

國立臺灣大學工學院應用力學研究所

碩士論文

Institute of Applied Mechanics

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis



不同力電耦合強度壓電振子應用於能量擷取之研究

Design of Piezoelectric Energy Harvesters with Different
Electromechanical Couplings

莊為傑

Wei-Chieh Chuang

指導教授：舒貽忠 博士

Advisor : Yi-Chung Shu, Ph.D.

中華民國 105 年 5 月

May, 2016

國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書

不同力電耦合強度壓電振子應用於能量擷取之研究

Design of Piezoelectric Energy Harvesters with
Different Electromechanical Couplings

本論文係莊為傑君（學號：R02543039）在國立臺灣大學應用力學研究所完成之碩士學位論文，於民國 105 年 5 月 13 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

舒貽忠 舒貽忠
(指導教授)

陳瑞琳 陳瑞琳

廖文義 廖文義

所長

王立昇

王立昇



致謝

時光飛逝，碩士生涯即將告一個段落，回首三年來在應力所求學的日子，受到許多人的幫助與鼓勵，而修課、做研究、寫論文無疑是最難忘的回憶，如今，能完成碩士學業，心中滿是感激。

感謝指導教授 舒貽忠特聘教授，您的名言「做研究就是要重視細節」，這句話無論在各方面皆很受用，行事上強調的邏輯要通，更是學生時常拿來督促自己的話語。感謝台灣大學應用力學研究所 陳瑞琳教授、台北科技大學土木工程學系兼國家地震中心 廖文義教授，撥冗擔任學生的口試委員並給予指導，學生獲益良多，您兩位寶貴的提問與建議，也使論文內容更趨完備。

在 428 研究室這個大家庭中，感謝 吳秉憲學長，您不但學識淵博且為人謙和，除了修課上的解惑外，更重要的是研究上的幫助，每當遇到挫折與瓶頸時，學長的提點有如醍醐灌頂，而問題以全方面的思考來解決這點，更是值得我學習的。感謝研究助理允銓，每當研究所之路遭遇挫折，想法找不到出口，內心走不出來時，您總是以自身的研究所經驗，來勉勵我，讓我能找到方向重新振作，再次勇往直前。感謝 01 級的學長姐，亭瑋、雨彤、欽雄、善合、詩弘、聖堯、工瑋，帶領我的修課生活快速上軌道，並細說研究之路安定我心；感謝 02 級的同學，帝曉、鈴雍、郁誠，大家並肩修課、做研究，互相討論、打氣，讓彼此能在各自道路上努力堅持著走下去；感謝 03 級的學弟，彥禎、昱程、秉祐、毅豪、繼儒、若天、韋宏，分擔實驗室的事務，並提供研究上的協助，一同有過的歡笑不會忘；感謝 04 級的學弟妹及 04 級的博班學長，偉丞、仁魁、璽安、晏誠、桓瑋、岱華、晨晏、Somdeb，有你們的加入，為最後一年的實驗室生活增添了不少色彩。

感謝應力所其他研究室的朋友，無論學長姐、同學、學弟妹，你們的鼓勵是我的動力，也讓我的所上生活更加歡樂。感謝台大的其他朋友們，每當專注於自身領域而感到茫然時，總能給我跨領域的新知，新的衝擊產生新的想法，使我可



用不一樣的角度重新看事物。

感謝十姊妹大家庭、超跳團、萬能讀書團、潘朵拉、UD0924、大雜燴、左半邊、UD0627、28 天步調倒返、數字團、430 安駕重機及親戚、朋友們，當研究所遇到挫折，心情沮喪時，大家總是聽我訴苦且歡笑回應以轉移我的注意力，陪我到處吃喝玩樂，豐富生活。

感謝女友芷唯，陪我走完碩班的最後一哩路，不曾多問我研究所遭遇的挫折與困難，只是默默的支持我，並且鼓勵我，帶給我歡笑，讓我有勇氣與信心繼續迎接挑戰。

感謝親愛的家人，爸爸、媽媽、妹妹，無論遇到什麼樣的困難，內心是多麼的無助，但始終知道那總有一扇門是永遠為你敞開的，就是家，家是永遠的避風港，父母盡心盡力提供我最好的生活品質，讓我雖在外地求學，卻能無後顧之憂，專注於學業，在我心情低落時，傾聽我，鼓勵我，並適時給予協助，讓我能繼續走下去，最後，謹以此文獻給敬愛的雙親。

莊為傑



摘要

本論文旨在設計與探討不同力電耦合強度之壓電振子應用於能量擷取，並提供一些方法可用於實驗量測壓電振子應用於能量擷取之系統等效材料參數。壓電振動懸臂樑數學模型以能量法為基礎，採用模態函數或均佈力負載兩種形狀函數來簡化壓電振子設計，亦可引入等效電路模型，將壓電振動懸臂樑數學模型比擬成 RLC 電路。並採用雷利阻尼的概念來假設振子的等效機械阻尼係數，最後定義壓電振子之力電耦合強度為無因次化力電耦合係數除以無因次化機械阻尼係數。

本論文第一部分是比較由不同系統等效參數之估計曲線的差異，實驗結果顯示由三種方法用於實驗所算出的估計值曲線，估計曲線在最佳阻抗下的功率誤差極小，在遠離最佳阻抗的電阻下之功率誤差則加大，但無論在何阻抗下，估計值曲線的趨勢皆與實驗曲線的趨勢吻合。其中，等效電路法較能量法好的原因是可在材料尺寸與參數未知的情況下作量測。

本論文第二部分是研究壓電層長度比對於力電耦合強度的影響，由理論、模擬、實驗得到以下結論，實驗結果與理論結果趨勢吻合，因此理論結果是可以當作預測壓電振子之物理行為的依據。分析發現強力電耦合振子與弱力電耦合振子有相似的物理行為，第一，皆為當壓電層長度比約為 0.5 時，力電耦合強度最強。第二，單位質量的發電功率並非隨著總質量的增加而增加，而是當壓電層長度比約為 0.3 時，單位質量的發電功率最小。有趣的是，單位成本的發電功率約在與前者相同的壓電層長度比下有最小值。第三，實驗結果顯示不同壓電層長度比之雷利阻尼的係數皆在同次序且可趨近定值，且強力電耦合振子的雷利阻尼係數小於弱力電耦合振子的雷利阻尼係數。

關鍵字:壓電振子設計、壓電振動能量擷取系統之等效參數量測、能量法、等效電路模型、力電耦合強度



Abstract

The goal of the present thesis is to design the piezoelectric energy harvesters with different magnitudes of electromechanical coupling. In addition, it also proposes several methods for measuring the effective system parameters of an energy harvester. The methodology is based on the energy approach where the shape function is chosen either by the standard modal analysis or by the method of uniform load. Besides, the effective system parameters can also be determined based on the equivalent RLC circuit model. The proposed criterion for measuring the strength of electromechanical coupling of an energy harvester is defined by the ratio of electromechanical coupling to the mechanical damping ratio. The damping coefficient is assumed to the type of Rayleigh damping here.

The first part of the present thesis is to make comparisons among the different proposed estimates of effective parameters. It is found the estimation of harvested power frequency response measured at the optimal load agrees quite well with experimental observations. However, the disagreement increases in the case of attaching larger electric loads. It is also found the estimation based on the equivalent circuit model shows the least error compared to other methods.

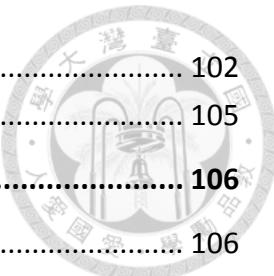
The second part is to study the effect of different lengths of piezoelectric layers on the magnitudes of electromechanical coupling. It is found both analytic estimates and experimental observations exhibit the similar trends. Hence, our proposed estimates are capable of performance evaluations. The first observation from our analysis is that the behavior of the case of strong electromechanical coupling is similar to that of the weak electromechanical coupling. The second result is the strongest coupling is achieved when the ratio of the length of the piezoelectric layer to that of the substrate is about 0.5. The third observation is the harvested power per unit mass is not monotone increasing as the increase of piezoelectric layer. Instead, it is minimized when the ratio of the piezoelectric layer to the substrate is around 0.3. Interestingly, the harvested power per unit price is also minimized at around the similar range. Finally, the experimental observations confirm that the coefficient of Rayleigh damping is approximate to be a constant in spite of different lengths of piezoelectric layers. In addition, it is observed the coefficient of Rayleigh damping in the case of weak coupling is larger than that in the case of strong coupling.

Keywords: Design of Piezoelectric Oscillator 、 Measurement of Equivalent System Parameters 、 Energy Method 、 Equivalent Circuit Model 、 Electromechanical Coupling



目錄

口試委員審定書.....	#
致謝.....	I
摘要.....	III
ABSTRACT	IV
目錄.....	V
圖目錄	VII
表目錄	X
CHAPTER 1. 導論	1
1-1 研究動機	1
1-2 文獻回顧	2
1-3 論文架構	6
CHAPTER 2. 壓電振動子模型	7
2-1 壓電效應	7
2-1-1 正壓電效應	7
2-1-2 逆壓電效應	8
2-2 壓電懸臂樑之數學模型	9
2-3 壓電懸臂樑之等效電路	20
CHAPTER 3. 模型數值驗證	24
3-1 理論之等效機械阻尼係數	24
3-2 模型驗證	25
CHAPTER 4. 不同力電耦合強度振子之設計	35
4-1 設計方法	35
4-2 設計壓電片之特性結果探討	39
CHAPTER 5. 實驗結果與分析比較	55
5-1 實驗之等效參數如何量測	55
5-2 實驗儀器與架構	59
5-3 實驗結果	63
CHAPTER 6. 結論與展望	102



6-1 結論	102
6-2 未來展望	105
APPENDIX 1. 模態函數.....	106
A-1-1 模態分析法	106
A-1-2 均佈力負載法	110
APPENDIX 2. 有限元素軟體 COMSOL 3.5A 操作說明	112
參考文獻	114



圖 目 錄

圖 1-1 壓電振動能量擷取系統示意圖	2
圖 1-2 各尺寸壓電層的壓電片於不同電阻下之功率[44]	6
圖 2-1 正壓電效應示意圖	7
圖 2-2 逆壓電效應示意圖	8
圖 2-3 雙層壓電懸臂樑結構示意圖	9
圖 2-4 (a){3-1}型態與(b){3-3}型態示意圖	11
圖 2-5 壓電懸臂樑的(a)串聯型式 (b)並聯型式	11
圖 2-6 壓電振動能量擷取示意圖	17
圖 2-7 簡易等效電路模型	20
圖 2-8 等效振盪電路示意圖	21
圖 3-1 60-60 材料尺寸示意圖	26
圖 3-2 PZT-5A 60-60 功率之頻率響應模擬圖(a=0.1g) (a) R=2k Ω (b) R=6k Ω (c) R=40k Ω (d) R=300k Ω (e) R=1M Ω (f) 合併 5 組 COMSOL 模擬結果	27
圖 3-3 60-40 材料尺寸示意圖	28
圖 3-4 PZT-5A 60-40 功率之頻率響應模擬圖(a=0.1g) (a) R=2k Ω (b) R=5k Ω (c) R=50k Ω (d) R=500k Ω (e) R=2M Ω (f) 合併 5 組 COMSOL 模擬結果	29
圖 3-5 60-30 材料尺寸示意圖	30
圖 3-6 PZT-5A 60-30 功率之頻率響應模擬圖(a=0.1g) (a) R=2k Ω (b) R=7k Ω (c) R=70k Ω (d) R=750k Ω (e) R=3M Ω (f) 合併 5 組 COMSOL 模擬結果	31
圖 3-7 60-20 材料尺寸示意圖	32
圖 3-8 PZT-5A 60-20 功率之頻率響應模擬圖(a=0.1g) (a) R=5k Ω (b) R=15k Ω (c) R=100k Ω (d) R=1M Ω (e) R=3M Ω (f) 合併 5 組 COMSOL 模擬結果	33
圖 4-1 直流電解之三項參數關係示意圖[22]	35
圖 4-2 PZT-5A 材料物理參數(a=0.1g) (a) 力電耦合係數 k_e^2 / ζ_m (b) 無因次化力電耦合係數 k_e^2 (c) 無因次化機械阻尼係數 ζ_m (d) 短路共振頻 f_{sc} (e) 開路共振頻 f_{oc} (f) 系統之等效質量 M	42
圖 4-3 PZT-5A 材料物理參數(a=0.1g) (a) 功率 (b) 固定端等效質量 (c) 功率/系統之等效質量 (d) 功率/總質量 (e) 價格 (f) 功率/價格	46
圖 4-4 PZT-5A 材料物理參數(a=0.1g) 固定端等效質量的平方/系統之等	



效質量	47
圖 4-5 PZT-2 材料物理參數($a=0.1g$) (a) 力電耦合係數 k_e^2 / ζ_m (b) 無因次化力電耦合係數 k_e^2 (c) 無因次化機械阻尼係數 ζ_m (d) 短路共振頻 f_{sc} (e) 開路共振頻 f_{oc} (f) 系統之等效質量 M	50
圖 4-6 PZT-2 材料物理參數($a=0.1g$) (a) 功率 (b) 固定端等效質量 (c) 功率/系統之等效質量 (d) 功率/總質量 (e) 價格 (f) 功率/價格	53
圖 4-7 PZT-5A 材料物理參數($a=0.1g$) 固定端等效質量的平方/系統之等效質量	54
圖 5-1 最大功率之電阻圖 (a) 強力電耦合 (b) 弱力電耦合	58
圖 5-2 實驗儀器架構流程圖	59
圖 5-3 實驗儀器 (a) 振動台 (b) 功率放大器 (c) 阻抗分析儀 (d) 數位示波器 (e) 訊號產生器 (f) 加速規	61
圖 5-4 實驗儀器 (a) 加速規接收器 (b) 光纖測距儀 (c) 光纖探頭 (d) 資料擷取卡 (e) 資料擷取卡 (f) 筆電	62
圖 5-5 QA、KB 各尺寸式樣	63
圖 5-6 (a) 壓電片固定於夾具 (b) 壓電片與夾具固定於基座	63
圖 5-7 QA 60-60 功率之頻率響應實驗圖($a=0.1g$) (a) $R=5k\Omega$ (b) $R=10k\Omega$ (c) $R=75k\Omega$ (d) $R=330k\Omega$ (e) $R=750k\Omega$ (f) 合併 5 組實驗結果 ...	65
圖 5-8 QA 60-40 功率之頻率響應實驗圖($a=0.1g$) (a) $R=5k\Omega$ (b) $R=10k\Omega$ (c) $R=75k\Omega$ (d) $R=500k\Omega$ (e) $R=2M\Omega$ (f) 合併 5 組實驗結果	67
圖 5-9 QA 60-30 功率之頻率響應實驗圖($a=0.1g$) (a) $R=5k\Omega$ (b) $R=10k\Omega$ (c) $R=100k\Omega$ (d) $R=500k\Omega$ (e) $R=1M\Omega$ (f) 合併 5 組實驗結果 ...	69
圖 5-10 QA 60-20 功率之頻率響應實驗圖($a=0.1g$) (a) $R=5k\Omega$ (b) $R=20k\Omega$ (c) $R=200k\Omega$ (d) $R=2M\Omega$ (e) $R=6.8M\Omega$ (f) 合併 5 組實驗結果	71
圖 5-11 QA 實驗之材料物理參數($a=0.1g$) (a) 力電耦合係數 k_e^2 / ζ_m (b) 無因次化力電耦合係數 k_e^2 (c) 無因次化機械阻尼係數 ζ_m (d) 短路共振頻 f_{sc} (e) 開路共振頻 f_{oc} (f) 系統之等效質量 M	75
圖 5-12 QA 材料物理參數($a=0.1g$) (a) 功率 (b) 固定端等效質量 (c) 功率/系統之等效質量 (d) 功率/總質量 (e) 價格 (f) 功率/價格	79
圖 5-13 KB 60-60 功率之頻率響應實驗圖($a=0.1g$) (a) $R=10k\Omega$ (b) $R=30k\Omega$ (c) $R=51k\Omega$ (d) $R=100k\Omega$ (e) $R=500k\Omega$ (f) 合併 5 組實驗結果	82
圖 5-14 KB 60-40 功率之頻率響應實驗圖($a=0.1g$) (a) $R=5k\Omega$ (b) $R=20k\Omega$ (c) $R=51k\Omega$ (d) $R=200k\Omega$ (e) $R=1M\Omega$ (f) 合併 5 組實驗結果	84
圖 5-15 KB 60-30 功率之頻率響應實驗圖($a=0.1g$) (a) $R=5k\Omega$ (b) $R=20k\Omega$ (c) $R=75k\Omega$ (d) $R=200k\Omega$ (e) $R=1M\Omega$ (f) 合併 5 組	



實驗結果	86
圖 5-16 KB 60-20 功率之頻率響應實驗圖(a=0.1g) (a)R=10kΩ (b) R=30kΩ (c) R=100kΩ (d) R=500kΩ (e) R=2MΩ (f) 合併 5 組 實驗結果	88
圖 5-17 KB 實驗之材料物理參數(a=0.1g) (a) 力電耦合係數 k_e^2/ζ_m (b) 無因次化力電耦合係數 k_e^2 (c) 無因次化機械阻尼係數 ζ_m (d) 短路共振頻 f_{sc} (e) 開路共振頻 f_{oc} (f) 系統之等效質量 M	92
圖 5-18 KB 材料物理參數(a=0.1g) (a) 功率 (b) 固定端等效質量 (c) 功率/系統之等效質量(d) 功率/總質量 (e) 價格 (f) 功率/價格	96
圖 6-1 單壓電層且未貼滿之振動懸臂樑示意圖	105
圖 A-1 自由振動的懸臂樑示意圖	106
圖 A-2 $0 < x_1 < L_o$ 段的自由體圖	106
圖 A-3 受一均佈力負載的懸臂樑示意圖	110
圖 A-4 $x_1 < L$ 段的自由體圖	110
圖 A-5 受一均佈力附載的懸臂樑的 $\frac{M}{YI}$ 圖	111

表目錄



表 2-1 力學等效材料參數表示式	16
表 2-2 電學等效參數類比力學等效參數關係式	21
表 2-3 電學等效參數與力學等效參數轉換表示式	22
表 3-1 PZT-5A 與 Copper 之材料尺寸與材料參數	25
表 3-2 PZT-5A 60-60 能量法理論在兩形狀函數下之等效材料參數	26
表 3-3 PZT-5A 60-40 能量法理論在兩形狀函數下之等效材料參數	28
表 3-4 PZT-5A 60-30 能量法理論在兩形狀函數下之等效材料參數	30
表 3-5 PZT-5A 60-20 能量法理論在兩形狀函數下之等效材料參數	32
表 4-1 PZT-2 與 Copper 之材料參數	48
表 5-1 實驗儀器規格	60
表 5-2 QA 60-60 實驗三方法之等效材料參數	64
表 5-3 QA 60-60 實驗與三方法之功率、誤差	64
表 5-4 QA 60-40 實驗三方法之等效材料參數	66
表 5-5 QA 60-40 實驗與三方法之功率、誤差	66
表 5-6 QA 60-30 實驗三方法之等效材料參數	68
表 5-7 QA 60-30 實驗與三方法之功率、誤差	68
表 5-8 QA 60-20 實驗三方法之等效材料參數	70
表 5-9 QA 60-20 實驗與三方法之功率、誤差	70
表 5-10 QA 實驗之 α 值運算	80
表 5-11 KB 60-60 實驗三方法之等效材料參數	81
表 5-12 KB 60-60 實驗與三方法之功率、誤差	81
表 5-13 KB 60-40 實驗三方法之等效材料參數	83
表 5-14 KB 60-40 實驗與三方法之功率、誤差	83
表 5-15 KB 60-30 實驗三方法之等效材料參數	85
表 5-16 KB 60-30 實驗與三方法之功率、誤差	85
表 5-17 KB 60-20 實驗三方法之等效材料參數	87
表 5-18 KB 60-20 實驗與三方法之功率、誤差	87
表 5-19 KB 實驗之 α 值運算	97



Chapter 1. 導論

1-1 研究動機

近年來因能源危機，且環保意識抬頭，再生能源受到重視，成為各國研究與發展的重點之一，如何將能量轉換成可供使用的電力已成為學術界和產業界共同關注的議題。環境中的每一處都充斥著各種形式的能量，如：太陽能、潮汐、地熱、風力和振動能等，其中振動能量的來源受限於外在環境因素的影響較小且生活周遭最常見，因此利用媒介將振動能量轉變為驅動電子電路元件之電源廣泛受到重視。

壓電材料其具有高力電耦合效應[1]、簡單直接的力電轉換機制[2]、較高的品質因子、完全自我供電[3],[4]、極快的反應速度等，一直以來均被視為力電轉換元件的首選材料。簡而言之，壓電效應是一種力場和電場互相轉換的一種效應，利用壓電振動能量擷取系統可以擷取環境中的振動能，將之轉換成電能並儲存，適用於自主式的發電裝置。

壓電片之力電耦合強度定義為無因次化力電耦合係數除以等效機械阻尼係數，等效機械阻尼係數與整體結構有關，在設計時不易估計，本文將引入雷利阻尼法的概念，將等效機械阻尼係數加以定義，得其理論並用實驗驗證，使往後理論能有實驗的依據來假定等效機械阻尼係數，及探討壓電振動樑的物理現象。在實驗量測壓電振動樑的等效材料參數時，原先本團隊採用能量法理論，因式樣的材料參數量測不易，導致無法得壓電振動能量擷取的估計值，由本文採用等效電路法理論，可避開量測式樣的材料參數量測而得壓電振動能量擷取的估計值。



1-2 文獻回顧

壓電振動能量擷取顧名思義為壓電材料因振動而產生能量使吾人來取得，將壓電材料固定於設計的結構上，利用環境振動使壓電材料產生形變，其因形變而產生能量，為一力學能轉換成電能的效應。

壓電振動能量擷取系統主要可分為壓電振子、擷取電路、阻抗匹配三部分來探討，如圖 1-1。壓電振子會因不同材料、尺寸規格、整體結構而有影響；因不同擷取電路設計可提升壓電能量擷取系統的效能與轉換成所需的型式，如壓電材料輸出為交流電轉換為直流電；當外部電路產生的電致阻尼與結構本身的機械阻尼達到阻尼匹配時，壓電振子的輸出功率才可達最大值，由此可知最佳阻抗匹配的重要性。

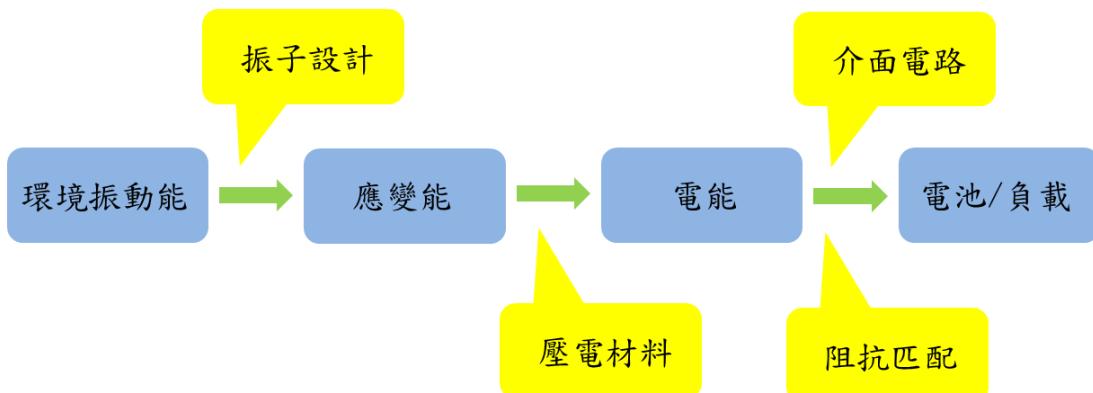


圖 1-1 壓電振動能量擷取系統示意圖

振動子理論的部分，起初由 Elvin 和 Inman 等團隊利用雷力茲法(Rayleigh-Ritz approach)與特徵模態分析，推導出完整的壓電振動樑在第一共振模態下之理論模型架構[2],[3],[5]-[7]，基本壓電振動能量擷取系統即是後端介面電路僅用一電阻呈現，Erturk、Lumentut 等團隊對此有發表相關理論[8],[9]。接著 Roundy 團隊將壓電振動子等效成 RLC 電路，將壓電振動樑的控制方程式與等效電路的 RLC 電子元件作類比，並轉換成在等效電路下的控制方程式[10]，Kim、Ashtari、Dalzell 等團隊



採用此等效電路之控制方程式來做壓電振動樑的分析[11]-[13]。因振動子在共振時之位移、形變最大，故欲將其架設於環境振動，並藉此擷取能量，則要設法將其共振頻率與環境頻率作匹配，才能達到最大的功率輸出，結構的共振頻率與結構本身之系統質量與系統勁度有關，因此 Wu 團隊提出了調整系統質量以達到改變振動子之共振頻率的方法[14]，另外 Leland 團隊則是從改變系統勁度著手，在樑的軸向施加應力來改變系統勁度[15]，接著 Hu 團隊將此方法建立出該模型之理論架構[16]。上述調整系統質量與調整系統勁度的方法都能有效地改變振動子之共振頻率。其中，壓電片前端加上質量塊，除可改變振動子之共振頻率，也可增加輸出功率，Kim、Wang 即採用此方法[17],[18]。

擷取電路的部分，壓電振子因振動不斷的產生形變，單看樑的軸向即是一個拉、壓反覆的變形，所以其輸出的電壓為交流電，但許多電子元件需求為直流電，則搭配擷取電路將其轉為直流電。除了搭配由全橋整流器與濾波電容組成的標準電路外，Guyomar 團隊提出了電感式同步開關(SSHI)，每半周期切換開關，使電容與壓電振子內部共振，即增加位移極值，來達到輸出功率增加的效果[19]。由此可發現壓電振動能量擷取與壓電振子之共振頻率有密切關係，一旦壓電振子的共振頻率偏移了環境頻率，則發電效果會大打折扣，本團隊由 Shu 和 Lien 提出了一套完整的模型，成功解決了振子共振頻偏移的問題[20],[21]，並修正電感式同步開關，使壓電振動能量擷取頻寬增加且輸出能量功率更佳[22]-[24]。

阻抗匹配的部分，本團隊在 2006 年時，提出了完整的全頻域交流電轉直流電的理論模型，其研究中指出機電系統於簡諧振盪時，當電致阻尼比與機械阻尼比兩相匹配時會產生最佳的力電轉換效果[20],[21]。另外近年來，Liang、Renno、Deng 等團隊亦有類似的結論，並進一步探討系統與最佳阻抗之間的搭配[25]-[28]。

壓電振動能量擷取的理論與實驗，多半假設為一維振動，Erturk 團隊則針對單一自由度之壓電振動做進一步的探討[29],[30]，而振動外力多半為單一振動源，Lumentut 團隊則是假定振動外力來自多方振動源，針對三維壓電振子的振動做進



一步討論[31]。

本團隊近年來致力於發展陣列式壓電振子，因單一振子之發電功率有限，預期將多根振子聯合使用，可有效增加其發電功率。起初由 Shahruz 提出陣列式振子的概念，並將系統各振子調整至共振頻僅些微的差距，令其有寬頻的效果[32]，隨後有 Tadesse、duToit、Ferrari、Kim、Xue 等團隊學者採用陣列式振子的概念並有相關的研究，主要在改善原先陣列式振子的缺失並針對電路作分析[33]-[37]，而本團隊於 2012、2013 年提出了陣列式壓電振子搭配非線性的整流介面電路之理論模型，此舉增加了陣列式壓電振子之頻寬[38]-[41]。

壓電振子的力電耦合強度定義為無因次化力電耦合係數除以等效機械阻尼係數，由力電耦合強度可將壓電振子分為強力電耦合、中力電耦合、弱力電耦合三類，三種不同力電耦合強度類別的壓電振子，主要在於壓電振子所表現出的特性相異，其差異在本文第四章會有更詳盡的介紹，研究發現不同力電耦合強度類別的壓電振子要搭配不同的介面電路，能使能量擷取的效果發揮更佳，區分壓電振子的好處在於能準確找到可使壓電振子之能量擷取效果發揮到最佳的電路。

反過來想，當確立了後端的介面電路，如何找到能使介面電路發揮最佳效果的前端壓電振子即成為重要的課題，本文研究因此原因而誕生，旨在設計與探討不同力電耦合強度之壓電振子應用於能量擷取。

本團隊以往皆使用樑型的壓電振子，而壓電振子也以樑型的振子最為常見[15],[16],[42],[43]，基於此因，本文將沿用樑型的壓電振子做設計與探討。本團隊以往除皆使用樑型的壓電振子外，壓電層長度皆與基板等長，本文的構想即由此點發展，猜測改變壓電層長度應能有效改善振子的力電耦合強度，且本團隊不曾有弱力電耦合振子，藉此也猜測當基板長度固定，壓電層長度逐漸減少時，力電耦合強度會逐漸下降，此舉可出現弱力電耦合振子。而壓電層長度與基板不等長的想法，Abdelkefi 團隊即設計將壓電片的基板與壓電層不等長，探討在壓電層與基板之長度比不同下之輸出功率[44]，如圖 1-2。



延續樑型的壓電振子，由樑的結構出發 Erturk 對樑的數學模型做不同等效樑之假設，探討在各不同等效樑之假設下，壓電樑之數學模型的輸出功率[45]，針對樑之軸向變形，Shi 團隊探討了樑之軸向應變因受力而產生的變化趨勢[46]，在樑的變形假設，本文則選用尤拉-伯努利樑。

本文由系統的能量形式，並根據漢米爾頓定理，推導出壓電振動懸臂樑的控制方程式，Wickenheiser 則提出了壓電片可分段計算的模型理論，以解決多段為不同材料與不同斷面面積之問題，並探討壓電層與基板在不同厚度比下之影響[47]。壓電振動懸臂樑的數學模型，主要以能量法為基礎，能量法之形狀函數，Erturk 團隊利用模態分析來定義形狀函數[29]，Kim 團隊利用均佈力附載來定義形狀函數，並探討在平面應力與平面應變假設下之差異[48]，兩種方法的形狀函數本文皆採用，並探討其優缺點。

一般壓電振動能量擷取系統均在第一模態下操作，因共振頻較低容易達成，且形變為單純的凹向上或凹向下之曲線，本文由此因也在第一共振頻下操作，但在其他模態下的壓電振動能量擷取會有何結果，發電效能是否更佳，Lumentut、Yuan 等團隊對此探討在其他模態下之樑的形變與輸出功率[49],[50]。

將整體壓電振動能量擷取以實驗呈現後，常發現整體結構的等效機械阻尼係數在理論上之定義，往往與實際有一段落差，Goldschmidtboeing 團隊採用雷利阻尼的概念，將整體結構之等效機械阻尼係數用雷利阻尼作假設，將估計值與實驗值相比，發現當外力振動在整體結構的共振頻時，估計值與實驗值的電壓誤差極小，但當外力振動遠離整體結構的共振頻時，估計值與實驗值的電壓誤差則較大，不過估計值與實驗值的整體電壓趨勢皆吻合[51]。本文在整體結構的等效機械阻尼係數採用雷利阻尼的概念並加以簡化，藉此期望能找到強、中、弱力電耦合振子之等效機械阻尼係數，此舉如成真，對未來本團隊在設計振子上有極大的幫助，可使理論構想與實際結果相接近，本文實驗結果也會觀察是否有當外力振動遠離整體結構的共振頻時，估計值與實驗值的電壓誤差則較大的現象發生。

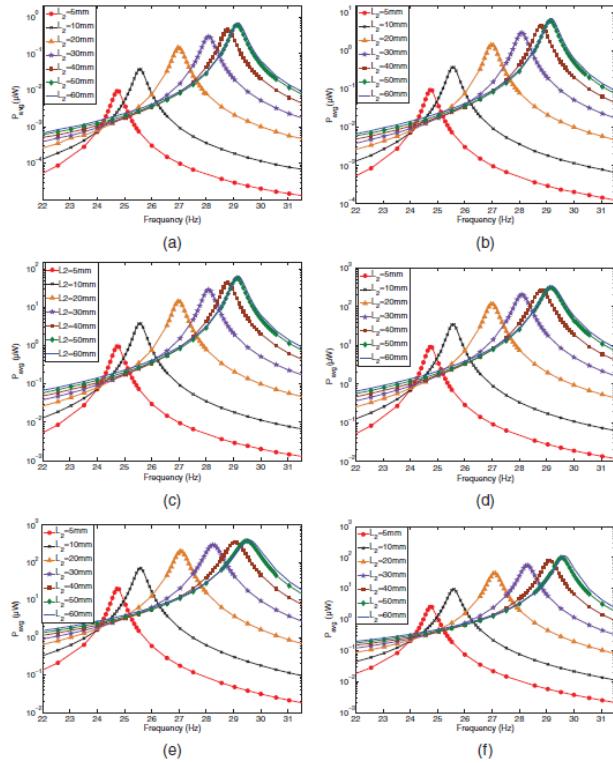


圖 1-2 各尺寸壓電層的壓電片於不同電阻下之功率[44]

1-3 論文架構

本論文將分為六個章節，第一章導論，介紹研究動機、文獻回顧。第二章壓電振動子模型，簡述正、逆壓電效應，建立壓電能量擷取系統之模型，將此模型轉化為數學式，並得同樣模型下之等效電路模型數學式。第三章模型數值驗證，將第二章所推得之數學式解析解與有限元素軟體 COMSOL 數值解做比對，藉此來驗證能量法的控制方程式，並引入雷利阻尼法來定義振子之等效機械阻尼係數。第四章不同力電耦合強度振子之設計，定義力電耦合強度，並由第三章之結果延伸探討物理現象。第五章實驗結果與分析比較，將以第三章所設計之壓電尺寸模型藉由實驗呈現，並與第四章的壓電物理現象作相同的探討和比較。第六章結論與展望，將本論文的研究做個統整，並簡單論述所得之結論。

Chapter 2. 壓電振動子模型



2-1 壓電效應

壓電效應(Piezoelectric Effect)為一種機械能與電能相互轉換的現象，其可分為正壓電效應與逆壓電效應兩種。當壓電材料受外力作用而產生電壓或電流時，此現象稱為正壓電效應(Piezoelectric Effect)；反之，當壓電材料受外接電壓或電流作用而變形時，此現象稱為逆壓電效應(Converse Piezoelectric Effect)。

2-1-1 正壓電效應

壓電材料一般視為絕緣體，內部不具有自由電子，會因晶格內部不具對稱性時，而發生極化(Polarization)現象。當材料承受張力或是壓力時，其材料內部晶體結構之相對移動會產生電荷分佈的極化，在不同端之表面會累積不同極性的電荷，這就是所謂的正壓電效應，如圖 2-1 所示。

選擇壓電材料做為能量擷取器之振動子，即是利用此效應實現力電能轉移的效果，以懸臂樑形式固定壓電振動子，於固定端施加一簡諧振盪力，材料因受外力而變形所產生相對應的週期性電壓。當簡諧振盪力頻率與材料本身的自然頻率相同時，因達到共振而具有最大的電壓輸出效果。主要應用於感測器、點火器等。

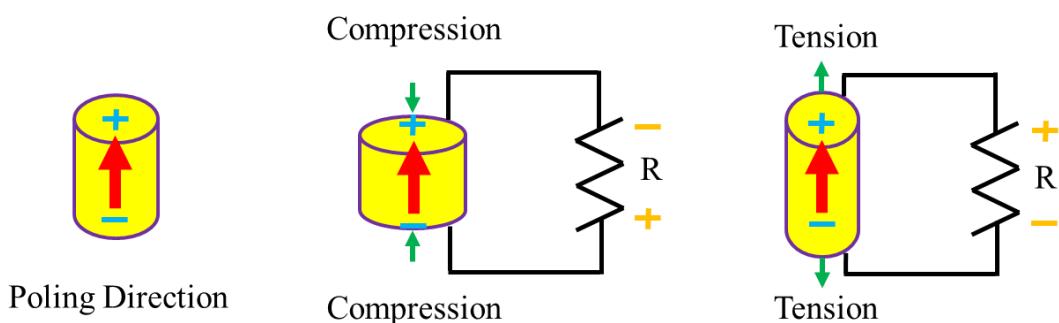


圖 2-1 正壓電效應示意圖



2-1-2 逆壓電效應

在壓電材料兩端電極層施加一電位差，會使材料內部的電偶極長度改變，為抵抗電偶極的變化，材料產生形變，這就是所謂的逆壓電效應，如圖 2-2 所示。

外加電位差之方向若與材料之極化方向相同，材料之晶格內之正、負離子會彼此遠離，此時材料會伸長；反之，當外加電位差之方向若與材料之極化方向相反，則材料會縮短。主要應用於致動器、蜂鳴器等。

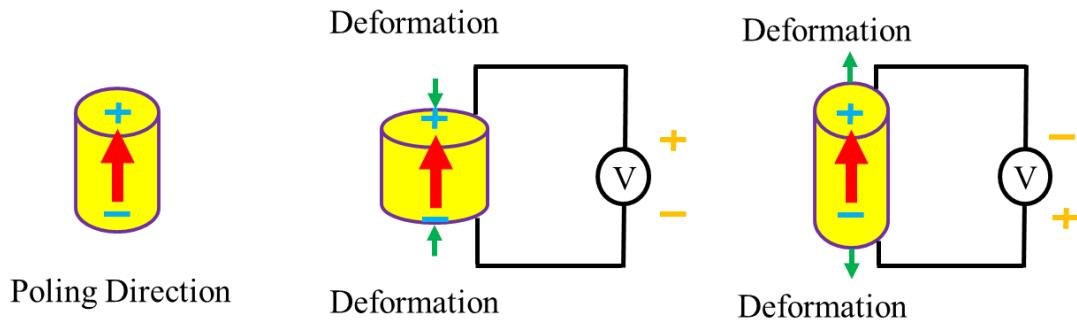


圖 2-2 逆壓電效應示意圖



2-2 壓電懸臂樑之數學模型

模型為雙壓電層懸臂樑固定於簡諧振動 $Z(t)$ 基座上，而懸臂樑由壓電材料和基板所組成的複合材料樑，如圖 2-3 所示，中間基板為銅片，上、下兩層為壓電陶瓷材料。壓電層與銅片尺寸分別為長度 L_o 、 L ，寬度同為 w ，厚度 t_p 、 t_c ，壓電陶瓷材料上、下兩面鋪上電極層，為接收壓電材料因形變產生電壓之用，或可外加一電場使壓電材料產生形變。

