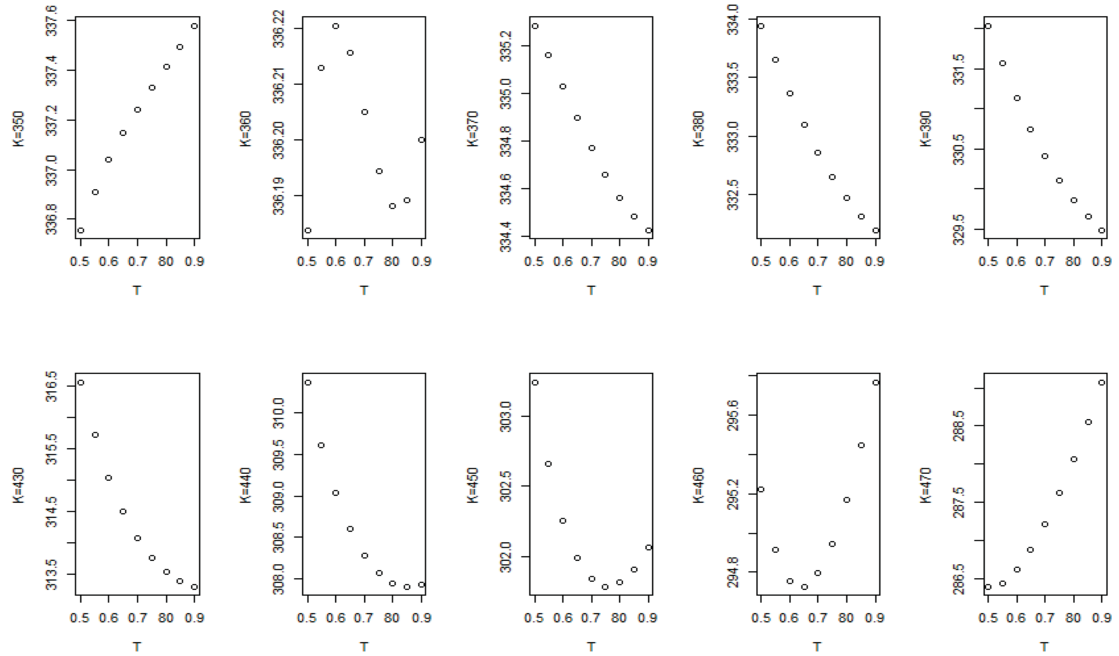

圖 10、在$\sigma = 0.2$時，不同執行價格下 *Riskiness* 隨著時間的變化

正常情況下，持有時間越長，風險會較大，因為未知的時間越長，不確定性越多，有可能股價突然一蹶不振，或者是市場上突然發生了大事件，這都是我們無法預測的。但從圖 8 我們知道波動率為 0.1 和 0.2 的時候，在價外距到期日越長的風險卻越小，推測可能是成本的問題，也就是賣權價格的影響，通常賣權價格隨著距到期日時間越長而越高，因時間成本較大，但因為是價外，價格增加的幅度比價內時小，所以可以多付一點點錢來降低風險，也就是付出的成本比可能的損失還小。

圖 9 和圖 10 是將例外的區間依不同的執行價格畫出 *Riskiness* 和時間的關係並觀察其變化情形。當波動率為 0.1 時，在執行價格為 410 到 480 之間是負斜率的，490 時呈現 V 字形，到了價平 500 時，就恢復到正斜率的情況了。在波動率為 0.2 時，可以更清楚地看出它是如何由正斜率變成負的再變成正的。另外圖 9 中的最後一個圖，執行價格為 500 時，可以看到時間對 *Riskiness* 的影響是呈一直線的，不像波動率影響那麼大，僅為線性關係。

4.3 報酬率 μ 對 *Riskiness* 的影響

看完了波動率和距到期日對期望報酬和 *Riskiness* 的影響之後，我們來看年報酬率分配中的 μ 會造成怎麼樣的影響呢？由圖 11 左圖中可以很清楚地知道，μ 越大期望報酬當然越大，因為這時候波動率和距到期日都是相同的，不會影響到報酬率的變異程度。右圖中則可看到，當 μ 越小，也就是市場上的情況較差時，輸錢的可能性增加，風險較大。

