

國立臺灣大學電機資訊學院光電工程學研究所

碩士論文

Graduate Institute of Photonics and Optoelectronics Engineering

College of Electrical Engineering and Computer Science

National Taiwan University

Master Thesis

諧振反射器於電磁波及聲波共振腔的應用

Electromagnetic and Acoustic Cavities
Based on Resonant Reflectors

葉翰文

Han-Wen Yeh

指導教授：邱奕鵬 博士

Advisor: Yih-Peng Chiou, Ph.D.

中華民國 106 年 7 月

July, 2017

誌謝

轉眼間兩年的碩士生活即將畫上句點，感謝指導教授邱奕鵬的教誨，讓我學到了許多，受益匪淺，不論是在研究或者做人處事方面。感謝我的父母給我的支持與鼓勵，讓我無後顧之憂可以把生活投入在研究上。感謝我的外公外婆讓我在台北也有一個溫暖的家。此外，感謝所有 351B 實驗室的學長同學們—曾士綱學長、張晉鑫學長、鄭和光學長、邱繼群同學、許洧翔同學、徐嘉謙同學、張家瑋同學、萬佑安學弟、邱正洋學弟以及平常會來我們實驗室串門子的朋友們，在我的學習歷程上相互扶持，讓研究能夠順利完成。也感謝口試委員—何旻真教授以及葉文嵐學姊給予寶貴的意見與指正。

中文摘要



本論文著重在於利用各種反射器設計共振腔，包含布拉格反射器、光柵反射器、高對比度光柵以及在聲波所使用週期性排列的小共振腔，並比較彼此之間的差別。與直覺的想法不同，共振腔並不一定要反射面完整的包覆整個腔體，即便反射面充滿了孔洞，甚至孔洞的面積超過了一半，利用側面耦合(Side Coupling)仍然可以設計出共振腔。

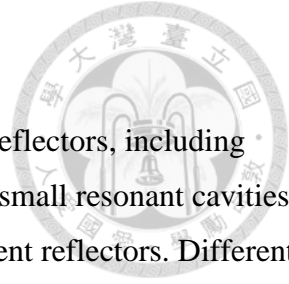
在電磁波方面，共振腔都是由介電質所組成，因此在通訊波段將能有比金屬更小的損耗，且與傳統的介電質共振腔相比，傳統的介電質共振腔用介電質差異所造成的反射來將能量束縛在介電質腔體，而在本論文利用的是以介電質當作反射器，將能量束縛在空氣。這樣做的好處是能夠避免能量太高在介電質內產生非線性效應或是超過介電質所能負荷能量。因此，本論文設計的共振腔將能容納更高的能量。

而在聲波方面，本論文以巴克球的結構來排列小型共振腔，證明了即便是在週期性不好的情況下，也能實現球型的共振腔。

本論文將從每一種反射器的反射特性及其頻率響應講起，而後設計簡單的一維共振腔，之後將一維反射器繞成一個圓以設計二維圓柱形的共振腔。一維及二維的共振腔若沿著行進方向有波向量的話，便能夠設計成波導，但不在本論文所探討的範圍內。最終將小型共振腔沿著球殼表面排列，將能夠設計三維的共振腔。

關鍵字：共振腔、波導模態共振、光柵反射器、高對比度光柵

Abstract



In this studies, we focused on designing resonant cavities by various reflectors, including Bragg reflector, grating reflector, high-index-contrast grating and periodic small resonant cavities employed on acoustic cavities. We compare the differences between different reflectors. Different from our intuitive thinking, the reflectors don't need to cover the entire cavity surface. Even though the surface of reflection is full of holes, sometimes the area of holes is more than half of total area, we can still use the principle of side coupling to design resonant cavities.

In EM wave, resonant cavities are all composed of dielectric, which has smaller loss compared to metal. Compared to traditional dielectric resonant cavities, which use the index difference to confine energy in the dielectric, in this work, we use dielectric as reflectors and confine energy in the air. The benefits of doing so is to prevent the nonlinear effect caused by high energy and prevent the breakdown of dielectric. Hence, the cavities designed in this work can contain higher energy.

In acoustic wave, we use the structure of Buckyball to arrange our small cavities and prove that even the periodicity is not very good, we can still realize spherical resonator.

We'll start from the characteristics of each reflector and their frequency response, and then design simple one dimensional cavities. Afterwards, we circle the one dimensional reflector to design two dimensional resonant cavity. If there is a k vector component along the traveling direction, then we can design waveguide, however, this is beyond the scope of this work. Finally we arrange the small cavities along the surface of spherical shell, we can design three dimensional resonant cavities.

Key words: resonator, grating reflector, GMR, HCG

目錄



口試委員會審定書.....	#
誌謝.....	I
中文摘要.....	II
ABSTRACT.....	III
目錄.....	IV
圖目錄.....	VI
表目錄.....	IX
第一章 簡介.....	1
1.1 文獻回顧.....	1
1.1.1 繞射理論與光柵研究.....	1
1.1.2 布拉格反射器.....	2
1.1.3 光柵反射器.....	3
1.1.4 高對比度光柵.....	4
1.1.5 共振腔.....	5
1.2 研究動機.....	6
第二章 基本原理.....	7
2.1 光柵反射器設計原理.....	7
2.2 布拉格反射器設計原理.....	11
2.3 聲波設計原理.....	12
2.4 共振腔設計原理.....	13
2.5 品質因子.....	14
第三章 以布拉格反射器設計共振腔.....	15
3.1 COMSOL Multiphysics 模擬軟體介紹.....	15
3.2 電磁波布拉格反射器模擬.....	16
3.2.1 一維共振腔模擬.....	17
3.2.2 二維共振腔模擬.....	17
3.3 聲波布拉格反射器模擬.....	19
3.3.1 一維共振腔模擬.....	20



3.3.2	二維共振腔模擬.....	21
3.3.3	三維共振腔模擬.....	22
第四章	以光柵反射器設計共振腔.....	24
4.1	電磁波光柵反射器模擬.....	24
4.1.1	一維共振腔模擬.....	27
4.1.2	二維共振腔模擬.....	29
4.2	聲波光柵反射器模擬.....	35
4.2.1	一維共振腔模擬.....	40
4.2.2	二維共振腔模擬.....	41
4.2.3	三維共振腔模擬.....	43
第五章	以空氣為介質設計共振腔.....	52
5.1	聲波共振腔.....	52
5.2	聲波共振腔的週期排列.....	55
5.3	以小共振腔排列設計大共振腔.....	60
5.3.1	一維共振腔模擬.....	60
5.3.2	二維共振腔模擬.....	61
5.3.3	三維共振腔模擬.....	62
第六章	實驗.....	64
6.1	小型共振腔實驗.....	64
6.2	與模擬結果相比較.....	67
第七章	結論.....	69
REFERENCE.....		70

圖目錄



圖 1.1-1 電磁波繞射觀念圖.....	1
圖 1.1-2 布拉格反射器示意圖.....	2
圖 1.1-3 光柵式濾波器結構圖[8]	3
圖 1.1-4 光柵反射器結構圖、反射頻譜及模態折射率[10]	3
圖 1.1-5 高對比度光柵[12]	4
圖 1.1-6 由 HCG 為反射鏡的 VCSEL 結構[14]	5
圖 2.1-1 平板介質波導示意圖.....	7
圖 2.1-2 波導模態共振示意圖.....	7
圖 2.1-3 非共振頻率的電場圖和光柵示意圖.....	8
圖 2.1-4 共振頻率的電場圖和光柵示意圖.....	8
圖 2.1-5 波導模態估算概念圖.....	9
圖 2.2-1 布拉格反射器結構示意圖， $N=4$	11
圖 3.1-1 有限元素模擬流程圖.....	15
圖 3.2-1 布拉格反射器結構圖與 E、H 絕對值場圖.....	16
圖 3.2-2 一維共振腔結構圖與 E 絕對值場圖.....	17
圖 3.2-3 二維共振腔結構圖與 E 絕對值場圖(TE 模態)	18
圖 3.2-4 二維共振腔結構圖與 H 絕對值場圖(TM 模態)	19
圖 3.3-1 布拉格反射器結構圖與 p 絕對值場圖.....	20
圖 3.3-2 一維共振腔結構圖與 p 絕對值場圖.....	21
圖 3.3-3 二維共振腔結構圖與 p 絕對值場圖.....	22
圖 3.3-4 三維共振腔結構圖與 p 絕對值場圖.....	23
圖 4.1-1 光柵反射器結構圖、E 絕對值場圖與頻率響應圖(TE)	25
圖 4.1-2 光柵反射器結構圖、H 絕對值場圖與頻率響應圖(TM)	26
圖 4.1-3 光柵反射器結構圖、E 絕對值場圖與頻率響應圖(TE)	27
圖 4.1-4 一維共振腔結構圖與 E 絕對值場圖(TE)	28
圖 4.1-5 一維共振腔結構圖與 H 絕對值場圖(TM)	29
圖 4.1-6 二維光柵反射器結構圖與 E 絕對值場圖(TE)	30
圖 4.1-7 二維光柵反射器頻率響應圖(TE)	30



圖 4.1-8 二維共振腔結構圖與 E 絕對值場圖(TE 模態)	31
圖 4.1-9 二維光柵反射器頻率響應圖(TM)	33
圖 4.1-10 二維共振腔結構圖與 H 絕對值場圖(TM 模態)	34
圖 4.2-1 聲波波導壓力與速度絕對值場圖.....	35
圖 4.2-2 光柵反射器結構圖、p 絕對值場圖與頻率響應圖.....	36
圖 4.2-3 高對比度光柵結構圖、p 絕對值場圖與頻率響應圖.....	37
圖 4.2-4 高對比度光柵結構圖、p 絕對值場圖與頻率響應圖.....	38
圖 4.2-5 六角形排列示意圖.....	38
圖 4.2-6 高對比度光柵結構圖、p 絕對值場圖與頻率響應圖.....	39
圖 4.2-7 一維共振腔結構圖與 p 絕對值場圖.....	40
圖 4.2-8 一維共振腔結構圖與 p 絕對值場圖.....	41
圖 4.2-9 一維共振腔結構圖與 p 絕對值場圖.....	41
圖 4.2-10 二維共振腔結構圖與 p 絕對值場圖.....	42
圖 4.2-11 富勒烯結構圖.....	44
圖 4.2-12 球貝索函數.....	44
圖 4.2-13 巴克球結構相鄰兩光柵間距.....	46
圖 4.2-14 巴克球結構圖.....	47
圖 4.2-15 巴克球共振腔 p 絕對值場圖.....	47
圖 4.2-16 巴克球結構相鄰兩光柵間距.....	49
圖 4.2-17 巴克球結構圖(2 階)	50
圖 4.2-18 巴克球共振腔 p 絕對值場圖(2 階)	50
圖 5.1-1 仿橫笛共振腔結構圖.....	52
圖 5.1-2 仿橫笛共振腔 p 絕對值場圖.....	53
圖 5.2-1 不同排列方式的繞線共振腔 p 絕對值場圖.....	55
圖 5.2-2 繞線共振腔反射器 p 絕對值場圖與頻率響應圖.....	56
圖 5.2-3 繞線共振腔反射器 p 絕對值場圖與頻率響應圖(旋轉 90 度)	57
圖 5.2-4 三維小型共振腔結構圖.....	57
圖 5.2-5 三維小型共振腔頗面圖.....	58
圖 5.2-6 三維小型共振腔 p 絕對值場圖.....	58
圖 5.2-7 三維小型共振腔反射頻率響應圖.....	59

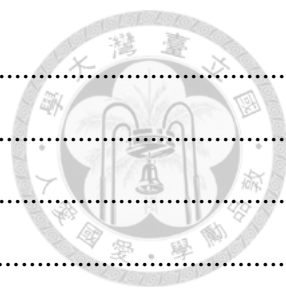


圖 5.3-1 一維共振腔結構圖與 p 絕對值場圖.....	60
圖 5.3-2 聲波二維共振腔 p 絕對值場圖.....	61
圖 5.3-3 聲波二維共振腔 p 絕對值場圖放大圖.....	62
圖 5.3-4 三維共振腔結構圖.....	62
圖 5.3-5 三維共振腔 p 絕對值場圖	63
圖 6.1-1 小型共振腔實驗示意圖.....	64
圖 6.1-2 小型共振腔實體照片.....	64
圖 6.1-3 小型共振腔位置圖.....	65
圖 6.1-4 喇叭位置圖.....	65
圖 6.1-5 分貝計位置圖.....	66
圖 6.1-6 實驗量測之分貝圖.....	66
圖 6.2-1 模擬結構圖.....	67
圖 6.2-2 模擬所得頻率響應圖.....	67

表目錄



表 3.2-1 電磁波布拉格反射器參數表.....	16
表 3.2-2 電磁波布拉格反射器層數 N 與品質因子 Q 關係.....	17
表 3.2-3 電磁波布拉格反射器層數 N 與品質因子 Q 關係(TM 模態)	18
表 3.2-4 電磁波布拉格反射器層數 N 與品質因子 Q 關係(TM 模態)	19
表 3.3-1 聲波布拉格反射器參數表.....	20
表 3.3-2 聲波布拉格反射器層數 N 與品質因子 Q 關係.....	21
表 3.3-3 聲波布拉格反射器層數 N 與品質因子 Q 關係.....	22
表 4.1-1 電磁波布拉格反射器參數表(TE)	25
表 4.1-2 電磁波布拉格反射器參數表(TM)	26
表 4.1-3 電磁波二維共振腔參數表(TE)	31
表 4.1-4 電磁波二維共振腔參數表(TE)，調整後.....	32
表 4.1-5 電磁波二維共振腔參數表(TM)	33
表 4.2-1 聲波波導參數表.....	35
表 4.2-2 聲波光柵反射器參數表.....	36
表 4.2-3 聲波光柵反射器參數表(HCG)	37
表 4.2-4 二維聲波光柵反射器參數表(HCG)	38
表 4.2-5 二維聲波光柵反射器參數表(HCG)	39
表 4.2-6 聲波二維共振腔參數表.....	42
表 4.2-7 球型共振腔個模態及其場圖.....	45
表 4.2-8 聲波巴克球共振腔參數表.....	46
表 4.2-9 聲波巴克球共振腔參數表(2 階)	49
表 5.1-1 仿橫笛共振腔參數表.....	52
表 5.1-2 繞線的共振腔結構與 p 絕對值場圖.....	54
表 5.2-1 繞線共振腔共振頻率與品質因子.....	55
表 5.2-2 繞線共振腔共振頻率與品質因子(旋轉 90 度)	56
表 5.3-1 聲波一維共振腔參數表.....	60
表 5.3-2 聲波二維共振腔參數表.....	61

第一章 簡介



1.1 文獻回顧

1.1.1 繞射理論與光柵研究

光柵為在空間中具有周期排列的結構，當一道光打在光柵上後，將會因為繞射的關係而產生不同的繞射階數，我們可以由平行光柵切方向的波向量(wavevector, or k vector)守恆來得到下列的關係式，由於入射光受到表面結構的影響，將會得到表面結構的週期所造成波向量 $\frac{2\pi}{\Lambda}$ 。光柵的週期越大，則產生的繞射階數將會越多。

$$k_{m,tan} = k_{inc,tan} + m \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (1.1.1)$$

上式(1.1.1)即為特定階數的切方向波向量，假若 $k_{m,tan} < n_{1,2}k_0$ ， $n_{1,2}$ 為入射和出射端介質的折射率， k_0 為真空中的波向量，該階數的電磁波將會是在入射和出射區間為可以傳遞的繞射波，如圖 1.1-1 電磁波繞射觀念圖。如果 $k_{m,tan} > n_{1,2}k_0$ 則該階數的電磁波將會是隨空間衰減的消逝波(evanescent wave)。特定階數是否為傳遞波明顯將會受到入射角度和該區間的折射率影響。若光柵滿足次波長的條件，則此時光柵的週期將會小於波長，由公式我們可以得出，垂直入射波將不會產生繞射階。

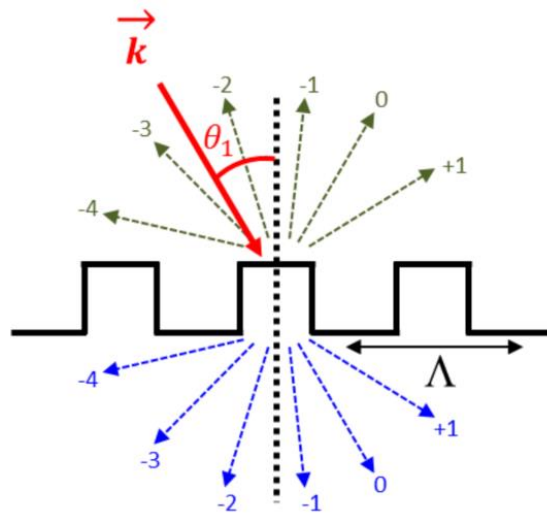


圖 1.1-1 電磁波繞射觀念圖

在 1902 年科學家 Wood 就第一個發現電磁波入射到週期性結構會不同於電磁波入射到平板界面，將有不規則(anomaly)現象[1]。為了紀念 Wood 的發現，這類的現象在文獻中經常被稱作午德不規則(Wood's anomaly)。直至 1960 年代，經過廣泛對光柵的研究，將這些不規則的現象分為兩個形式，第一種稱作雷利型(Rayleigh type)，又稱做雷利不規則(Rayleigh anomaly)，其中，雷利不規則就是 Wood 發現的午德不規則。第二種稱作共振型

(Resonance type)，在 1960 年代以後開始被討論。所謂的雷利不規則是發生在電磁波與週期結構產生繞射現象時有特定階數電磁波沿著光柵的表面傳播而造成應變量有一個迅速變化的現象。然而，共振型的不規則發生的原因是當入射的波向量可以滿足光柵元件中特定區間的導波模態。這個現象後來慢慢被叫做波導模態共振理論(guided mode resonance theory, GMR)，這期間相關著名的研究有 1965 年 Hessel 和 Oliner 建構出第一個模型去演示共振型的不規則[2]。1973 年 Neviere 等人研究了表面和緩變化(surface relief)光柵耦合器(grating coupler)的共振型不規則[3,4]。1989 年 Gale 等人用實驗演示了在蝴蝶翅膀表面的週期結構，也有共振型的不規則的現象，使得在特定可見光波長的穿透特別強，造成肉眼看該蝴蝶的翅膀有特別的視覺效果[5]。在 1990 和 1993 年 Moharam, Wang 和 Magnusson 等人利用嚴謹的電磁波解法討論並整理了波導模態共振理論的相關論文[6,7]。

1.1.2 布拉格反射器

布拉格反射器(distributed Bragg reflector, DBR)為一利用波的建設性與破壞性干涉所製作的反射器，在光波的損耗極低因此可用在波導及光纖中。當波經過不同的介質時，會產生穿透與反射。利用不同折射率的介質互相堆疊使得透射波達到破壞性干涉，而反射波達到建設性干涉以達到反射的效果。

布拉格反射器的原理可以應用在波導中，其頻寬會與兩介質的折射率差異有關，若折射率差異很小，則對於波長的選擇將會很敏銳，可以用在光學系統中的濾波。若折射率差異較大，則頻寬較大，可用來製作全介質多層高反射膜(dielectric mirror)，或稱為 Bragg mirror，在本論文中所設計的布拉格反射器較接近後者。

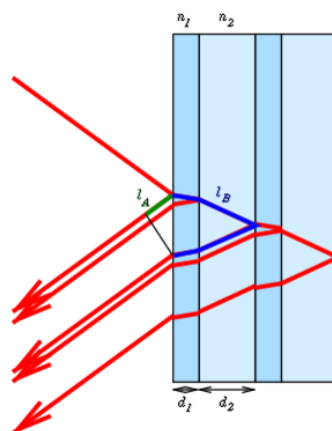
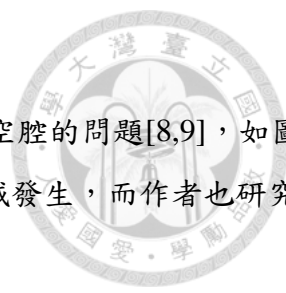


圖 1.1-2 布拉格反射器示意圖



1.1.3 光柵反射器

在 2000 年及 2001 年 Jacob 與 Dunn 提出了光柵連接在一個平板空腔的問題[8,9]，如圖 1.1-3 所示。利用週期結構提供側向波向量，使得共振可以在平板區域發生，而作者也研究了斜向入射對於反射頻率響應的變化。

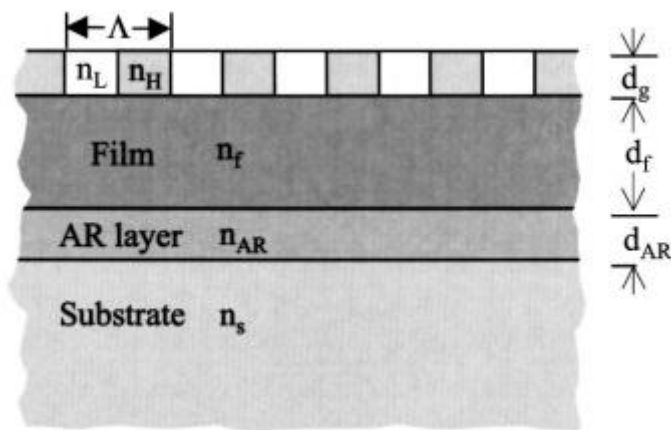


圖 1.1-3 光柵式濾波器結構圖[8]

在 2007 年 Greenwell 與 Boonruang 提出更進一步的模型，由一光柵與平板區間所組成，作者利用波導模態共振(Guided-Mode Resonance, GMR)的原理設計只有零階的光柵，高階的繞射會變成消逝波，平板為單模的波導且光柵將會耦合+1 及-1 的繞射階進入波導模態，將可以設計窄頻的光學濾波器。如下圖所示：

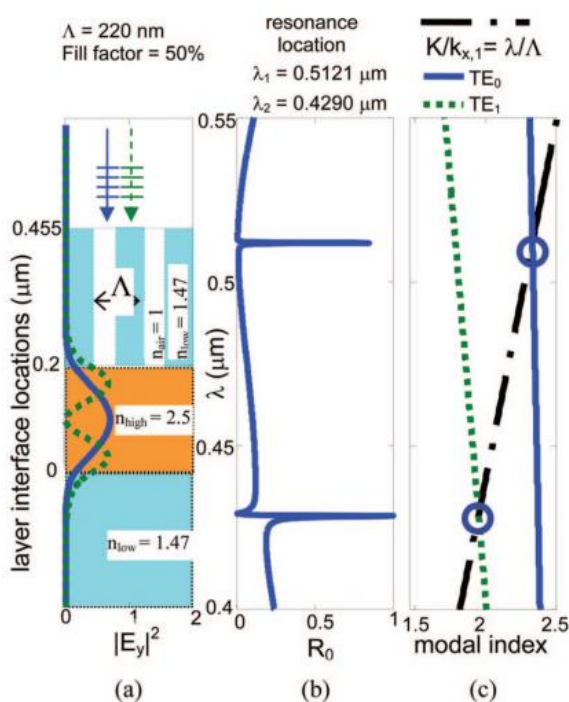


圖 1.1-4 光柵反射器結構圖、反射頻譜及模態折射率[10]

1.1.4 高對比度光柵

從 2004 年起，Connie J. Chang-Hasnaian 與她的研究團隊開始研究高對比度光柵(High-Index-Contrast Grating, HCG)，所設計的 HCG 可用來取代 DBR 成為面射型雷射(VCSEL)的反射鏡[11]，並提供了廣泛關於 HCG 的討論與應用。HCG 為次波長的的光柵結構，光柵的部分由高折射率材料組成(如 AlGaAs、Si 等等)，周圍包覆了低折射率材料(如空氣、氧化物)，如圖 1.1-5。

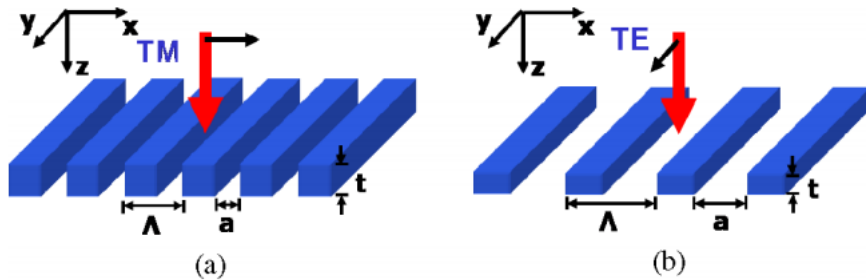


圖 1.1-5 高對比度光柵[12]

