

國立臺灣大學管理學院財務金融學系



碩士論文

Department of Finance

College of Management

National Taiwan University

Master Thesis

局部波動度與動態避險

Local Volatility and Dynamic Hedging

邱子軒

Tzu-Hsuan Chiu

指導教授：呂育道 博士

Advisor: Yuh-Dauh Lyuu, Ph.D.

中華民國 111 年 1 月

Jan, 2022

國立臺灣大學（碩）博士學位論文
口試委員會審定書

局部波動度與動態避險
Local Volatility and Dynamic Hedging

本論文係邱子軒君（R08723061）在國立臺灣大學財務金融學研究所、所完成之碩（博）士學位論文，於民國111年1月28日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

石育通

（簽名）

（指導教授）

張麗玲

陸裕豪

系主任、所長

姜堯民

（簽名）

誌謝

感謝所有人!



中文摘要

為了探討波動度交易的本質，本文以局部波動度結合效率演算法模擬真實世界的資產過程，並探討不同避險參數對於動態避險的損益分布影響。此外，以不同局部波動曲面類比不同的市場情況，研究是否有特定的股價路徑對於損益會有重大差異。研究發現，除了傾斜平面型以外，使用局部波動度避險的損益標準差較使用隱含波動度的損益標準差略低，但不論何種局部波動曲面，使用隱含波動度避險的損益平均較接近零。對於短天期選擇權而言，損益最佳股價路徑不會因為使用隱含波動度或局部波動度避險而改變，但對於特定股價路徑使用不同波動度避險對於損益會有明顯變化。

關鍵字：效率演算法、波動度交易、局部波動度、動態避險

ABSTRACT



To explore the nature of volatility trading, this thesis uses local volatility combined with an efficient algorithm to simulate the real-world asset process and investigates the impact of different dynamic hedging strategies on the profit and loss distributions of dynamic hedging. In addition, different prototypical real-world local volatility surfaces are used. The study found that, except for the monotonic slanting slope type, the standard deviation of profit and loss using local volatility hedging was lower than that using implied volatility, but regardless of the local volatility surface, the averaged profit and loss using implied volatility hedging is closer to zero. For short-term options, the optimal stock price path for profit and loss will not change whether implied volatility or local volatility hedging is used. But different strategies under the same stock price path will yield significantly different profits and losses.

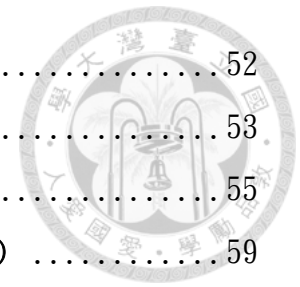
Keywords: efficient algorithm, volatility trading, local volatility, dynamic hedging

目錄



口試委員會審定書	#
誌謝	i
中文摘要	ii
ABSTRACT	iii
第一章 緒論	1
1.1 文獻回顧與研究動機	1
第二章 局部波動度概要	3
2.1 局部波動模型與瞬時波動度	3
第三章 研究方法與局部波動曲面	4
3.1 效率演算法與局部波動曲面	4
3.2 動態 Delta 中性策略損益分布推導	5
3.3 避險參數定義	7
第四章 數值實驗結果	9
4.1 局部波動度曲面：碗型	9
4.2 局部波動度曲面：單峰型	13
4.3 局部波動度曲面：水平面	16
4.4 局部波動度曲面：前傾斜平面	20
4.5 局部波動度曲面：後傾斜平面	23
4.6 局部波動度曲面：左傾斜平面	27
4.7 局部波動度曲面：右傾斜平面	30
4.8 局部波動度曲面：碗型（一年期）	34
4.9 局部波動度曲面：單峰型（一年期）	37
4.10 局部波動度曲面：前傾平面型（一年期）	40
4.11 局部波動度曲面：前傾波浪型（一年期）	43
4.12 局部波動度曲面：山峰峽谷型（一年期）	46
4.13 局部波動度曲面：波浪型（一年期）	49

第五章 結論	52
參考文獻	53
附錄一：局部波動模型與路徑瞬時波動度	55
附錄二：持有不同部位對於避險損益分布路徑趨勢影響（碗型）	59
附錄三：持有不同部位對於避險損益分布路徑趨勢影響（單峰型）	62
附錄四：持有不同部位對於避險損益分布路徑趨勢影響（前傾平面型）	65



第一章 緒論

1.1 文獻回顧與研究動機

在金融市場上交易員首要任務是控制投資組合曝險的程度。一般而言，交易員透過 Black-Scholes 歐式選擇權公式與市場上的交易資料，可推算希臘字母避險參數來決定如何調整部位，以利降低曝險值。然而 Black-Scholes 模型假設波動度為一常數，與市場狀況不符。對於選擇權的交易者而言，隱含波動率（implied volatility）構成的隱含波動曲面（implied volatility surface）意味著市場對於未來變化的預期，其重要性甚至超過選擇權價格本身。為了解決隱含波動度並不為一常數這事實，許多研究在 Black-Scholes 模型基礎上，針對股價隨機過程進行調整。例如 Hull and White (1987) 假設股價隨機過程的波動度為另一隨機過程，而 Merton (1976) 則是將股價隨機過程加入跳躍調整項。然而評價選擇權時，市場上找不到與之對應的衍生商品去對沖跳躍風險，進而無法建構無風險投資組合去複製選擇權。此外，將股價波動度設為另一隨機過程將使模型的參數估計困難許多。

因此，局部波動度模型是一種較為折衷的方法，具體而言是將波動度假設為股價與時間的函數，其優點在於它既能捕捉到真實市場波動度曲面，同時保留 Black-Scholes 模型中無偏好的特性。此概念的最早應用是在 1993 年 1 月由 Mark Rubinstein 在 American Finance Association 的研討會提出，透過二元樹結合局部波動度評價選擇權，而與之對應的連續時間應用最早由 Bruno Dupire 提出，他透過觀察市場價格反推出資產的擴散方程，並證明在特定條件下風險中立測度的資產擴散方程是唯一的。而局部波動度（local volatility）一詞最早是由 Emanuel Derman 和 Iraj Kani 在高盛 1994 年研究報告中提出。

Rubinstein (1994) 結合局部波動度的二元樹模型只能計算相同到期日的選擇權價格，然而其演算法導出的隱含波動度並無法有效的對應到隱含波動曲面。





Derman 與 Kani (1994) 提出一向前生長的二元樹 (後以 DK 稱此二元數)，每往前一步設定新節點的履約價為前一節點的資產價格，如此做法可以結合市場上觀察到的選擇權價格逼近隱含波動曲面，然而其過程需要大量的內插、外插去生成二元樹。Derman、Kani 與 Chriss (1996) 透過增加一自由度提出三元樹模型評價選擇權，雖然可以減少生成樹所需要的計算量，然而其過程的轉移機率會出現負機率的情況。Barle 與 Cakici (1998) 將樹節點的資產過程以遠期價格替換，其演算法相對於 (DK) 較少出現負機率的情況，但其二元樹只能評價歐式選擇權。後續有許多研究建立在局部波動模型並結合二元樹或三元樹評價選擇權，但相關演算法並不能保證轉移機率合法。Lok 與 Lyuu (2019) 提出一效率演算法，並證明局部波動度在特定條件下其三元樹的轉移機率可以被正確定義，且能夠很好的捕捉真實市場的隱含波動度曲面。

Dumas、Fleming 與 Whaley (1998) 認為以 Black-Scholes 模型導出的避險參數比以局部波動度導出的避險參數更能有效的捕捉市場風險，並認為越簡單的模型越好。然而其局部波動模型是利用其主觀給定的局部波動度函數結合 Dupire 偏微分方程估計參數，且其避險實驗只是比較市場選擇權的報價和局部波動模型產生選擇權的價格的差異，研究結論容易受到市場實際資料影響。Crépey (2004) 將 Black-Scholes 公式的波動度以局部波動度替代進行避險實驗，發現當波動度為負偏態分布的情況下，以局部波動度導出的避險參數避險效果較 Black-Scholes 模型導出的避險參數還要好。

動態避險目的是使投資組合的價值不受標的資產價格變化影響。通常是透過持有一定比例的標的資產，複製衍生品在到期時的收益，這種避險方法也稱為 Delta 中性策略。為了能夠正確模擬避險損益，有別於評價資產的風險中立測度，決定真實世界下的資產過程更為重要。本研究基於 Lok 與 Lyuu (2019) 提出之效率演算法模擬真實世界的市場，並模擬動態 Delta 中性策略在不同局部波動曲面對損益的影響。

第二章 局部波動度概要

2.1 局部波動模型與瞬時波動度

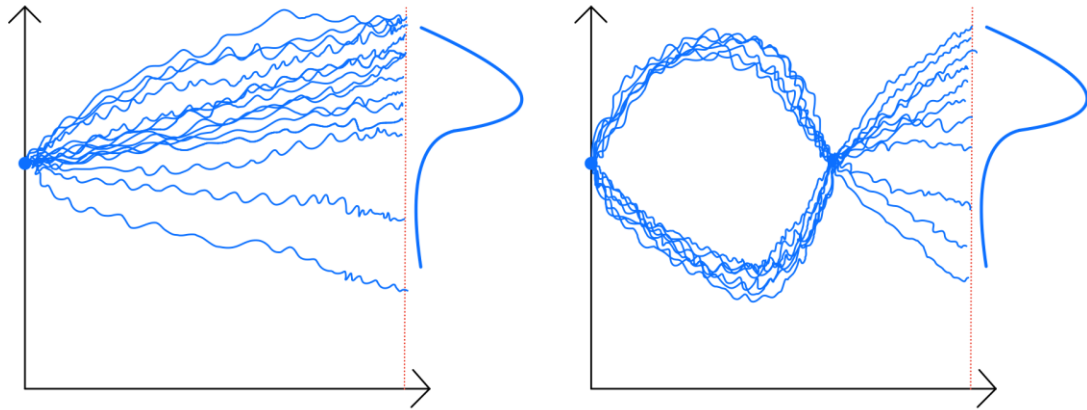


圖 1：兩平行世界的股價路徑示意圖

本論文認為某種程度上歐式選擇權的價值與到期日之前的股價分布無直接相關，只與到期時的股價分布有關。想像有兩平行世界在給定 $t = 0$ 的資訊下，股價未來所有可能的路徑如圖 1 所示。客觀而言，無論真實股價於選擇權到期日之前如何改變，所有市場參與者都知道期末股價分布會一樣。因此在給定資訊流 $\{F_0\}$ 的條件下，若市場是完備的則無套利投資組合可以被建構出來，理論上兩平行世界在 $t = 0$ 的選擇權價格應該相等。

此外，Lee (2005) 證明隱含波動度的平方是瞬時波動度的平方在某個測度下的平均值，Gatheral (2006) 用非常淺顯易懂的方法連結隱含波動度和路徑上瞬時波動度的關係，請見附錄說明。

第三章 研究方法與局部波動曲面



3.1 效率演算法與局部波動曲面

效率演算法以三元樹為基礎並結合局部波動模型評價選擇權，該模型假設於風險中立世界 Q 股價服從隨機過程：

$$d \ln(S_t) = \left[r - \frac{\sigma(S_t, t)^2}{2} \right] dt + \sigma(S_t, t) dW_t.$$

而真實世界 P 股價服從隨機過程：

$$d \ln(S_t) = \left[\mu - \frac{\sigma(S_t, t)^2}{2} \right] dt + \sigma(S_t, t) dW_t.$$

其中 S_t 為股票在時間 t 之價格， $\sigma(S_t, t)$ 為局部波動函數， W_t 為標準布朗運動， r 為無風險利率， μ 為真實世界下股價報酬率。為確保評價選擇權機率合法，必須假設局部波動函數有一上界 $\sup_{0 \leq t \leq T} \sigma(S_t, t) \leq \sigma_{UB}$ 。

於風險中立世界 Q 下，定義三元樹之上升、持平、下降的狀態轉移機率分別為 P_u 、 P_m 、 P_d 。狀態轉移機率必須滿足限制式：

$$\begin{aligned} P_u + P_m + P_d &= 1, \\ P_u u + P_d d &= \left[r - \frac{\sigma(S_t, t)^2}{2} \right] \Delta t, \\ P_u u^2 + P_d d^2 - (P_u u + P_d d)^2 &= \sigma^2(S_t, t) \Delta t. \end{aligned}$$

其中 u 、 m 、 d 分別代表股價於上升、持平、下降的對數報酬率。並定義：

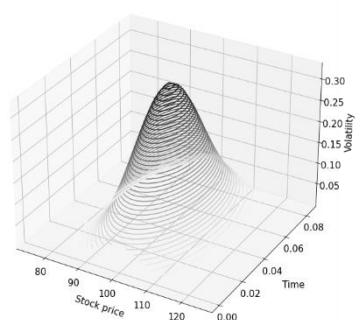
$$\begin{aligned} u &= \sigma_{UB} \sqrt{\Delta t}, \\ m &= 0, \\ d &= -\sigma_{UB} \sqrt{\Delta t}. \end{aligned}$$

另一方面，Dupire (1994) 藉由 Fokker-Planck 方程證明描述股價擴散方程的波動度可由一系列不同履約價的歐式選擇權唯一決定，其關係如下如下：

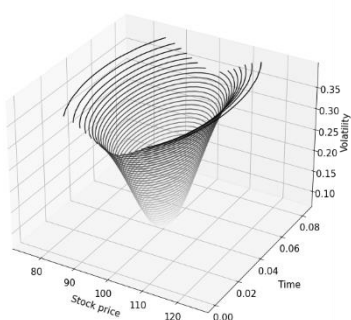


$$\sigma_{\text{local vol}}^2(K, T) = \frac{\frac{\partial C}{\partial T}}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}.$$

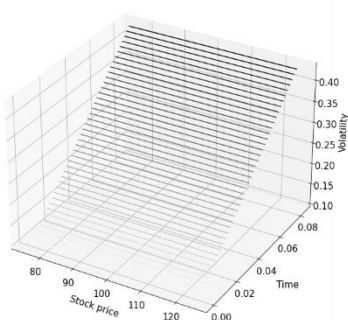
本研究將探討四種不同局部波動度曲面，分別是碗型、單峰型、傾斜平面型與水平面型（即 Black-Scholes 的常數波動率假設）。最後，針對前傾、後傾、左傾、右傾等四種傾斜平面的局部波動率模型進行避險模擬，其定性實驗結果可供交易員作為判斷之依據。值得一提的是，單峰型（碗型）表示股價於特定時間波動大幅增加（減少）。前者例如投資人往往會在連續假期前大量減碼，避免假期間出現重大消息使部位面臨不可控之虧損，此情形可以單峰型表示之。後者的案例為基金經理人往往於指數大幅上漲時會大量賣買權組合成掩護性買權（covered call）策略，使隱含波動度於特定時間大幅降低，此情形可以碗型表示之。



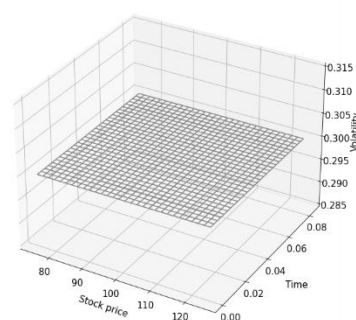
單峰型



碗型



傾斜平面型



水平面



3.2 動態 Delta 中性策略損益分布推導

若股價符合對數常態分配，定義實際波動度 (σ_r^2) 為股價路徑在極短單位時間實際擴散的程度，則動態 Delta 中性策略的損益來自於隱含波動度 (σ_i^2) 和實際波動度 (σ_r^2) 的差異，證明思路如下：

在連續時間下 1 單位買權長部位和 $\frac{\partial C}{\partial S}$ 單位股票短部位構成一無風險投資組合 X ，則投資組合價值全微分式可以表示為：

$$dX = d\left(C - \frac{\partial C}{\partial S}S\right) - r\left(C - \frac{\partial C}{\partial S}S\right)dt.$$

其中 $d\left(C - \frac{\partial C}{\partial S}S\right)$ 可以理解為買權和股票在單位時間的變化， $r\left(C - \frac{\partial C}{\partial S}S\right)$ 為期初存入銀行的經過單位時間的報酬。將上式展開後可得：

$$\begin{aligned} dX &= dC - d\left(\frac{\partial C}{\partial S}S\right) - r\left(C - \frac{\partial C}{\partial S}S\right)dt, \\ &\cong dC - \frac{\partial C}{\partial S}dS - r\left(C - \frac{\partial C}{\partial S}S\right)dt, \\ &\cong \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\partial C}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}dS^2 - \frac{\partial C}{\partial S}dS - r\left(C - \frac{\partial C}{\partial S}S\right)dt, \\ &\cong \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}dS^2 - r\left(C - \frac{\partial C}{\partial S}S\right)dt, \\ &\cong \left(\frac{\partial C}{\partial t} - rC - \frac{\partial C}{\partial S}Sr\right)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}S^2\sigma_r^2dt, \\ &\cong \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}S^2(\sigma_r^2 - \sigma_i^2)dt. \end{aligned}$$

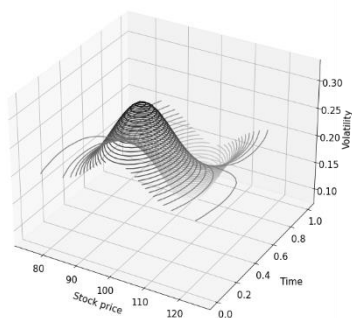
其中上式 $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}dS^2$ 的經濟意涵表示 Black-Scholes Gamma 受到股價對於投資組合的總變動量，所以須以實際波動度 (σ_r^2) 體現 dS^2 於極短時間下的變動量。更準確而言，動態 Delta 中性策略獲利主要來自於部位的 Gamma 值和波動度的差異，其中 σ_r^2 代表股價路徑在極短單位時間擴散的程度，因此於單位時間下實際抽樣實際波動度 (σ_r^2) 大於隱含波動度 (σ_i^2) 的機率有如下關係：

$$P(\sigma_r^2 dt > \sigma_i^2 dt) = P(\sigma^2 dt \times (dz)^2 > \sigma^2 dt) = P(\chi^2(1) > 1).$$

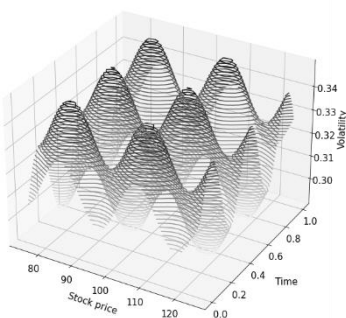
由此可知，在股價過程為常數的情況下，動態 Delta 中性策略的損益分配會接近某個自由度的非中心卡方分布（noncentral chi-squared distribution），整體損益分配會出現非對稱的現象。Boyle（1980）也提出動態 Delta 中性策略的損益分配是自由度為 1 的非中心卡方分配，然而文章並沒有給出詳細的證明。

3.3 避險參數定義

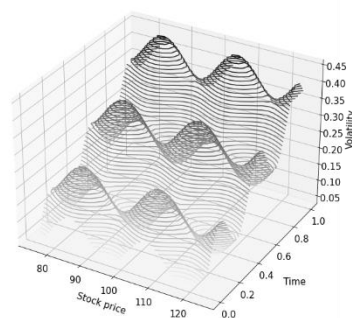
本研究以 1 單位買權長部位（long position on call）和 Delta 單位股票短部位（short position on stock）構成動態 Delta 中性策略，模擬十萬條股價路徑在不同局部波動曲面上使用隱含波動度、局部波動度和最小變異數避險參數對於損益分布的影響，其餘買權短部位、賣權長部位和賣權短部位於附錄參考。另一方面為驗證實驗穩健性，針對一年期選擇權數值實驗新增以下三種不同的局部波動曲面。



山峰峽谷型



波浪型



前傾波浪型

定義以隱含波動度避險表示交易員以 Black-Scholes 公式中的 $N(d_1)$ 當作避險參數進行避險。具體而言，假設波動度為常數的情況下，選擇權價格在連續時間下有如下關係：

$$C_t = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2).$$

$N(d_1)$ 的經濟意涵表示若以股票為計價單位買權於價內機率， $N(d_2)$ 則是以貨幣



市場為計價單位買權於價內的機率。

定義以局部波動度避險表示交易員以三元樹對應的股價變化和買權價值的變化決定持有多少部位進行避險。具體而言，三元樹之上升、持平、下降的股價分別為 S_u 、 S_m 、 S_d ，而買權上升、持平、下降的價值分別為 C_u 、 C_m 、 C_d ，則定義局部波動度避險參數為：

$$\Delta_{\text{loc vol}} = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}.$$

定義以最小變異數避險參數表示交易員以對於投資組合價值變化最小的避險參數進行避險。令隨機變數 X 為投資組合價值變動量，則每經過 Δt 時間，隨機變數 X 之二階原動差可以表示為：

$$E(X^2) = P_u[(C_u - C_0) + \Delta(S_0 - S_u)]^2 + P_m[(C_m - C_0) + \Delta(S_0 - S_m)]^2 + P_d[(C_d - C_0) + \Delta(S_0 - S_d)]^2.$$

由上式可以看出投資組合價值變動量為二次方程，因此使的投資組合變異數最小化的避險參數為：

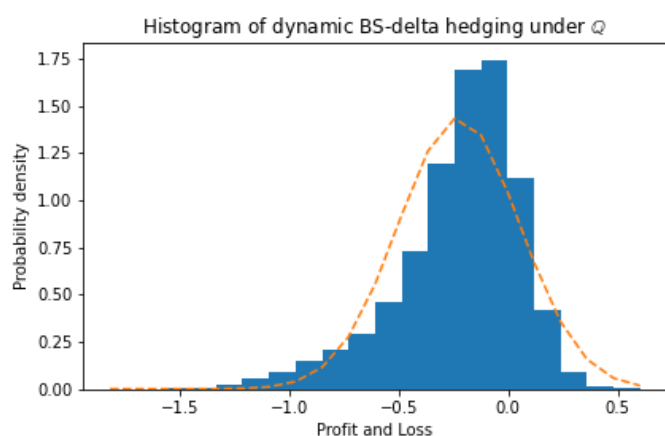
$$\Delta_{\min} = \frac{P_u(S_0 - S_u)(C_0 - C_u) + P_m(S_0 - S_m)(C_0 - C_m) + P_d(S_0 - S_d)(C_0 - C_d)}{P_u(S_0 - S_u)^2 + P_m(S_0 - S_m)^2 + P_d(S_0 - S_d)^2}.$$



第四章 數值實驗結果

4.1 至 4.7 節以一個月到期的選擇權為範例，4.8 至 4.13 節以一年期的選擇權為範例，初始值設定為 $S_0 = 100$ 、 $K = 100$ 、 $r = 0$ ，並假設真實世界中標的資產的年化報酬率 $\mu = 0.1$ 。另一方面，最小變異數避險參數與局部波動度避險參數數值極為接近，因此避險損益路徑僅展示以局部波動度與隱含波動度避險之實驗結果。

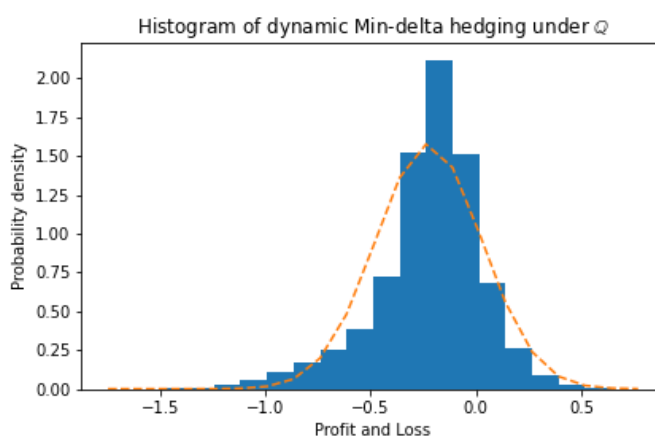
4.1 局部波動度曲面：碗型



Mean: -0.2243116183380645

Standard deviation: 0.27757000253539144

Mean over call price: -8.8002%

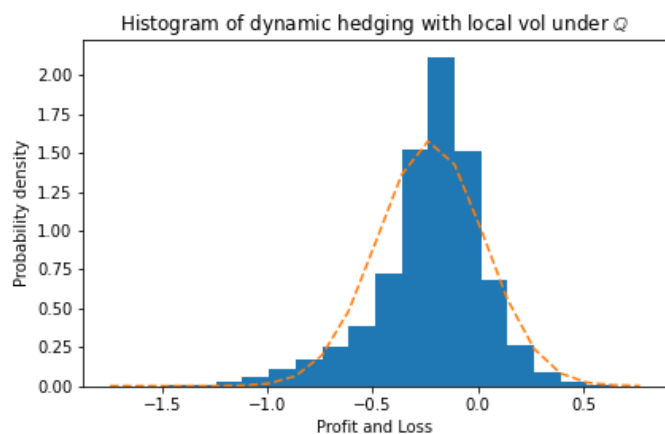


Mean: -0.2240554267344342

Standard deviation: 0.25279326987162665

Mean over call price: -8.7901%

圖 2：風險中立世界下以隱含波動度避險（左）和局部波動度避險（右）損益分布

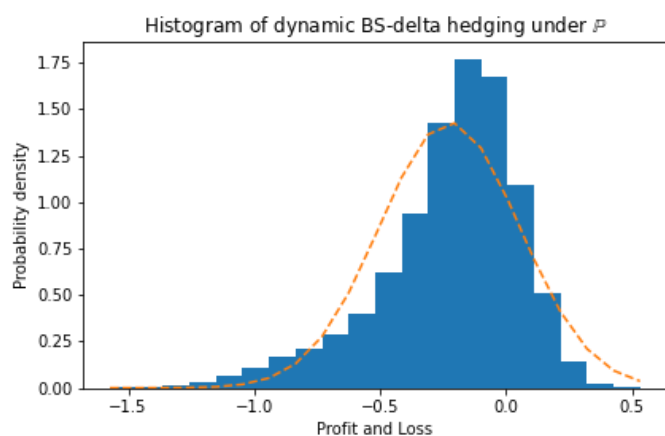


Mean: -0.22405542672966006

Standard deviation: 0.2527932698920771

Mean over call price: -8.7901%

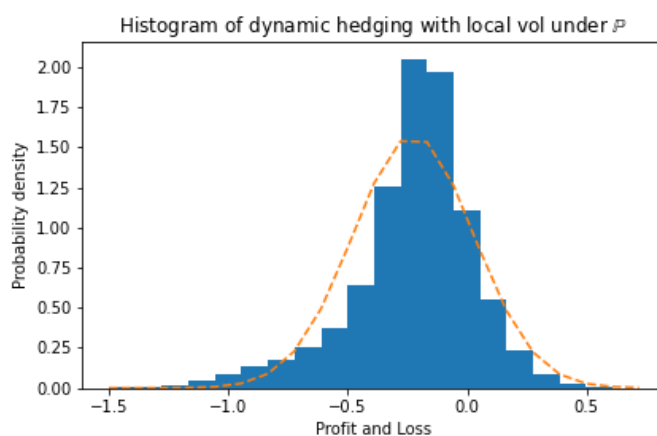
圖 3：風險中立世界下以最小變異數避險參數避險損益分布



Mean: -0.2243766880102803

Standard deviation: 0.2791247873346894

Mean over call price: -8.8027%

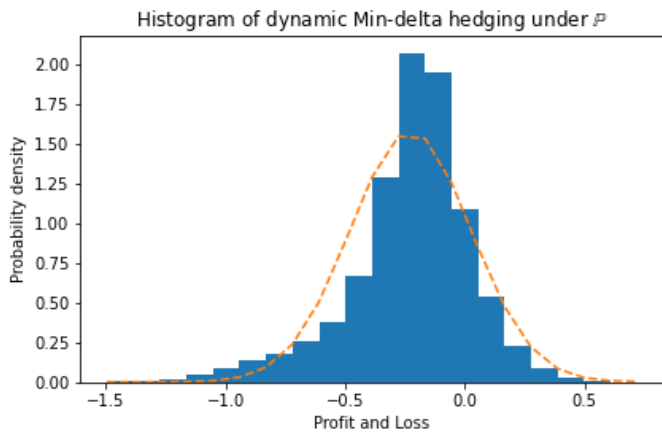


Mean: -0.22649724388036035

Standard deviation: 0.2534719661705894

Mean over call price: -8.8859%

圖 4：真實世界下以隱含波動度避險（左）和局部波動度避險（右）損益分布



Mean: -0.2278143358500438

Standard deviation: 0.2533200502479837

Mean over call price: -8.9376%

圖 5：真實世界下以最小變異數避險參數避險損益分布

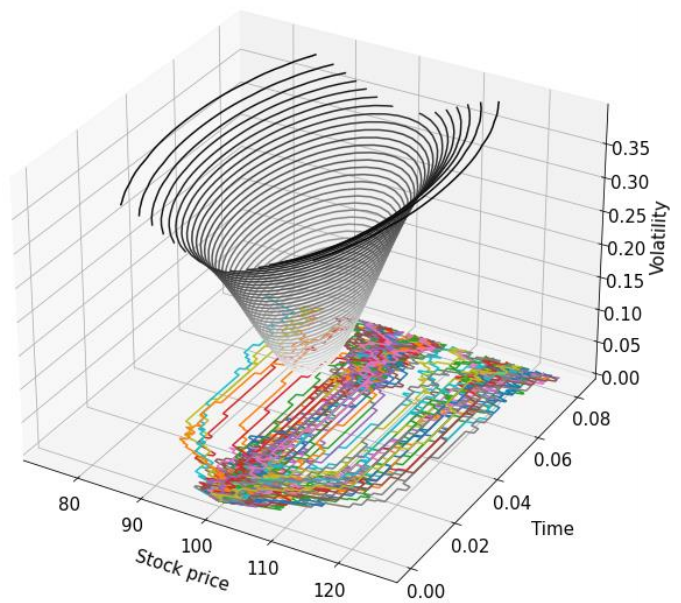
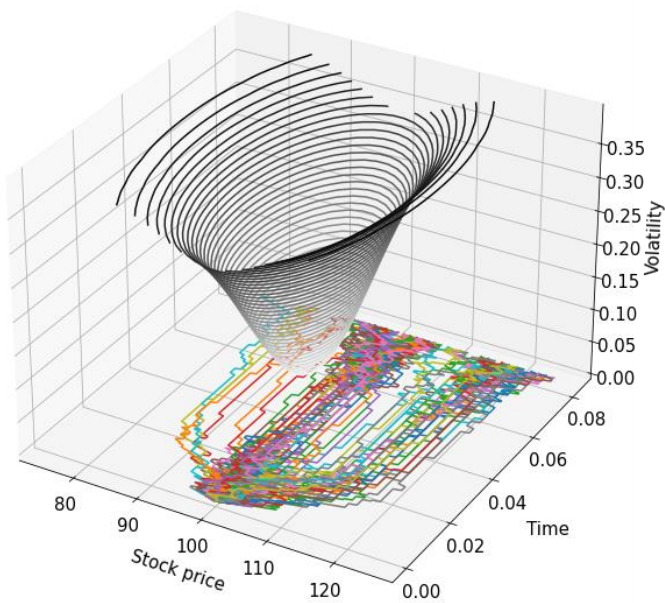