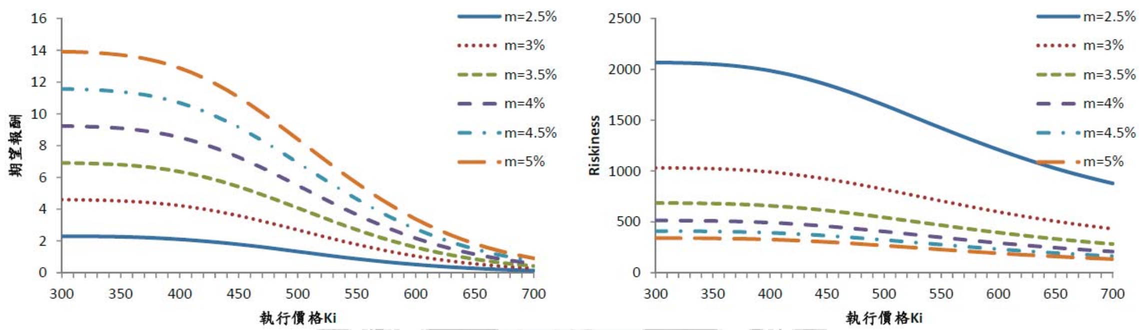

圖 11、在 $T=0.9$, σ=0.1 下，不同報酬率 μ 對期望報酬和 *Riskiness* 的影響

4.4 股利殖利率 q 對 *Riskiness* 的影響

4.4.1 股利殖利率變動的影響

當標的股票發放股利時，會造成賣權價格上升，如圖 12 左圖，雖然股利發放對賣權價格的影響只有一些些，但這麼一點點就會造成期望報酬容易有負的，如圖 12 右圖。q 越大，避險策略的成本越大，期望報酬越低，在 $q>0.2\%$ 時，價內的期望報酬就有負的，且越價內不同的 q 之間的期望報酬差距越大。

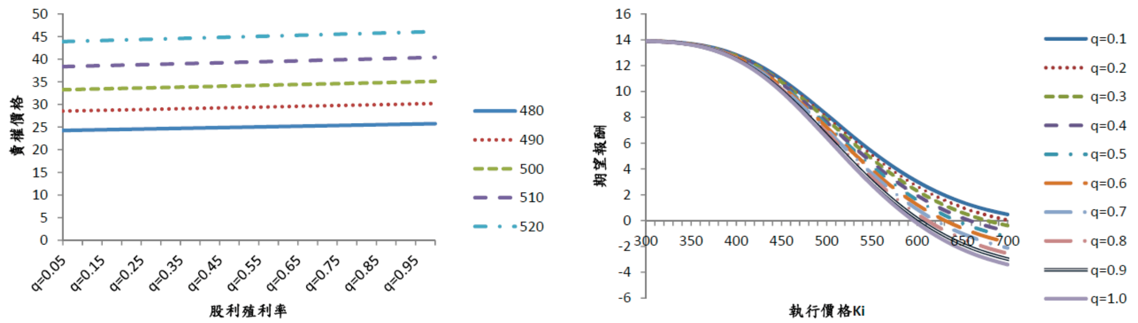

圖 12、不同股利殖利率下，對選擇權價格和期望報酬的影響

那麼，不同股利殖利率下，*Riskiness* 會長得怎麼樣？圖 13 中我們可以看到 *Riskiness* 對執行價格的曲線，隨著波動率越大而越來越平，這時候 *Riskiness* 和前幾小節看到的不同，變成會往上翹了，當波動率越小，股利殖利率越大時，期望報酬越小，越快靠近 0，造成曲線越早往上翹。隨著波動率的增加，在股利殖利率大時，會直接就一路向上，例如波動率為 0.4 時，$q=0.7$ 的 *Riskiness* 曲線隨著執行價格越大而越大。在波動率為 0.1 和 0.2 時，我們可以清楚的看到隨著執行價格越大，*Riskiness* 曲線會先下降再上升，所以可以找到風險最小的執行價格。