高反射的特性可以解釋如下：由於高折射率對比以及需要滿足邊界條件，入射波激發了結構的諧振波，而這些諧振波以不同的速率沿著 z 方向傳播，經過適當的光柵設計，在另外一側的平均能量可以為 0，這些諧振波將無法耦合至另外一側的平面波，造成反射率達到 100%。

HCG 的反射頻率響應為非對稱，此現象可用 Fano Resonance 解釋[13]，我們也可由頻率響應得到共振腔的品質因子，由以下的吻合公式：

$$R = \frac{r^2(\omega - \omega_0)^2 + t^2\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 - 2rt(\omega - \omega_0)\left(\frac{1}{\tau}\right)}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{1}{\tau}\right)^2} \quad (1.1.2)$$

其中 r 與 t 為同折射率均勻平板的反射率及穿透率，由 $Q = \omega_0\tau$ 可以求得其品質因子。

傳統的 VCSEL 利用 DBR 需要相當多的層數，利用 HCG 所製造的 VCSEL 將能有效的縮短所需的厚度，如圖 1.1-6 所示。

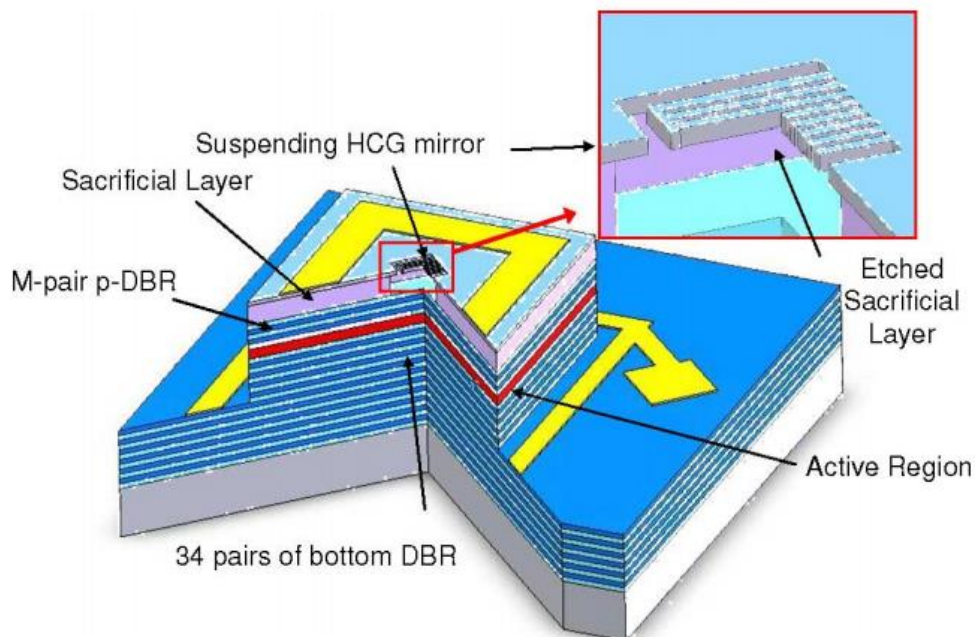


圖 1.1-6 由 HCG 為反射鏡的 VCSEL 結構[14]

1.1.5 共振腔

共振腔為特定波長能在腔體內產生駐波的元件，因此具有良好的頻率選擇特性。共振腔的組成要件為腔體與反射鏡，透過反射鏡使得波在腔體內來回反射達到共振的條件。共振腔可以用來產生特定波長的波或是從信號中選擇出特定波長的波，樂器也是利用聲波共振的原理以產生特定的音調。



1.2 研究動機

本論文希望透過模擬分析，實現共振腔的設計，利用光柵反射器及布拉格反射器達到侷限電磁波或聲波的目的。相較於光子晶體或是聲子晶體利用點缺陷以產生共振模態，需要利用好幾倍波長的厚度來達到侷限能量的效果，光柵反射器所需要的厚度相對來說小了很多。

而與傳統共振腔利用完整的平面以達到反射的效果不同，在本論文中，透過排列與共振腔不同折射率的光柵，儘管從外觀看來共振腔的外壁充滿孔洞，但透過類似側向耦合的方式，一樣能達到侷限能量的效果。相較於用金屬所設計的電磁波波導，利用電介質設計的波導在通訊波段將會有更低的損耗。

利用光柵反射器所設計的共振腔有許多的應用，一維的共振腔能用來設計垂直共振腔面射型雷射(vertical-cavity surface-emitting laser, VCSEL)，若是平行於光柵排列方向有 k 分量的話，則可以用來製作波導，可應用於光學元件中；二維的共振腔也可用來製作波導，利用光柵所設計的中空波導管將能夠以更低的損耗傳遞電磁能量，且大部分的能量集中在空氣組成的core，將可以避免能量太高而產生的非線性效應。

第二章 基本原理



2.1 光柵反射器設計原理

根據基本的電磁理論，入射平行光柵切方向的波向量(wavevector)將會受到光柵周期的調變，而產生若干階數的波向量。在希望製造出強反射的前提下，就必須讓反射與穿透區間只存在零階的波為傳遞波，而高階的繞射波皆為消逝波，因此可得光柵週期必須設計在：

$$(k_0 n_1)^2 - \left(k_0 n_1 \sin \theta_1 + \frac{2\pi}{\Lambda}\right)^2 < 0 \quad (2.1.1)$$

此處假設為正向入射($\theta_1 = 0^\circ$)，(2.1.1)改寫為：

$$\left(n_1 \frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right)^2 < 0, \Lambda < \frac{\lambda_0}{n_1} \quad (2.1.2)$$

因此波長的意義在光柵的週期小於出射端中的波長。其中 n_1 為低折射率之入射與出射區間， n_2 為光柵之折射率， Λ 為光柵之週期， λ_0 為共振頻率時的波長。

而一般平板介質波導 (planar waveguides) 中電磁波利用全反射條件 ($n_2 > n_1, n_2 > n_3$) 使得能量能在 x 方向上傳播，如圖 2.1-1。若光柵繞射模態水平分量之波向量符合在波導區間的水平分量之波向量時，將會產生建設性干涉或稱共振的現象，此種現象則稱為波導模態共振 (guided mode resonance, GMR)，如圖 2.1-2。

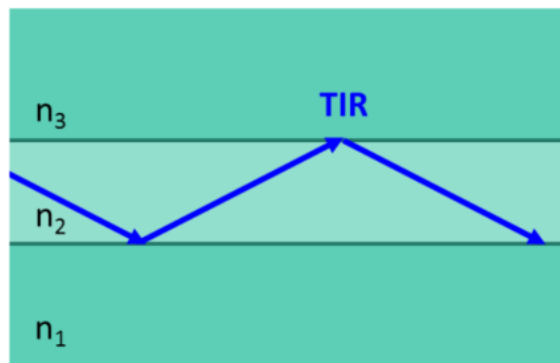


圖 2.1-1 平板介質波導示意圖

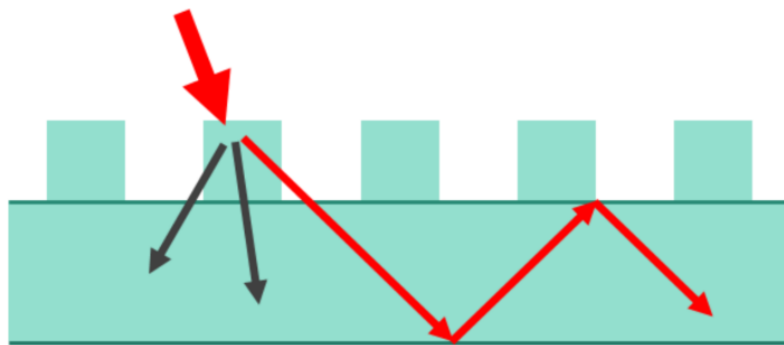


圖 2.1-2 波導模態共振示意圖



因此我們整理出光柵關係式與電磁波在平板波導的傳播常數 β_m 的關係：

$$\beta_m = k_0 n_2 \sin\theta_2 \quad (2.1.3)$$

根據波導模態共振理論，光柵繞射所產生的水平方向波向量與平板波導水平分量波向量互相匹配：

$$k_0 n_2 \sin\theta_2 = k_0 n_1 \sin\theta_1 + m \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (2.1.4)$$

由於此處假設為正向入射，即入射角為 0° ($\theta_1 = 0^\circ$)，由式 2.1.3 與式 2.1.4 可得平板波導區間關係式：

$$(k_0 n_2)^2 - \left(m \frac{2\pi}{\Lambda}\right)^2 > 0, \Lambda > m \frac{\lambda_0}{n_2} \quad (2.1.5)$$

整理方程式(2.1.2)與(2.1.5)，可推導出符合波導模態共振的條件：

$$m \frac{\lambda_0}{n_2} < \Lambda < \frac{\lambda_0}{n_1} \quad (2.1.6)$$

由上式我們就可以知道光柵週期必須落在哪一個範圍，才符合共振條件。

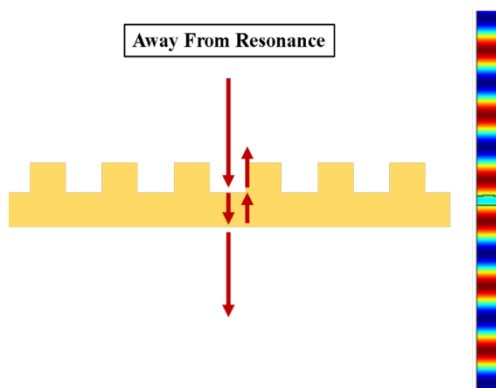


圖 2.1-3 非共振頻率的電場圖和光柵示意圖

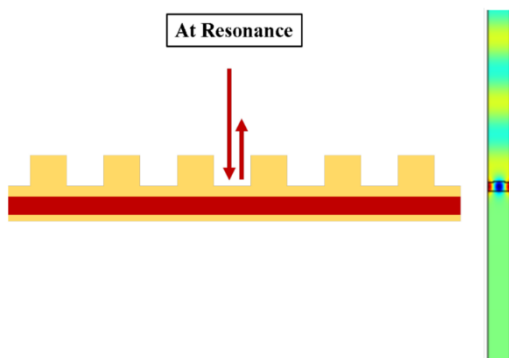


圖 2.1-4 共振頻率的電場圖和光柵示意圖

由於上方的光柵已經設計在次波長的區間，繞射波由光柵而來的側向(x)方向波向量已經大於入射區間所能擁有的最大波向量，也因此平板內的高階繞射波將在入射界面全反射，如圖 2.1-5。

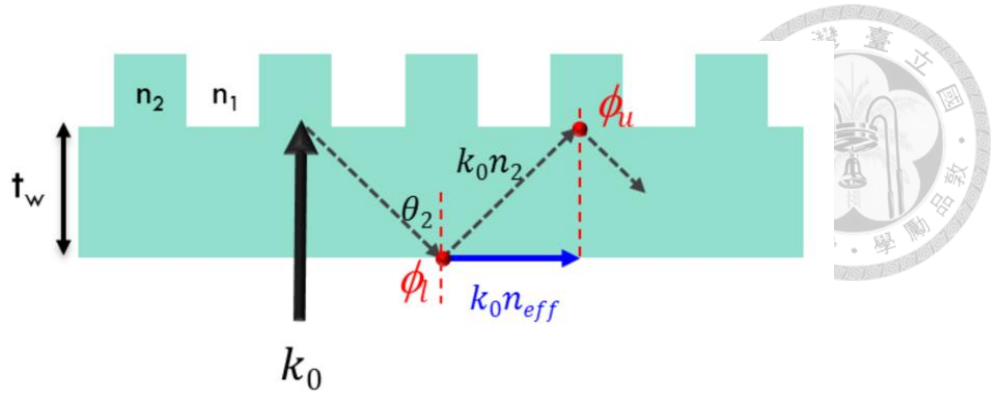


圖 2.1-5 波導模態估算概念圖

波導模態共振是在元件中存在一個往側向的導波模態時反射頻譜在該特定波長會有一個迅速接近 1 的現象，因此將會計算在平板中往側向的波是否會有一個建設性干涉或稱共振的現象。首先考慮平板區間內經由一個週期的相位差：

$$2n_2 \frac{2\pi}{\lambda_0} \cos\theta_2 \cdot t_w + \phi_l + \phi_u = 2m\pi \quad (2.1.7)$$

由在平板區間內基本波向量的幾何關係，其中 n_{eff} 為模態折射率(modal index)

$$\sin\theta_2 = \frac{n_{eff}}{n_2} \quad (2.1.8)$$

TE 極化在平板界面全反射的相位差：

$$\phi_{TE} = -2\tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{n_{eff}^2 - n_2^2}{n_2^2 - n_{eff}^2}} \right) \quad (2.1.9)$$

若為 TM 極化，則在平板界面全反射的相位差需改為：

$$\phi_{TM} = -2\tan^{-1} \left(\frac{n_2^2}{n_1^2} \sqrt{\frac{n_{eff}^2 - n_2^2}{n_2^2 - n_{eff}^2}} \right) \quad (2.1.10)$$

此時將式(2.1.7)改寫成為 n_{eff} 為自變量的式子：

$$2n_2 \frac{2\pi}{\lambda_0} t_w \sqrt{1 - \left(\frac{n_{eff}}{n_2}\right)^2} = 2m\pi + 4\tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{n_{eff}^2 - n_2^2}{n_2^2 - n_{eff}^2}} \right) \quad (2.1.11)$$

在不同 n_{eff} 情況下電磁波可以在平板內共振的厚度：

$$t_w = \frac{1}{\sqrt{n_2^2 k_0^2 - n_{eff}^2 k_0^2}} \left[m\pi + 2\tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{n_{eff}^2 - n_1^2}{n_2^2 - n_{eff}^2}} \right) \right] \quad (2.1.12)$$

在方程式(2.1.7)至(2.1.12)中， n_{eff} 所代表的物理意義是在特定波長下，電磁波在平板內的方向，換言之就是角度的計算。方程式(2.1.12)目的在於能夠表示在特定光柵下方的平板內，各種不同方向的波(至少需在下界面全反射)在什麼樣的平板厚度之下可以滿足共振的條件。然而在正向入射狀況下，側向波只會來自繞射波，由 1 階繞射波往平行界面方向的波向量：

$$\frac{\frac{2\pi}{\Lambda}}{n_2 \frac{2\pi}{\lambda_0}} = \sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{\lambda_0/n_2}{\Lambda} \quad (2.1.13)$$

因此可以知道，平板中往平行界面方向的 n_{eff} ：

$$n_{eff} = \frac{\lambda_0}{\Lambda} \quad (2.1.14)$$

附帶一提，由於光柵的界面是一個繞射的界面，波碰到這個界面就會產生繞射，因此即使相位滿足上述共振關係，波也不會像平板波導的系統一直僅傳導在平板內。





2.2 布拉格反射器設計原理

布拉格反射器的結構為不同折射率的介質互相堆疊，每一層的厚度會設計在介質波長的四分之一，當堆疊的層數夠多時，波將會無法穿透至結構外。

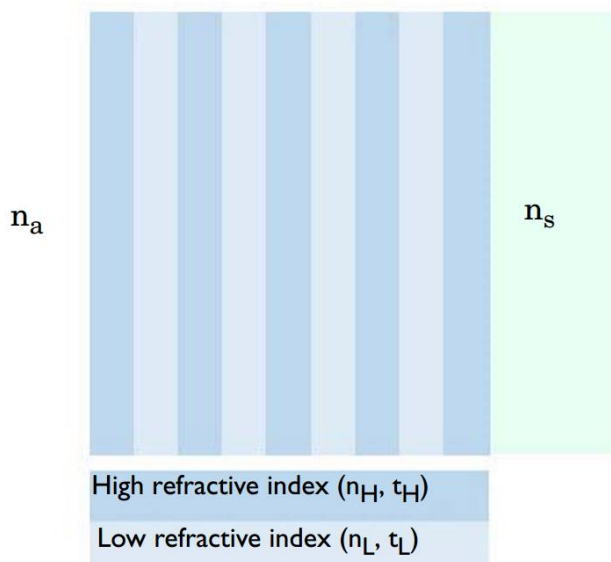


圖 2.2-1 布拉格反射器結構示意圖， $N=4$

每一層的厚度需滿足 $n_H t_H = n_L t_L = \lambda_0/4$ ，以達到四分之波長的條件。

反射率可由下式得到[15]：

$$R = \left(\frac{1 - \left(\frac{n_H}{n_L}\right)^{2N} \frac{n_H^2}{n_a n_s}}{1 + \left(\frac{n_H}{n_L}\right)^{2N} \frac{n_H^2}{n_a n_s}} \right)^2 \quad (2.2.1)$$

其中 n_a 、 n_s 為結構前後介質的折射率， n_H 、 n_L 為布拉格反射器的介質折射率， N 則為結構的層數，一對高低折射率介質為一層。而布拉格反射器的頻寬可由下式得到：

$$\Delta\lambda_0 = \frac{4\lambda_0}{\pi} a \sin\left(\frac{n_H - n_L}{n_H + n_L}\right) \quad (2.2.2)$$



2.3 聲波設計原理

聲波和電磁波一樣是波，因此也可以寫出描述聲波的 Helmholtz 方程式，而相較於電磁波由兩個向量場(電場及磁場)所組成，聲波則是由一個純量場(壓力)及一個向量場(速度)所組成，首先我們可以寫出壓力及速度的關係[16]：

$$\nabla p = -\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \quad (2.3.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = -\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.3.2)$$

假設角頻率為 ω ，我們可以取代時間的微分：

$$\nabla p = -j\omega\rho_0\vec{u} \quad (2.3.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = -\frac{j\omega}{K} p \quad (2.3.4)$$

其中 K 為體積模量(bulk modulus)，由(2.3.3),(2.3.4)式可以推得聲波的 Helmholtz 方程式：

$$\nabla^2 p + \omega^2 \frac{\rho_0}{K} p = 0 \quad (2.3.5)$$

而再來我們推算聲波的介質波導所需滿足的條件，假定二維空間中波導的壓力為 ρ_1 、體積模量為 K_1 ，周圍環境的壓力為 ρ_2 、體積模量為 K_2 ，我們可以寫出以下式子：

$$\begin{cases} p = A \cos(k_x) e^{-j\beta z} & |x| < d \\ p = B e^{-\alpha_x x} e^{-j\beta z} & x > d \end{cases} \quad (2.3.6)$$

由式(2.3.4)我們可以得到：

$$\begin{cases} u_x = -\frac{jk_x}{\omega\rho_1} A \sin(k_x) e^{-j\beta z} & |x| < d \\ u_x = -\frac{j\alpha_x}{\omega\rho_0} B e^{-\alpha_x x} e^{-j\beta z} & x > d \end{cases} \quad (2.3.7)$$

由邊界條件我們可以知道， $\frac{p}{u_x}$ 在邊界必須要連續，由此可得一超越方程式：

$$\tan(k_x d) = \frac{\alpha_x \rho_1}{k_x \rho_0} = \frac{\rho_1}{\rho_0} \sqrt{\frac{\omega^2 \left(\frac{\rho_1}{K_1} - \frac{\rho_0}{K}\right)}{k_x^2} - 1} = \frac{\rho_1}{\rho_0} \sqrt{\frac{\beta^2 - \omega^2 \frac{\rho_0}{K}}{\omega^2 \frac{\rho_1}{K_1} - \beta^2}} \quad (2.3.8)$$

其中 $\beta = n_{eff} k_0 = \frac{\lambda_0}{\Lambda} k_0$ ，因此我們可以知道，在已知 n_{eff} 的情況下，所滿足的波導厚度為：

$$t_w = 2 * d = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 \frac{\rho_1}{K_1} - \left(\frac{\lambda_0}{\Lambda} k_0\right)^2}} * 2 * \tan^{-1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \sqrt{\frac{\left(\frac{\lambda_0}{\Lambda} k_0\right)^2 - \omega^2 \frac{\rho_0}{K}}{\omega^2 \frac{\rho_1}{K_1} - \left(\frac{\lambda_0}{\Lambda} k_0\right)^2}} \right) \quad (2.3.9)$$

計算出了聲波波導的厚度之後，我們可以用與電磁波一樣的原理分析波導模態共振，便可以得到聲波情況下的光柵反射器。



2.4 共振腔設計原理

2.4.1 一維、二維共振腔

一維共振腔為在空間中有兩個方向是無窮延伸的共振腔，為兩個無限大的平板所形成的共振腔。一維共振腔須滿足的條件為 $kl = n\pi$ ，以達到波在共振腔內振盪一次所造成的相位差為 2π 的整數倍。

由於在二維中的波向量(k vector)不再僅有一個方向，但我們希望反射器能夠設計在正向入射，因此在這邊我們會把二維共振腔設計成圓形。二維共振腔可由 Helmholtz 方程式出發 [17]：

$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0 \quad (2.4.1)$$

式(2.4.1)所描述的為電磁波的 TE 模態，若為 TM 模態則須將 E_z 改為 H_z ，若為聲波則須將 E_z 改為壓力 p 。利用圓柱座標可以得到：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0 \quad (2.4.2)$$

由於沒有 ϕ 及 z 方向的變化，因此式(28)可簡化為：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + k^2 E_z = 0 \quad (2.4.3)$$

利用完美電導體(PEC)邊界條件，在邊界的電場必須為零，我們可以得到其解為貝索函數(Bessel function)。

2.4.2 三維共振腔

電磁波為向量波，因此無法找到單純在 r 方向有變化的球型模態。聲波球型共振腔的共振模態可由 Helmholtz 方程式在極座標下求得：

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} \right) + \omega^2 \frac{\rho_0}{K} p = 0 \quad (2.4.4)$$

由於在這裡我們想要找尋的模態為只有在 r 方向有變化的模態，以符合我們想要的邊界條件，因此我們可簡化式(27)為：

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \omega^2 \frac{\rho_0}{K} p = 0 \quad (2.4.5)$$

利用 hard wall 邊界條件，邊界上的密度為無限大，可以得到垂直於邊界上的速度為零 $u_{\perp} = 0$ ，即 $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$ ，我們可以得到其解為球貝索函數(spherical Bessel function)：

$$j_0(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{\frac{1}{2}}(kr) \quad (2.4.6)$$

其中 $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v_p} = \frac{\omega}{\sqrt{K/\rho_0}}$ ， J 則為貝索函數(Bessel function)。



2.5 品質因子

在共振結構中，品質因子 Q 會被用來分析一個系統的共振特性，代表著系統保有自身能量的能力，品質因子 Q 的定義為：

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energy Stored}}{\text{Energy dissipated per cycle}} = \omega_0 \frac{\text{Energy Stored}}{\text{Power Loss}} = \frac{\omega_0 U}{P} \quad (2.5.1)$$

而 Q 的大小會與頻寬有關：

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\omega_0}{\Delta \omega} \quad (2.5.2)$$

Q 值越大，系統能量損失的速率越慢，振動將會持續較長的時間，頻寬也會越窄，對於反射器而言， Q 值的大小決定了反射波段的頻寬大小。在數值分析上，共振結構的損耗可由虛部的共振頻率表示：

$$\omega_c = \omega_0 - i\gamma/2 \quad (2.5.3)$$

其中 γ 與系統能量消耗的速率有關，由 Q 值的定義我們可以從共振頻率來推得品質因子

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma}。$$

第三章 以布拉格反射器設計共振腔



3.1 COMSOL Multiphysics 模擬軟體介紹

本論文的模擬採用有限元素法(Finite Element Method, FEM)分析，所使用的軟體為 COMSOL Multiphysics，此軟體可以處理不同物理場的耦合關係，其可分析的問題包含電、機械、化學、流體等相關領域，並可處理材料結構的形變與相變，應用相當廣泛。

利用 COMSOL Multiphysics 模擬軟體，使用者可根據要進行的模擬種類，選擇對應的物理模組，並設定相關物理量、材料與幾何參數。再依照需求，以電腦輔助繪圖設計軟體建立幾何物件，考量模擬時的環境與操作條件，設定區域條件(subdomain condition)及邊界條件(boundary condition)。相關設定完成後，即可進行模擬並依照需求輸出模擬結果與圖表。軟體具物理模組偏微分方程式(Partial differential equations, PDEs)重新編寫與整合的能力，內建自動化數據分析功能，因此我們能依照模擬要求，對軟體進行微調。在 FEM 的模擬當中，網格的大小必須符合場型變化的大小，越小的網格所得到的結果便越精準，但需要更長的模擬時間。圖 3.1.1 為有限元素模擬流程圖。