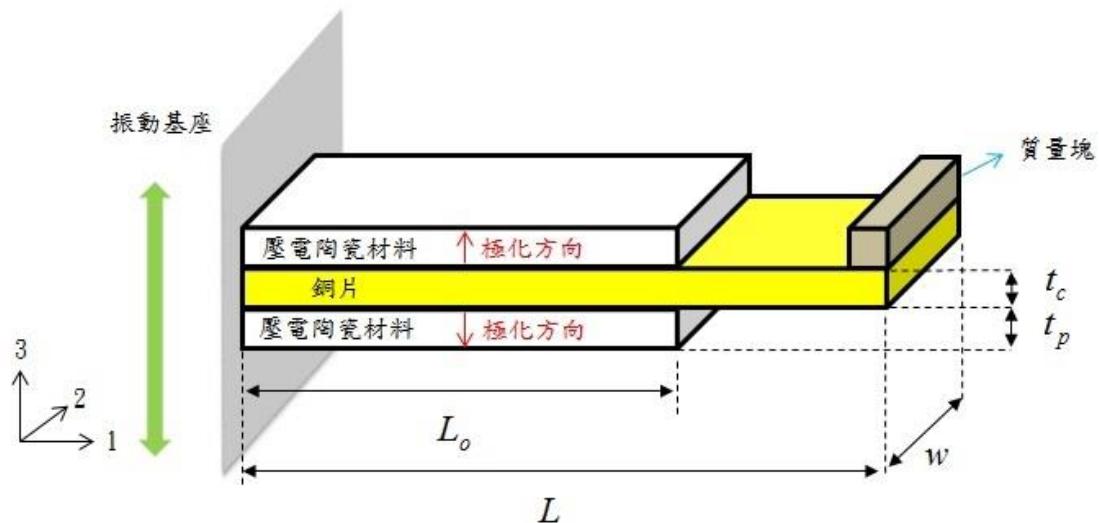


圖 2-3 雙層壓電懸臂樑結構示意圖

假設系統質點的位移 u 與上、下電極層的電位差 V ：

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = u_3(x, t) \end{cases} \quad (2.2.1)$$

$$V = V(t) \quad (2.2.2)$$



而建立在圖 2-3 之數學模型下，將系統質點的位移 u 與電位 V 簡化為

$$\begin{cases} u_3 = d(t)N(\mathbf{x}) + Z(t) \\ V = \begin{cases} -(x_3 - \frac{t_s}{2})\frac{V(t)}{2t_p} & \frac{t_s}{2} < x_3 < \frac{t_s}{2} + t_p \\ 0 & -\frac{t_s}{2} < x_3 < \frac{t_s}{2} \\ -(x_3 + \frac{t_s}{2})\frac{V(t)}{2t_p} & -\frac{t_s}{2} - t_p < x_3 < -\frac{t_s}{2} \end{cases} \end{cases} \quad (2.2.3)$$

假設此數學模型為尤拉-伯努利樑 (Euler-Bernoulli Beam)，其應變極小與變形後斷面仍保持平面，則縱向應變與側向位移之關係式為：

$$S_1 = -x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \quad (2.2.4)$$

因假設其應變極小，則壓電材料在形變後，其力電間的耦合仍具有相當高的線性度。其中有 d-form、e-form、g-form、h-form 四種表示式，又以 d-form 與 e-form 最為常見。因可算得此數學模型的應變 S 與電場 E ，故選用 e-form。

e-form 表示式為

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \mathbf{c}^E \mathbf{S} - \mathbf{e}^T \mathbf{E} \\ \mathbf{D} = \mathbf{e} \mathbf{S} + \boldsymbol{\varepsilon}^S \mathbf{E} \end{cases} \quad (2.2.5)$$

應力 \mathbf{T} (Stress)

應變 \mathbf{S} (Strain)

電位移 \mathbf{D} (Electric Displacement)

電場 \mathbf{E} (Electric Field)

彈性矩陣 c^E (Elasticity Matrix)

介電常數矩陣 $\boldsymbol{\varepsilon}^S$ (Permittivity Constant Matrix)

壓電電荷-應力轉換常數 e (Piezoelectric Charge-Stress Constant)



壓電振動子之振動激發型式可分為{3-1}型態與{3-3}型態，{3-1}型態定義為壓電材料因受力產生1方向的變形與3方向的電場，即變形與電場垂直，如圖2-4(a)所示；反之，{3-3}型態定義為壓電材料因受力產生3方向的變形與3方向的電場，即變形與電場平行，如圖2-4(b)所示。

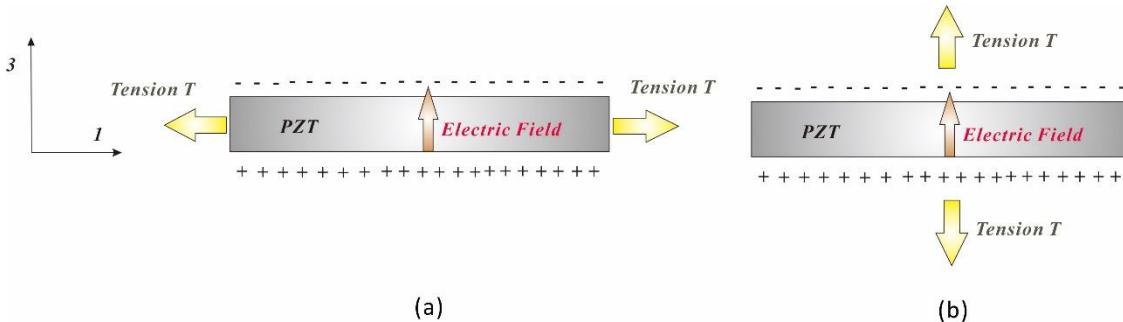


圖 2-4 (a){3-1}型態與(b){3-3}型態示意圖

以雙壓電層懸臂樑作為式樣，懸臂樑輸出電壓部分可以有兩種接法，串聯型式與並聯型式，如圖2-5(a)與圖2-5(b)所示。串聯型式的特色為高電壓、低電流；反之，並聯型式的特色為低電壓、高電流。

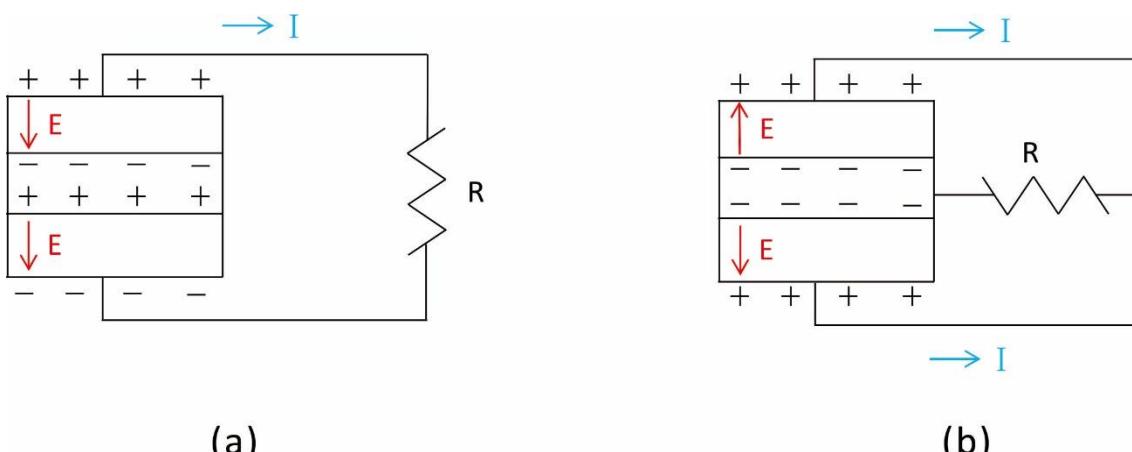


圖 2-5 壓電懸臂樑的(a)串聯型式 (b)並聯型式



此數學模型為{3-1}型態與串聯型式所構成，並採用 e-form，則雙層的壓電材料本構方程式表為：

上壓電層	下壓電層	基板（銅片）
$T_1 = c_{11}^E S_1 - e_{13} E_3$	$T_1 = c_{11}^E S_1 + e_{13} E_3$	$T_1 = c_s S_1$
$D_3 = e_{13} S_1 + \varepsilon_{33} E_3$	$D_3 = -e_{13} S_1 + \varepsilon_{33} E_3$	

(2.2.6)

由(2.2.3)式與(2.2.4)式知，應變 S_1 與電場 E_3 可表為：

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = -x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} = -x_3 \ddot{N}(x)d_i(t) \\ E_3 = -\nabla V = \begin{cases} \frac{V(t)}{2t_p} & \frac{t_s}{2} < x_3 < \frac{t_s}{2} + t_p \\ 0 & -\frac{t_s}{2} < x_3 < \frac{t_s}{2} \\ \frac{V(t)}{2t_p} & -\frac{t_s}{2} - t_p < x_3 < -\frac{t_s}{2} \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.2.7)$$

將(2.2.7)式代入(2.2.6)得應力 T_1 與電位移 D_3 ：

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = \begin{cases} c_{11}^E (-x_3 \ddot{N})d_i - e_{13} \frac{V}{2t_p} & \frac{t_s}{2} < x_3 < \frac{t_s}{2} + t_p \\ c_b (-x_3 \ddot{N})d_i & -\frac{t_s}{2} < x_3 < \frac{t_s}{2} \\ c_{11}^E (-x_3 \ddot{N})d_i + e_{13} \frac{V}{2t_p} & -\frac{t_s}{2} - t_p < x_3 < -\frac{t_s}{2} \end{cases} \\ D_3 = \begin{cases} e_{13} (-x_3 \ddot{N})d_i + \varepsilon_{33} \frac{V}{2t_p} & \frac{t_s}{2} < x_3 < \frac{t_s}{2} + t_p \\ 0 & -\frac{t_s}{2} < x_3 < \frac{t_s}{2} \\ -e_{13} (-x_3 \ddot{N})d_i + \varepsilon_{33} \frac{V}{2t_p} & -\frac{t_s}{2} - t_p < x_3 < -\frac{t_s}{2} \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.2.8)$$

根據以上數學模型假設，接著求出此系統整體能量，可分為位能和動能兩大類。



(2.2.9)

根據壓電組成律 e-form 型式代入，電焓密度 H 可表為：

$$H(\mathbf{S}, \mathbf{E}) = \frac{1}{2} T \cdot S - \frac{1}{2} D \cdot E$$

應力作功：

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} T \cdot S \right) dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= \frac{w}{2} \int_0^{L_o} \int_{\frac{t_s}{2}}^{\frac{t_s}{2} + t_p} (c_{11}^E (-x_3) \ddot{N} d_i - e_{13} \frac{V}{2t_p}) (-x_3 \ddot{N} d_j) dx_3 dx_1 \\
&+ \frac{w}{2} \int_0^L \int_{\frac{t_s}{2}}^{\frac{t_s}{2}} (c_b (-x_3) \ddot{N} d_i) (-x_3 \ddot{N} d_j) dx_3 dx_1 \\
&+ \frac{w}{2} \int_0^{L_o} \int_{-\frac{t_s}{2} - t_p}^{-\frac{t_s}{2}} (c_{11}^E (-x_3) \ddot{N} d_i + e_{13} \frac{V}{2t_p}) (-x_3 \ddot{N} d_j) dx_3 dx_1 \\
&= (\frac{w}{2})(\frac{1}{3})[(\frac{t_s}{2} + t_p)^3 - (\frac{t_s}{2})^3] c_{11}^E (\int_0^{L_o} \ddot{N} \ddot{N} dx_1) d_i d_j + (\frac{w}{2})(\frac{1}{2})[(\frac{t_s}{2} + t_p)^2 - (\frac{t_s}{2})^2] e_{13} \frac{V}{2t_p} (\int_0^{L_o} \ddot{N} dx_1) d_j \\
&+ (\frac{w}{2})(\frac{1}{3})[(\frac{t_s}{2})^3 + (\frac{t_s}{2})^3] c_b (\int_0^L \ddot{N} \ddot{N} dx_1) d_i d_j \\
&+ (\frac{w}{2})(\frac{1}{3})[(-\frac{t_s}{2})^3 - (-\frac{t_s}{2} - t_p)^3] c_{11}^E (\int_0^{L_o} \ddot{N} \ddot{N} dx_1) d_i d_j - (\frac{w}{2})(\frac{1}{2})[(-\frac{t_s}{2})^2 - (-\frac{t_s}{2} - t_p)^2] e_{13} \frac{V}{2t_p} (\int_0^{L_o} \ddot{N} dx_1) d_j
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

將(2.2.10)式係數定義為：

$$\begin{cases} r_1 = (\frac{1}{3}) \times 2 \times [(\frac{t_s}{2} + t_p)^3 - (\frac{t_s}{2})^3] \\ r_2 = (\frac{1}{2}) \times 2 \times [(\frac{t_s}{2} + t_p)^2 - (\frac{t_s}{2})^2] \\ r_3 = (\frac{1}{3}) \times [(\frac{t_s}{2})^3 + (\frac{t_s}{2})^3] \end{cases} \tag{2.2.11}$$

則(2.2.10)式可表為：

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} T \cdot S \right) dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= (\frac{w}{2})(r_1 c_{11}^E) (\int_0^{L_o} \ddot{N} \ddot{N} dx_1) d_i d_j + (\frac{w}{2})(r_3 c_b) (\int_0^L \ddot{N} \ddot{N} dx_1) d_i d_j + (\frac{w}{2})(r_2) e_{13} \frac{V}{2t_p} (\int_0^{L_o} \ddot{N} dx_1) d_j
\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

,



電位移作功：

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} D \cdot E \right) dx_1 dx_2 dx_3 \\
 &= \frac{w}{2} \int_0^{L_o} \int_{\frac{t_s}{2}}^{\frac{t_s}{2} + t_p} (e_{13}(-x_3) \ddot{N} d_i + \varepsilon_{33} \frac{V}{2t_p}) (\frac{V}{2t_p}) dx_3 dx_1 \\
 &+ \frac{w}{2} \int_0^{L_o} \int_{-\frac{t_s}{2} - t_p}^{-\frac{t_s}{2}} (-e_{13}(-x_3) \ddot{N} d_i + \varepsilon_{33} \frac{V}{2t_p}) (\frac{V}{2t_p}) dx_3 dx_1 \\
 &= 2 \left[\left(\frac{w}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \left[\left(\frac{t_s}{2} + t_p \right)^2 - \left(\frac{t_s}{2} \right)^2 \right] e_{13} \frac{V}{2t_p} \left(\int_0^{L_o} \ddot{N} dx_1 \right) d_i + \left(\frac{w}{2} \right) t_p L_o \varepsilon_{33} \left(\frac{V}{2t_p} \right)^2 \right] \\
 &= -\left(\frac{w}{2} \right) r_2 e_{13} \frac{V}{2t_p} \left(\int_0^{L_o} \ddot{N} dx_1 \right) d_i + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{w L_o \varepsilon_{33}}{2t_p} \right) V^2
 \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

表面應力作功與表面自由電荷作功：

$$\begin{aligned}
 & -\sum t^* \cdot \mathbf{u} + \sum Q^* V \\
 &= -F(t) u_3(x_1 = L) + Q_{upper}^* \left(-\frac{V}{2} \right) + Q_{lower}^* \left(\frac{V}{2} \right) \\
 &= -F(t) [d_i(t) N(x_1 = L) + Z(t)] - \left(-\frac{V}{2} \right) (Q_{upper}^* - Q_{lower}^*) \\
 &= -F(t) [d_i(t) N(L) + Z(t)] + VQ
 \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

由(2.2.12)式、(2.2.13)式、(2.2.14)式可得系統位能：

$$\begin{aligned}
 U &= \int_{\Omega} H(\mathbf{S}, \mathbf{E}) dx_1 - \sum t^* \cdot \mathbf{u} + \sum Q^* V \\
 &= \left(\frac{w}{2} \right) (r_1 c_{11}^E) \left(\int_0^{L_o} \ddot{N} \ddot{N} dx_1 \right) d_i d_j + \left(\frac{w}{2} \right) (r_3 c_b) \left(\int_0^L \ddot{N} \ddot{N} dx_1 \right) d_i d_j \\
 &+ \left(\frac{w}{2} \right) (r_2) e_{13} \frac{V}{2t_p} \left(\int_0^{L_o} \ddot{N} dx_1 \right) d_j \\
 &+ \left(\frac{w}{2} \right) r_2 e_{13} \frac{V}{2t_p} \left(\int_0^{L_o} \ddot{N} dx_1 \right) d_i - \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{w L_o \varepsilon_{33}}{2t_p} \right) V^2 \\
 &- F(t) [d_i(t) N(L) + Z(t)] + VQ
 \end{aligned} \tag{2.2.15}$$



系統動能：

$$\begin{aligned}
 T &= \int \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\mathbf{x} + \frac{1}{2} M \left| \dot{\mathbf{u}} \right|^2_{(x=\bar{x})} \\
 &= \frac{w}{2} (2\rho_p t_p) \int_0^{L_o} (\dot{d}_r N_r + \dot{Z})(\dot{d}_r N_r + \dot{Z}) d\mathbf{x} + \frac{w}{2} (\rho_s t_s) \int_0^L (\dot{d}_r N_r + \dot{Z})(\dot{d}_r N_r + \dot{Z}) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} M (\dot{d}_r N_r + \dot{Z}) \\
 &= \frac{1}{2} [(2\rho_p t_p) (\int_0^{L_o} NN d\mathbf{x}) w + (\rho_s t_s) (\int_0^L NN d\mathbf{x}) w + MN(L)N(L)] \dot{d}_i \dot{d}_j \\
 &\quad + [(2\rho_p t_p) (\int_0^{L_o} Nd\mathbf{x}) w + (\rho_s t_s) (\int_0^L Nd\mathbf{x}) w + MN(L)N(L)] \dot{Z} \dot{d}_i \\
 &\quad \frac{1}{2} [(2\rho_p t_p) L_o w + (\rho_s t_s) L w + M] \dot{Z}^2
 \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

如考慮阻尼的影響：

$$\begin{aligned}
 \delta \int_{t_1}^{t_2} dt (T - U) &= \delta W = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \eta \dot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} d\mathbf{x} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \eta \int_{\Omega} (\dot{d}_i N + \dot{Z})(N \delta d_j) d\mathbf{x} dt \\
 &= - \int_{t_1}^{t_2} dt [\int_{\Omega} (\dot{d}_i NN) \delta d_j d\mathbf{x} - \int_{t_1}^{t_2} dt [\int_{\Omega} \eta \dot{Z} N \delta d_j] d\mathbf{x}]
 \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

由系統的能量形式，並根據漢米爾頓定理(Hamilton's Principle)，推導出壓電振動懸臂樑的控制方程式。

壓電振動懸臂樑之漢米爾頓定理：

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [T - (U + V)] dt = 0 \tag{2.2.18}$$

將(2.2.15)式、(2.2.16)式、(2.2.17)式代入(2.2.18)式可得此壓電振動懸臂樑數學模型的控制方程式：

$$\begin{cases} M \ddot{d}(t) + \eta \dot{d}(t) + Kd(t) + \Theta V(t) = F(t)N(L) - M_b \ddot{Z}(t) \\ -\Theta d(t) + C_p V(t) = Q(t) \end{cases} \tag{2.2.19}$$

壓電振動懸臂樑數學模型的控制方程式其係數表示式如表 2-1 所示。

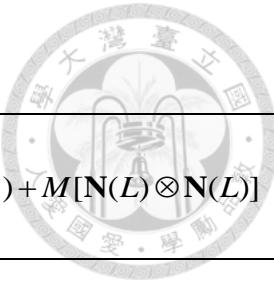


表 2-1 力學等效材料參數表示式

系統之等效質量	$M = 2\rho_p t_p w \left(\int_0^{L_0} \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} d\mathbf{x}_1 \right) + \rho_s t_s w \left(\int_0^L \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} d\mathbf{x}_1 \right) + M[\mathbf{N}(L) \otimes \mathbf{N}(L)]$
系統之等效 機械阻尼係數	$\eta_m = \eta \left(\int_0^L \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} d\mathbf{x}_1 \right)$
系統之等效勁度	$K = wr_1 C_{11}^E \left(\int_0^{L_0} \ddot{\mathbf{N}} \otimes \ddot{\mathbf{N}} d\mathbf{x}_1 \right) + wr_3 C_s \left(\int_0^L \ddot{\mathbf{N}} \otimes \ddot{\mathbf{N}} d\mathbf{x}_1 \right)$
系統之等效 力電耦合係數	$\Theta = \frac{wr_2 e_{13}}{4t_p} \left[\left(\int_0^{L_0} \ddot{\mathbf{N}} d\mathbf{x}_1 \right) \right]$
固定端等效質量	$M_b = 2\rho_p t_p w \left(\int_0^{L_0} \mathbf{N} d\mathbf{x}_1 \right) + \rho_s t_s w \left(\int_0^L \mathbf{N} d\mathbf{x}_1 \right) + M[\mathbf{N}(L)]$
固定端之等效 阻尼係數	$C_b = \eta \left(\int_0^L \mathbf{N} d\mathbf{x}_1 \right)$
壓電靜態電容	$C_p = \frac{wL_0 \epsilon_{33}}{2t_p}$

η 為機械黏滯阻尼係數，所對應的形狀函數 \mathbf{N} (shape function) 定義為

$\mathbf{N} = \frac{\phi(x_1)}{\phi(L)}$ ，由文獻知，可利用模態分析與均佈力負載兩方法求得，兩方法的詳細

推導流程與應用詳附錄 1。



● 模態分析

$$\begin{cases} \phi_1(x_1) = a_1 \sin(\beta_1 x_1) + b_1 \cos(\beta_1 x_1) + c_1 \sinh(\beta_1 x_1) + d_1 \cosh(\beta_1 x_1) & 0 < x_1 < L_o \\ \phi_2(x_1) = a_2 \sin(\beta_2 x_1) + b_2 \cos(\beta_2 x_1) + c_2 \sinh(\beta_2 x_1) + d_2 \cosh(\beta_2 x_1) & L_o < x_1 < L \end{cases}$$

β_1 、 β_2 為此壓電懸臂樑結構的第一模態特徵值， a_1 、 b_1 、 c_1 、 d_1 、 a_2 、 b_2 、 c_2 、 d_2 為相對應的係數。

● 均佈力負載

$$\begin{cases} \phi_1(x_1) = q \left(\frac{L}{6(YI)_1} x_1^3 - \frac{L^2}{4(YI)_1} x_1^2 - \frac{1}{24(YI)_1} x_1^4 \right) & 0 < x_1 < L_o \\ \phi_2(x_1) = q \left[\frac{L}{2(YI)_1} L_o^2 \left(x_1 - \frac{2}{3} L_o \right) - \frac{L^2}{2(YI)_1} L_o \left(x_1 - \frac{1}{2} L_o \right) - \frac{1}{6(YI)_1} L_o^3 \left(x_1 - \frac{3}{4} L_o \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{2(YI)_2} \left(\frac{1}{12} (L_o - x_1)^2 (6L^2 + 3L_o^2 + 2L_o x_1 + x_1^2 - 4L(2L_o + x_1)) \right) \right] & L_o < x_1 < L \end{cases}$$

q 為單位長度的均佈力值， $(YI)_1$ 為 $0 < x_1 < L_o$ 的撓性剛度，又 $(YI)_1 = wr_1 c_{11}^E + wr_3 c_s$ ； $(YI)_2$ 為 $L_o < x_1 < L$ 的撓性剛度，又 $(YI)_2 = wr_3 c_s$ 。

● 壓電懸臂樑之發電功率

當此壓電懸臂樑數學模型外接一電阻 R ，圖 2-6，在此型式下所得的結果稱為壓電振動懸臂樑之交流電解。

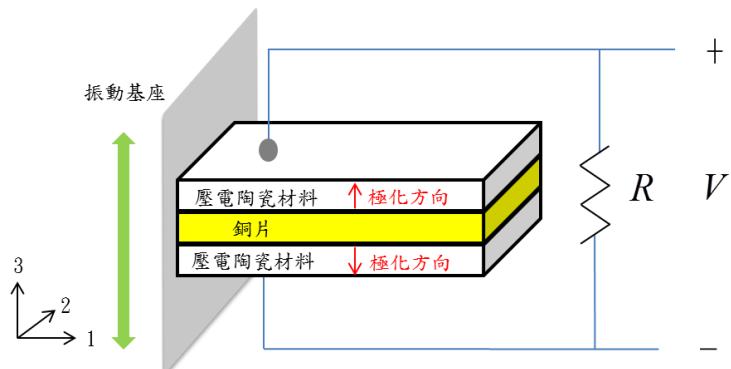


圖 2-6 壓電振動能量擷取示意圖



假設此簡諧振動基座 $Z(t)$ 與流經電阻之電流 $\dot{Q}(t)$:

$$\begin{cases} Z(t) = F_0 \sin(\omega t) \\ \dot{Q}(t) = -\frac{V(t)}{R} \end{cases} \quad (2.2.20)$$

將(2.2.20)式代入(2.2.19)式，可得圖 2-6 之壓電振動懸臂樑數學模型的控制方程式：

$$\begin{cases} M \ddot{d}(t) + \eta \dot{d}(t) + Kd(t) + \Theta V(t) = F_0 \sin(\omega t) \\ -\Theta \dot{d}(t) + C_p \dot{V}(t) = \dot{Q}(t) = -\frac{V(t)}{R} \end{cases} \quad (2.2.21)$$

由(2.2.21)式的兩條控制方程式，可解得位移 d 與電壓 V ，而由這兩參數可算得壓電振動懸臂樑數學模型的發電功率。

位移 d :

$$d = \frac{F_0}{\sqrt{\left(\eta_m \omega + \frac{\omega \Theta^2 R}{(C_p \omega R)^2 + 1}\right)^2 + \left(K - \omega^2 M + \frac{C_p (\omega \Theta R)^2}{(C_p \omega R)^2 + 1}\right)^2}} \quad (2.2.22)$$

電壓 V :

$$V = \frac{\Theta \omega R}{\sqrt{(C_p \omega R)^2 + 1}} d \quad (2.2.23)$$

又

$$P = \frac{V^2}{2R}$$

則

$$P = \frac{1}{2R} \frac{(\Theta \omega R)^2}{(C_p \omega R)^2 + 1} \frac{F_0^2}{\left(\eta_m \omega + \frac{\omega \Theta^2 R}{(C_p \omega R)^2 + 1}\right)^2 + \left(K - \omega^2 M + \frac{C_p (\omega \Theta R)^2}{(C_p \omega R)^2 + 1}\right)^2} \quad (2.2.24)$$

其中 F_0 為簡諧振動基座之最大振幅，又可表為 $F_0 = M_b A^2$ ， M_b 為固定端等效質量、 A^2 為基座之加速度。



正規化負載電阻 r 、正規化頻率 Ω 、短路共振角頻率 ω_n^2 、無因次化力電耦合係數 k_e^2 、無因次化機械阻尼係數 ξ_m ，以上五項參數的表示式如下

正規化負載電阻 r

$$r = C_p \omega_n R \quad (2.2.25)$$

正規化頻率 Ω

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (2.2.26)$$

短路共振角頻率 ω_n^2

$$\omega_n^2 = \frac{K}{M} \quad (2.2.27)$$

無因次化力電耦合係數 k_e^2

$$k_e^2 = \frac{\Theta^2}{KC_p} \quad (2.2.28)$$

無因次化機械阻尼係數 ξ_m

$$\xi_m = \frac{\eta_m}{2\sqrt{KM}} \quad (2.2.29)$$

將以上五項參數代入(2.2.24)式，可將功率可改寫為

$$P = \frac{1}{2} \frac{F_o^2 k_e^2}{M \omega_n} \frac{r \Omega^2}{[1 - (1 + 2\xi_m r) \Omega^2]^2 + [(1 + k_e^2) r \Omega + 2\xi_m \Omega - r \Omega^3]^2} \quad (2.2.30)$$

令正規化功率為

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{k_e^2 r \Omega^2}{[1 - (1 + 2\xi_m r) \Omega^2]^2 + [(1 + k_e^2) r \Omega + 2\xi_m \Omega - r \Omega^3]^2} \quad (2.2.31)$$

則

$$P = \frac{F_o^2}{M \omega_n} \bar{P} \quad (2.2.32)$$



2-3 壓電懸臂樑之等效電路

在 2-2 節，得到壓電懸臂樑之統御方程式，在(2.2.19)式中可得到壓電懸臂樑的動態行為。然而在實驗上，統御方程式之各等效參數有時不易求得。因此，壓電懸臂樑之等效電路模型不僅可以解決等效參數不易求得的問題，在實驗上也能量得較精準的統御方程式之等效參數。由此可知，等效電路不但為機械結構與電性模擬間轉換的重要橋樑，更可改善實驗上的缺失。

首先，將統御方程式(2.2.19)式的力學方程式整體外力項簡化為 $F(t)$ ，將電學方程式對時間作一次微分，則統御方程式可改寫為

$$\begin{cases} M \ddot{d}(t) + \eta \dot{d}(t) + Kd(t) + \Theta V(t) = F(t) \\ -\Theta \dot{d}(t) + C_p \dot{V}_p(t) = -I(t) \end{cases} \quad (2.3.1)$$

由克希荷夫定律(Kirchhoff Circuit Laws, KCL)的第一定律，又名克希荷夫電流定律，其定義 $\sum I_{IN} = \sum I_{OUT}$ ，可將此(2.3.1)式化為電路關係，如圖 2-7，可視為

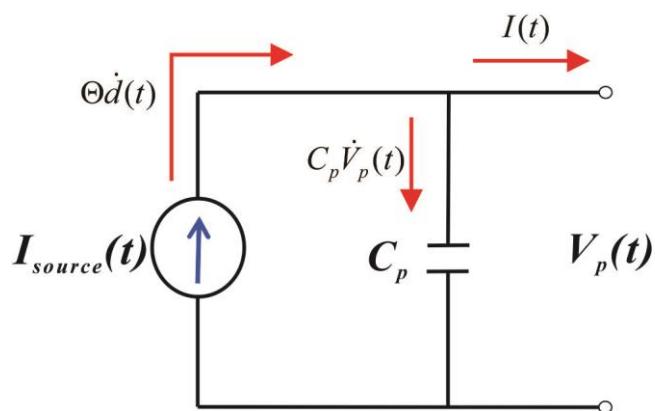
$$I_{source}(t) = \Theta \dot{d}(t)$$


圖 2-7 簡易等效電路模型



將 $I_{source}(t) = \Theta \dot{d}(t)$ 此電流源與自由端位移之關係式代回(2.3.1)式中：

$$\frac{M}{\Theta^2} \dot{I}_{source}(t) + \frac{\eta_m}{\Theta^2} I_{source}(t) + \frac{K}{\Theta^2} \int I_{source}(t) dt + V(t) = \frac{F(t)}{\Theta}$$

將(2.3.2)式與 RLC 振盪電路之元件公式作類比，並利用克希荷夫定律的第二定律，又名克希荷夫電壓定律，其定義 $\sum V = 0$ ，可得到表 2-2 的關係式與圖 2-8 所示之等效電路。

表 2-2 電學等效參數類比力學等效參數關係式

$V_{source}(t) = \frac{F(t)}{\Theta}$	$V_R(t) = RI_{source}(t)$ \Downarrow $R^* = \frac{\eta_m}{\Theta^2}$	$V_L(t) = L \frac{dI_{source}(t)}{dt}$ \Downarrow $L^* = \frac{M}{\Theta^2}$	$V_C(t) = \frac{1}{C} \int I_{source}(t) dt$ \Downarrow $C^* = \frac{\Theta^2}{K}$
---------------------------------------	--	--	--

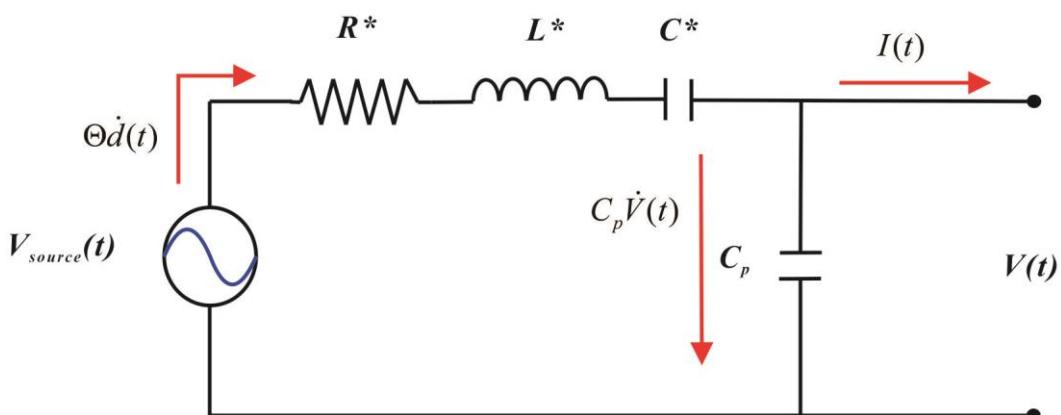


圖 2-8 等效振盪電路示意圖



將表 2-2 的關係式代入(2.2.23)式，則電壓 V 可用等效電路參數表成

$$V = \frac{V_{source}\omega}{\sqrt{\left(\frac{C_p\omega}{C^*} - C_p\omega^3 L^* + \frac{R^*}{R}\omega + \omega\right)^2 + \left(\frac{1}{RC^*} - \frac{\omega^2 L^*}{R} - C_p\omega^2 R^*\right)^2}} \quad (2.3.3)$$

則(2.2.24)式的功率用等效電路參數表成

$$P = \frac{1}{2R} (V_{source})^2 \frac{\omega^2}{\left[\frac{C_p\omega}{C_1} - C_p\omega^3 L_1 + \frac{R_1}{R}\omega + \omega\right]^2 + \left[\frac{1}{RC_1} - \frac{\omega^2 L_1}{R} - C_p\omega^2 R_1\right]^2} \quad (2.3.4)$$

將(2.2.27)式的短路共振角頻率 ω_n^2 、(2.2.28)式的無因次化力電耦合係數 k_e^2 、(2.2.29)式無因次化機械阻尼係數 ξ_m 三項參數代入表 2-2 中，可將等效電路參數用此三項參數表示，如表 2-3。

表 2-3 電學等效參數與力學等效參數轉換表示式

$R^* = \frac{\eta_m}{\Theta^2} = \frac{2\xi_m}{\omega_n^2 C_p k_e^2}$	$L^* = \frac{M}{\Theta^2} = \frac{1}{\omega_n^2 C_p k_e^2}$	$C^* = \frac{\Theta^2}{K} = C_p k_e^2$
---	---	--

壓電材料在每一模態下皆有兩個共振頻率，分別為短路共振頻 f_{sc} 和開路共振頻 f_{oc} ，短路共振頻是將圖 2-8 的輸出端 $V(t)$ 相接，予以短路，電流便不流過寄生電容 C_p ，此型式下的迴路，可以得到短路共振頻；開路共振頻是不將圖 2-8 的輸出端 $V(t)$ 相接，予以斷路，使電流全部流過寄生電容 C_p ，此型式下的迴路，可以得到開路共振頻，故寄生電容 C_p 在系統為開路狀態時相當重要。而短路共振頻和開路共振頻間存在一關係式，其中系統無因次力電耦合係數 k_e^2 會影響短路共振頻和開路共振頻之偏移量。上述之短路共振頻 f_{sc} 、開路共振頻 f_{oc} 與兩項參數關係式



可表為

$$f_{\text{sc}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (2.3.5)$$

$$f_{\text{oc}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_1 C_P}} \quad (2.3.6)$$

$$f_{\text{oc}} = \sqrt{(1+k_e^2)} f_{\text{sc}} \quad (2.3.7)$$



Chapter 3. 模型數值驗證

3-1 理論之等效機械阻尼係數

本章將 2-2 節中由能量法描述的壓電振動懸臂樑之物理行為，即表 2-1，與 COMSOL 模擬結果做驗證，驗證本文的數學模型之控制方程式是否正確。並探討其能量輸出結果。

無論理論的能量法或 COMSOL 模擬的數值法，皆只能確定模型之尺寸、材料參數，唯一無法定義的為等效機械阻尼係數 η_m ，在此情況下常造成所設計出的壓電振子之力電耦合強度與實際式樣的力電耦合強度有較大落差。因此本文採用雷利阻尼(Rayleigh damping)法的概念，其定義為

$$\eta_m = \alpha M + \beta K \quad (3.1.1)$$

本文假設壓電振子之等效機械阻尼係數

$$\eta_m = \alpha M \quad (3.1.2)$$

此假設除了簡單化外，主因為實驗皆在第一模態下做量測，而在同一式樣中，實驗結果僅可找出一項對應的參數，如採用原本的假設，則 α 與 β 會有無限多組解，則此法假定係數 α ，可得等效機械阻尼係數 η_m 。此章即利用此方法，先設計尺寸模型，選定材料得其參數，在假定等效機械阻尼係數，則可得到整體壓電振子之物理行為。將此概念延伸至實驗上，猜測實驗在選用同材料之樑下，實驗所量測之等效機械阻尼係數，改用本文假設的形式表示時，其係數 α 可趨於某一定值，即可同樣用等效機械阻尼係數 $\eta_m = \alpha M$ 表示其等效機械阻尼係數，此想法會在第五章實驗結果探討當中做驗證。



3-2 模型驗證

在 2-2 節的數學模型所推導出其對應的控制方程式、等效材料參數表示式、形狀函數 N ，此節要利用有限元素軟體 COMSOL 來驗證其是否正確。以下利用四種尺寸模型來做驗證，而有限元素軟體 COMSOL 的操作詳附錄 2。