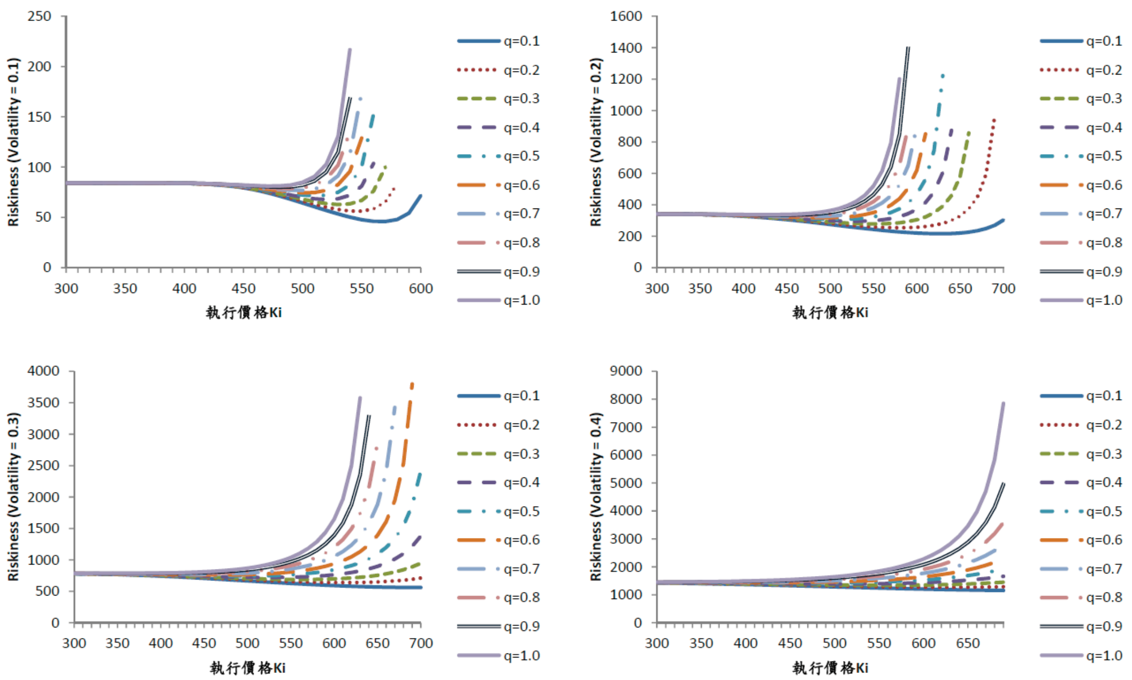

圖 13、隨著波動率不同，不同股利殖利率下 *Riskiness* 和執行價格的關係

4.4.2 加入股利殖利率後波動率和距到期日的影響

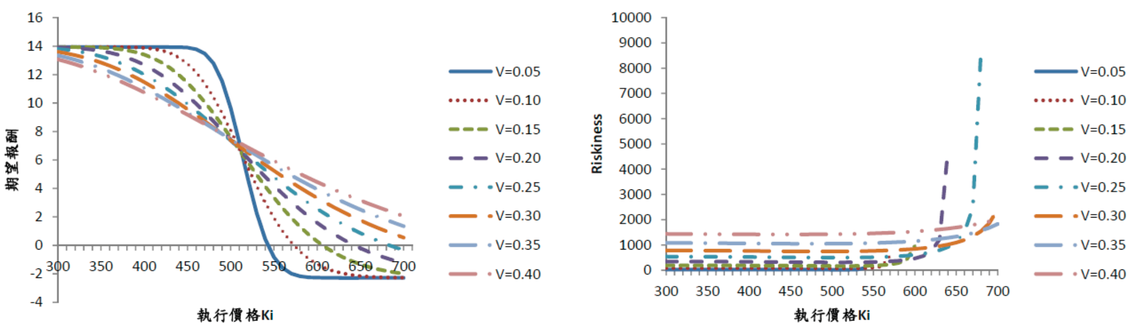

圖 14、在 $T=0.9$, $q=0.5\%$ 時，不同波動率對期望報酬和 *Riskiness* 的影響

上一小段我們看的是變動股利殖利率的影響，現在我們要來看本章 4.1 和 4.2 所提到的情形，在加入股利殖利率後，是否還是相同的？上圖 14 中顯示期望報酬價內和價外仍是相反的，和圖 4 是相同的，但值得注意的是，在圖 4 中的期望報酬皆為正，圖 14 中波動率小於 0.3 的則皆有負的期望值存在。從圖 14 的右圖可以看到，*Riskiness* 仍是隨著波動率的增加而增加，但在最後皆隨著執行價格的越高而往上翹。