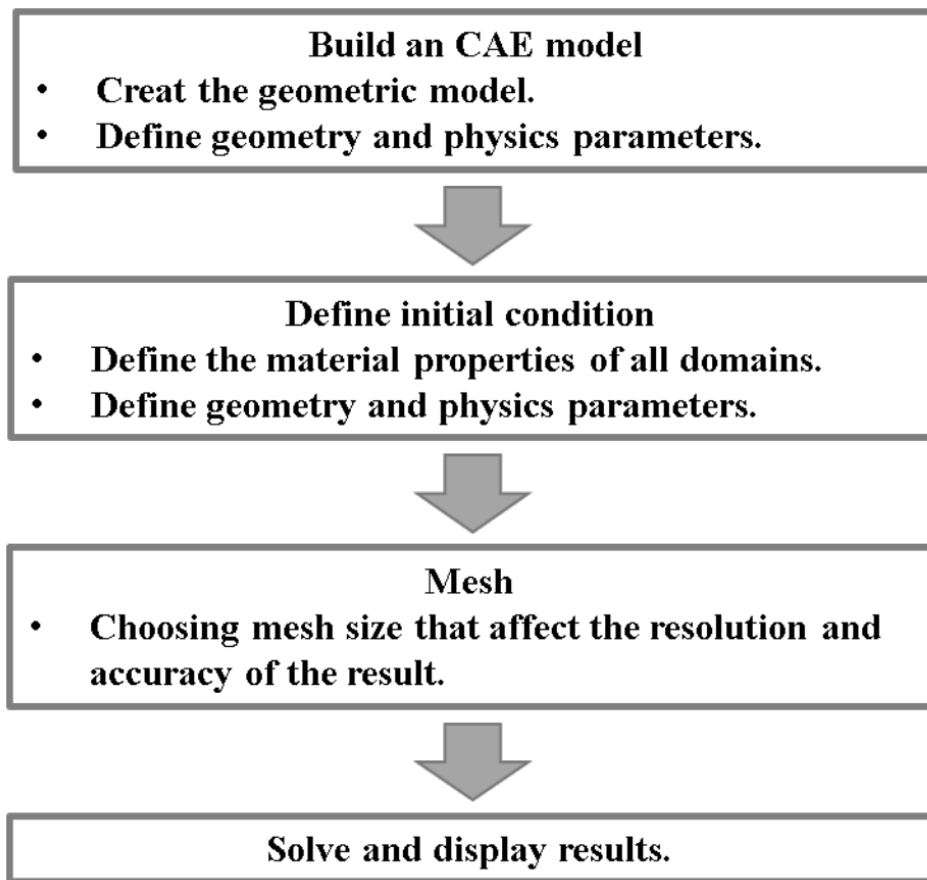
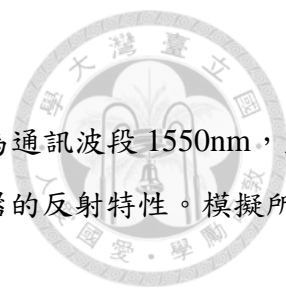


圖 3.1-1 有限元素模擬流程圖



3.2 電磁波布拉格反射器模擬

本節利用 $N=4$ 的布拉格反射器，以電磁波進行模擬，設定波長為通訊波段 1550nm ，並利用折射率對比為 $2.0/1.0$ 的兩種介質進行模擬，以探討布拉格反射器的反射特性。模擬所用到的參數如下表：

Name	Value	Description
n_1	1	Refractive index in medium 1
n_2	2	Refractive index in medium 2
λ	$1550[\text{nm}]$	Wavelength in medium 1
t_H	$194[\text{nm}]$	Thickness of medium 1
t_L	$388[\text{nm}]$	Thickness of medium 2

表 3.2-1 電磁波布拉格反射器參數表

利用由上往下的入射平面波進行模擬，左右邊界設定為週期性邊界，寬度設定比波長還短以避免因模擬誤差產生繞射階，上下的介質為介質 1。可以明顯看出幾乎所有的波都被反射了，由 COMSOL 模擬軟體所量測到的反射率為 99.61% ，與理論計算所得相符。由下圖中也可以看出，波遇到了布拉格反射器之後，波的振幅大小將會因為破壞性干涉而逐漸變小。

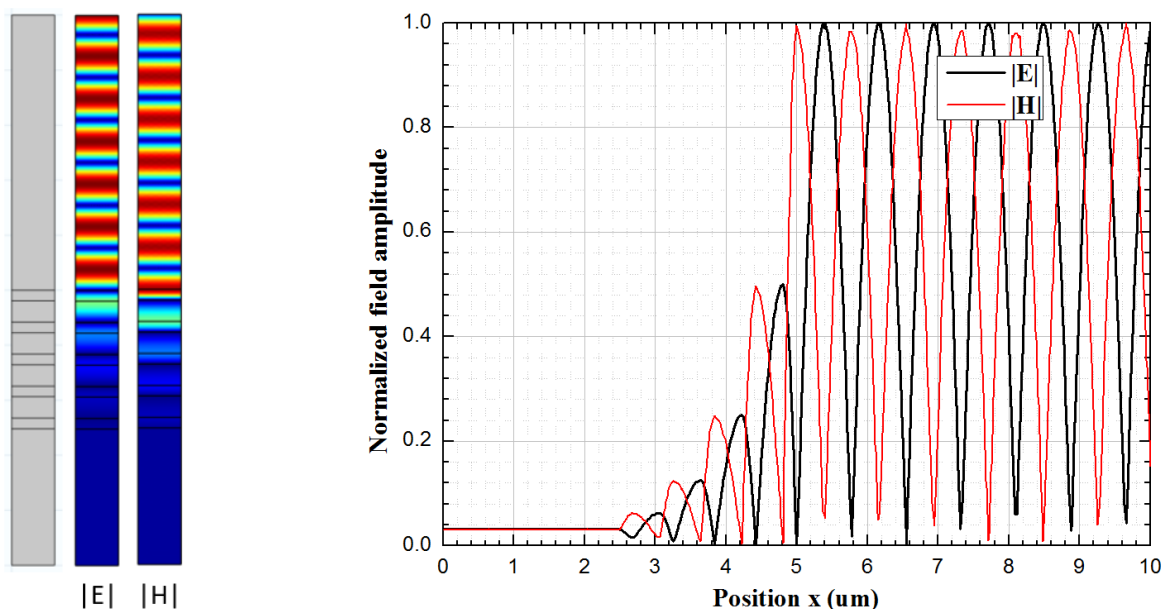
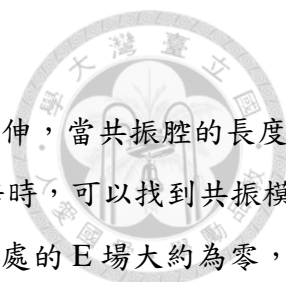


圖 3.2-1 布拉格反射器結構圖與 E、H 絕對值場圖

由上圖可以看出，在布拉格反射器介面處的電場大小為零。由於布拉格反射器的原理是利用電磁波的建設性與破壞性干涉，並不會產生繞射現象，因此對於正向入射的 TE 及 TM 模態所造成的效果是一樣的。



3.2.1 一維共振腔模擬

一維共振腔可在上下邊界加上布拉格反射器，左右方向為無窮延伸，當共振腔的長度滿足共振，即波在共振腔內震盪一個週期所造成的相位差為 2π 的整數倍時，可以找到共振模態。而由布拉格反射器模擬中可以發現，經由反射器反射後，在介面處的E場大約為零，因此我們可以估算共振腔的長度應為半波長的整數倍，下圖所設計的共振腔長度為三倍的波長。利用尋找特徵頻率的方式可以找到共振頻率為 $1.9343E14+1.7205E10i$ ，可以算出品質因子 $Q = 5621.3$ 。在一維的情況下，TE 及 TM 模態所得到的結果並沒有區別。

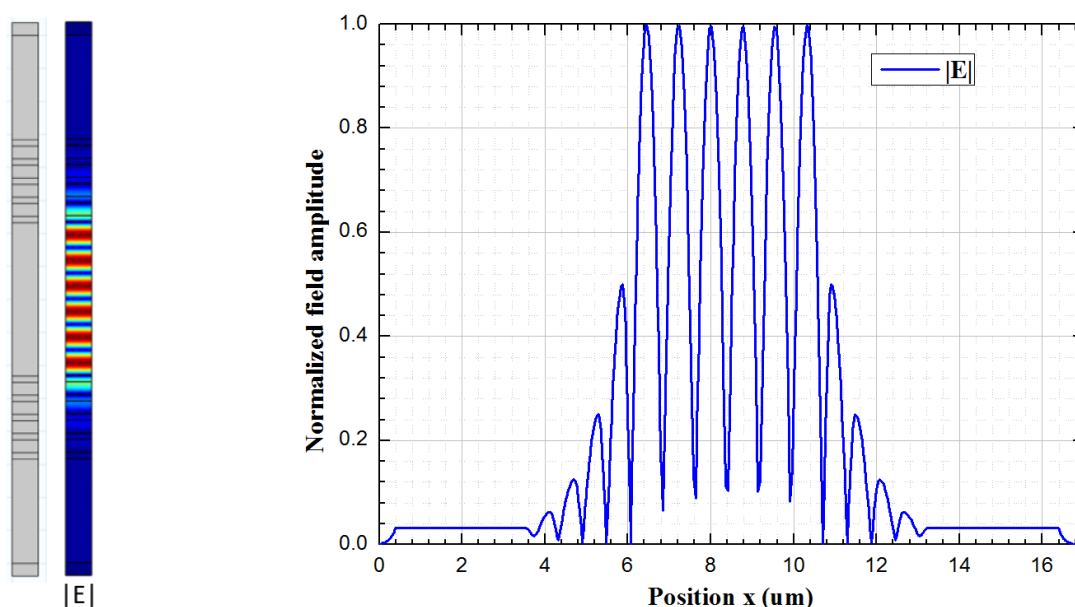


圖 3.2-2 一維共振腔結構圖與 E 絕對值場圖

N	1	2	3	4
Q	85.83	350.83	1405.6	5621.3

表 3.2-2 電磁波布拉格反射器層數 N 與品質因子 Q 關係

由上表可以看出，當層數越多時，反射的效果越好，因此共振腔的品質因子也越高。

3.2.2 二維共振腔模擬

二維共振腔的設計可由貝索函數(Bessel function)來找尋適當的圓半徑，由於電場(E)或磁場(H)的變化為貝索函數，前面的結果可以得知，布拉格反射器介面處的電場約為零，因此我們可以利用 $J_0(kr) = 0$ ，來找尋 TE 模態適當的圓半徑，在這裡 TE 模態指的是電場只有突出紙面的分量。但由於介面處的反射仍然會造成些許的相位差，在找出共振模態之後，可以藉由調整半徑使得共振模態落在想要的頻率。最後找到的圓半徑為 $2.135(\mu\text{m})$ ，共振頻率為 $1.9339E14+1.8512E10i$ ，可以算出品質因子 $Q = 5223.6$ 。而模擬出來的場型與貝索函數相比較，可以發現結果相當吻合。

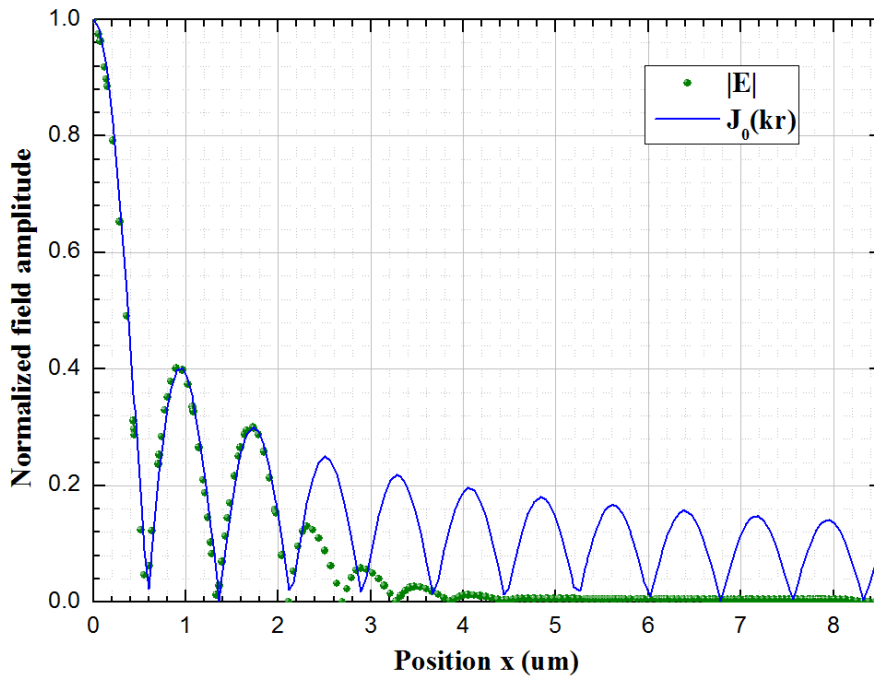
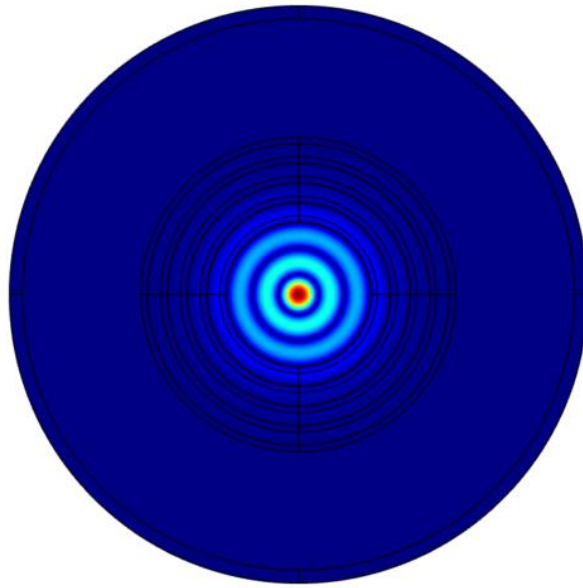


圖 3.2-3 二維共振腔結構圖與 E 絕對值場圖(TE 模態)

N	1	2	3	4
Q	79.4	323.9	1301.9	5223.6

表 3.2-3 電磁波布拉格反射器層數 N 與品質因子 Q 關係(TM 模態)

若是要尋找 TM 模態，此時磁場突出紙面的分量(z component)將會是貝索函數，而電場的方向可由馬克士威爾方程： $\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E}$ 得知為 ϕ 方向，且會是貝索函數的微分。我們可以利用電場在介面處接近為零的邊界條件尋找適當的圓半徑，在這裡我們設定半徑為 2.509 (um)。最後找到的共振頻率為 $1.935E14+1.5821E10i$ ，品質因子 $Q=6115.5$ 。

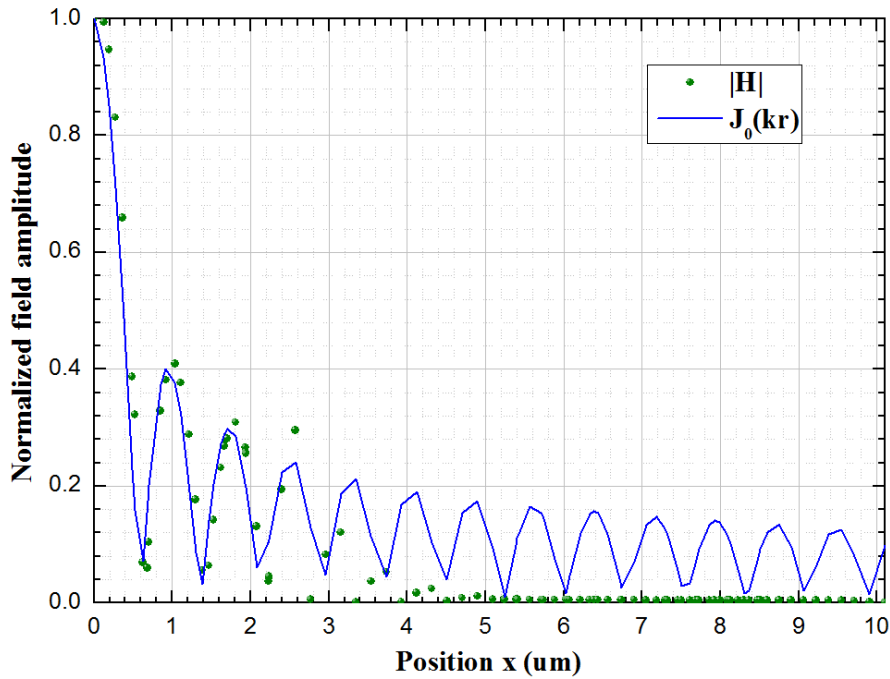
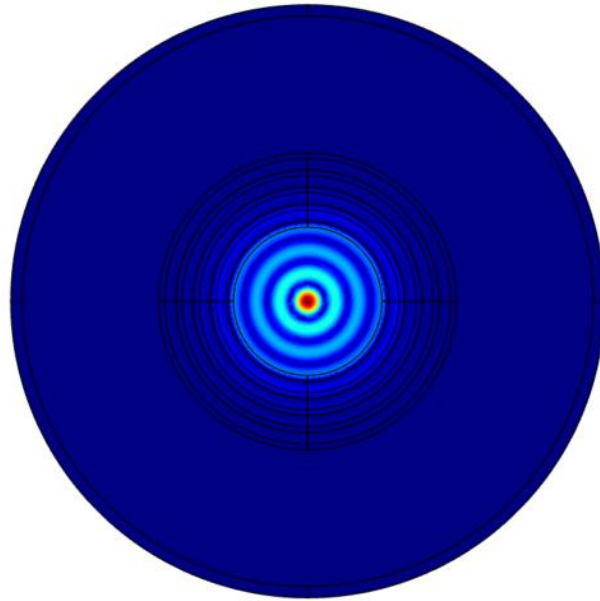


圖 3.2-4 二維共振腔結構圖與 H 絕對值場圖(TM 模態)

N	1	2	3	4
Q	92.37	378.5	1525	6115.5

表 3.2-4 電磁波布拉格反射器層數 N 與品質因子 Q 關係(TM 模態)

3.3 聲波布拉格反射器模擬

本節利用 N=4 的布拉格反射器，以聲波進行模擬。不像電磁模擬中大部分材質的磁導率 μ 都是相同的，在聲波模擬中，材質的密度及體積模量大多是不同的。為了找到與電磁波相對應的折射率差異，模擬所用的材料為銅(Copper)與鉛(Lead)，其中聲波在介質中的速度

分別為 4700(m/s)與 2200(m/s)，密度為 8900(kg/m³)與 11340(kg/m³)。模擬所用到的參數如下表：

Name	Value	Description
c ₁	4700[m/s]	Sound speed in medium 1
c ₂	2200[m/s]	Sound speed in medium 2
d ₁	8900[kg/m ³]	Density in medium 1
d ₂	11340[kg/m ³]	Density in medium 2
λ	0.1[m]	Wavelength in medium 1
t _H	11.7[mm]	Thickness of medium 1
t _L	25[mm]	Thickness of medium 2

表 3.3-1 聲波布拉格反射器參數表

利用與電磁波模擬相似的設定，上下的介質為介質 1，即為鉛，可以模擬出聲波在介質中的傳播情形，可由下圖中看出，聲波在遇到布拉格反射器後大部分都被反射了。所得到的反射率為 97.75%。同時也可以發現，在介面處 x=0.4(m)的位置壓力大小為零，可以由這點來設計共振腔所需的邊界條件。

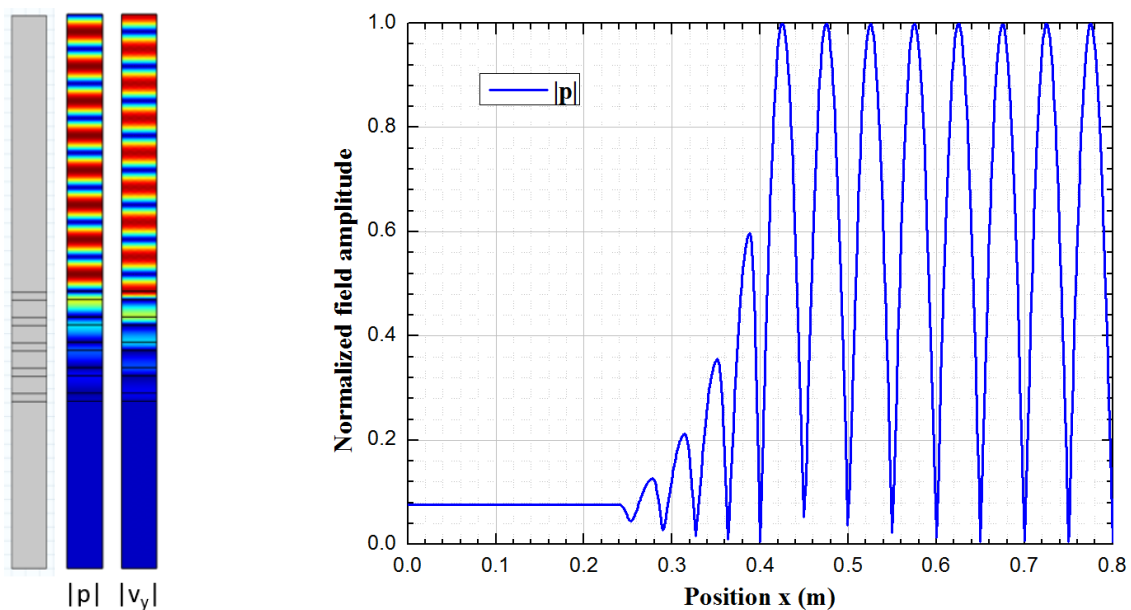


圖 3.3-1 布拉格反射器結構圖與 p 絕對值場圖

3.3.1 一維共振腔模擬

設計一維共振腔須滿足共振腔長度為半波長的整數倍，本節設定的長度為 3 倍波長。共振腔的品質因子會隨共振腔大小增大而增加，因為品質因子 $Q = \frac{\omega_0 U}{P}$ ，當共振腔大小變大時，所能包含的能量會更多而使得 Q 值增加。由於壓力 p 在介面處大小為零，因此並不需

要做相位差的補償。利用尋找特徵頻率的方式可以找到共振頻率為 $47004+22.772i$ ，可以算出品質因子 $Q = 1032.1$ 。

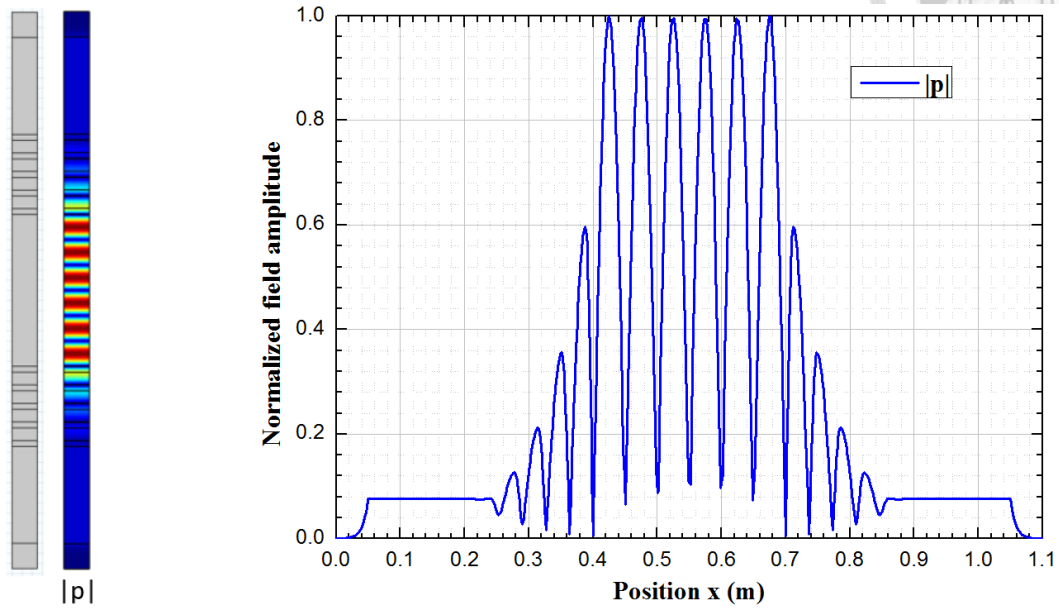


圖 3.3-2 一維共振腔結構圖與 p 絕對值場圖

N	1	2	3	4
Q	43.65	127.32	363.5	1032.1

表 3.3-2 聲波布拉格反射器層數 N 與品質因子 Q 關係

3.3.2 二維共振腔模擬

與電磁波相同，聲波的圓形共振腔場型分布滿足貝索函數，同樣可以利用介面處 p 場為零找尋共振腔半徑，在這裡設定半徑為 $0.1378(m)$ ，共振頻率為 $47004+24.407i$ ，可以算出品質因子 $Q=962.9$ ，模擬所得到的場型也與貝索函數相符，如下圖所示。