圖 6：真實世界下使用隱含波動度（左）和局部波動度（右）避險損益最佳前 100 條路徑

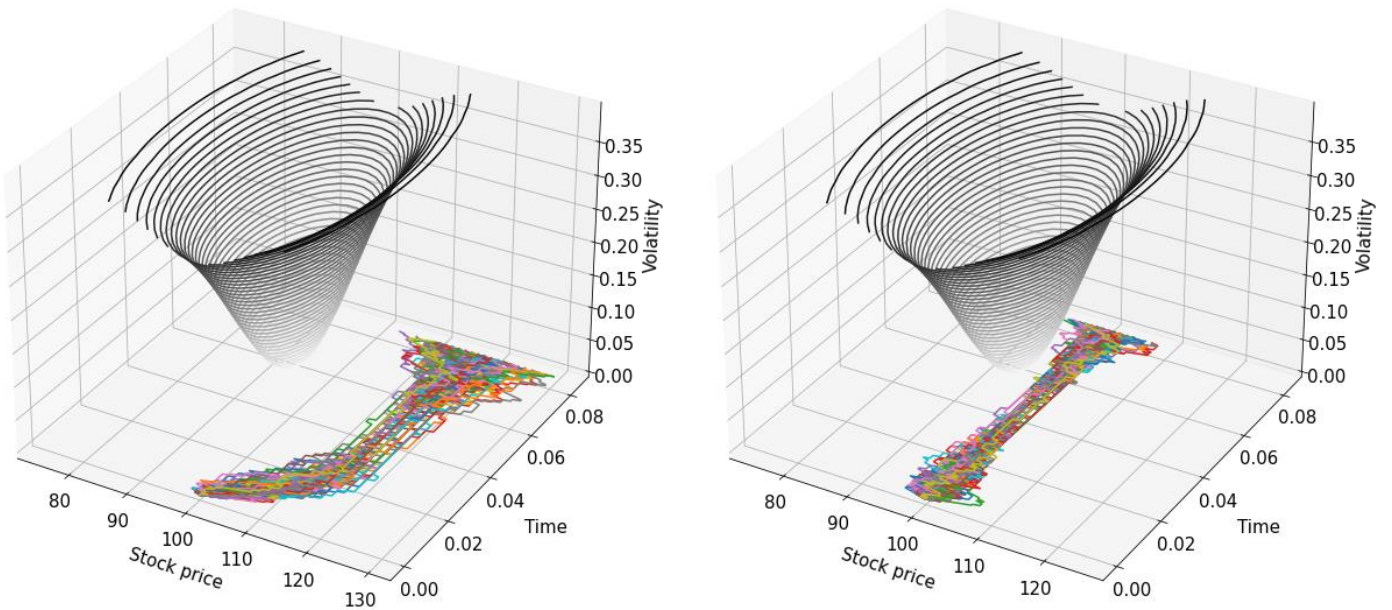


圖 7：真實世界下隱含波動避險相對局部波動避險最佳前 100 條路徑（左）和局部波動避險相對隱含波動避險最佳前 100 條路徑（右）

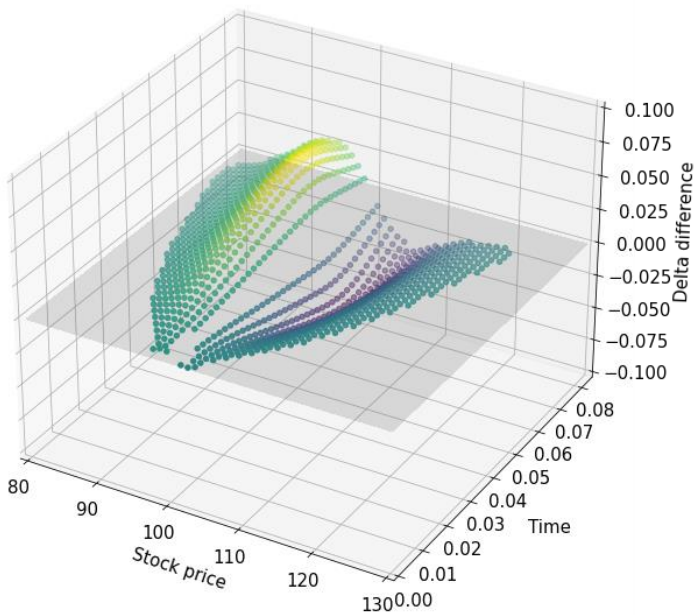
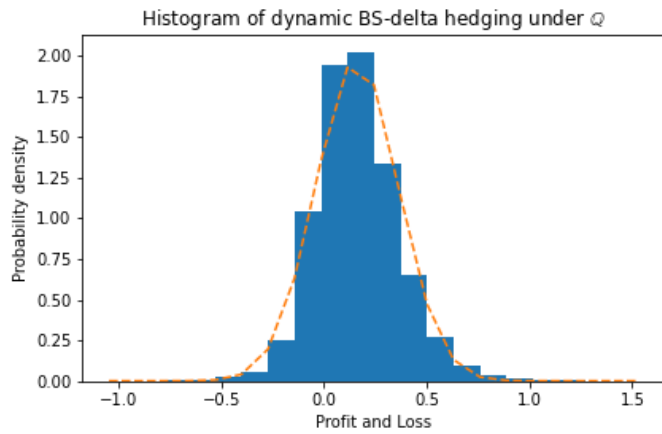


圖 8：局部波動度與避險參數差異 ($\Delta_{BS} - \Delta_{LV}$)

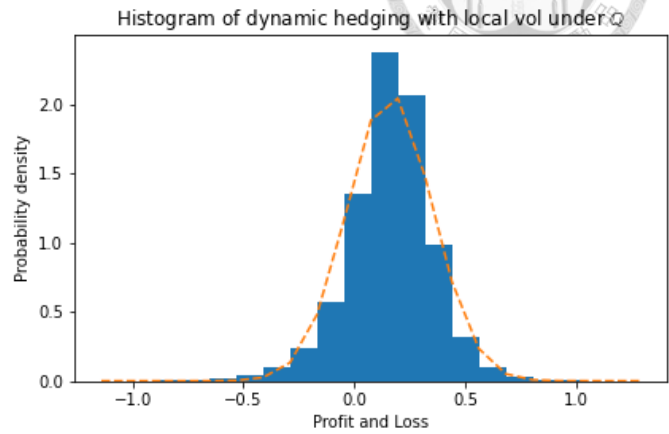
4.2 局部波動度曲面：單峰型



Mean: 0.16034773004010253

Standard deviation: 0.20127861665816288

Mean over call price: 6.4913%

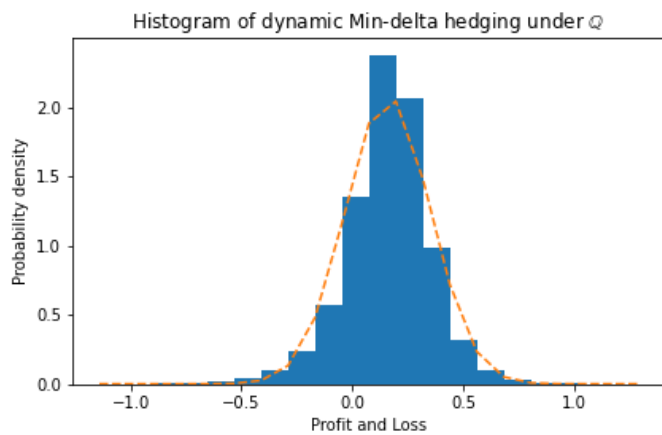


Mean: 0.1606169464025524

Standard deviation: 0.19190059973292087

Mean over call price: 6.5022%

圖 9：風險中立世界下以隱含波動度避險（左）和局部波動度避險（右）損益分布

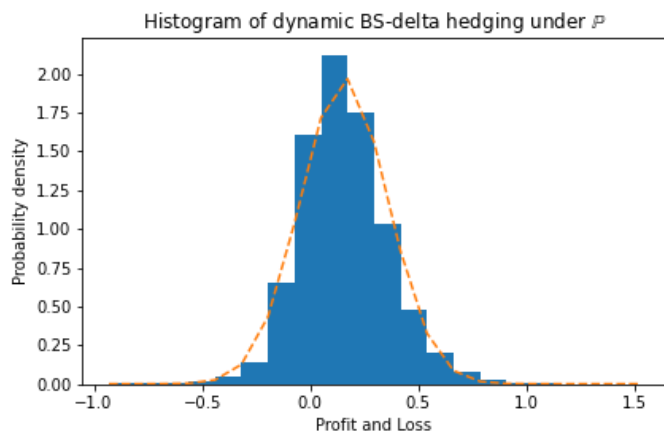


Mean: 0.16061694638735582

Standard deviation: 0.19190059973211135

Mean over call price: 6.5022%

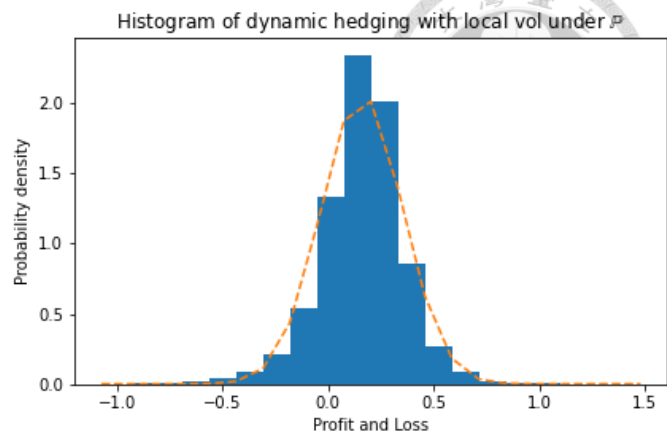
圖 10：風險中立世界下以最小變異數避險參數避險損益分布



Mean: 0.15713978364421086

Standard deviation: 0.20206221813026684

Mean over call price: 6.3614%

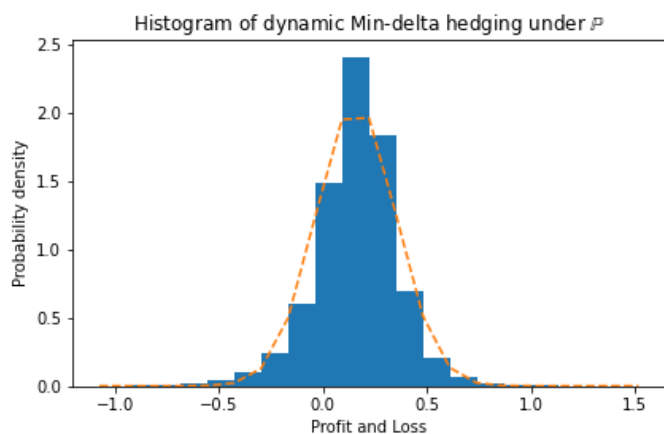


Mean: 0.16002261202347187

Standard deviation: 0.19313083910922488

Mean over call price: 6.4781%

圖 11：真實世界下以隱含波動度避險（左）和局部波動度避險（右）損益分布



Mean: 0.1591179153397926

Standard deviation: 0.19300309439221008

Mean over call price: 6.4415%

圖 12：真實世界下以最小變異數避險參數避險損益分布

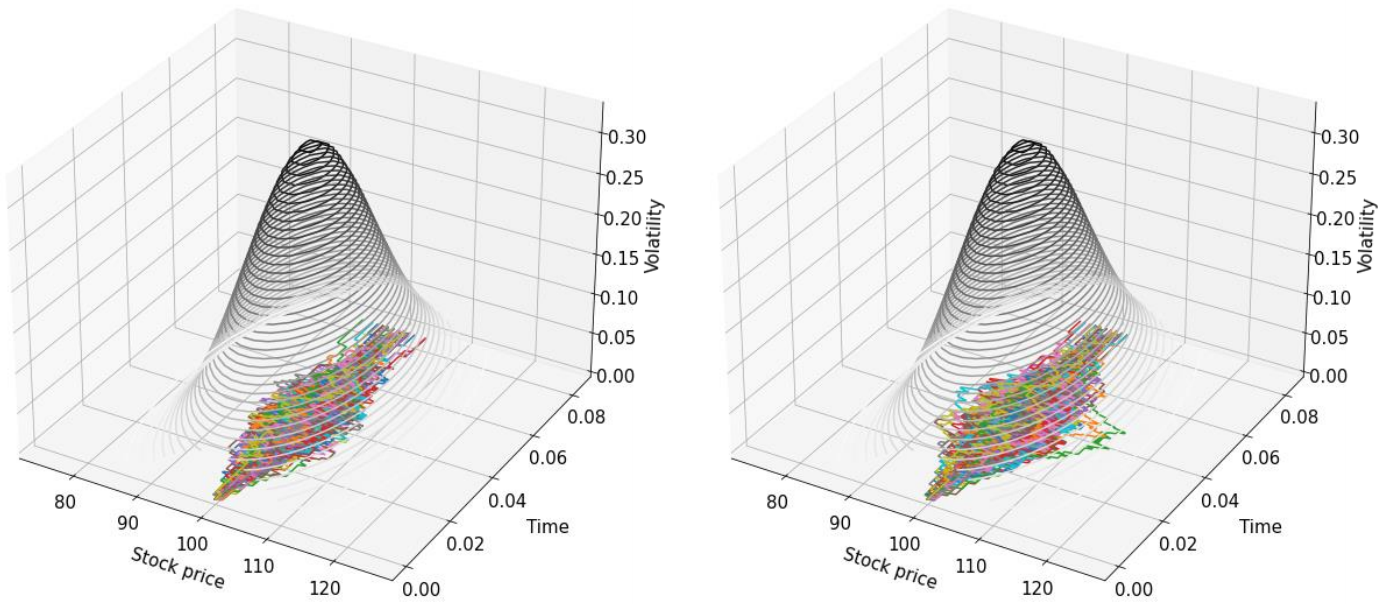


圖 13：真實世界下使用隱含波動度（左）和局部波動度（右）避險損益最佳前 100 條路徑

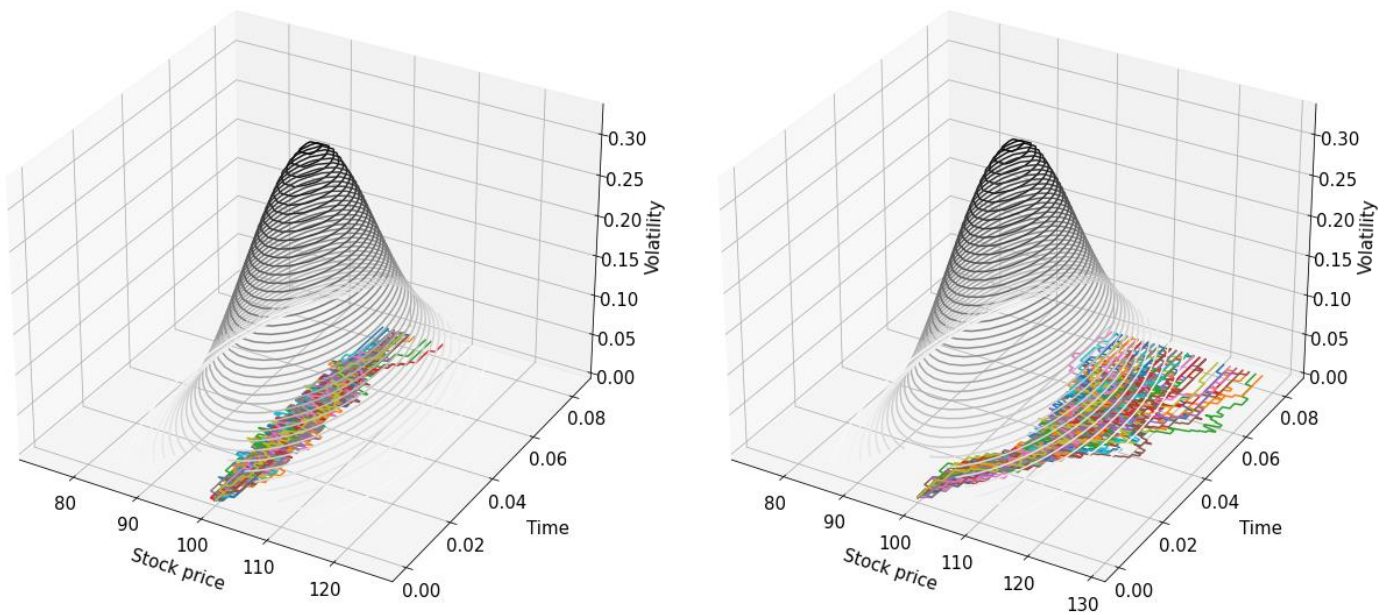


圖 14：真實世界下隱含波動避險相對局部波動避險最佳前 100 條路徑（左）和局部波動避險相對隱含波動避險最佳前 100 條路徑（右）

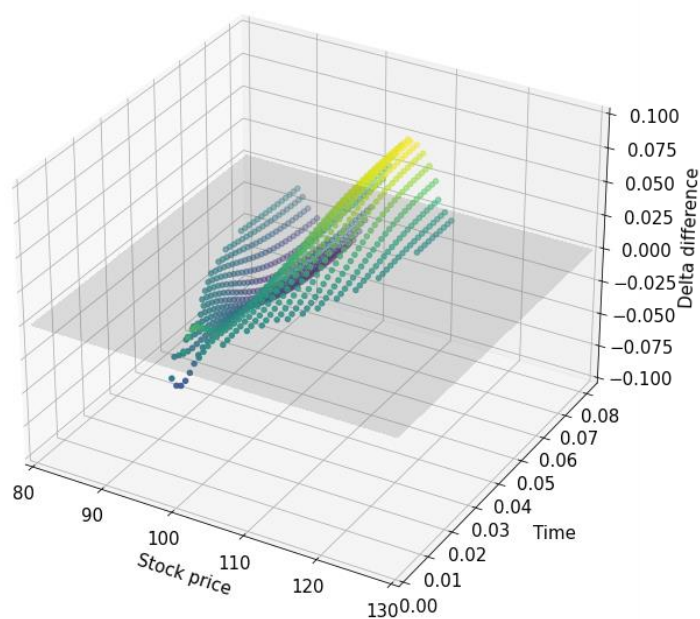
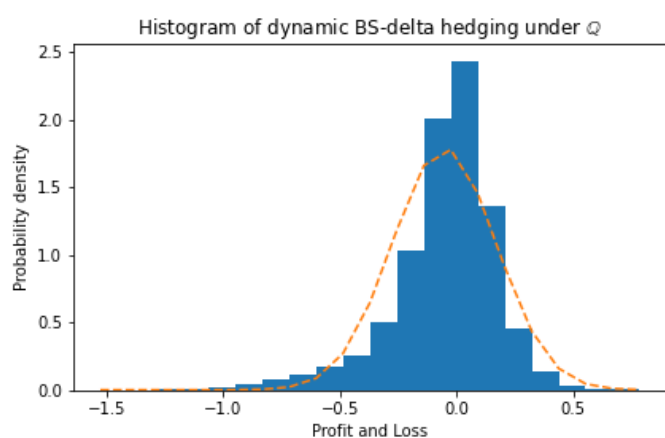


圖 15：局部波動度與避險參數差異 ($\Delta_{BS} - \Delta_{LV}$)

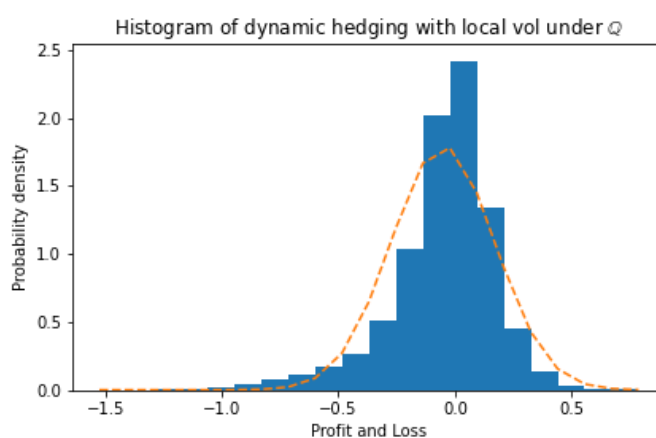
4.3 局部波動度曲面：水平面



Mean: -0.05213534007674338

Standard deviation: 0.22283803727050422

Mean over call price: -1.5109%

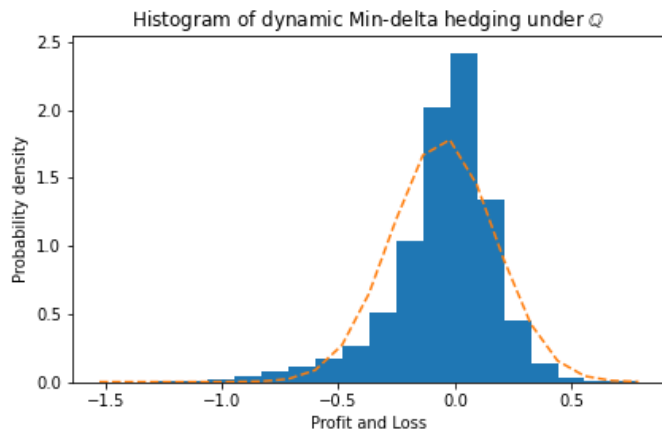


Mean: -0.052136065998322774

Standard deviation: 0.22215706516210512

Mean over call price: -1.5109%

圖 16：風險中立世界下以隱含波動度避險（左）和局部波動度避險（右）損益分布

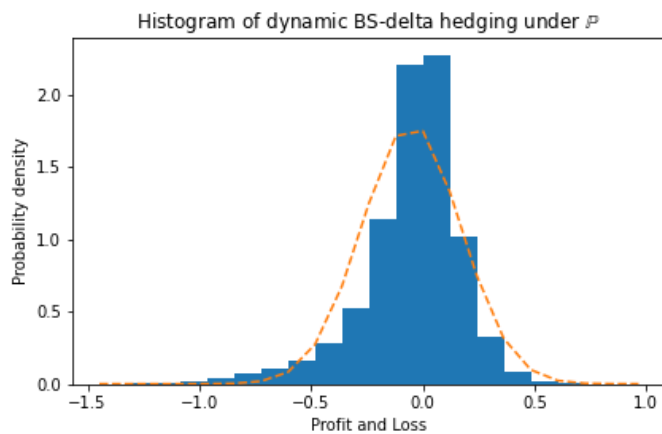


Mean: -0.05213606600595685

Standard deviation: 0.2221570651655779

Mean over call price: -1.5109%

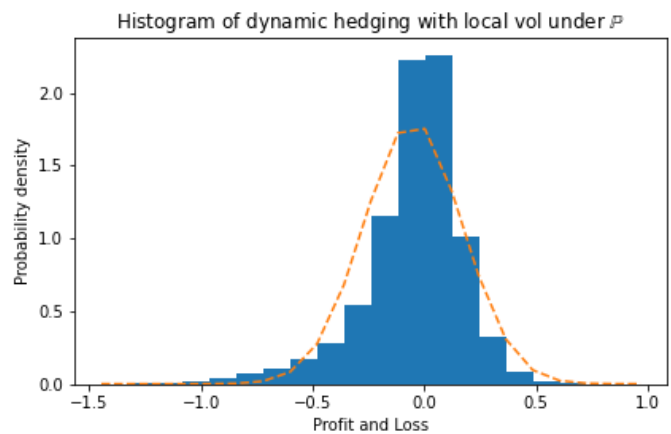
圖 17：風險中立世界下以最小變異數避險參數避險損益分布



Mean: -0.051499172905941394

Standard deviation: 0.22157065562520378

Mean over call price: -1.4924%

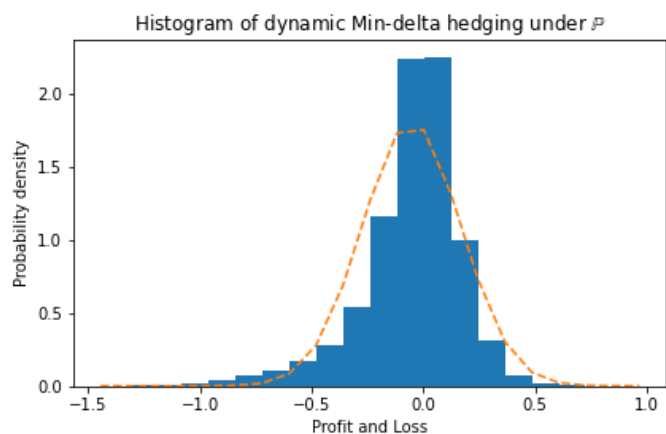


Mean: -0.05157568302495563

Standard deviation: 0.22087932517739517

Mean over call price: -1.4946%

圖 18：真實世界下以隱含波動度避險（左）和局部波動度避險（右）損益分布



Mean: -0.05180273601943168

Standard deviation: 0.22083533848157028

Mean over call price: -1.5012%

圖 19：真實世界下以最小變異數避險參數避險損益分布

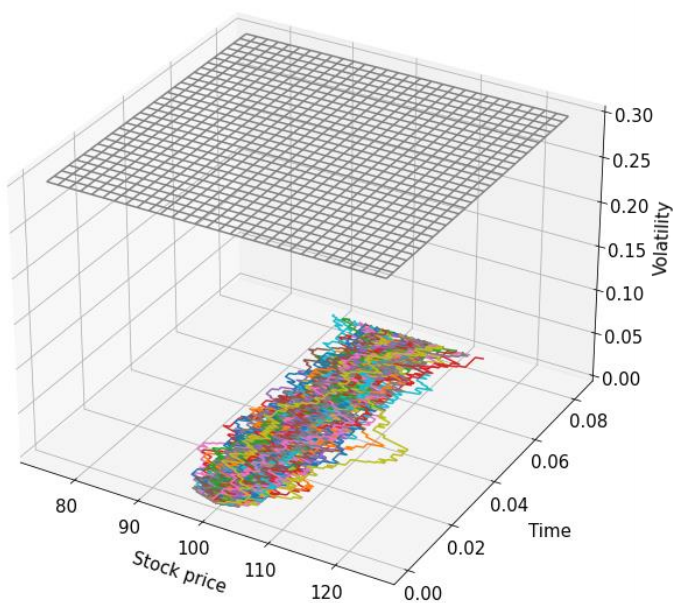
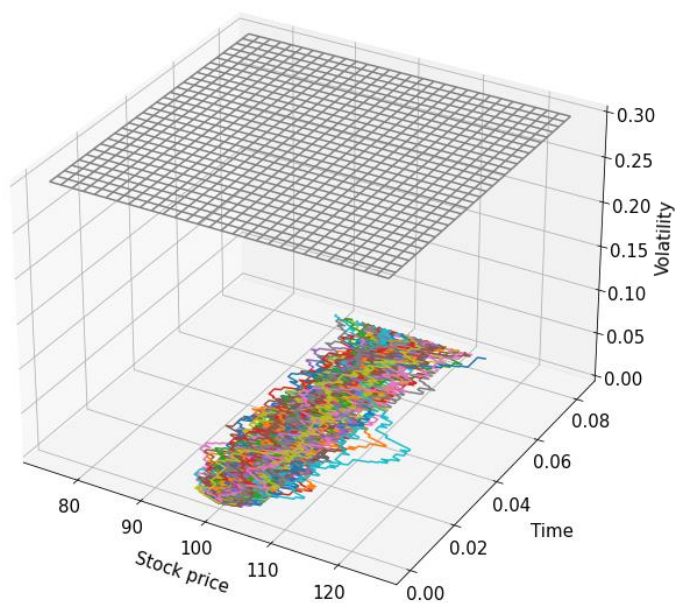


圖 20：真實世界下使用隱含波動度（左）和局部波動度（右）避險損益最佳前 100 條路徑

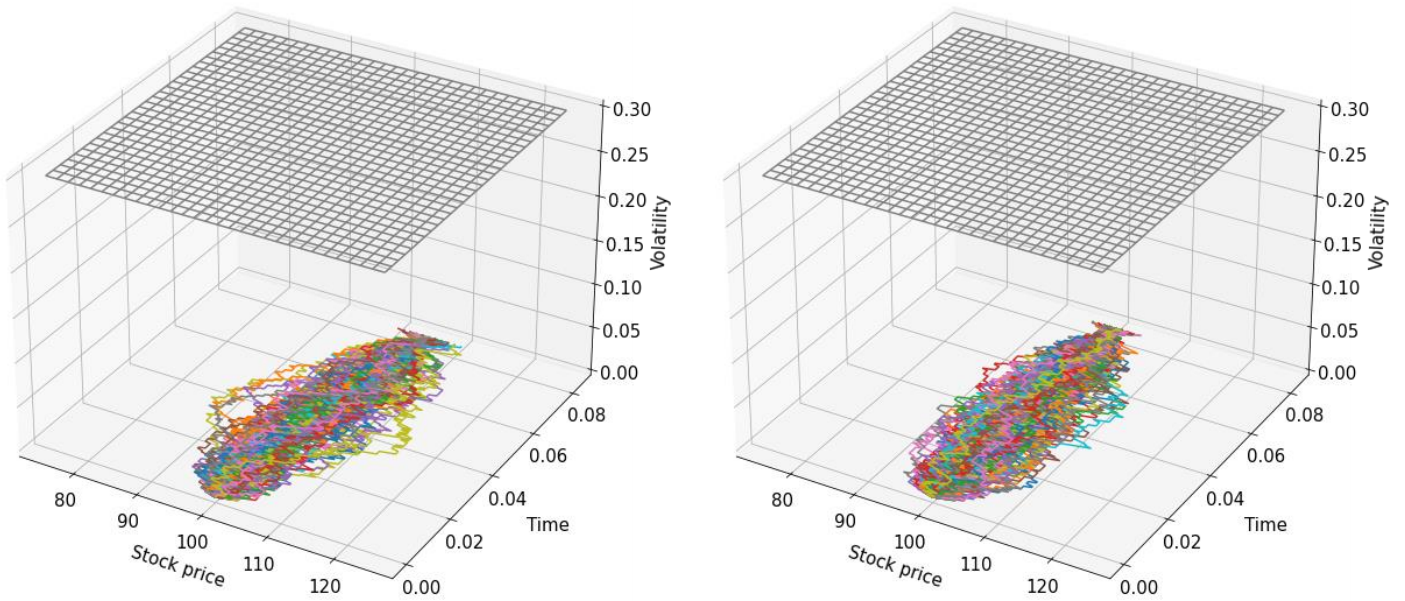


圖 21：真實世界下隱含波動避險相對局部波動避險最佳前 100 條路徑（左）和局部波動避險相對隱含波動避險最佳前 100 條路徑（右）

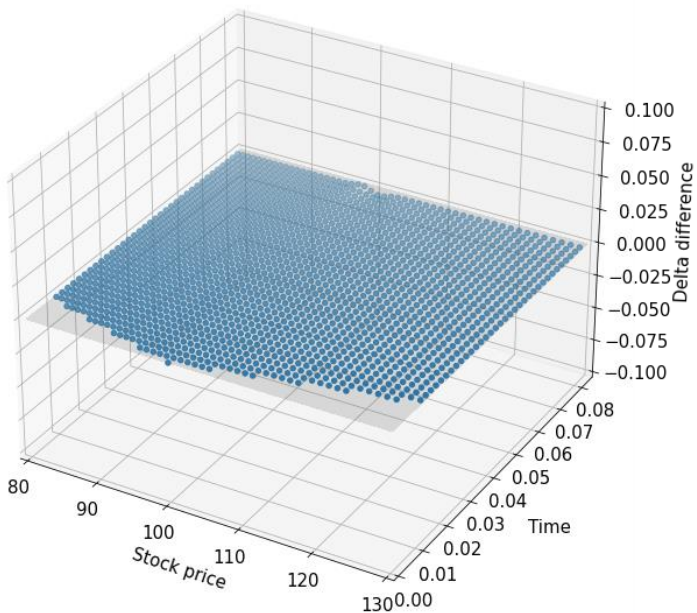


圖 22：局部波動度與避險參數差異 ($\Delta_{BS} - \Delta_{LV}$)