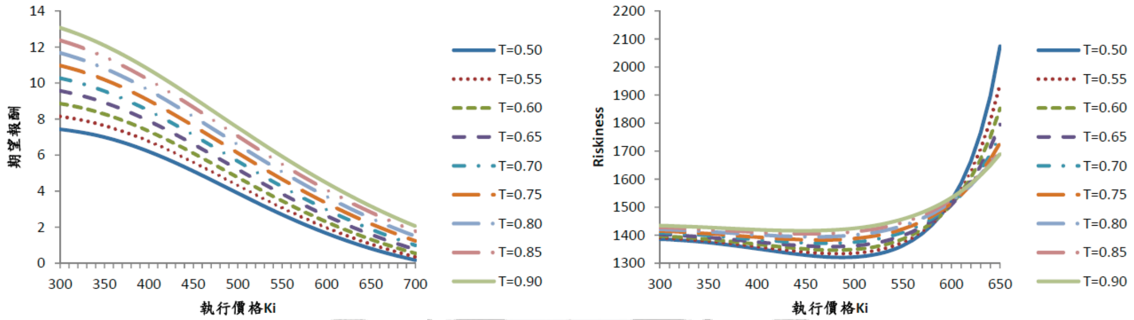

圖 15、在 $\sigma = 0.4$, $q = 0.5\%$ 時，距到期日時間對期望報酬和 *Riskiness* 的影響

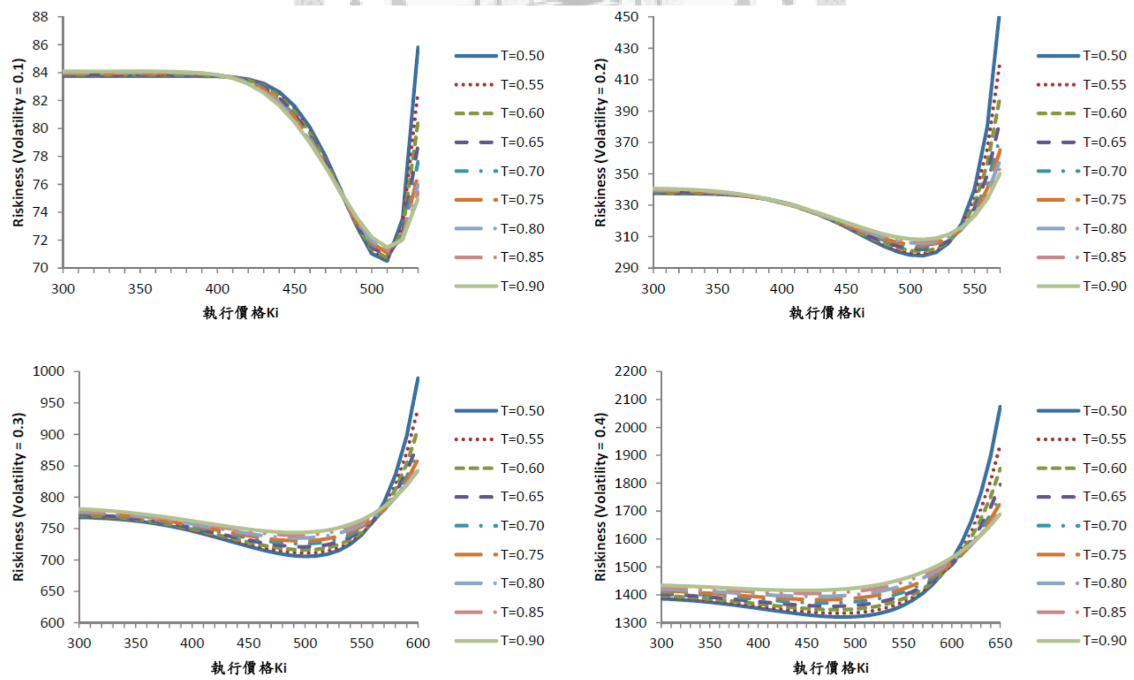

圖 16、在 $q = 0.5\%$ 時，不同波動率和距到期日下，*Riskiness* 和執行價格的關係

在圖 15 中，其左圖中期望報酬的圖形和圖 7 是差不多的，也就表示有無發放股利，對於不同距到期日的時間下的期望報酬影響不大，仍顯示出在其它條件

不變之下，距到期日時間越長，期望報酬越高。但右圖的 *Riskiness* 曲線則和圖 8 有大大的不同，變成也會往上翹了，而且過了價內的某一點以後，距到期日時間較長的風險較小，推測是因為發放股利，時間越長所能拿到的越多，複利加乘的效果，可以彌補賣權價格增加的成本。

自從加入了股利殖利率後，就會發現 *Riskiness* 曲線在尾端時都會上翹，但也因為上翹使得風險最小的點出現，但那一點是在什麼情況下發生的呢？下圖 17 是期望報酬和風險指標 *Riskiness* 的散佈圖，如果有最小值發生的話，我們可以看到它們兩者之間會呈現像 Nike 的標誌一樣，而勾勾的頂點就是我們所要找的點。在期望報酬大概在 5 左右的時候，有一個點其 *Riskiness* 大約是 71，雖然期望報酬不是最大，但風險值最小，此點就是在其它條件不變下，最適執行價格的點。

圖 17、在 $q = 0.5\%,\ \sigma = 0.1,\ T = 0.7$ 時，期望報酬和 *Riskiness* 的散佈圖