四種尺寸模型皆為雙壓電層懸臂樑，唯一差異在上、下兩層壓電陶瓷材料的長度不同，其餘尺寸、材料參數皆相同。壓電層與銅片尺寸分別為長度 L_0 、 L ，寬度同為 W ，厚度 t_p 、 t_c ；壓電層密度 ρ_p 、銅片密度 ρ_c ；壓電層其他材料參數為柔度常數 s_{11}^E 、壓電常數 d_{31} 、介電常數 $\varepsilon_{33}^T / \varepsilon_0$ ，銅片的材料參數為彈性常數 c_{11}^{sub} ， $\eta_m = 7M$ 。

表 3-1 PZT-5A 與 Copper 之材料尺寸與材料參數

$L(\text{mm})$	$w(\text{mm})$	$t_p(\text{mm})$	$t_c(\text{mm})$	$\rho_p(\text{kg/m}^3)$
60	10	0.2	1	7750
$\rho_c(\text{kg/m}^3)$	$s_{11}^E(\text{pm}^2 / N)$	$d_{31}(\text{pm} / V)$	$\varepsilon_{33}^T / \varepsilon_0$	$c_{11}^{sub}(\text{GN/m}^2)$
8700	16.4	-171	1700	110

四樣例子的長度，銅片長度皆為 L ，壓電層長度分別為 $L_0=60, 40, 30, 20(\text{mm})$ ，本文定義尺寸代號為”銅片長度(mm)-壓電層長度(mm)”，四種尺寸模型對應的代號即為 60-60、60-40、60-30、60-20，而壓電層的材料會表示在尺寸之前，即表成”材料名稱-銅片長度(mm)-壓電層長度(mm)”。四種尺寸模型皆會有三條曲線，分別為 COMSOL 數值法與代入兩種不同形狀函數所得的能量法解析解。選取電阻的方法為當此式樣是偏弱力電耦合時，取最佳阻抗之電阻與小於和大於最佳阻抗之電阻各兩個，總共五組；當此式樣是偏強力電耦合時，取兩最佳阻抗之電阻與介於兩最佳阻抗中間之電阻，小於較小之最佳阻抗與大於較大之最佳阻抗的電阻各一，總共五組。



● PZT-5A 60-60 能量法模擬結果

本文所定義的壓電振動懸臂樑尺寸代號 60-60，其尺寸示意如圖 3-1 所示。在 PZT-5A 60-60 例子下，能量法理論分別代入由模態函數與均佈力附載兩方法所得的形狀函數之等效材料參數，如表 3-2 所示。由兩組等效材料參數所得之壓電振動懸臂樑輸出功率結果與模擬結果相比較，如圖 3-2 所示。

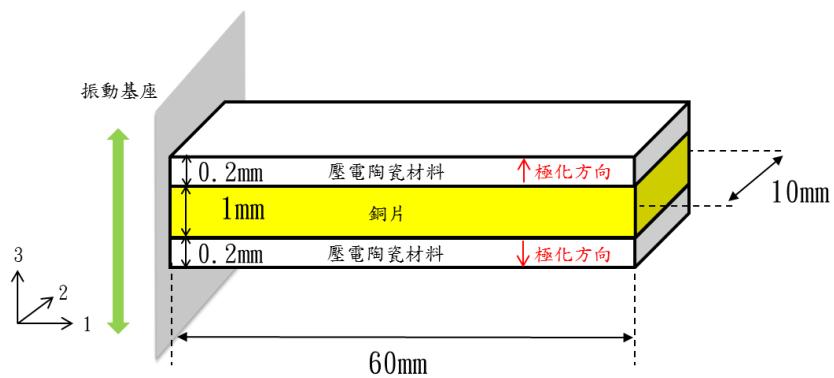
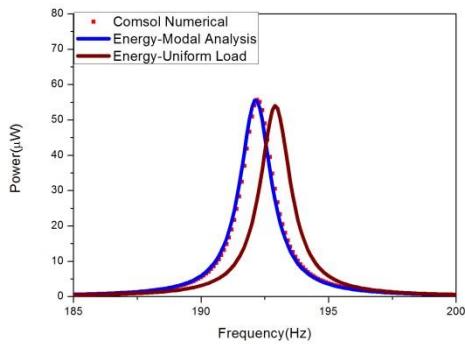


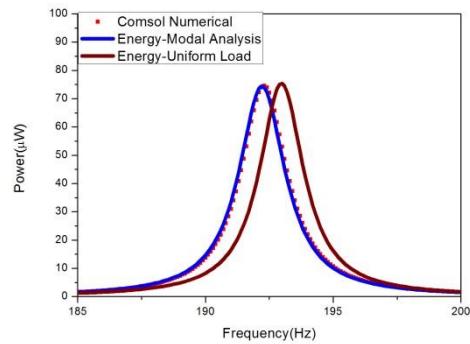
圖 3-1 60-60 材料尺寸示意圖

表 3-2 PZT-5A 60-60 能量法理論在兩形狀函數下之等效材料參數

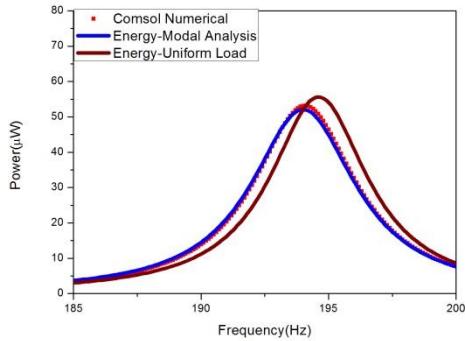
	Energy-Modal Analysis	Energy-Uniform Load
$f_{sc}(\text{Hz})$	192.135	192.904
$f_{oc}(\text{Hz})$	195.952	196.380
k_e	0.20030	0.19067
$M(\text{kg})$	0.00177	0.00181
$K(\text{N/m})$	2579.56	2670.88
$\Theta(\text{C/m})$	0.00143526	0.00139024
$M_b(\text{kg})$	0.00277	0.00283
$C_p(\text{nF})$	19.9037	19.9037
$\eta_m(\text{N}\cdot\text{s/m})$	0.04425	0.04545
ζ_m	0.01035	0.01031
k_e^2 / ζ_m	3.87488	3.52537



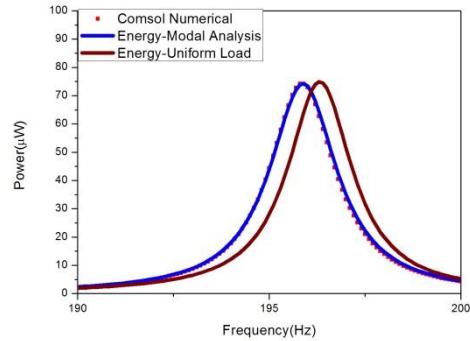
(a)



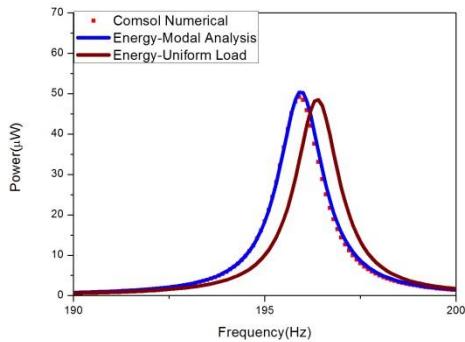
(b)



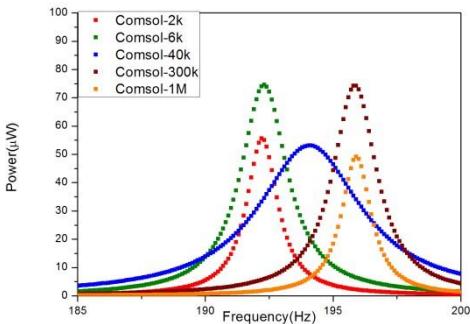
(c)



(d)



(e)



(f)

圖 3-2 PZT-5A 60-60 功率之頻率響應模擬圖(a=0.1g) (a) $R=2k\Omega$ (b) $R=6k\Omega$

(c) $R=40k\Omega$ (d) $R=300k\Omega$ (e) $R=1M\Omega$ (f) 合併 5 組 COMSOL 模擬結果



● PZT-5A 60-40 能量法模擬結果

本文所定義的壓電振動懸臂樑尺寸代號 60-40，其尺寸示意如圖 3-3 所示。在 PZT-5A 60-40 例子下，能量法理論分別代入由模態函數與均佈力附載兩方法所得的形狀函數之等效材料參數，如表 3-3 所示。由兩組等效材料參數所得之壓電振動懸臂樑輸出功率結果與模擬結果相比較，如圖 3-4 所示。

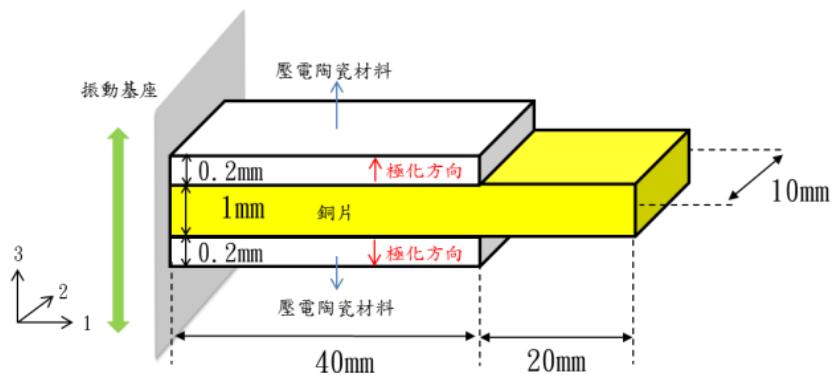


圖 3-3 60-40 材料尺寸示意圖

表 3-3 PZT-5A 60-40 能量法理論在兩形狀函數下之等效材料參數

	Energy-Modal Analysis	Energy-Uniform Load
$f_{sc}(\text{Hz})$	216.063	216.674
$f_{oc}(\text{Hz})$	221.752	222.064
k_e	0.23099	0.22443
$M(\text{kg})$	0.00137	0.00141
$K(\text{N/m})$	2533.14	2618.63
$\Theta(\text{C/m})$	0.00133924	0.00132296
$M_b(\text{kg})$	0.00227	0.00232
$C_p(\text{nF})$	13.2691	13.2691
$\eta_m(\text{N}\cdot\text{s/m})$	0.03436	0.03532
ζ_m	0.00920	0.00918
k_e^2/ζ_m	5.79515	5.48600

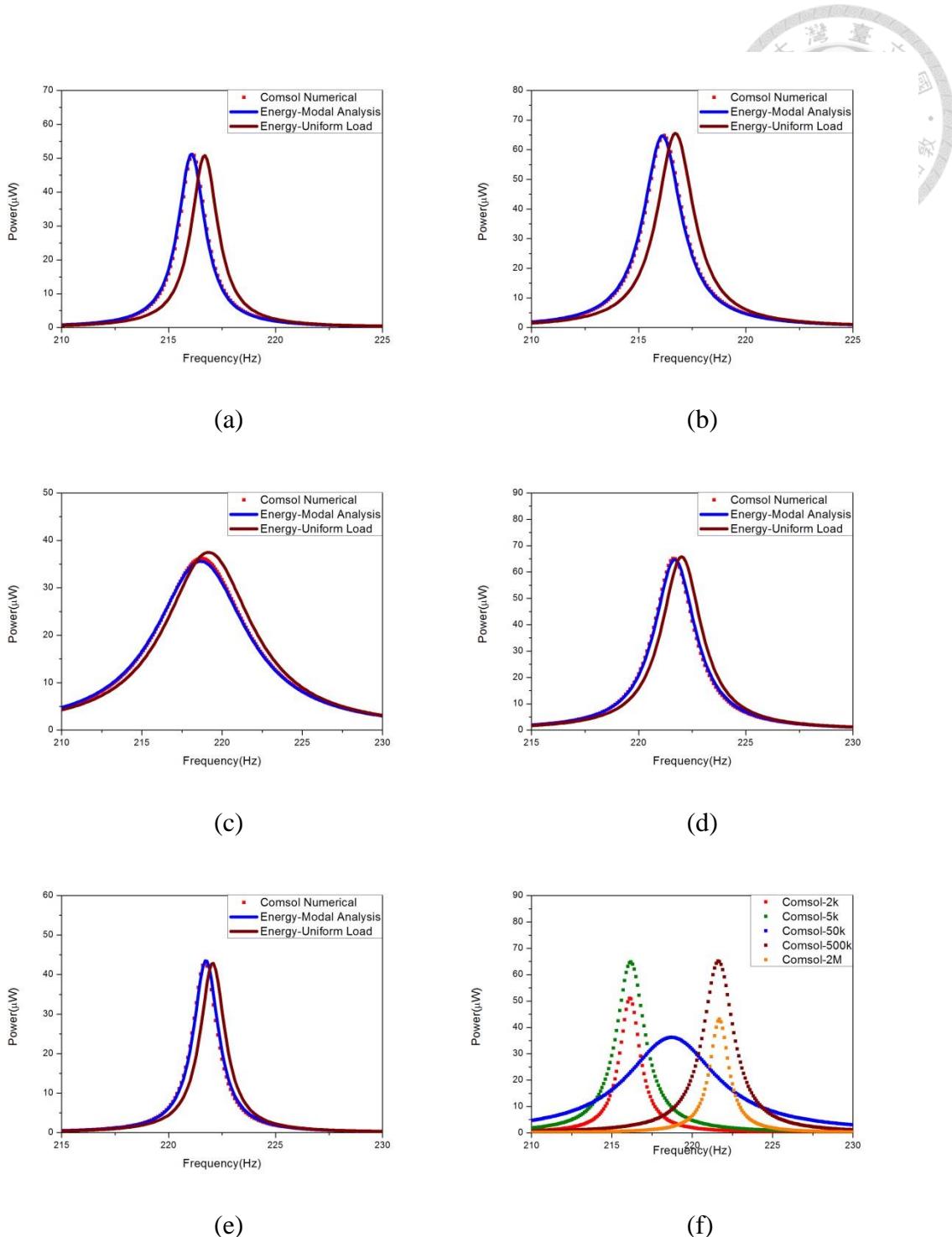


圖 3-4 PZT-5A 60-40 功率之頻率響應模擬圖(a=0.1g) (a) $R=2\text{k}\Omega$ (b) $R=5\text{k}\Omega$
 (c) $R=50\text{k}\Omega$ (d) $R=500\text{k}\Omega$ (e) $R=2\text{M}\Omega$ (f) 合併 5 組 COMSOL 模擬結果



● PZT-5A 60-30 能量法模擬結果

本文所定義的壓電振動懸臂樑尺寸代號 60-30，其尺寸示意如圖 3-5 所示。在 PZT-5A 60-30 例子下，能量法理論分別代入由模態函數與均佈力附載兩方法所得的形狀函數之等效材料參數，如表 3-4 所示。由兩組等效材料參數所得之壓電振動懸臂樑輸出功率結果與模擬結果相比較，如圖 3-6 所示。

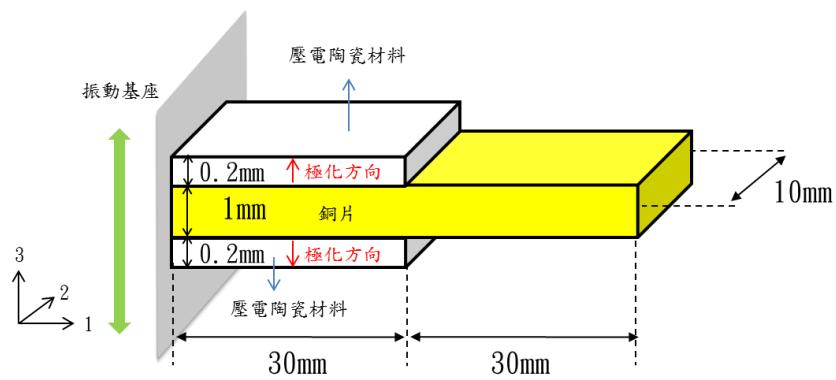


圖 3-5 60-30 材料尺寸示意圖

表 3-4 PZT-5A 60-30 能量法理論在兩形狀函數下之等效材料參數

	Energy-Modal Analysis	Energy-Uniform Load
$f_{sc}(\text{Hz})$	216.637	217.588
$f_{oc}(\text{Hz})$	222.465	223.39
k_e	0.23350	0.23246
$M(\text{kg})$	2339.16	0.00130
$K(\text{N/m})$	2533.14	2446.94
$\Theta(\text{C/m})$	0.00112663	0.00114715
$M_b(\text{kg})$	0.00207	0.00214
$C_p(\text{nF})$	9.9518	9.9518
$\eta_m(\text{N}\cdot\text{s/m})$	0.03156	0.03272
ζ_m	0.00918	0.00914
k_e^2 / ζ_m	5.93747	5.91042

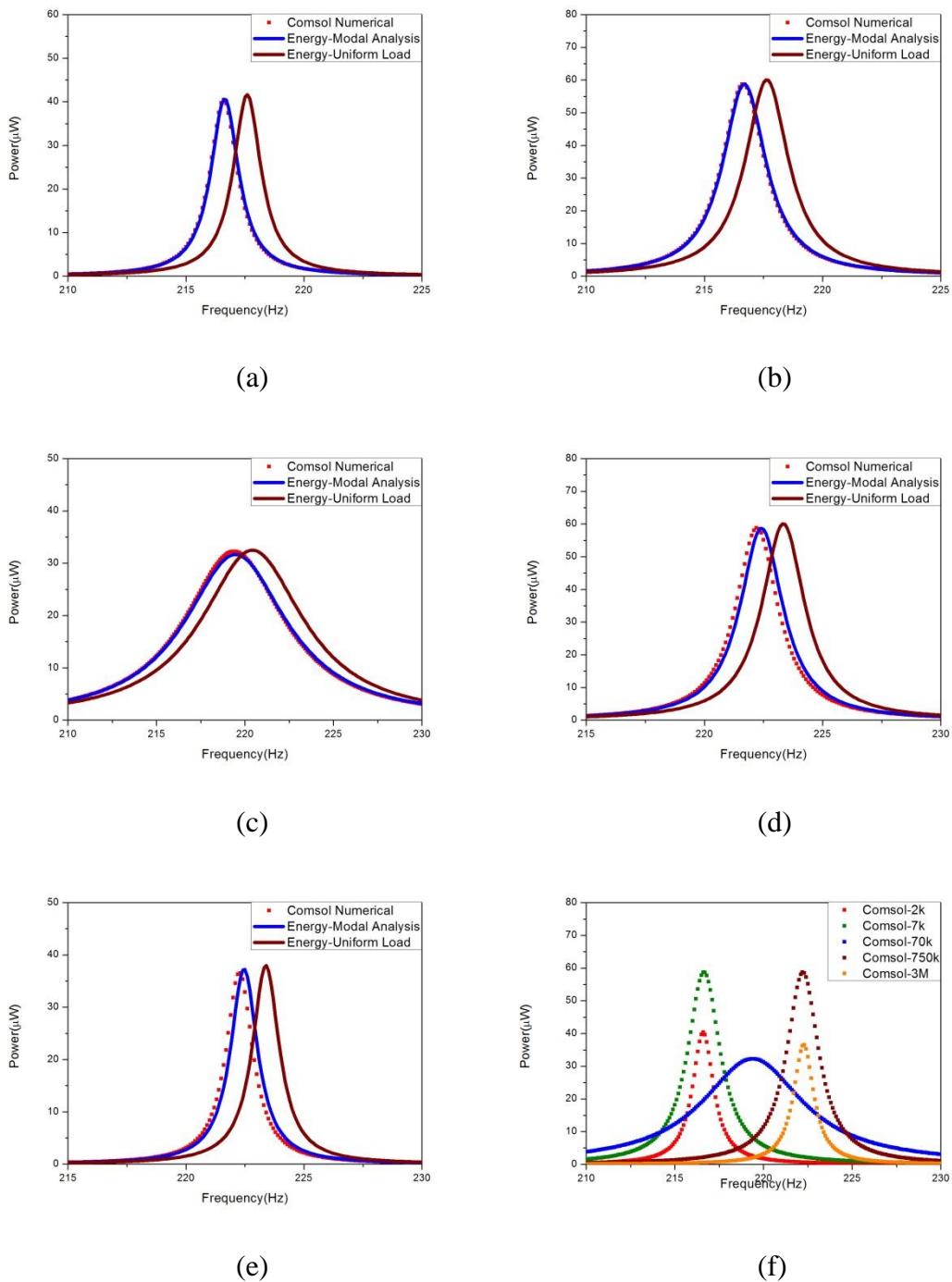
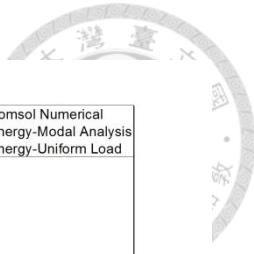


圖 3-6 PZT-5A 60-30 功率之頻率響應模擬圖 (a)=0.1g (a) $R=2k\Omega$ (b) $R=7k\Omega$
 (c) $R=70k\Omega$ (d) $R=750k\Omega$ (e) $R=3M\Omega$ (f) 合併 5 組 COMSOL 模擬結果



● PZT-5A 60-20 能量法模擬結果

本文所定義的壓電振動懸臂樑尺寸代號 60-20，其尺寸示意如圖 3-7 所示。在 PZT-5A 60-20 例子下，能量法理論分別代入由模態函數與均佈力附載兩方法所得的形狀函數之等效材料參數，如表 3-5 所示。由兩組等效材料參數所得之壓電振動懸臂樑輸出功率結果與模擬結果相比較，如圖 3-8 所示。

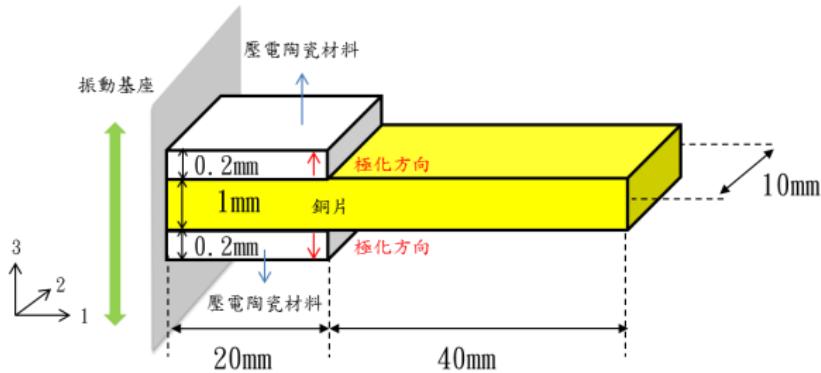


圖 3-7 60-20 材料尺寸示意圖

表 3-5 PZT-5A 60-20 能量法理論在兩形狀函數下之等效材料參數

	Energy-Modal Analysis	Energy-Uniform Load
$f_{sc}(\text{Hz})$	205.874	207.058
$f_{oc}(\text{Hz})$	210.341	211.961
k_e	0.20943	0.21889
$M(\text{kg})$	0.00120	0.00125
$K(\text{N/m})$	2022.17	2122.77
$\Theta(\text{C/m})$	0.000767124	0.000821454
$M_b(\text{kg})$	0.00194	0.00200
$C_p(\text{nF})$	6.6345	6.6345
$\eta_m(\text{N}\cdot\text{s/m})$	0.03021	0.03135
ζ_m	0.00966	0.00960
k_e^2 / ζ_m	4.53913	4.98672

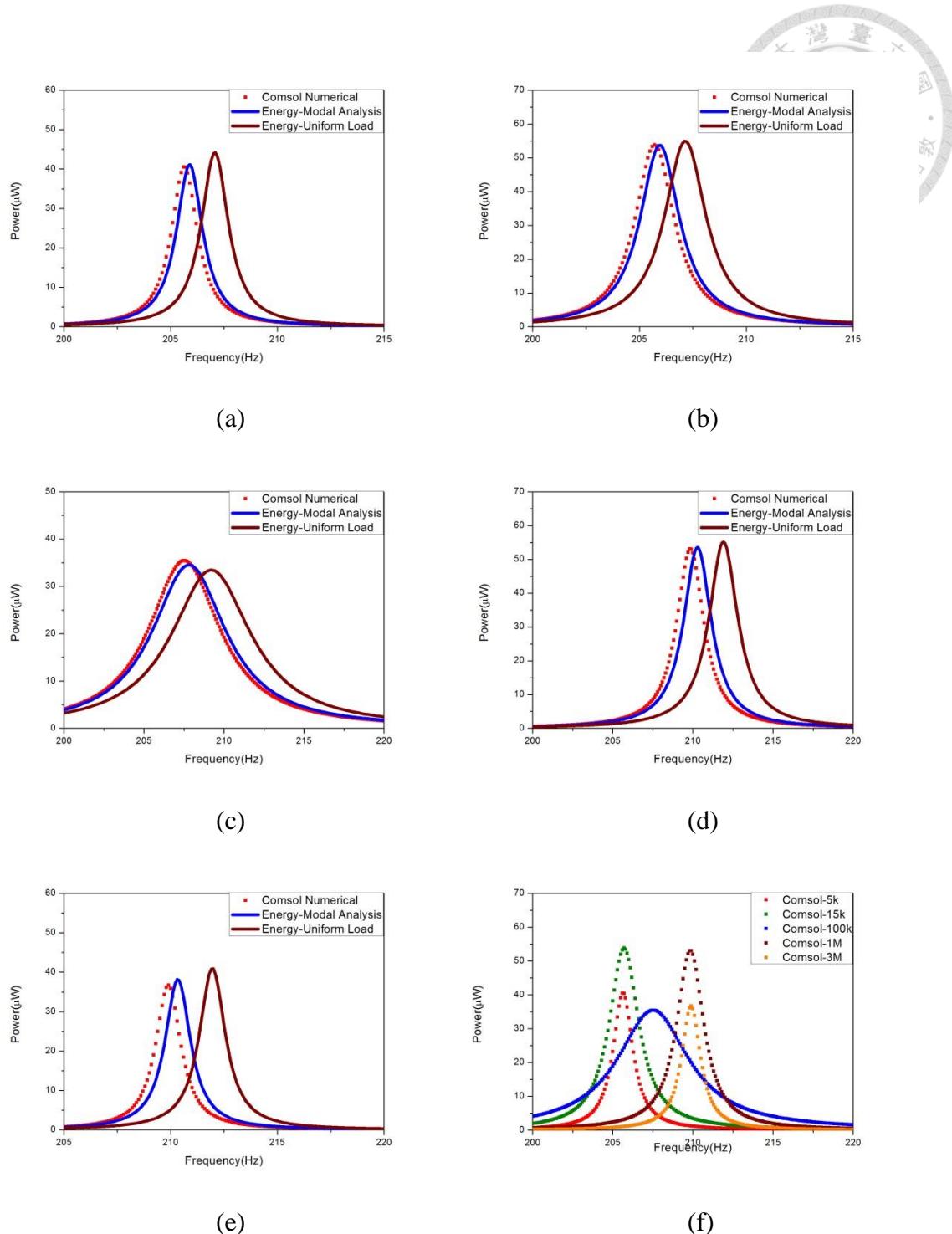


圖 3-8 PZT-5A 60-20 功率之頻率響應模擬圖(a=0.1g) (a) $R=5k\Omega$ (b) $R=15k\Omega$
 (c) $R=100k\Omega$ (d) $R=1M\Omega$ (e) $R=3M\Omega$ (f) 合併 5 組 COMSOL 模擬結果



● PZT-5A 能量法模擬結果分析

由本節的結果顯示，兩條能量法理論的功率之頻率響應線，在四種尺寸模型下，趨勢皆與有限元素軟體 COMSOL 的模擬結果相近，因此可知能量法可描述此壓電振動懸臂樑模型的物理行為。

將兩種不同方法所求出的形狀函數分別代入能量法解析解，共振頻偏移方面，代入模態函數法得的形狀函數與 COMSOL 在平面應力假設下，共振頻吻合度皆優於均佈力負載得的形狀函數，但兩不同形狀函數所算出的共振頻皆與 COMSOL 數值解的共振頻相近；輸出功率方面，代入模態函數法得的形狀函數與 COMSOL 在平面應力假設下，在各電阻之最大功率皆較均佈力負載得的形狀函數接近，但兩不同形狀函數所算出的最大功率皆與 COMSOL 數值解的共振頻相近。而針對 COMSOL 數值解在平面應力模組、平面應變模組、3D 模組的假設下與能量法解析解的差異，本團隊先前已有詳盡的探討。

本節結果有兩現象十分有趣，其一，四種尺寸模型之基板皆相同，僅改變上、下壓電層的長度，一般常理應當壓電層長度越短，即整體壓電組成分越少，力電耦合強度越弱，結果則不然，因此對這方面要深入做探討。其二，由上述延伸，假使壓電組成分較少，發電功率卻較佳，在實驗上不但能降低成本，壓電片的尺寸設計也能有多元的選擇，第四章會就此結果做進一步的探討。



Chapter 4. 不同力電耦合強度振子之設計

4-1 設計方法

定義壓電振動能量擷取之壓電片之力電耦合強度為

$$\frac{k_e^2}{\zeta_m} \quad (4.1.1)$$

其中，依壓電振動子之力電耦合強度不同，可分成強、中、弱力電耦合振子三種。

強力電耦合

$$\frac{k_e^2}{\zeta_m} > 10 \quad (4.1.2)$$

中力電耦合

$$1 < \frac{k_e^2}{\zeta_m} < 10 \quad (4.1.3)$$

弱力電耦合

$$\frac{k_e^2}{\zeta_m} < 1 \quad (4.1.4)$$

本團隊由 Shu 和 Lien 在 2006 年提出振子於直流電解下，可繪出正規化功率、正規化頻率、無因次化力電耦合係數三項參數之關係圖[22]，如圖 4-1，而本文為交流電解，在交流電解下，三項參數於(2.2.26)式、(2.2.28)式、(2.2.31)式中有交流電解下各別的表示式。

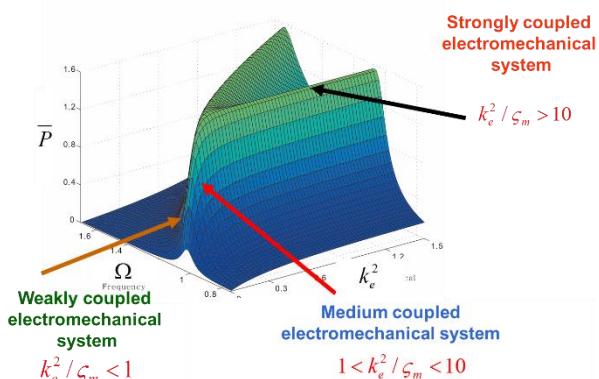


圖 4-1 直流電解之三項參數關係示意圖[22]



三種類別的振子力電耦合強度有兩項不同特性，特性一為振子之最大正規化功率，強力電耦合振子的特性為可在兩不同頻率與電阻的組合下得到相同的最大正規化功率，即最大功率，且當力電耦合強度增加，最大正規化功率為定值，僅與無因次化機械阻尼係數有關，而兩組不同頻率與電阻相比下，一組為較小的頻率與較小的電阻，此時稱此功率為短路共振頻之功率，另一為較大的頻率與較大的電阻，此時稱此功率為開路共振頻之功率，此時的電阻稱為最佳阻抗；中力電耦合與弱力電耦合振子的特性為皆僅可在一不同頻率與電阻的組合下得到最大正規化功率，即最大功率，此時的電阻稱為最佳阻抗。特性二為振子之(2.2.19)式的兩條控制方程式，強力電耦合振子的特性為兩條控制方程式相依；弱力電耦合振子的特性為系統之等效力電耦合係數很小，因此在力學方程式中的 ΘV 項可忽略，則力學方程式可直接求出位移，在代入電學方程式中，所以弱力電耦合振子的力學方程式可視為獨立；中力電耦合振子的特性則介於兩者之間，兩條控制方程式屬於相依關係。

三種力電耦合強度於最大正規化功率之無因次化力電耦合係數圖的比較，如圖 4-1，屬強力電耦合之振子，最大正規化功率之無因次化力電耦合係數圖的斜率趨近於零，即當改變無因次化力電耦合係數值時，最大正規化功率值變化率不明顯；屬中力電耦合之振子，最大正規化功率之無因次化力電耦合係數圖的斜率為最大，即當改變無因次化力電耦合係數值時，最大正規化功率值變化率最為明顯；屬弱力電耦合之振子，最大正規化功率之無因次化力電耦合係數圖的斜率較中力電耦合之振子時小，即當改變無因次化力電耦合係數值時，最大正規化功率值變化率介於強力電耦合與中力電耦合間。

三種力電耦合強度於正規化頻率之無因次化力電耦合係數圖的比較，如圖 4-1，屬強力電耦合之振子，當固定無因次化力電耦合係數值時可找到兩個相對應的正規化頻率，而當無因次化力電耦合係數值越大，兩個相對應的正規化頻率差值越大；屬中力電耦合之振子，正規化頻率之無因次化力電耦合係數圖可視為一線性



曲線，而此曲線之斜率為正數，即無因次化力電耦合係數值越大，正規化頻率越大；屬弱力電耦合之振子，正規化頻率之無因次化力電耦合係數圖可視為一線性曲線，而此曲線之斜率為正數，即無因次化力電耦合係數值越大，正規化頻率越大，但曲線斜率大於在中力電耦合之振子時，即無因次化力電耦合係數值變化率相同時，弱力電耦合之振子的正規化頻率變化率較中力電耦合之振子大。

三種力電耦合強度於最大正規化功率之正規化頻率圖的比較，如圖 4-1，屬強力電耦合之振子，最大正規化功率之正規化頻率圖曲線為對稱於某一正規化頻率值之一次曲線，以對稱中線為基準，為一絕對值之一次曲線，其斜率趨近於零，即正規化頻率無論增加或者減少，最大正規化功率變化率皆很小；屬中力電耦合之振子，最大正規化功率之正規化頻率圖可視為一線性曲線，而此曲線之斜率為正數，即正規化頻率越大，最大正規化功率越大；屬弱力電耦合之振子，最大正規化功率之正規化頻率圖可視為一線性曲線，而此曲線之斜率為正數，即正規化頻率越大，最大正規化功率越大，但曲線斜率大於在中力電耦合之振子時，即正規化頻率變化率相同時，弱力電耦合之振子的最大正規化功率變化率較中力電耦合之振子大。

定義振子之力電耦合強度可區分振子的物理行為，且後端電路可有較好的選擇，使振子的發電效果達到最佳。本團隊發現當後端電路為 SSHI 電路，無論振子的力電耦合強度，皆可有最佳的功率與頻寬。但當為強力電耦合振子時，後端電路為標準電路，可達到與 SSHI 電路相同的效果，因此本團隊採用當為強力電耦合振子則搭配標準電路，原因在於 SSHI 電路需要開關且電子元件較多，則相同效果下採取較省成本的標準電路；當為中力電耦合振子時，後端電路為 SECE 電路，且阻抗匹配為 1.7，可達到與 SSHI 電路相同的效果，因此本團隊採用當為中力電耦合振子則搭配 SECE 電路，原因在於 SSHI 電路會受最佳阻抗的影響，而 SECE 電路只要阻抗匹配為 1.7，則在任意阻抗下影響不大，則相同效果下採取沒有阻抗限制的 SECE 電路；當為弱力電耦合振子時，後端電路僅有 SSHI 電路可達到最佳



的功率與頻寬，因此本團隊採用當為弱力電耦合振子則搭配 SSHI 電路，原因在於
SSHI 電路需要開關且電子元件較多，則相同效果下採取較省成本的標準電路。
將(2.2.28)式、(2.2.29)式代入(4.1.1)式，則壓電振子之力電耦合強度可表為

$$\frac{k_e^2}{\zeta_m} = \frac{2\Theta^2}{\eta_m C_p} \sqrt{\frac{M}{K}} \quad (4.1.5)$$



4-2 設計壓電片之特性結果探討

3-2 節的尺寸模型即假定等效機械阻尼係數為 $\eta_m = 7M$ ，選用的壓電材料為 PZT-5A，基板材料為銅，此節要接續 3-2 節的尺寸模型，繼續探討壓電振子之物理現象與行為。

壓電振子的物理現象圖之 X 軸為壓電層長度除以基板長度，本文簡稱壓電層長度比，將壓電片的長度項作無因次化，依照比例的方式，探討壓電層長度與基板長度比對壓電振動懸臂樑的影響與產生的物理現象。

力電耦合強度 k_e^2 / ζ_m ，如圖 4-2(a)，一般認為力電耦合強度因壓電層減少而減弱，但結果顯示力電耦合強度並非隨著壓電層越少而越弱，力電耦合強度的變化似拋物線，壓電層長度比從 0 上升，力電耦合強度會迅速增強，約在壓電層長度比為 0.5 時，力電耦合強度有最大值，當壓電層長度比再持續上升，力電耦合強度則會減弱，但減弱的速率較增強段緩慢。

無因次化力電耦合係數 k_e^2 ，如圖 4-2(b)，一般認為無因次化力電耦合係數因壓電層減少而下降，但結果顯示無因次化力電耦合係數並非隨著壓電層越少而越低，無因次化力電耦合係數的變化似拋物線，壓電層長度比從 0 上升，無因次化力電耦合係數會迅速上升，約在壓電層長度比為 0.5 時，無因次化力電耦合係數有最大值，當壓電層長度比再持續上升，無因次化力電耦合係數則會下降，但下降的速率較上升段緩慢，整體趨勢與力電耦合強度變化的趨勢相近。

無因次化機械阻尼係數 ζ_m ，如圖 4-2(c)，一般認為無因次化機械阻尼係數因壓電層減少而下降，即總質量減少而使無因次化機械阻尼係數下降，但結果顯示無因次化機械阻尼係數並非隨著壓電層的越少而越低，無因次化機械阻尼係數的變化似凹向上的拋物線，壓電層長度比從 0 上升，無因次化機械阻尼係數會下降，約在壓電層長度比為 0.6 時，無因次化機械阻尼係數有最小值，當壓電層長度比再持續上升，無因次化機械阻尼係數則會上升，但上升的速率較下降段緩慢。