4.4 局部波動度曲面：前傾斜平面

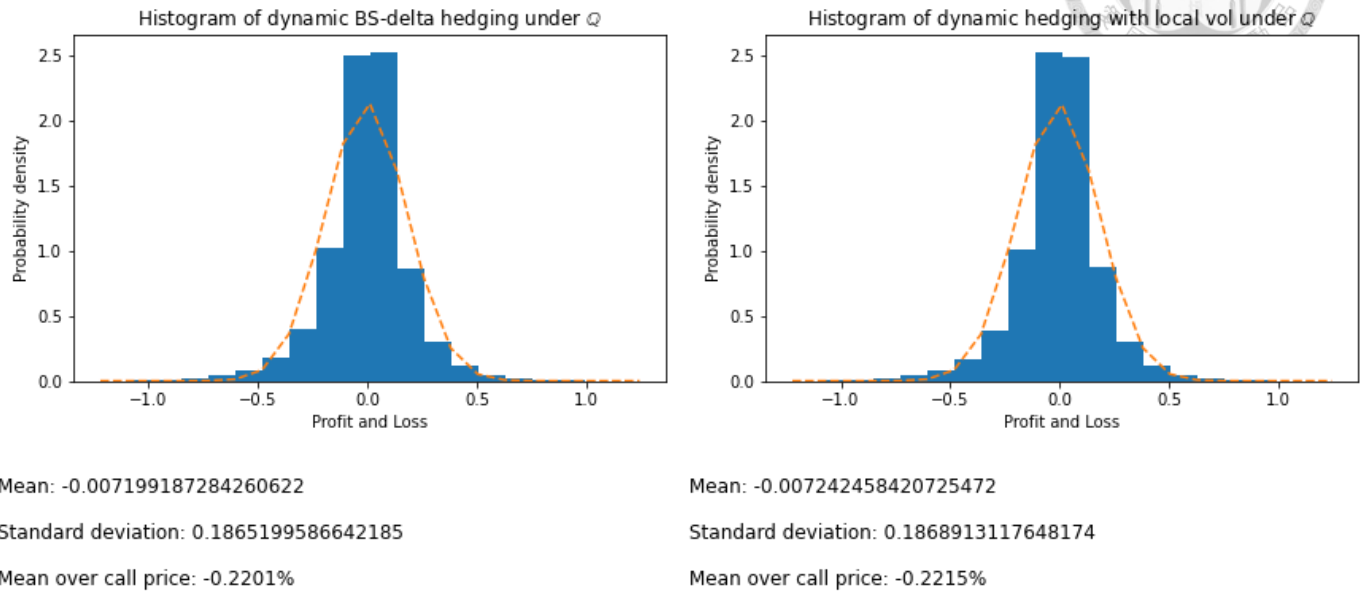


圖 23：風險中立世界下以隱含波動度避險（左）和局部波動度避險（右）損益分布

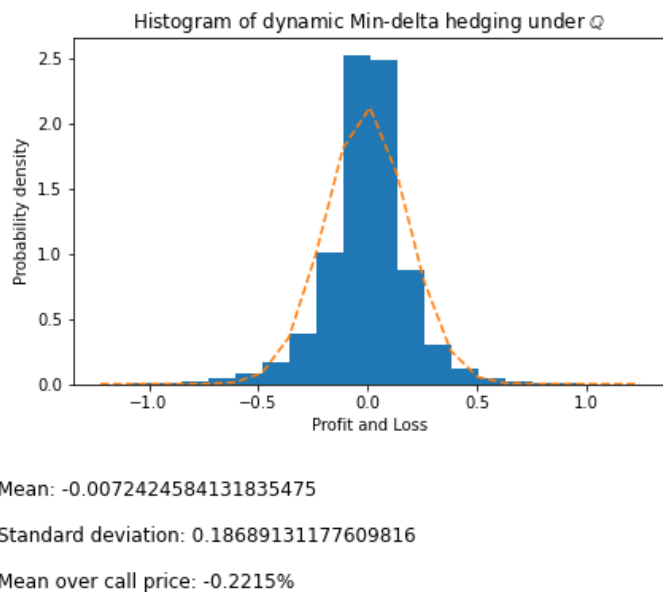
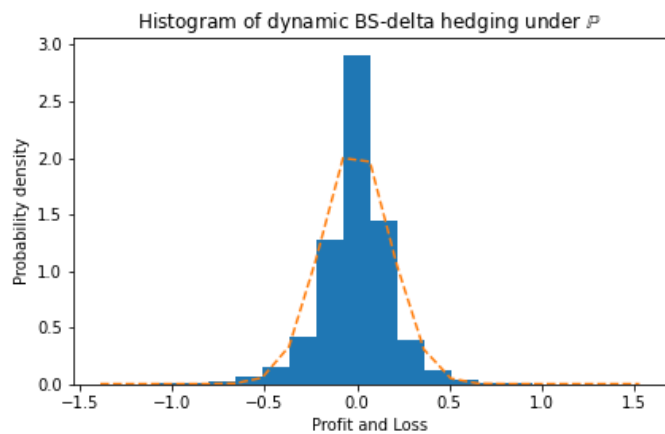


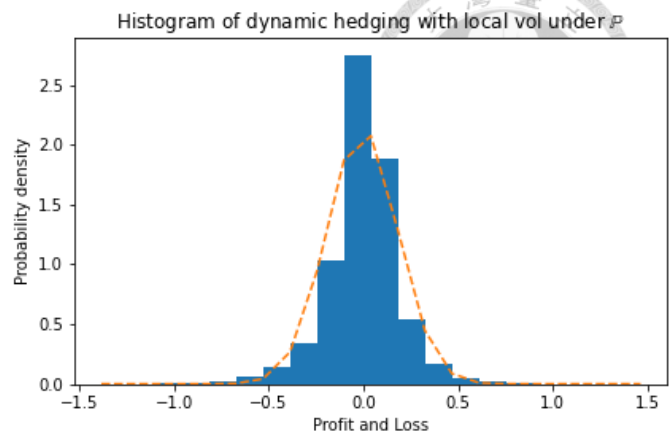
圖 24：風險中立世界下以最小變異數避險參數避險損益分布



Mean: -0.006481646673601564

Standard deviation: 0.18640761737575248

Mean over call price: -0.1982%

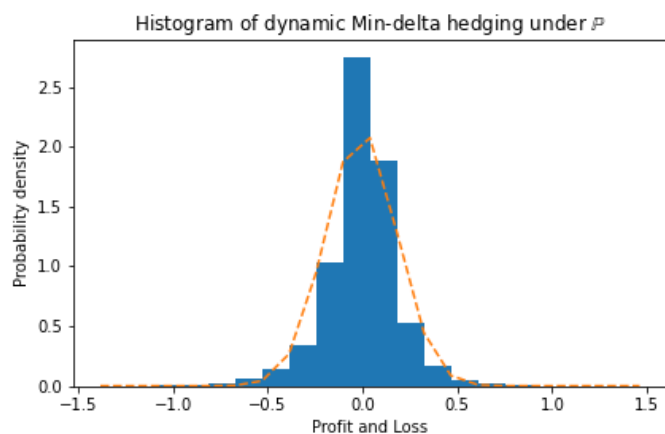


Mean: -0.006588793706903182

Standard deviation: 0.18674167296374203

Mean over call price: -0.2015%

圖 25：真實世界下以隱含波動度避險（左）和局部波動度避險（右）損益分布



Mean: -0.007041493496136178

Standard deviation: 0.1867069472922682

Mean over call price: -0.2153%

圖 26：真實世界下以最小變異數避險參數避險損益分布

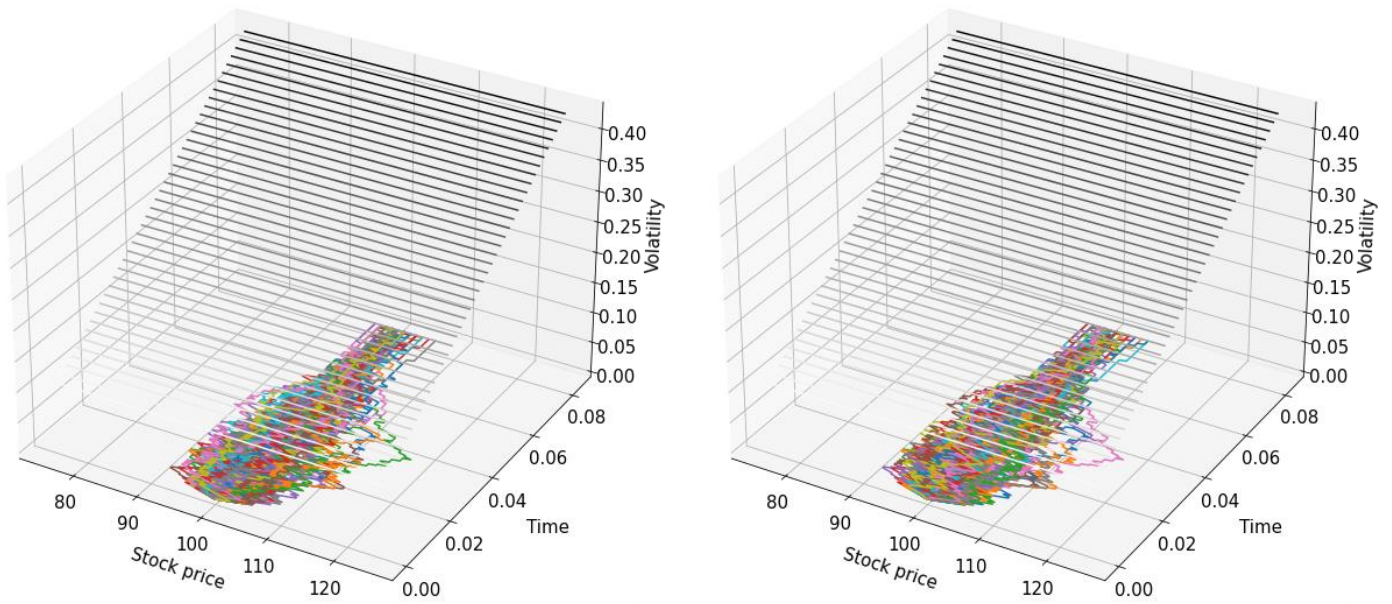


圖 27：真實世界下使用隱含波動度（左）和局部波動度（右）避險損益最佳前 100 條路徑

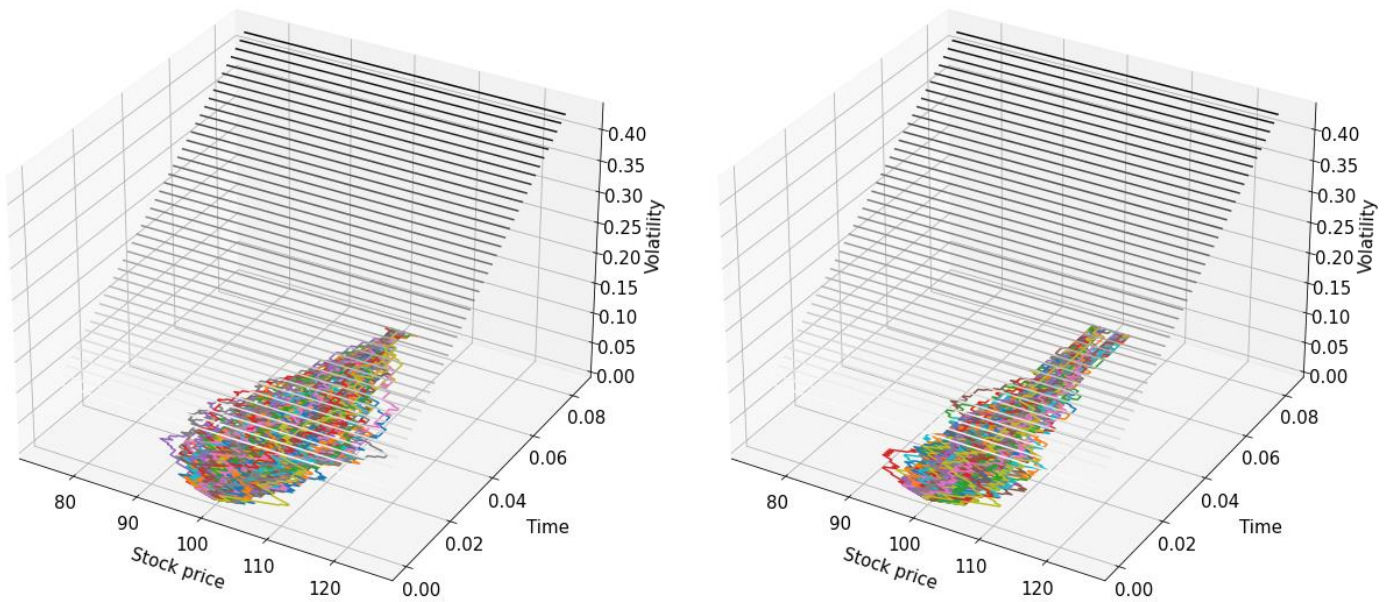


圖 28：真實世界下隱含波動避險相對局部波動避險最佳前 100 條路徑（左）和局部波動避險相對隱含波動避險最佳前 100 條路徑（右）

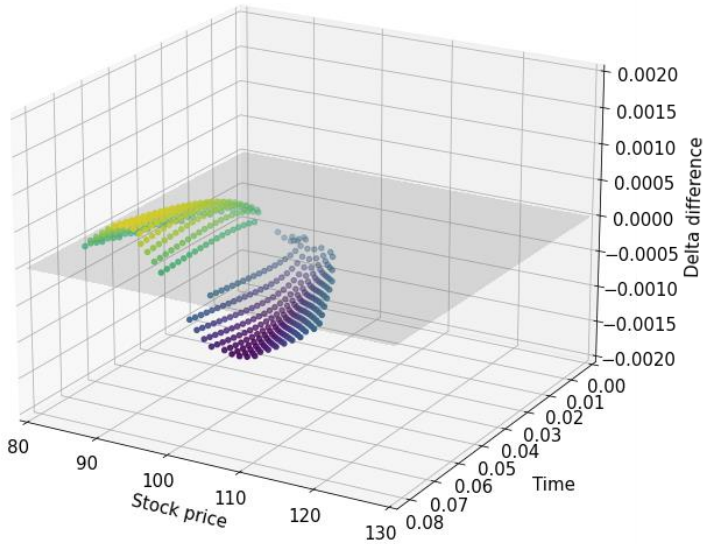
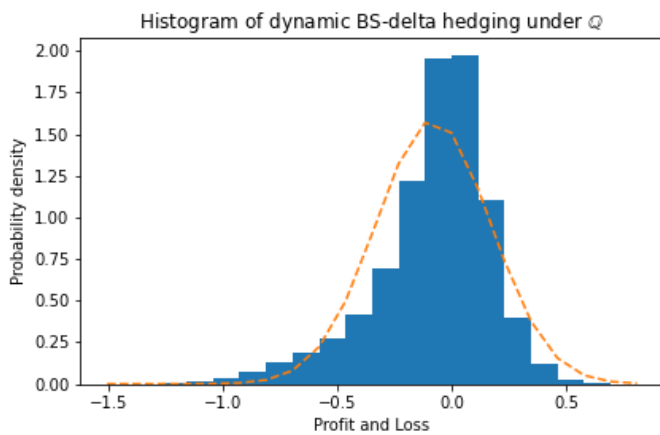


圖 29：局部波動度與避險參數差異 ($\Delta_{BS} - \Delta_{LV}$)

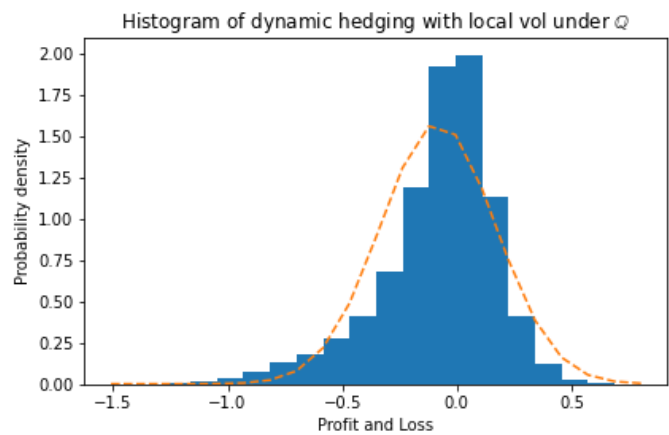
4.5 局部波動度曲面：後傾斜平面



Mean: -0.08284307677058404

Standard deviation: 0.25157641073929843

Mean over call price: -3.8234%

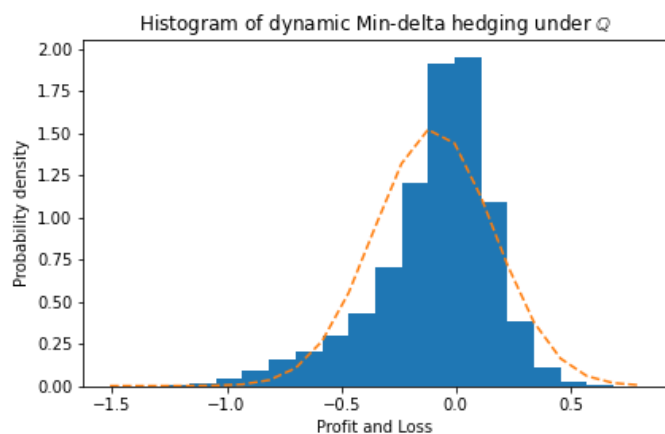


Mean: -0.08283023629557053

Standard deviation: 0.25185143141876304

Mean over call price: -3.8228%

圖 30：風險中立世界下以隱含波動度避險（左）和局部波動度避險（右）損益分布

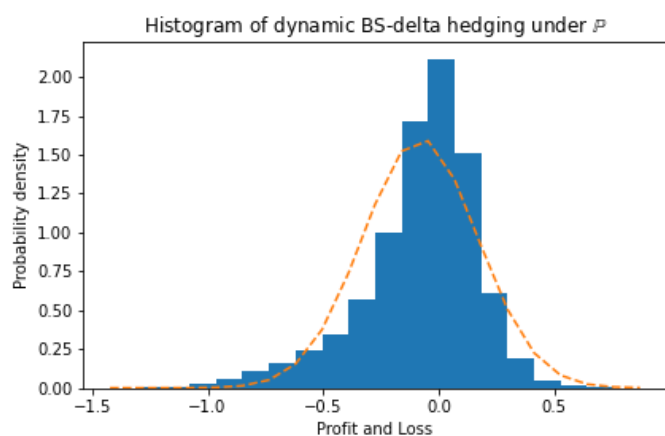


Mean: -0.09615320165160132

Standard deviation: 0.26082512491274973

Mean over call price: -4.4377%

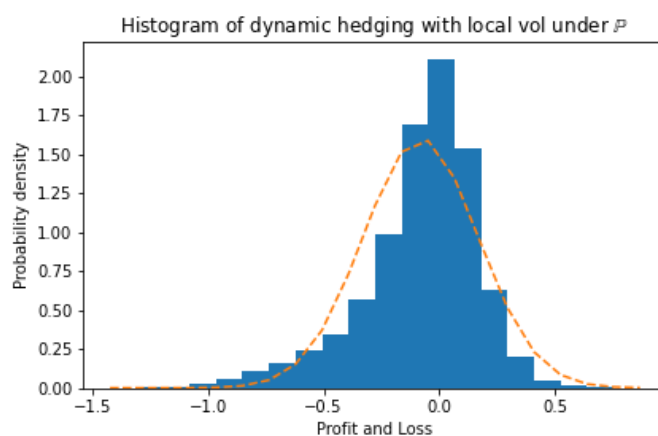
圖 31：風險中立世界下以最小變異數避險參數避險損益分布



Mean: -0.08087856724365089

Standard deviation: 0.2487362301926316

Mean over call price: -3.7328%

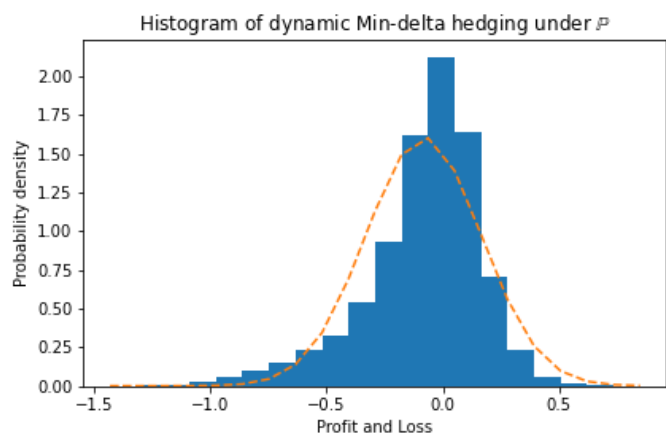


Mean: -0.08096406258077658

Standard deviation: 0.248974238542074

Mean over call price: -3.7367%

圖 32：真實世界下以隱含波動度避險（左）和局部波動度避險（右）損益分布



Mean: -0.08296443068652519

Standard deviation: 0.24863075078285438

Mean over call price: -3.8290%

圖 33：真實世界下以最小變異數避險參數避險損益分布

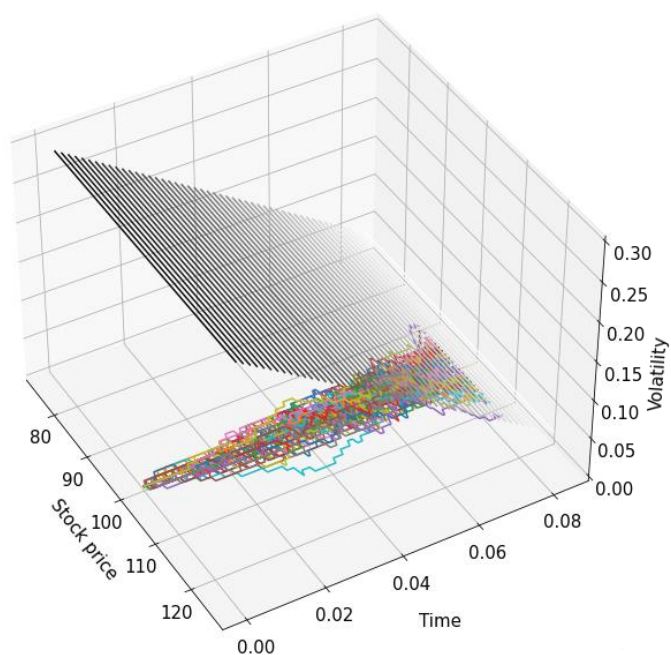
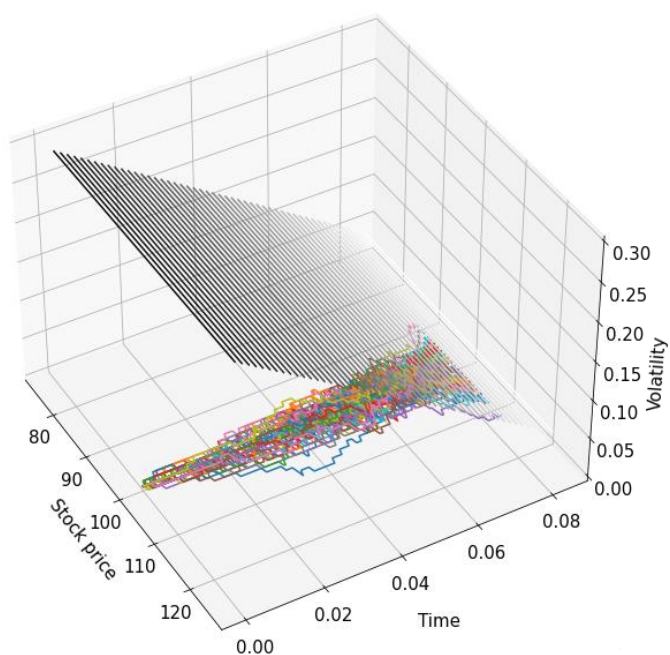


圖 34：真實世界下使用隱含波動度（左）和局部波動度（右）避險損益最佳前 100 條路徑

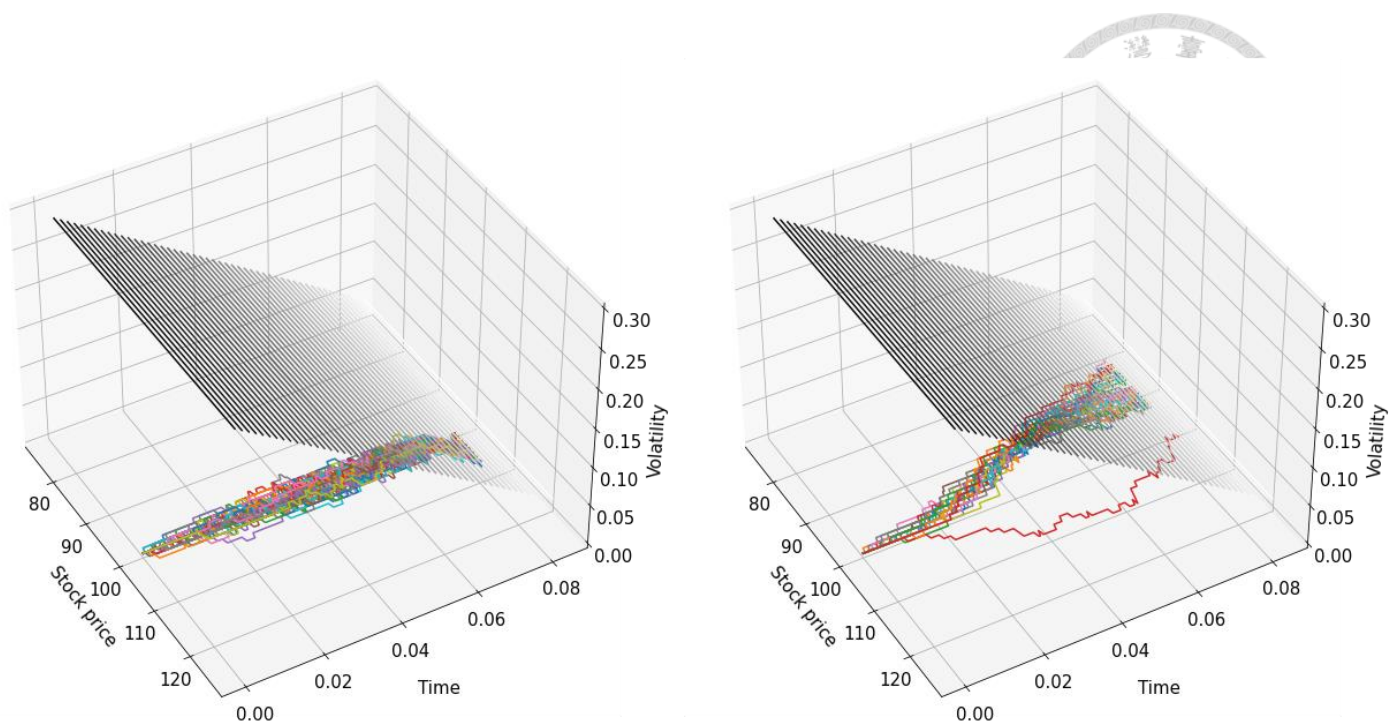


圖 35：真實世界下隱含波動避險相對局部波動避險最佳前 100 條路徑（左）和局部波動避險相對隱含波動避險最佳前 100 條路徑（右）

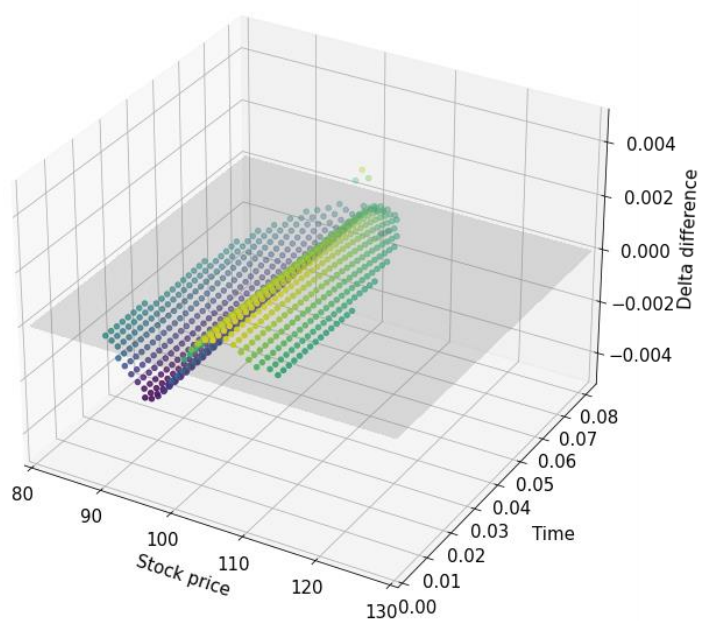
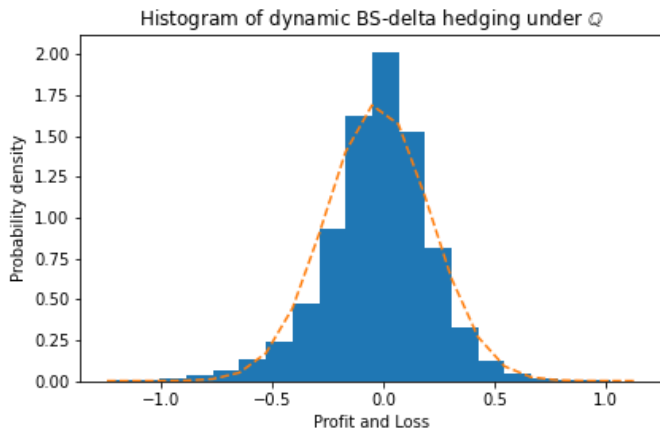


圖 36：局部波動度與避險參數差異 ($\Delta_{BS} - \Delta_{LV}$)