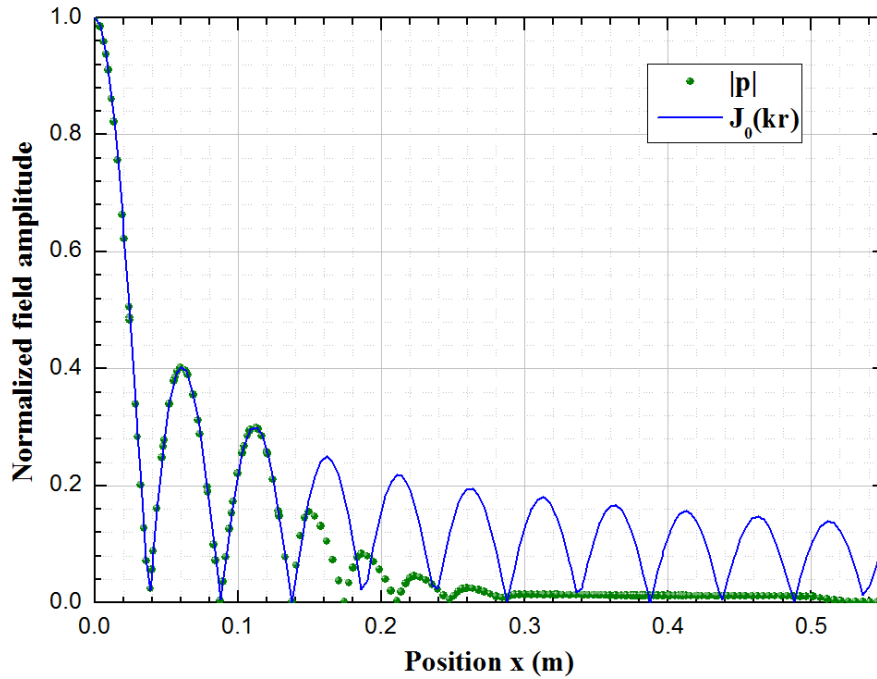
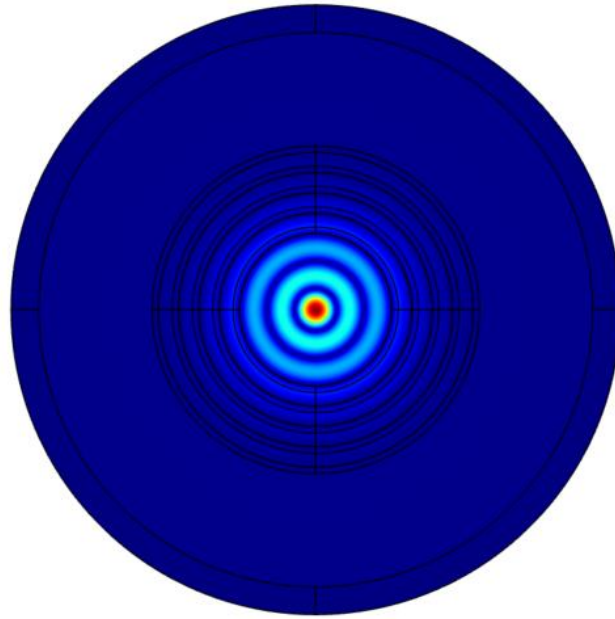


圖 3.3-3 二維共振腔結構圖與 p 絕對值場圖

N	1	2	3	4
Q	40.3	118.4	340.3	962.9

表 3.3-3 聲波布拉格反射器層數 N 與品質因子 Q 關係

3.3.3 三維共振腔模擬

三維共振腔的設計可由球貝索函數(spherical Bessel function)，與二維共振腔相似，可以利用 $j_0(kr) = 0$ ，來找尋適當的圓半徑。並再調整半徑使得共振模態落在想要的頻率。最後找到的球半徑為 0.15 (m)，共振頻率為 $47058+21.51i$ ，可以算出品質因子 $Q = 1094$ 。而模擬

出來的場型與球貝索函數相比較，可以發現結果相當吻合。

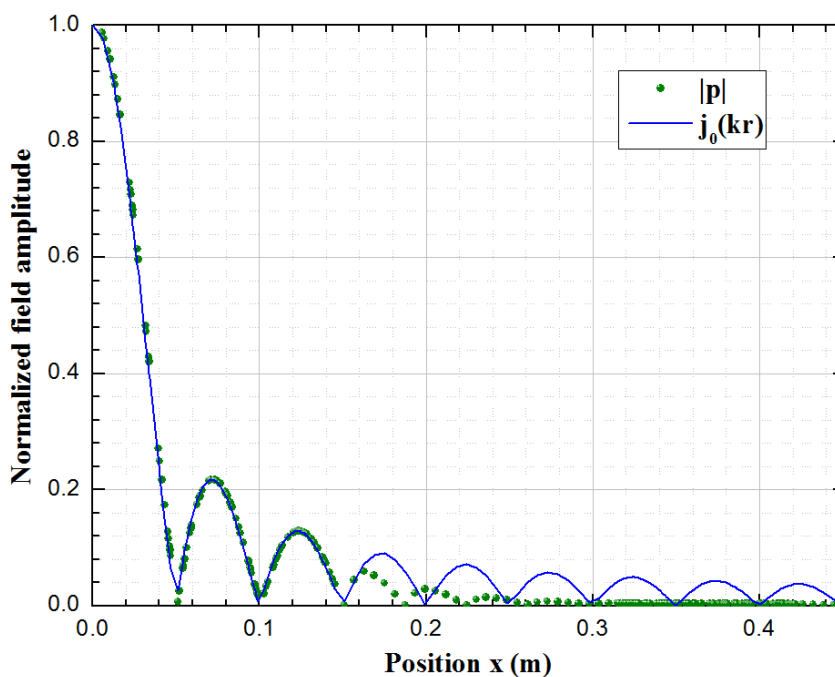
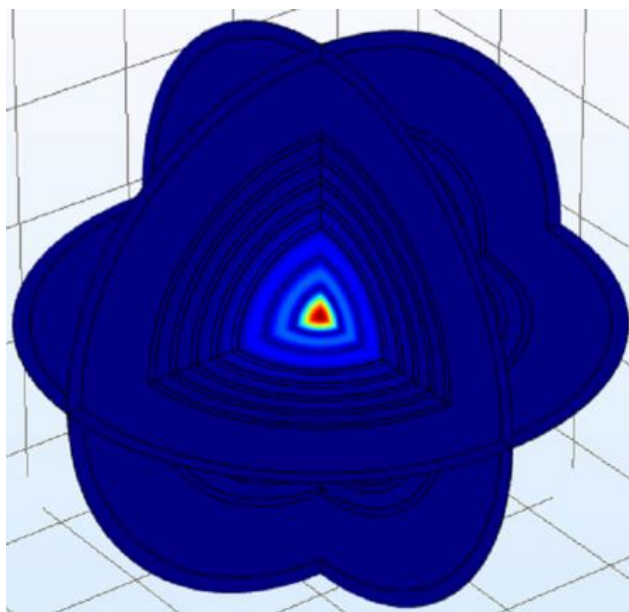


圖 3.3-4 三維共振腔結構圖與 p 絕對值場圖

第四章 以光柵反射器設計共振腔



4.1 電磁波光柵反射器模擬

電磁波光柵反射器的設計原理，由於光柵反射器是在介電質波導上長週期性的光柵，首先我們可以從介電質波導的設計開始，給定固定的波長 λ_0 及光柵週期 Λ ，並由式(15)得到：

$$n_{eff} = \frac{\lambda_0}{\Lambda}$$

而後我們可以代入式(13)以得到介電質波導厚度 t_w ：

$$t_w = \frac{1}{\sqrt{n_2^2 k_0^2 - n_{eff}^2 k_0^2}} \left[m\pi + 2 \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{n_{eff}^2 - n_2^2}}{\sqrt{n_2^2 - n_{eff}^2}} \right) \right]$$

在這裡我們設定折射率對比為 2，也就是說 n_2 設定為 2。而後在波導的一側設計光柵，並要維持波導等效高度不變，如下圖所示，光柵反射器的品質因子將會與光柵的高度平方成反比。值得注意的是，當光柵的高度太高時，微擾理論將不再適用，因此必須再微調參數使得光柵反射器的共振頻率落在想要的頻率上，可以根據下式來調整共振頻率：

$$U_f = \frac{\int d^3\vec{r} |\nabla \times \vec{E}(\vec{r})|^2}{\int d^3\vec{r} \epsilon(\vec{r}) |\vec{E}(\vec{r})|^2} \propto \omega^2 \quad (30)$$

其中 U_f 表示共振模態的能量，與頻率成正比。由式(30)分子可以看出當電場的變化越大，相對應的共振頻率越高；由分母可以看出越多的電場集中在高介電質的區域，則共振頻率越低。因此若得到的共振頻率太高，可以增加介電質的厚度，反之亦然。

而波導內的模態數也會對品質因子產生影響，光柵反射器的品質因子將影響頻寬，品質因子越高，頻寬便會越窄。而在設計共振腔的情況下，光柵反射器的品質因子越高可以抑制其他的共振模態，使得共振腔能設計在想要的頻段。但由於共振腔的設計必須同時滿足共振腔的共振頻率以及光柵反射器的共振頻率，光柵反射器品質因子越高，設計共振腔的難度也會越高，因此先會以較低品質因子的光柵反射器設計共振腔，再慢慢調整參數以抑制其他共振頻率。TE 模態模擬所用到的參數如下表：

Name	Value	Description
n_1	1	Refractive index in medium 1
n_2	2	Refractive index in medium 2
λ	1550[nm]	Wavelength in medium 1
Λ	1000[nm]	Period
t_w	239[nm]	Waveguide thickness
t_g	147[nm]	Grating thickness

表 4.1-1 電磁波布拉格反射器參數表(TE)

若光柵反射器的品質因子夠大，可以利用解共振頻率的方式找出 Q 值，利用 COMSOL 模擬軟體，左右邊界設定為週期性邊界，而上下加入一層 PML 以吸收漏出的波，模擬所得的共振頻率 $f=1.9339E14+2.4743E12i$ ，可以算出 $Q=39.1$ 。同時也可以用 port 在一側激發，另一側吸收以測量 S 參數，掃描共振頻率附近的 S 參數可以看出反射率在共振時會接近 1。

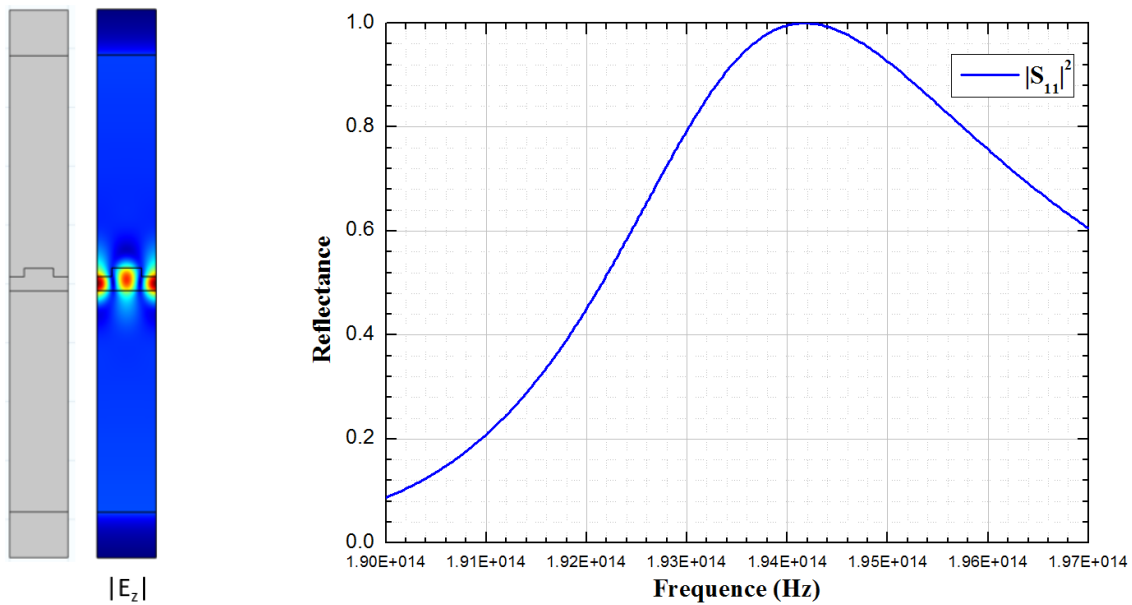


圖 4.1-1 光柵反射器結構圖、E 絕對值場圖與頻率響應圖(TE)

在這裡 TE 模態所定義的為波在介電質波導中傳播時電場與行進方向垂直，也就是說電場只有 z 方向的分量。而 TM 模態為波在介電質波導中傳播時磁場與行進方向垂直，磁場只有 z 方向的分量，由於 TM 模態在介面處全反射所造成的相位差與 TE 模態不同，TM 模態光柵反射器的厚度將會與 TE 模態不同，可由下式得到：

$$t_w = \frac{1}{\sqrt{n_2^2 k_0^2 - n_{eff}^2 k_0^2}} \left[m\pi + 2 \tan^{-1} \left(\frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{\sqrt{n_{eff}^2 - n_1^2}}{\sqrt{n_2^2 - n_{eff}^2}} \right) \right] \quad (31)$$

由於相位差的關係，在相同的 n_{eff} 下，TM 模態的厚度通常會比較厚。TM 模態模擬所

用到的參數如下表：

Name	Value	Description
n_1	1	Refractive index in medium 1
n_2	2	Refractive index in medium 2
λ	1550[nm]	Wavelength in medium 1
Λ	1000[nm]	Period
t_w	412[nm]	Waveguide thickness
t_g	256[nm]	Grating thickness

表 4.1-2 電磁波布拉格反射器參數表(TM)

利用 COMSOL 模擬所得的共振頻率 $f=1.9341E14+1.4894E12i$ ，可以算出 $Q=64.9$ 。同時也可以用 port 在一側激發，另一側吸收以測量 S 參數，掃描共振頻率附近的 S 參數可以看出反射率在共振時會接近 1。

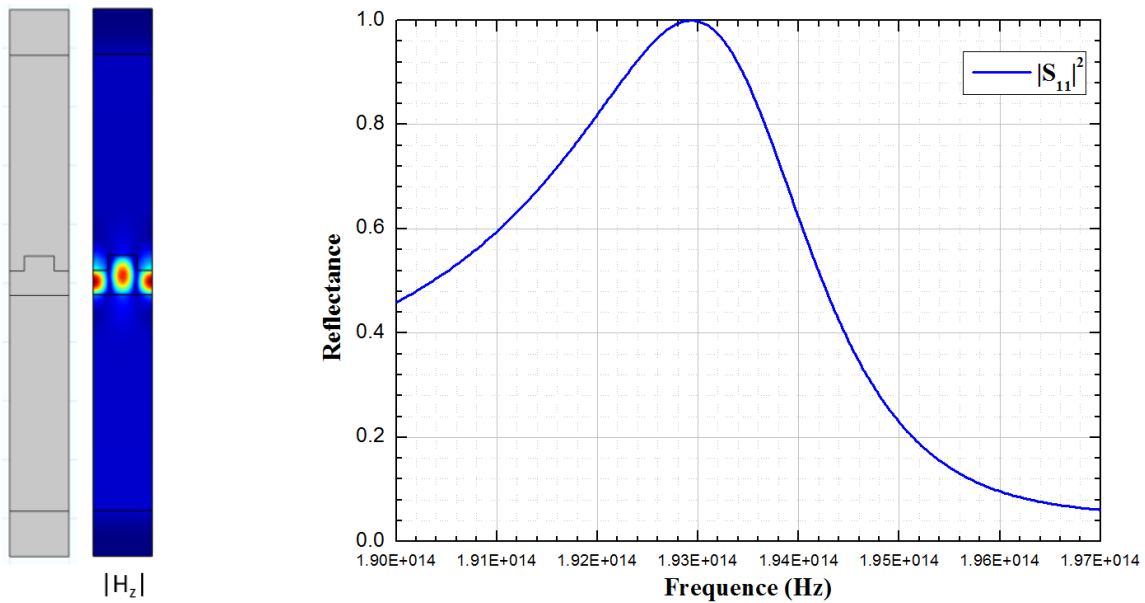


圖 4.1-2 光柵反射器結構圖、H 絕對值場圖與頻率響應圖(TM)

以上的光柵反射器為單模態，即電磁波在波導內的傳播為單模(Single mode)。除了單模以外，光柵反射器也可以設計成多模態，也就是波導的厚度增加至多模所需要的厚度，可由式(13)得到所需的波導厚度：

$$t_w = \frac{1}{\sqrt{n_2^2 k_0^2 - n_{eff}^2 k_0^2}} \left[m\pi + 2 \tan^{-1} \left(\frac{n_{eff}^2 - n_1^2}{\sqrt{n_2^2 - n_{eff}^2}} \right) \right]$$

式中的 m 決定了模態數， $m=0$ 為單模(Single mode)，若要設計第二個模態($m=1$)，則 TE 波導厚度 $t_w=907$ [nm]。經由微調後 $t_w=862$ [nm]， $t_g=147$ [nm]，可以得到下圖的 TE 模態光柵反

射器：

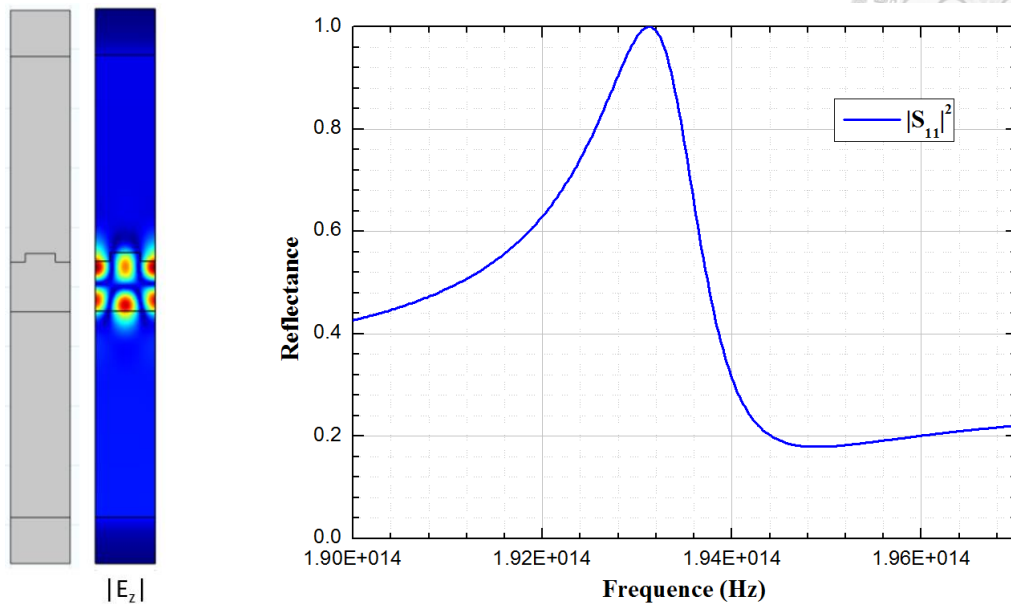


圖 4.1-3 光柵反射器結構圖、E 絕對值場圖與頻率響應圖(TE)

得到的共振頻率為 $1.934E14+6.4348E11i$ ，Q 值為 150。而相較於單模的光柵反射器，多模有較大的自由度來調整光柵高度，在相同的光柵高度下，多模的光柵反射器會有較大的品質因子 Q，這是因為 $Q = \frac{\omega_0 U}{P}$ ，當波導厚度增加，所能擁有的能量 U 也會增加，但散出的功率 P 的變化不大，因此 Q 值增加。而 TM 多模光柵反射器的設計原理與 TE 相同，因此不再贅述。

在用光柵反射器設計共振腔時，常會把光柵反射器當成完美金屬導體(PEC)邊界，而兩者之間存在著相位差，在這邊用 TE 的光柵反射器為例，以 COMSOL 模擬軟體對相位差做定量的分析。由頻率響應圖可以看出，在 $f=1.9416E14$ (Hz)時，光柵反射器的頻反射接近 1，並且可以求得其 $S_{11}=0.017861-0.99983i=1\angle-88.98^\circ$ ，若是將光柵反射器換成 PEC，則可以得到其 $S_{11}=-0.67831-0.73477i=1\angle-132.71^\circ$ ，由於波的路徑是從一端過去之後反射回來，因此若要求相位差，則為兩者的角度差要再除以二，即為 $43.73\div 2=21.87^\circ$ 。

4.1.1 一維共振腔模擬

相較於用布拉格反射器設計的一維共振腔，由於光柵反射器的頻率選擇特性以及對於反射角度的靈敏度，用光柵反射器所設計的共振腔將能有效抑制共振腔的其他模態，留下想要的模態。在設計共振腔時，可以把光柵反射器當成完美電導體，但與完美電導體不同的地方是光柵反射器反射所造成的相位差將有所不同，因此所需的共振腔長度也將有所差異。對於這個問題，可以用模擬軟體求出兩者之間的相位差，再把相位差換算成長度對共振腔長度進

行補償，可由下式：

$$dl = \frac{\Delta\varphi}{k_0} \quad (32)$$

其中 $\Delta\varphi$ 為完美電導體與光柵反射器之間的相位差。或是也可以經由微調參數的方式找到適當的共振腔長度，先假設維完美電導體，而後求解共振頻率，由於相位差的關係，所得的共振頻率將會與光柵反射器的共振頻率有所差異，若得到的共振頻率較高，可以透過增加共振腔長度的方式以降低，反之亦然，可以利用這樣的方式使得共振腔共振頻率與光柵反射器共振頻率彼此互相吻合。

利用前述 TE 模態的光柵反射器設計一維共振腔，利用上下的光柵反射器以達到限制電磁波能量的目的，共振腔的長度要滿足半波長的整數倍，在這裡所設計的共振腔長度為三倍波長，最後經由微調共振腔長度為 4820[nm]。模擬所得的共振頻率 $f=1.9418E14+7.8781E7$ ，其品質因子 $Q=1.2324E6$ ，在這裡的 Q 代表的是共振腔的品質因子。



圖 4.1-4 一維共振腔結構圖與 E 絕對值場圖(TE)

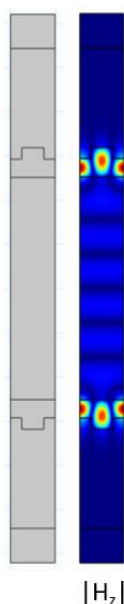


圖 4.1-5 一維共振腔結構圖與 H 絕對值場圖(TM)

而 TM 模態的共振腔則可以用假設完美磁導體的方式，與 TE 模態相似，最後所得的共振腔長度為 5030[nm]，共振頻率 $f=1.9291E14+1.3214E7$ ，其品質因子 $Q=7.2992E6$ 。由上圖可以看出，由於光柵反射器是利用共振的方式達到反射的效果，因此其內部能量將會比入射的平面波還大，也可以由 $Q = \frac{\omega_0 U}{P}$ 看出，當光柵反射器本身的品質因子越高的時候，內部能量將會越高，這樣將會違背原本想將能量集中在空氣的初衷。其解決方法為降低光柵反射器本身的 Q 值。