短路共振頻 f_{sc} 與開路共振頻 f_{oc} ，如圖 4-2(d)與圖 4-2(e)，一般認為短路共振頻



與開路共振頻率因壓電層減少而上升，即總質量減少而使短路共振頻率與開路共振頻率上升，但結果顯示短路共振頻率與開路共振頻率並非隨著壓電層越少而越低，短路共振頻率與開路共振頻率的變化似拋物線，壓電層長度比從 0 上升，短路共振頻率與開路共振頻率會迅速上升，約在壓電層長度比為 0.55 時，短路共振頻率與開路共振頻率有最大值，當壓電層長度比再持續上升，短路共振頻率與開路共振頻率則會下降，但下降的速率較上升段緩慢，整體趨勢與力電耦合強度變化的趨勢相近。

系統之等效質量 M ，如圖 4-2(f)，一般認為系統之等效質量因壓電層減少而下降，即總質量減少而使系統之等效質量下降，但結果顯示系統之等效質量並非隨著壓電層的越少而越低，系統之等效質量的變化似凹向上的拋物線，壓電層長度比從 0 上升，系統之等效質量會下降，約在壓電層長度比為 0.3 時，系統之等效質量有最小值，當壓電層長度比再持續上升，系統之等效質量則會上升，但上升的速率較下降段快。

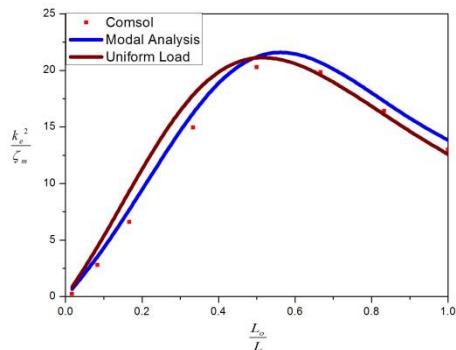
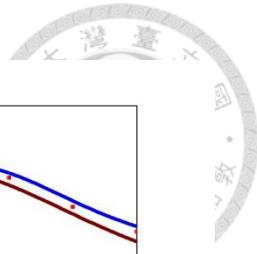
力電耦合強度為無因次化力電耦合係數除以無因次化機械阻尼係數，由此會十分好奇，力電耦合強度的變化，究竟無因次化力電耦合係數與無因次化機械阻尼係數何項參數影響較為顯著，由圖 4-2(b)、圖 4-2(c)發現，無因次化力電耦合係數與無因次化機械阻尼係數兩項參數的變化趨勢剛好相反，當壓電層長度比在 0 到 0.5 這段區間，無因次化力電耦合係數的變化斜率為正，無因次化機械阻尼係數的變化斜率為負，使得力電耦合強度的變化斜率為正；當壓電層長度比在 0.5 到 0.6 這段區間，無因次化力電耦合係數的變化斜率為負，無因次化機械阻尼係數的變化斜率趨近於零，使得力電耦合強度的變化斜率為負；當壓電層長度比在 0.6 到 1 這段區間，無因次化力電耦合係數的變化斜率為負，無因次化機械阻尼係數的變化斜率為正，使得力電耦合強度的變化斜率為負。

短路共振頻率與開路共振頻率主要與材料質量與整體結構有關係，但也好奇在材料相同且結構相似的情況下，與力電耦合強度是否有關聯，由圖 4-2(d)、圖 4-2(e)發現，當壓電層長度比在 0 到 0.5 這段區間，短路共振頻率與開路共振頻率的變化斜率

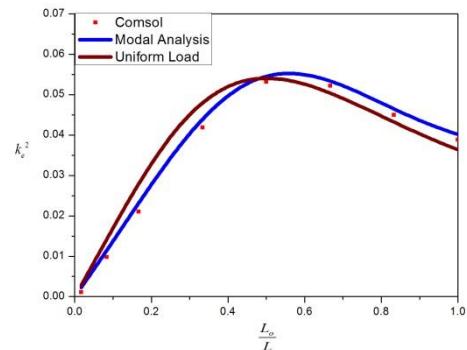


為正，力電耦合強度的變化斜率為正；當壓電層長度比在 0.5 到 0.55 這段區間，短路共振頻、開路共振頻、力電耦合強度的變化斜率均趨近於零；當壓電層長度比在 0.55 到 1 這段區間，短路共振頻與開路共振頻的變化斜率為負，力電耦合強度的變化斜率為負，由此可知，短路共振頻與開路共振頻和力電耦合強度變化趨勢相同。

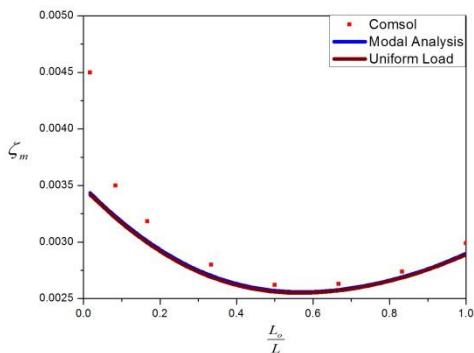
由以上結果可知，在同材料與相似結構下，大致上當力電耦合強度強時，無因次化力電耦合係數大，無因次化機械阻尼係數小，短路共振頻與開路共振頻高；反之，大致上當力電耦合強度弱時，無因次化力電耦合係數小，無因次化機械阻尼係數大，短路共振頻與開路共振頻低。



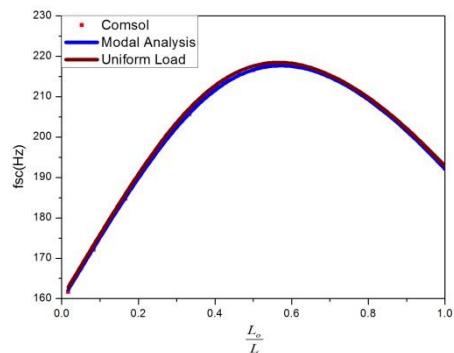
(a)



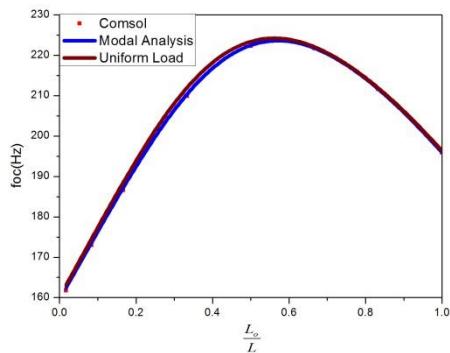
(b)



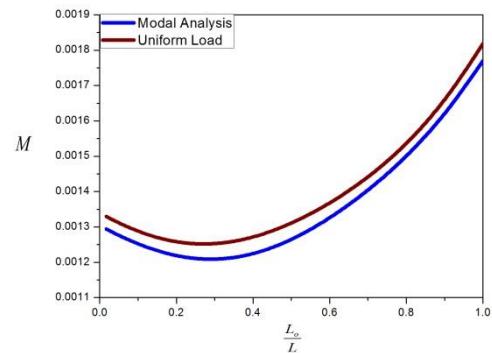
(c)



(d)



(e)



(f)

圖 4-2 PZT-5A 材料物理參數($a=0.1g$) (a) 力電耦合係數 k_e^2 / ζ_m (b) 無因次化力電耦合係數 k_e^2 (c) 無因次化機械阻尼係數 ζ_m (d) 短路共振頻 f_{sc} (e) 開路共振頻 f_{oc} (f) 系統之等效質量 M



接著探討壓電層長度比對發電功率的影響為何，本實驗室的主要研究為壓電振動能量擷取，因此最在乎的是壓電振動懸臂樑之發電功率。

功率，如圖 4-3(a)，一般認為功率因壓電層減少而下降，但結果顯示功率並非隨著壓電層越少而越低，功率的變化似打勾圖案，壓電層長度比從 0 上升，功率會下降，約在壓電層長度比為 0.2 時，功率有最小值，當壓電層長度比再持續上升，功率則會上升，上升的速率較下降段相近。

由圖 4-3(a)發現，當壓電層長度比約低於 0.1，COMSOL 數值法之功率與能量法之功率有較大的誤差，推測其為數值誤差。本團隊先前在研究 COMSOL 數值法這部分時，已有發現當為弱力電耦合振子，COMSOL 數值法與能量法、等效電路法相比會有較大的誤差，因此本節在後續功率的探討，皆不討論 COMSOL 數值法的結果，此舉可增加變化曲線的趨勢明顯度。

固定端等效質量，如圖 4-3(b)，一般認為固定端等效質量因壓電層減少而下降，即總質量減少而使固定端等效質量下降，但結果顯示固定端等效質量並非隨著壓電層越少而越低，固定端等效質量的變化似打勾圖案，壓電層長度比從 0 上升，固定端等效質量會下降，約在壓電層長度比為 0.25 時，固定端等效質量有最小值，當壓電層長度比再持續上升，固定端等效質量則會上升，上升的速率較下降段相近，整體趨勢與功率變化的趨勢相近。

功率除以系統之等效質量，如圖 4-3(c)，又稱單位系統之等效質量的發電功率，一般認為單位系統之等效質量的發電功率因壓電層減少而上升，由壓電振動懸臂樑的理論知，越接近固定端的壓電層其變形越大，則應當可以產生較多能量，但結果顯示單位系統之等效質量的發電功率並非隨著壓電層越少而越高，單位系統之等效質量的發電功率的變化似拋物線，壓電層長度比從 0 上升，單位系統之等效質量的發電功率會上升，約在壓電層長度比為 0.65 時，單位系統之等效質量的發電功率有最大值，當壓電層長度比再持續上升，單位系統之等效質量的發電功率則會下降，但下降的速率較上升段快。



功率除以總質量，如圖 4-3(d)，又稱單位質量的發電功率，一般認為單位質量的發電功率因壓電層減少而上升，由壓電振動懸臂樑的理論知，越接近固定端的壓電層其變形越大，則應當可以產生較多能量，但結果顯示單位質量的發電功率並非隨著壓電層越少而越高，單位質量的發電功率的變化似凹向上的拋物線，壓電層長度比從 0 上升，單位質量的發電功率會下降，約在壓電層長度比為 0.3 時，單位質量的發電功率有最小值，當壓電層長度比再持續上升，單位質量的發電功率則會上升，但上升的速率較下降段緩慢。

壓電片總質量的不同直接聯想到的就是成本，因壓電層的多寡直接影響到成本問題，令人好奇如何能在最省成本的情況下，產生最大的功率，本實驗室的壓電片皆為寰辰科技提供，從壓電片報價單上可知壓電材料相對應的價格。四種尺寸壓電片的價格，如圖 4-3(e)，價格與壓電層多寡成正比，利用線性回歸的方法，得到最符合四種尺寸壓電片的價格的線性方程式為

$$\text{價格(NT)} = 129.6 \times (\text{壓電層長度比}) + 192 \quad (4.2.1)$$

功率除以價格，如圖 4-3(f)，又稱單位成本的發電功率，一般認為單位成本的發電功率因壓電層減少而上升，由壓電振動懸臂樑的理論知，越接近固定端的壓電層其變形越大，則應當可以產生較多能量，但結果顯示單位成本的發電功率並非隨著壓電層越少而越高，單位成本的發電功率的變化似躺椅形狀，壓電層長度比從 0 上升，單位成本的發電功率會下降，約在壓電層長度比為 0.4 時，單位成本的發電功率有最小值，當壓電層長度比再持續上升，單位成本的發電功率則會上升，約在壓電層長度比為 0.8 時，單位成本的發電功率有相對最大值，此時當壓電層長度比再繼續上升，單位成本的發電功率則會稍微下降。但整體來說，當壓電層長度比在 0.4 到 1 這段區間下，趨勢變化不大，此結果可視為壓電層長度比在該段時，單位成本的發電功率相近。

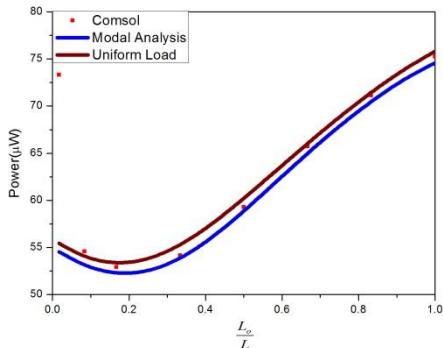
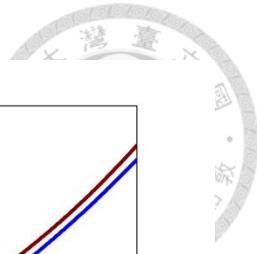


一般認為力電耦合強度與輸出功率成正比，即力電耦合強度越強，功率越強；反之，力電耦合強度越弱，功率越弱。但結果則不然，由圖 4-2(a)、圖 4-3(a)發現，當壓電層長度比在 0 到 0.2 這段區間，功率的變化斜率為負，力電耦合強度的變化斜率為正，當壓電層長度比約為 0.2 時，功率為最小值，但力電耦合強度並非最弱；當壓電層長度比在 0.2 到 0.5 這段區間，功率的變化斜率為正，力電耦合強度的變化斜率為正，當壓電層長度比約為 0.5 時，力電耦合強度為最強，但功率並非最大值；當壓電層長度比在 0.5 到 1 這段區間，功率的變化斜率為正，力電耦合強度的變化斜率為負，當壓電層長度比約為 1 時，功率為最大值，但力電耦合強度並非最強。

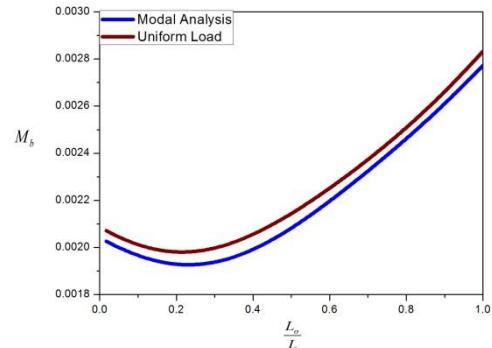
功率與單位系統之等效質量的發電功率恰巧相反，由圖 4-3(a)、圖 4-3(c)發現，當壓電層長度比在 0 到 0.2 這段區間，功率的變化斜率為負，單位系統之等效質量的發電功率的變化斜率為正；當壓電層長度比在 0.2 到 0.65 這段區間，功率的變化斜率為正，單位系統之等效質量的發電功率的變化斜率為正；當壓電層長度比在 0.65 到 1 這段區間，功率的變化斜率為正，單位系統之等效質量的發電功率的變化斜率為負。

功率與單位質量的發電功率相似，皆為似凹向上的拋物線，由圖 4-3(a)、圖 4-3(d)發現，當壓電層長度比在 0.2 到 0.3 這段區間，功率與單位質量的發電功率會有最小值。不同點處在於變化的速率，功率之上升與下降的速率相同，且上升段與下降段的曲線可視為線性曲線，即斜率固定，單位質量的發電功率之上升較下降的速率慢，且上升段與下降段之單位質量的發電功率最大值幾乎等值，即當壓電層長度比約為 0 與 1 時，單位質量的發電功率可視為相同。

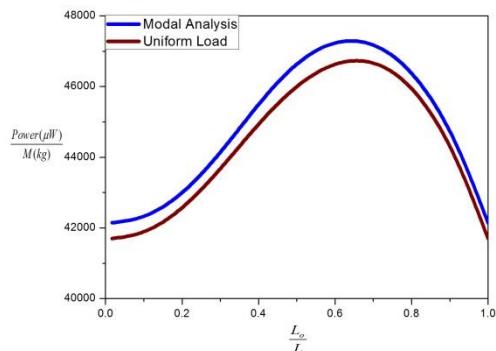
由以上結果可知，在同材料與相似結構下，大致上功率與單位質量的發電功率相似，功率越大，單位質量的發電功率越大；反之，功率越小，單位質量的發電功率越小，但增減比例趨勢則無絕對關係，而單位系統之等效質量的發電功率與單位成本的發電功率趨勢則和功率無絕對關係。



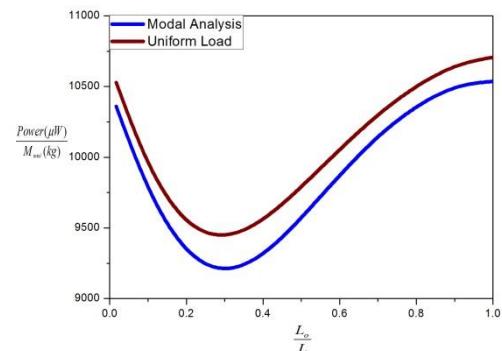
(a)



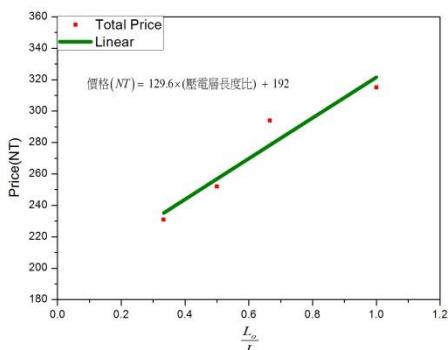
(b)



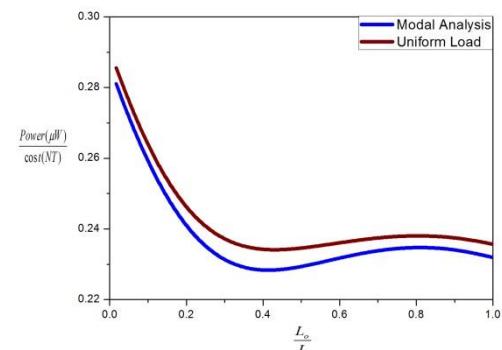
(c)



(d)



(e)



(f)

圖 4-3 PZT-5A 材料物理參數($a=0.1\text{g}$) (a) 功率 (b) 固定端等效質量

(c) 功率/系統之等效質量 (d) 功率/總質量 (e) 價格 (f) 功率/價格



由(2.2.32)式可知，壓電懸臂樑之發電功率又為

$$P = \frac{(M_b A^2)^2}{M \omega_n} \bar{P} \quad (4.2.2)$$

壓電振動懸臂樑可給定加速度，則基座之加速度 A^2 為定值，功率僅與固定端等效質量 M_b^2 、正規化功率 \bar{P} 成正比，與系統之等效質量 M 、短路共振頻 ω_n 成反比，四項參數皆與尺寸模型和材料有關，由 2-2 節能量法可知，系統之等效質量、固定端等效質量直接與尺寸模型和材料有關且理論較易求得，而功率正比於固定端等效質量的平方除以系統之等效質量，使固定端等效質量的平方除以系統之等效質量可描述功率趨勢，此舉可簡化功率的計算並得趨勢。

固定端等效質量的平方除以系統之等效質量，如圖 4-4，固定端等效質量的平方除以系統之等效質量的變化似打勾圖案，壓電層長度比從 0 上升，固定端等效質量的平方除以系統之等效質量會下降，約在壓電層長度比為 0.2 時，固定端等效質量的平方除以系統之等效質量有最小值，當壓電層長度比再持續上升，固定端等效質量的平方除以系統之等效質量則會上升，上升的速率較下降段相近，整體的曲線趨勢也與功率相同，因此可用固定端等效質量的平方除以系統之等效質量的趨勢來表示功率的趨勢，此方法也簡化功率之計算。

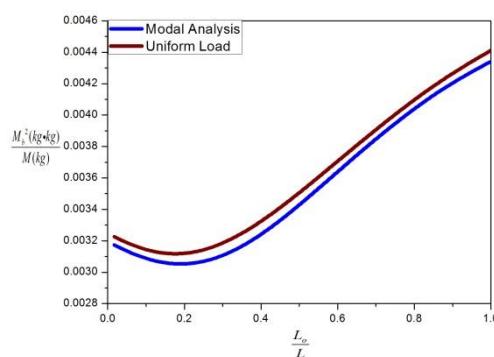


圖 4-4 PZT-5A 材料物理參數($a=0.1g$) 固定端等效質量的平方/系統之等效質量



在 3-2 節中，尺寸模型的壓電材料為 PZT-5A，並令整體之等效機械阻尼係數 $\eta_m = 7M$ ，由圖 4-2(a)可知，當壓電層長度比在 0.2 以上，振子均為強力電耦合，所呈現的物理現象如圖 4-2、圖 4-3。因此想選用偏弱力電耦合之壓電材料，並觀察其物理現象是否與強力電耦合之壓電材料不同。

PZT-5A 屬力電耦合強度偏強的壓電材料，PZT-2 屬力電耦合強度偏弱的壓電材料，選用與 3-2 節中相同的尺寸模型，將壓電材料改為 PZT-2，其材料參數如表 4-1，並令整體之等效機械阻尼係數 $\eta_m = 25M$ ，使振子能在任意的壓電層長度比下，皆屬中、弱力電耦合。

表 4-1 PZT-2 與 Copper 之材料參數

$L(\text{mm})$	$w(\text{mm})$	$t_p(\text{mm})$	$t_c(\text{mm})$	$\rho_p(\text{kg/m}^3)$
60	10	0.2	1	7600
$\rho_c(\text{kg/m}^3)$	$s_{11}^E(\text{pm}^2 / \text{N})$	$d_{31}(\text{pm} / \text{V})$	$\varepsilon_{33}^T / \varepsilon_0$	$c_{11}^{sub}(\text{GN/m}^2)$
8700	11.6	-60	450	110

力電耦合強度 k_e^2 / ζ_m ，如圖 4-5(a)，力電耦合強度的變化似拋物線，與圖 4-2(a)相比，在相同尺寸模型下，強力電耦合振子與弱力電耦合振子的力電耦合強度變化趨勢相同。

無因次化力電耦合係數 k_e^2 ，如圖 4-5(b)，無因次化力電耦合係數的變化似拋物線，與圖 4-2(b)相比，在相同尺寸模型下，強力電耦合振子與弱力電耦合振子的無因次化力電耦合係數變化趨勢相同。

無因次化機械阻尼係數 ζ_m ，如圖 4-5(c)，無因次化機械阻尼係數的變化似凹向上的拋物線，與圖 4-2(c)相比，在相同尺寸模型下，強力電耦合振子與弱力電耦合振子的無因次化機械阻尼係數變化趨勢相同。

短路共振頻 f_{sc} 與開路共振頻 f_{oc} ，如圖 4-5(d)與圖 4-5(e)，短路共振頻與開路共



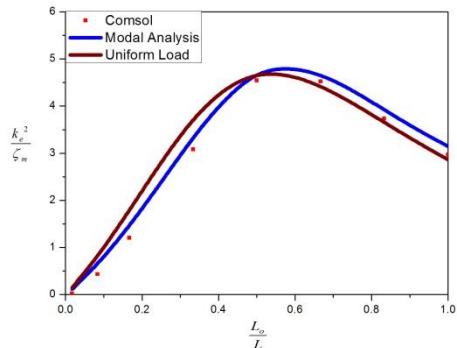
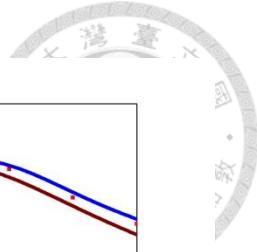
振頻的變化似拋物線，與圖 4-2(d)、圖 4-2(e)相比，在相同尺寸模型下，強力電耦合振子與弱力電耦合振子的短路共振頻與開路共振頻變化趨勢相同。

系統之等效質量 M ，如圖 4-5(f)，系統之等效質量的變化似凹向上的拋物線，與圖 4-2(f)相比，在相同尺寸模型下，強力電耦合振子與弱力電耦合振子的系統之等效質量變化趨勢相同。

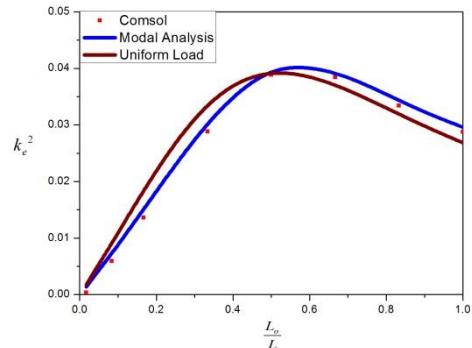
同樣，由此會十分好奇，力電耦合強度的變化，究竟無因次化力電耦合係數與無因次化機械阻尼係數何項參數影響較為顯著，由圖 4-5(b)、圖 4-5(c)發現，無因次化力電耦合係數與無因次化機械阻尼係數兩項參數的變化趨勢剛好相反，與圖 4-2(b)、圖 4-2(c)相比，在相同尺寸模型下，強力電耦合振子與弱力電耦合振子的無因次化力電耦合係數與無因次化機械阻尼係數變化趨勢相同，所以對力電耦合強度的變化趨勢影響也相同。

同樣，也好奇在材料相同且結構相似的情況下，短路共振頻與開路共振頻和力電耦合強度是否有關聯，由圖 4-5(d)、圖 4-5(e)發現，短路共振頻與開路共振頻和力電耦合強度趨勢相同，皆為似凹向下的拋物線，與圖 4-2(d)、圖 4-2(e)相比，在相同尺寸模型下，強力電耦合振子與弱力電耦合振子的短路共振頻與開路共振頻變化趨勢相同，所以對力電耦合強度的變化趨勢影響也相同。

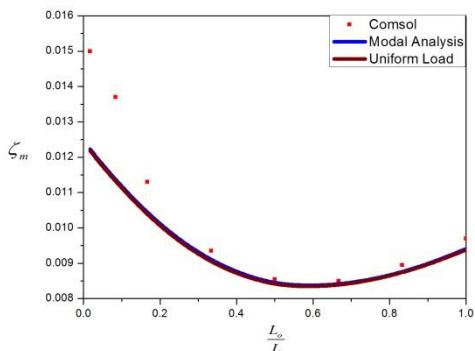
由以上結果可知，在同材料與相似結構下，大致上當力電耦合強度強時，無因次化力電耦合係數大，無因次化機械阻尼係數小，短路共振頻與開路共振頻高；反之，大致上當力電耦合強度弱時，無因次化力電耦合係數小，無因次化機械阻尼係數大，短路共振頻與開路共振頻低。而在強力電耦合振子與弱力電耦合振子下，力電耦合強度強、弱變化，對無因次化力電耦合係數、無因次化機械阻尼係數、短路共振頻、開路共振頻的影響皆相同。



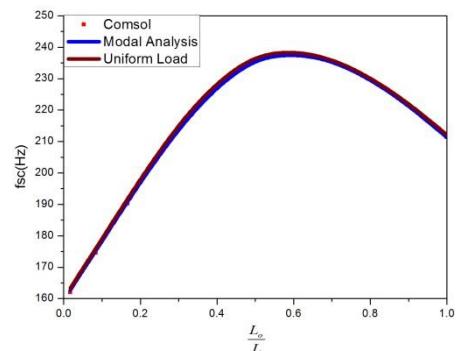
(a)



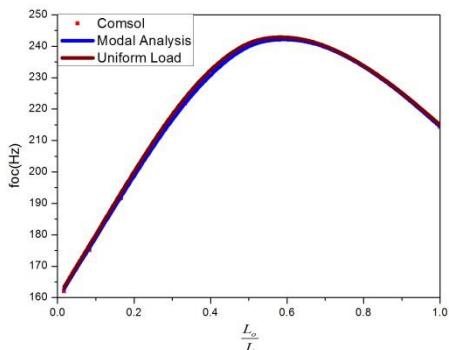
(b)



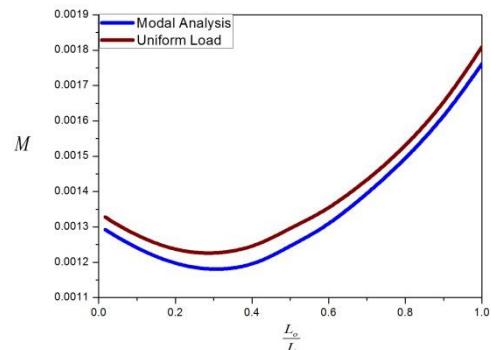
(c)



(d)



(e)



(f)

圖 4-5 PZT-2 材料物理參數($a=0.1g$) (a) 力電耦合係數 k_e^2 / ζ_m (b) 無因次化力電耦合係數 k_e^2 (c) 無因次化機械阻尼係數 ζ_m (d) 短路共振頻 f_{sc} (e) 開路共振頻 f_{oc} (f) 系統之等效質量 M



接著探討壓電層長度比對發電功率的影響為何，本實驗室的主要研究為壓電振動能量擷取，因此最在乎的是壓電振動懸臂樑之發電功率。功率，如圖 4-6(a)，功率的變化似打勾圖案，與圖 4-3(a)相比，在相同尺寸模型下，強力電耦合振子與弱力電耦合振子的功率變化趨勢相同。

同樣，由圖 4-6(a)發現與圖 4-3(a)有相同的現象，當壓電層長度比約低於 0.1，COMSOL 數值法之功率與能量法之功率有較大的誤差。而原因前段已有撰述，本段則省略，因此本節在後續功率的探討，皆不討論 COMSOL 數值法的結果，此舉可增加變化曲線的趨勢明顯度。

固定端等效質量，如圖 4-6(b)，固定端等效質量的變化似打勾圖案，與圖 4-3(b)相比，在相同尺寸模型下，強力電耦合振子與弱力電耦合振子的固定端等效質量變化趨勢相同。

功率除以系統之等效質量，如圖 4-6(c)，又稱單位系統之等效質量的發電功率，單位系統之等效質量的發電功率的變化似拋物線，與圖 4-3(c)相比，在相同尺寸模型下，強力電耦合振子與弱力電耦合振子的單位系統之等效質量的發電功率變化趨勢相同。

功率除以總質量，如圖 4-6(d)，又稱單位質量的發電功率，單位質量的發電功率的變化似凹向上的拋物線，與圖 4-3(d)相比，在相同尺寸模型下，強力電耦合振子與弱力電耦合振子的單位質量的發電功率變化趨勢相同。

同樣，壓電片總質量的不同直接聯想到的就是成本，而由寰辰科技的壓電片報價單可知，壓電材料的價格與屬強力電耦合或弱力電耦合無關，僅與壓電層的多寡有關，如圖 4-6(e)，所以與圖 4-3(e)的價格對應曲線相同，利用線性回歸的方法，得到最符合四種尺寸壓電片的價格的線性方程式為

$$\text{價格(NT)} = 129.6 \times (\text{壓電層長度比}) + 192 \quad (4.2.3)$$



功率除以價格，如圖 4-6(f)，又稱單位成本的發電功率，單位成本的發電功率的變化似躺椅形狀，與圖 4-3(f)相比，在相同尺寸模型下，強力電耦合振子與弱力電耦合振子的單位成本的發電功率變化趨勢相同。

由圖 4-5(a)、圖 4-6(a)發現，當功率為最大值，但力電耦合強度並非最強，與圖 4-2(a)、圖 4-3(a)相比，在相同尺寸模型下，強力電耦合振子與弱力電耦合振子的功率變化趨勢相同，所以對力電耦合強度的變化趨勢影響也相同。

由圖 4-6(a)、圖 4-6(c)發現，功率與單位系統之等效質量的發電功率恰巧相反，與圖 4-3(a)、圖 4-3(c)相比，在相同尺寸模型下，強力電耦合振子與弱力電耦合振子的單位系統之等效質量的發電功率變化趨勢相同，所以對力電耦合強度的變化趨勢影響也相同。

由圖 4-6(a)、圖 4-6(d)發現，功率與單位質量的發電功率相似，皆為似凹向上的拋物線，與圖 4-3(a)、圖 4-3(d)相比，在相同尺寸模型下，強力電耦合振子與弱力電耦合振子的單位質量的發電功率變化趨勢相同，所以對力電耦合強度的變化趨勢影響也相同。

由以上結果可知，在同材料與相似結構下，大致上功率與單位質量的發電功率相似，功率越大，單位質量的發電功率越大；反之，功率越小，單位質量的發電功率越小，但增減比例趨勢則無絕對關係，而單位系統之等效質量的發電功率與單位成本的發電功率趨勢則和功率無絕對關係。而在強力電耦合振子與弱力電耦合振子下，力電耦合強度強、弱變化，對功率與單位質量的發電功率的影響皆相同。

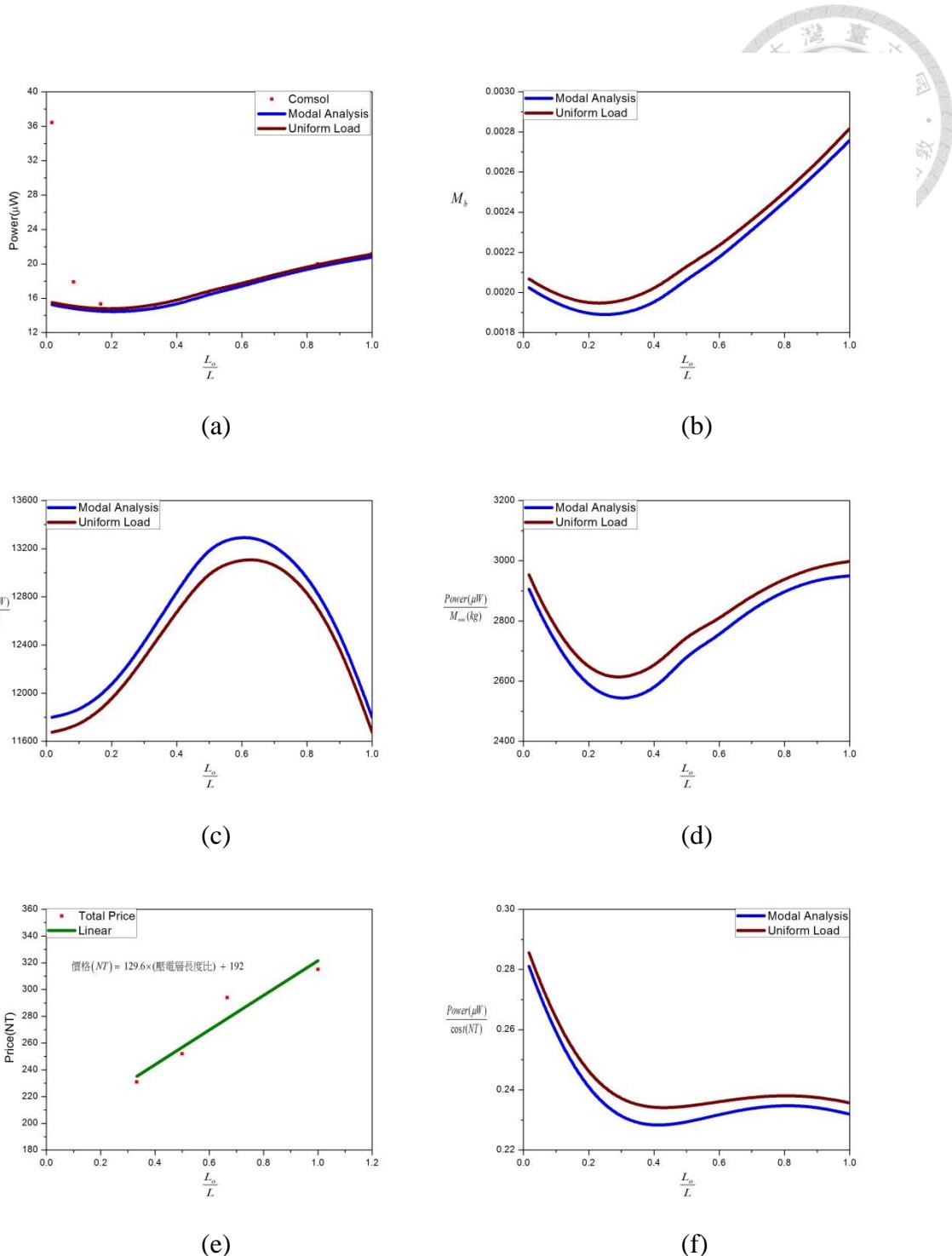


圖 4-6 PZT-2 材料物理參數($a=0.1g$) (a) 功率 (b) 固定端等效質量

(c) 功率/系統之等效質量(d) 功率/總質量 (e) 價格 (f) 功率/價格



由(2.2.32)式可知，壓電懸臂樑之發電功率又為

$$P = \frac{(M_b A^2)^2}{M \omega_n} \bar{P} \quad (4.2.4)$$

由前段可知，使固定端等效質量的平方除以系統之等效質量可描述功率趨勢，此舉可簡化功率的計算並得趨勢。

固定端等效質量的平方除以系統之等效質量，如圖 4-7，固定端等效質量的平方除以系統之等效質量的變化似打勾圖案，與圖 4-4 相比，在相同尺寸模型下，強力電耦合振子與弱力電耦合振子的固定端等效質量的平方除以系統之等效質量變化趨勢相同，所以對功率的變化趨勢影響也相同。

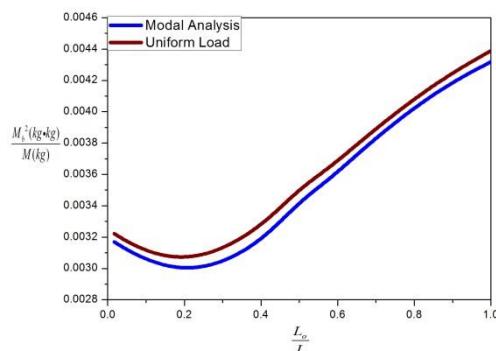


圖 4-7 PZT-5A 材料物理參數($a=0.1\text{g}$) 固定端等效質量的平方/系統之等效質量

Chapter 5. 實驗結果與分析比較



5-1 實驗之等效參數如何量測

在 2-2、2-3 節中介紹了能量法與等效電路法兩種可描述壓電振動懸臂樑的方法，此節中即詳述如何在實驗上求得兩方法各自相對應的等效材料參數。

● 能量法在實驗上之求解步驟

將能量法用在實驗上的步驟為

步驟 1. 求出壓電懸臂樑的總質量 M_{total} 。

方法有兩種，第一種方法，測量出壓電懸臂樑的材料尺寸，分別將壓電層與基板乘上各自密度，得到壓電懸臂樑的總質量；第二種方法，直接將壓電片放到電子秤上求出壓電片之總質量，接著按比例扣掉夾於夾具內之壓電片質量，則可求出壓電懸臂樑的總質量。將所量測得之壓電懸臂樑總質量代入表 2-1 的系統之等效質量 M 、固定端等效質量 M_b 。