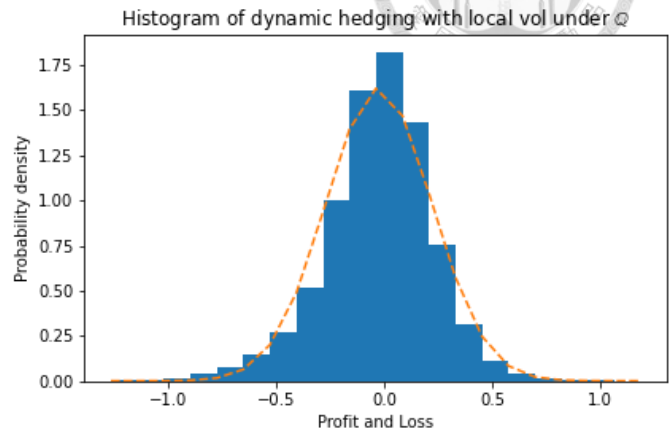
4.6 局部波動度曲面：左傾斜平面



Mean: -0.02428814527639416

Standard deviation: 0.23480184611221225

Mean over call price: -1.4148%

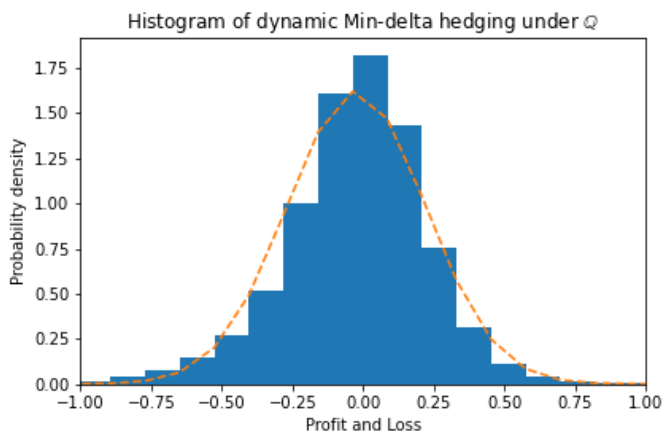


Mean: -0.02413161479935829

Standard deviation: 0.2457994174692093

Mean over call price: -1.4057%

圖 37：風險中立世界下以隱含波動度避險（左）和局部波動度避險（右）損益分布

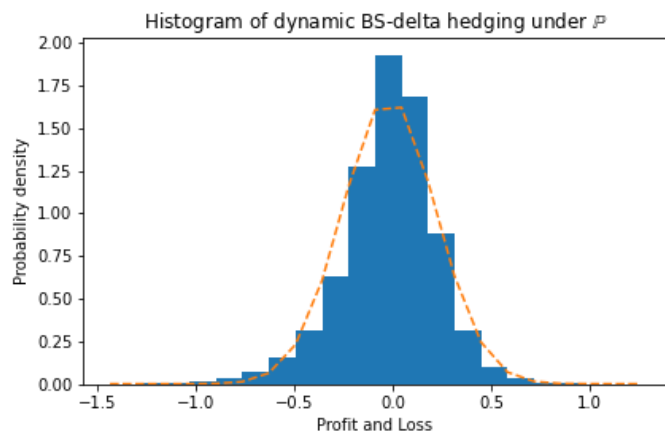


Mean: -0.02413161480743841

Standard deviation: 0.24579941628962554

Mean over call price: -1.4057%

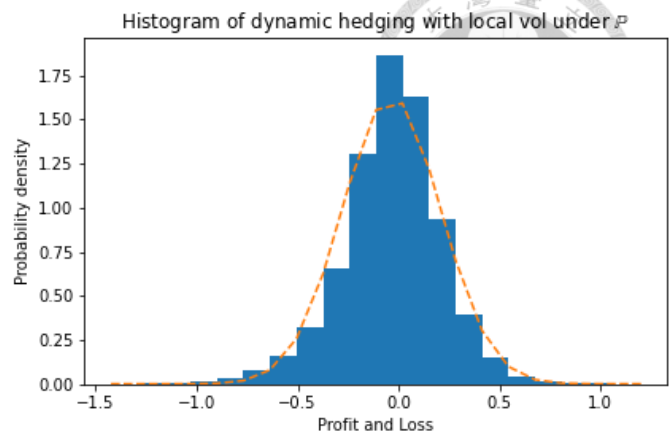
圖 38：風險中立世界下以最小變異數避險參數避險損益分布



Mean: -0.019043263685680344

Standard deviation: 0.2375880597393203

Mean over call price: -1.1093%

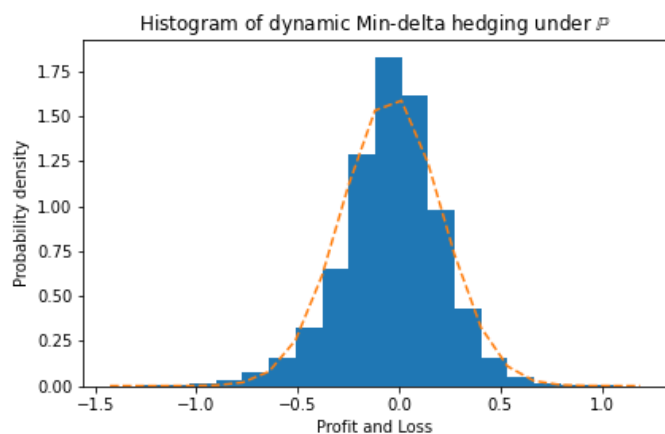


Mean: -0.03525279266724708

Standard deviation: 0.2443361386494945

Mean over call price: -2.0535%

圖 39：真實世界下以隱含波動度避險（左）和局部波動度避險（右）損益分布



Mean: -0.03700445726520138

Standard deviation: 0.24624399555321363

Mean over call price: -2.1555%

圖 40：真實世界下以最小變異數避險參數避險損益分布

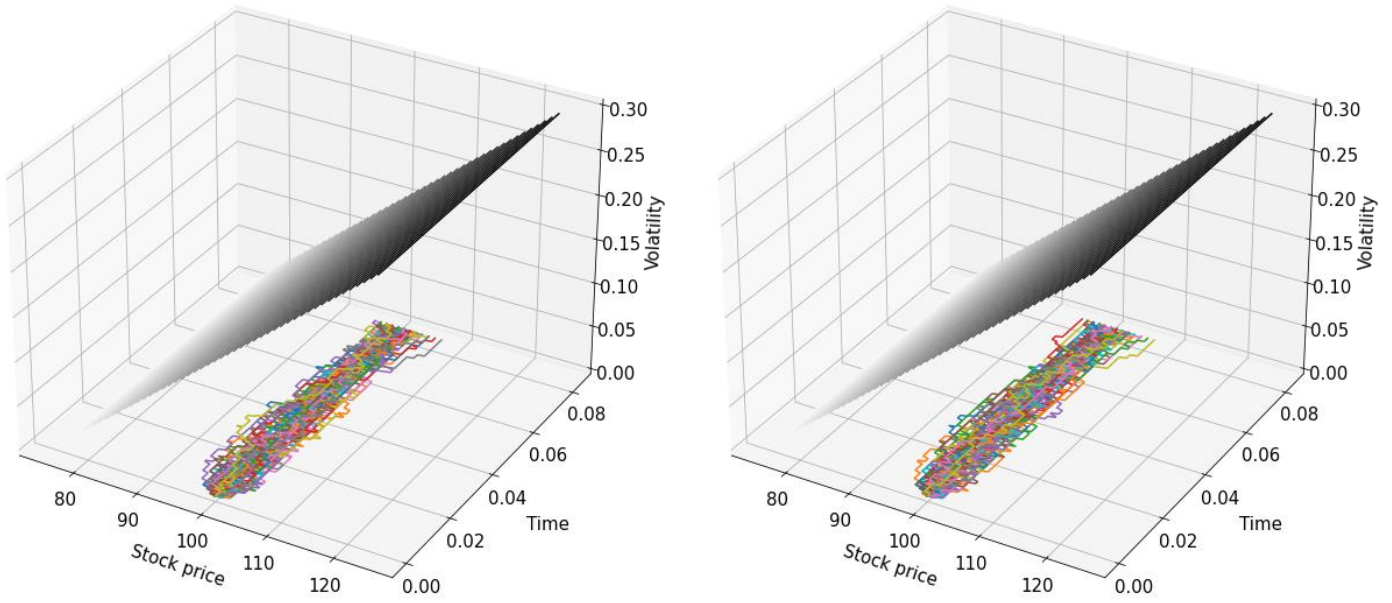


圖 41：真實世界下使用隱含波動度（左）和局部波動度（右）避險損益最佳前 100 條路徑

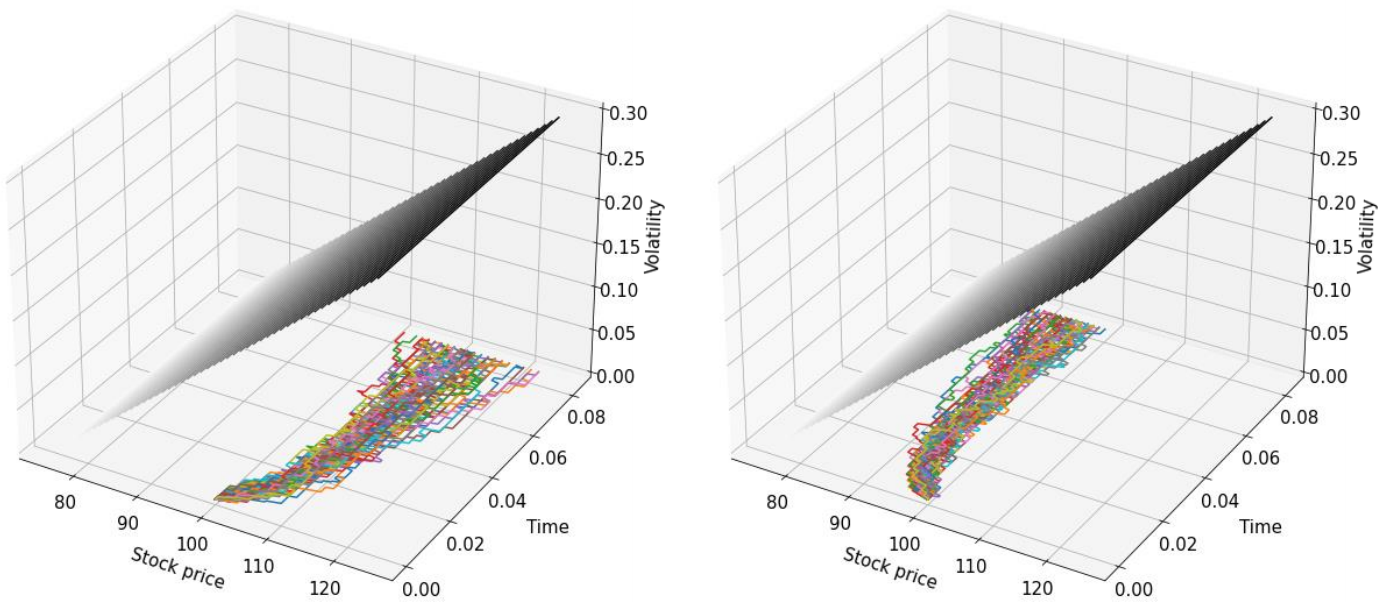


圖 42：真實世界下隱含波動避險相對局部波動避險最佳前 100 條路徑（左）和局部波動避險相對隱含波動避險最佳前 100 條路徑（右）

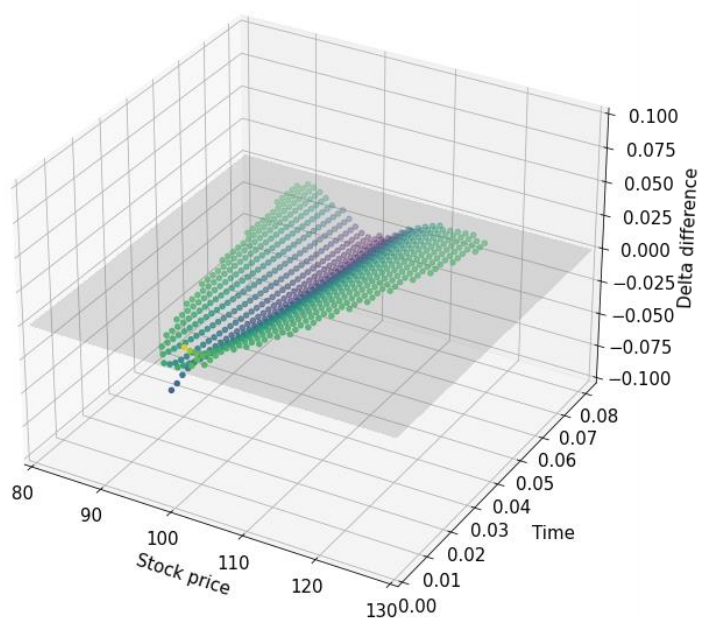
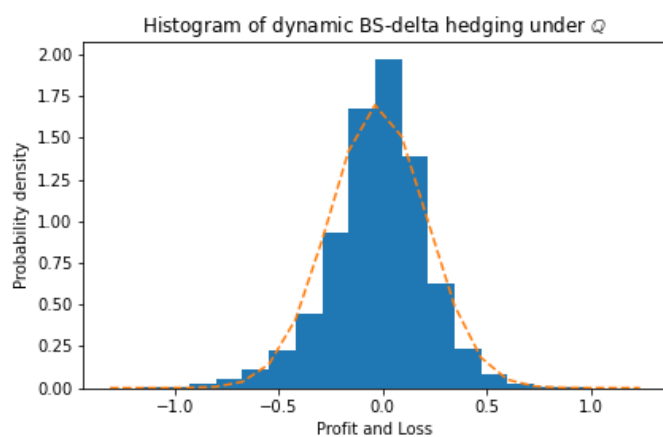


圖 43：局部波動度與避險參數差異 ($\Delta_{BS} - \Delta_{LV}$)

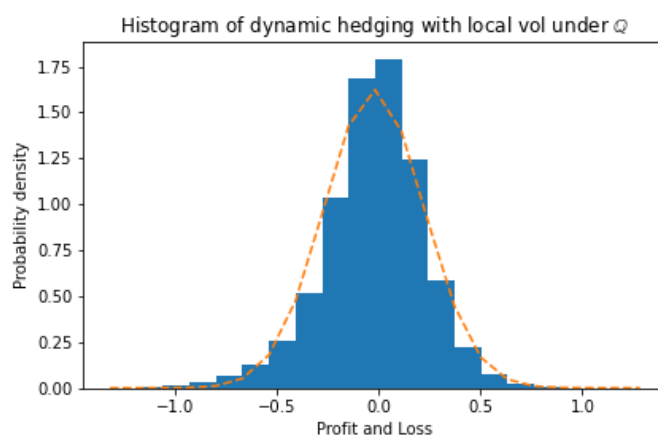
4.7 局部波動度曲面：右傾斜平面



Mean: -0.023067675408713004

Standard deviation: 0.23462096641858693

Mean over call price: -1.3453%

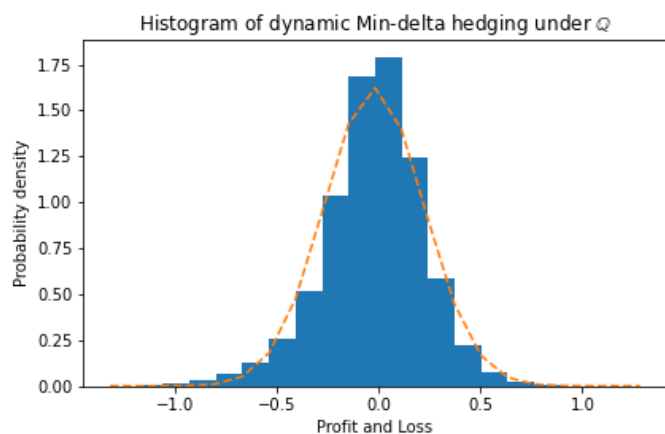


Mean: -0.022924756166665828

Standard deviation: 0.24563115225775117

Mean over call price: -1.3370%

圖 44：風險中立世界下以隱含波動度避險（左）和局部波動度避險（右）損益分布

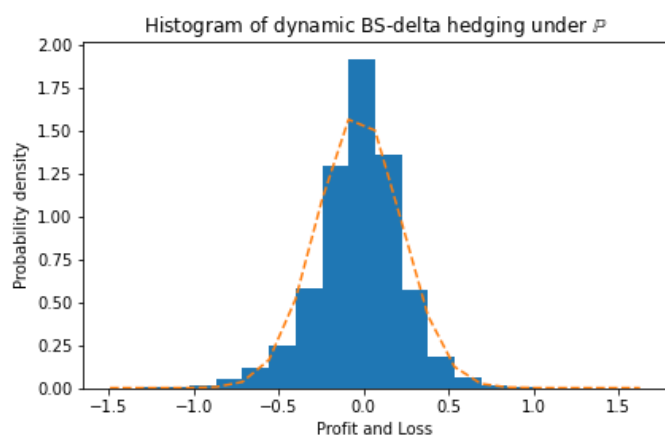


Mean: -0.022924756149683152

Standard deviation: 0.24563115344066255

Mean over call price: -1.3370%

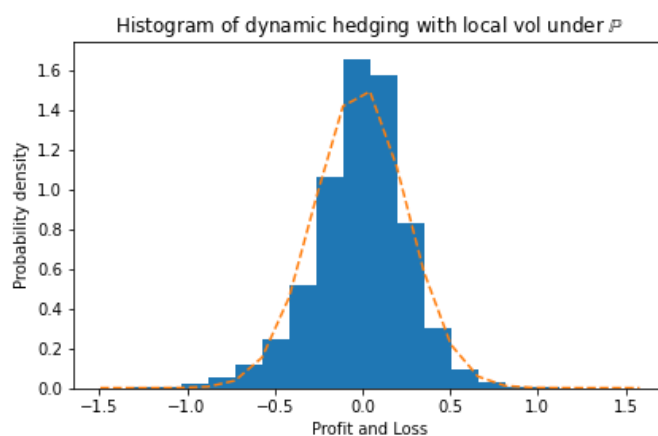
圖 45：風險中立世界下以最小變異數避險參數避險損益分布



Mean: -0.026829252550450607

Standard deviation: 0.2476665321876078

Mean over call price: -1.5660%

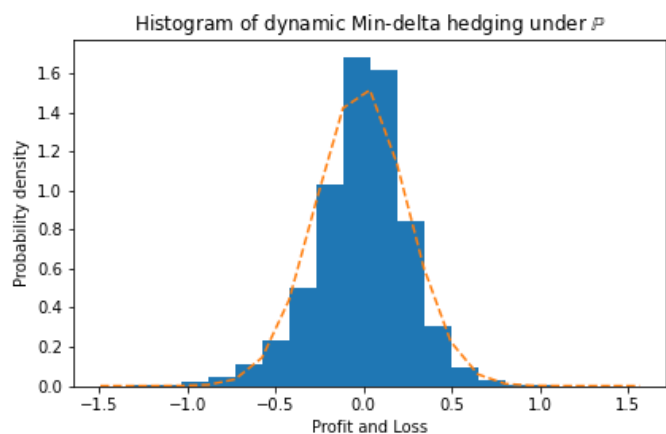


Mean: -0.011260182390056828

Standard deviation: 0.26150192108630627

Mean over call price: -0.6572%

圖 46：真實世界下以隱含波動度避險（左）和局部波動度避險（右）損益分布



Mean: -0.013339094832338192

Standard deviation: 0.25875589906172763

Mean over call price: -0.7786%

圖 47：真實世界下以最小變異數避險參數避險損益分布

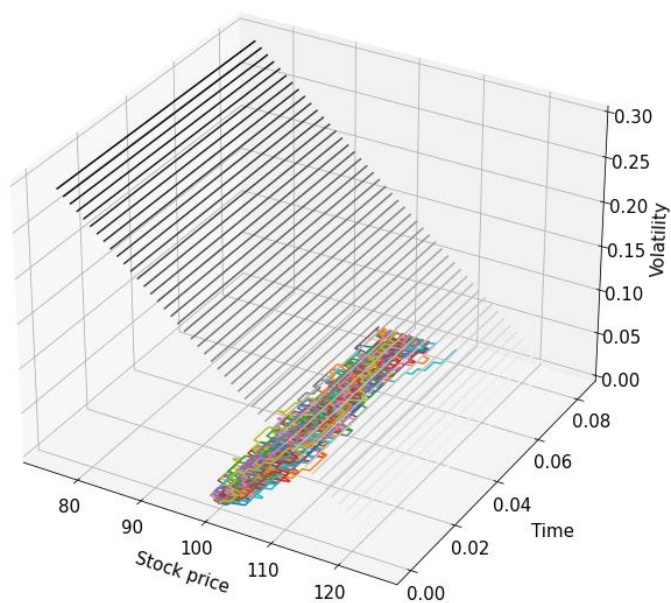
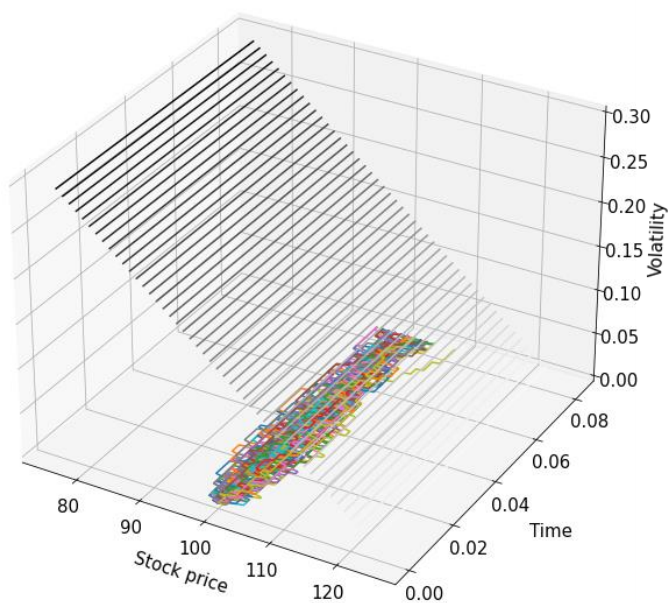


圖 48：真實世界下使用隱含波動度（左）和局部波動度（右）避險損益最佳前 100 條路徑

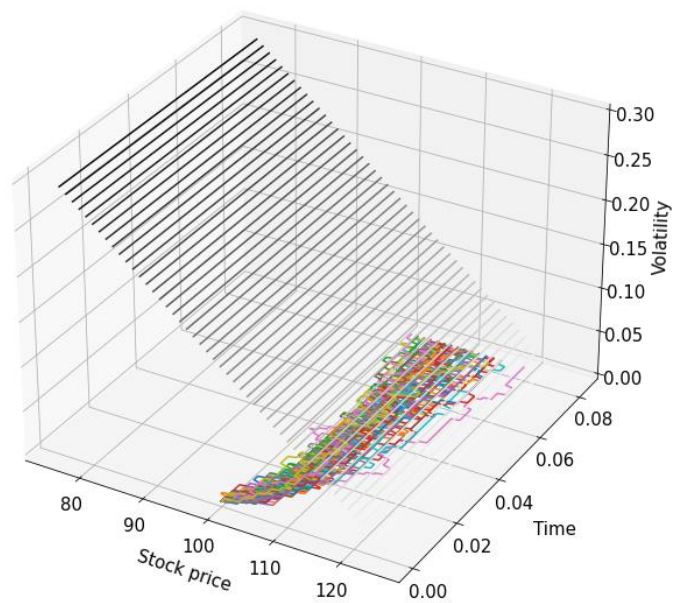
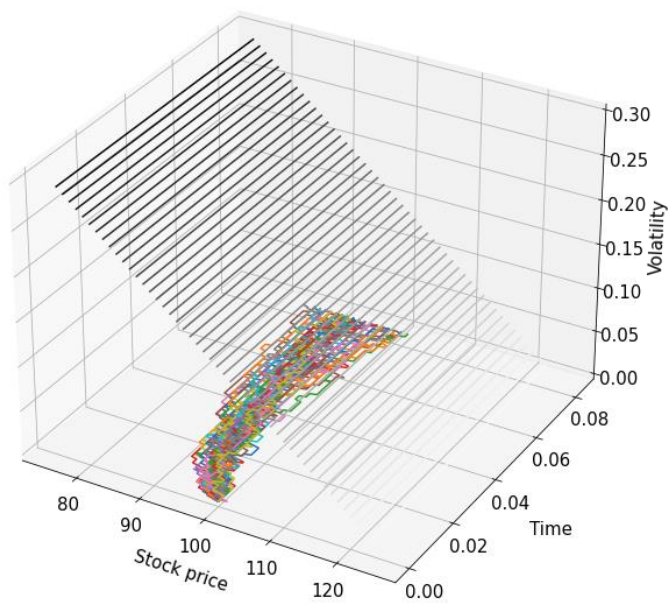


圖 49：真實世界下隱含波動避險相對局部波動避險最佳前 100 條路徑（左）和局部波動避險相對隱含波動避險最佳前 100 條路徑（右）

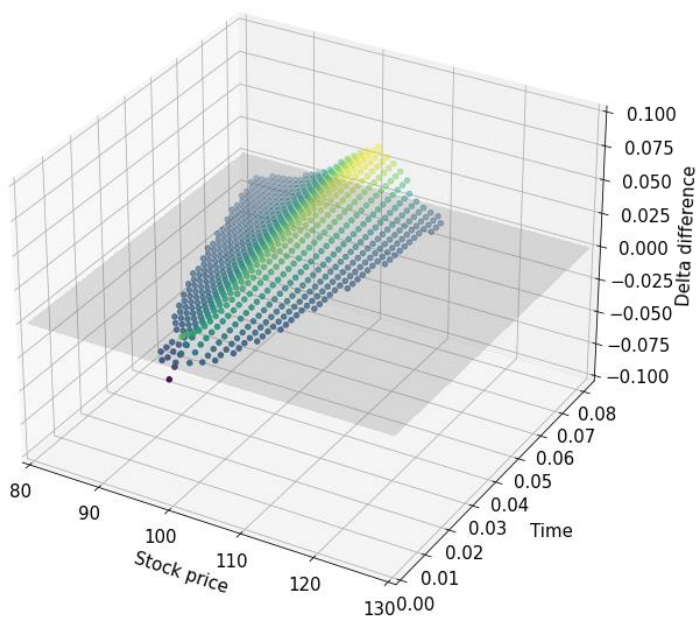
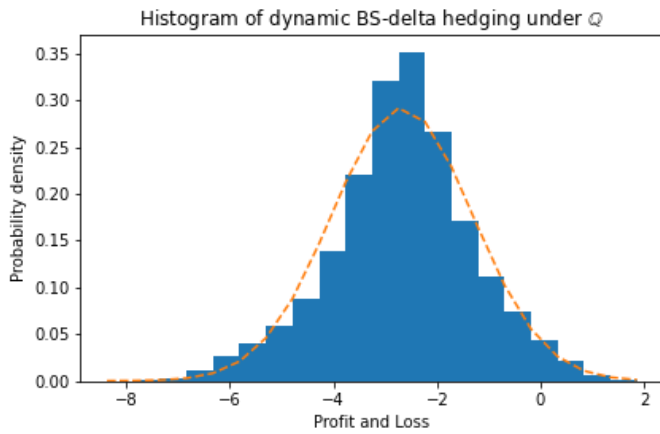