4.4.3 最適執行價格

從前面的幾張圖來看，我們知道 *Riskiness* 曲線大部分都先往下再往上，那這些最適執行價格的點，在不同的波動率、距到期日時間和股利殖利率下，分別有怎麼樣的情形呢？我們將它統計並列成表格。

在下表 2、表 3 和表 4 中，探討的參數有T 、q 、σ ，分別固定一個參數，來看另外兩者間的關係。首先看表 2，我們可以發現，在波動率小的時候，距到期日時間對最適執行價格的影響是很小的，大約都維持在同一個水平 510；隨著波動率變大的時候，才會在不同距到期日間出現不同的執行價格。接著看垂直的部分，在相同距到期日下，波動率越大其最適執行價格不會比前面的大，前面提過波動率越大，風險越大，損失的可能性也越大，所以會買較價外的賣權來保護。

在表 3 中，如果表格中的數字是 700，表示在該情況下，*Riskiness* 曲線是一路向下的；相反地，如果表格中的數字是 300 的話，表示曲線是一路向上的。而股利殖利率和波動率間的影響就有趣了，首先看直的，也就是相同股利殖利率下波動率的影響，我們可以看到在$q < 0.35\%$時，隨著波動率越大，最適執行價格也越大；在$q = 0.35\%$和 0.4%時，波動率為 0.1 和 0.4 的最適執行價格較小，中間的則較大；在$q > 0.4\%$時，最適執行價格就隨著波動率越大而越小了。接下來固定波動率，來看股利殖利率的影響。很明顯地，隨著股利殖利率越大，最適執行價格越小，此情況可以參照著圖 13 來看，q越大越早往上翹造成最小值發生得越早。從另一個角度來看，q越大造成風險越大，所以要保護下檔風險，需買執行價格較小的賣權。