4.1.2 二維共振腔模擬

二維共振腔由於將光柵反射器繞成一個圓，將會造成共振頻率以及品質因子的改變，因此這邊會用較低品質因子的光柵反射器來設計二維共振腔。在設計上，可以把光柵反射器視為完美電導體(PEC)，圓形共振腔的場型分布為貝索函數(Bessel function)，而共振腔的半徑可以選擇貝索函數為零的地方，在這裡選擇 4458[nm]，即為第五個模態，也就是說中心的部分將會有六個波峰。但二維共振腔的半徑受限於光柵反射器的週期，半徑必須要是週期的整數倍，因此在這邊沿用前述光柵反射器的參數，光柵週期為 1[um]，週期數選擇 28，因此可以算出共振腔半徑為：

$$\text{週期} \times \text{週期數} \div (2\pi) = 4456[\text{nm}]$$

然而光柵反射器的反射頻率峰值會因為形狀改變而有些偏移，這是由於光柵的部分是在半徑較大的外圍，導致實際上的週期比原先設計的光柵反射器長，因而導致反射頻率峰值下

降。峰值的偏移量可由圓的中心向外打出一道柱面波(Cylindrical Wave)，並量測其反射係數，而最外圍用一層 PML 以吸收漏出的波，如下圖所示：

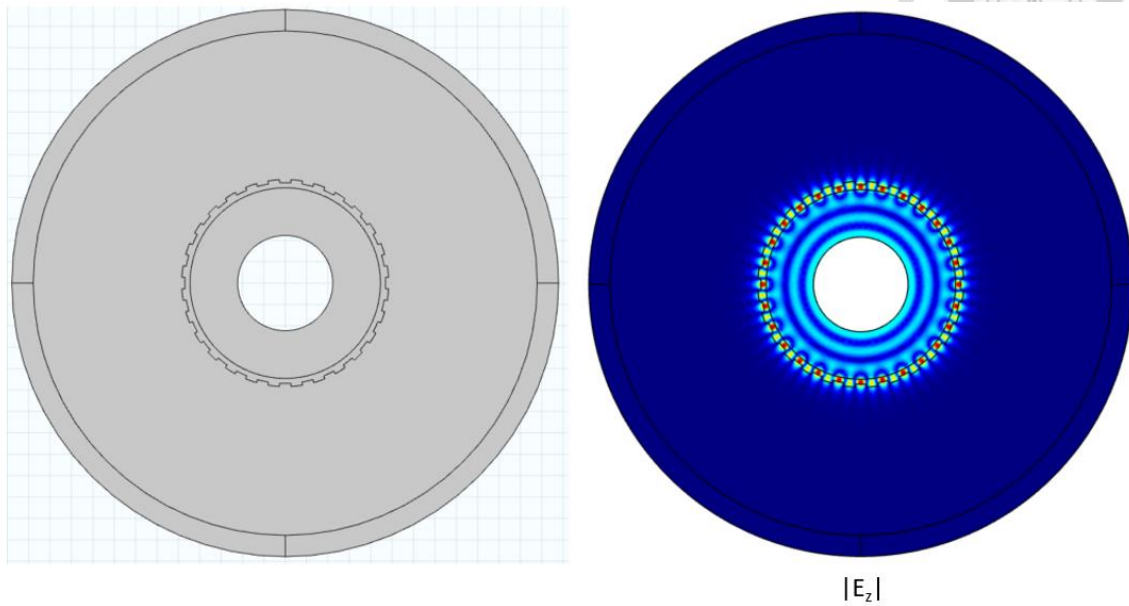


圖 4.1-6 二維光柵反射器結構圖與 E 絕對值場圖(TE)

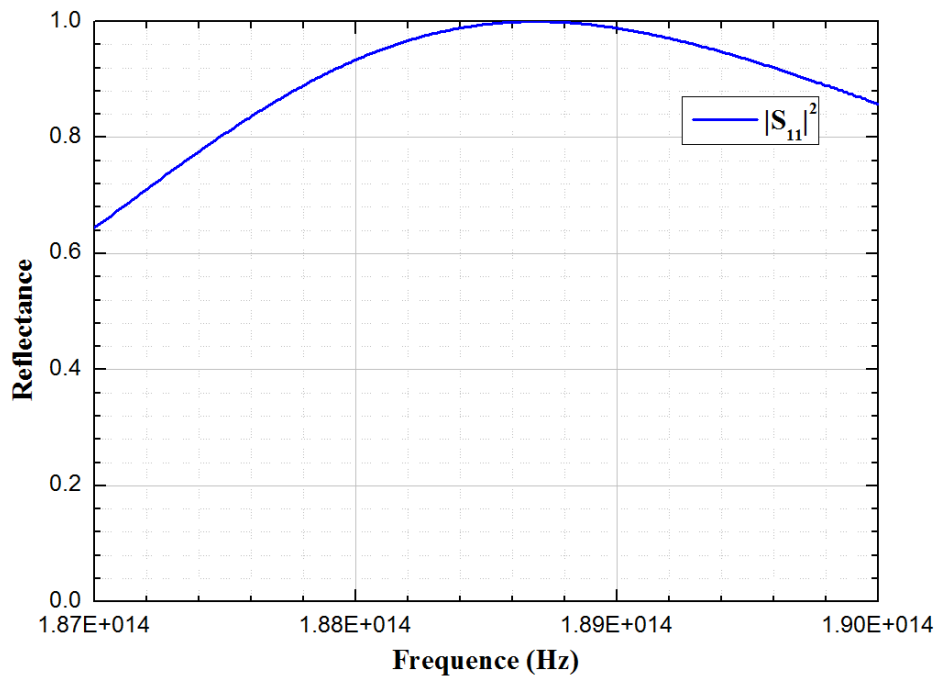


圖 4.1-7 二維光柵反射器頻率響應圖(TE)

而上圖為此光柵反射器的頻率響應圖，可以看出在反射峰值頻率約為 1.887E14(Hz)，比原先設計的頻率還低。由於共振腔的大小是設計在頻率 1.934E14(Hz)，為了使兩者頻率互相吻合，必須適當的調整光柵反射器的參數，在這裡我選擇的是調整二維共振腔的內半徑，並維持其他地方不變。當內半徑變大時，共振腔變大使得共振頻率下降，光柵反射器的波導厚

度變薄，由式(30)可以看出，當介電質變少時，光柵反射器的反射峰值將會上升，藉由這樣的方法可以將兩者的頻率調至相同以增加共振腔的品質因子。最終所使用到的參數如下表：

Name	Value	Description
n_1	1	Refractive index in medium 1
n_2	2	Refractive index in medium 2
ρ_1	4536[nm]	Inner radius
ρ_2	4695[nm]	Outer radius
t_g	147[nm]	Grating thickness

表 4.1-3 電磁波二維共振腔參數表(TE)

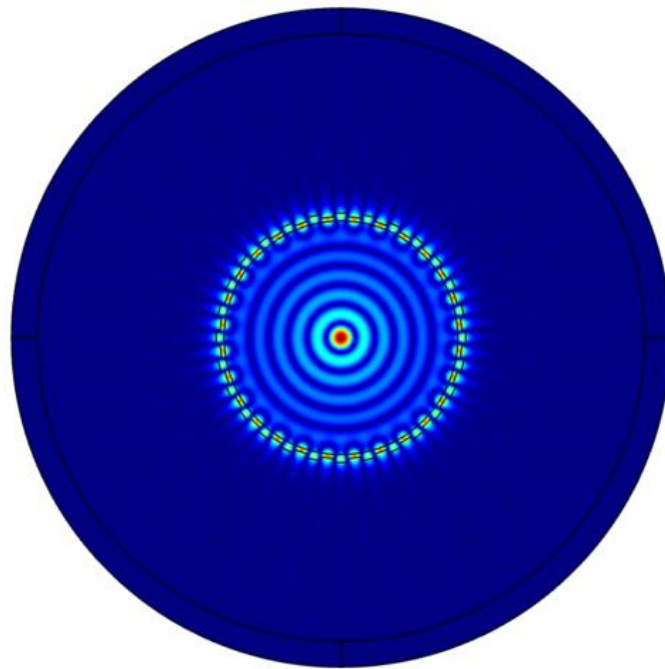


圖 4.1-8 二維共振腔結構圖與 E 絕對值場圖(TE 模態)

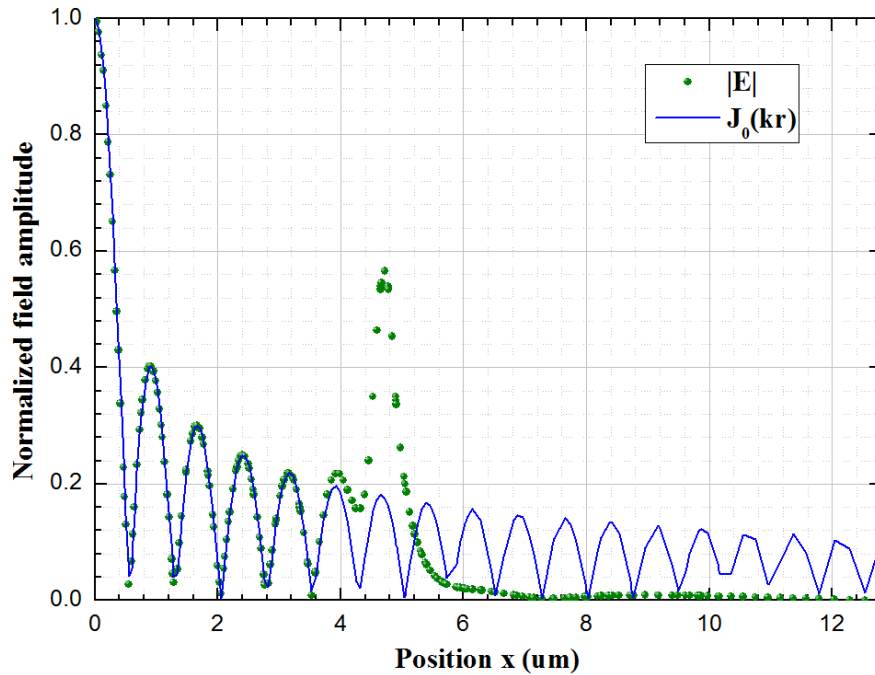
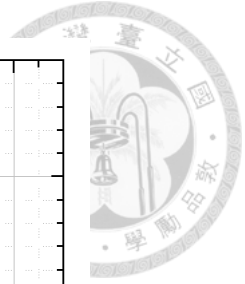


圖 4.1-8 二維共振腔結構圖與 E 絕對值場圖(TE 模態)(續)

模擬所得的共振頻率 $f=2.0079E14+3.9043E9i$ ，品質因子 $Q=23685$ 。在調整參數的過程中共振頻率也因此偏移原先設計的 $1.934E14$ ，由於偏移的頻率不大，共振結構滿足可伸縮性 (scalability)，因此可以將所有結構參數乘上一個係數 $\frac{2.0079E14}{1.934E14} = 1.038$ ，以調整頻率回 $1.934E14$ 。調整完後的參數如下表，所得到的 $f=1.9344E14+3.7618E9i$ ，品質因子 $Q=25711$ 。

Name	Value	Description
n_1	1	Refractive index in medium 1
n_2	2	Refractive index in medium 2
ρ_1	4709[nm]	Inner radius
ρ_2	4874[nm]	Outer radius
t_g	153[nm]	Grating thickness

表 4.1-4 電磁波二維共振腔參數表(TE)，調整後

而對於 TM 模態的二維共振腔設計也是利用相同的原理，先以圓柱波找到環狀光柵反射器的反射峰值，再調整結構參數使得共振腔與光柵反射器的共振頻率相符。

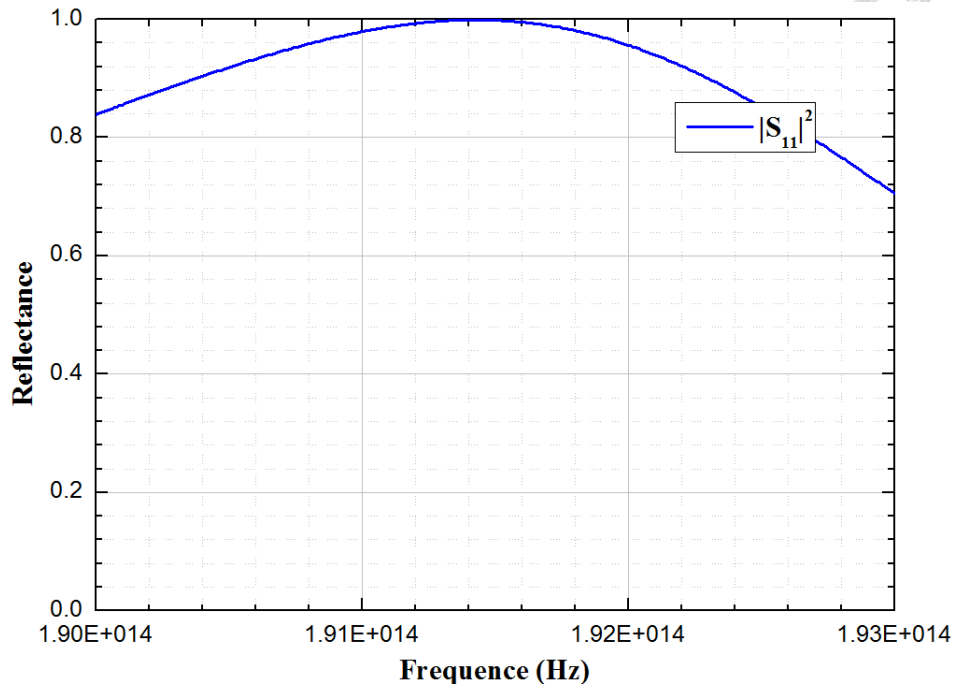
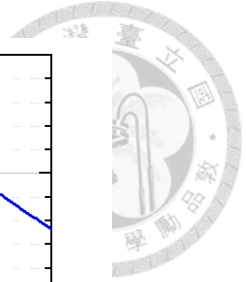


圖 4.1-9 二維光柵反射器頻率響應圖(TM)

由頻率響應圖可以發現，大約在 $f=1.9143E14$ 的地方為反射峰值。下表為調整完後的結構參數表：

Name	Value	Description
n_1	1	Refractive index in medium 1
n_2	2	Refractive index in medium 2
ρ_1	4624[nm]	Inner radius
ρ_2	4868[nm]	Outer radius
t_g	256[nm]	Grating thickness

表 4.1-5 電磁波二維共振腔參數表(TM)

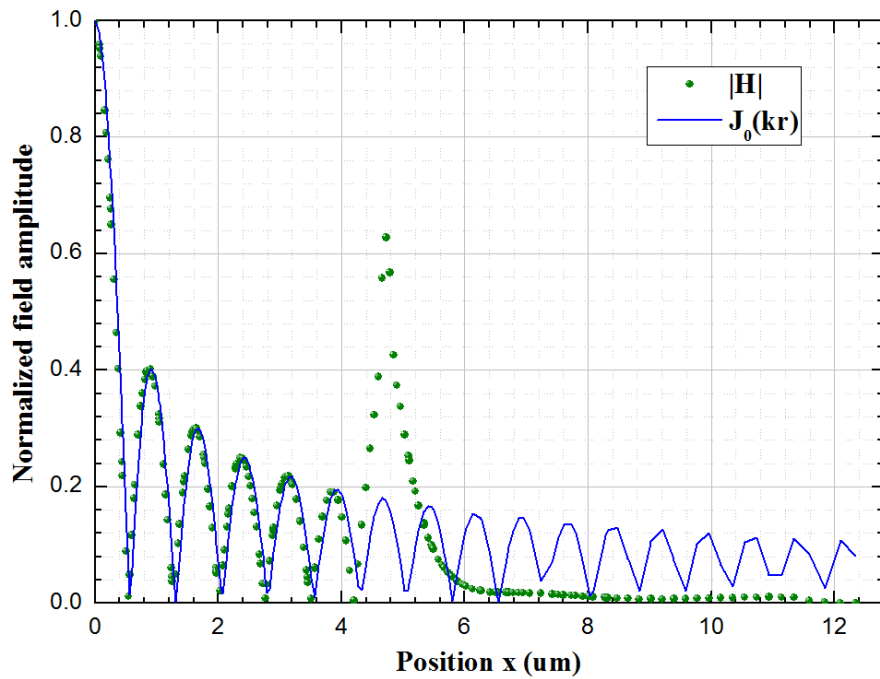
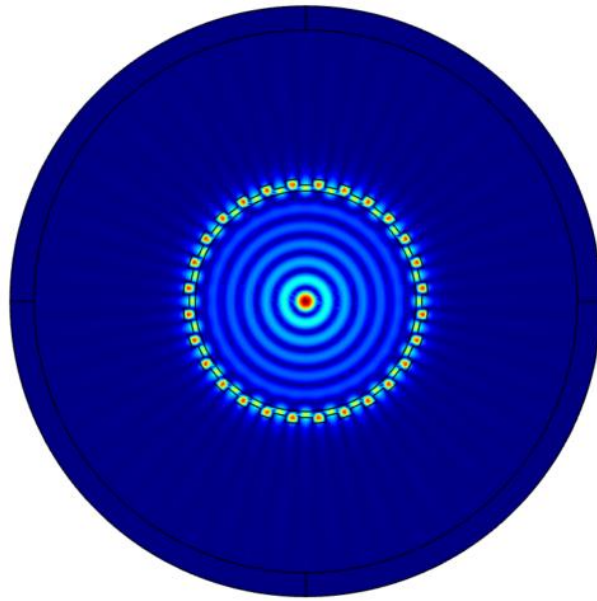
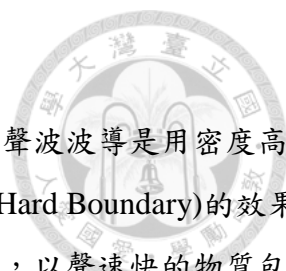


圖 4.1-10 二維共振腔結構圖與 H 絕對值場圖(TM 模態)

得到的共振頻率 $f=2.0227E14+1.0903E10i$ ，品質因子 $Q=9276$ 。由於共振結構滿足可伸縮性，可以將所有結構參數乘上一個係數 $\frac{2.0227E14}{1.934E14} = 1.046$ ，以調整頻率回 $1.934E14$ 。

綜合比較下來，可以發現選用品質因子較小的光柵反射器來當共振腔邊界是比較好的選擇，不僅在設計上較容易，且光柵反射器所含有的能量也比較小，能量集中在中間的空氣部分，可以避免因能量太高而產生的非線性效應。



4.2 聲波光柵反射器模擬

聲波光柵反射器首先可以先從聲波的波導的設計開始，傳統上的聲波波導是用密度高的物質包覆密度低的物質(如空氣)，以達到近似於聲學剛性邊界(Sound Hard Boundary)的效果來導波。但在這邊我們利用類似電磁學介電質波導的方式來設計波導，以聲速快的物質包覆聲速慢的物質，而在材料的選擇上選擇密度差異小的物質，使得主要的分析可以考慮聲速的影響為主。

在知道週期的情況下，可以利用式(26)來得到聲波波導的厚度：

$$t_w = 2 * d = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 \frac{\rho_1}{K_1} - \left(\frac{\lambda_0}{\Lambda} k_0\right)^2}} * 2 * \tan^{-1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{\left(\frac{\lambda_0}{\Lambda} k_0\right)^2 - \omega^2 \frac{\rho_0}{K}}{\omega^2 \frac{\rho_1}{K_1} - \left(\frac{\lambda_0}{\Lambda} k_0\right)^2} \right)$$

而模擬所使用到的參數如下表：

Name	Value	Description
c ₁	4700[m/s]	Sound speed in medium 1
c ₂	2200[m/s]	Sound speed in medium 2
d ₁	8900[kg/m ³]	Density in medium 1
d ₂	11340[kg/m ³]	Density in medium 2
λ	0.1[m]	Wavelength in medium 1
Λ	60[mm]	Period
t _w	21.5[mm]	Thickness of waveguide

表 4.2-1 聲波波導參數表

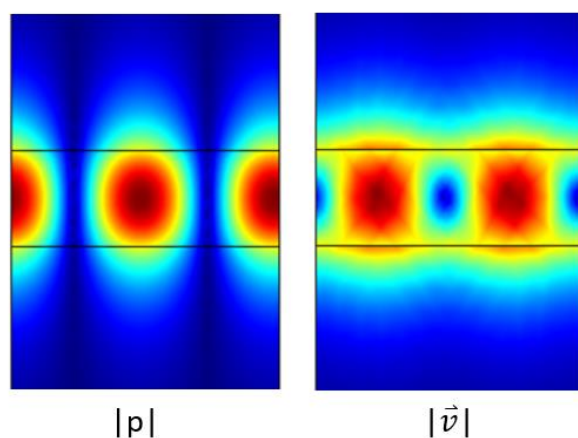


圖 4.2-1 聲波波導壓力與速度絕對值場圖

波導的傳播頻率為 47024[Hz]，由圖形可以看出速度在介面上並不連續，這是因為平行

波導方向的速度分量在界面上並不連續，接著我們在波導上設計週期性的光柵，並調整參數，使其變成光柵反射器。調整後的結構參數如下表：

Name	Value	Description
Λ	60[mm]	Period
t_w	19.4[mm]	Thickness of waveguide
t_g	4.85[mm]	Thickness of grating

表 4.2-2 聲波光柵反射器參數表

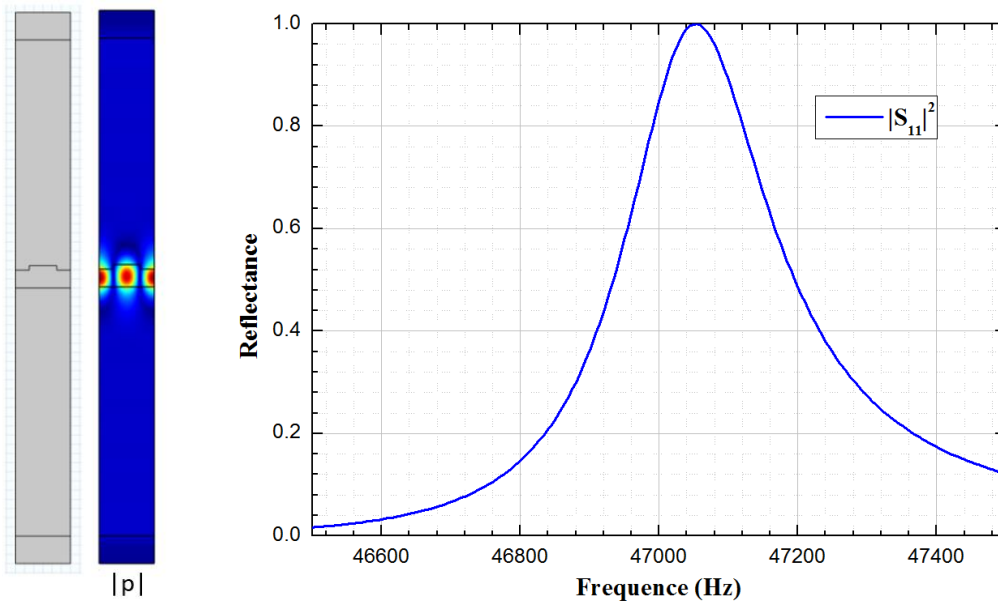


圖 4.2-2 光柵反射器結構圖、 p 絕對值場圖與頻率響應圖

所得到的共振頻率為 $47037+129.09i$ ，品質因子 $Q=182$ 。與電磁波光柵反射器一樣，也可以存在多模的光柵反射器，其原理相同，因此在這邊便不再贅述。若要再進一步降低光柵反射器的品質因子，可以增加光柵的高度，並調整波導厚度使得共振頻率維持不變。當持續增加光柵高度，最終的結果會使得波導厚度降至零，形成高對比度光柵(High Contrast Grating, HCG)。而波導模態共振(GMR)與 HCG 的不同在於：GMR 是靠波導模態才能產生強的反射，單一個週期所能產生的反射不強，必須藉由鄰近的週期一起共振才能有反射的效果，因此對於週期性的要求較高；而 HCG 將共振大部分集中在了單一個週期，對於週期性的要求比較低。在一維共振腔的狀態下，GMR 靠的是平板波導模態所產生的共振；在二維圓形共振腔的情況下，GMR 靠的是環諧振器(ring resonator)所產生的模態共振；而在三維球型共振腔的情況下，並不存在球殼的共振模態，無法找到 GMR 所要求的週期性模態，因此將會改用 HCG，以降低對於週期的要求而達到反射球面波的效果。