圖 50：局部波動度與避險參數差異（ $\Delta_{BS} - \Delta_{LV}$ ）

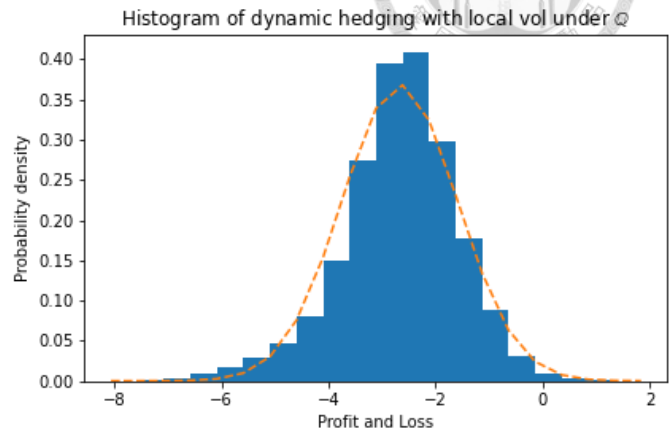
4.8 局部波動度曲面：碗型



Mean: -2.6747263195688817

Standard deviation: 1.3661149783802502

Mean over call price: -22.4280%

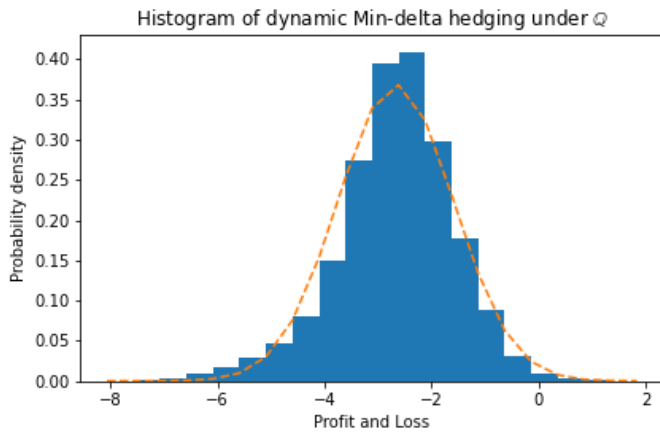


Mean: -2.671146453254083

Standard deviation: 1.0828029712474094

Mean over call price: -22.3980%

圖 51：風險中立世界下以隱含波動度避險（左）和局部波動度避險（右）損益分布

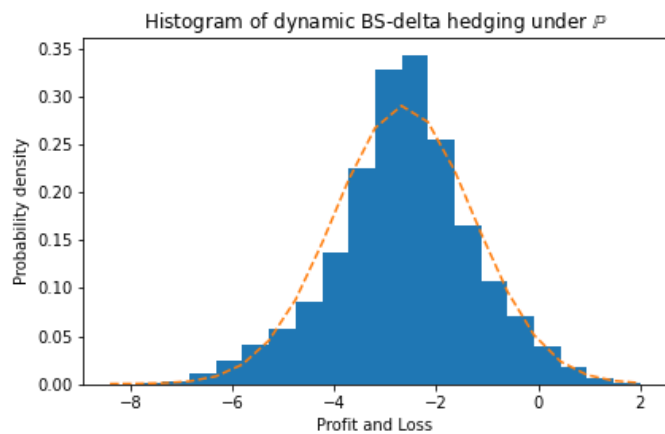


Mean: -2.6711464524498645

Standard deviation: 1.0828030049352824

Mean over call price: -22.3980%

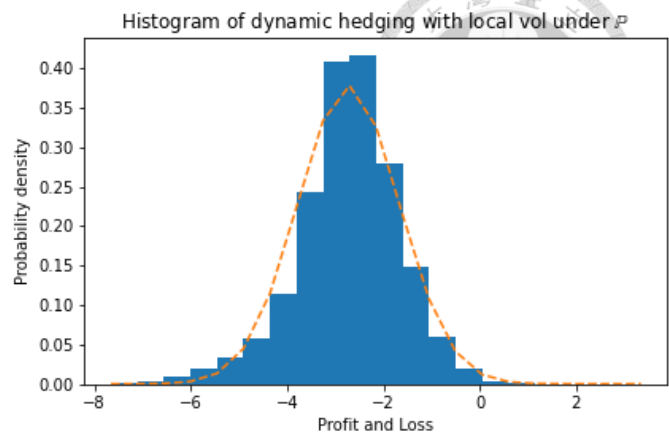
圖 52：風險中立世界下以最小變異數避險參數避險損益分布



Mean: -2.638856581709512

Standard deviation: 1.3714186697319344

Mean over call price: -22.1272%

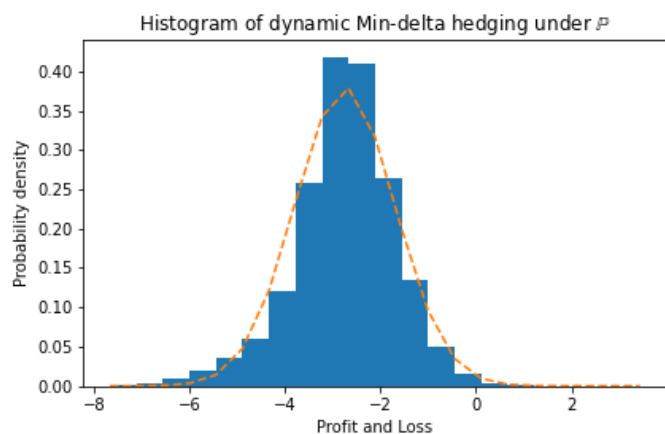


Mean: -2.7254069924379944

Standard deviation: 1.0545854815621312

Mean over call price: -22.8530%

圖 53：真實世界下以隱含波動度避險（左）和局部波動度避險（右）損益分布



Mean: -2.7468954428677126

Standard deviation: 1.0501280731773348

Mean over call price: -23.0332%

圖 54：真實世界下以最小變異數避險參數避險損益分布

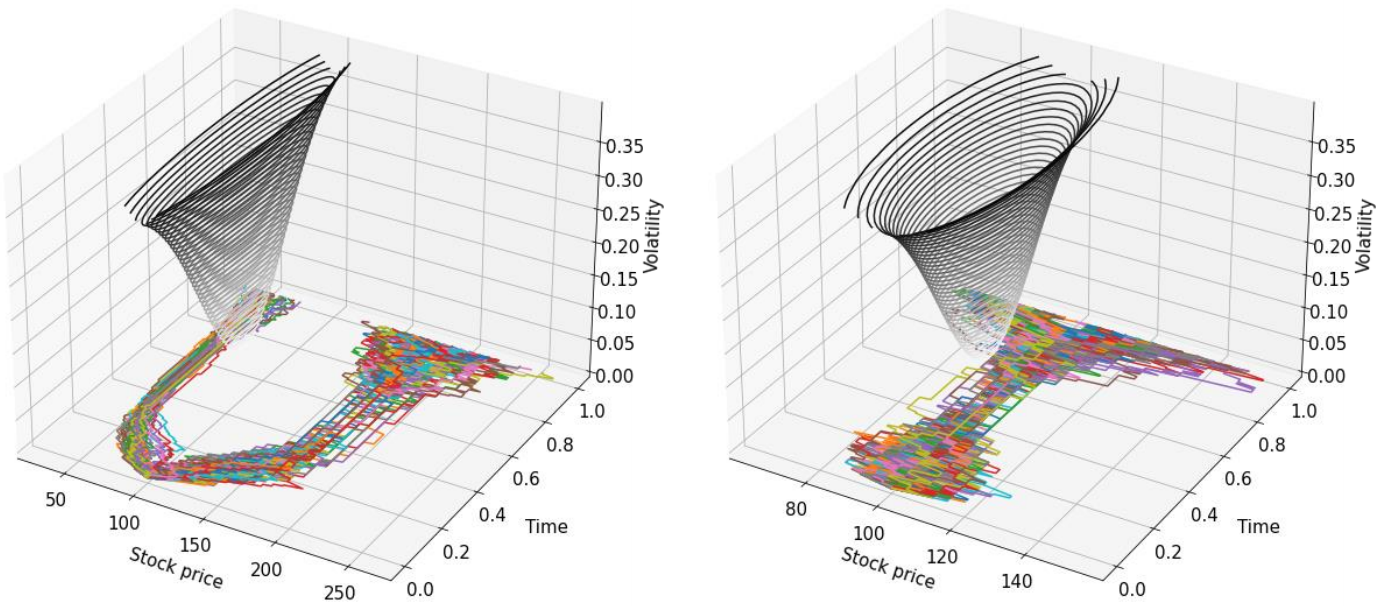


圖 55：真實世界下使用隱含波動度（左）和局部波動度（右）避險損益最佳前 100 條路徑

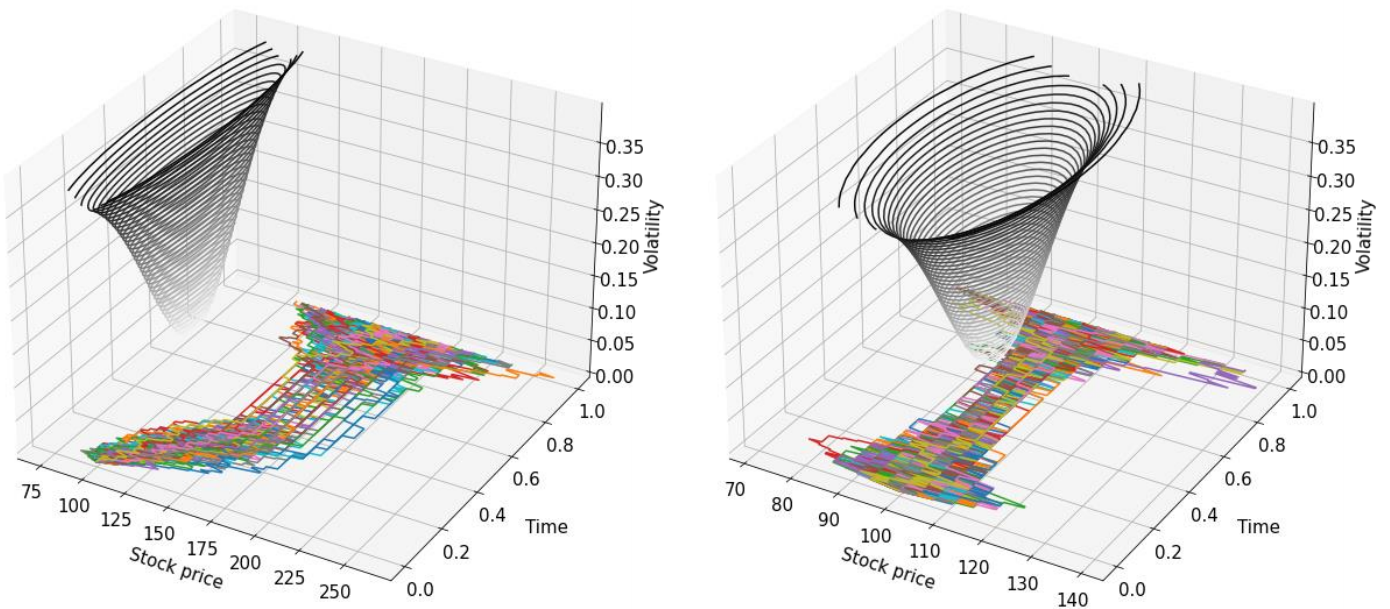
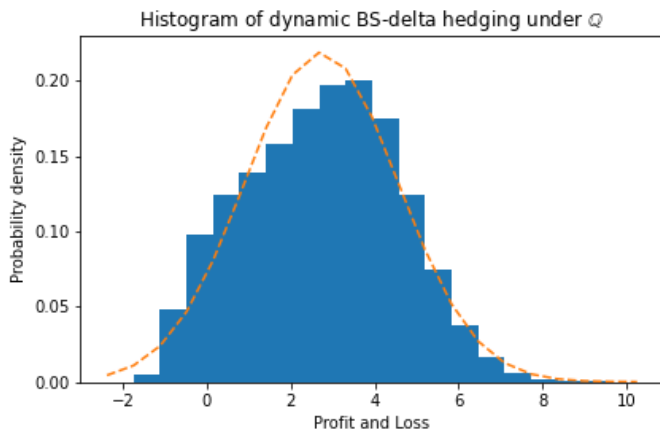


圖 56：真實世界下隱含波動避險相對局部波動避險最佳前 100 條路徑（左）和局部波動避險相對隱含波動避險最佳前 100 條路徑（右）



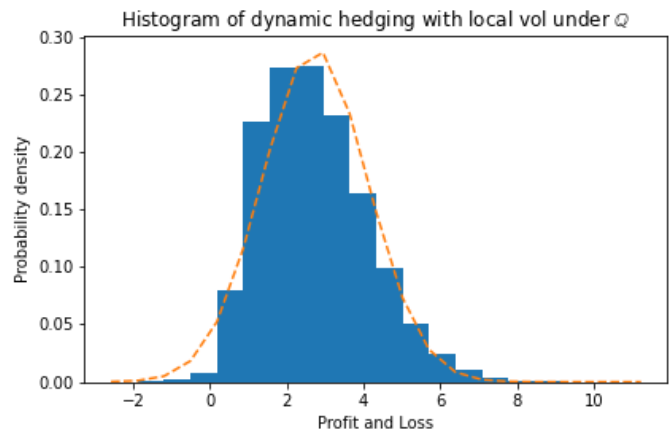
4.9 局部波動度曲面：單峰型



Mean: 2.732416803417376

Standard deviation: 1.822719427474949

Mean over call price: 45.9520%

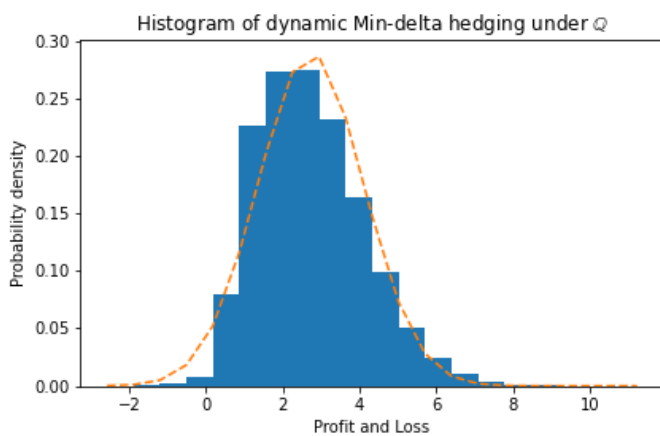


Mean: 2.734903078753769

Standard deviation: 1.377296779962505

Mean over call price: 45.9939%

圖 57：風險中立世界下以隱含波動度避險（左）和局部波動度避險（右）損益分布

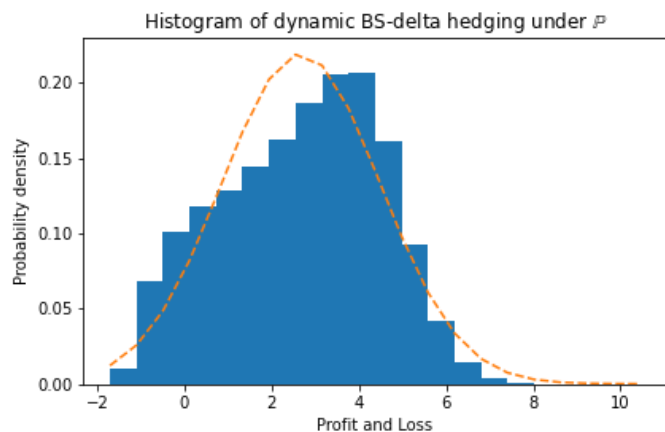


Mean: 2.7349030792840807

Standard deviation: 1.377296819787342

Mean over call price: 45.9939%

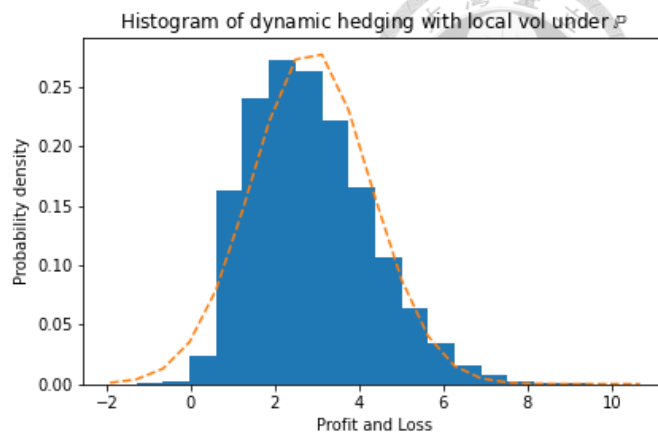
圖 58：風險中立世界下以最小變異數避險參數避險損益分布



Mean: 2.669194430308589

Standard deviation: 1.8198194819193583

Mean over call price: 44.9400%

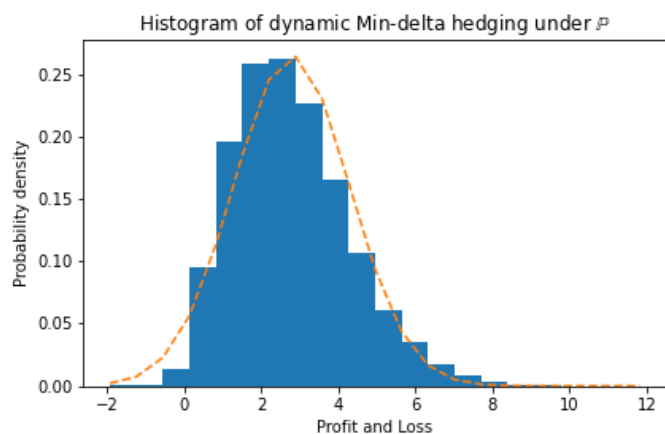


Mean: 2.8509211657210956

Standard deviation: 1.4113326385509386

Mean over call price: 47.9996%

圖 59：真實世界下以隱含波動度避險（左）和局部波動度避險（右）損益分布



Mean: 2.784769759952051

Standard deviation: 1.5043208674611386

Mean over call price: 46.8858%

圖 60：真實世界下以最小變異數避險參數避險損益分布

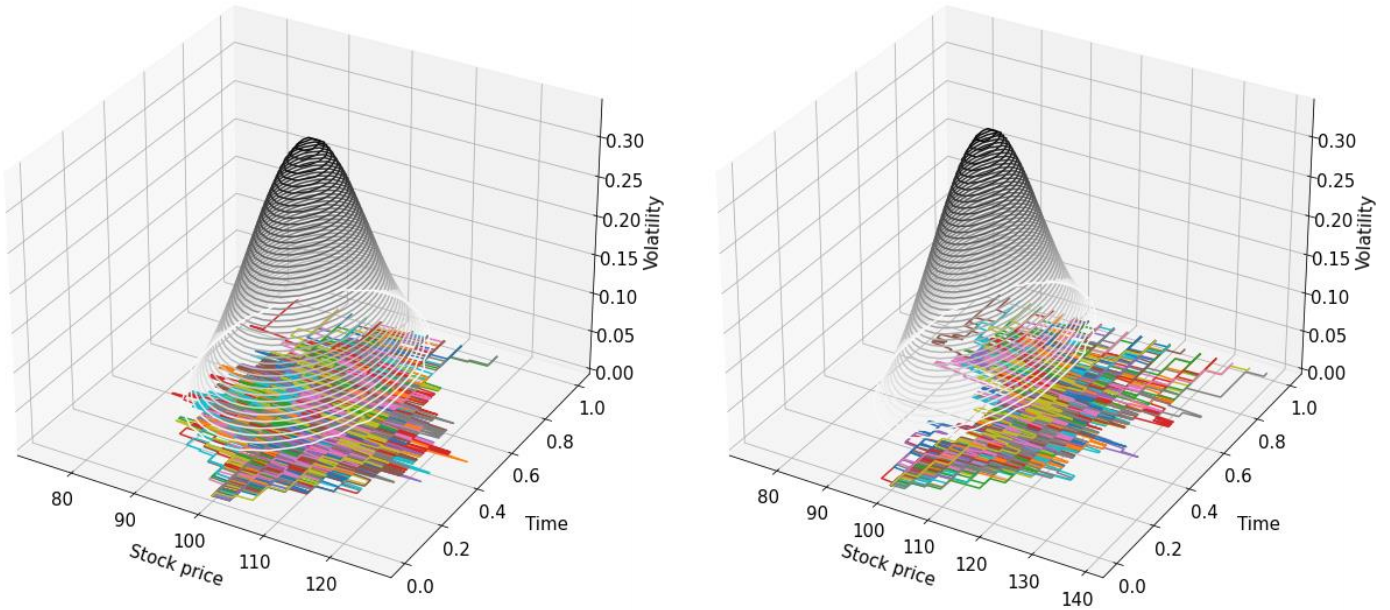


圖 61：真實世界下使用隱含波動度（左）和局部波動度（右）避險損益最佳前 100 條路徑

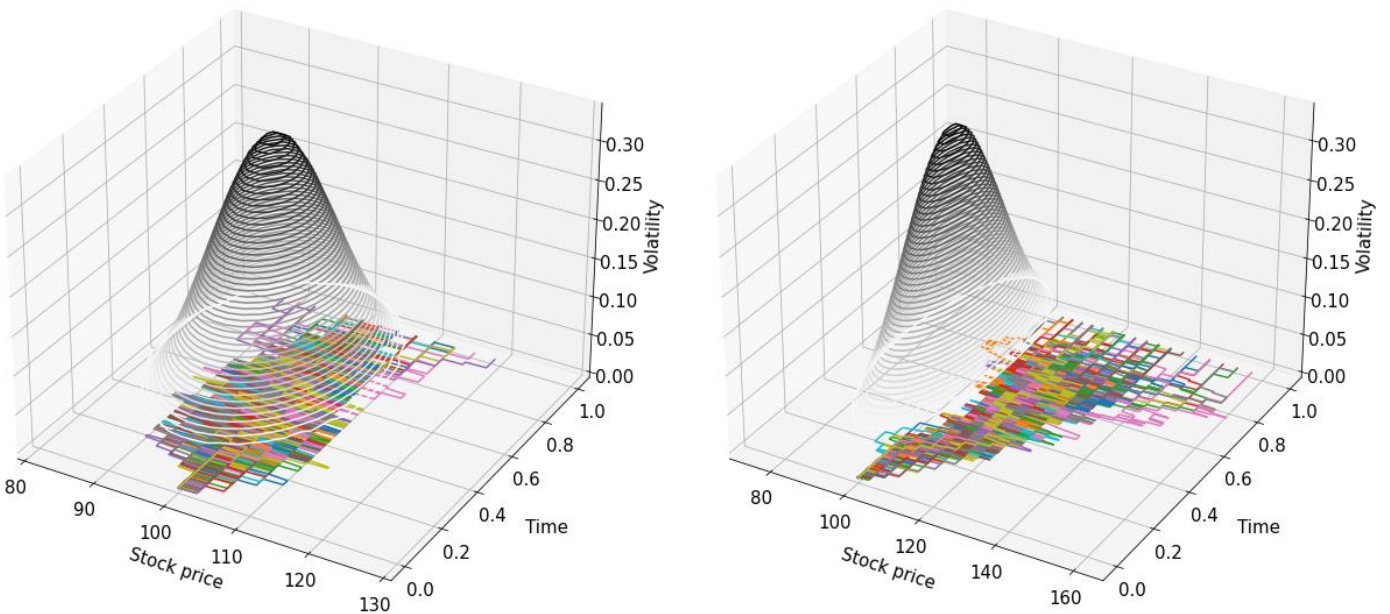
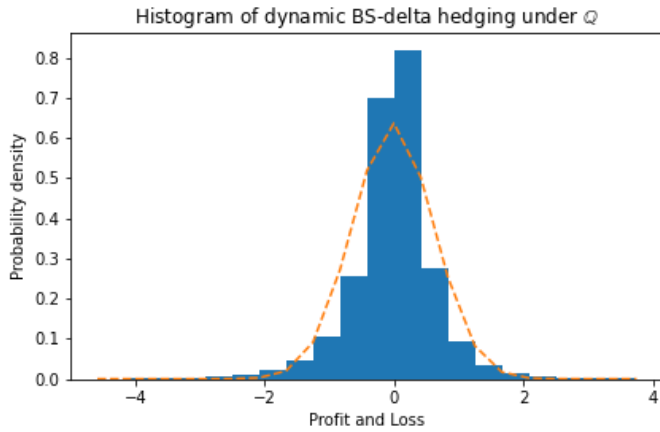


圖 62：真實世界下隱含波動避險相對局部波動避險最佳前 100 條路徑（左）和局部波動避險相對隱含波動避險最佳前 100 條路徑（右）



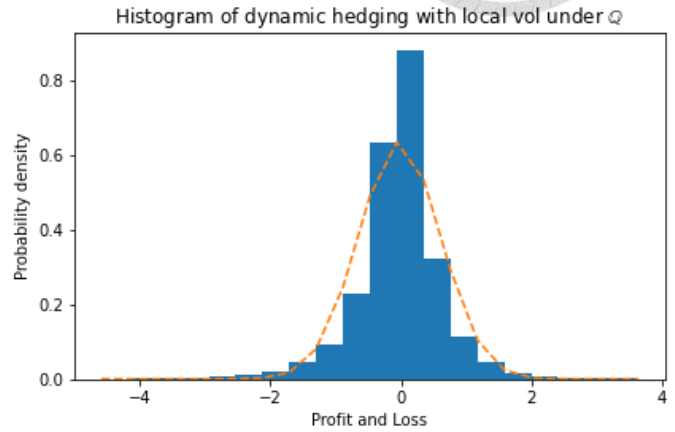
4.10 局部波動度曲面：前傾平面型



Mean: -0.02295610114652155

Standard deviation: 0.6257038500221449

Mean over call price: -0.1967%

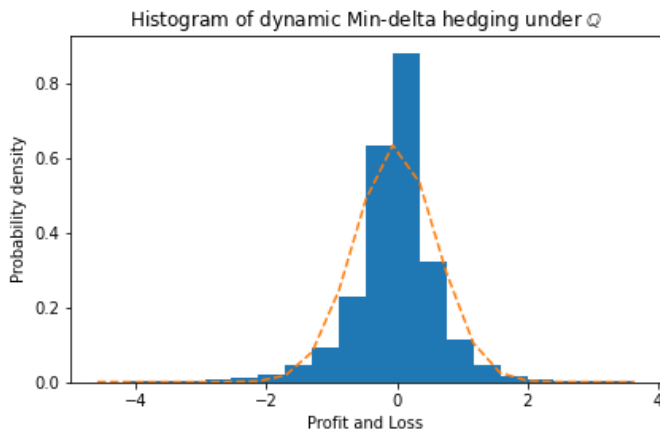


Mean: -0.022891397920489977

Standard deviation: 0.627014518494661

Mean over call price: -0.1961%

圖 63：風險中立世界下以隱含波動度避險（左）和局部波動度避險（右）損益分布

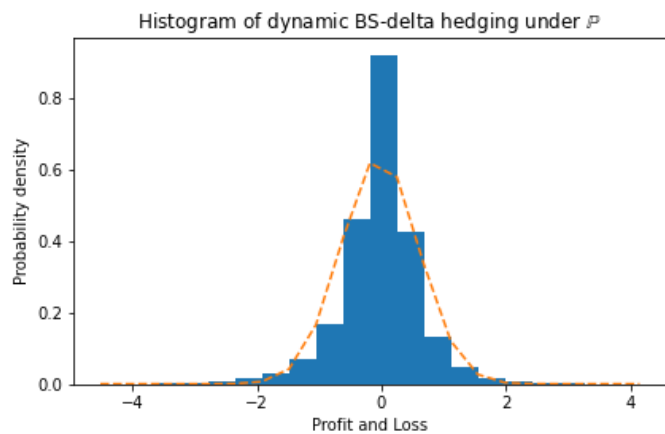


Mean: -0.022891397626722224

Standard deviation: 0.6270145173702381

Mean over call price: -0.1961%

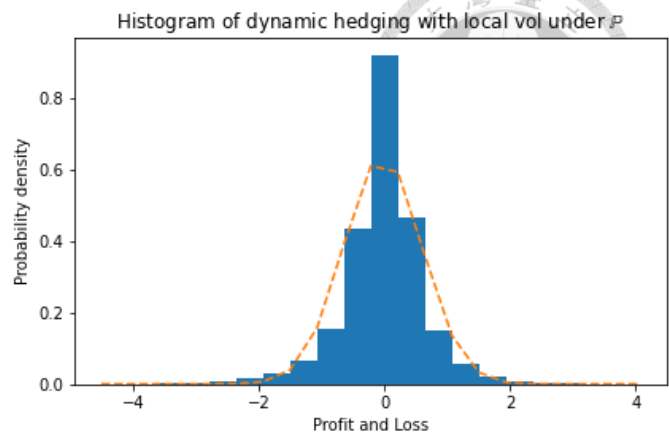
圖 64：風險中立世界下以最小變異數避險參數避險損益分布



Mean: -0.02508192836516718

Standard deviation: 0.6238359651316058

Mean over call price: -0.2149%

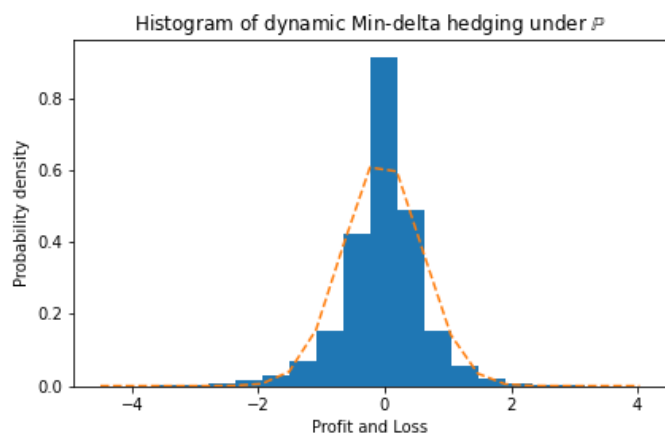


Mean: -0.02715122984891131

Standard deviation: 0.6246700968824719

Mean over call price: -0.2326%

圖 65：真實世界下以隱含波動度避險（左）和局部波動度避險（右）損益分布



Mean: -0.038002150767846576

Standard deviation: 0.6244888404176006

Mean over call price: -0.3256%

圖 66：真實世界下以最小變異數避險參數避險損益分布

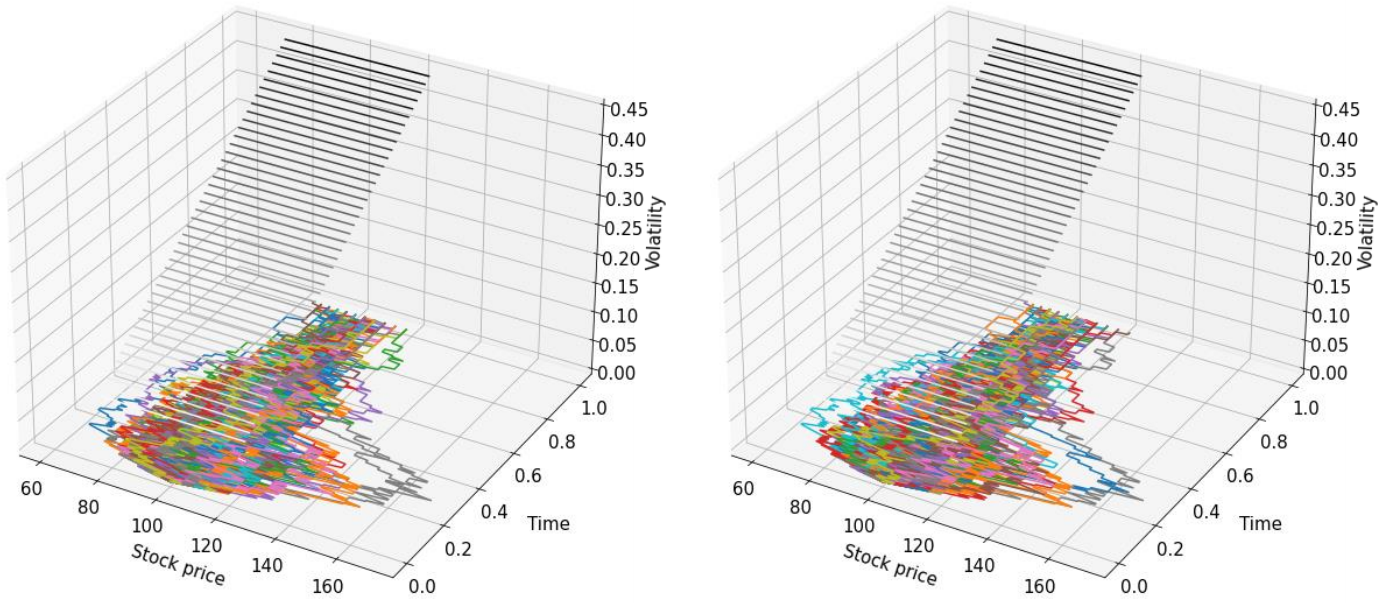


圖 67：真實世界下使用隱含波動度（左）和局部波動度（右）避險損益最佳前 100 條路徑

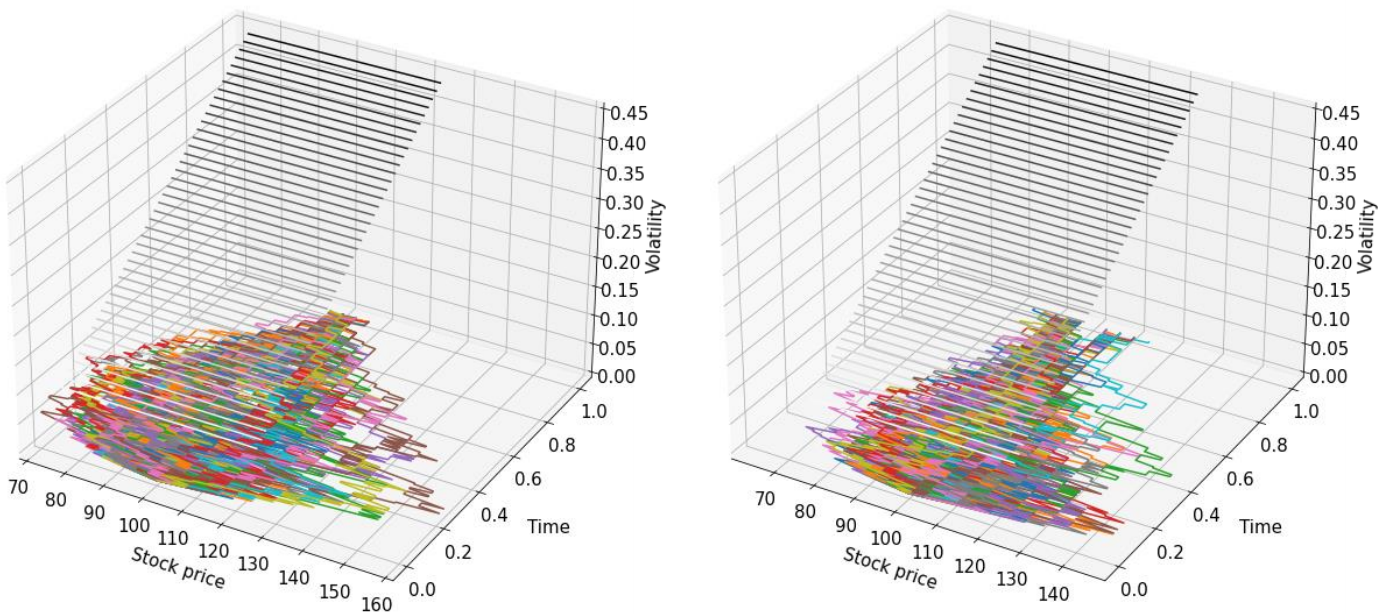
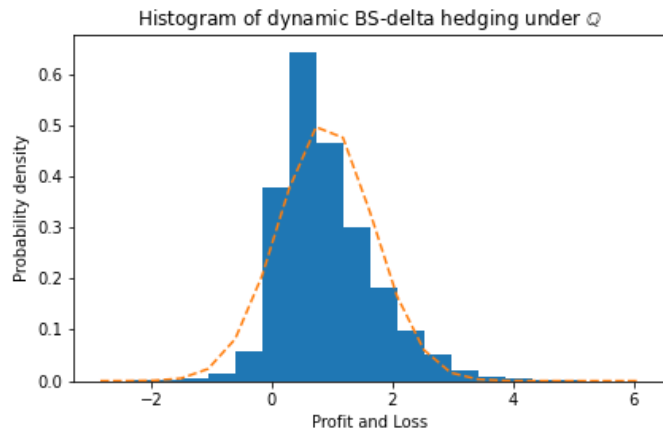