表 4 中，先看相同距到期日下，不同股利殖利率的影響，可以看到和表 3 的結果相同，隨著q的增加，其最適執行價格$\leq$前一個q的最適執行價格，因為q越大會使得期望報酬越低，成本和風險增加，這幾個因素制衡著最適執行價格不會比前一期大。在相同股利殖利率下，隨著距到期日時間的增加情況也有略微不同。在$q \leq 0.55\%$的時候，最適執行價格隨著T增加而持平或增加；當$0.55\% < q < 1\%$時，這段期間，最適執行價格皆是持平的，只有在$q = 1\%$且$T = 0.9$時，其最適執行價格略小於其它三個距到期日時間的情況。我們也可以參照圖 16 左上角的圖，雖然執行價格深價外或深價內的情況較不穩定，但當最小值發生時，也就是價平附近，其墨綠色線($T = 0.9$)在其它者上面。

表 2、股利殖利率為 0.5%時，不同距到期日和波動率下的最適執行價格

	T=0.65	*T=0.70*	*T=0.75*	*T=0.80*	*T=0.85*	*T=0.90*
$\sigma = 0.05$	510	510	510	510	510	510
$\sigma = 0.1$	510	510	510	510	510	510
$\sigma = 0.15$	510	510	510	510	510	510
$\sigma = 0.2$	510	510	510	510	510	510
$\sigma = 0.25$	500	500	500	500	500	500
$\sigma = 0.3$	500	500	500	490	490	490
$\sigma = 0.35$	490	490	480	480	480	470
$\sigma = 0.4$	480	470	470	460	450	450

表 3、距到期日時間為 0.9 年時，不同股利殖利率和波動率下的最適執行價格

q	*0.05%*	*0.1%*	*0.15%*	*0.2%*	*0.25%*	*0.3%*	*0.35%*	*0.4%*	*0.45%*	*0.5%*
$\sigma = 0.1$	580	570	550	550	540	530	530	520	520	510
$\sigma = 0.2$	670	630	600	580	560	550	540	530	520	510
$\sigma = 0.3$	700	690	640	610	580	560	540	520	510	490
$\sigma = 0.4$	700	700	680	630	590	560	530	500	470	450
q	*0.55%*	*0.6%*	*0.65%*	*0.7%*	*0.75%*	*0.8%*	*0.85%*	*0.9%*	*0.95%*	*1.0%*
$\sigma = 0.1$	510	500	500	500	490	490	480	480	480	470
$\sigma = 0.2$	500	490	480	470	470	460	450	440	430	430
$\sigma = 0.3$	480	460	450	430	420	400	380	360	300	300
$\sigma = 0.4$	420	390	350	300	300	300	300	300	300	300

表 4、波動率為 10%時，不同股利殖利率和距到期日下的最適執行價格

q	*0.05%*	*0.1%*	*0.15%*	*0.2%*	*0.25%*	*0.3%*	*0.35%*	*0.4%*	*0.45%*	*0.5%*
$T = 0.6$	570	550	540	540	530	520	520	520	510	510
$T = 0.7$	570	560	550	540	530	530	520	520	510	510
$T = 0.8$	580	560	550	540	540	530	520	520	510	510
$T = 0.9$	580	570	550	550	540	530	530	520	520	510
q	*0.55%*	*0.6%*	*0.65%*	*0.7%*	*0.75%*	*0.8%*	*0.85%*	*0.9%*	*0.95%*	*1.0%*
$T = 0.6$	500	500	500	500	490	490	490	480	480	480
$T = 0.7$	510	500	500	500	490	490	490	480	480	480
$T = 0.8$	510	500	500	500	490	490	490	480	480	480
$T = 0.9$	510	500	500	500	490	490	480	480	480	470