HCG 在設計上會設計成次波長(Subwavelength)以避免產生繞射，而相較於 GMR，HCG

可以有更高的頻寬。HCG 的設計原理可先決定光柵的週期及佔空比(duty cycle)，再經由光柵的高度來調整反射的頻率，因為光柵的高度影響了入射波在其中所走的相位，而穿透反射是由建設性與破壞性干涉所造成的，因此光柵的高度造成的相位差便影響了入射波穿透反射的頻率。

Name	Value	Description
c_1	4700[m/s]	Sound speed in medium 1
c_2	2200[m/s]	Sound speed in medium 2
d_1	8900[kg/m ³]	Density in medium 1
d_2	11340[kg/m ³]	Density in medium 2
Λ	85[mm]	Period
w	38[mm]	Width of grating
h	27[mm]	Height of grating

表 4.2-3 聲波光柵反射器參數表(HCG)

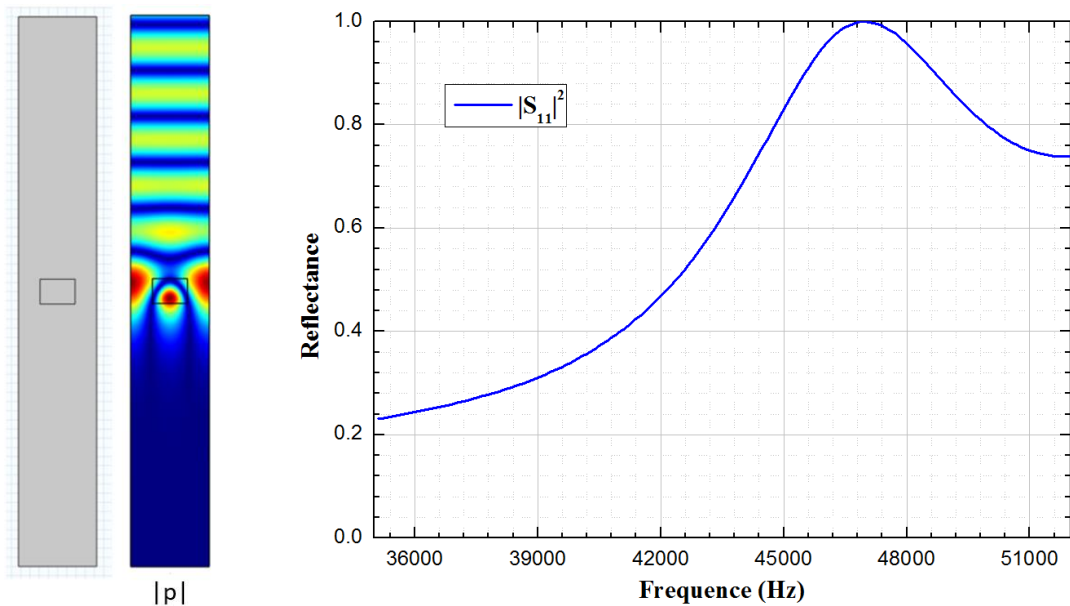


圖 4.2-3 高對比度光柵結構圖、p 絕對值場圖與頻率響應圖

反射峰值頻率 $f=47000$ (Hz)，上圖的壓力絕對值場圖為頻率為反射峰值的場圖，而由頻率響應圖也可以看出 HCG 的頻寬相當高，在很大的頻率區間內都有良好的反射效果。

上述的 HCG 為一維，即光柵在突出紙面方向為無限延伸，而在左右方向為週期性，一維的 HCG 斜向入射隨著不同的方位角 φ 變化較大。若是光柵沿著兩個方向皆為週期性排列，則為二維 HCG。排列週期依照排列方向又可分為矩形(rectangular)及六角形(hexagonal)，矩形排列在 x 及 y 方向設定為 Λ ，光柵的形狀設定為圓柱形，但也可以是其他

形狀，調整結構參數後可以使得共振頻率落在 $f=47000(\text{Hz})$ ，所使用的參數如下表：

Name	Value	Description
Λ	85[mm]	Period
r	27[mm]	Radius of grating
h	40[mm]	Height of grating

表 4.2-4 二維聲波光柵反射器參數表(HCG)

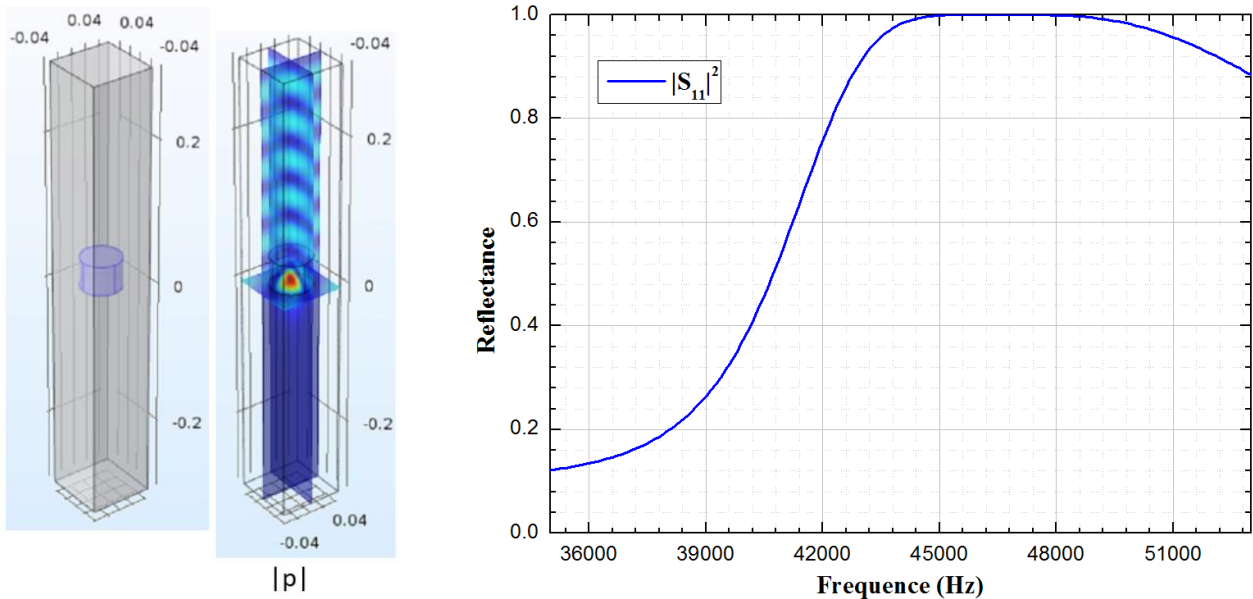


圖 4.2-4 高對比度光柵結構圖、 p 絕對值場圖與頻率響應圖

上圖為矩形 HCG 的結構圖與場圖，左圖為 $f=47000(\text{Hz})$ 時的場圖，而由頻率響應圖可以發現 HCG 的頻寬相當寬，在很長一段的頻率範圍內的反射率都相當接近 1。若是調變某一方向的週期的話，由於在那個方向的反射頻率將會有所變化，可以使得頻寬變得更寬。若兩軸的週期相差過大，則會分裂成兩個模態，使得頻率響應圖將有兩個反射峰值。

六角形排列相較於矩形更加緊密，因此若要從矩形排列推展至六角形，則六角形的晶格常數 a 可由倒晶格推得：

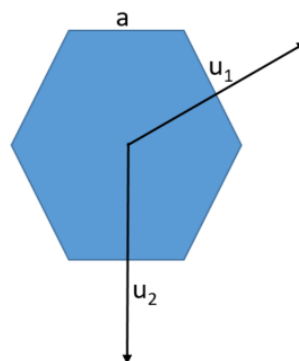


圖 4.2-5 六角形排列示意圖



由 $\vec{u}_1 = (\frac{3}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, -\sqrt{3}a, 0)$, 經由倒晶格可以推得：

$$\vec{G}_1 = 2\pi \frac{\vec{u}_2 \times \vec{n}}{\vec{u}_1 \cdot (\vec{u}_2 \times \vec{n})} = (\frac{2\pi}{\frac{3}{2}a}, 0, 0)$$

與矩形的倒晶格向量大小 $\frac{2\pi}{\Lambda}$ 相比，可以發現六角形排列的晶格常數 $a = \frac{2}{3}\Lambda$ 。模擬所使用到的參數如下表：

Name	Value	Description
Λ	85[mm]	Period
r	27[mm]	Radius of grating
h	35[mm]	Height of grating

表 4.2-5 二維聲波光柵反射器參數表(HCG)

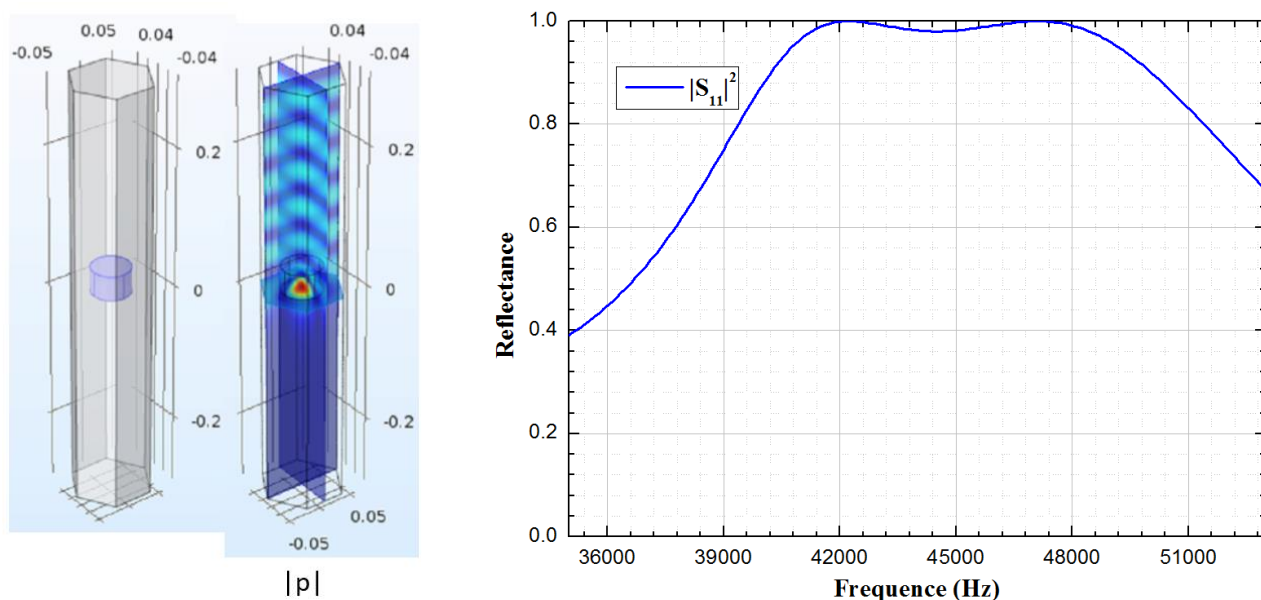
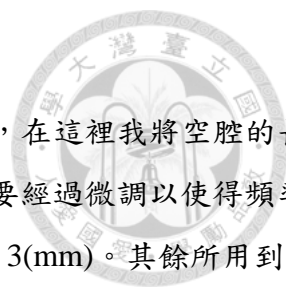


圖 4.2-6 高對比度光柵結構圖、p 絕對值場圖與頻率響應圖

上圖為六角型 HCG 的結構圖與場圖，左圖為 $f=47000(\text{Hz})$ 時的場圖，而由頻率響應圖可以發現，不只有一個反射峰值，這是因為光柵的厚度較厚，且排列的方式使得光柵跟鄰近的光柵間的耦合較好，使得反射器可以支撐不只一個模態，這樣的現象也可以用來增加反射器的頻寬。

在這裡所設定的 HCG 品質因子很低，也是這樣的原因使得頻寬很寬，但在模擬上不容易找到其共振模態，儘管如此，從穿透反射依然可以看到其反射的效果，並可由頻率響應圖進一步推算其品質因子。而品質因子低的好處是光柵所含有的能量密度將不會太高。



4.2.1 一維共振腔模擬

若將 HCG 排成上下兩排，中間形成的空腔將可以容納共振模態，在這裡我將空腔的長度設定為三倍波長，由於 HCG 反射相位差的關係，實際上的長度需要經過微調以使得頻率為原先所設定的頻率。最終的空腔長度為 0.303(m)，比三倍波長多了 3(mm)。其餘所用到的參數與前述的一維 HCG 反射器相同。

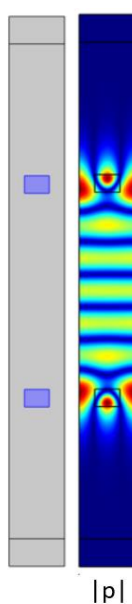


圖 4.2-7 一維共振腔結構圖與 p 絕對值場圖

所得到的共振頻率為 $47008+0.026i$ ，品質因子 $Q=9.05E5$ 。可以觀察到由於 HCG 的高反射特性，使得共振腔的品質因子相當高。而由於 HCG 本身的品質因子不高，因此光柵本身的能量密度並沒有高出腔體本身太多。

同樣的原理也可以推廣到二維的光柵反射器，效果與一維的光柵反射器相當，但在製作上會較複雜。所使用到的參數與前述的 HCG 反射器相同，而最終的空腔長度為 0.322(m)。

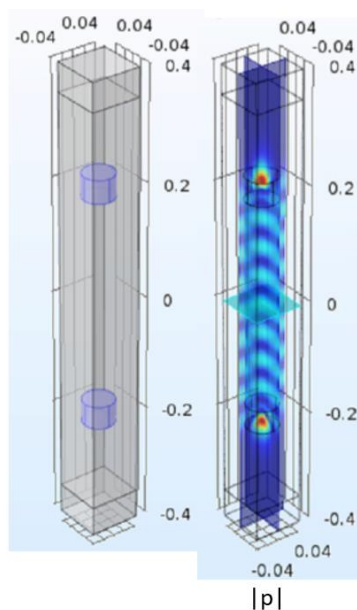


圖 4.2-8 一維共振腔結構圖與 p 絕對值場圖

得到的頻率 $f=47059+0.016i$ ，可以求得 $Q=1.47E6$ ，由於 HCG 的高反射特性使得品質因子相當高。若是六角形排列的 HCG 其結果與矩形排列相似，使用的光柵參數與前述相同，最終求得的空腔長度為 $0.29[m]$ 。可以看到由於結構的不同，所造成的相位差亦會有所不同。

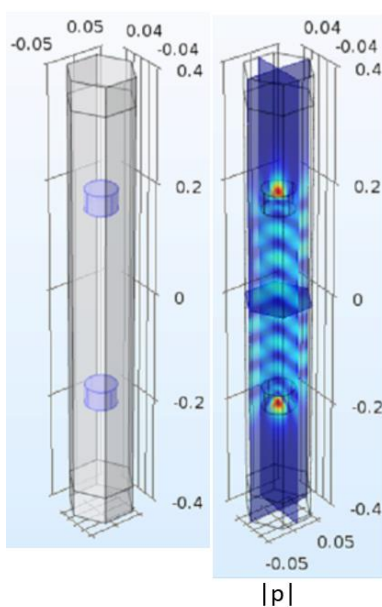


圖 4.2-9 一維共振腔結構圖與 p 絕對值場圖

得到的頻率 $f=47018+0.061i$ ，可以求得品質因子 $Q=3.85E5$ 。

4.2.2 二維共振腔模擬

聲波的二維共振腔與電磁波相當，只是少了 TE 及 TM 的分別，在這裡我們用 HCG 來當反射器，以找出圓柱形對稱的模態。我們可以先假設反射器為聲學剛性邊界(Sound Hard

Boundary) ，也就是說壓力在邊界上垂直於邊界的微分必須為零，找出貝索函數大致的 r 大小，再慢慢調整參數使得共振腔的品質因子達到最大。在這邊與先前的電磁波模擬一樣，找尋第五個模態，也就是在中心介質的部分由圓心出發的話將會有六個波峰。

而在設計上，每一個光柵為圓環的一小部分，其內弦長為 w ，高度為 h ，週期為 Λ ，並調整這些參數以達到最大的品質因子。以下為最終所得到的參數表：

Name	Value	Description
c_1	4700[m/s]	Sound speed in medium 1
c_2	2200[m/s]	Sound speed in medium 2
d_1	8900[kg/m ³]	Density in medium 1
d_2	11340[kg/m ³]	Density in medium 2
Λ	75.81[mm]	Period
ρ	289.58[mm]	Inner radius
w	40.79[mm]	Grating width
h	40.31[mm]	Grating height

表 4.2-6 聲波二維共振腔參數表

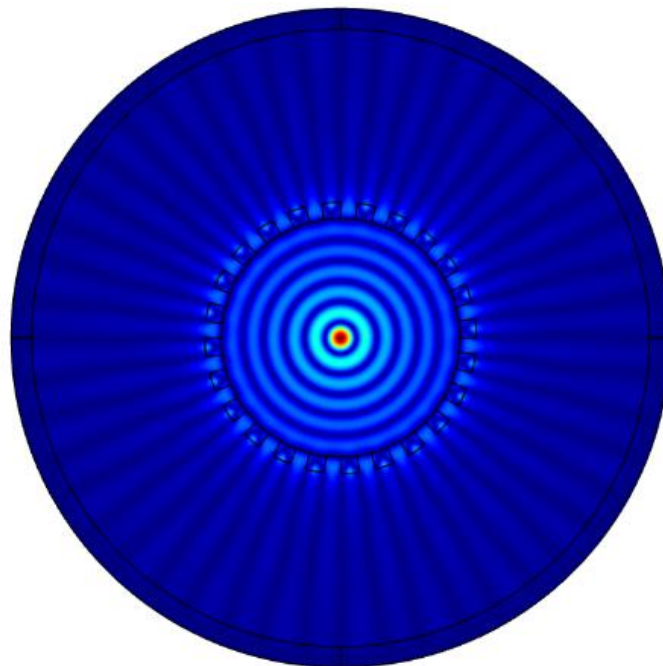


圖 4.2-10 二維共振腔結構圖與 p 絕對值場圖

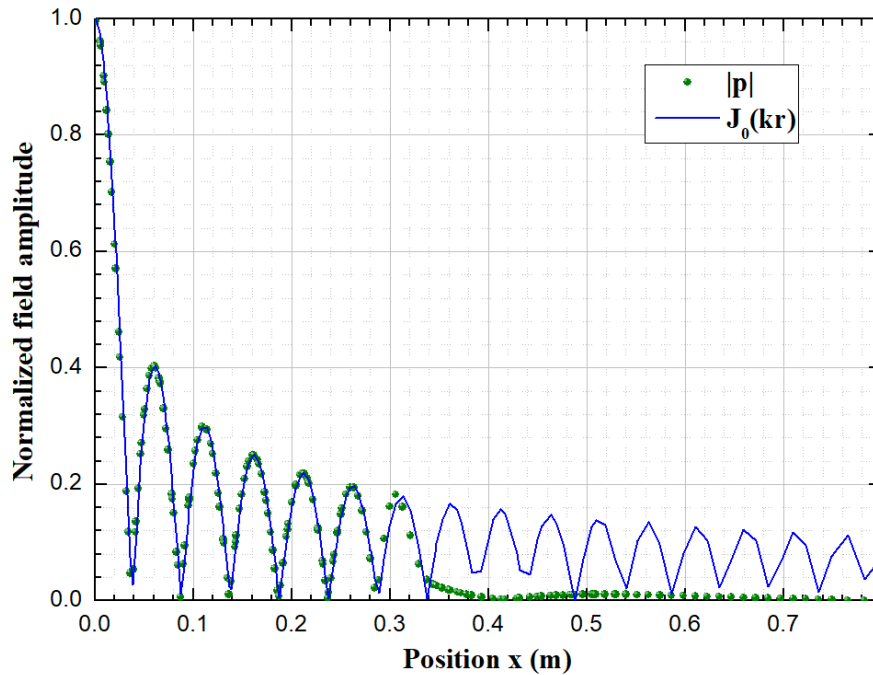


圖 4.2-10 二維共振腔結構圖與 p 絕對值場圖 (續)

所得到的共振頻率 $f=46982+63.554i$ ，可以求得品質因子 $Q=369.6$ 。與貝索函數相比，可以發現十分吻合，因此確認為想要尋找的模態。

4.2.3 三維共振腔模擬

與電磁波不同的，由於聲波沒有極化的問題，且聲波可以用壓力的純量場來表示，因此可以有只在 r 方向有變化的球型模態。但要將光柵以週期性的排列分布在球殼上，其實並不像二維共振腔那樣可以用間隔相同的方位角來排列，為了盡量滿足光柵的週期性，最終我們採用了富勒烯(Fullerene)，也就是巴克球(Buckyball)的結構。富勒烯為 60 個碳所組成的分子結構，其外觀像是足球，包含了 12 個面為正五邊形、20 個面為正六邊形，如下圖所示。

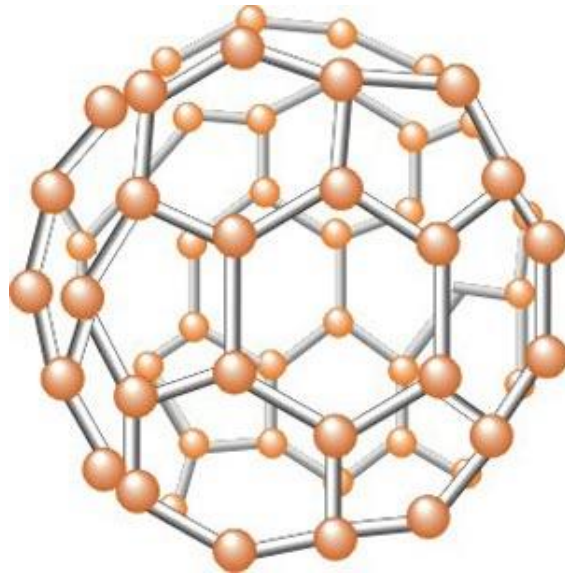


圖 4.2-11 富勒烯結構圖

儘管富勒烯的排列看起來很規律，但它其實包含了正五邊形及正六邊形，因此其週期性必定有所不同。在這邊我們使用了 HCG 的結構，利用其高頻寬的特性來盡量滿足週期性不同的問題。我們可以用一些簡單的方法來估算其週期，進而找出富勒烯的結構內部空腔能夠支撐的模態數。

首先我們先假設 HCG 的邊界條件為聲學剛性邊界(Sound Hard Boundary)，也就是說壓力在邊界上垂直於邊界的微分必須為零，或者說在邊界上的速度為零。用這樣的條件我們可以看出在不同的模態之下須滿足的徑度使得 $\frac{d}{dr}j_0(kr) = 0$ ，如下表所示：

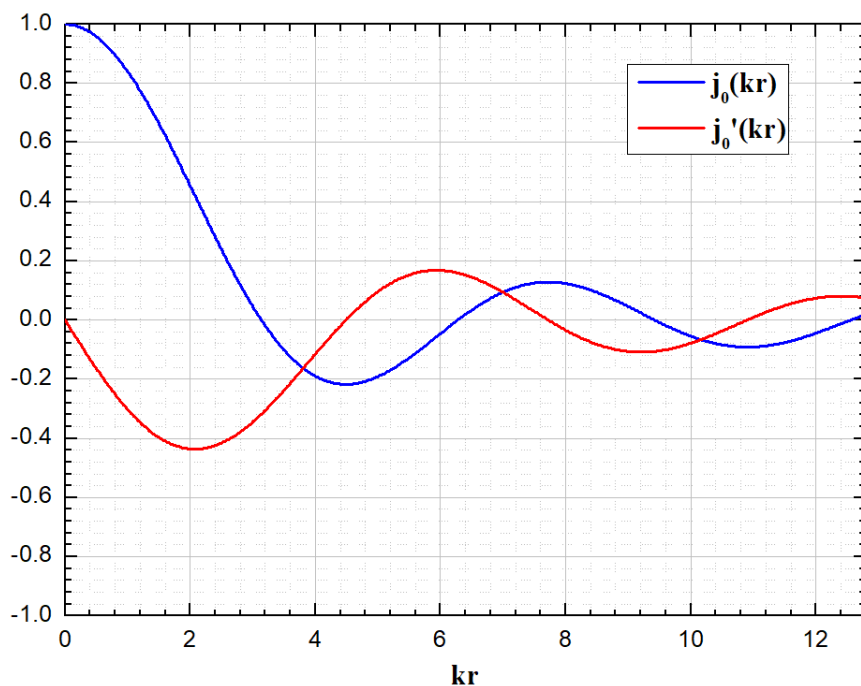


圖 4.2-12 球貝索函數



n(mode)	k*r	壓力 p 場圖
0	4.5	
1	7.72	
2	10.9	
3	14.06	
4	17.22	

表 4.2-7 球型共振腔個模態及其場圖

若巴克球的半徑為 ρ ，則相鄰兩個光柵之間的距離為 $0.4035 * \rho$ ，由前面的六角形排列光柵我們可以知道，六角形排列光柵的等效週期還要乘以 1.5 倍，所以巴克球光柵排列的週期為 $1.5 * 0.4035 * \rho$ 。為了滿足 Subwavelength 的條件，我們可以列出以下式子：

$$k < \frac{2\pi}{\Lambda}$$

其中 k 為共振模態的波向量，將兩邊同時乘以巴克球半徑 ρ 後可以得到：



$$k\rho < \frac{2\pi}{\Lambda} * \rho = \frac{2\pi}{\frac{3}{2} * 0.4035\rho} * \rho = 10.38$$