圖 68：真實世界下隱含波動避險相對局部波動避險最佳前 100 條路徑（左）和局部波動避險相對隱含波動避險最佳前 100 條路徑（右）

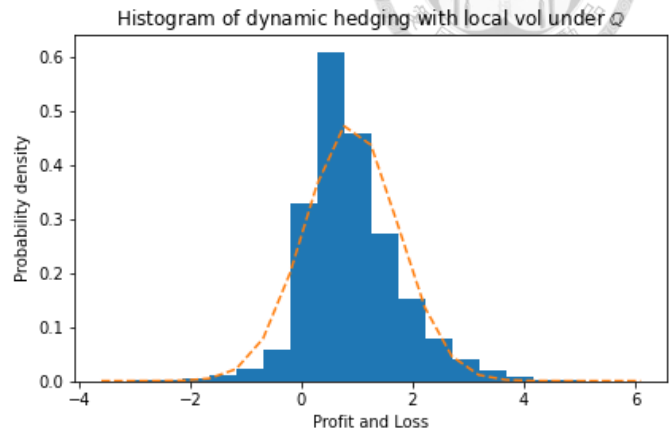
4.11 局部波動度曲面：前傾波浪型



Mean: 0.8973849448212488

Standard deviation: 0.7870882486772003

Mean over call price: 9.0627%

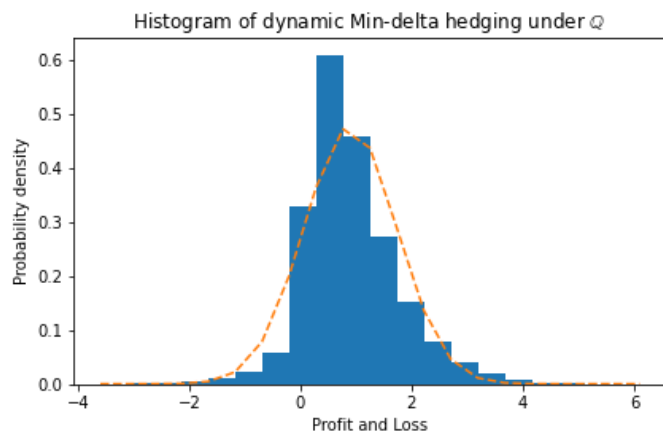


Mean: 0.899008254194647

Standard deviation: 0.8338463209675335

Mean over call price: 9.0791%

圖 69：風險中立世界下以隱含波動度避險（左）和局部波動度避險（右）損益分布

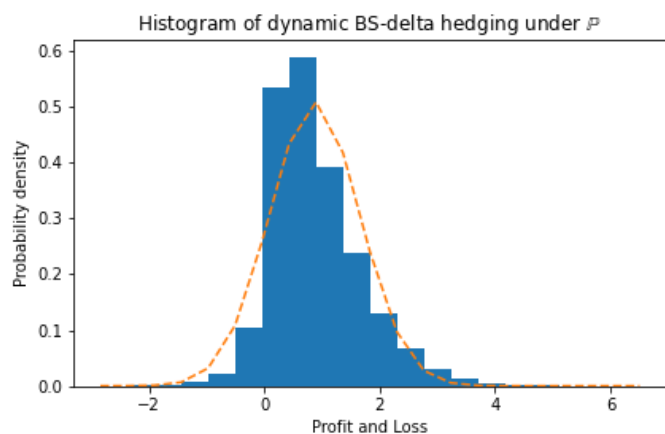


Mean: 0.8990082529284935

Standard deviation: 0.8338463169902702

Mean over call price: 9.0791%

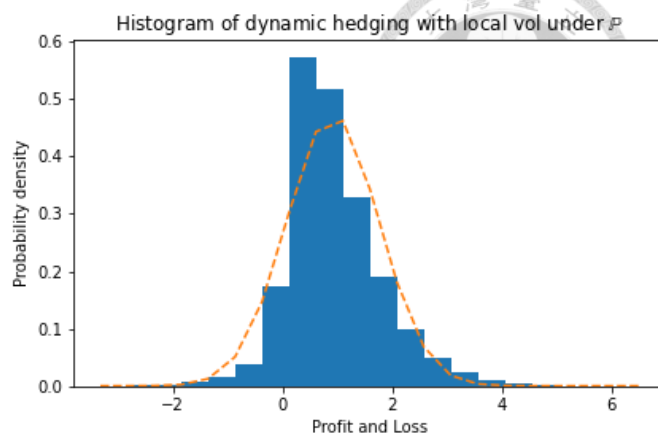
圖 70：風險中立世界下以最小變異數避險參數避險損益分布



Mean: 0.8728228870027779

Standard deviation: 0.7834426137621914

Mean over call price: 8.8146%

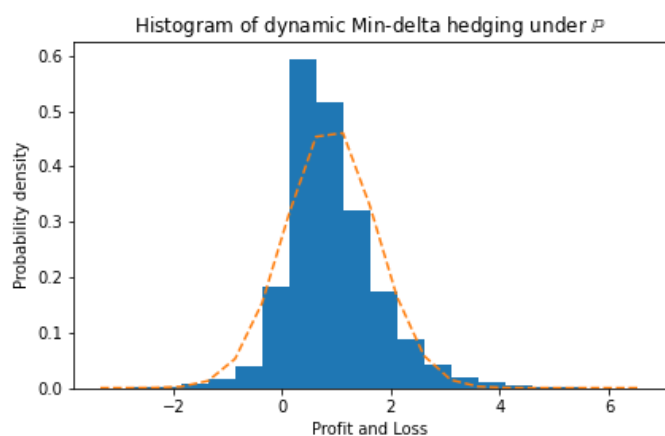


Mean: 0.9178858050076336

Standard deviation: 0.8422018914549427

Mean over call price: 9.2697%

圖 71：真實世界下以隱含波動度避險（左）和局部波動度避險（右）損益分布



Mean: 0.8918793014548816

Standard deviation: 0.8351569948448699

Mean over call price: 9.0071%

圖 72：真實世界下以最小變異數避險參數避險損益分布

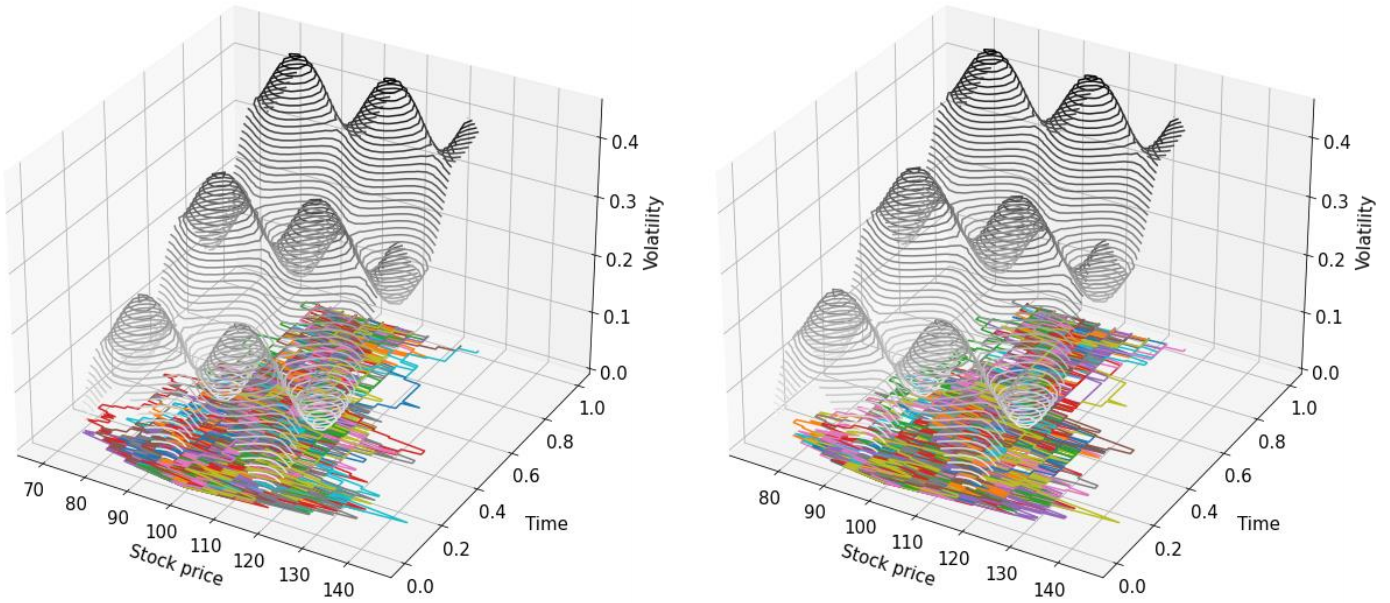


圖 73：真實世界下使用隱含波動度（左）和局部波動度（右）避險損益最佳前 100 條路徑

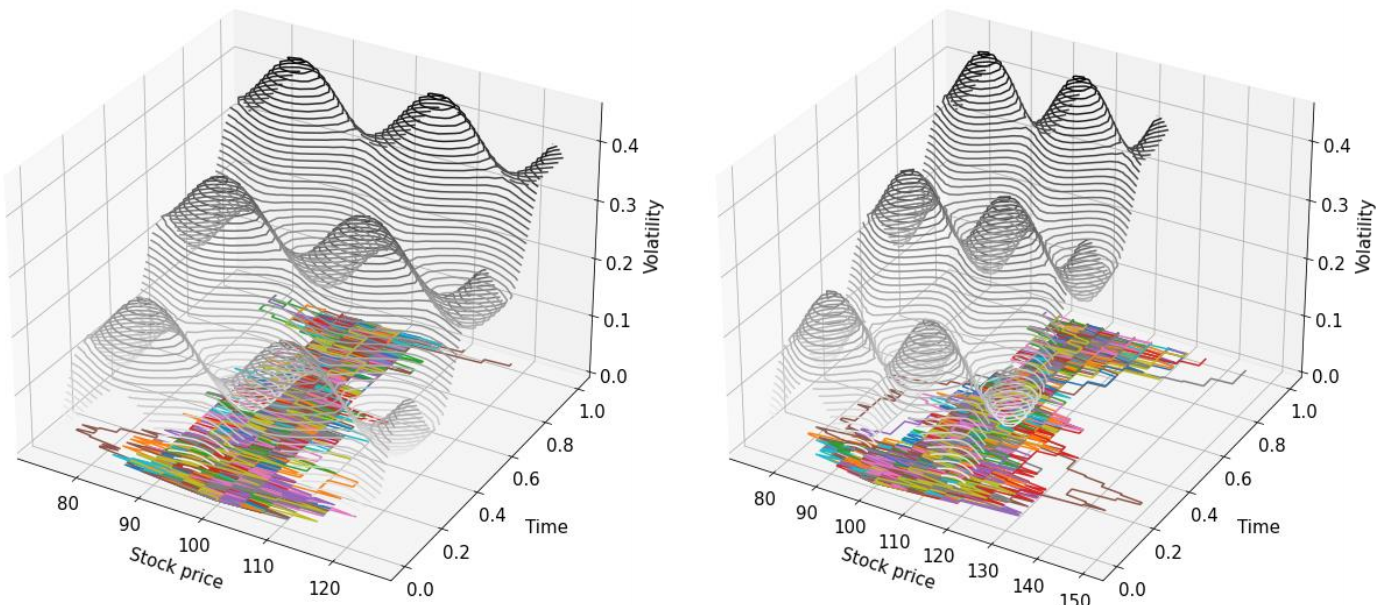
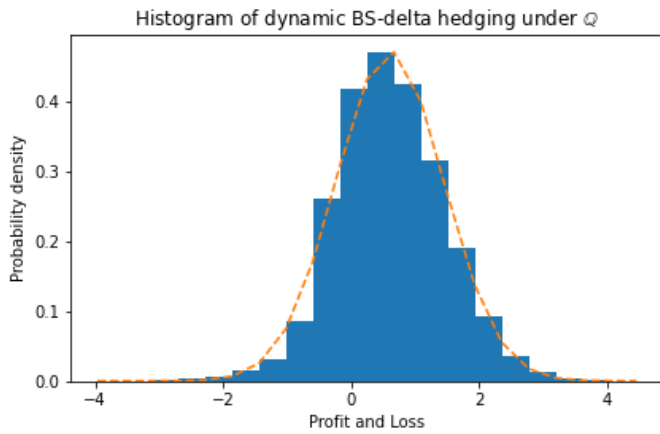


圖 74：真實世界下隱含波動避險相對局部波動避險最佳前 100 條路徑（左）和局部波動避險相對隱含波動避險最佳前 100 條路徑（右）

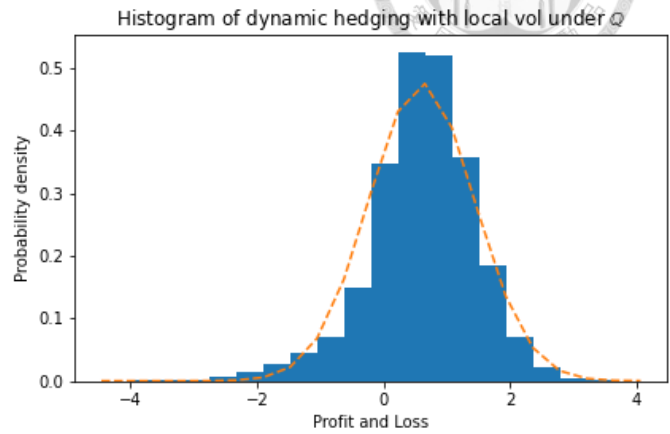
4.12 局部波動度曲面：山峰峽谷型



Mean: 0.6028172685837807

Standard deviation: 0.8434667547052691

Mean over call price: 7.3580%

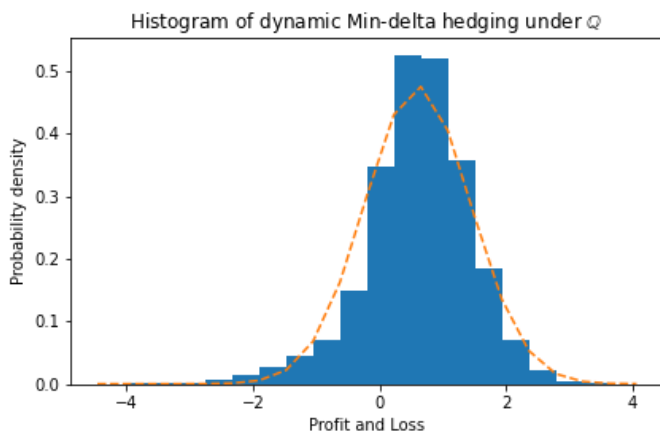


Mean: 0.6041234043948641

Standard deviation: 0.8389411365265629

Mean over call price: 7.3739%

圖 75：風險中立世界下以隱含波動度避險（左）和局部波動度避險（右）損益分布

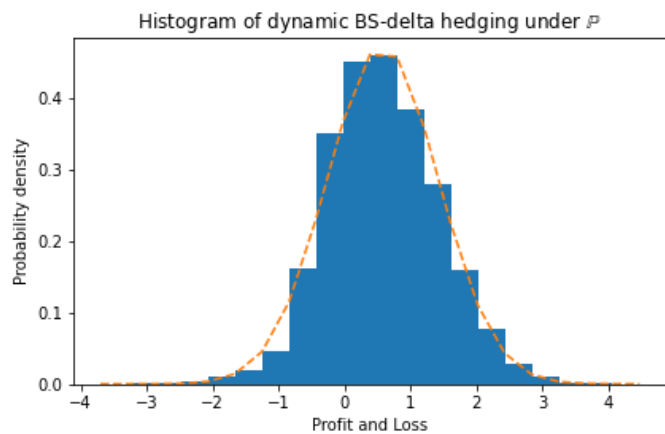


Mean: 0.6041234049203015

Standard deviation: 0.8389411527069598

Mean over call price: 7.3739%

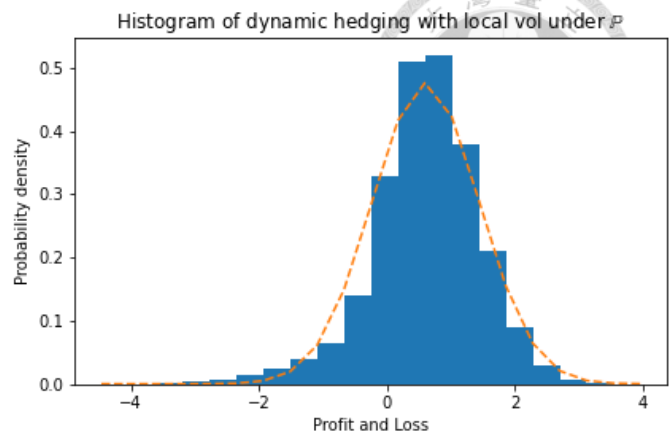
圖 76：風險中立世界下以最小變異數避險參數避險損益分布



Mean: 0.5776386322683678

Standard deviation: 0.8437214364661083

Mean over call price: 7.0507%

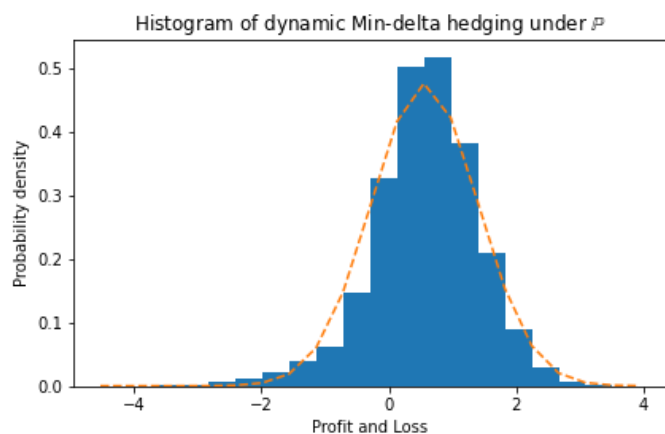


Mean: 0.608903530114813

Standard deviation: 0.8369007587538988

Mean over call price: 7.4323%

圖 77：真實世界下以隱含波動度避險（左）和局部波動度避險（右）損益分布



Mean: 0.5609703730595701

Standard deviation: 0.8360360556423823

Mean over call price: 6.8472%

圖 78：真實世界下以最小變異數避險參數避險損益分布

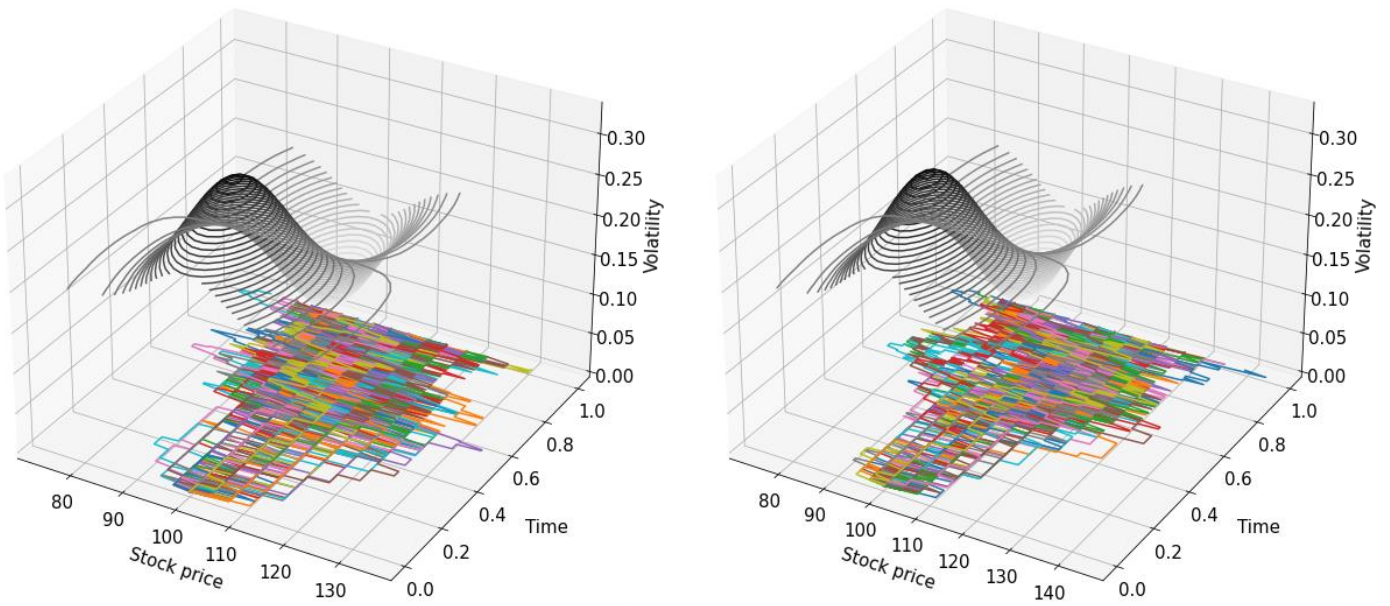


圖 79：真實世界下使用隱含波動度（左）和局部波動度（右）避險損益最佳前 100 條路徑

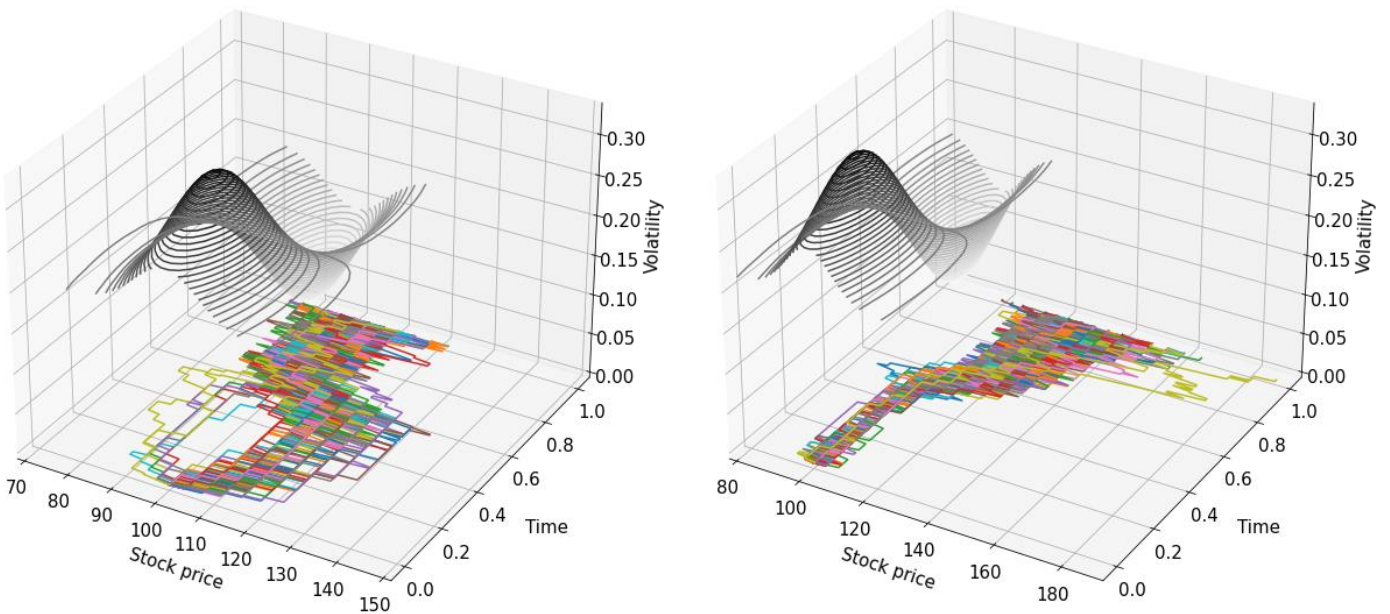
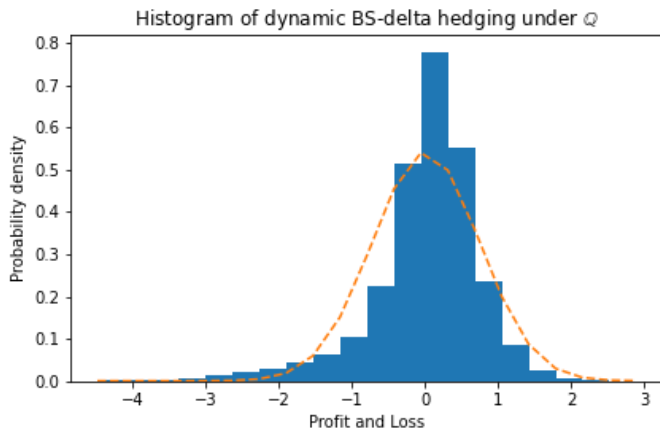