步驟 2. 求出靜態電容 C_p 。

利用阻抗分析儀(Impedance Analyzer)量出壓電懸臂樑的靜態電容 C_p 。

步驟 3. 求出短路共振頻 f_{SC} 、開路共振頻 f_{OC} 。

將壓電片的上、下電極層相接，使壓電懸臂樑短路，在此情況下做掃頻並固定基座的加速度，並利用光纖測距儀(Fotonic Sensor)觀察何頻率下壓電懸臂樑的前端會有最大位移，則該頻率為壓電懸臂樑的短路共振頻；不將壓電片的上、下電極層相接，使壓電懸臂樑斷路，在此情況下做掃頻並固定基座的加速度，並利用光纖測距儀觀察何頻率下壓電懸臂樑的前端會有最大位移，則該頻率為壓電懸臂樑的開路共振頻。

步驟 4. 求出無因次化力電耦合係數、系統之等效勁度、系統之等效力電耦合係數。

由 1、2、3 步驟所量測的實驗參數，可以算得無因次化力電耦合係數、系統



之等效勁度、系統之等效力電耦合係數為

無因次化力電耦合係數

$$k_e^2 = \left(\frac{f_{OC}}{f_{SC}} \right)^2 - 1 \quad (5.1.1)$$

系統之等效勁度

$$K = (2\pi f_{SC})^2 M \quad (5.1.2)$$

系統之等效力電耦合係數

$$\Theta = \sqrt{k_e^2 K C_p} \quad (5.1.3)$$

步驟 5. 求出等效機械阻尼係數 η_m 。

將壓電片的上、下電極層與一電阻相接，並外接探棒且使電阻與探棒並聯，在此情況下做掃頻並固定基座的加速度，利用數位示波器(Digital Storage Oscilloscope)觀察何頻率下壓電懸臂樑的輸出電壓最大，則該頻率為壓電懸臂樑在此電阻下的共振頻，該電壓為壓電懸臂樑在此電阻下的最大電壓，由電壓與電阻可算出壓電懸臂樑在此電阻下的最大功率，紀錄該電組對應的最大功率。反覆操作步驟 5，可繪出最大功率之電阻圖，將 1、2、3、4 步驟量得的等效材料參數代入(2.2.24)式，並假定等效機械阻尼係數，可得到壓電振動懸臂樑之估計最大功率曲線，將估計最大功率曲線與實驗結果相比並變換等效機械阻尼係數，可以找出一條最吻合的趨勢線，則求出相對應的等效機械阻尼係數 η_m ，如圖 5-1。

步驟 6. 求出無因次化機械阻尼係數 ζ_m 、力電耦合強度 $\frac{k_e^2}{\zeta_m}$ 。

將 1、4、5 步驟得到的系統之等效質量、系統之等效勁度、等效機械阻尼係數，將三項等效材料參數代入(2.2.29)式，可得無因次化機械阻尼係數。將 5 步驟得到的無因次化力電耦合係數除以無因次化機械阻尼係數，可得振子之力電耦合強度。



● 等效電路法在實驗之求解步驟

將能量法用在實驗上的步驟為

步驟 1. 求出靜態電容 C_p 。

利用阻抗分析儀量出壓電懸臂樑的靜態電容 C_p 。

步驟 2. 求出短路共振頻 f_{SC} 、開路共振頻 f_{OC} 。

將壓電片的上、下電極層相接，使壓電懸臂樑短路，在此情況下做掃頻並固定基座的加速度，並利用光纖測距儀觀察何頻率下壓電懸臂樑的前端會有最大位移，則該頻率為壓電懸臂樑的短路共振頻；不將壓電片的上、下電極層相接，使壓電懸臂樑斷路，在此情況下做掃頻並固定基座的加速度，並利用光纖測距儀觀察何頻率下壓電懸臂樑的前端會有最大位移，則該頻率為壓電懸臂樑的開路共振頻。

步驟 3. 求出無因次化力電耦合係數、短路共振角頻率、等效電阻、等效電感、等效電容。

由 1、2 步驟所量測的實驗參數，可以算得無因次化力電耦合係數、短路共振角頻率、等效電阻、等效電感、等效電容為

無因次化力電耦合係數

$$k_e^2 = \left(\frac{f_{OC}}{f_{SC}}\right)^2 - 1 \quad (5.1.4)$$

短路共振角頻率

$$\omega_n = 2\pi f_{SC} \quad (5.1.5)$$

等效電阻

$$R_l = \frac{2\zeta_m}{\omega_n C_p k_e^2} \quad (5.1.6)$$



等效電感

$$L_1 = \frac{1}{\omega_n^2 C_P k_e^2}$$

等效電容

$$C_1 = C_P k_e^2 \quad (5.1.8)$$

步驟 4. 求出無因次化機械阻尼係數 ζ_m 、等效電流源 V_{source} 。

將壓電片的上、下電極層與一電阻相接，並外接探棒且使電阻與探棒並聯，在此情況下做掃頻並固定基座的加速度，利用數位示波器觀察何頻率下壓電懸臂樑的輸出電壓最大，則該頻率為壓電懸臂樑在此電阻下的共振頻，該電壓為壓電懸臂樑在此電阻下的最大電壓，由電壓與電阻可算出壓電懸臂樑在此電阻下的最大功率，紀錄該電阻對應的最大功率。反覆操作步驟 4，可繪出最大功率之電阻圖，將 1、2、3 步驟得到的等效材料參數代入(2.3.4)式，並假定無因次化機械阻尼係數與等效電流源，可得到壓電振動懸臂樑之估計最大功率曲線，將估計最大功率曲線與實驗結果相比，並變換無因次化機械阻尼係數與等效電流源，可以找出一條最吻合的趨勢線，則求出相對應的無因次化機械阻尼係數 ζ_m 與等效電流源 V_{source} ，如圖 5-1。

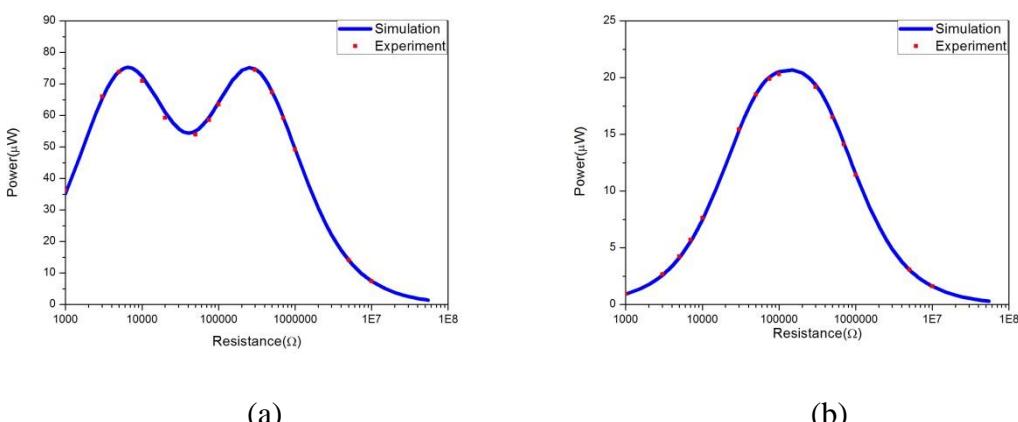


圖 5-1 最大功率之電阻圖 (a) 強力電耦合 (b) 弱力電耦合



5-2 實驗儀器與架構

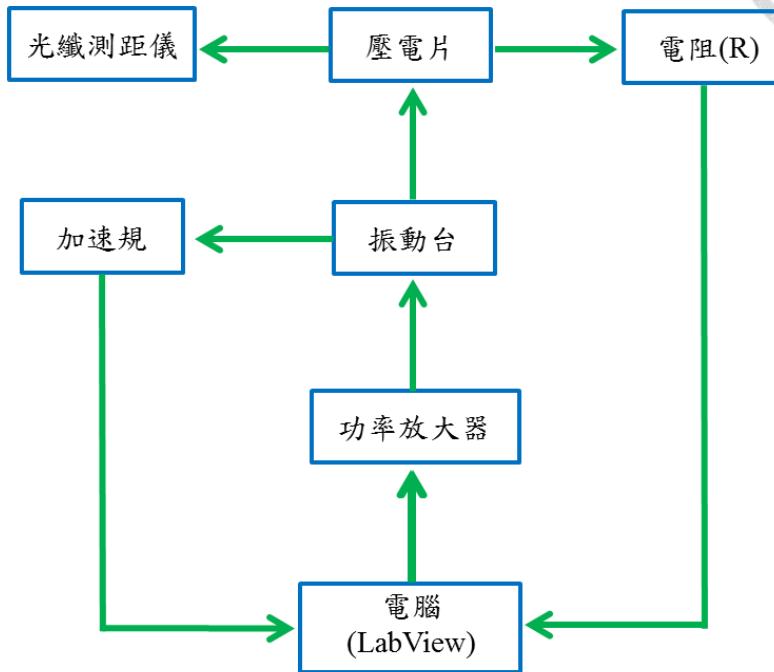


圖 5-2 實驗儀器架構流程圖

實驗儀器架構流程圖，如圖 5-2，在實驗操作流程上，將壓電片以懸臂樑形式固定於基座上，使用阻抗分析儀量得等效電路參數與共振頻後，將其架在振動台上，加速規固定於基座上，避免固定於振動台的圓盤上，因其振動後所產生的不穩定性干擾因素較大，會使訊號產生雜訊，而加速規可測得振動台所產生的加速度。

在靜態時先將光纖測距儀校正好，可使用筆電操作 LabVIEW 或者訊號產生器來輸出訊號，並透過訊號放大器縮放其訊號源，接著打入振動台使其作動，加速規回傳振動台的加速度訊號，視需求調整輸出訊號可使加速度控制在定值，並由 LabVIEW 或者數位示波器讀取壓電振動懸臂樑輸出的電壓，也可利用光纖測距儀得知樑上位移值與振動幅度，此方法主要用於量測壓電懸臂樑之短、開路共振頻。

表 5-1 實驗儀器規格



儀器名稱	廠牌型號	圖例編號
振動台	Data Physics Vibrator Testing System Source V20	圖 5-3(a)
功率放大器	Data Physics Power Amplifier PA 300E	圖 5-3(b)
阻抗分析儀	Agilent Technologies 4294A Impedance Analyzer	圖 5-3(c)
數位示波器	GW INSTEK Digital Storage Oscilloscope GDS-3154	圖 5-3(d)
訊號產生器	GW INSTEK Arbitrary Function Generator AFG-2225	圖 5-3(e)
加速規	PCB Electronics Accelerometer 333B42	圖 5-3(f)
加速規接收器	PCB 484B10	圖 5-4(a)
光纖測距儀	MTI-2100 Fotonic Sensor	圖 5-4(b)
光纖探頭	MTI-2100 Fotonic Sensor(Probe)	圖 5-4(c)
資料擷取卡	National Instrument NI cDAQ-9178 & NI9229	圖 5-4(d)
資料擷取卡	National Instrument USB-6341	圖 5-4(e)
筆電	Lenovo	圖 5-4(f)



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)



(f)

圖 5-3 實驗儀器 (a) 振動台 (b) 功率放大器 (c) 阻抗分析儀 (d) 數位示波器

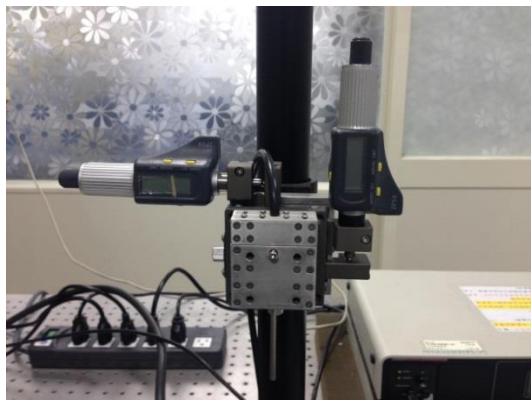
(e) 訊號產生器 (f) 加速規



(a)



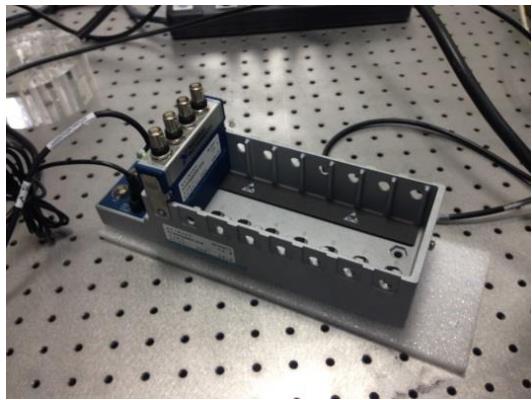
(b)



(c)



(d)



(e)



(f)

圖 5-4 實驗儀器 (a) 加速規接收器 (b) 光纖測距儀 (c) 光纖探頭

(d) 資料擷取卡 (e) 資料擷取卡 (f) 筆電



5-3 實驗結果

此節要利用實驗來驗證在 2-2、2-3 節中能量法與等效電路法是否可用於實驗，並比較實驗的等效材料參數之估計值與實驗結果，且探討實驗結果之物理現象。

實驗上同樣採用 3-2 節的四種尺寸模型，各尺寸模型皆會在兩款不同的壓電材料下做測試。壓電材料部份皆由寰辰科技提供，本論文所採用的兩款壓電材料，材料名稱為 QA 與 KB。如圖 5-5，QA 為黑色，KB 為濁透明色，上、下鋪有白色的電極層，壓電材料的性質上，QA 為力電耦合強度偏強，KB 為力電耦合強度偏弱。

進行壓電振動能量擷取實驗前，先裁切壓電片至所需的尺寸，接著固定於夾具上，再將夾具栓於基座，如圖 5-6，則使其以壓電懸臂樑型式呈現，最後將此基座架置振動台上，即可進行壓電振動能量擷取實驗。

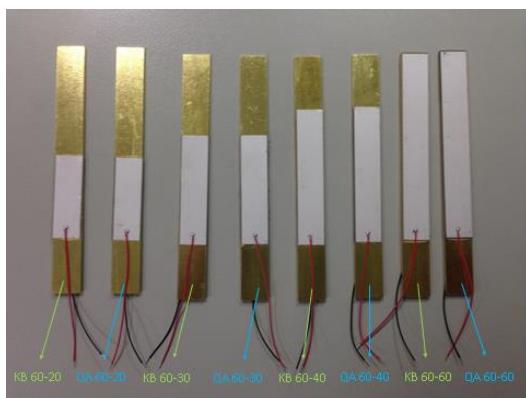


圖 5-5 QA、KB 各尺寸式樣

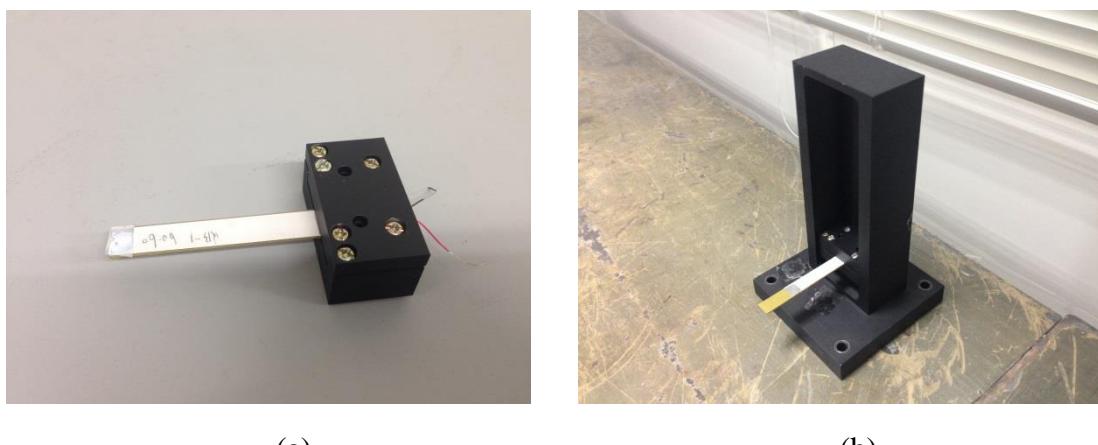


圖 5-6 (a) 壓電片固定於夾具 (b) 壓電片與夾具固定於基座



● QA 60-60 實驗結果

實驗上利用等效電路法、能量法在模態函數與均佈力負載兩種形狀函數下，三方法所得之等效材料參數，如表 5-2 所示。將三組等效材料參數所得之壓電振動懸臂樑輸出功率與實驗相比較其誤差，如表 5-3 所示。三組等效材料參數與實驗的功率之頻率響應圖，如圖 5-7 所示。

表 5-2 QA 60-60 實驗三方法之等效材料參數

	Equivalent Circuit		Energy-Modal Analysis	Energy-Uniform Load
$f_{sc}(Hz)$	214.4	$f_{sc}(Hz)$	214.4	214.4
$f_{oc}(Hz)$	216.8	$f_{oc}(Hz)$	216.8	216.8
k_e	0.15004	k_e	0.15004	0.15004
$R_i(\Omega)$	9762.05	$M(kg)$	0.00180	0.00185
$L_i(H)$	1811.66	$K(N/m)$	3279.56	3368.63
$C_l(nF)$	0.304168	$\Theta(C/m)$	0.000998768	0.00101224
$V_{oc}(V)$	15.15	$M_b(kg)$	0.00283	0.00289
$C_p(nF)$	13.5105	$C_p(nF)$	13.5105	13.5105
ζ_m	0.002	$\eta_m(N\cdot s/m)$	0.0101	0.0105
k_e^2/ζ_m	11.25668	ζ_m	0.00207	0.00209
		k_e^2/ζ_m	10.85324	10.72331

表 5-3 QA 60-60 實驗與三方法之功率、誤差

$Power_{MAX}(\mu W) at R$	Experiment	Equivalent Circuit	Energy-Modal Analysis	Energy-Uniform Load
R=5kΩ	81.10	84.67	83.94	83.94
誤差(%)	----	4.39%	3.49%	3.49%
R=10kΩ	94.25	94.79	95.08	95.44
誤差(%)	----	0.56%	0.87%	1.26%
R=75kΩ	74.32	75.26	76.77	77.50
誤差(%)	----	1.26%	3.29%	4.26%
R=330kΩ	94.61	94.55	94.71	95.03
誤差(%)	----	0.06%	0.11%	0.45%
R=750kΩ	75.73	79.81	78.91	78.85
誤差(%)	----	5.38%	4.20%	4.11%

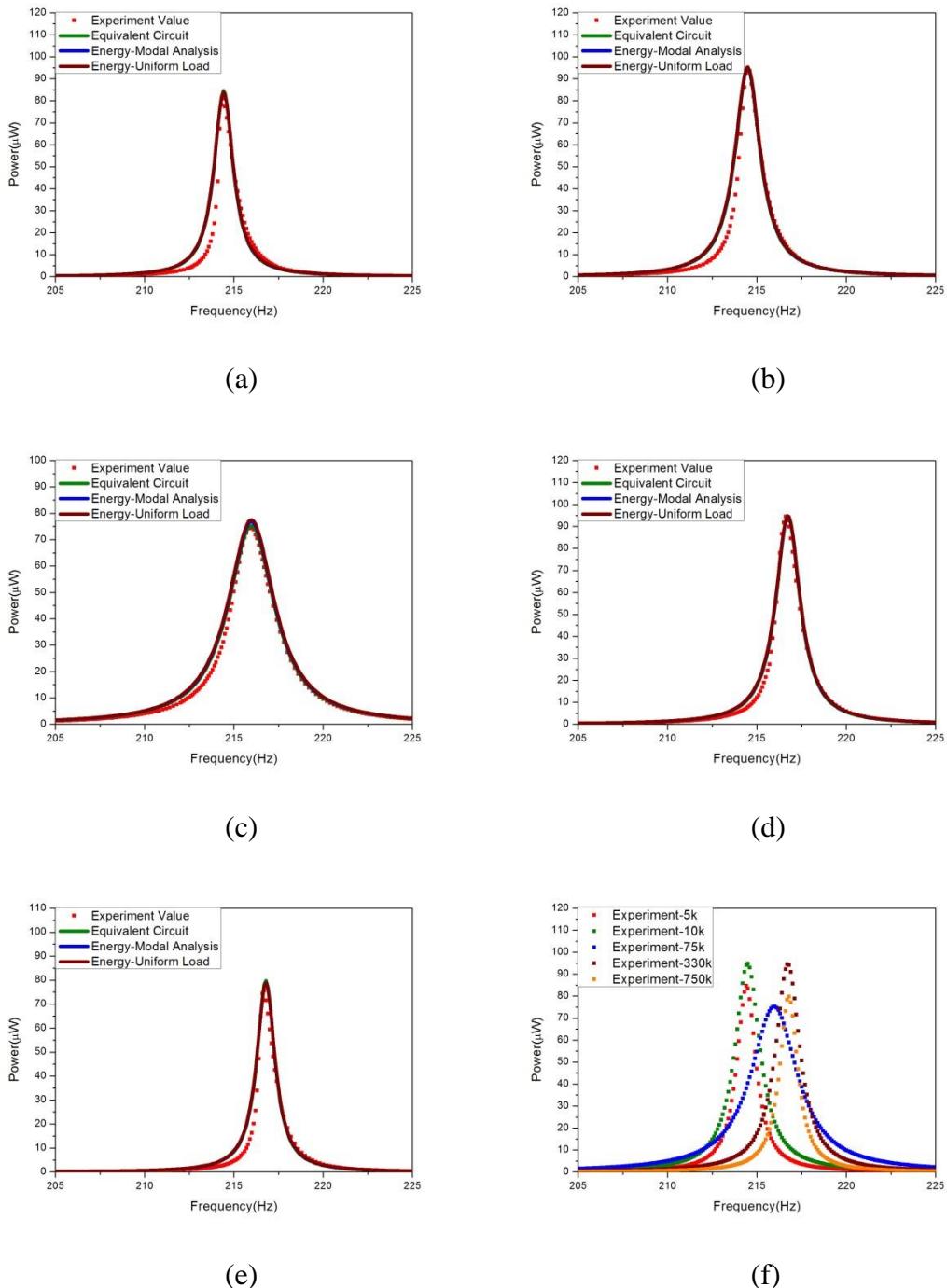


圖 5-7 QA 60-60 功率之頻率響應實驗圖(a=0.1g) (a) $R=5\text{k}\Omega$ (b) $R=10\text{k}\Omega$

(c) $R=75\text{k}\Omega$ (d) $R=330\text{k}\Omega$ (e) $R=750\text{k}\Omega$ (f) 合併 5 組實驗結果

● QA 60-40 實驗結果

實驗上利用等效電路法、能量法在模態函數與均佈力負載兩種形狀函數下，三方法所得之等效材料參數，如表 5-4 所示。將三組等效材料參數所得之壓電振動懸臂樑輸出功率與實驗相比較其誤差，如表 5-5 所示。三組等效材料參數與實驗的功率之頻率響應圖，如圖 5-8 所示。

表 5-4 QA 60-40 實驗三方法之等效材料參數

	Equivalent Circuit		Energy-Modal Analysis	Energy-Uniform Load
$f_{sc}(Hz)$	248.3	$f_{sc}(Hz)$	248.3	248.3
$f_{oc}(Hz)$	251.7	$f_{oc}(Hz)$	251.7	251.7
k_e	0.16605	k_e	0.16605	0.16605
$R_i(\Omega)$	8136.76	$M(kg)$	0.00134	0.00135
$L_i(H)$	1629.84	$K(N/m)$	3274.72	3301.45
$C_l(nF)$	0.25208	$\Theta(C/m)$	0.00090856	0.00091227
$V_{oc}(V)$	20.5	$M_b(kg)$	0.00225	0.00227
$C_p(nF)$	9.1421	$C_p(nF)$	9.1421	9.1421
ζ_m	0.00160	$\eta_m(N\cdot s/m)$	0.0068	0.0069
k_e^2/ζ_m	17.23358	ζ_m	0.00162	0.00164
		k_e^2/ζ_m	17.02290	16.79142

表 5-5 QA 60-40 實驗與三方法之功率、誤差

$Power_{MAX}(\mu W) at R$	Experiment	Equivalent Circuit	Energy-Modal Analysis	Energy-Uniform Load
R=5kΩ	78.49	84.08	83.86	83.35
誤差(%)	-----	7.11%	6.84%	6.19%
R=10kΩ	88.15	88.47	88.60	88.47
誤差(%)	-----	0.35%	0.50%	0.36%
R=75kΩ	54.21	54.96	55.40	55.72
誤差(%)	-----	1.37%	2.19%	2.78%
R=500kΩ	88.74	88.43	88.57	88.44
誤差(%)	-----	0.34%	0.18%	0.33%
R=2MΩ	69.27	68.83	68.45	67.82
誤差(%)	-----	0.64%	1.19%	2.10%

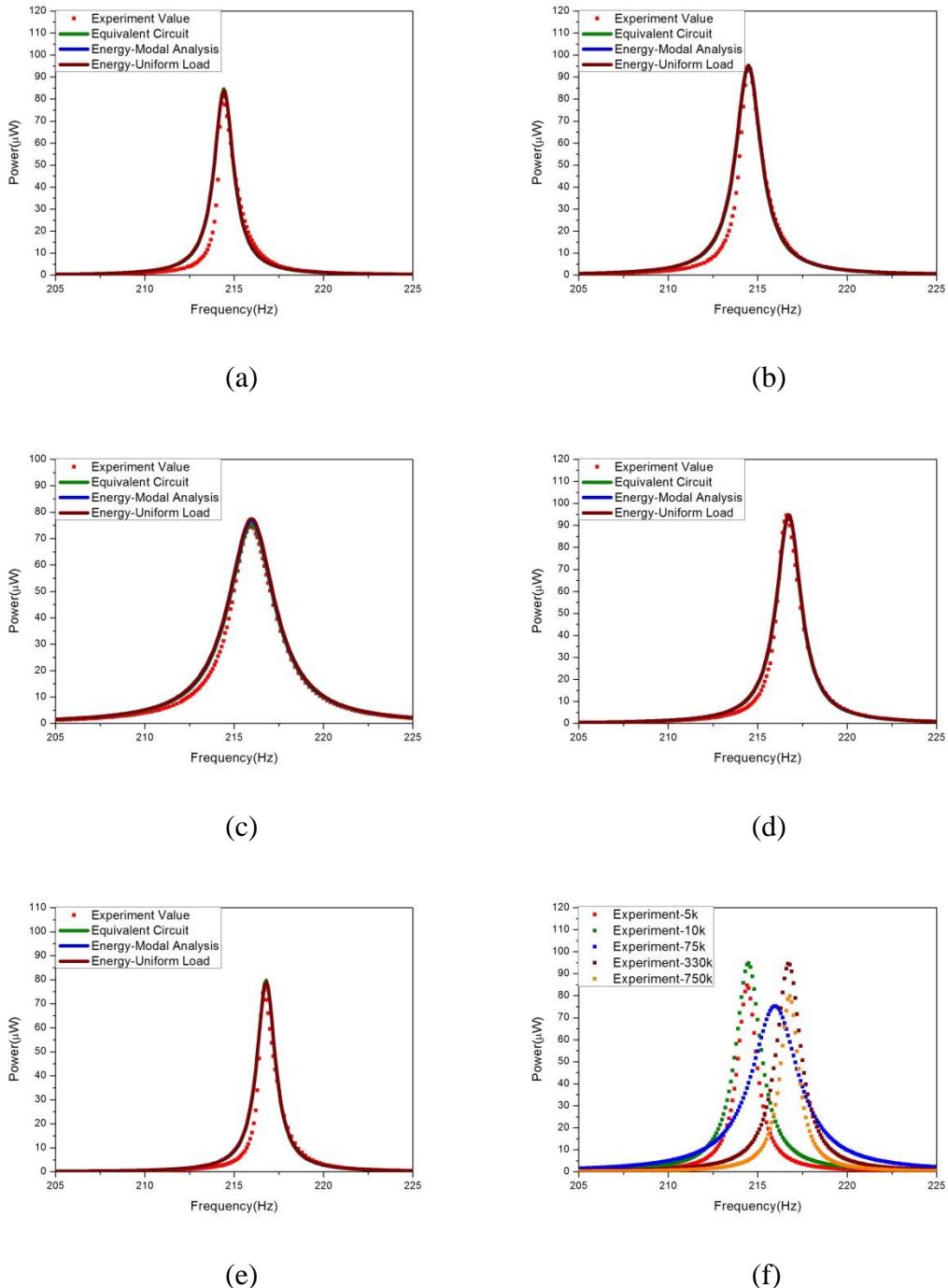


圖 5-8 QA 60-40 功率之頻率響應實驗圖(a=0.1g) (a)R=5k Ω (b) R=10k Ω
(c) R=75k Ω (d) R=500k Ω (e) R=2M Ω (f) 合併 5 組實驗結果



● QA 60-30 實驗結果

實驗上利用等效電路法、能量法在模態函數與均佈力負載兩種形狀函數下，三方法所得之等效材料參數，如表 5-6 所示。將三組等效材料參數所得之壓電振動懸臂樑輸出功率與實驗相比較其誤差，如表 5-7 所示。三組等效材料參數與實驗的功率之頻率響應圖，如圖 5-9 所示。

表 5-6 QA 60-30 實驗三方法之等效材料參數

	Equivalent Circuit		Energy-Modal Analysis	Energy-Uniform Load
$f_{sc}(Hz)$	248.7	$f_{sc}(Hz)$	248.7	248.7
$f_{oc}(Hz)$	252	$f_{oc}(Hz)$	252	252
k_e	0.16344	k_e	0.16344	0.16344
$R_1(\Omega)$	9485.78	$M(kg)$	0.00125	0.00122
$L_1(H)$	2093.24	$K(N/m)$	3059.89	3001.68
$C_1(nF)$	0.19564	$\Theta(C/m)$	0.000773727	0.000766331
$V_{oc}(V)$	23.1	$M_b(kg)$	0.00206	0.00203
$C_p(nF)$	7.32367	$C_p(nF)$	7.32367	7.32367
ζ_m	0.00145	$\eta_m(N\cdot s/m)$	0.0060	0.0059
k_e^2/ζ_m	18.42349	ζ_m	0.00153	0.00153
		k_e^2/ζ_m	17.43692	17.39503

表 5-7 QA 60-30 實驗與三方法之功率、誤差

$Power_{MAX}(\mu W) at R$	Experiment	Equivalent Circuit	Energy-Modal Analysis	Energy-Uniform Load
R=5kΩ	75.76	76.80	75.38	74.99
誤差(%)	-----	1.37%	0.50%	1.01%
R=10kΩ	84.01	84.75	84.73	84.35
誤差(%)	-----	0.88%	0.85%	0.40%
R=100kΩ	50.07	50.39	52.12	51.98
誤差(%)	-----	0.63%	4.09%	3.80%
R=500kΩ	79.02	80.60	81.49	81.18
誤差(%)	-----	1.99%	3.12%	2.72%
R=1MΩ	81.12	84.39	83.89	83.52
誤差(%)	-----	4.03%	3.42%	2.96%

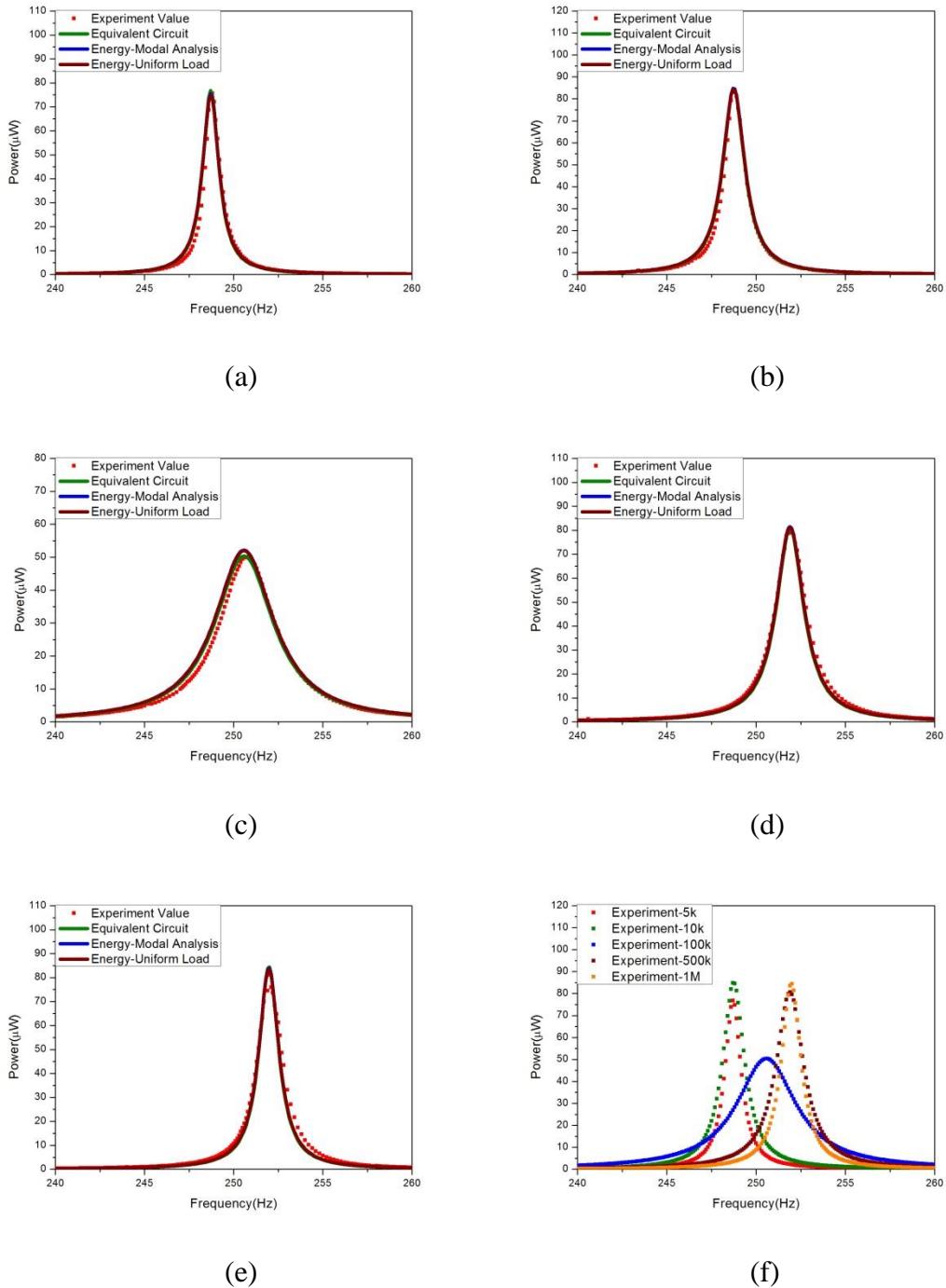


圖 5-9 QA 60-30 功率之頻率響應實驗圖(a=0.1g) (a)R=5kΩ (b) R=10kΩ
 (c) R=100kΩ (d) R=500kΩ (e) R=1MΩ (f) 合併 5 組實驗結果



● QA 60-20 實驗結果

實驗上利用等效電路法、能量法在模態函數與均佈力負載兩種形狀函數下，三方法所得之等效材料參數，如表 5-8 所示。將三組等效材料參數所得之壓電振動懸臂樑輸出功率與實驗相比較其誤差，如表 5-9 所示。三組等效材料參數與實驗的功率之頻率響應圖，如圖 5-10 所示。

表 5-8 QA 60-20 實驗三方法之等效材料參數

	Equivalent Circuit		Energy-Modal Analysis	Energy-Uniform Load
$f_{sc}(Hz)$	211.3	$f_{sc}(Hz)$	211.3	211.3
$f_{oc}(Hz)$	214.1	$f_{oc}(Hz)$	214.1	214.1
k_e	0.16333	k_e	0.16333	0.16333
$R_i(\Omega)$	21244.86	$M(kg)$	0.00122	0.00116
$L_i(H)$	4255.85	$K(N/m)$	2151.06	2056.06
$C_i(nF)$	0.13330	$\Theta(C/m)$	0.000535493	0.000523535
$V_{oc}(V)$	25.2	$M_b(kg)$	0.00195	0.00188
$C_p(nF)$	4.9968	$C_p(nF)$	4.9968	4.9968
ζ_m	0.00188	$\eta_m(N\cdot s/m)$	0.0060	0.0056
k_e^2/ζ_m	14.19053	ζ_m	0.00185	0.00181
		k_e^2/ζ_m	14.40818	14.72924

表 5-9 QA 60-20 實驗與三方法之功率、誤差

$Power_{MAX}(\mu W) at R$	Experiment	Equivalent Circuit	Energy-Modal Analysis	Energy-Uniform Load
R=5kΩ	45.58	46.95	47.42	47.73
誤差(%)	-----	3.02%	4.05%	4.73%
R=20kΩ	74.65	75.77	75.85	75.36
誤差(%)	-----	1.49%	1.60%	0.94%
R=200kΩ	50.16	53.58	53.17	52.16
誤差(%)	-----	6.81%	5.99%	3.97%
R=2MΩ	71.52	71.92	72.21	72.06
誤差(%)	-----	0.55%	0.96%	0.75%
R=6.8MΩ	48.81	49.57	50.05	50.34
誤差(%)	-----	1.56%	2.53%	3.14%