由此條件可以看出，富勒烯結構可以支撐的共振模態為 0 階及 1 階模態，更高階的模態將無法滿足 Subwavelength 的條件，且此時波長太短很容易就從光柵間的孔洞漏出。

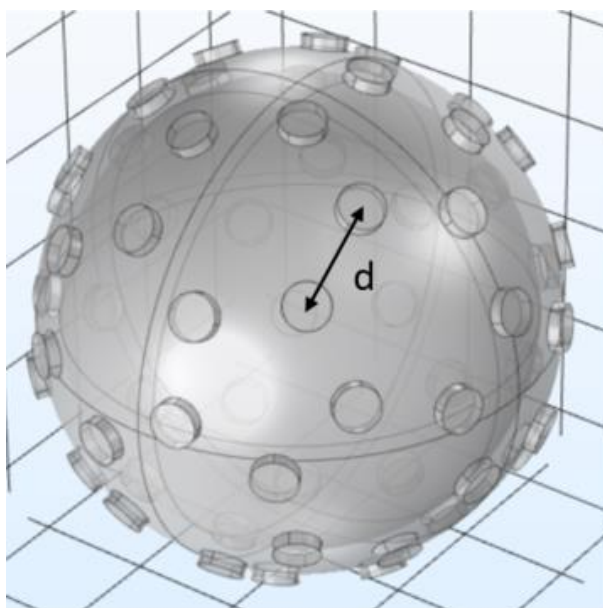


圖 4.2-13 巴克球結構相鄰兩光柵間距

而經由 COMSOL 模擬，並設定光柵形狀為圓柱形，最終可以得到 1 階的共振模態，而 0 階的模態的效果不佳，因為其半徑較小，使得光柵變形後的週期性不佳。1 階的共振模態經由參數調整後如下表，在這邊的模擬依然沿用之前所設定的鉛及銅兩種介質：

Name	Value	Description
c ₁	4700[m/s]	Sound speed in medium 1
c ₂	2200[m/s]	Sound speed in medium 2
d ₁	8900[kg/m ³]	Density in medium 1
d ₂	11340[kg/m ³]	Density in medium 2
ρ	134[mm]	Radius of Buckyball
r	20.5[mm]	Radius of grating
h	23[mm]	Height of grating

表 4.2-8 聲波巴克球共振腔參數表

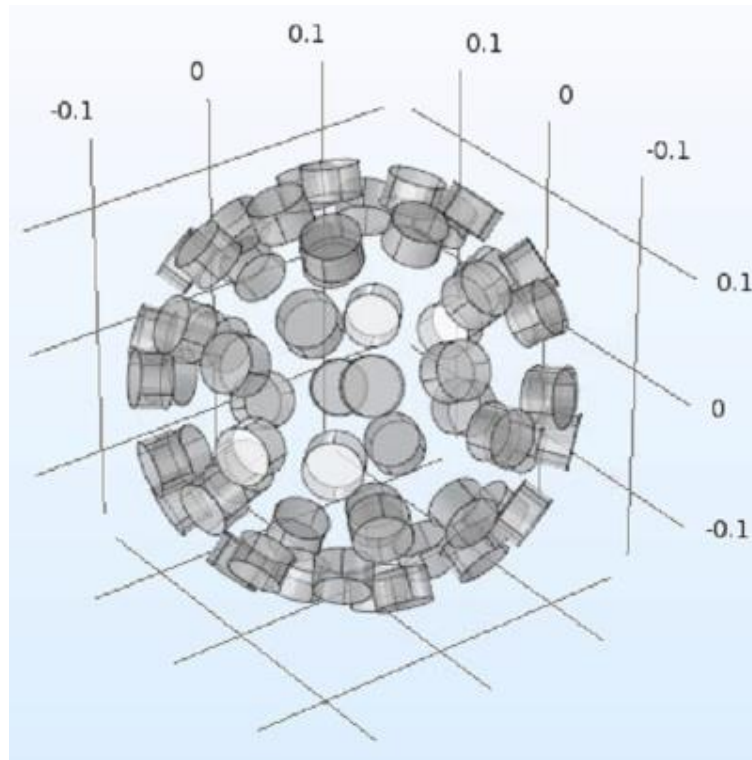


圖 4.2-14 巴克球結構圖

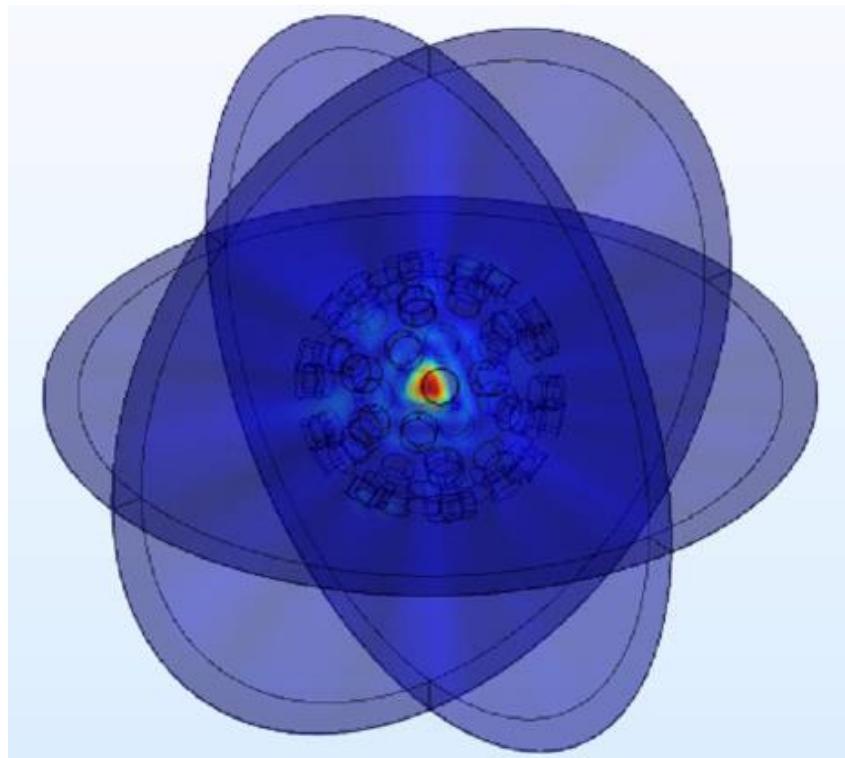


圖 4.2-15 巴克球共振腔 p 絕對值場圖

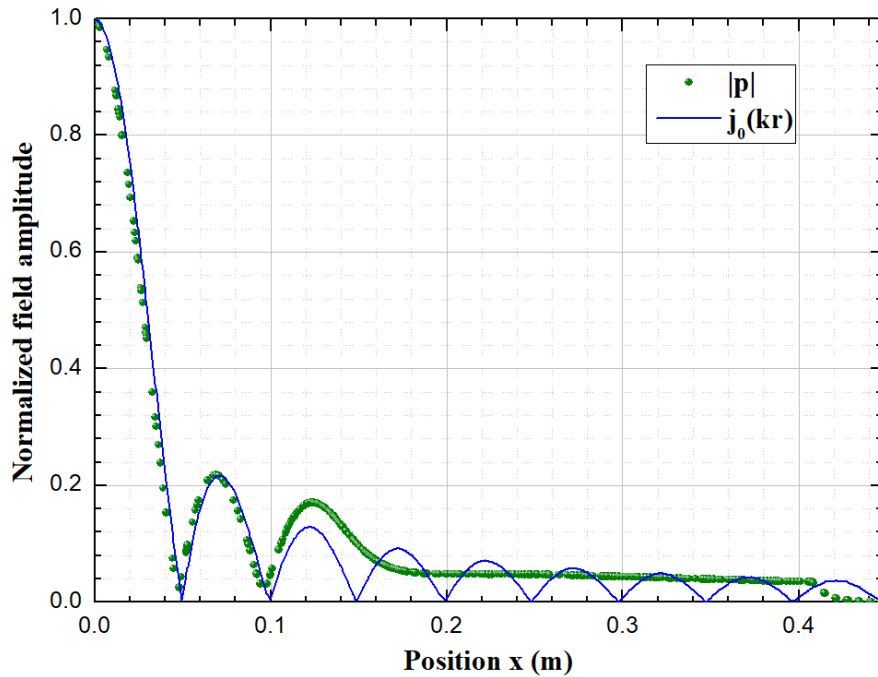
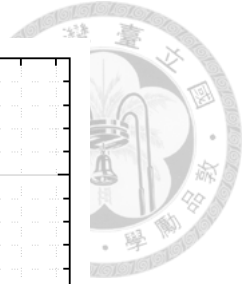


圖 4.2-15 巴克球共振腔 p 絕對值場圖 (續)

而得到的頻率 $f=47367+996.51i$ ，品質因子 $Q=23.8$ 。而 $k \cdot \rho = \frac{2\pi f}{c_1} \cdot \rho = 8.485$ ，可以由此判斷所得到的模態為一階模態。上圖中可以看出壓力的大小與球貝索函數符合，因此證實了模擬所得的模態為當初所設計的模態，圖中綠點代表模擬得到的場絕對值大小，藍線代表球貝索函數，兩者間稍微有一些偏移，這是因為在模擬的時候網格並沒有剛好切到中心點所造成的偏移。另外由場圖可以看出，由於排列密度不一致的關係，使得在正五邊形的區域較容易漏出波，而也因為光柵的排列被扭曲成球型，最終得到的品質因子並不高，而光柵的形狀不一定要是圓柱形，但因為光柵的週期會沿著不同的方向，若光柵的形狀滿足圓柱對稱的話，不同方向所看到的光柵將會一致，使得 HCG 的效果較好，因此同理，光柵也可以是球型，同樣也符合圓柱對稱。

為了得到更高階的共振模態，也就是為了使共振腔腔體更大以容納更多的能量，必須使得光柵的排列更加緊密，因此我們決定將每個正五邊形及正六邊形的中心再填上一個光柵，如下圖所示：

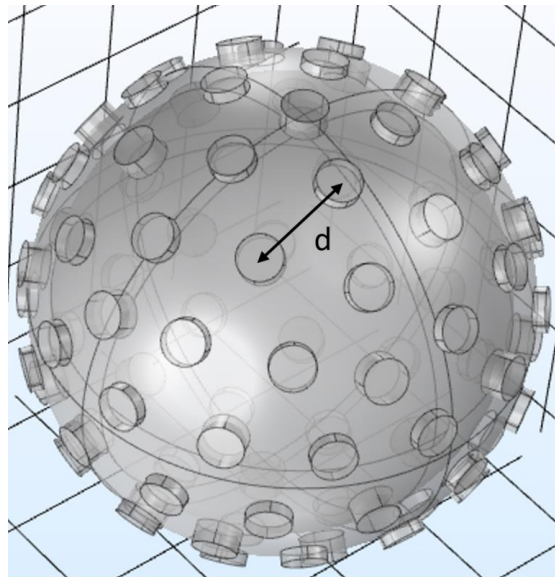


圖 4.2-16 巴克球結構相鄰兩光柵間距

相鄰兩個光柵的間距依然不變，除了正五邊形的區域會比較密一些。由於此時光柵的密度更高了，因此其等校的週期變得更短，由倒晶格可以推算出其周期約為 $\frac{\sqrt{3}}{2} * 0.4035 * \rho$ 。由前述的公式我們可以推得：

$$k\rho < \frac{2\pi}{\Lambda} * \rho = \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2} * 0.4035\rho} * \rho = 17.98$$

由此可以看出這樣子排列的結構可以支撐 4 階的模態，因為第 4 階模態所需的徑度大小為 17.22 度，為了滿足 Subwavelength 的條件光柵的週期必須短於波長。

因此我們用較密的光柵排列測試是否能夠形成 2 階的模態，首先先利用 1 階及 2 階的徑度差 $10.9-7.72=3.18$ ，由此換算成長度後增加至原本的半徑 ρ 。由於光柵彼此間距的改變，因此反射頻譜勢必受到影響，有些參數必須調整以使得光柵反射器的反射頻段與球型共振腔的頻率相符。最終經過調整的參數如下表：

Name	Value	Description
c ₁	4700[m/s]	Sound speed in medium 1
c ₂	2200[m/s]	Sound speed in medium 2
d ₁	8900[kg/m ³]	Density in medium 1
d ₂	11340[kg/m ³]	Density in medium 2
ρ	186.9[mm]	Radius of Buckyball
r	22.4[mm]	Radius of grating
h	25.14[mm]	Height of grating

表 4.2-9 聲波巴克球共振腔參數表(2 階)

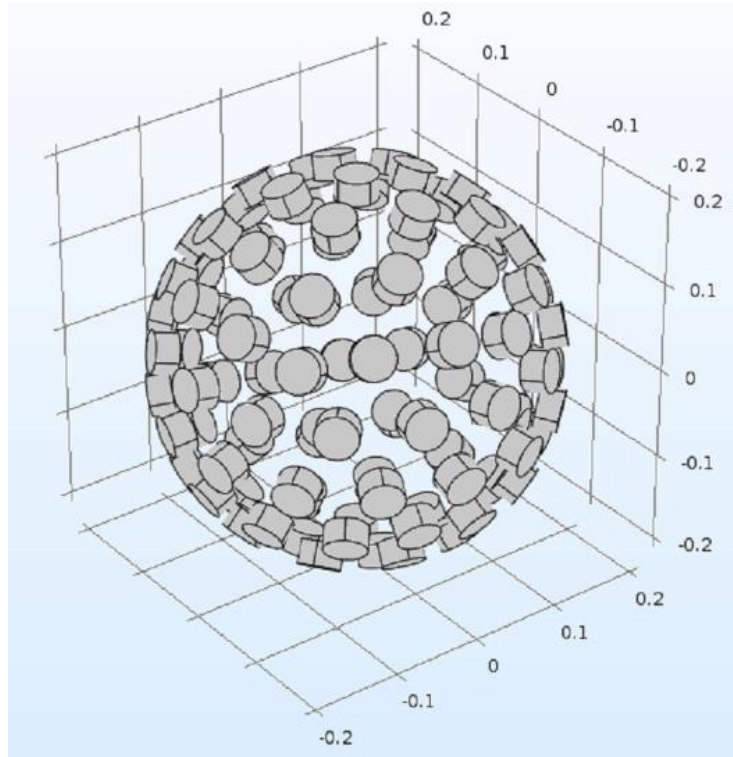


圖 4.2-17 巴克球結構圖(2 階)

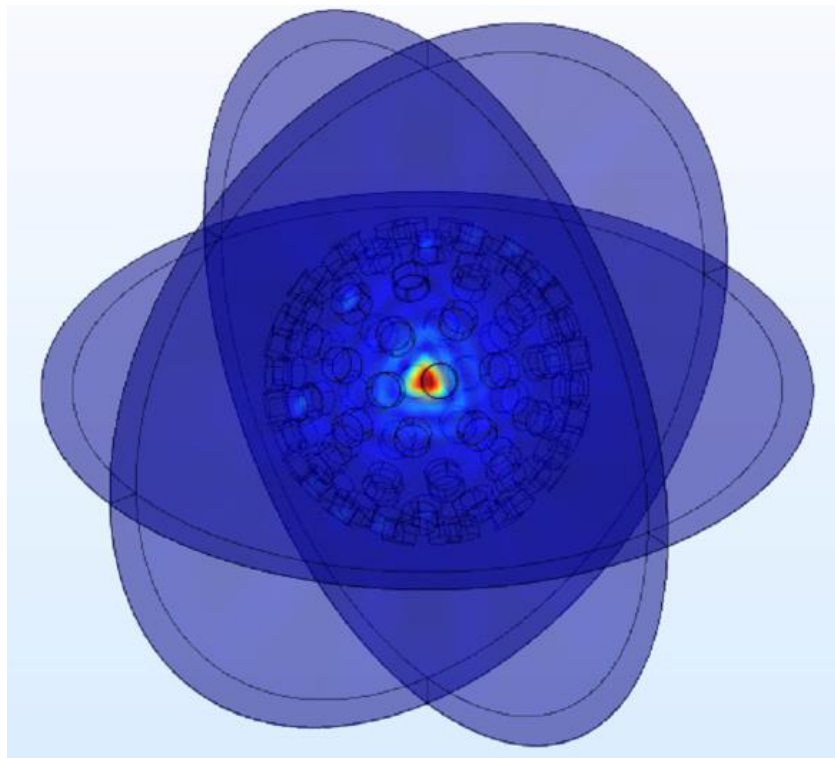


圖 4.2-18 巴克球共振腔 p 絕對值場圖(2 階)

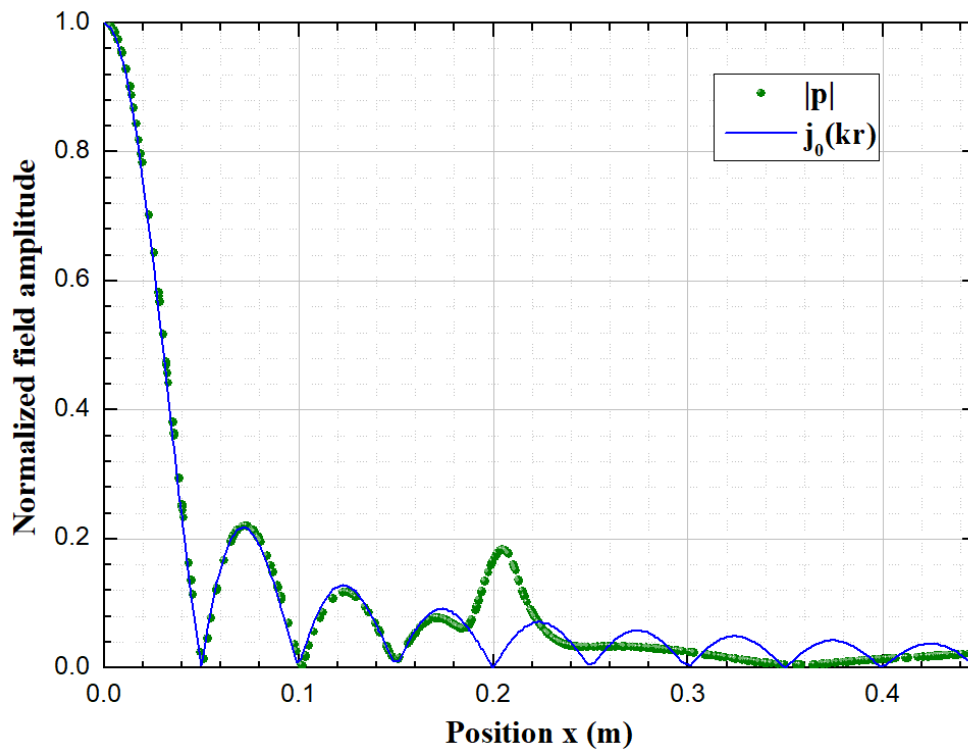


圖 4.2-18 巴克球共振腔 p 絕對值場圖(2 階)(續)

所得到的共振頻率 $f=47028+338.76i$ ，可以求得品質因子 $Q=69.4$ 。而 $k \cdot \rho = \frac{2\pi f}{c_1} \cdot \rho = 11.75$ ，可以由此判斷所得到的模態為二階模態，因其與用聲學剛性邊界所得的徑度 10.9 相近。上圖中可以看出壓力的大小與球貝索函數符合，因此證實了模擬所得的模態為當初所設計的模態。與 1 階的模態相比，2 階的品質因子更高，由場圖也可以看出漏出的波明顯較小，由於半徑較大，因此球面波在邊界處能夠較接近平面波，使得所設計的 HCG 產生較好的反射效果。

第五章 以空氣為介質設計共振腔



5.1 聲波共振腔

由於常見的聲波共振腔是利用空氣共振，有別於上一章所設計之共振腔，在中間部分的聲速是比較低的(空氣的聲速為 343m/s)。常見的空气共振腔為樂器，樂器主要是靠介質密度的巨大差異來達到共振的效果。如常見的橫笛，其材質為銀(密度為 10490kg/m³，聲速為 3600m/s)。從聲波的阻抗來分析，聲波在空氣的阻抗為 $\rho \cdot v = 1.29 \cdot 343 = 442$ ；聲波在銀的阻抗為 $\rho \cdot v = 10490 \cdot 3600 = 3.78E7$ 。兩者間的差異使得銀能夠近似於聲學剛性邊界(Sound Hard Boundary)，並達到限制聲波的效果。

以常見的樂器橫笛為例，其共振頻率約在 252(Hz)，我們可以仿造橫笛的結構設計一個長度為半波長的一維共振腔，考量到製造成本，其兩側用 4(mm)的金屬銅來達到限制能量的效果，所用到的參數以及結構圖如下所示：

Name	Value	Description
c ₁	343[m/s]	Sound speed in air
c ₂	4700[m/s]	Sound speed in copper
d ₁	1.29[kg/m ³]	Density in air
d ₂	8900[kg/m ³]	Density in copper
w	32[mm]	Width of cavity
L	680[mm]	Length of cavity
t	4[mm]	Thickness of silver

表 5.1-1 仿橫笛共振腔參數表

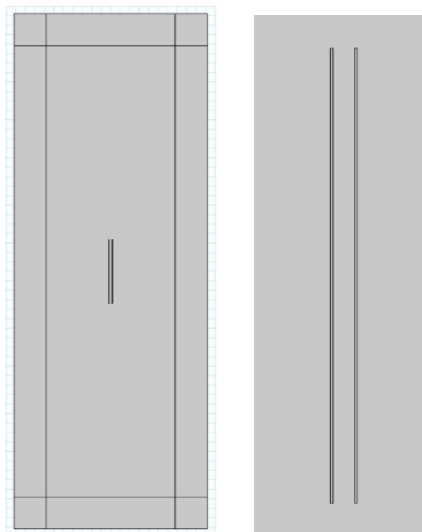


圖 5.1-1 仿橫笛共振腔結構圖

我們可以利用 COMSOL 模擬軟體找尋其共振頻率，可以得到 $f=249.48+4.4984i$ ，經由計算可得品質因子 $Q=27.73$ 。其場圖如下圖：

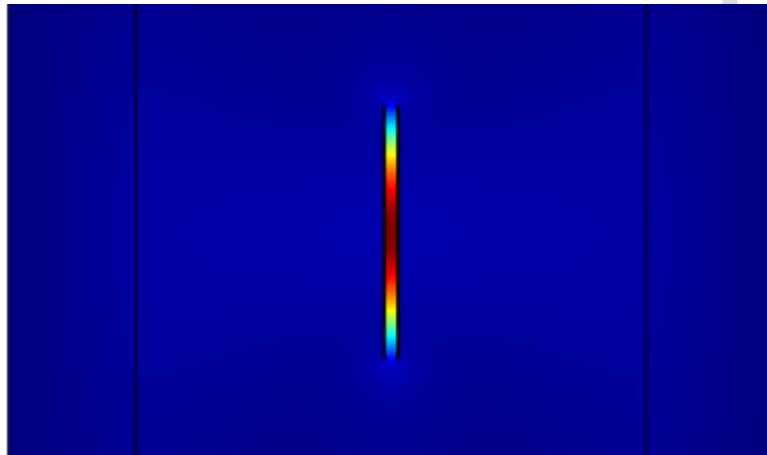


圖 5.1-2 仿橫笛共振腔 p 絕對值場圖

為了將品質因子降低，可以在其兩端加入漸漸變大直徑(tapered)的結構，以增加其能量與外界耦合的比例。或是可以採用繞線(meander)的方式，使得場型受到扭曲以讓能量從這些缺陷中漏出，且同時可以減少共振腔所需的空間。由於目的是想將這樣的共振腔以週期性排列達到側面耦合(Side Coupling)的效果，因此最終我們採用繞線的方式。