圖 80：真實世界下隱含波動避險相對局部波動避險最佳前 100 條路徑（左）和局部波動避險相對隱含波動避險最佳前 100 條路徑（右）

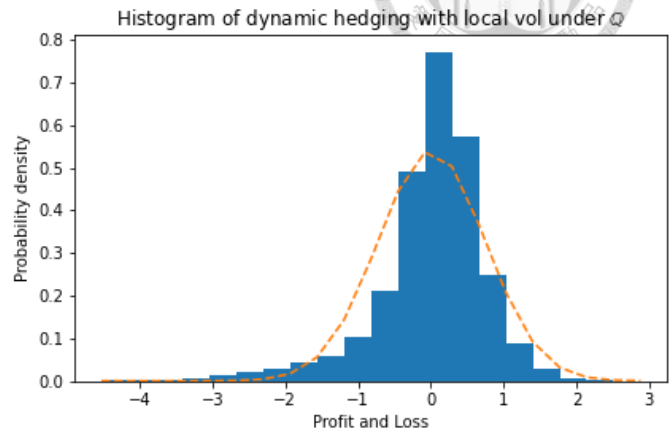
4.13 局部波動度曲面：波浪型



Mean: 0.010952242968390691

Standard deviation: 0.7349337684082828

Mean over call price: 0.0855%

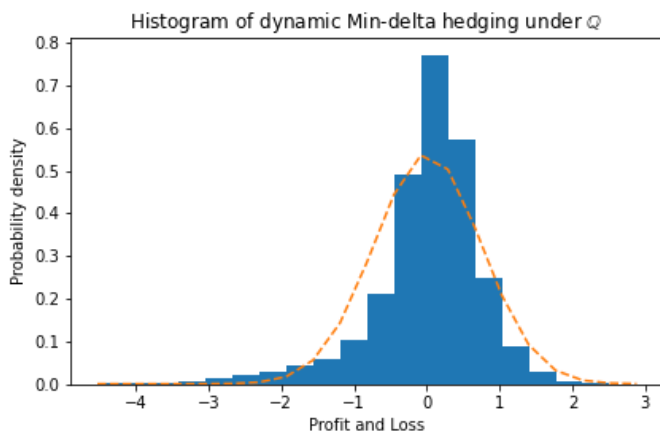


Mean: 0.01091544048762731

Standard deviation: 0.7375919865452734

Mean over call price: 0.0852%

圖 81：風險中立世界下以隱含波動度避險（左）和局部波動度避險（右）損益分布

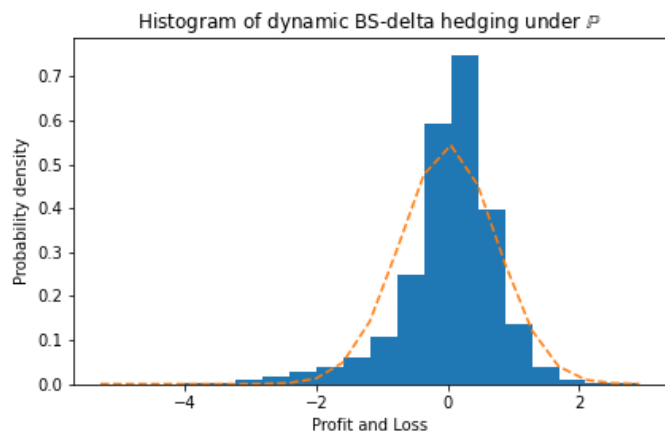


Mean: 0.010915439481422247

Standard deviation: 0.7375919888761159

Mean over call price: 0.0852%

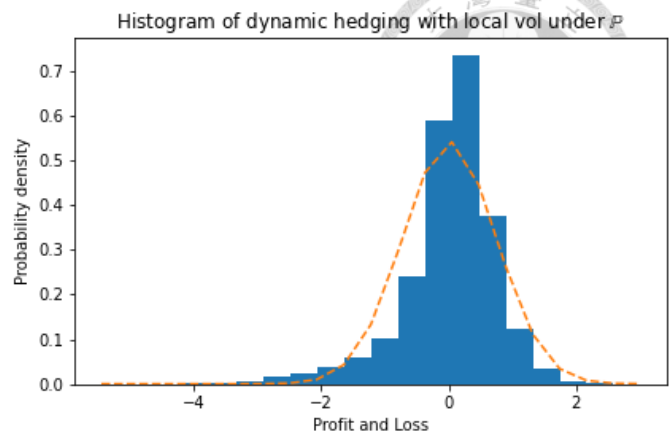
圖 82：風險中立世界下以最小變異數避險參數避險損益分布



Mean: 0.015546984810346755

Standard deviation: 0.7334893575795525

Mean over call price: 0.1214%

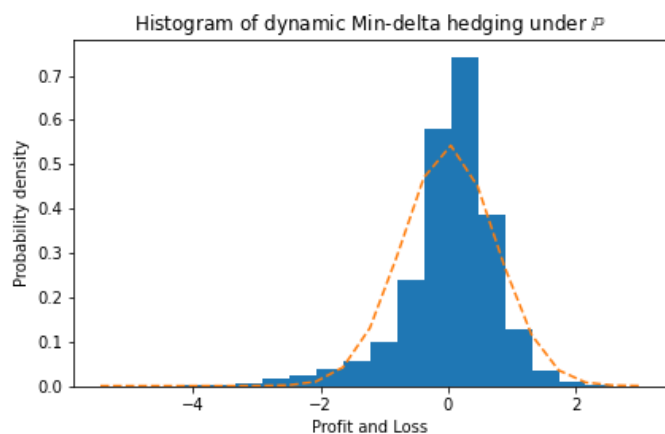


Mean: 0.014685106969513898

Standard deviation: 0.7359551391040788

Mean over call price: 0.1146%

圖 83：真實世界下以隱含波動度避險（左）和局部波動度避險（右）損益分布



Mean: 0.011313853117605684

Standard deviation: 0.7351402495045576

Mean over call price: 0.0883%

圖 84：真實世界下以最小變異數避險參數避險損益分布

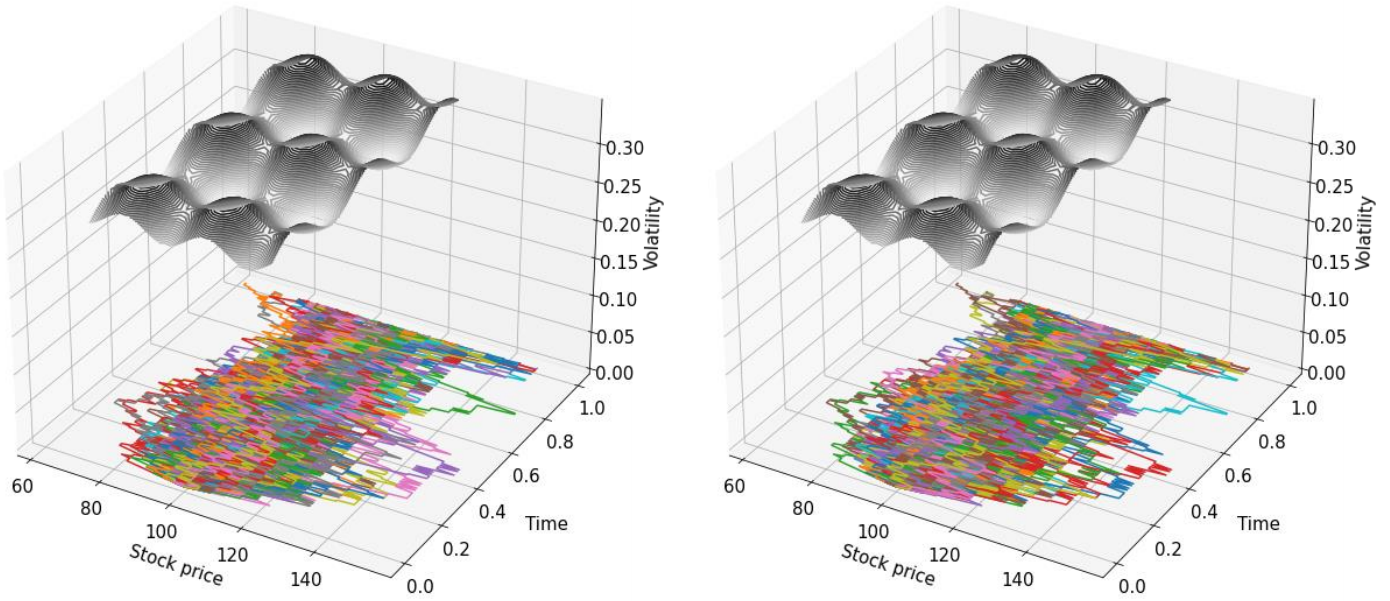


圖 85：真實世界下使用隱含波動度（左）和局部波動度（右）避險損益最佳前 100 條路徑

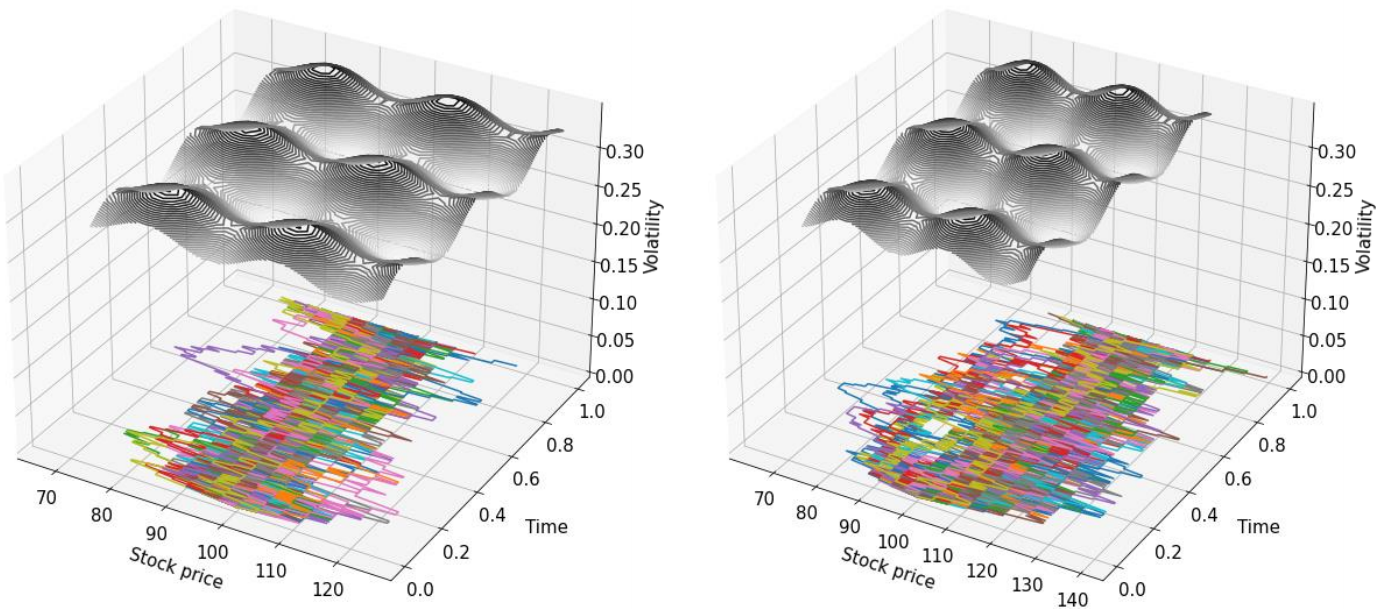


圖 86：真實世界下隱含波動避險相對局部波動避險最佳前 100 條路徑（左）和局部波動避險相對隱含波動避險最佳前 100 條路徑（右）



第五章 結論

除了傾斜平面型以外，使用局部波動度避險的損益標準差較使用隱含波動度的損益標準差略低，但不論何種局部波動曲面，使用隱含波動度避險的損益平均較接近零。對於短天期選擇權而言，損益最佳股價路徑不會因為使用隱含波動度或局部波動度避險而改變，但對於特定股價路徑使用不同波動度避險對於損益會有明顯變化。值得注意的是以最小變異數避險參數避險與以局部波動度進行避險其損益分布極為接近。另一方面，長天期選擇權其 Gamma 值於價平時相較於短天期選擇權低，損益最佳股價路徑面對局部波動度的變化不如短天期敏感。

若持有長部位選擇權，則應於以下不同情況挑選不同的波動度避險：

		股價繞過極值	股價穿過極值	股價於前期波動幅度小	股價於前期波動幅度大	股價趨勢上漲	股價趨勢下跌	股價趨勢不變
碗型	隱含波動度	✓						
	局部波動度		✓					
單峰型	隱含波動度		✓					
	局部波動度	✓						
前傾	隱含波動度				✓			
	局部波動度			✓				
左傾	隱含波動度					✓		
	局部波動度						✓	
右傾	隱含波動度						✓	
	局部波動度					✓		
後傾	隱含波動度							✓
	局部波動度					✓		

參考文獻



- [1] Black, Fischer and Myron Scholes. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities." *Journal of Political Economy*, 81, No. 3 (May–June 1973), 637–654.
- [2] John Hull and Alan White. "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities." *Journal of Finance*, 42, Issue 2 (June 1987), 281–300.
- [3] Robert C. Merton. "Option Prices When Underlying Stock Returns Are Discontinuous." *Journal of Financial Economics*, 3, Issues 1-2 (January–March 1976), 125–144.
- [4] Mark Rubinstein. "Implied Binomial Tree." *Journal of Finance*, 49, Issue 3 (July 1994), 717–818.
- [5] Derman, Emanuel and Iraj Kani. "Riding on a Smile." *Risk*, 7, No. 2 (February 1994), 32–39.
- [6] Derman, Emanuel, Iraj Kani, and Neil Chriss. "Implied Trinomial Trees of the Volatility Smile." *Journal of Derivatives*, 3, No. 4 (February 1996), 7–22.
- [7] Barle, Stanko and Nusret Cakici. "How to grow a smiling tree." *Journal of Financial Engineering*, 7, No. 2 (June 1998), 127–146.
- [8] Dumas, Bernard, Jeff Fleming, and Robert E Whaley. "Implied Volatility Functions: Empirical Tests." *Journal of Finance*, 53, No. 6 (December 1998), 2059–2106.
- [9] Crépey, Stéphane. "Delta-hedge vega risk." *Quantitative Finance*, 4, No. 5 (January 2004), 559–579.
- [10] Dupire, Bruno. "Pricing with a smile." *Risk*, 7, No. 1 (January 1994), 18–20.
- [11] Lok, U Hou and Yuh-Dauh Lyuu. "Efficient Trinomial Trees for Local-Volatility Models

in Pricing Double-Barrier Options.” *Journal of Futures Markets*, 40, Issue 4 (April 2020), 556–574.

[12] Lee, Roger. “Implied Volatility: Statics, Dynamics, and Probabilistic Interpretation.” *Recent Advances in Applied Probability*. (2005), 241–268.

[13] Gatheral, Jim. *The Volatility Surface: A Practitioner's Guide*, 2006.

[14] Boyle, Phelim and David Emanuel. “Discretely adjusted option hedges.” *Journal of Financial Economics*, 8, Issues 3 (September 1980), 259–282.

[15] Bennett, Colin. *Trading Volatility: Trading Volatility, Correlation, Term Structure and Skew*, 2014.

附錄一：局部波動模型與路徑瞬時波動度

Lee (2005) 證明隱含波動度的平方是瞬時波動度的平方在某個測度下的平均值，Gatheral (2006) 用非常淺顯易懂的方法連結隱含波動度和路徑上瞬時波動度的關係，本論文將其證明思路和作者的理解說明如下：

為了連結路徑上於時點的 t 的瞬時波動度和隱含波動度的關係，必須先定義未來隱含變異數 (Black-Scholes forward implied variance)：

$$FV_{K,T}(t) := \frac{E[\sigma_t^2 S_t^2 \Gamma_{BS}(S_t, \bar{\sigma}(t)) | F_0]}{E[S_t^2 \Gamma_{BS}(S_t, \bar{\sigma}(t)) | F_0]}.$$

其中 Black-Scholes gamma 定義為：

$$\Gamma_{BS}(S_t, \bar{\sigma}(t)) := \frac{\partial^2}{\partial S_t^2} C_{BS}(S_t, K, \bar{\sigma}(t), T - t).$$

如此定義未來隱含變異數的理由是 dollar gamma 為描述期末報酬分布的一種手段，具體而言， $FV_{K,T}(t)$ 是給定 $t = 0$ 的資訊下對於未來實際波動的期望值 (expected instantaneous variance)。另一方面，可以證明在某些條件下隱含波動度的平方 $\bar{\sigma}(t)^2$ 乘上時間 $(T - t)$ 剛好就是 $FV_{K,T}(t)$ 於剩餘時間的累積量 (implied forward total variance)。

$$\bar{\sigma}(t)^2 = \frac{1}{T - t} \int_t^T FV_{K,T}(u) du.$$

為了更好理解波動度過程和路徑的關係，買權價值可以表示如下：

$$\begin{aligned} C(S_0, K, T) &= E[(S_T - K)^+ | F_0], \\ &= E[C_{BS}(S_T, K, \bar{\sigma}(T), 0) | F_0], \\ &= E[C_{BS}(S_T, K, \bar{\sigma}(T), 0) + C_{BS}(S_0, K, \bar{\sigma}(0), T) - C_{BS}(S_0, K, \bar{\sigma}(0), T) | F_0], \\ &= C_{BS}(S_0, K, \bar{\sigma}(0), T) + E[C_{BS}(S_T, K, \bar{\sigma}(T), 0) - C_{BS}(S_0, K, \bar{\sigma}(0), T) | F_0], \\ &= C_{BS}(S_0, K, \bar{\sigma}(0), T) + E\left[\int_0^T dC_{BS}(S_t, K, \bar{\sigma}(t), T - t) | F_0\right], \\ &= C_{BS}(S_0, K, \bar{\sigma}(0), T) \\ &\quad + E\left[\int_0^T \left\{ \frac{\partial C_{BS}}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial C_{BS}}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S_t^2} dt \right\} | F_0\right]. \end{aligned}$$



另外，根據定義買權時間價值有如下關係：

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial t} = -\frac{1}{2}FV_{K,T}(t)S_t^2 \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S_t^2}.$$

因此，買權價值可以改寫如下：

$$\begin{aligned} C(S_0, K, T) &= C_{BS}(S_0, K, \bar{\sigma}(0), T) \\ &\quad + E \left[\int_0^T \left\{ \frac{\partial C_{BS}}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \{ \sigma_t^2 - FV_{K,T}(t) \} S_t^2 \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S_t^2} dt \right\} | F_0 \right], \\ &= C_{BS}(S_0, K, \bar{\sigma}(0), T) + E \left[\int_0^T \left\{ \frac{1}{2} \{ \sigma_t^2 - FV_{K,T}(t) \} S_t^2 \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S_t^2} dt \right\} | F_0 \right], \\ &= C_{BS}(S_0, K, \bar{\sigma}(0), T). \end{aligned}$$

由以上結果可知隱含波動度就是路徑上的瞬時波動度在某個測度下的平均。

$$\sigma_{BS}(K, T)^2 = \bar{\sigma}(0)^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{E[\sigma_t^2 S_t^2 \Gamma_{BS}(S_t, \bar{\sigma}(t)) | F_0]}{E[S_t^2 \Gamma_{BS}(S_t, \bar{\sigma}(t)) | F_0]} dt.$$

為了將以上結果用更直覺的方法說明清楚，可以換個角度想若已知真實世界下於時點 t 的資訊那連結真實世界測度 P 和風險中立世界測度 Q 的 Radon-Nikodym 導數可以定義如下：

$$\frac{dP}{dQ} := \frac{S_t^2 \Gamma_{BS}(S_t, \bar{\sigma}(t))}{E[S_t^2 \Gamma_{BS}(S_t, \bar{\sigma}(t)) | F_0]}.$$

係因 $S_t^2 \Gamma_{BS}(S_t, \bar{\sigma}(t))$ 為於時點 t 描述選擇權期末報酬的分布，上式的分子隱含真實世界下的機率密度分布的資訊，分母則隱含風險中立機率密度分布的資訊。值得注意的是，選擇權對履約價的二次偏微分可以描述股價的風險中立機率分布（見圖 87）。

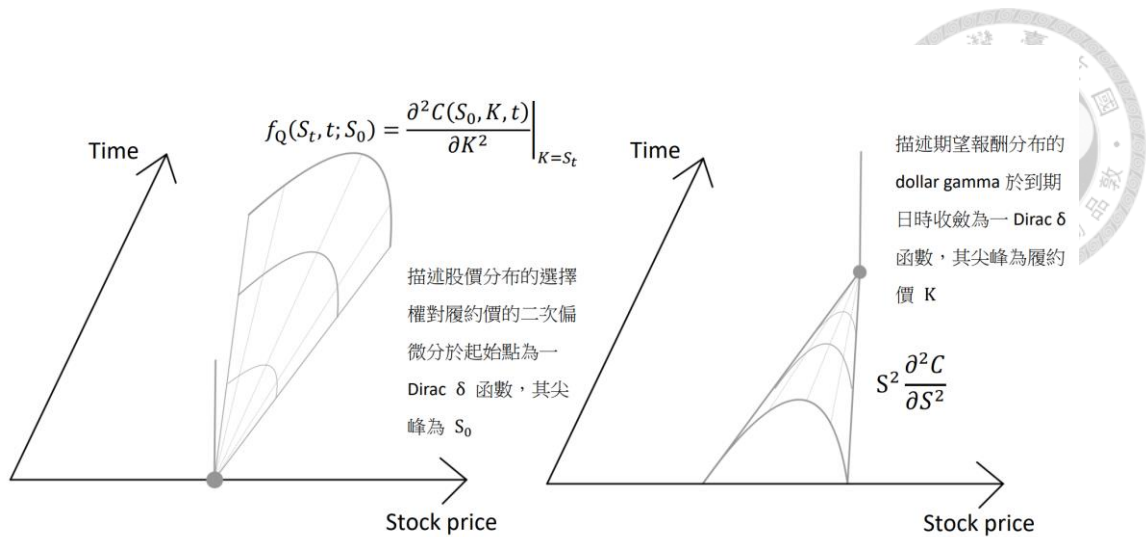


圖 87：選擇權導數和機率分布關係示意圖

若假設風險中立機率分布為 $f_Q(S_t, t; S_0)$ ，則連結真實世界和風險中立世界的瞬時波動度於可以概略的表達如下：

$$\begin{aligned} E^P[\sigma_t^2] &= E^Q\left[\sigma_t^2 \frac{dP}{dQ}\right], \\ &= \int E^Q[\sigma_t^2 | S_t] \frac{S_t^2 \Gamma_{BS}(S_t)}{E[S_t^2 \Gamma_{BS}(S_t) | F_0]} f_Q(S_t, t; S_0) dS_t, \\ &= \int E^Q[\sigma_t^2 | S_t] f_P(S_t; S_0, K, T) dS_t. \end{aligned}$$

另外定義 $f_P(S_t; S_0, K, T)$ 為真實世界的機率密度函數為：

$$f_P(S_t; S_0, K, T) := \frac{f_Q(S_t, t; S_0) S_t^2 \Gamma_{BS}(S_t)}{E[S_t^2 \Gamma_{BS}(S_t) | F_0]}.$$

觀察上式可以發現其分子剛好為固定兩端點的機率分布相乘，因此可以想像 $f_P(S_t; S_0, K, T)$ 為某種布朗橋機率分布，Gatheral（2006）更認為隱含波動度約為通過布朗橋機率分布最高點的路徑的波動度的平均（見圖 3）。

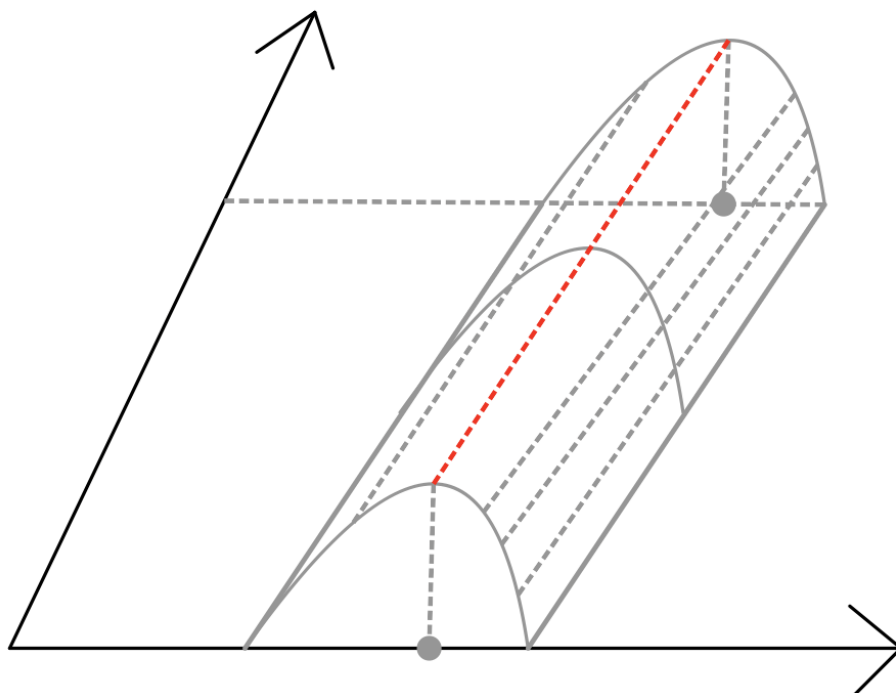


圖 88：通過布朗橋機率分布最高點的路徑以紅色虛線表示，其路徑的波動度的平均為隱含波動度

另一方面 Bennett (2014) 則是將隱含波動度視為未來所有股價路徑至履約價的平均波動度（見圖 4）。

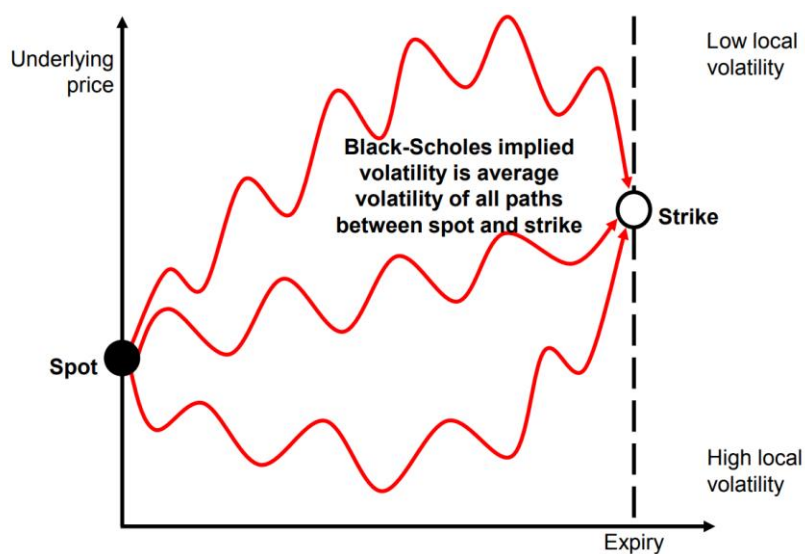
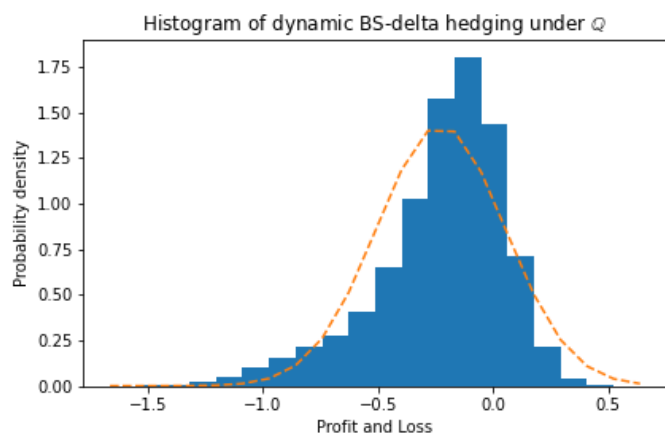


圖 89：局部波動度和隱含波動度之關係 (Bennett, 2014)

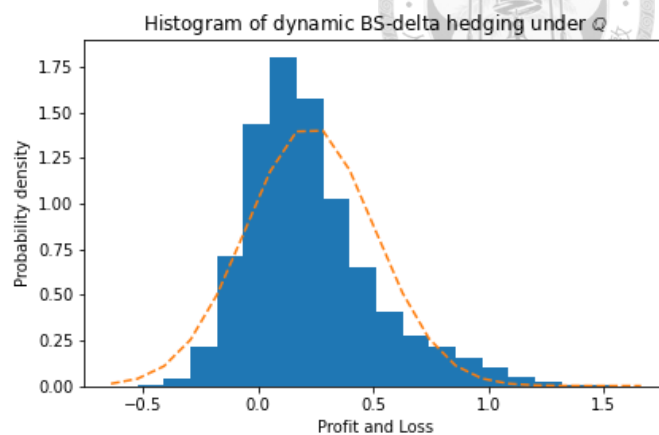
附錄二：持有不同部位對於避險損益分布路徑趨勢影響（碗型）



Mean: -0.226890603180074

Standard deviation: 0.27929062780369

Mean over call price: -8.9014%

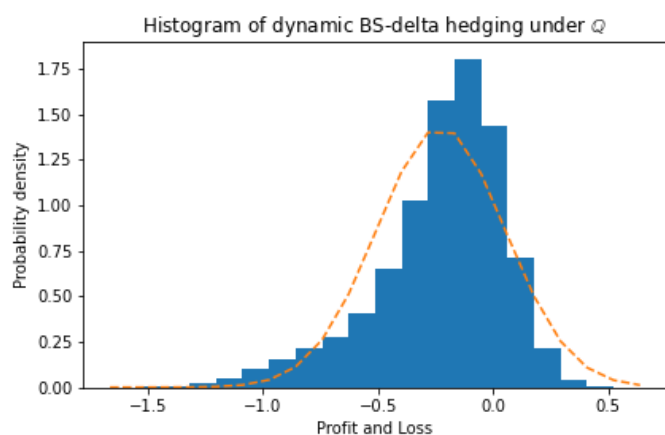


Mean: 0.226890603180074

Standard deviation: 0.27929062780369

Mean over call price: 8.9014%

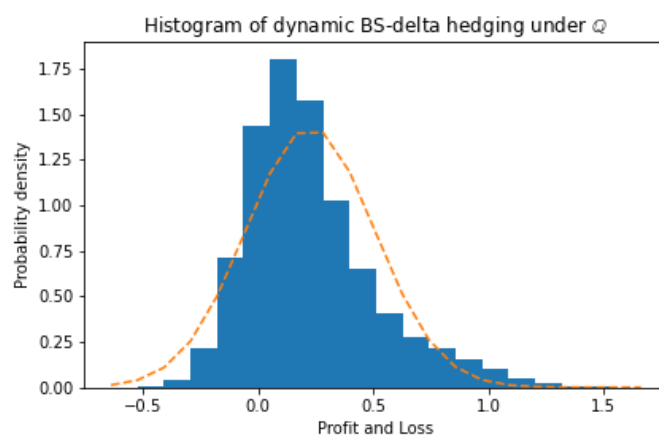
圖 90：買權長部位避險損益分布（左）買權短部位避險損益分布（右）



Mean: -0.2268903327271753

Standard deviation: 0.27929048595031086

Mean over put price: -8.9013%



Mean: 0.2268903327271753

Standard deviation: 0.27929048595031086

Mean over put price: 8.9013%

圖 91：賣權長部位避險損益分布（左）賣權短部位避險損益分布（右）

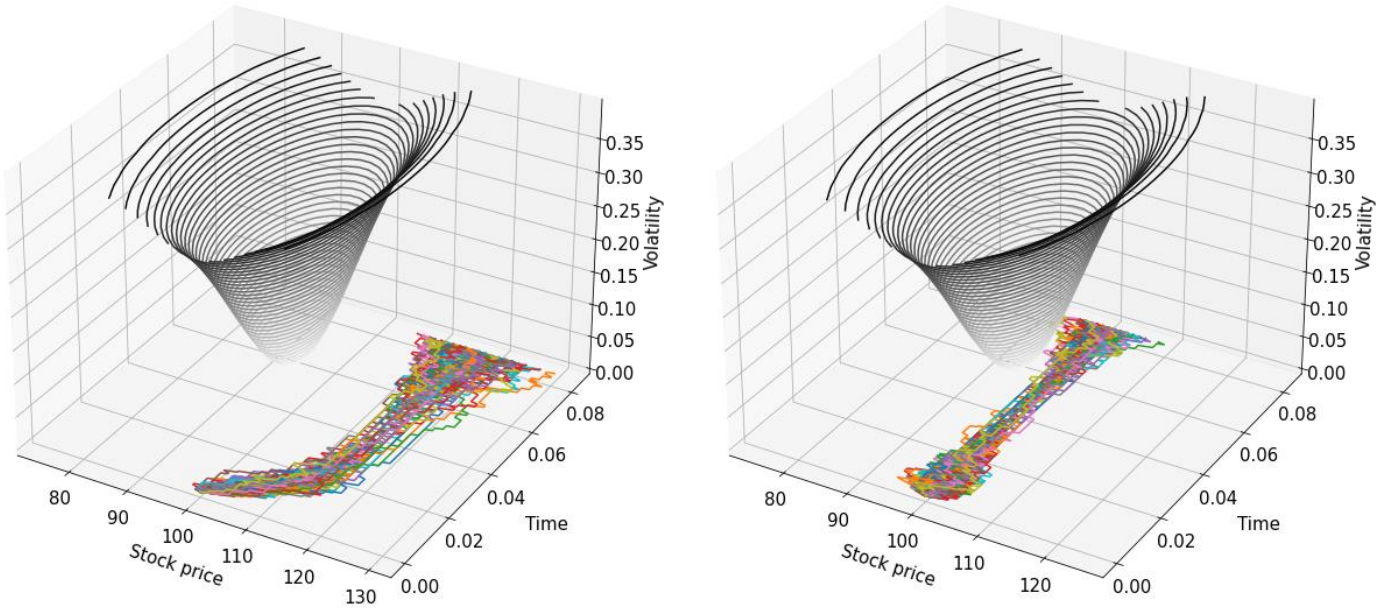


圖 92：風險中立世界下隱含波動避險相對局部波動避險最佳前 100 條路徑，買權長部位路徑趨勢（左）買權短部位路徑趨勢（右）

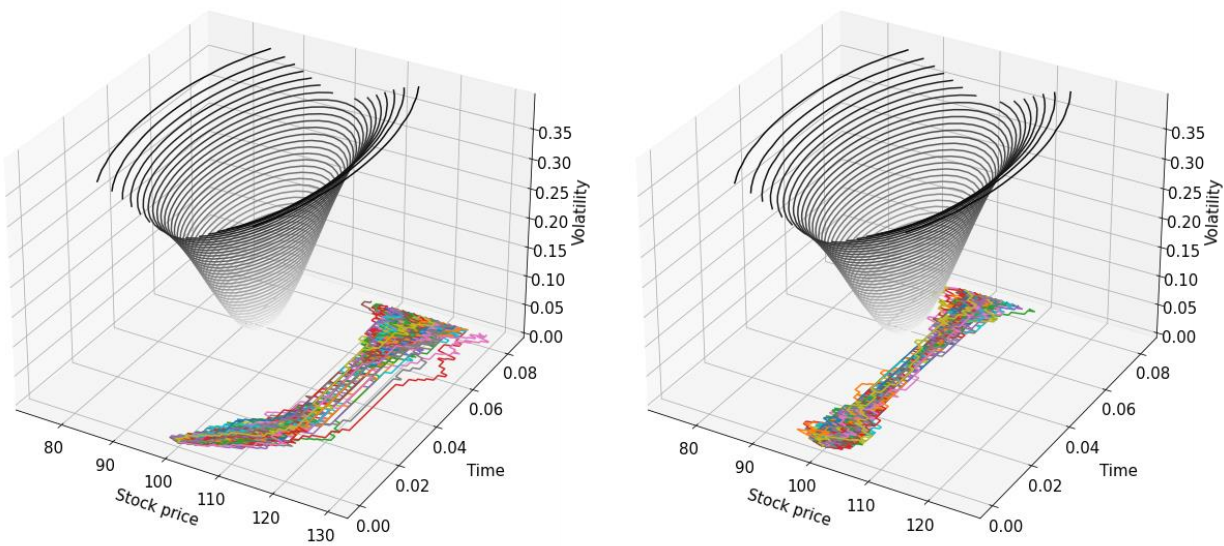


圖 93：風險中立世界下隱含波動避險相對局部波動避險最佳前 100 條路徑，賣權長部位路徑趨勢（左）賣權短部位路徑趨勢（右）

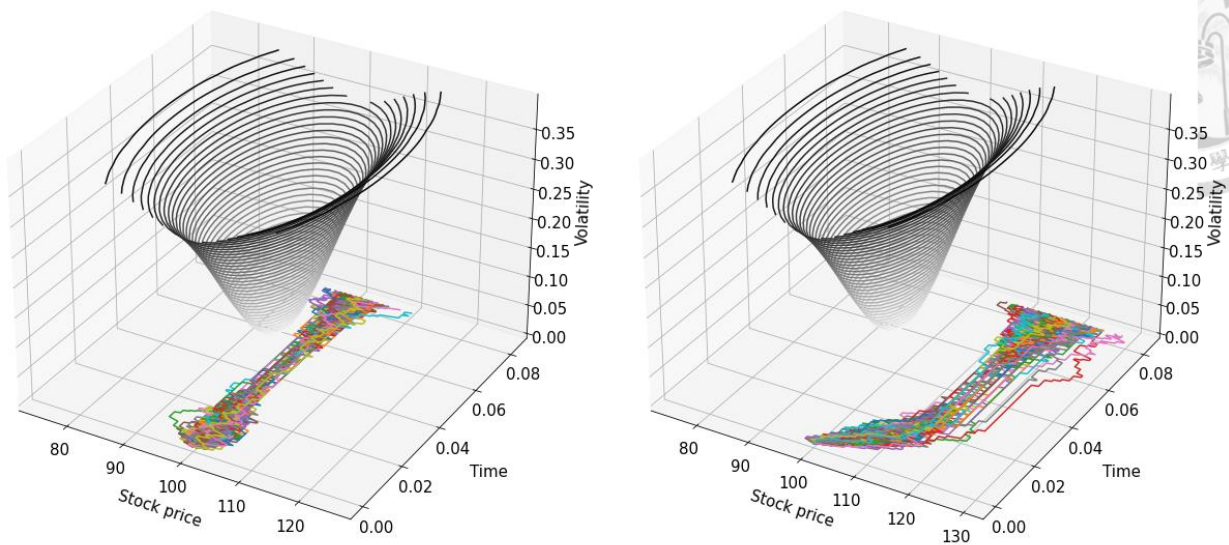


圖 94：風險中立世界下局部波動避險相對隱含波動避險最佳前 100 條路徑，買權長部位路徑趨勢（左）買權短部位路徑趨勢（右）

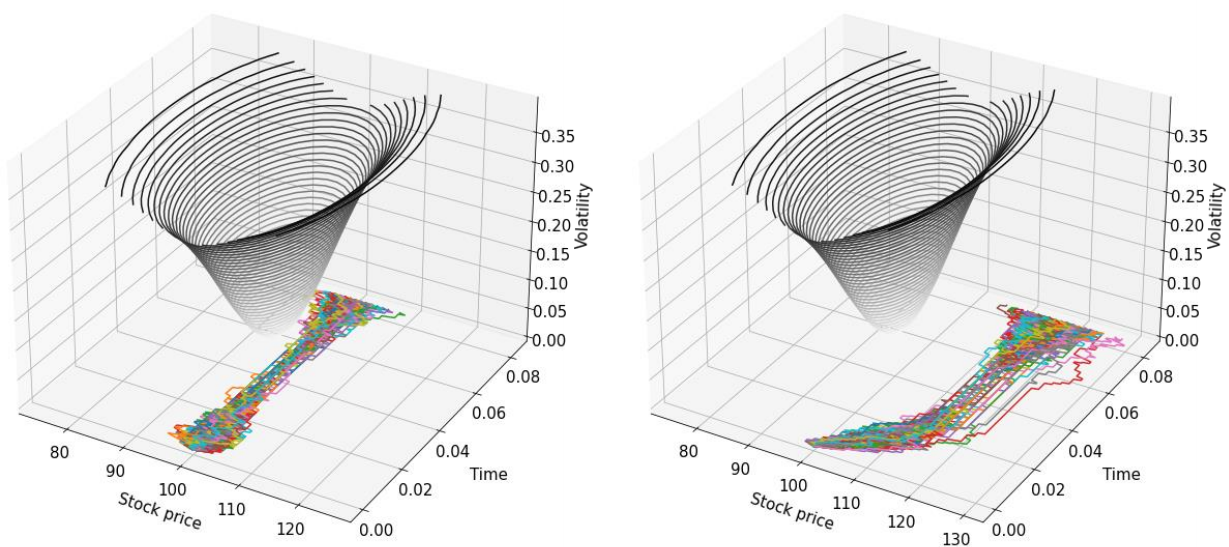
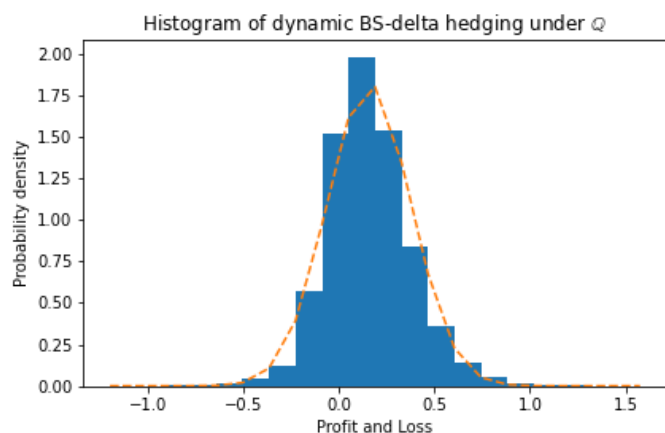