4.5 小結

由模擬的結果得到下列結果：

1. 距到期日時間相同時，風險指標 *Riskiness* 隨著波動率的增加而增加；期望報酬 E(g) 在價內時，和波動率呈現反向關係，在價外時則為正向關係。
2. 當波動率 σ 相同時，期望報酬隨著距到期日時間越長而越大，*Riskiness* 也是同樣的情況，但是在波動率小且價外時會有例外。
3. 在其他條件不變之下，股票報酬率 μ 越小，期望報酬越小，風險值越大。
4. 在其他條件不變之下，股利殖利率 q 越大，期望報酬越小，因而 *Riskiness* 越高。
5. 加入股利殖利率後，相同距到期日時間下，期望報酬和結果 1 中相同，只是較易有負的期望報酬發生；波動率越大 *Riskiness* 也越大，但是在尾端會有上翹的情形。
6. 相同波動率下，加入股利殖利率，期望報酬也隨著距到期日時間而增加，和結果 2 相同；距到期日時間越長，風險指標 *Riskiness* 越大，但在深價內後，*Riskiness* 會呈反向關係。
7. 接下來我們先定義最適執行價格為 $K_o(x)$，x 可代表為 q 、T 、σ，$x\uparrow$ 代表 $x_i > x_{i-1}$。我們將最適執行價格之間的關係整理成表 5。由該表格中，我們可以看到股利殖利率越大，$K_o(q_i) \le K_o(q_{i-1})$。在控制變數為 q 和 σ 時，距到期日時間越長，兩者結果有點衝突，但其實並不然，大部分的情況下 $K_o(T_{i-1}) = K_o(T_i)$，而因將波動率固定在 0.1，造成 $q < 0.5\%$ 有增加的趨勢，但差別只有一些，要在波動率較大(例如：$\sigma = 0.4$)時，最適執行價格隨著距到期日時間遞減的效果較明顯。另外可以看到在 q 和 σ 的互相作用下，造成三種情況發生，而中間的部分則是轉折的區間。

表 5、不同q 、 T 、 σ間，最適執行價格的關係

控制變數	*結果*
$q=0.5\%$	T不變，$\sigma\uparrow,\ K_o(\sigma_i)\le K_o(\sigma_{i-1})$ σ不變，$T\uparrow,\ K_o(T_i)\le K_o(T_{i-1})$
$T=0.9$	$\begin{cases} q<0.35\% \\ 0.35\%\le q\le 0.4\% \\ q>0.4\% \end{cases} then \begin{cases} \sigma\uparrow,\ K_o(\sigma_{i-1})\le K_o(\sigma_i) \\ \sigma\uparrow,\ K_o(\sigma_i)\nearrow\searrow K_o(\sigma_{i-1}) \\ \sigma\uparrow,\ K_o(\sigma_i)\le K_o(\sigma_{i-1}) \end{cases}$ 其中$\nearrow\searrow$代表先上升後下降。 σ不變，$q\uparrow,\ K_o(q_i)\le K_o(q_{i-1})$
$\sigma=0.1$	T不變，$q\uparrow,\ K_o(q_i)\le K_o(q_{i-1})$ q不變，$T\uparrow,\ K_o(T_{i-1})\le K_o(T_i)$

第五章　研究結論與建議

Riskiness 指標提出不過才三四年的時間，但近幾年將它運用在實證上的例子上越來越多，像是用來說明投資於公司債不會較公債差，或者是運用在避險基金(mutual fund)，比較此風險指標和夏普指標(Sharpe ratio)間有什麼差異，在學術界已佔有一席之地。而 *Riskiness* 的實證應用多用在資產管理、資本適足率或者是風險和賭局上，在選擇權上的只有運用 *Riskiness* 推廣出類似 VIX 概念的指數，較少直接去看選擇權的風險。本文的目的是要探討避險策略的最適執行價格，在先前的論文已有使用 VaR 或者是 CVaR 來尋找，這裡使用具有較多優點的 *Riskiness* 來衡量，期能將它推廣到實務界上。