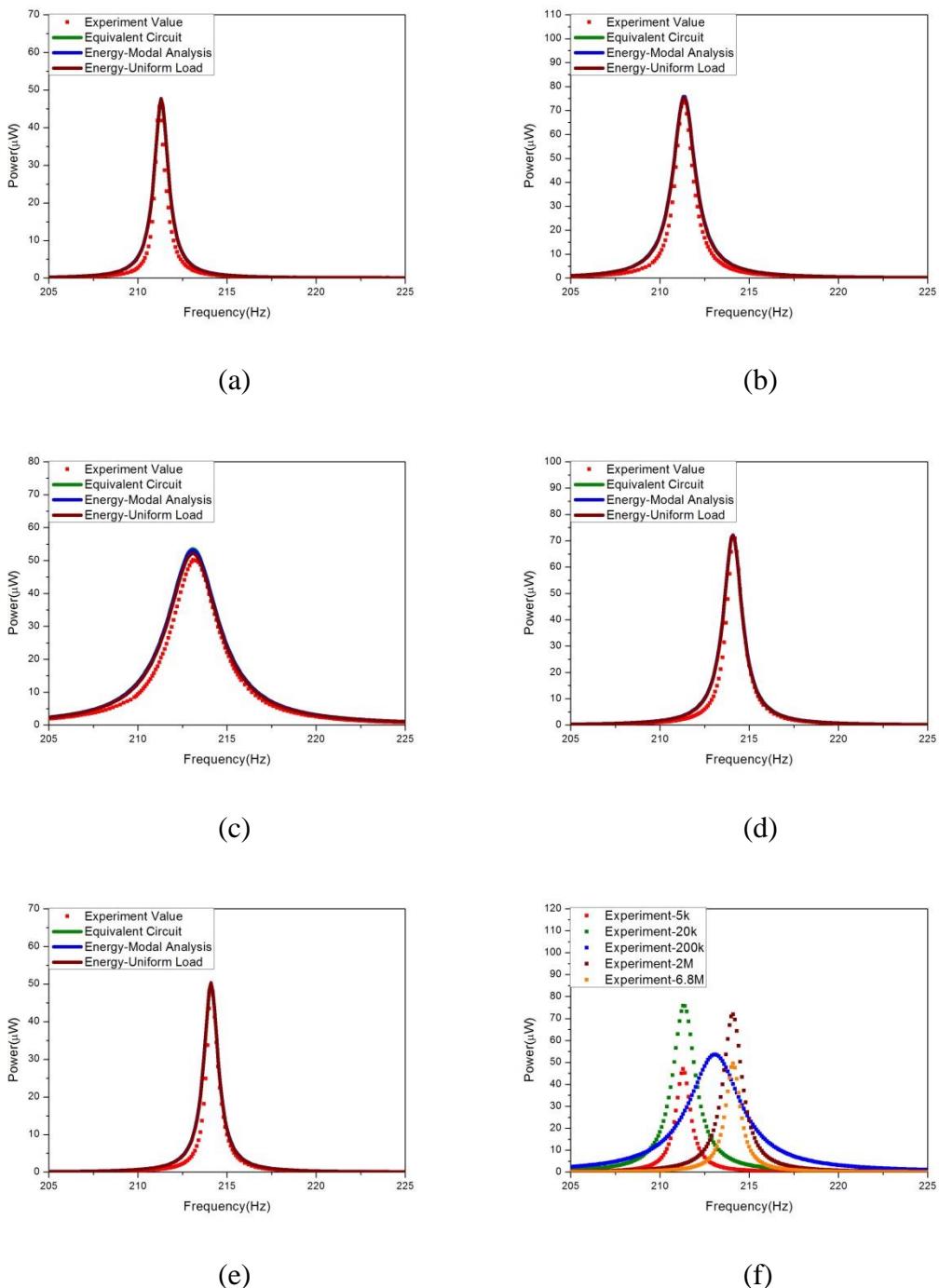


圖 5-10 QA 60-20 功率之頻率響應實驗圖 (a)=0.1g) (a)R=5k Ω (b) R=20k Ω

(c) R=200k Ω (d) R=2M Ω (e) R=6.8M Ω (f) 合併 5 組實驗結果



● QA 實驗結果分析

壓電振動懸臂樑數學模型由能量法得控制方程式，能量法的形狀函數可用模態函數或均佈力負載兩種方法算出，由實驗結果顯示，兩種形狀函數之能量法用於實驗所算出的估計值曲線，估計曲線在最佳阻抗的功率誤差極小，遠離最佳阻抗的電阻下之功率誤差則加大，但無論在何阻抗下，估計值曲線的趨勢皆與實驗曲線吻合。

將壓電振動懸臂樑數學模型比擬成 RLC 電路，將控制方程式改以等效電路模型表示，由實驗結果顯示，等效電路法用於實驗所算出的估計值曲線，估計曲線在最佳阻抗的功率誤差極小，遠離最佳阻抗的電阻下之功率誤差則加大，但無論在何阻抗下，估計值曲線的趨勢皆與實驗曲線吻合。

壓電振子的物理現象圖之 x 軸為壓電層長度除以基板長度，將壓電片的長度項作無因次化，本文簡稱壓電層長度比。選用了四種尺寸模型來做實驗，尺寸模型分別是 60-60、60-40、60-30、60-20，對照的壓電層長度比分別為 1、0.67、0.5、0.33。

力電耦合強度 k_e^2 / ζ_m ，如圖 5-11(a)，實驗結果顯示當壓電層長度比為 1，力電耦合強度約為 11；當壓電層長度比為 0.67，力電耦合強度約為 17；當壓電層長度比為 0.5，力電耦合強度約為 18；當壓電層長度比為 0.33，力電耦合強度約為 14。與圖 4-2(a)相比，相同尺寸模型之強力電耦合振子，力電耦合強度的變化趨勢相同，皆為當壓電層長度比為 0.5，力電耦合強度最強；當壓電層長度比為 0.67，力電耦合強度次之；當壓電層長度比為 0.33，力電耦合強度第三；當壓電層長度比為 1，力電耦合強度最弱。

無因次化力電耦合係數 k_e^2 ，如圖 5-11(b)，實驗結果顯示當壓電層長度比為 1，無因次化力電耦合係數約為 0.02251；當壓電層長度比為 0.67，無因次化力電耦合係數約為 0.02757；當壓電層長度比為 0.5，無因次化力電耦合係數約為 0.02671；當壓電層長度比為 0.33，無因次化力電耦合係數約為 0.02667。與圖 4-2(b)相比，



相同尺寸模型之強力電耦合振子，無因次化力電耦合係數的變化趨勢相近，皆為當壓電層長度比為 0.33，無因次化力電耦合係數第三；當壓電層長度比為 1，無因次化力電耦合係數最小，當壓電層長度比為 0.5，無因次化力電耦合係數略小於當壓電層長度比為 0.67，而理論結果則是兩者數值相近但大小順序相反。

無因次化機械阻尼係數 ζ_m ，如圖 5-11(c)，實驗結果顯示當壓電層長度比為 1，無因次化機械阻尼係數約為 0.002；當壓電層長度比為 0.67，無因次化機械阻尼係數約為 0.0016；當壓電層長度比為 0.5，無因次化機械阻尼係數約為 0.0015；當壓電層長度比為 0.33，無因次化機械阻尼係數約為 0.00185。與圖 4-2(c)相比，相同尺寸模型之強力電耦合振子，無因次化機械阻尼係數的變化趨勢相同，皆為當壓電層長度比為 1，無因次化機械阻尼係數最大；當壓電層長度比為 0.33，無因次化機械阻尼係數次之；當壓電層長度比為 0.67，無因次化機械阻尼係數第三；當壓電層長度比為 0.5，無因次化機械阻尼係數最小。

短路共振頻率 f_{sc} 與開路共振頻率 f_{oc} ，如圖 5-11(d)與圖 5-11(e)，實驗結果顯示當壓電層長度比為 1，短路共振頻率與開路共振頻率為 214.4Hz 與 216.8Hz；當壓電層長度比為 0.67，短路共振頻率與開路共振頻率為 248.3Hz 與 251.7Hz；當壓電層長度比為 0.5，短路共振頻率與開路共振頻率為 248.7Hz 與 252Hz；當壓電層長度比為 0.33，短路共振頻率與開路共振頻率為 211.3Hz 與 214.1Hz。與圖 4-2(d)與圖 4-2(e)相比，相同尺寸模型之強力電耦合振子，短路共振頻率與開路共振頻率的變化趨勢相近，皆為當壓電層長度比為 0.5，短路共振頻率與開路共振頻率最高；當壓電層長度比為 0.67，短路共振頻率與開路共振頻率次之，當壓電層長度比為 0.33，短路共振頻率與開路共振頻率略低於當壓電層長度比為 1，而理論結果則是兩者數值相近但大小順序相反。

系統之等效質量 M ，如圖 5-11(f)，實驗結果顯示當壓電層長度比為 1，系統之等效質量約為 0.00183kg；當壓電層長度比為 0.67，系統之等效質量約為 0.00134kg；當壓電層長度比為 0.5，系統之等效質量約為 0.00123kg；當壓電層長度比為 0.33，系統之等效質量約為 0.00119kg。與圖 4-2(f)相比，相同尺寸模型之強力電耦合振

子，系統之等效質量的變化趨勢相同，皆為當壓電層長度比為 1，系統之等效質量最大；當壓電層長度比為 0.67，系統之等效質量次之；當壓電層長度比為 0.5，系統之等效質量第三；當壓電層長度比為 0.33，系統之等效質量最小。



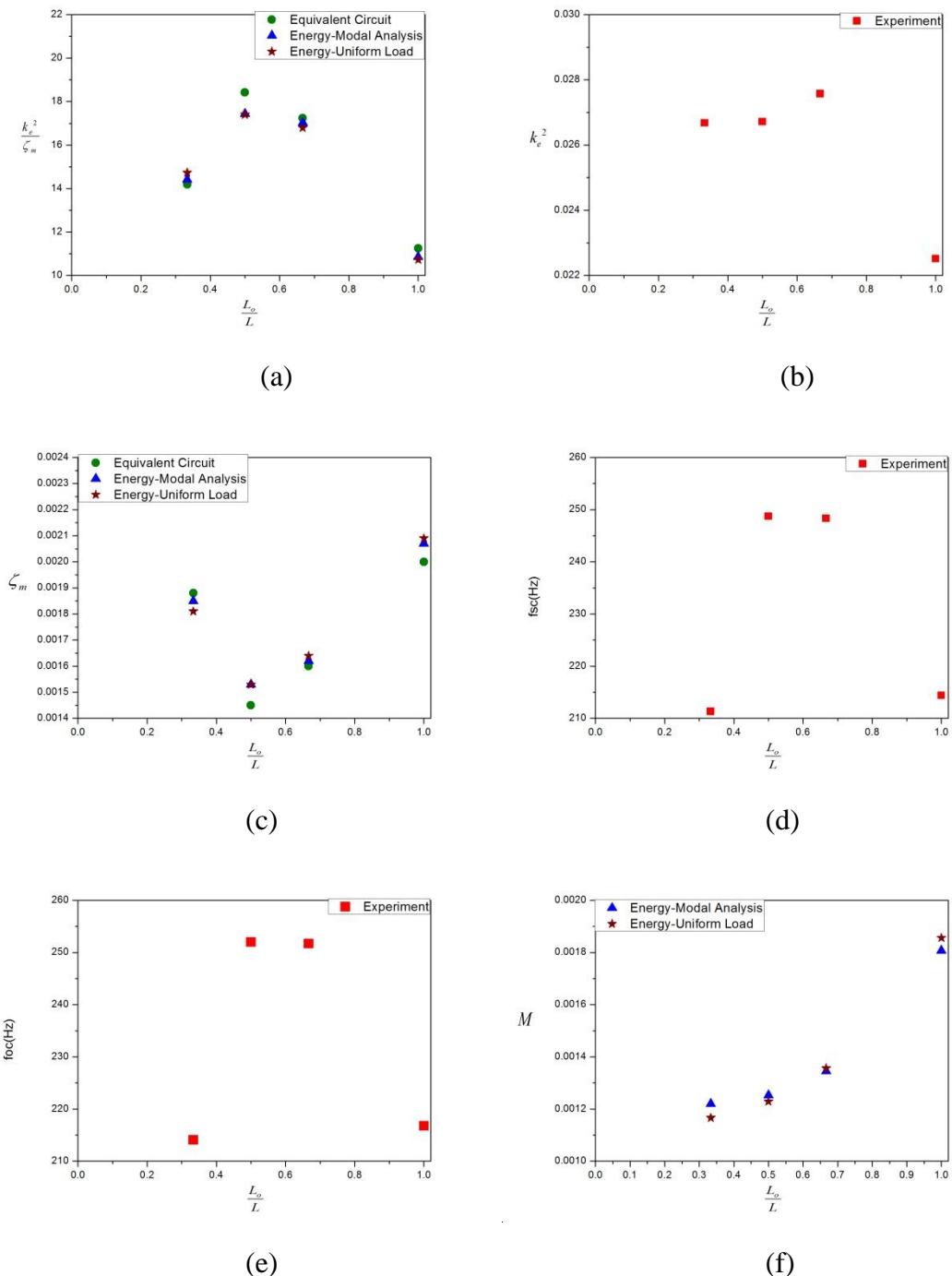
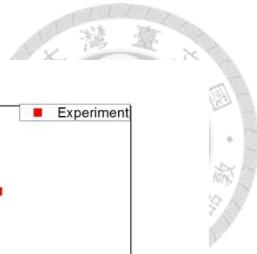


圖 5-11 QA 實驗之材料物理參數($a=0.1g$) (a) 力電耦合係數 k_e^2 / ζ_m

(b) 無因次化力電耦合係數 k_e^2 (c) 無因次化機械阻尼係數 ζ_m

(d) 短路共振頻 f_{sc} (e) 開路共振頻 f_{oc} (f) 系統之等效質量 M

接著探討壓電層長度比對發電功率的影響為何，本實驗室的主要研究為壓電振動能量擷取，因此最在乎的是壓電振動懸臂樑之發電功率。

功率，如圖 5-12(a)，實驗結果顯示當壓電層長度比為 1，功率為 $94.61\mu\text{W}$ ；當壓電層長度比為 0.67，功率約為 $88.74\mu\text{W}$ ；當壓電層長度比為 0.5，功率約為 $84.01\mu\text{W}$ ；當壓電層長度比為 0.33，功率約為 $74.65\mu\text{W}$ 。與圖 4-3(a)相比，相同尺寸模型之強力電耦合振子，功率的變化趨勢相同，皆為當壓電層長度比為 1，功率最大；當壓電層長度比為 0.67，功率次之；當壓電層長度比為 0.5，功率第三；當壓電層長度比為 0.33，功率最小。

固定端等效質量 M_b ，如圖 5-12(b)，實驗結果顯示當壓電層長度比為 1，固定端等效質量為 0.00286kg ；當壓電層長度比為 0.67，固定端等效質量約為 0.00226kg ；當壓電層長度比為 0.5，固定端等效質量約為 0.00204kg ；當壓電層長度比為 0.33，固定端等效質量約為 0.00192kg 。與圖 4-3(b)相比，相同尺寸模型之強力電耦合振子，固定端等效質量的變化趨勢相同，皆為當壓電層長度比為 1，固定端等效質量最大；當壓電層長度比為 0.67，固定端等效質量次之；當壓電層長度比為 0.5，固定端等效質量第三；當壓電層長度比為 0.33，固定端等效質量最小。

功率除以系統之等效質量，如圖 5-12(c)，又稱單位系統之等效質量的發電功率，實驗結果顯示當壓電層長度比為 1，單位系統之等效質量的發電功率為 $51643\mu\text{W/kg}$ ；當壓電層長度比為 0.67，單位系統之等效質量的發電功率約為 $65575\mu\text{W/kg}$ ；當壓電層長度比為 0.5，單位系統之等效質量的發電功率約為 $67992\mu\text{W/kg}$ ；當壓電層長度比為 0.33，單位系統之等效質量的發電功率約為 $63062\mu\text{W/kg}$ 。與圖 4-3(c)相比，相同尺寸模型之強力電耦合振子，單位系統之等效質量的發電功率的變化趨勢相近，皆為當壓電層長度比為 0.33，單位系統之等效質量的發電功率第三；當壓電層長度比為 1，單位系統之等效質量的發電功率最小；當壓電層長度比為 0.67，單位系統之等效質量的發電功率低於當壓電層長度比為 0.5，而理論結果則是兩者大小順序相反。



功率除以總質量，如圖 5-12(d)，又稱單位質量的發電功率，實驗結果顯示當壓電層長度比為 1，單位質量的發電功率約為 $13103\mu\text{W/kg}$ ；當壓電層長度比為 0.67，單位質量的發電功率約為 $13694\mu\text{W/kg}$ ；當壓電層長度比為 0.5，單位質量的發電功率約為 $13882\mu\text{W/kg}$ ；當壓電層長度比為 0.33，單位質量的發電功率約為 $13223\mu\text{W/kg}$ 。與圖 4-3(d)相比，相同尺寸模型之強力電耦合振子，單位質量的發電功率的變化趨勢相反，實驗結果為當壓電層長度比從 1 下降到 0.5，單位質量的發電功率是逐漸遞增，當壓電層長度比從 0.5 下降到 0.33，單位質量的發電功率則減少，當壓電層長度比為 0.5，單位質量的發電功率最大；當壓電層長度比為 0.67，單位質量的發電功率次之；當壓電層長度比為 0.33，單位質量的發電功率第三；當壓電層長度比為 1，單位質量的發電功率最小，而理論結果為當壓電層長度比從 1 下降到 0.33，單位質量的發電功率是逐漸遞減，當壓電層長度比為 1，單位質量的發電功率最大；當壓電層長度比為 0.67，單位質量的發電功率次之；當壓電層長度比為 0.5，單位質量的發電功率第三；當壓電層長度比為 0.33，單位質量的發電功率最小。

壓電片總質量的不同直接聯想到的就是成本，因壓電層的多寡直接影響到成本問題，令人好奇如何能在最省成本的情況下，產生最大的功率，本實驗室的壓電片皆為寰辰科技提供，從壓電片報價單上可知壓電材料相對應的價格。四種尺寸壓電片的價格，如圖 5-12(e)，當壓電層長度比為 1，壓電片價格為 NT\$ 315；當壓電層長度比為 0.67，壓電片價格為 NT\$ 294；當壓電層長度比為 0.5，壓電片價格為 NT\$ 252；當壓電層長度比為 0.33，壓電片價格為 NT\$ 231。

功率除以價格，如圖 5-12(f)，又稱單位成本的發電功率，實驗結果顯示當壓電層長度比為 1，單位成本的發電功率為 $0.30071\mu\text{W/NT}$ ；當壓電層長度比為 0.67，單位成本的發電功率約為 $0.30117\mu\text{W/NT}$ ；當壓電層長度比為 0.5，單位成本的發電功率約為 $0.33516\mu\text{W/NT}$ ；當壓電層長度比為 0.33，單位成本的發電功率約為 $0.32643\mu\text{W/NT}$ 。與圖 4-3(d)相比，相同尺寸模型之強力電耦合振子，單位成本的



發電功率的變化趨勢稍不同，當壓電層長度比從 1 下降到 0.33，單位成本的發電功率皆是先遞增再遞減，實驗結果為當壓電層長度比為 0.5，單位成本的發電功率最大；當壓電層長度比為 0.33，單位成本的發電功率次之；當壓電層長度比為 0.67，單位成本的發電功率第三；當壓電層長度比為 1，單位成本的發電功率最小，而理論結果為當壓電層長度比為 0.67，單位成本的發電功率最大；當壓電層長度比為 1，單位成本的發電功率次之；當壓電層長度比為 0.5，單位成本的發電功率第三；當壓電層長度比為 0.33，單位成本的發電功率最小。

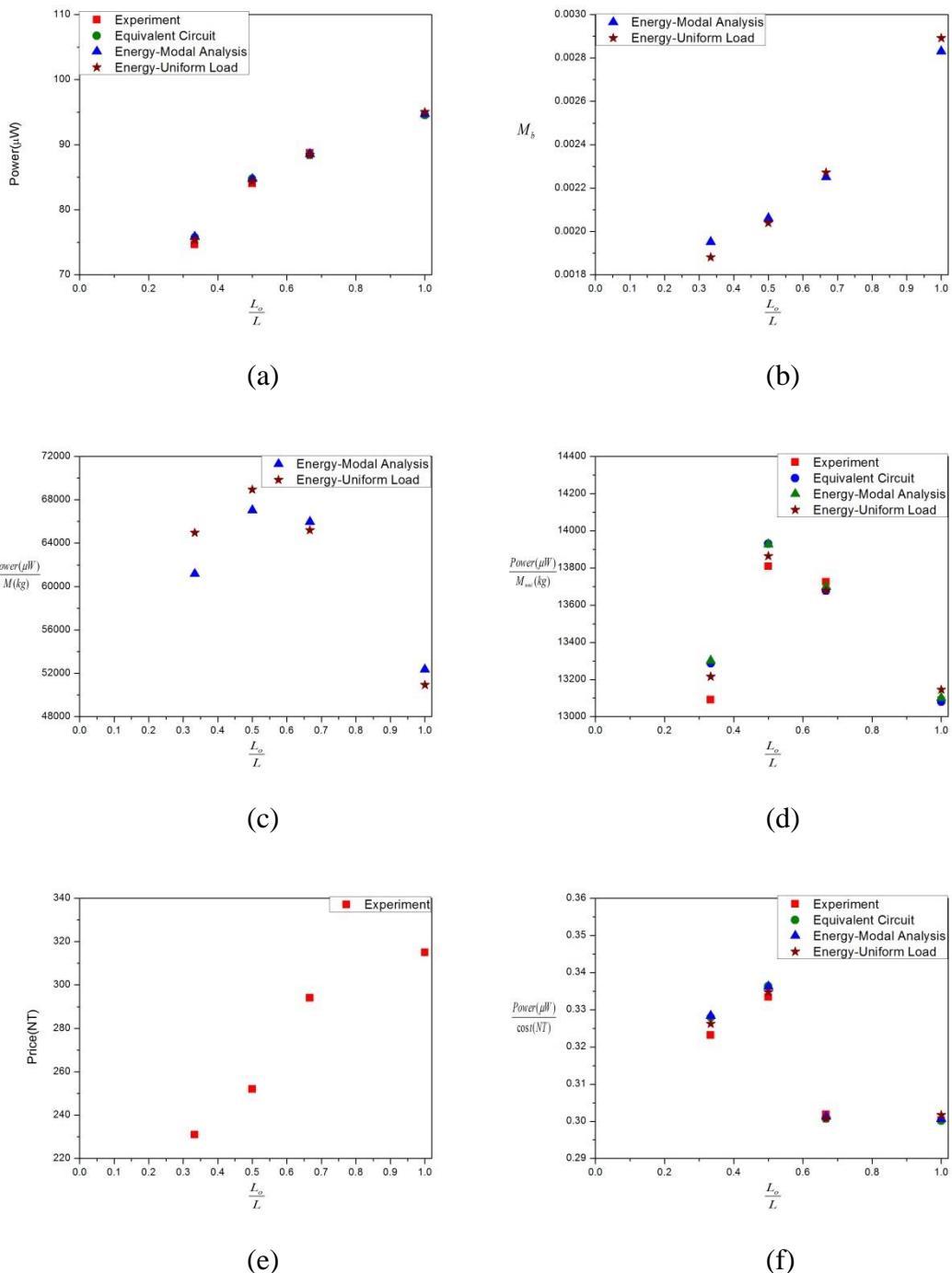
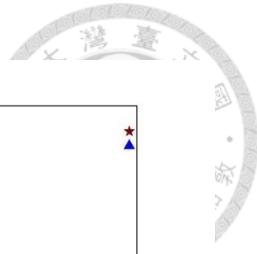


圖 5-12 QA 材料物理參數($a=0.1\text{g}$) (a) 功率 (b) 固定端等效質量

(c) 功率/系統之等效質量(d) 功率/總質量 (e) 價格 (f) 功率/價格



等效機械阻尼係數的 α 值，如表 5-10，實驗結果顯示當壓電層長度比為 1，等效機械阻尼係數的 α 值約為 6.85；當壓電層長度比為 0.67，等效機械阻尼係數的 α 值約為 5.085；當壓電層長度比為 0.5，等效機械阻尼係數的 α 值約為 4.785；當壓電層長度比為 0.33，等效機械阻尼係數的 α 值約為 4.855。由實驗結果發現，在四種尺寸模型下，當壓電材料與基板皆為相同材料， α 值可在相同的次序，取四組平均則趨近 5.39375。

表 5-10 QA 實驗之 α 值運算

求 α	QA 60-60	QA 60-40	QA 60-30	QA 60-20	平均
Energy-modal analysis	6.80	5.05	4.78	4.91	5.385
Energy-uniform load	6.90	5.12	4.79	4.80	5.4025



● KB 60-60 實驗結果

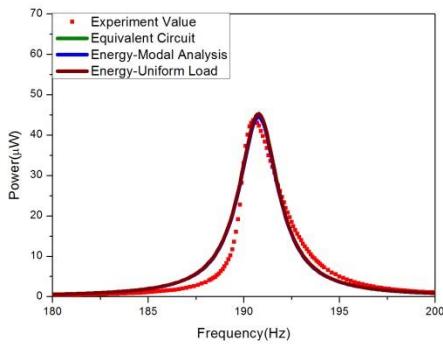
實驗上利用等效電路法、能量法在模態函數與均佈力負載兩種形狀函數下，三方法所得之等效材料參數，如表 5-11 所示。將三組等效材料參數所得之壓電振動懸臂樑輸出功率與實驗相比較其誤差，如表 5-12 所示。三組等效材料參數與實驗的功率之頻率響應圖，如圖 5-12 所示。

表 5-11 KB 60-60 實驗三方法之等效材料參數

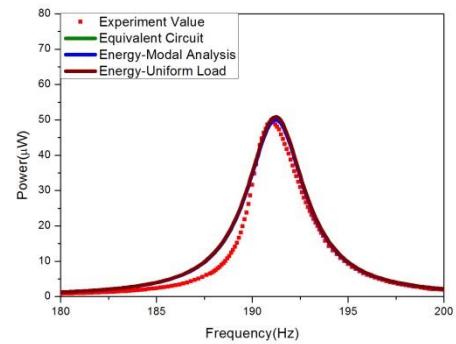
	Equivalent Circuit		Energy-Modal Analysis	Energy-Uniform Load
$f_{sc}(Hz)$	190.7	$f_{sc}(Hz)$	190.7	190.7
$f_{oc}(Hz)$	193.1	$f_{oc}(Hz)$	193.1	193.1
k_e	0.15915	k_e	0.15915	0.15915
$R_l(\Omega)$	19938.22	$M(kg)$	0.0018036	0.00185259
$L_1(H)$	1873.88	$K(N/m)$	2589.41	2659.74
$C_1(nF)$	0.37170	$\Theta(C/m)$	0.000981067	0.000994301
$V_{oc}(V)$	8	$M_b(kg)$	0.00282	0.00288
$C_p(nF)$	14.6751	$C_p(nF)$	14.6751	14.6751
ζ_m	0.00444	$\eta_m(N\cdot s/m)$	0.0190	0.0195
k_e^2/ζ_m	5.70468	ζ_m	0.00439	0.00439
		k_e^2/ζ_m	5.76185	5.76658

表 5-12 KB 60-60 實驗與三方法之功率、誤差

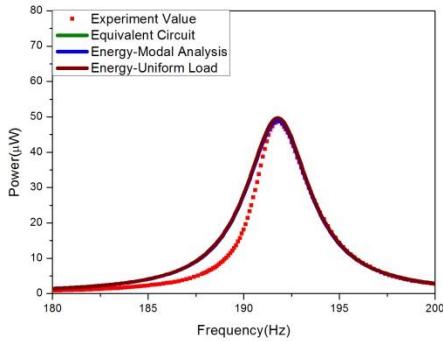
$Power_{MAX}(\mu W) at R$	Experiment	Equivalent Circuit	Energy-Modal Analysis	Energy-Uniform Load
R=10kΩ	43.65	44.49	44.50	45.28
誤差(%)	-----	1.92%	1.94%	3.71%
R=30kΩ	49.95	50.23	50.03	50.88
誤差(%)	-----	0.55%	0.15%	1.86%
R=51kΩ	49.08	49.09	48.85	49.68
誤差(%)	-----	0.024%	0.46%	1.22%
R=100kΩ	49.69	50.08	49.87	50.72
誤差(%)	-----	0.78%	0.36%	2.07%
R=500kΩ	36.86	37.56	37.63	38.29
誤差(%)	-----	1.89%	2.08%	3.87%



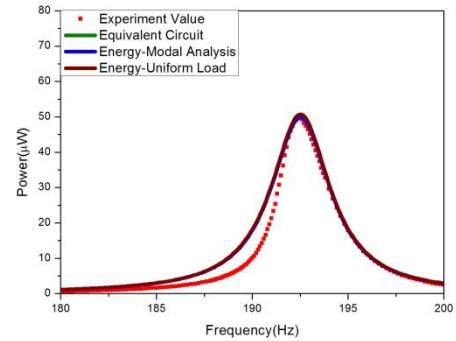
(a)



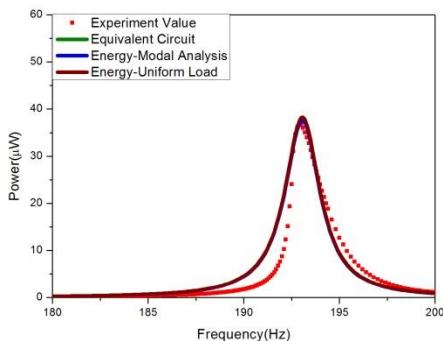
(b)



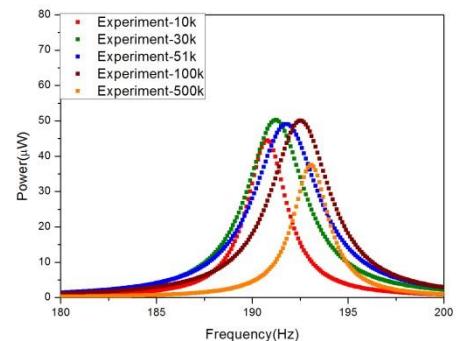
(c)



(d)



(e)



(f)

圖 5-13 KB 60-60 功率之頻率響應實驗圖(a=0.1g) (a) $R=10k\Omega$ (b) $R=30k\Omega$

(c) $R=51k\Omega$ (d) $R=100k\Omega$ (e) $R=500k\Omega$ (f) 合併 5 組實驗結果



● KB 60-40 實驗結果

實驗上利用等效電路法、能量法在模態函數與均佈力負載兩種形狀函數下，三方法所得之等效材料參數，如表 5-13 所示。將三組等效材料參數所得之壓電振動懸臂樑輸出功率與實驗相比較其誤差，如表 5-14 所示。三組等效材料參數與實驗的功率之頻率響應圖，如圖 5-13 所示。

表 5-13 KB 60-40 實驗三方法之等效材料參數

	Equivalent Circuit		Energy-Modal Analysis	Energy-Uniform Load
$f_{sc}(Hz)$	240.2	$f_{sc}(Hz)$	240.2	240.2
$f_{oc}(Hz)$	243.75	$f_{oc}(Hz)$	243.75	243.75
k_e	0.17256	k_e	0.17256	0.17256
$R_i(\Omega)$	13633.26	$M(kg)$	0.00134	0.00135
$L_i(H)$	1368.68	$K(N/m)$	3064.29	3087.99
$C_i(nF)$	0.32076	$\Theta(C/m)$	0.000991427	0.000995255
$V_{oc}(V)$	10.1	$M_b(kg)$	0.00224	0.00226
$C_p(nF)$	10.7723	$C_p(nF)$	10.7723	10.7723
ζ_m	0.00330	$\eta_m(N\cdot s/m)$	0.0129	0.0131
k_e^2/ζ_m	9.02337	ζ_m	0.00307	0.00309
		k_e^2/ζ_m	9.68957	9.61545

表 5-14 KB 60-40 實驗與三方法之功率、誤差

$Power_{MAX}(\mu W) at R$	Experiment	Equivalent Circuit	Energy-Modal Analysis	Energy-Uniform Load
R=5kΩ	35.06	37.02	37.46	37.45
誤差(%)	-----	5.58%	6.86%	6.83%
R=20kΩ	45.28	45.99	45.86	46.06
誤差(%)	-----	1.57%	1.27%	1.72%
R=51kΩ	39.62	40.62	39.81	40.06
誤差(%)	-----	2.52%	0.49%	1.12%
R=200kΩ	46.61	46.67	46.20	46.40
誤差(%)	-----	0.13%	0.87%	0.44%
R=1MΩ	31.72	33.27	33.77	33.74
誤差(%)	-----	4.87%	6.45%	6.36%

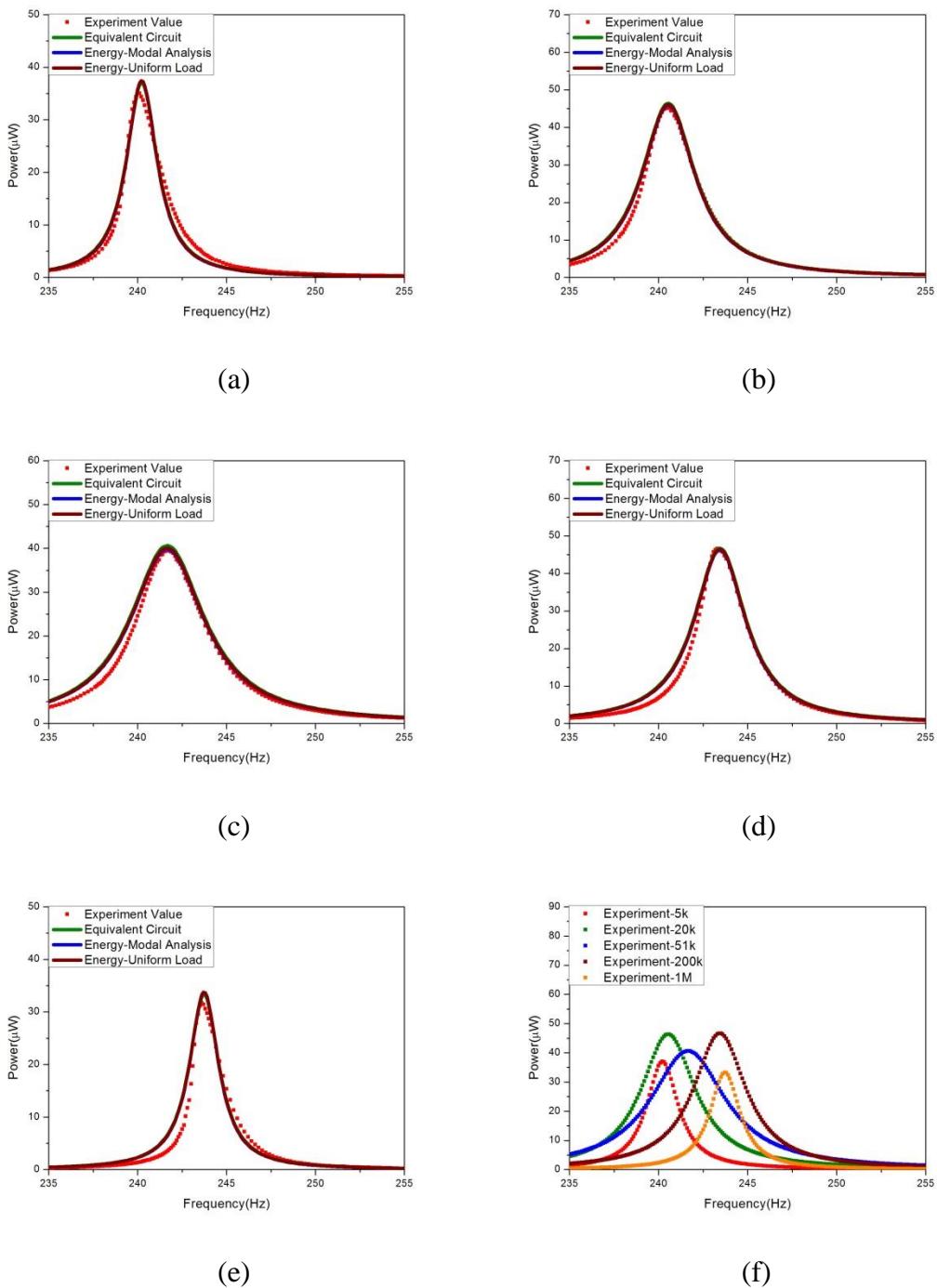


圖 5-14 KB 60-40 功率之頻率響應實驗圖(a=0.1g) (a)R=5kΩ (b) R=20kΩ
 (c) R=51kΩ (d) R=200kΩ (e) R=1MΩ (f) 合併 5 組實驗結果



● KB 60-30 實驗結果

實驗上利用等效電路法、能量法在模態函數與均佈力負載兩種形狀函數下，三方法所得之等效材料參數，如表 5-15 所示。將三組等效材料參數所得之壓電振動懸臂樑輸出功率與實驗相比較其誤差，如表 5-16 所示。三組等效材料參數與實驗的功率之頻率響應圖，如圖 5-14 所示。

表 5-15 KB 60-30 實驗三方法之等效材料參數

	Equivalent Circuit		Energy-Modal Analysis	Energy-Uniform Load
$f_{sc}(Hz)$	220.3	$f_{sc}(Hz)$	220.3	220.3
$f_{oc}(Hz)$	223.6	$f_{oc}(Hz)$	223.6	223.6
k_e	0.17373	k_e	0.17373	0.17373
$R_i(\Omega)$	17273.34	$M(kg)$	0.00125	0.00122
$L_i(H)$	1980.803	$K(N/m)$	2407.65	2354.94
$C_l(nF)$	0.263	$\Theta(C/m)$	0.000796492	0.000787725
$V_{oc}(V)$	11.95	$M_b(kg)$	0.00206461	0.00203865
$C_p(nF)$	8.7297	$C_p(nF)$	8.7297	8.7297
ζ_m	0.00315	$\eta_m(N\cdot s/m)$	0.0110	0.0108
k_e^2/ζ_m	9.58207	ζ_m	0.00316	0.00317
		k_e^2/ζ_m	9.54565	9.50957