圖 95：風險中立世界下局部波動避險相對隱含波動避險最佳前 100 條路徑，賣權長部位路徑趨勢（左）賣權短部位路徑趨勢（右）

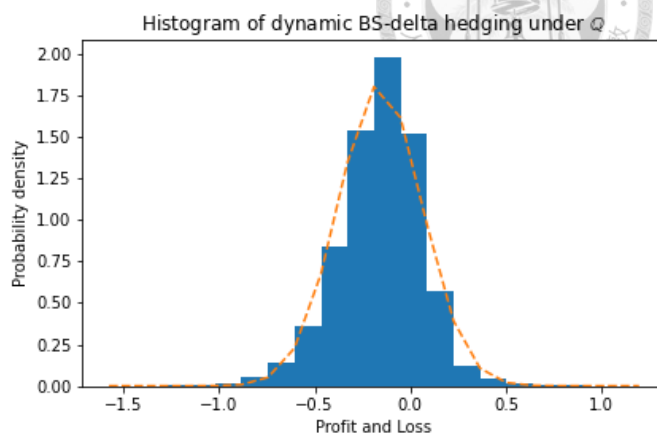
附錄三：持有不同部位對於避險損益分布路徑趨勢影響（單峰型）



Mean: 0.15845998927934762

Standard deviation: 0.21915885468853508

Mean over call price: 6.4163%

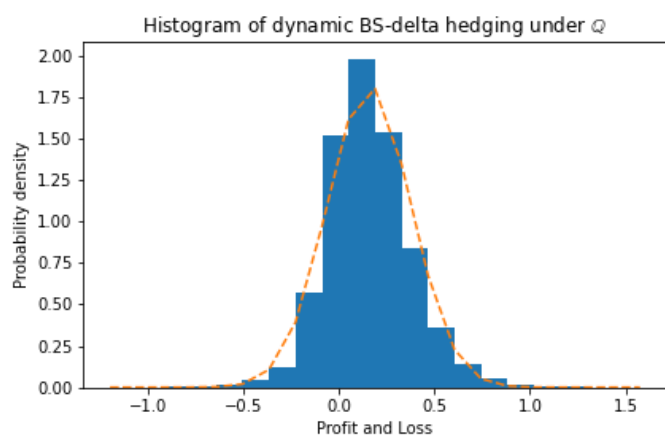


Mean: -0.15845998927934762

Standard deviation: 0.21915885468853508

Mean over call price: -6.4163%

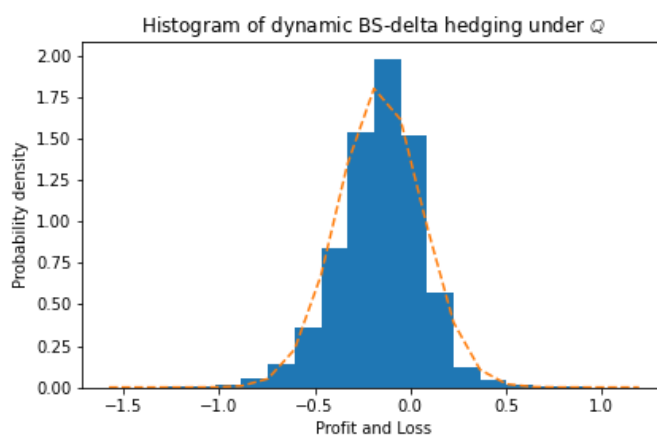
圖 96：買權長部位避險損益分布（左）買權短部位避險損益分布（右）



Mean: 0.15845984186062143

Standard deviation: 0.2191587821934244

Mean over put price: 6.4163%



Mean: -0.15845984186062143

Standard deviation: 0.2191587821934244

Mean over put price: -6.4163%

圖 97：賣權長部位避險損益分布（左）賣權短部位避險損益分布（右）

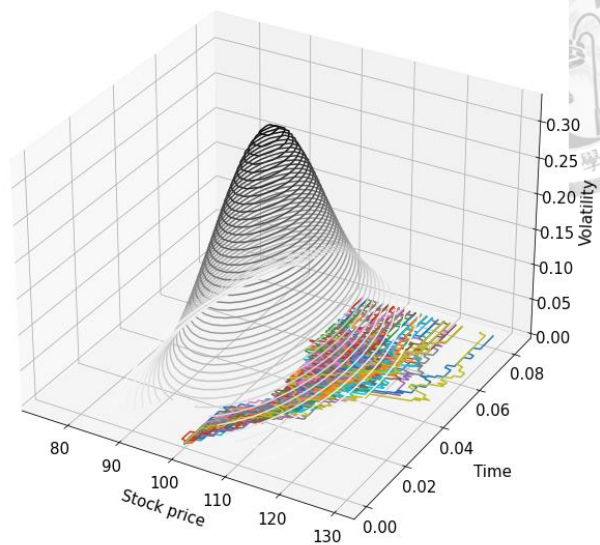
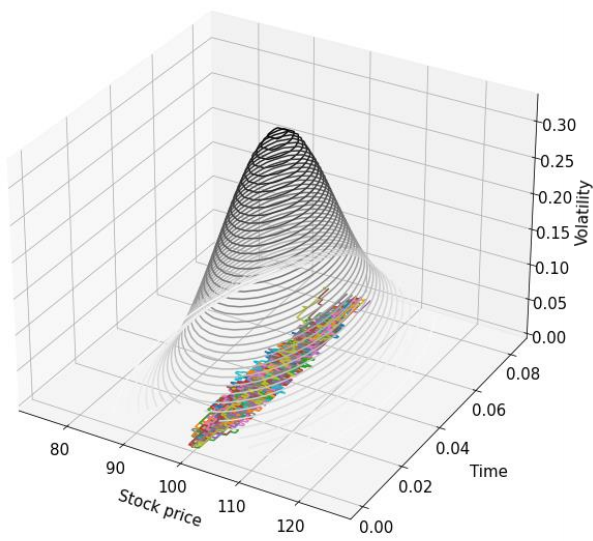


圖 98：風險中立世界下隱含波動避險相對局部波動避險最佳前 100 條路徑，買權長部位路徑趨勢（左）買權短部位路徑趨勢（右）

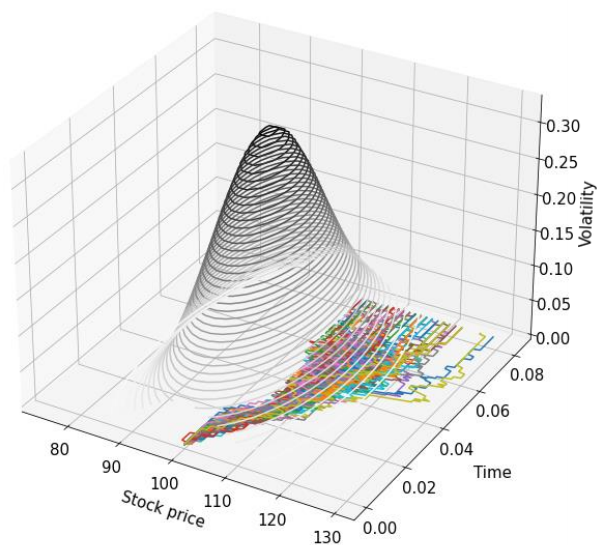
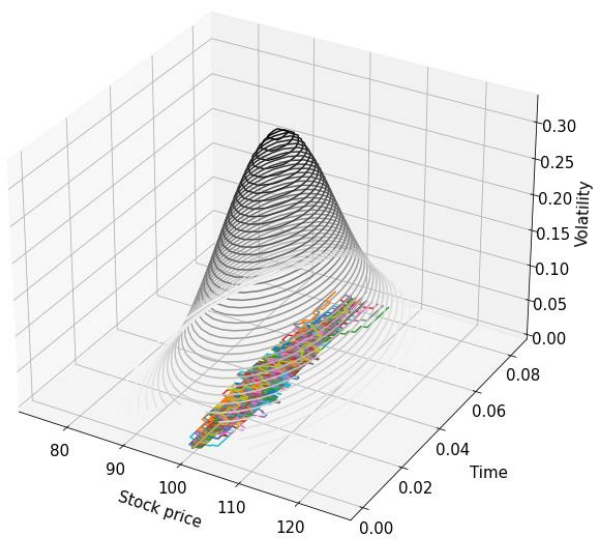


圖 99：風險中立世界下隱含波動避險相對局部波動避險最佳前 100 條路徑，賣權長部位路徑趨勢（左）賣權短部位路徑趨勢（右）

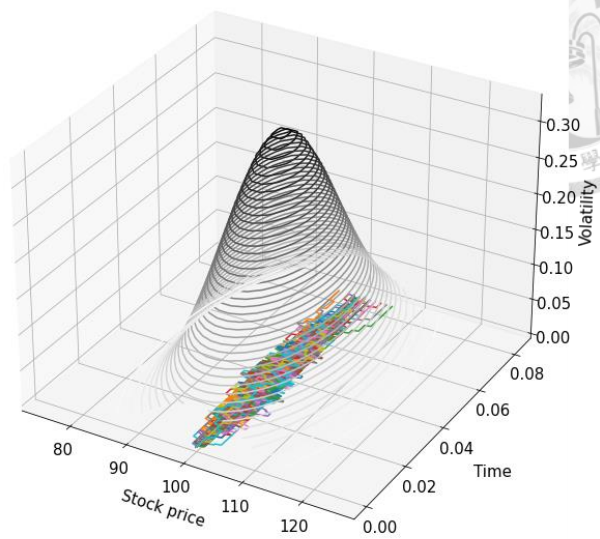
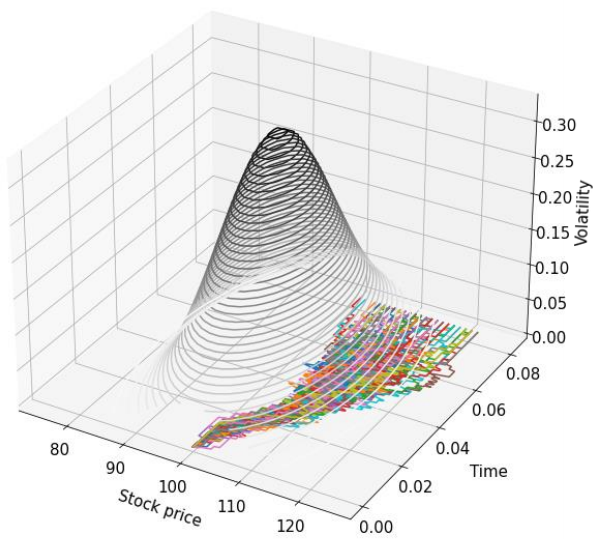


圖 100：風險中立世界下局部波動避險相對隱含波動避險最佳前 100 條路徑，買權長部位路徑趨勢（左）買權短部位路徑趨勢（右）

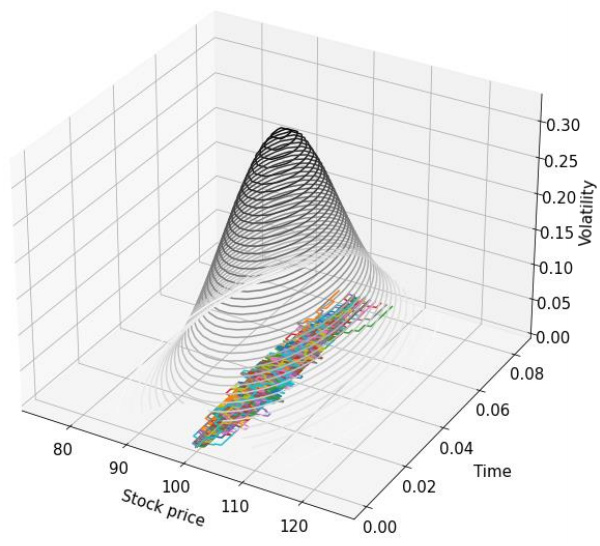
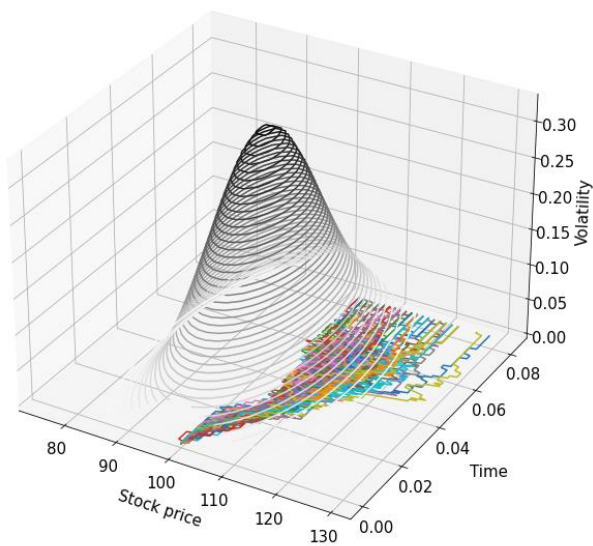
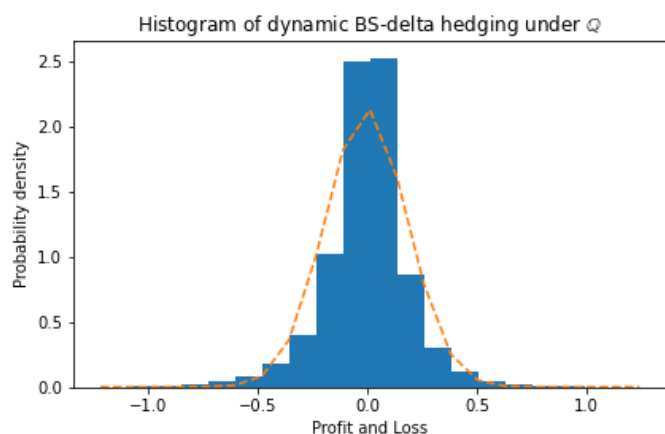


圖 101：風險中立世界下局部波動避險相對隱含波動避險最佳前 100 條路徑，賣權長部位路徑趨勢（左）賣權短部位路徑趨勢（右）

附錄四：持有不同部位對於避險損益分布路徑趨勢影響（前傾斜平

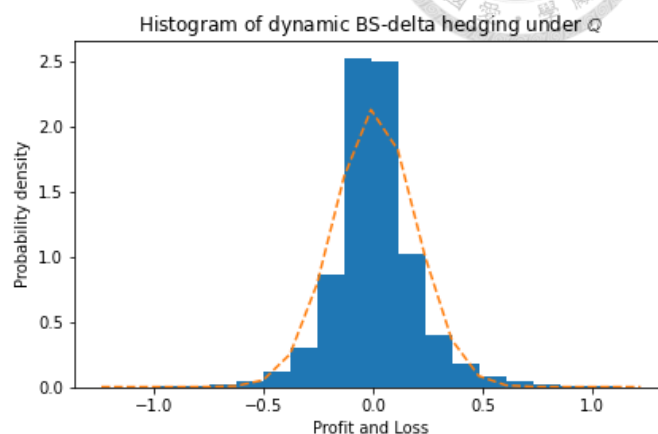
面）



Mean: -0.007199187284260622

Standard deviation: 0.1865199586642185

Mean over call price: -0.2201%

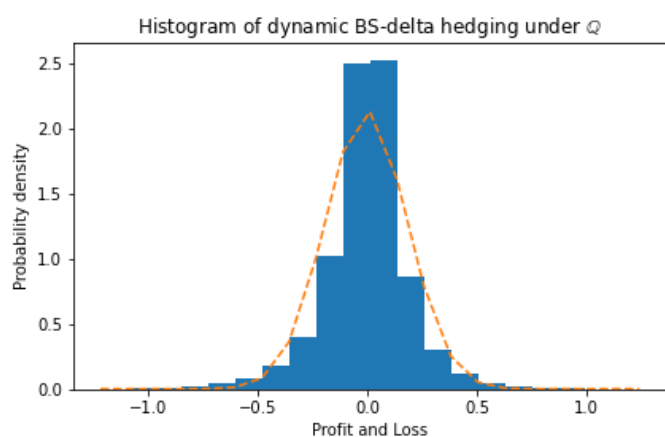


Mean: 0.007199187284260622

Standard deviation: 0.1865199586642185

Mean over call price: 0.2201%

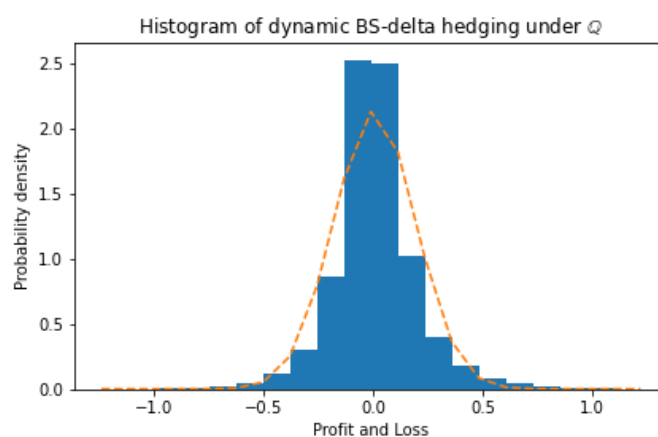
圖 102：買權長部位避險損益分布（左）買權短部位避險損益分布（右）



Mean: -0.007197757889104214

Standard deviation: 0.18651996748450414

Mean over put price: -0.2201%



Mean: 0.007197757889104214

Standard deviation: 0.18651996748450414

Mean over put price: 0.2201%

圖 103：賣權長部位避險損益分布（左）賣權短部位避險損益分布（右）

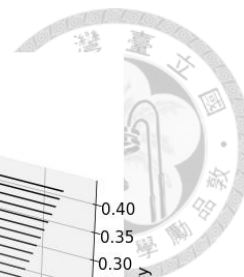
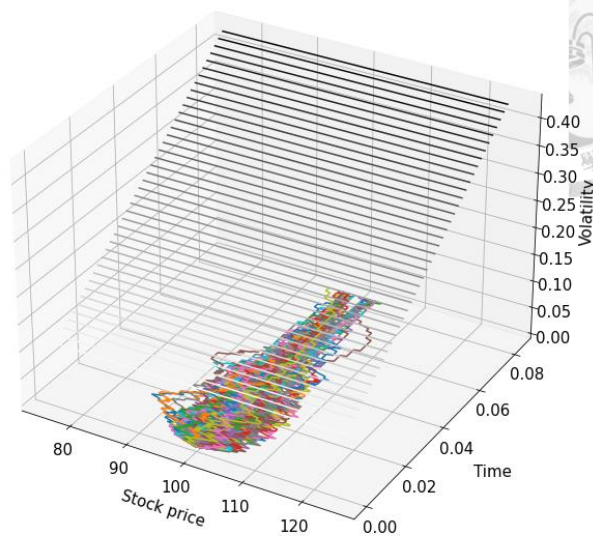
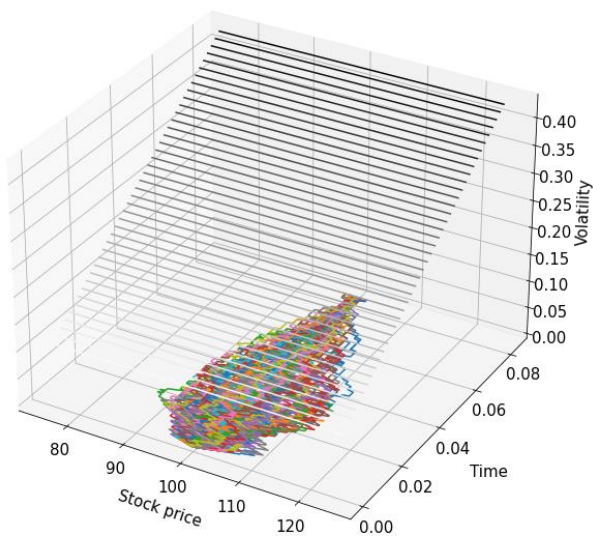


圖 104：風險中立世界下隱含波動避險相對局部波動避險最佳前 100 條路徑，買權長部位路徑趨勢（左）買權短部位路徑趨勢（右）

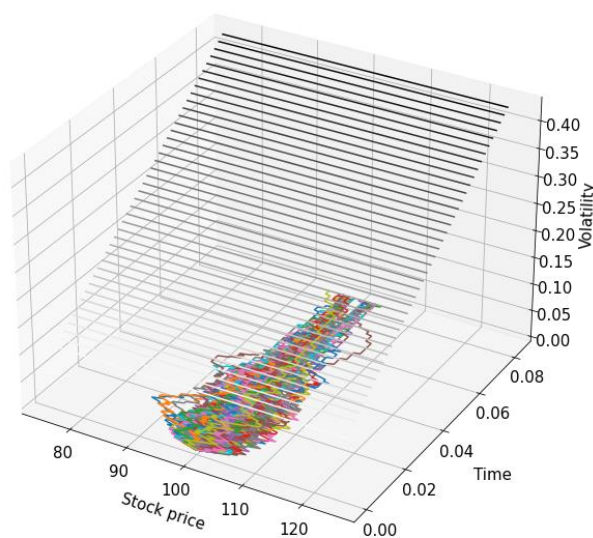
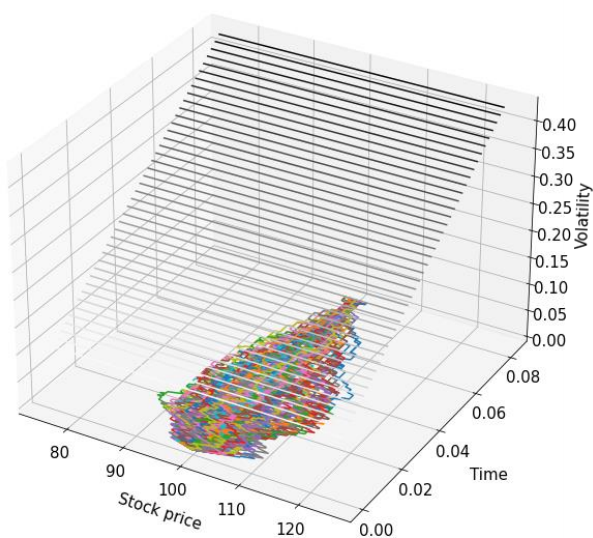


圖 105：風險中立世界下隱含波動避險相對局部波動避險最佳前 100 條路徑，賣權長部位路徑趨勢（左）賣權短部位路徑趨勢（右）

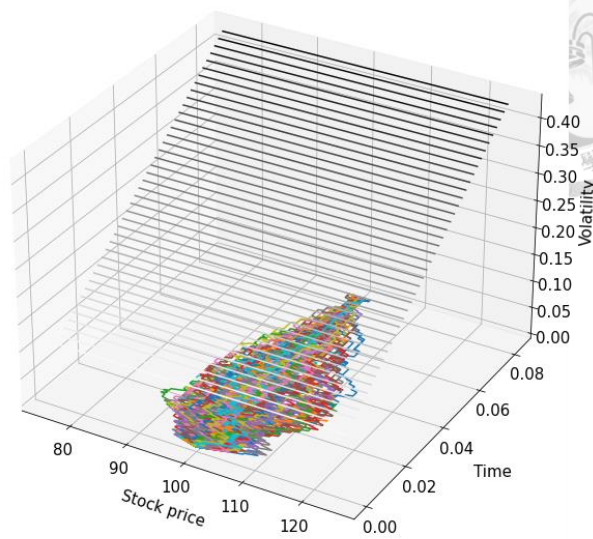
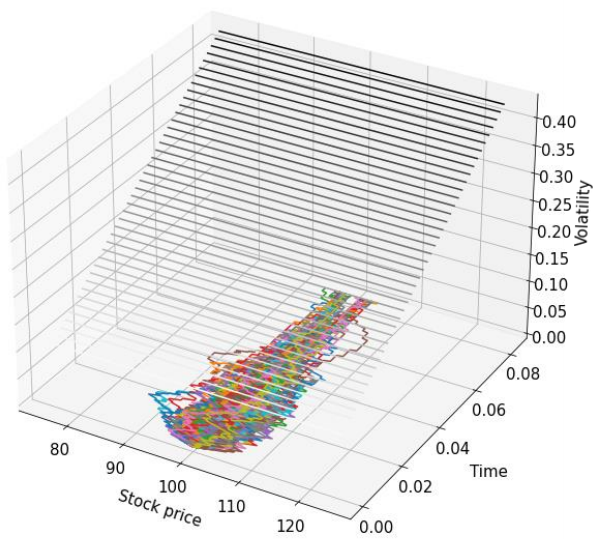


圖 106：風險中立世界下局部波動避險相對隱含波動避險最佳前 100 條路徑，買權長部位路徑趨勢（左）買權短部位路徑趨勢（右）

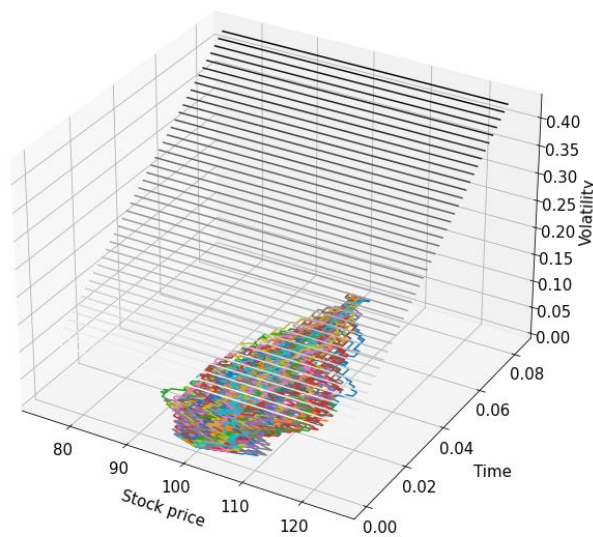
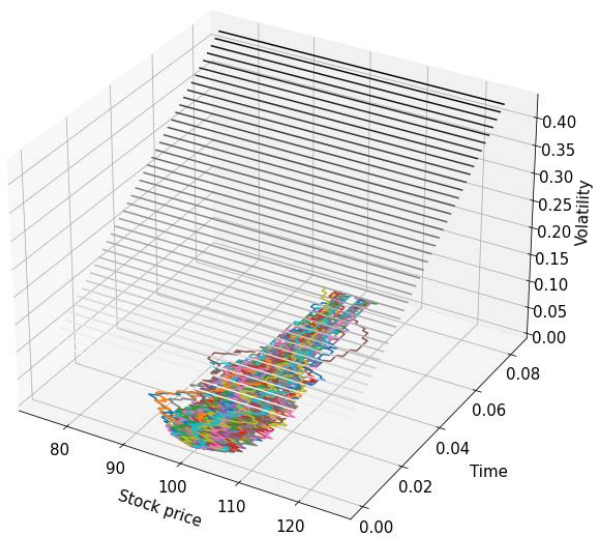


圖 107：風險中立世界下局部波動避險相對隱含波動避險最佳前 100 條路徑，賣權長部位路徑趨勢（左）賣權短部位路徑趨勢（右）