本文主要討論的波動率σ、距到期日時間T、股票報酬率μ和股利殖利率q變動下，觀察其 *Riskiness* 和執行價格間的關係，並找出是否有最小值發生。正常情況下，當波動率越大、距到期日時間越長和期望報酬越小，都會造成風險指標 *Riskiness* 越大，只有少數的情況下會有例外，使得價內外不一。在加入股利殖利率q時，會造成尾端有上翹的情形，當股利殖利率越大，避險策略的整體風險值會越大，最適執行價格遞減，但對於期望報酬只會產生平移的效果，不會造成結構上的不同。另外還可以發現波動率σ對風險值的影響是較距到期日時間T還大，前者是二次函數的關係，後者大略是線性函數的影響。

上述結論和一般的風險直覺上大致相同，但這只是一個簡單的開端，接下來可以多參考尋找最適執行價格的論文來做修正，像是是否要考慮預算限制式，或者是加入避險比率，這兩個是相當重要的因素，因避險策略在有避險成本的限制下，可能會使得最適執行價格有不同的情形，而避險比例則是影響當標的股票股價變動時，股票的損失和選擇權獲利間的比例。隨著考量的變數越多，模型越完整之後，即可使用美國股票市場的實證資料，來計算 *Riskiness*、VaR 和 CVaR，並比較之間的差異。另一方面，本文中僅考慮當選擇權到期時，就將手上部位結清，但當股票能出售的時間點比市場上最長的選擇權到期日還長時，應如何使用不同到期日選擇權來搭配其避險策略呢？這些都是可以再進一步思考的。

參考文獻

Ahn, D. H., Boudoukh, J., Richardson, M., Whitelaw, R., 1999. Optimal risk management using options. The Journal of Finance 54(1), 359-375.

Annaert, J., Deelstra, G., Heyman, D., Vanmaele, M., 2007. Risk management of a bond portflio using options. Insurance: Mathematics and Economics 41(3), 299-316.

Aumann, R. J., Serrano, R., 2008. An economic index of riskiness. Journal of Political Economy 116(5), 810-836.

Balbás, A., Balbás, B., Balbás, R., 2010. Capital requirements, good deals and portfolio insurance with risk measures. Technical Report 2010.04. Riesgos-CM, http://www.analisisderiesgos.org .

Bali, T., Cakici, N., Chabi-Yo, F., 2011a. A generalized measure of riskiness. Management Science 57, 1406–1423.

Deelstra, G., Vanmaele, M., Vyncke D., 2010. Minimizing the risk of a financial productusing a put option. The Journal of Risk and Insurance 77(4), 767-800.

Foster, Dean P., Hart, S. 2009. An operational measure of riskiness. Journal of Political Economy 117(5), 785-814.

Hillgruber, C., Riedel, F., LÄutkebohmert-Holtz, E., 2009. Essays on dual risk measures and the asymptotic term structure. http://hss.ulb.uni-bonn.de/2009/1852/1852.pdf .

Homm, U., Pigorsh, C., 2012. Beyond the Sharpe ratio: performance measurement with an economic index of riskiness. Journal of Banking & Finance 36(8), 2274-2284.

Huang, G., Xu, J., Xing, W., 2011. Hedging strategies with a put option and their failure rates. Retrieved from http://arxiv.org/abs/1110.0159v1 .

Hull, J. C., 2008, Options, futures, and other derivatives, 7/E. Prentice Hall.

Krokhmal, P., Palmquist, J., Uryasev, S., 2002. Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints. Journal of Risk 4, 43-68.

Rockafellar, R., Uryasev, S., 2002. Conditional value-at-risk for general loss distributions. Journal of Banking and Finance 26(7), 1443-1471.

Schied, A., 2006. Risk measures and robust optimization problems. Stochastic Models 22, 753-831.

Serraino, G., Uryasev, S., 2011. Protecting equity investments: options, inverse ETFs, hedge funds, and AORDA Portfolios. American Optimal Decisions. Retrieved from http://www.aorda.com/aod/static/documents/Protecting_Equity_Investments.pdf .

Taboga, M., 2009. The riskiness of corporate bonds. Bank of Italy Temi di Discussione (Working Paper) No. 730. Retrieved from http://ssrn.com/abstract=1601844 .