表 5-16 KB 60-30 實驗與三方法之功率、誤差

$Power_{MAX}(\mu W) at R$	Experiment	Equivalent Circuit	Energy-Modal Analysis	Energy-Uniform Load
R=5kΩ	30.59	32.21	32.24	31.95
誤差(%)	-----	5.28%	5.38%	4.43%
R=20kΩ	46.08	46.28	46.43	46.11
誤差(%)	-----	0.43%	0.76%	0.07%
R=75kΩ	37.85	38.72	38.90	38.69
誤差(%)	-----	2.30%	2.77%	2.21%
R=200kΩ	42.86	43.39	43.56	43.30
誤差(%)	-----	1.22%	1.63%	1.02%
R=1MΩ	36.67	38.61	38.67	38.34
誤差(%)	-----	5.29%	5.45%	4.56%

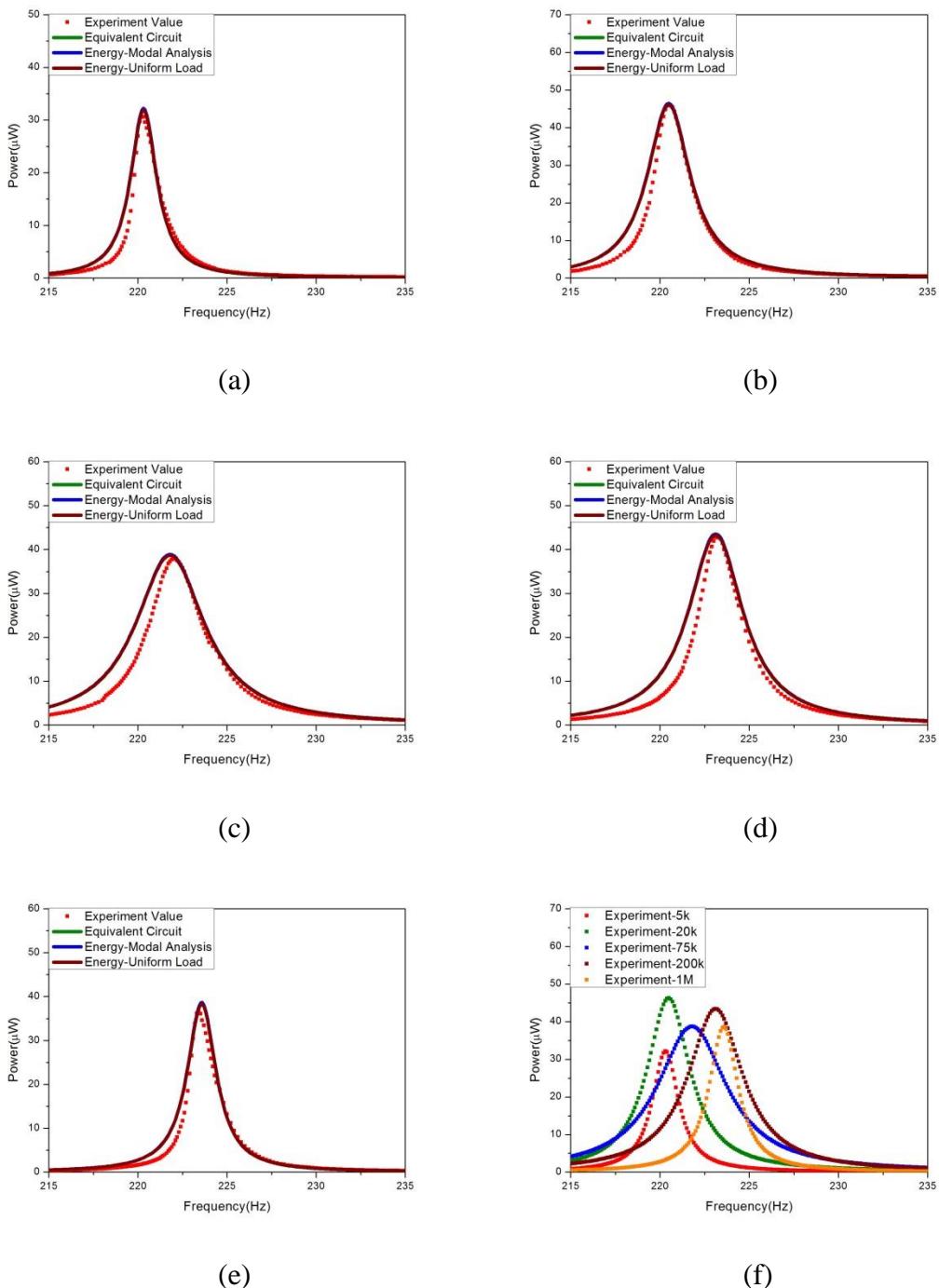


圖 5-15 KB 60-30 功率之頻率響應實驗圖 (a=0.1g) (a) $R=5\text{k}\Omega$ (b) $R=20\text{k}\Omega$

(c) $R=75\text{k}\Omega$ (d) $R=200\text{k}\Omega$ (e) $R=1\text{M}\Omega$ (f) 合併 5 組實驗結果



● KB 60-20 實驗結果

實驗上利用等效電路法、能量法在模態函數與均佈力負載兩種形狀函數下，三方法所得之等效材料參數，如表 5-17 所示。將三組等效材料參數所得之壓電振動懸臂樑輸出功率與實驗相比較其誤差，如表 5-18 所示。三組等效材料參數與實驗的功率之頻率響應圖，如圖 5-15 所示。

表 5-17 KB 60-20 實驗三方法之等效材料參數

	Equivalent Circuit		Energy-Modal Analysis	Energy-Uniform Load
$f_{sc}(Hz)$	196.8	$f_{sc}(Hz)$	196.8	196.8
$f_{oc}(Hz)$	199.8	$f_{oc}(Hz)$	199.8	199.8
k_e	0.17527	k_e	0.17527	0.17527
$R_i(\Omega)$	30584.58	$M(kg)$	0.00122	0.00116
$L_i(H)$	3297.89	$K(N/m)$	1867.92	1783.53
$C_l(nF)$	0.19831	$\Theta(C/m)$	0.000608633	0.000594726
$V_{oc}(V)$	12.5	$M_b(kg)$	0.00195	0.00188
$C_p(nF)$	6.4555	$C_p(nF)$	6.4555	6.4555
ζ_m	0.00375	$\eta_m(N\cdot s/m)$	0.0115	0.0106
k_e^2/ζ_m	8.19204	ζ_m	0.00380	0.00367
		k_e^2/ζ_m	8.07064	8.36032

表 5-18 KB 60-20 實驗與三方法之功率、誤差

$Power_{MAX}(\mu W) at R$	Experiment	Equivalent Circuit	Energy-Modal Analysis	Energy-Uniform Load
$R=10k\Omega$	29.22	29.79	29.28	29.93
誤差(%)	-----	1.95%	0.18%	2.43%
$R=30k\Omega$	39.65	40.19	39.77	40.00
誤差(%)	-----	1.37%	0.31%	0.8%
$R=100k\Omega$	35.86	35.90	35.72	35.45
誤差(%)	-----	0.10%	0.39%	1.12%
$R=500k\Omega$	40.00	40.27	39.87	40.05
誤差(%)	-----	0.68%	0.32%	0.12%
$R=2M\Omega$	26.93	28.44	27.93	28.59
誤差(%)	-----	5.60%	3.72%	6.17%

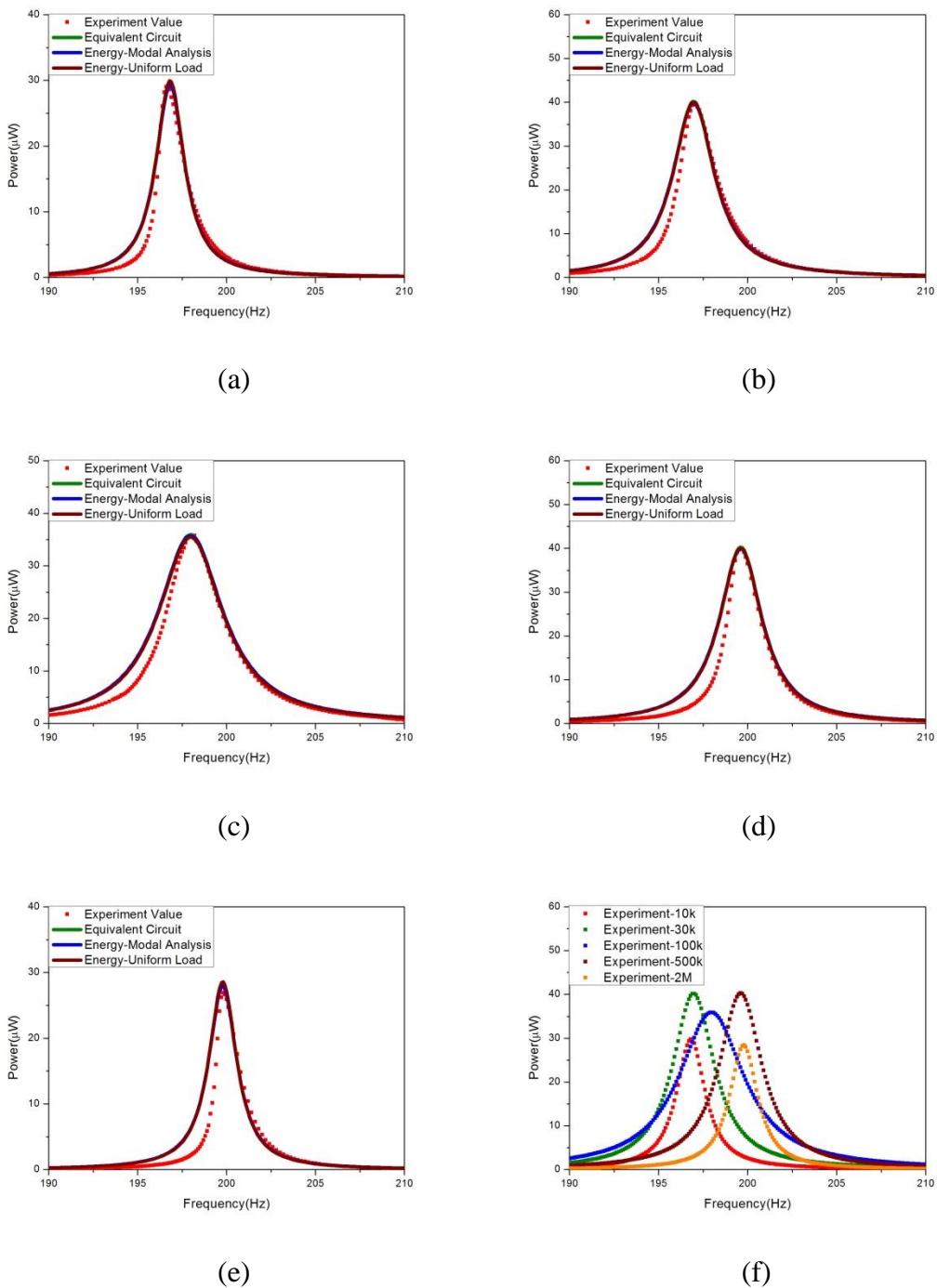


圖 5-16 KB 60-20 功率之頻率響應實驗圖(a=0.1g) (a)R=10kΩ (b) R=30kΩ
 (c) R=100kΩ (d) R=500kΩ (e) R=2MΩ (f) 合併 5 組實驗結果



● KB 實驗結果分析

壓電振動懸臂樑數學模型由能量法得控制方程式，能量法的形狀函數可用模態函數或均佈力負載兩種方法算出，由實驗結果顯示，兩種形狀函數之能量法用於實驗所算出的估計值曲線，估計曲線在最佳阻抗的功率誤差極小，遠離最佳阻抗的電阻下之功率誤差則加大，但無論在何阻抗下，估計值曲線的趨勢皆與實驗曲線吻合。

將壓電振動懸臂樑數學模型比擬成 RLC 電路，將控制方程式改以等效電路模型表示，由實驗結果顯示，等效電路法用於實驗所算出的估計值曲線，估計曲線在最佳阻抗的功率誤差極小，遠離最佳阻抗的電阻下之功率誤差則加大，但無論在何阻抗下，估計值曲線的趨勢皆與實驗曲線吻合。

壓電振子的物理現象圖之 x 軸為壓電層長度除以基板長度，將壓電片的長度項作無因次化，本文簡稱壓電層長度比。選用了四種尺寸模型來做實驗，尺寸模型分別是 60-60、60-40、60-30、60-20，對照的壓電層長度比分別為 1、0.67、0.5、0.33。

力電耦合強度 k_e^2 / ζ_m ，如圖 5-17(a)，實驗結果顯示當壓電層長度比為 1，力電耦合強度約為 5.7；當壓電層長度比為 0.67，力電耦合強度約為 9.3；當壓電層長度比為 0.5，力電耦合強度約為 9.5；當壓電層長度比為 0.33，力電耦合強度約為 8.1。與圖 4-5(a)相比，相同尺寸模型之弱力電耦合振子，力電耦合強度的變化趨勢相同，皆為當壓電層長度比為 0.5，力電耦合強度最強；當壓電層長度比為 0.67，力電耦合強度次之；當壓電層長度比為 0.33，力電耦合強度第三；當壓電層長度比為 1，力電耦合強度最弱。

無因次化力電耦合係數 k_e^2 ，如圖 5-17(b)，實驗結果顯示當壓電層長度比為 1，無因次化力電耦合係數約為 0.02532；當壓電層長度比為 0.67，無因次化力電耦合係數約為 0.02977；當壓電層長度比為 0.5，無因次化力電耦合係數約為 0.03018；當壓電層長度比為 0.33，無因次化力電耦合係數約為 0.03071。與圖 4-5(b)相比，



相同尺寸模型之弱力電耦合振子，無因次化力電耦合係數的變化趨勢稍不同，實驗結果為當壓電層長度比從 1 下降到 0.33，無因次化力電耦合係數逐漸增加，當壓電層長度比為 0.33，無因次化力電耦合係數最大；當壓電層長度比為 0.5，無因次化力電耦合係數次之；當壓電層長度比為 0.67，無因次化力電耦合係數第三；當壓電層長度比為 1，無因次化力電耦合係數最小，而理論結果為當壓電層長度比從 1 下降到 0.33，無因次化力電耦合係數逐漸增加再遞減，當壓電層長度比 0.5，無因次化力電耦合係數最大，當壓電層長度比為 0.5，無因次化力電耦合係數最大；當壓電層長度比為 0.67，無因次化力電耦合係數次之；當壓電層長度比為 0.33，無因次化力電耦合係數第三；當壓電層長度比為 1，無因次化力電耦合係數最小。

無因次化機械阻尼係數 ζ_m ，如圖 5-17(c)，實驗結果顯示當壓電層長度比為 1，無因次化機械阻尼係數約為 0.00441；當壓電層長度比為 0.67，無因次化機械阻尼係數約為 0.00312；當壓電層長度比為 0.5，無因次化機械阻尼係數約為 0.00316；當壓電層長度比為 0.33，無因次化機械阻尼係數約為 0.00377。與圖 4-5(c)相比，相同尺寸模型之弱力電耦合振子，短路共振頻與開路共振頻的變化趨勢相同，皆為當壓電層長度比為 1，無因次化機械阻尼係數最大；當壓電層長度比為 0.33，無因次化機械阻尼係數次之；當壓電層長度比為 0.5，無因次化機械阻尼係數第三；當壓電層長度比為 0.67，無因次化機械阻尼係數最小。

短路共振頻 f_{sc} 與開路共振頻 f_{oc} ，如圖 5-17(d)與圖 5-17(e)，實驗結果顯示當壓電層長度比為 1，短路共振頻與開路共振頻為 190.7Hz 與 193.1Hz；當壓電層長度比為 0.67，短路共振頻與開路共振頻為 240.2Hz 與 243.75Hz；當壓電層長度比為 0.5，短路共振頻與開路共振頻為 220.3Hz 與 223.6Hz；當壓電層長度比為 0.33，短路共振頻與開路共振頻為 196.8Hz 與 199.8Hz。與圖 4-5(d)與圖 4-5(e)相比，相同尺寸模型之弱力電耦合振子，短路共振頻與開路共振頻的變化趨勢相同，皆為當壓電層長度比為 0.67，短路共振頻與開路共振頻最高；當壓電層長度比為 0.5，短路共振頻與開路共振頻次之；皆為當壓電層長度比為 0.33，短路共振頻與開路共



振頻第三；當壓電層長度比為 1，短路共振頻與開路共振頻最低。

系統之等效質量 M ，如圖 5-17(f)，實驗結果顯示當壓電層長度比為 1，系統之等效質量約為 0.00182kg；當壓電層長度比為 0.67，系統之等效質量約為 0.00135kg；當壓電層長度比為 0.5，系統之等效質量約為 0.00124kg；當壓電層長度比為 0.33，系統之等效質量約為 0.00119kg。與圖 4-5(f)相比，相同尺寸模型之弱力電耦合振子，系統之等效質量的變化趨勢相同，皆為當壓電層長度比為 1，系統之等效質量最大；當壓電層長度比為 0.67，系統之等效質量次之；當壓電層長度比為 0.5，系統之等效質量第三；當壓電層長度比為 0.33，系統之等效質量最小。

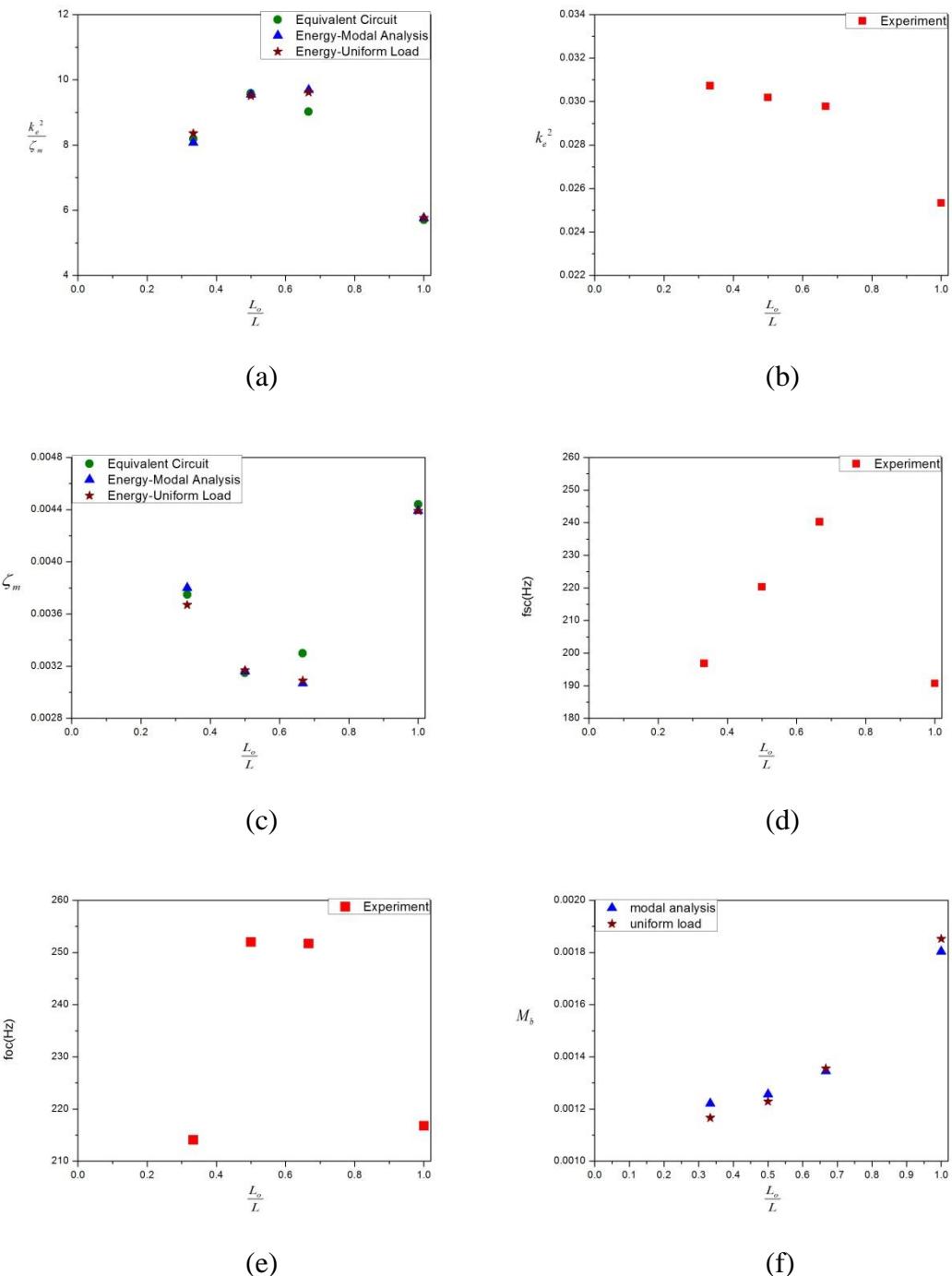
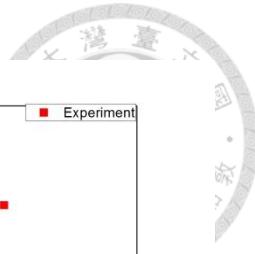


圖 5-17 KB 實驗之材料物理參數($a=0.1\text{g}$) (a) 力電耦合係數 k_e^2 / ζ_m

(b) 無因次化力電耦合係數 k_e^2 (c) 無因次化機械阻尼係數 ζ_m

(d) 短路共振頻 f_{sc} (e) 開路共振頻 f_{oc} (f) 系統之等效質量 M



接著探討壓電層長度比對發電功率的影響為何，本實驗室的主要研究為壓電振動能量擷取，因此最在乎的是壓電振動懸臂樑之發電功率。

功率，如圖 5-18(a)，實驗結果顯示當壓電層長度比為 1，功率為 $49.95\mu\text{W}$ ；當壓電層長度比為 0.67，功率約為 $49.61\mu\text{W}$ ；當壓電層長度比為 0.5，功率約為 $46.08\mu\text{W}$ ；當壓電層長度比為 0.33，功率約為 $40.00\mu\text{W}$ 。與圖 4-6(a)相比，相同尺寸模型之弱力電耦合振子，功率的變化趨勢相同，皆為當壓電層長度比為 1，功率最大；當壓電層長度比為 0.67，功率次之；當壓電層長度比為 0.5，功率第三；當壓電層長度比為 0.33，功率最小。

固定端等效質量 M_b ，如圖 5-18(b)，實驗結果顯示當壓電層長度比為 1，固定端等效質量為 0.00285kg ；當壓電層長度比為 0.67，固定端等效質量約為 0.00225kg ；當壓電層長度比為 0.5，固定端等效質量約為 0.0020kg ；當壓電層長度比為 0.33，固定端等效質量約為 0.0019kg 。與圖 4-6(b)相比，相同尺寸模型之弱力電耦合振子，固定端等效質量的變化趨勢相同，皆為當壓電層長度比為 1，固定端等效質量最大；當壓電層長度比為 0.67，固定端等效質量次之；當壓電層長度比為 0.5，固定端等效質量第三；當壓電層長度比為 0.33，固定端等效質量最小。

功率除以系統之等效質量，如圖 5-18(c)，又稱單位系統之等效質量的發電功率，實驗結果顯示當壓電層長度比為 1，單位系統之等效質量的發電功率為 $27404\mu\text{W/kg}$ ；當壓電層長度比為 0.67，單位系統之等效質量的發電功率約為 $34535\mu\text{W/kg}$ ；當壓電層長度比為 0.5，單位系統之等效質量的發電功率約為 $37161\mu\text{W/kg}$ ；當壓電層長度比為 0.33，單位系統之等效質量的發電功率約為 $33632\mu\text{W/kg}$ 。與圖 4-6(c)相比，相同尺寸模型之弱力電耦合振子，單位系統之等效質量的發電功率的變化趨勢相近，皆為當壓電層長度比為 0.33，單位系統之等效質量的發電功率第三；當壓電層長度比為 1，單位系統之等效質量的發電功率最小；當壓電層長度比為 0.67，單位系統之等效質量的發電功率低於當壓電層長度比為 0.5，而理論結果則是兩者大小順序相反。



功率除以總質量，如圖 5-18(d)，又稱單位質量的發電功率，實驗結果顯示當壓電層長度比為 1，單位質量的發電功率約為 $6968\mu\text{W/kg}$ ；當壓電層長度比為 0.67，單位質量的發電功率約為 $7197\mu\text{W/kg}$ ；當壓電層長度比為 0.5，單位質量的發電功率約為 $7606\mu\text{W/kg}$ ；當壓電層長度比為 0.33，單位質量的發電功率約為 $7028\mu\text{W/kg}$ 。與圖 4-6(d)相比，相同尺寸模型之弱力電耦合振子，單位質量的發電功率的變化趨勢相反，實驗結果為當壓電層長度比從 1 下降到 0.5，單位質量的發電功率是逐漸遞增，當壓電層長度比從 0.5 下降到 0.33，單位質量的發電功率則減少，當壓電層長度比為 0.5，單位質量的發電功率最大；當壓電層長度比為 0.67，單位質量的發電功率次之；當壓電層長度比為 0.33，單位質量的發電功率第三；當壓電層長度比為 1，單位質量的發電功率最小，而理論結果為當壓電層長度比從 1 下降到 0.33，單位質量的發電功率是逐漸遞減，當壓電層長度比為 1，單位質量的發電功率最大；當壓電層長度比為 0.67，單位質量的發電功率次之；當壓電層長度比為 0.5，單位質量的發電功率第三；當壓電層長度比為 0.33，單位質量的發電功率最小。

壓電片總質量的不同直接聯想到的就是成本，因壓電層的多寡直接影響到成本問題，令人好奇如何能在最省成本的情況下，產生最大的功率，本實驗室的壓電片皆為寰辰科技提供，從壓電片報價單上可知壓電材料相對應的價格。四種尺寸壓電片的價格，如圖 5-18(e)，當壓電層長度比為 1，壓電片價格為 NT\$ 315；當壓電層長度比為 0.67，壓電片價格為 NT\$ 294；當壓電層長度比為 0.5，壓電片價格為 NT\$ 252；當壓電層長度比為 0.33，壓電片價格為 NT\$ 231，與圖 5-12(e)相比，壓電片的價格相同，壓電片的價格與壓電材料為強力電耦合或弱力電耦合無關。

功率除以價格，如圖 5-18(f)，又稱單位成本的發電功率，實驗結果顯示當壓電層長度比為 1，單位成本的發電功率為 $0.15959\mu\text{W/NT}$ ；當壓電層長度比為 0.67，單位成本的發電功率約為 $0.15806\mu\text{W/NT}$ ；當壓電層長度比為 0.5，單位成本的發電功率約為 $0.1834\mu\text{W/NT}$ ；當壓電層長度比為 0.33，單位成本的發電功率約為



0.17336 μ W/NT。與圖 4-6(d)相比，相同尺寸模型之弱力電耦合振子，單位成本的發電功率的變化趨勢不同，實驗結果為當壓電層長度比為 0.5，單位成本的發電功率最大；當壓電層長度比為 0.33，單位成本的發電功率次之；當壓電層長度比為 1，單位成本的發電功率第三；當壓電層長度比為 0.67，單位成本的發電功率最小，而理論結果為當壓電層長度比 1 下降到 0.33，單位成本的發電功率逐漸下降，即當壓電層長度比為 1，單位成本的發電功率最大；當壓電層長度比為 0.67，單位成本的發電功率次之；當壓電層長度比為 0.5，單位成本的發電功率第三；當壓電層長度比為 0.33，單位成本的發電功率最小。

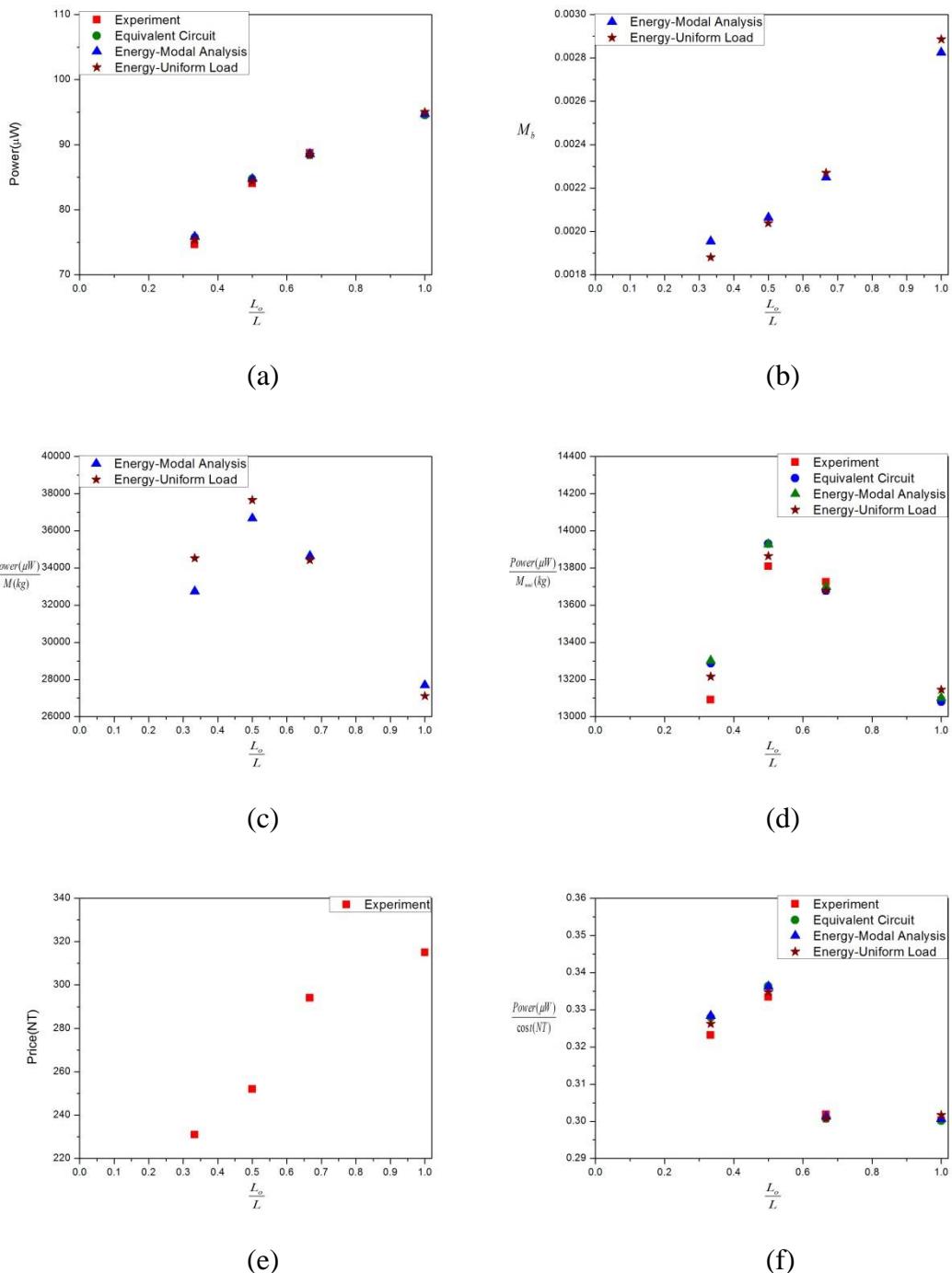
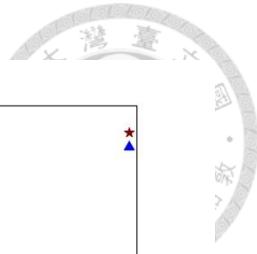


圖 5-18 KB 材料物理參數($a=0.1\text{g}$) (a) 功率 (b) 固定端等效質量

(c) 功率/系統之等效質量(d) 功率/總質量 (e) 價格 (f) 功率/價格



等效機械阻尼係數的 α 值，如表 5-19，實驗結果顯示當壓電層長度比為 1，等效機械阻尼係數的 α 值約為 10.525；當壓電層長度比為 0.67，等效機械阻尼係數的 α 值約為 9.62；當壓電層長度比為 0.5，等效機械阻尼係數的 α 值約為 7.715；當壓電層長度比為 0.33，等效機械阻尼係數的 α 值約為 9.245。由實驗結果發現，在四種尺寸模型下，當壓電材料與基板皆為相同材料， α 值可在相同的次序，取四組平均則趨近 9.27625。

表 5-19 KB 實驗之 α 值運算

求 α	KB 60-60	KB 60-40	KB 60-30	KB 60-20	平均
Energy-modal analysis	10.53	9.58	7.71	9.41	9.3075
Energy-uniform load	10.52	9.66	7.72	9.08	9.245



● QA.KB 實驗結果比較

壓電振動懸臂樑數學模型由能量法得控制方程式，能量法的形狀函數可用模態函數或均佈力負載兩種方法算出，由實驗結果顯示強力電耦合振子與弱力電耦合振子在使用能量法量測的估計值趨勢相同，兩種形狀函數之能量法用於實驗所算出的估計值曲線，估計曲線在最佳阻抗下的功率誤差極小，在遠離最佳阻抗的電阻下的功率誤差則加大，但無論在何阻抗下，估計值曲線的趨勢皆與實驗曲線吻合。模態函數之能量法的好處是曲線形狀較精準但計算繁雜，均佈力負載之能量法的好處是運算快速。

將壓電振動懸臂樑數學模型比擬成 RLC 電路，將控制方程式改以等效電路模型表示，由實驗結果顯示強力電耦合振子與弱力電耦合振子在使用等效電路法量測的估計值趨勢相同，等效電路法用於實驗所算出的估計值曲線，估計曲線在最佳阻抗的功率誤差極小，遠離最佳阻抗的電阻下之功率誤差則加大，但無論在何阻抗下，估計值曲線的趨勢皆與實驗曲線吻合，好處是等效電路法用於實驗可在材料尺寸與材料參數。等效電路法相比能量法的好處是無須材料形狀、材料參數即可用於實驗，且曲線形狀精準。

力電耦合係數 k_e^2 / ζ_m ，如圖 5-11(a)與 5-17(a)，實驗結果顯示強力電耦合振子與弱力電耦合振子的力電耦合係數變化趨勢相同，皆為當壓電層長度比為 0.5，力電耦合強度最強；當壓電層長度比為 0.67，力電耦合強度次之；當壓電層長度比為 0.33，力電耦合強度第三；當壓電層長度比為 1，力電耦合強度最弱。數值部分，力電耦合強度在相同尺寸模型下，強力電耦合振子約為弱力電耦合振子的兩倍，所以力電耦合強度最強與最弱的差值，強力電耦合振子約為弱力電耦合振子的兩倍。

無因次化力電耦合係數 k_e^2 ，如圖 5-11(b)與圖 5-17(b)，實驗結果顯示強力電耦合振子與弱力電耦合振子的無因次化力電耦合係數變化趨勢相異，強力電耦合振子為當壓電層長度比為 0.67，無因次化力電耦合係數最強；當壓電層長度比為 0.5，



無因次化力電耦合係數次之；當壓電層長度比為 0.33，無因次化力電耦合係數第三；當壓電層長度比為 1，無因次化力電耦合係數最弱，弱力電耦合振子為當壓電層長度比為 0.33，無因次化力電耦合係數最大；當壓電層長度比為 0.5，無因次化力電耦合係數次之；當壓電層長度比為 0.67，無因次化力電耦合係數第三；當壓電層長度比為 1，無因次化力電耦合係數最小。數值部分，無因次化力電耦合係數在相同尺寸模型下，強力電耦合振子約為弱力電耦合振子的 0.9 倍。

無因次化機械阻尼係數 ζ_m ，如圖 5-11(c)與圖 5-17(c)，實驗結果顯示強力電耦合振子與弱力電耦合振子的無因次化機械阻尼係數變化趨勢相近，皆為當壓電層長度比從 1 下降到 0.33，無因次化機械阻尼係數先遞減再遞增，不同點是強力電耦合振子當壓電層長度比為 0.5，無因次化機械阻尼係數最小，弱力電耦合振子當壓電層長度比為 0.67，無因次化機械阻尼係數最小。數值部分，無因次化機械阻尼係數在相同尺寸模型下，強力電耦合振子約為弱力電耦合振子的 0.48 倍。

短路共振頻 f_{sc} 與開路共振頻 f_{oc} ，如圖 5-11(d)、圖 5-11(e)、圖 5-17(d)、圖 5-17(e)，實驗結果顯示強力電耦合振子與弱力電耦合振子的短路共振頻與開路共振頻變化趨勢相近，皆為當壓電層長度比從 1 下降到 0.33，短路共振頻與開路共振頻先遞增再遞減，不同點是強力電耦合振子當壓電層長度比為 0.5，短路共振頻與開路共振頻最高，弱力電耦合振子當壓電層長度比為 0.67，短路共振頻與開路共振頻最高。數值部分，短路共振頻與開路共振頻在相同尺寸模型下，強力電耦合振子約為弱力電耦合振子的 1.05 倍。

系統之等效質量 M ，如圖 5-11(f)與圖 5-17(f)，實驗結果顯示強力電耦合振子與弱力電耦合振子的系統之等效質量變化趨勢相近，皆為當壓電層長度比從 1 下降到 0.33，系統之等效質量逐漸遞減，皆為當壓電層長度比為 1，系統之等效質量最大；當壓電層長度比為 0.67，系統之等效質量次之；當壓電層長度比為 0.5，系統之等效質量第三；當壓電層長度比為 0.33，系統之等效質量最小。數值部分，系統之等效質量在相同尺寸模型下，強力電耦合振子約相等於弱力電耦合振子。



功率，如圖 5-12(a)與圖 5-18(a)，實驗結果顯示強力電耦合振子與弱力電耦合振子的功率變化趨勢相同，皆為當壓電層長度比從 1 下降到 0.33，功率逐漸遞減，皆為當壓電層長度比為 1，功率最大；當壓電層長度比為 0.67，功率次之；當壓電層長度比為 0.5，功率第三；當壓電層長度比為 0.33，功率最小。數值部分，功率在相同尺寸模型下，強力電耦合振子約為弱力電耦合振子的 1.84 倍，所以功率最大與最小的差值，強力電耦合振子約為弱力電耦合振子的 1.84 倍。

固定端等效質量 M_b ，如圖 5-12(b)與圖 5-18(b)，實驗結果顯示強力電耦合振子與弱力電耦合振子的固定端等效質量變化趨勢相同，皆為當壓電層長度比從 1 下降到 0.33，固定端等效質量逐漸遞減，皆為當壓電層長度比為 1，固定端等效質量最大；當壓電層長度比為 0.67，固定端等效質量次之；當壓電層長度比為 0.5，固定端等效質量第三；當壓電層長度比為 0.33，固定端等效質量最小。數值部分，固定端等效質量在相同尺寸模型下，強力電耦合振子約相等於弱力電耦合振子。

功率除以系統之等效質量，如圖 5-12(c)與圖 5-18(c)，又稱單位系統之等效質量的發電功率，實驗結果顯示強力電耦合振子與弱力電耦合振子的單位系統之等效質量的發電功率變化趨勢相近，皆為當壓電層長度比從 1 下降到 0.33，單位系統之等效質量的發電功率先遞增再遞減，不同點是強力電耦合振子當壓電層長度比為 0.5，單位系統之等效質量的發電功率最大，弱力電耦合振子當壓電層長度比為 0.67，單位系統之等效質量的發電功率最大。數值部分，單位系統之等效質量的發電功率在相同尺寸模型下，強力電耦合振子約為弱力電耦合振子的 1.87 倍。

功率除以總質量，如圖 5-12(d)與圖 5-18(d)，又稱單位質量的發電功率，實驗結果顯示強力電耦合振子與弱力電耦合振子的單位質量的發電功率變化趨勢相同，皆為當壓電層長度比為 0.5，單位質量的發電功率最大；當壓電層長度比為 0.67，單位質量的發電功率次之；當壓電層長度比為 0.33，單位質量的發電功率第三；當壓電層長度比為 1，單位質量的發電功率最小。數值部分，單位質量的發電功率在相同尺寸模型下，強力電耦合振子約為弱力電耦合振子的 1.87 倍。



壓電片的價格，如圖 5-12(e)與圖 5-18(e)，與壓電層的多寡有關，與壓電材料為強力電耦合或弱力電耦合無關，所以強力電耦合振子與弱力電耦合振子的價格相同，皆為當壓電層長度比為 1，壓電片價格為 315；當壓電層長度比為 0.67，壓電片價格為 294；當壓電層長度比為 0.5，壓電片價格為 252；當壓電層長度比為 0.33，壓電片價格為 231。

功率除以價格，如圖 5-12(f)與圖 5-18(f)，又稱單位成本的發電功率，實驗結果顯示強力電耦合振子與弱力電耦合振子的單位成本的發電功率變化趨勢相近，皆可看出為當壓電層長度比從 1 下降到 0.33，單位成本的發電功率為先增加再遞減，實驗結果為強力電耦合振子為當壓電層長度比為 0.5，單位成本的發電功率最強；當壓電層長度比為 0.33，單位成本的發電功率次之；當壓電層長度比為 0.67，單位成本的發電功率第三；當壓電層長度比為 1，單位成本的發電功率最弱，弱力電耦合振子為當壓電層長度比為 0.5，單位成本的發電功率最大；當壓電層長度比為 0.33，單位成本的發電功率次之；當壓電層長度比為 1，單位成本的發電功率第三；當壓電層長度比為 0.67，單位成本的發電功率最小。數值部分，單位成本的發電功率在相同尺寸模型下，強力電耦合振子約為弱力電耦合振子的 1.87 倍。

等效機械阻尼係數的 α ，如表 5-10、表 5-19，實驗結果顯示強力電耦合振子與弱力電耦合振子的等效機械阻尼係數的 α 皆在同次序且趨近於一定值。數值部分，等效機械阻尼係數的 α 在相同尺寸模型下，強力電耦合振子約為弱力電耦合振子的 0.57 倍。

Chapter 6. 結論與展望



6-1 結論

本論文旨在設計與探討不同力電耦合強度之壓電振子應用於能量擷取，並提供三種方法可用於實驗量測壓電振子之等效材料參數。壓電振動懸臂樑數學模型以能量法為基礎，採用模態函數或均佈力負載兩種形狀函數來簡化壓電振子設計，亦可引入等效電路模型，將壓電振動懸臂樑數學模型比擬成 RLC 電路，並採用雷利阻尼的概念來定義振子的等效機械阻尼係數，最後定義壓電振子之力電耦合強度為無因次化力電耦合係數除以無因次化機械阻尼係數，即可掌握整體壓電振子之能量擷取的物理行為。

1. 能量法用於實驗結果分析

壓電振動懸臂樑數學模型由能量法得控制方程式，能量法的形狀函數可用模態函數或均佈力負載兩種方法算出，由實驗結果顯示，兩種形狀函數之能量法用於實驗所算出的估計值曲線，估計曲線在最佳阻抗的功率誤差極小，遠離最佳阻抗的電阻下之功率誤差則加大，但無論在何阻抗下，估計值曲線的趨勢皆與實驗曲線吻合。模態函數之能量法的好處是曲線形狀較精準但計算繁雜，均佈力負載之能量法的好處是運算快速。

2. 等效電路法用於實驗結果分析

將壓電振動懸臂樑數學模型比擬成 RLC 電路，將控制方程式改以等效電路模型表示，由實驗結果顯示，等效電路法用於實驗所算出的估計值曲線，估計曲線在最佳阻抗的功率誤差極小，遠離最佳阻抗的電阻下之功率誤差則加大，但無論在何阻抗下，估計值曲線的趨勢皆與實驗曲線吻合，好處是等效電路法用於實驗可在材料尺寸與材料參數。等效電路法相比能量法的好處是無需材料形狀、材料參數即可用於實驗，且曲線形狀精準。



3. 強力電耦合振子與弱力電耦合的理論結果趨勢分析

由 5-3 節的實驗結果與 4-2 節的理論結果相比，顯示強力電耦合振子與弱力電耦合振子的實驗結果與理論結果相符，因此結論由理論結果來作壓電振子之物理量整體變化趨勢的敘述與分析。

- (a) 力電耦合強度 k_e^2 / ζ_m ，如圖 4-2(a)與 4-5(a)，理論結果顯示強力電耦合振子與弱力電耦合振子的力電耦合係數變化趨勢相同，當壓電層長度比從 1 下降到 0，力電耦合強度先增強再減弱，皆為當壓電層長度比約為 0.5 時，力電耦合強度最強。
- (b) 無因次化力電耦合係數 k_e^2 ，如圖 4-2(b)與圖 4-5(b)，理論結果顯示強力電耦合振子與弱力電耦合振子的無因次化力電耦合係數變化趨勢相同，當壓電層長度比從 1 下降到 0，無因次化力電耦合係數先漸增再遞減，皆為當壓電層長度比約為 0.5 時，無因次化力電耦合係數最大。
- (c) 無因次化機械阻尼係數 ζ_m ，如圖 4-2(c)與圖 4-5(c)，理論結果顯示強力電耦合振子與弱力電耦合振子的無因次化機械阻尼係數變化趨勢相同，皆為當壓電層長度比從 1 下降到 0，無因次化機械阻尼係數先遞減再漸增，皆為當壓電層長度比約為 0.6 時，無因次化機械阻尼係數最小。
- (d) 短路共振頻 f_{sc} 與開路共振頻 f_{oc} ，如圖 4-2(d)、圖 4-2(e)、圖 4-5(d)、圖 4-5(e)，理論結果顯示強力電耦合振子與弱力電耦合振子的短路共振頻與開路共振頻變化趨勢相同，皆為當壓電層長度比從 1 下降到 0，短路共振頻與開路共振頻先漸增再遞減，皆為當壓電層長度比約為 0.55 時，短路共振頻與開路共振頻最高。
- (e) 功率，如圖 4-3(a)與圖 4-6(a)，理論結果顯示強力電耦合振子與弱力電耦合振子的功率變化趨勢相同，皆為當壓電層長度比從 1 下降到 0，功率先遞減再漸增，皆為當壓電層長度比約為 0.2 時，功率最小。
- (f) 功率除以系統之等效質量，如圖 4-3(c)與圖 4-6(c)，又稱單位系統之等效質量的發電功率，理論結果顯示強力電耦合振子與弱力電耦合振子的單位系統之等效質量的發電功率變化趨勢相同，皆為當壓電層長度比從 1 下降到 0，單位系統之等效



質量的發電功率先漸增再遞減，皆為當壓電層長度比約為 0.65 時，單位系統之等效質量的發電功率最大。

(g) 功率除以總質量，如圖 4-3(d)與圖 4-6(d)，又稱單位質量的發電功率，理論結果顯示強力電耦合振子與弱力電耦合振子的單位質量的發電功率變化趨勢相同，皆為當壓電層長度比從 1 下降到 0，單位質量的發電功率先遞減再漸增，皆為當壓電層長度比約為 0.3 時，單位質量的發電功率最小。

(h) 壓電片的價格，如圖 5-12(e)與圖 5-18(e)，與壓電層的多寡有關，與壓電材料為強力電耦合或弱力電耦合無關，所以強力電耦合振子與弱力電耦合振子的價格相同，當壓電層長度比越大，壓電片的價格越高。

(i) 功率除以價格，如圖 4-3(f)與圖 4-6(f)，又稱單位成本的發電功率，理論結果顯示強力電耦合振子與弱力電耦合振子的單位成本的發電功率變化趨勢相同，皆為當壓電層長度比從 1 下降到 0，單位成本的發電功率先略升再略減，最後逐漸增加，皆為當壓電層長度比約為 0.8 時，單位質量的發電功率有相對最大值，當壓電層長度比約為 0.4 時，單位質量的發電功率最小。

(j) 等效機械阻尼係數的 α 值，如表 5-10、表 5-19，實驗結果顯示強力電耦合振子與弱力電耦合振子的等效機械阻尼係數的 α 值皆在同次序且趨近於一定值，且強力電耦合振子的 α 值小於弱力電耦合振子的 α 值。



6-2 未來展望

本論文的壓電懸臂樑數學模型為雙壓電層且未貼滿之能量法，由 5-3 節的實驗結果顯示力電耦合強度最弱約可到 5 左右，但本研究團隊期望能設計出力電耦合強度小於 1 的振子，未來可考慮壓電懸臂樑數學模型為單壓電層且未貼滿之能量法，如圖 6-1，但其能量法理論的困難點在於形狀函數採用模態函數法來計算時不易解，因為壓電懸臂樑的斷面不對稱，如此原因可先採用較易解得的均佈力負載法來得到形狀函數。

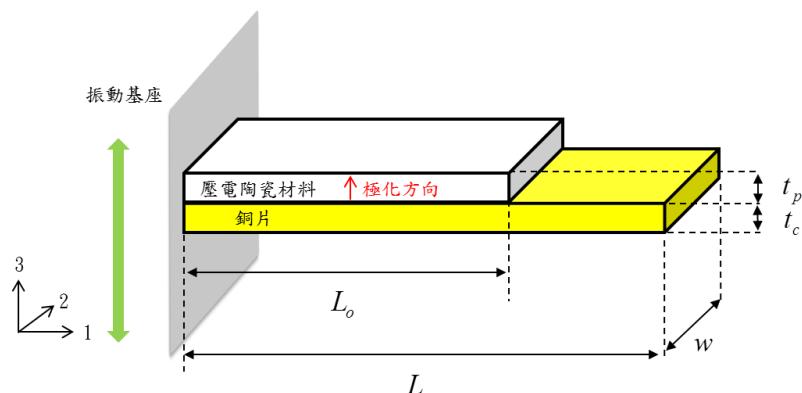


圖 6-1 單壓電層且未貼滿之振動懸臂樑示意圖



Appendix 1. 模態函數

A-1-1 模態分析法

由模態分析法(Modal Analysis Method)求自由振動的懸臂樑共振行為。

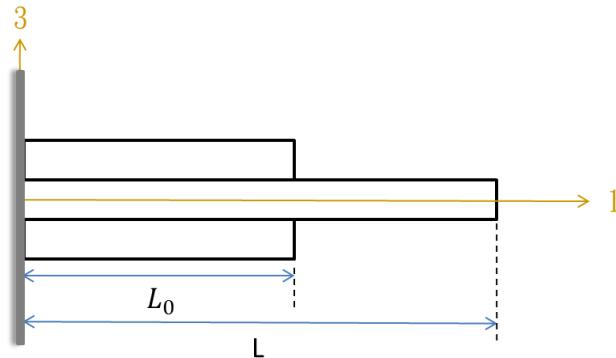


圖 A-1 自由振動的懸臂樑示意圖

由 $0 < x_1 < L_o$ 段的自由體圖(Free Body Diagram , F.B.D.)可知其運動方程式
(Equation of Motion)為

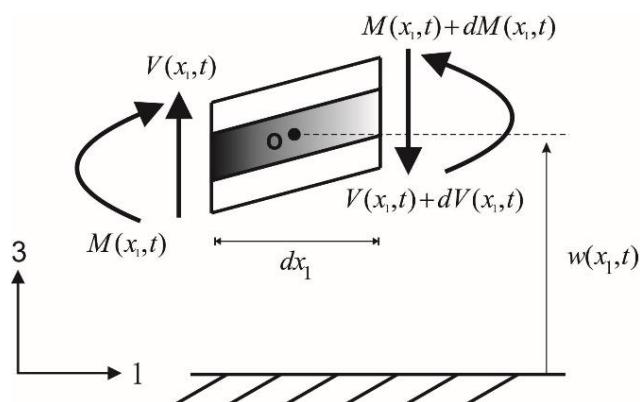
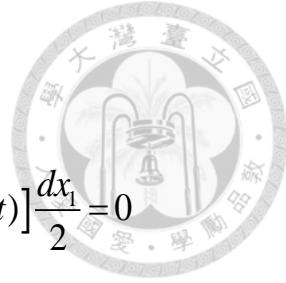


圖 A-2 $0 < x_1 < L_o$ 段的自由體圖

$$\sum F_3 = ma:$$

$$V(x_1, t) - [V(x_1, t) + dV(x_1, t)] = \left[(2\rho_p t_p + \rho_s t_s) w dx_1 \right] \frac{\partial^2 w(x_1, t)}{\partial t^2} \quad (\text{A.1.1})$$



$\sum M_o = 0$:

$$M(x_1, t) - [M(x_1, t) + dM(x_1, t)] + V(x_1, t) \frac{dx_1}{2} + [V(x_1, t) + dV(x_1, t)] \frac{dx_1}{2} = 0 \quad (\text{A.1.2})$$

由(A.1.2)式得

$$V(x_1, t) = \frac{\partial M(x_1, t)}{\partial x_1} \quad (\text{A.1.3})$$

將(A.1.3)式代入(A.1.1)且令 $m_{e_1} = (2\rho_p t_p + \rho_s t_s)w$ 得

$$\frac{\partial^2 M(x_1, t)}{\partial x_1^2} + m_{e_1} \frac{\partial^2 w(x_1, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.1.4})$$

由樑之彎曲應力可知

$$M(x_1, t) = (YI)_1 \frac{\partial^2 w(x_1, t)}{\partial x_1^2} \quad (\text{A.1.5})$$

將(A.1.5)式代入(A.1.4)式可得 $0 < x_1 < L_o$ 段的統御方程式(Governing Equation)為

$$(YI)_1 \frac{\partial^4 w(x_1, t)}{\partial x_1^4} + m_{e_1} \frac{\partial^2 w(x_1, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.1.6})$$

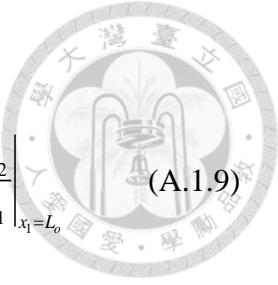
同理， $L_o < x_1 < L$ 段的統御方程式為

$$(YI)_2 \frac{\partial^4 w(x_1, t)}{\partial x_1^4} + m_{e_2} \frac{\partial^2 w(x_1, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.1.7})$$

假設

$$\begin{cases} \phi_1(x_1) = a_1 \sin(\beta_1 x_1) + b_1 \cos(\beta_1 x_1) + c_1 \sinh(\beta_1 x_1) + d_1 \cosh(\beta_1 x_1) & 0 < x_1 < L_o \\ \phi_2(x_1) = a_2 \sin(\beta_2 x_1) + b_2 \cos(\beta_2 x_1) + c_2 \sinh(\beta_2 x_1) + d_2 \cosh(\beta_2 x_1) & L_o < x_1 < L \end{cases} \quad (\text{A.1.8})$$

β_1 、 β_2 為此壓電懸臂樑結構的第一模態特徵值， a_1 、 b_1 、 c_1 、 d_1 、 a_2 、 b_2 、 c_2 、 d_2 為相對應的係數。



$0 < x_1 < L_o$ 段的四個邊界條件(Boundary Condition , B.C.)為

$$\phi_1(0)=0 \quad , \quad \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \right|_{x_1=0}=0 \quad , \quad \phi_1(L_o)=\phi_2(L_o) \quad , \quad \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \right|_{x_1=L_o}=\left. \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} \right|_{x_1=L_o} \quad (\text{A.1.9})$$

$L_o < x_1 < L$ 段的四個邊界條件(B.C.)為

$$\phi_1(L_o)=\phi_2(L_o) \quad , \quad \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \right|_{x_1=L_o}=\left. \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} \right|_{x_1=L_o} \quad , \quad \left. \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_1^2} \right|_{x_1=L}=0 \quad , \quad \left. \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x_1^3} \right|_{x_1=L}=0 \quad (\text{A.1.10})$$

將(A.1.9)式和(A.1.10)式代入(A.1.8)式可得八條聯立方程式，又八條方程式可求八項未知數，作法為將八條方程式表示成一矩陣，令其為 A，則當 $\det[A]=0$ ，如(A.1.11)式，表此聯立方程式有唯一解，將其用數學軟體 Mathematics，即可求出八項未知數之間的關係，但無法表示出各別的值，最後僅可將每項表成統一與某一未知數的關係式，而代回模型函數中，在能量法的等效材料參數表示式中，此未知數會被消去；而在當 $\det[A]=0$ 時，也可找出對應的特徵值，即 β_1 、 β_2 ，此為此壓電懸臂樑結構的第一模態特徵值。

$$\det[A]=[\cdot \cdot]_{8 \times 8} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{A.1.11})$$



以本文之 PZT-5A 60-30 為例，利用此算法可得其解之係數為

$$\begin{cases} a_1 \\ b_1 = -1.41955a_1 \\ c_1 = -a_1 \\ d_1 = -b_1 \\ a_2 = 0.735047a_1 \\ b_2 = -1.92472a_1 \\ c_2 = -2.32998a_1 \\ d_2 = 2.65161a_1 \end{cases} \quad (\text{A.1.12})$$

對應的第一模態特徵值為

$$\begin{cases} \beta_1 = 33.1846 \\ \beta_2 = 36.4153 \end{cases} \quad (\text{A.1.13})$$

將(A.1.12)式與(A.1.13)式之參數代入(A.1.8)式可得此材料與尺寸下所對應的形狀函數。



A-1-2 均佈力負載法

求受一均佈力負載(Uniform Load Method)的懸臂樑之撓曲方程式，此撓曲方程式可作為模態函數使用。

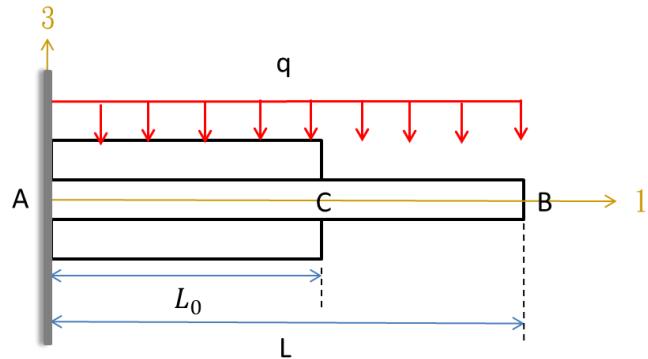


圖 A-3 受一均佈力負載的懸臂樑示意圖

靜力平衡

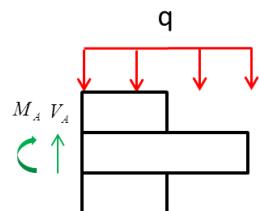


圖 A-4 $x_1 < L$ 段的自由體圖

由自由體圖(F.B.D.)可得此斷面靜力平衡式為

$$\sum M_A = 0 :$$

$$M_A = -\frac{1}{2}qL^2 \quad (\text{A.1.14})$$

$$\sum V_A = 0 :$$

$$V_A = qL \quad (\text{A.1.15})$$



選取 C 為參考點，繪出此受力樑的 $\frac{M}{YI}$ 圖

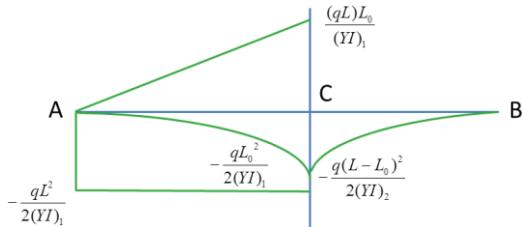


圖 A-5 受一均佈力附載的懸臂樑的 $\frac{M}{YI}$ 圖

由力矩面積法(Moment-Area Method)的第二矩面理論可知，樑上任意點的 3 方向位移為

$$0 < x_1 < L_o :$$

$$y_1(x_1) = \frac{qL_0x_1^3}{6(YI)_1} - \frac{qL^2x_1^2}{4(YI)_1} - \frac{qx_1^4}{24(YI)_1} \quad (\text{A.1.16})$$

$$L_o < x_1 < L$$

$$\begin{aligned} y_2(x_2) &= y_1(L_0) - \frac{q}{2(EI)_2} \int_{L_0}^{x_2} (x_2 - x)(x - L)^2 dx \\ &= q \left[\frac{L}{2(YI)_1} L_o^2 \left(x_1 - \frac{2}{3} L_o \right) - \frac{L^2}{2(YI)_1} L_o \left(x_1 - \frac{1}{2} L_o \right) - \frac{1}{6(YI)_1} L_o^3 \left(x_1 - \frac{3}{4} L_o \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2(YI)_2} \left(\frac{1}{12} (L_o - x_1)^2 (6L^2 + 3L_o^2 + 2L_o x_1 + x_1^2) - 4L(2L_o + x_1) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.1.17})$$

所以此自由振動之懸臂樑的模態函數可表為 $\phi_1(x_1) = y_1(x_1)$ 、 $\phi_2(x_1) = y_2(x_1)$ 。



Appendix 2. 有限元素軟體 COMSOL 3.5a 操作說明

啟動 COMSOL 後先點選平面應力(plane stress)的壓電模組，接著照著以下步驟即可跑出 COMSOL 數值解。

1. Draw mode-第一步要建模，按此選項後設定所需壓電片的尺寸，即長、寬、高，在設定座標使其照所需的形式排列。
2. Submain-按此選項可設定每塊模的屬性，即選擇材料、極化方向、damping，也可從中查詢各材料的材料參數為何，亦或者可自行創造所需的材料並設定其材料參數。
3. Boundary-按此選項可設定邊界條件，每段邊界皆有力學邊界與電學邊界，如固定端為振動基座、加速度值為何、上下外接一電阻...等。
4. Global Expressions-先從 options 進入後點選 Expressions → Global expressions，可設定欲得的物理量表示式為何。
5. Solver Parameters-按此選項可設定求解方式，加以設定起始、終止值，及求解相關條件。
6. Global Variables Plot-經過求解後，按此選項可輸出欲得之物理量值與圖。

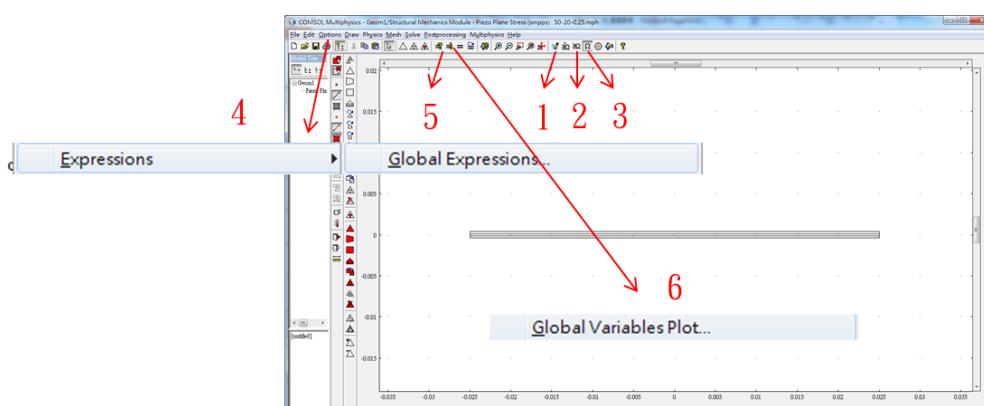
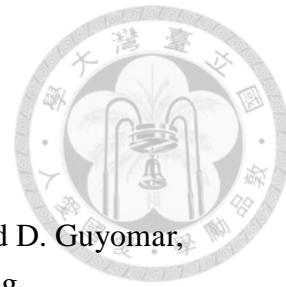


圖 A-6 有限元素軟體 COMSOL 操作步驟示意圖



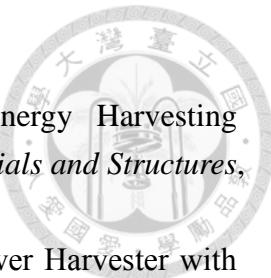
COMSOL 設定中，先前皆在 Submain 的 Damping 項給定 Loss factor 值，但給定 Loss factor 值並無法立即得知對應的無因次化之機械阻尼係數 ξ_m 或等效機械阻尼係數 η_m ，必須在複數平面上畫圓後才能推得，因此本論文採用 Rayleigh Damping 法。

在 COMSOL 的 Rayleigh Damping 設定中，其表示式為 $\eta_m = \alpha M + \beta K$ ，給定 α 、 β ，則可跑出 COMSOL 數值法，因此可先利用能量法算出所需或本實驗室實驗上可能的等效機械阻尼係數 η_m 再代入，如此一來的模擬較可得到所期望或較可在實驗上實行的結果，此方法確實可以節省不少反覆修改畫圓的時間，而由 3-4-1 節可看出，COMSOL 數值法與能量法用此方式，趨勢是符合且峰值不會誤差很大的。

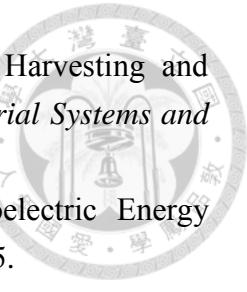


參考文獻

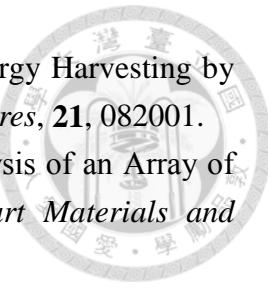
- [1] A. Badel, A. Benayad, E. Lefevre, L. Lebrun, C. Richard, and D. Guyomar, (2006). "Single Crystals and Nonlinear Process for Outstanding Vibration-Powered Electrical Generators." *IEEE Transaction on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, **53**, 673–684.
- [2] N. S. Shenck, and J. A. Paradiso, (2001). "Energy Scavenging with Shoe-Mounted Piezoelectrics." *IEEE Micro*, **21**, 30–42.
- [3] N. G. Elvin, A. A. Elvin, and M. Spector, (2001). "A Self-Powered Mechanical Strain Energy Sensor." *Smart Materials and Structures*, **10**, 293–299.
- [4] M. Lallart, D. Guyomar, Y. Jayet, L. Petit, E. Lefevre, T. Monnier, P. Guy, and C. Ruchard, (2008). "Synchronized Switch Harvesting Applied to Self-Powered Smart Systems: Piezoactive Microgenerators for Autonomous Wireless Receivers." *Sensors and Actuators A: Physical*, **147**, 263-272.
- [5] H. A. Sodano, G. Park, D. J. Leo, and D. J. Inman, (2003). "Model of Piezoelectric Power Harvesting Beam." *Proceedings of IMECE*, **43250**, 345-354.
- [6] S. Roundy, and P. K. Wright, (2004). "A Piezoelectric Vibration Based Generator for Wireless Electronics." *Smart Materials and Structures*, **13**, 1131-1142.
- [7] X. Wu, J. Lin, S. Kato, K. Zhang, T. Ren, and L. Liu, (2008). "A Frequency Adjustable Vibration Energy Harvester." *Proceedings of PowerMEMS*, 245-248.
- [8] A. Erturk, and D. J. Inman, (2009). "An Experimentally Validated Bimorph Cantilever Model for Piezoelectric Energy Harvesting from Base Excitations." *Smart Materials and Structures*, **18**, 025009.
- [9] M. F. Lumentut, and I. M. Howard, (2013). "Analytical and Experimental Comparisons of Electromechanical Vibration Response of a Piezoelectric Bimorph Beam for Power Harvesting." *Mechanical Systems and Signal Processing*, **36**, 66-86.
- [10] E. S. Leland, and P. K. Wright, (2006). "Resonance Tuning of Piezoelectric Vibration Energy Scavenging Generators Using Compressive Axial Preload." *Smart Materials and Structures*, **15**, 1413-1420.
- [11] J. E. Kim, (2014). "Dedicated Algorithm and Software for the Integrated Analysis of AC and DC Electrical Outputs of Piezoelectric Vibration Energy Harvesters." *Journal of Mechanical Science and Technology*, **28**, 4027-4036.
- [12] W. A. Ashtari, M. Hunstig, T. Hemsel, and W. Sextro, (2012). "Analytical Determination of Characteristic Frequencies and Equivalent Circuit Parameters of a Piezoelectric Bimorph." *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*,



- 23, 15-23.
- [13] P. Dalzell, and P. Bonello, (2012). "Analysis of an Energy Harvesting Piezoelectric Beam with Energy Storage Circuit." *Smart Materials and Structures*, **21**, 105029.
 - [14] Y. T. Hu, H. Xue, and H. P. Hu, (2007). "A Piezoelectric Power Harvester with Adjustable Frequency through Axial Preloads." *Smart Materials and Structures*, **16**, 1961-1966.
 - [15] J. Ajitsarial, S. Y. Choe, D. Shen, and D. J. Kim, (2007). "Modeling and Analysis of a Bimorph Piezoelectric Cantilever Beam for Voltage Generation." *Smart Materials and Structures*, **16**, 447-454.
 - [16] H. P. Hu, J. G. Cao, and Z. J. Cui, (2007). "Performance of a Piezoelectric Bimorph Harvester with Variable Width." *Journal of Mechanics*, **23**, 197-202.
 - [17] M. Kim, M. Hoegen, J. Dugundji, and B. L. Wardle, (2010). "Modeling and Experimental Verification of Proof Mass Effects on Vibration Energy Harvester Performance." *Smart Materials and Structures*, . **19**, 045023.
 - [18] H. Wang, and Q. Meng, (2013). "Analytical Modeling and Experimental Verification of Vibration-Based Piezoelectric Bimorph Beam with a Tip-Mass for Power Harvesting." *Mechanical Systems and Signal Processing*, **36**, 193-209.
 - [19] D. Guyomar, A. Badel, E. Lefevre, and C. Richard, (2005). "Toward Energy Harvesting Using Active Materials and Conversion Improvement by Nonlinear Processing." *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, **52**, 584-595.
 - [20] Y. C. Shu, and I. C. Lien, (2006). "Analysis of Power Output for Piezoelectric Energy Harvesting Systems." *Smart Materials and Structures*, **15**, 1499-1512.
 - [21] Y. C. Shu, I. C. Lien, (2006). "Efficiency of Energy Conversion for a Piezoelectric Power Harvesting System." *Journal of Micromechanics and Microengineering*, **16**, 2429-2438.
 - [22] Y. C. Shu, and I. C. Lien, (2007). "An Improved Analysis of the SSHI Interface in Piezoelectric Energy Harvesting." *Smart Materials and Structures*, **16**, 2253-2264.
 - [23] Y. C. Shu, I. C. Lien, (2007). "A Comparison Between the Standard and SSHI Interfaces Used in Piezoelectric Power Harvesting." *Proceedings of SPIE*, **6525**, 652509.
 - [24] I. C. Lien, Y. C. Shu, W. J. Wu, S. M. Shiu, and H. C. Lin, (2010). "Revisit of Series-SSHI with Comparisons to Other Interfacing Circuits in Piezoelectric Energy Harvesting." *Smart Materials and Structures*, **19**, 125009.



- [25] J. R. Liang, and W. H. Liao, (2009). "Piezoelectric Energy Harvesting and Dissipation on Structural Damping." *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **20**, 515-527.
- [26] J. R. Liang, and W. H. d, (2011). "Energy Flow in Piezoelectric Energy Harvesting Systems." *Smart Materials and Structures*, **20**, 015005.
- [27] J. M. Renno, M. F. Daqaq, and D. J. Inman, (2009). "On the Optimal Energy Harvesting from a Vibration Source." *Journal of Sound and Vibration*, **320**, 386-405.
- [28] L. Deng, Q. Wen, S. Jiang, X. Zang, and Y. She, (2015). "On the Optimization of Piezoelectric Vibration Energy Harvester." *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **26**, 2489-2499.
- [29] A. Erturk, and D. J. Inman, (2008). "On Mechanical Modeling of Cantilevered Piezoelectric Vibration Energy Harvesters." *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **19**, 1311-1325.
- [30] A. Erturk, and D. J. Inman, (2008). "Issues in Mathematical Modeling of Piezoelectric Energy Harvesters." *Smart Materials and Structures*, **17**, 065016.
- [31] M. F. Lumentut, and I. M. Howard, (2011). "Analytical Modeling of Self-Powered Electromechanical Piezoelectric Bimorph Beams with Multidirectional Excitation." *International Journal of Smart and Nano Materials*, **2**, 134-175.
- [32] S. M. Shahruz, (2006). "Design of Mechanical Band-Pass Filter with Large Frequency Bands for Energy Scanveging." *Mechatronics*, **16**, 449-461.
- [33] Y. Tadesse, S. Zhang, and S. Priya, (2009). "Multimodal Energy Harvesting System: Piezoelectric and Electromagnetic." *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **20**, 625-632.
- [34] N. E. duToit, and B. L. Wardle, (2006). "Performance of Microfabricated Piezoelectric Vibration Energy Harvesters." *Integrated Ferroelectrics*, **83**, 13-32.
- [35] M. Ferrari, V. Ferrari, D. Marioli, and A. Taroni, (2008). "Piezoelectric Multifrequency Energy Converter for Power Harvesting in Autonomous Microsystems." *Sensors and Actuators A*, **142**, 329-335.
- [36] I. H. Kim, H. J. Jung, B. M. Lee, and S. J. Jang, (2011). "Broadband Energy-Harvesting Using a Two Degree-of-Freedom Vibrating Body." *Applied Physics Letters*, **98**, 214102.
- [37] H. Xue, Y. Hu, and Q. Wang, (2008). "Broadband Piezoelectric Energy Harvesting Devices Using Multiple Bimorphs with Different Operating Frequencies." *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, **55**, 2104-2108.



- [38] I. C. Lien, and Y. C. Shu, (2012). "Array of Piezoelectric Energy Harvesting by Equivalent Impedance Approach." *Smart Materials and Structures*, **21**, 082001.
- [39] H. C. Lin, P. H. Wu, I. C. Lien, and Y. C. Shu, (2013). "Analysis of an Array of Piezoelectric Energy Harvesters Connected in Series." *Smart Materials and Structures*, **22**, 094026.
- [40] 連益慶,「陣列式壓電能量擷取系統在多種介面電路下之動態特性分析」,台灣大學應用力學所研究所博士論文,2012。
- [41] 陳彥儒,「陣列式壓電能量擷取子之寬頻設計」,台灣大學應用力學所研究所碩士論文,2013。
- [42] L. Mateu, and F. Moll, (2005). "Optimum Piezoelectric Bending Beam Structures for Energy Harvesting Using Shoe Inserts." *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **16**, 835-845.
- [43] S. Paquin, and Y. St-Amant, (2010). "Improving the Performance of a Piezoelectric Energy Harvester Using a Variable Thickness Beam." *Smart Materials and Structures*, **19**, 105020.
- [44] A. Abdelkefi, N. Barsallo, L. Tang, Y. Yang, and M. R. Hajj, (2014). "Modeling, Validation, and Performance of Low-Frequency Piezoelectric Energy Harvesters." *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **25**, 1429-1444.
- [45] A. Erturk, (2012). "Assumed-Modes Modeling of Piezoelectric Energy Harvesters: Euler–Bernoulli, Rayleigh, and Timoshenko Models with Axial Deformations." *Computers and Structures*, **106-107**, 214-227.
- [46] Y. Shi, J. A. Rogers, C. Gao, and Y. Huang, (2014). "Multiple Neutral Axes in Bending of a Multiple-Layer Beam With Extremely Different Elastic Properties." *Journal of Applied Mechanics*, **81**, 114501.
- [47] A. M. Wickenheiser, (2012). "Eigensolution of Piezoelectric Energy Harvesters with Geometric Discontinuities: Analytical Modeling and Validation." *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **24**, 729-744.
- [48] J. E. Kim, and Y.. Y. Kim, (2011). "Analysis of Piezoelectric Energy Harvesters of a Moderate Aspect Ratio With a Distributed Tip Mass." *Journal of Vibration and Acoustics*, **133**, 041010.
- [49] M. F. Lumentut, and I. M. Howard, (2014). "Electromechanical Finite Element Modelling for Dynamic Analysis of a Cantilevered Piezoelectric Energy Harvester with Tip Mass Offset Under Base Excitations." *Smart Materials and Structures*, **23**, 095037.
- [50] Y. Yuan, H. Du, X. Xia, and Y. R. Wong, (2014). "Analytical Solutions to Flexural Vibration of Slender Piezoelectric Multilayer Cantilevers." *Smart Materials and Structures*, **23**, 095005.
- [51] F. Goldschmidtboeing, and P. Woias, (2008). "Characterization of Different Beam

Shapes for Piezoelectric Energy Harvesting.” *Journal of Micromechanics and Microengineering*, **18**, 104013.