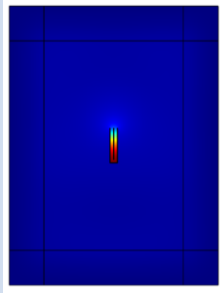

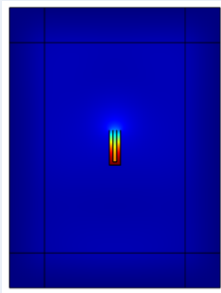
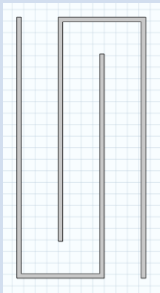
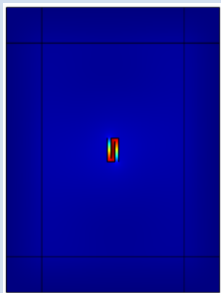
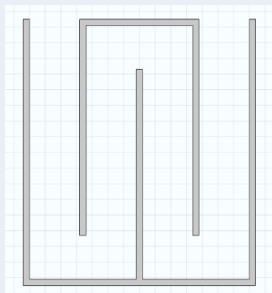
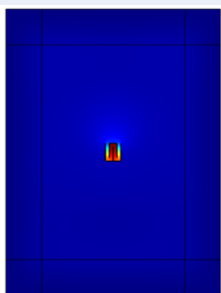
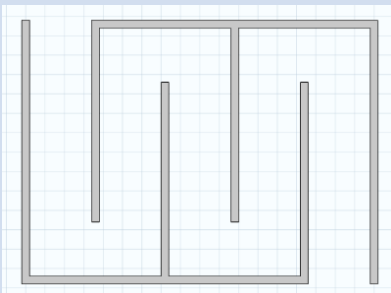
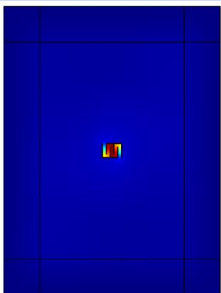
繞線型的共振腔內徑依然維持著 32[mm]，每一段的長度為半波長除以繞線數，金屬的厚度為 4[mm]。我們模擬各種繞線情形，可以發現品質因子比原先的共振腔低。而 p 絕對值場型與原先的類似，都是在共振腔的中心最大，符合一維共振腔的情況。最終所得到的場型及結構圖如下表，共振頻率會比原先的有些許偏移，這是因為繞線後波實際走的總長度並不剛好等於半波長，可以透過微調每一段的長度來得到原先的共振頻率。

表 5.1-2 繞線的共振腔結構與 p 絕對值場圖

5.2 聲波共振腔的週期排列

若我們把這樣子的共振腔做週期的排列，則根據模態耦合理論，共振腔將會有側面耦合(Side Coupling)的效果。若入射的聲波達到聲波共振腔的共振頻率，則由共振腔所耦合出來的波將會與透射波達到破壞性干涉的效果，此時會達到百分之百的反射。在這裡把週期設定為半波長，以符合次波長(Subwavelength)的條件。

若是用原先沒有繞線的共振腔，因為能量不容易耦合出去，只有上下兩側能夠耦合，左右則是週期性排列，品質因子 Q 將會達到 10^4 的量級，雖然有很好的頻率選擇特性，但不利於製作共振腔。因此在這邊使用的是繞線的共振腔，與上一節的結構相同，但是換成了週期

Number of sections	Resonant Frequency Quality Factor	Structure	Field Pattern
2	$f=231.75+10.273i$ $Q=11.28$		
2*	$f=219.18+13.266i$ $Q=8.26$		
3	$f=245.38+8.9709i$ $Q=13.68$		
4	$f=241.12+12.155i$ $Q=9.92$		
5	$f=253.37+10.273i$ $Q=12.33$		

性結構，週期為 $\frac{\lambda_0}{2}$ ，所得到的共振頻率及品質因子如下表：

Number of sections	Resonant Frequency	Quality Factor
2	238.47+7.4227i	16.06
2*	229.67+10.77i	10.66
3	250.34+5.4894i	22.8
4	247.95+10.068i	12.31
5	259.04+7.4661i	17.35

表 5.2-1 繞線共振腔共振頻率與品質因子

除了原先的排列方式，也可以將共振腔旋轉 90 度，如以下的 p 絕對值場圖範例，所得到的共振頻率及品質因子將會與垂直的排列略有所不同，如下表所示：

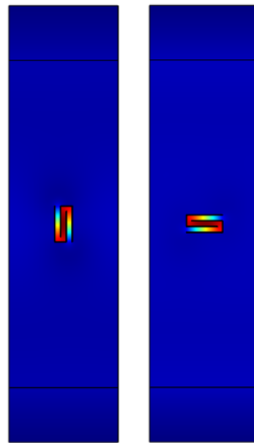


圖 5.2-1 不同排列方式的繞線共振腔 p 絕對值場圖

Number of sections	Resonant Frequency	Quality Factor
2	236.72+8.2558i	14.34
2*	225.8+10.634i	10.62
3	249.5+9.059i	13.77
4	247.56+8.4592i	14.63
5	259.01+8.4617i	15.3

表 5.2-2 繞線共振腔共振頻率與品質因子(旋轉 90 度)

若我們從上方打入波，並量測其反射率(Reflectance)，所得到的頻率響應將會與用尋找特徵頻率所得到的結果互相對應。在這裡我們用三次繞線的共振腔為範例，利用模擬軟體算出其頻率響應，分別計算出兩種排列方式的頻率響應，如下圖所示：

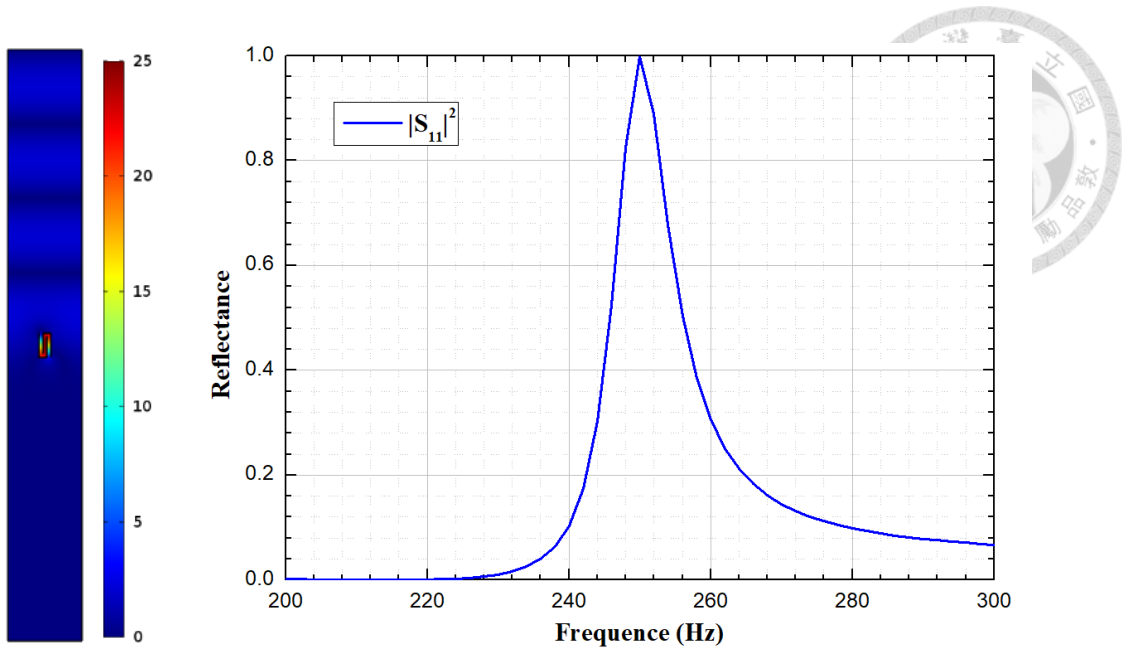


圖 5.2-2 繞線共振腔反射器 p 絕對值場圖與頻率響應圖

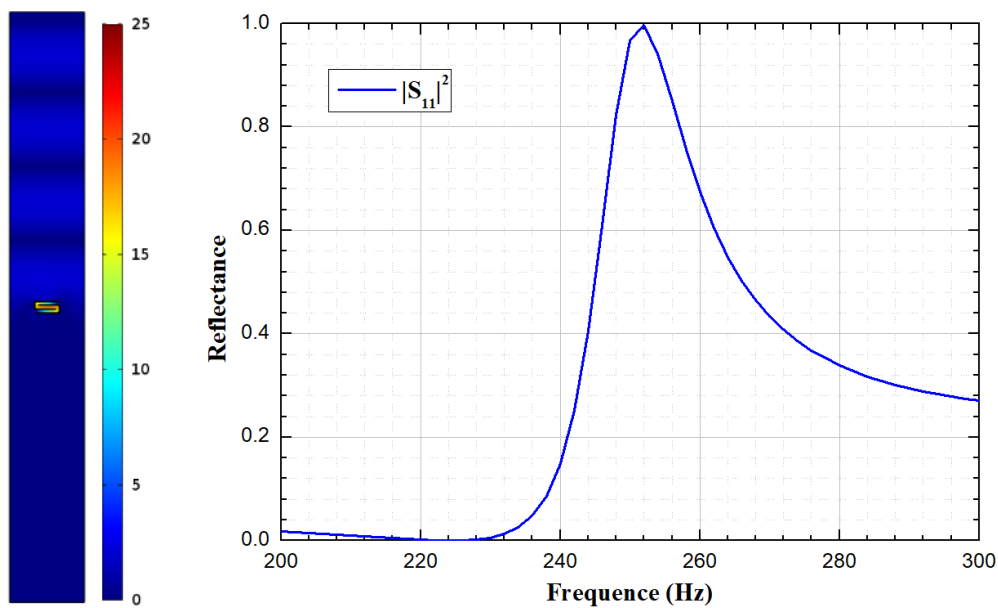


圖 5.2-3 繞線共振腔反射器 p 絕對值場圖與頻率響應圖(旋轉 90 度)

由上兩張圖可以看出兩者的反射峰值都一樣落在 250(Hz)左右，但由於 Q 值的不同，因此所得到的頻率響應並不一樣。而由圖中也可以看出，由於共振腔的體積不大，因此能量的密度較高，且由 $Q = \frac{\omega_0 U}{P}$ 可以看出，Q 值越高的共振腔(圖 5.1-4)，位於共振腔中的能量也越高。我們可以用側向耦合反射的特性來設計大的共振腔，將在下節詳細介紹。

若要設計三維球型共振腔，則小型的共振腔也必須是三維，為了滿足對稱性，因此將三次繞線的二維共振腔沿著旋轉軸繞一圈，如下圖所示，將可以得到一個圓柱體的共振結構。

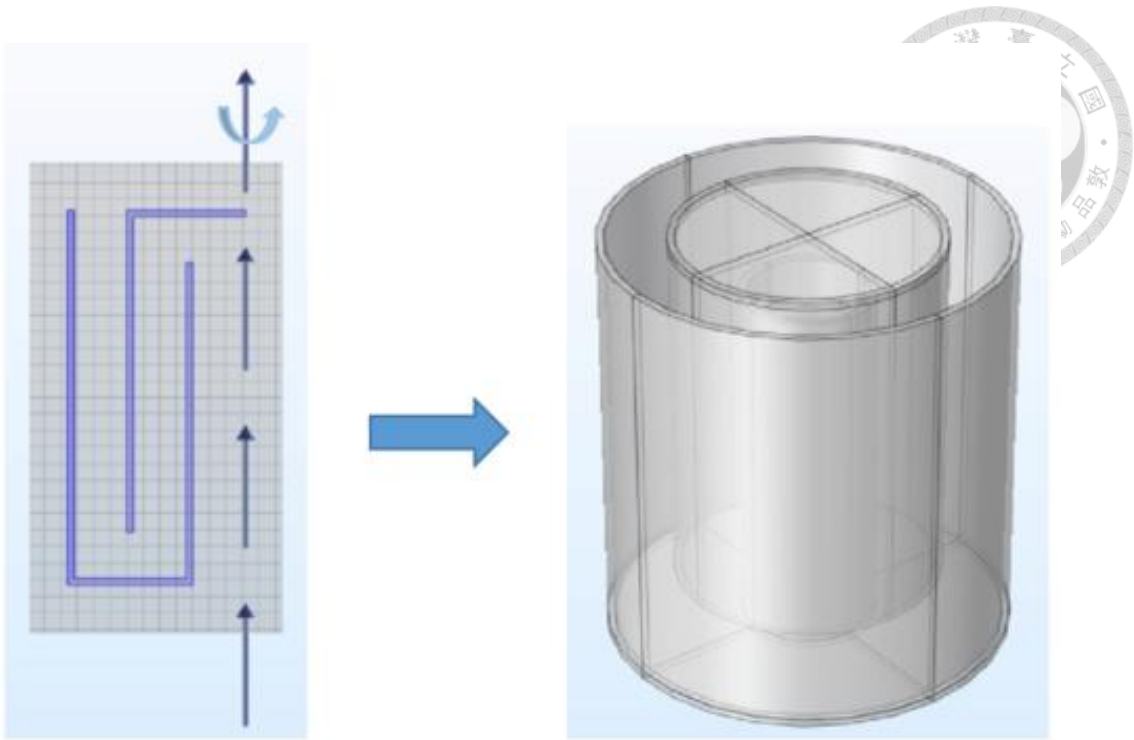


圖 5.2-4 三維小型共振腔結構圖

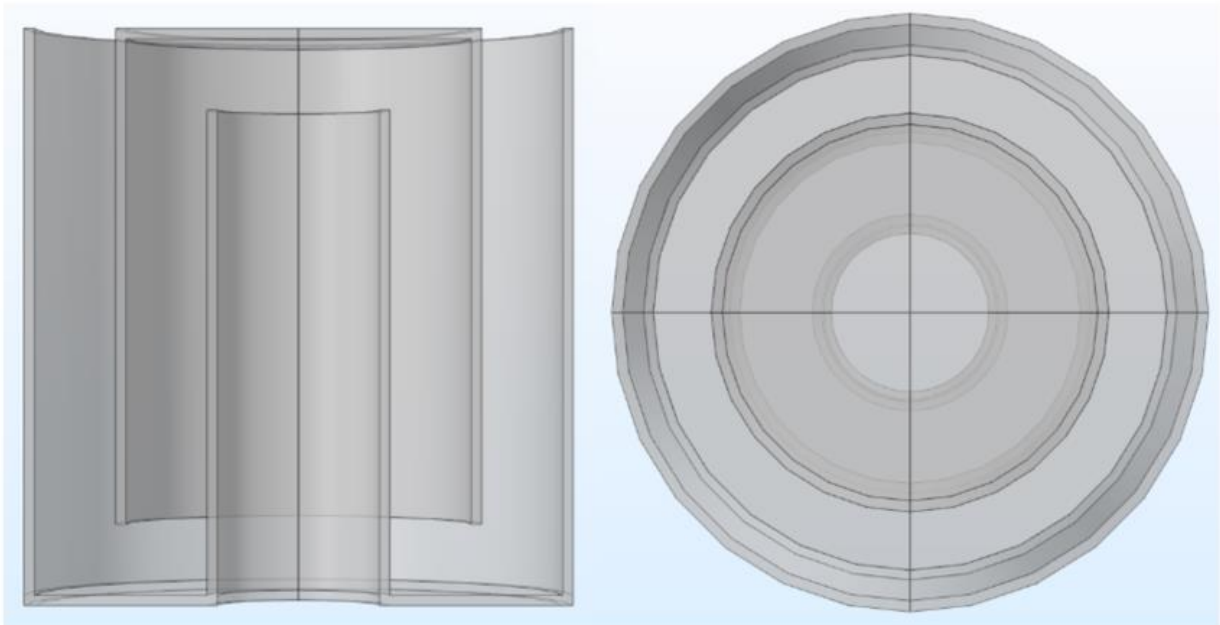


圖 5.2-5 三維小型共振腔頗面圖

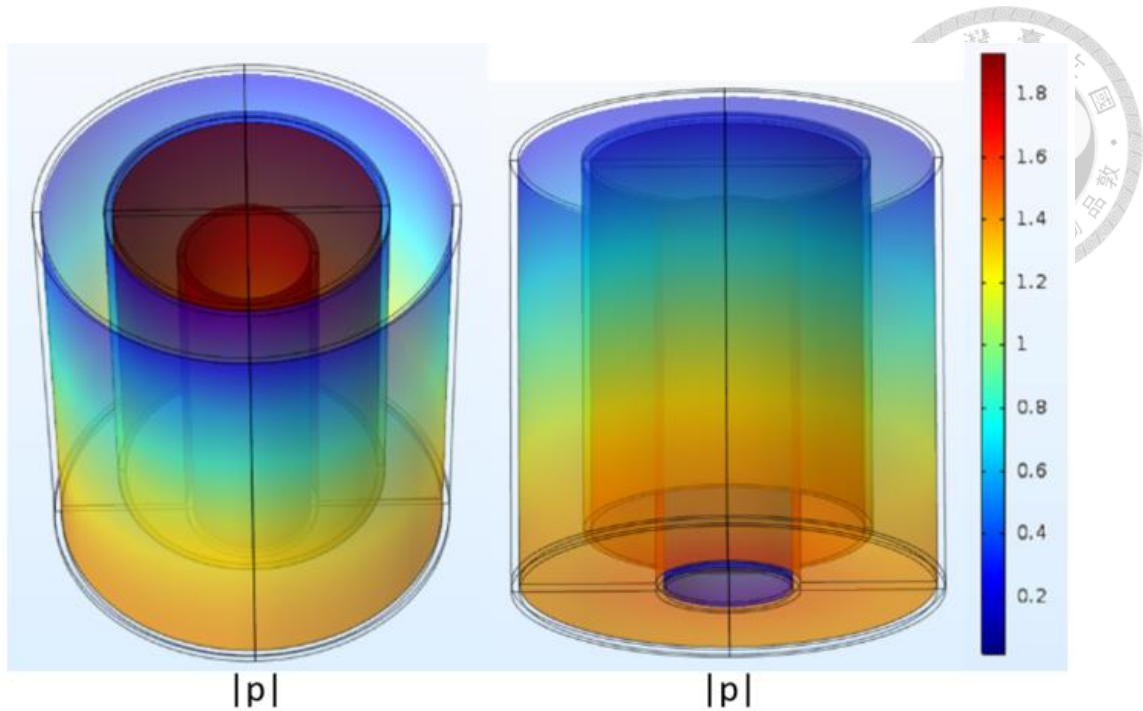


圖 5.2-6 三維小型共振腔 p 絕對值場圖

將其以週期為半波長的四方週期排列，其共振頻率為 $241.45+2.7361i$ ，可以得到 $Q=45.95$ 。由場型可以看出其共振模態相似於三次繞線的小型二維共振腔，由於其品質因子不大，因此因側面耦合造成的反射頻寬也較大，可以用來設計三維的共振腔。

若由上方打入平面波，可以測量其頻率響應，如下圖所示，在共振頻率時的反射率接近 100%，而結構的品質因子也可以透過改變管徑的大小進行調整，孔徑越大則聲波越容易耦合進共振腔，使得品質因子降低，反之亦然。

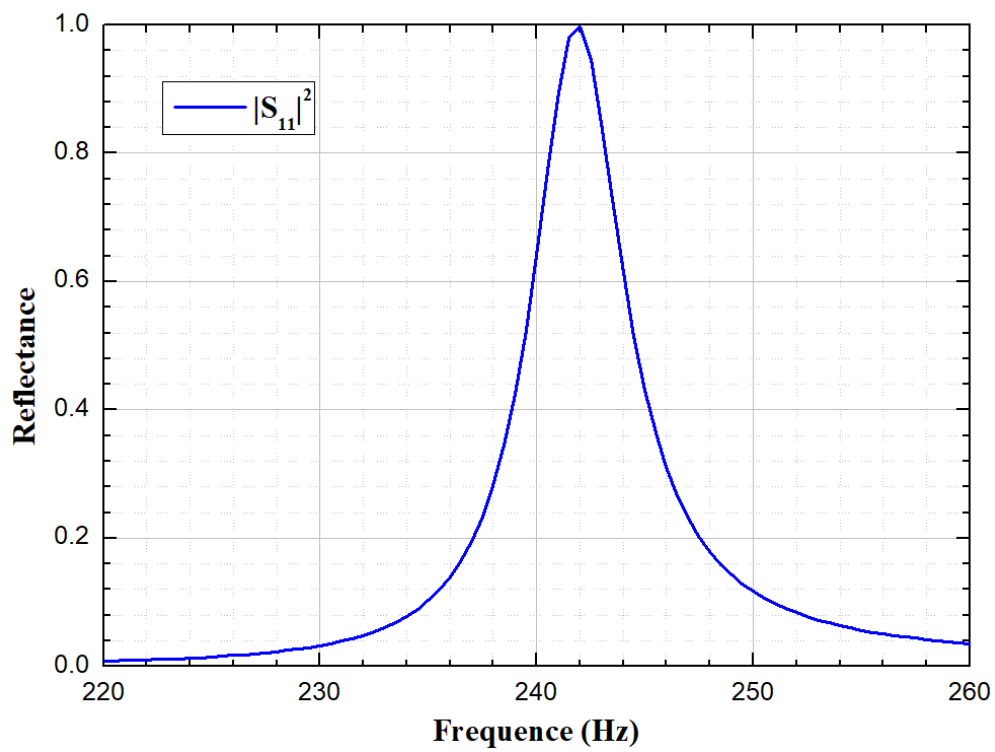


圖 5.2-7 三維小型共振腔反射頻率響應圖



5.3 以小共振腔排列設計大共振腔

5.3.1 一維共振腔模擬

與前面幾章所介紹的原理相同，將週期性的小共振腔上下排列，只要中間的距離符合聲波的共振頻率，即聲波在其震盪走過的路徑長為波長的整數倍，將能夠容納共振模態以設計出一維共振腔。與前述的光柵反射器及高對比度光柵不同的是，在這裡的小共振腔的共振頻率較不會受到排列週期的影響，因為共振主要是靠自身，與鄰近的小共振腔關係不大。

在這邊以中間距離三倍波長為例，由於反射器會有一些相位差，因此勢必需要對共振腔長度做一些微調，最終所得到的參數及場圖如下所示：

Name	Value	Description
c ₁	343[m/s]	Sound speed in air
c ₂	4700[m/s]	Sound speed in silver
d ₁	1.29[kg/m ³]	Density in air
d ₂	8900[kg/m ³]	Density in silver
w	32[mm]	Caliber of cavity
len	227[mm]	Length of small cavity
t	4[mm]	Thickness of silver
L	4.07[m]	Length of big cavity

表 5.3-1 聲波一維共振腔參數表

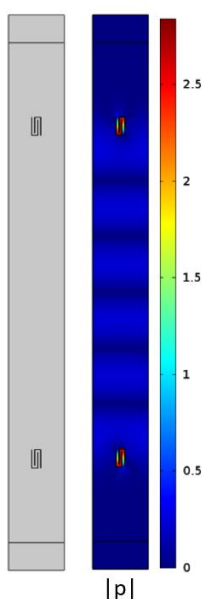


圖 5.3-1 一維共振腔結構圖與 p 絕對值場圖

可以得到其共振頻率 $f=251.17+2.4777E-6i$ ，其品質因子 $Q=5.069E7$ 。

5.3.2 二維共振腔模擬

若我們把排列方式改為環形排列，將反射器假設為聲學剛性邊界(Sound Hard Boundary)，利用貝索函數(Bessel function)找尋其適當的半徑以找尋圓柱形對稱的模態。在這裡我們找尋第五個模態，也就是在中心的部分由圓心出發將會有六個波峰。設計此共振腔用到了 36 個小共振腔，所用到的參數以及場圖如下所示：

Name	Value	Description
c ₁	343[m/s]	Sound speed in air
c ₂	4700[m/s]	Sound speed in silver
d ₁	1.29[kg/m ³]	Density in air
d ₂	8900[kg/m ³]	Density in silver
w	32[mm]	Caliber of cavity
len	227[mm]	Length of small cavity
t	4[mm]	Thickness of silver
Λ	685[mm]	Period of small cavity
R	3.9248[m]	Radius of cavity

表 5.3-2 聲波二維共振腔參數表

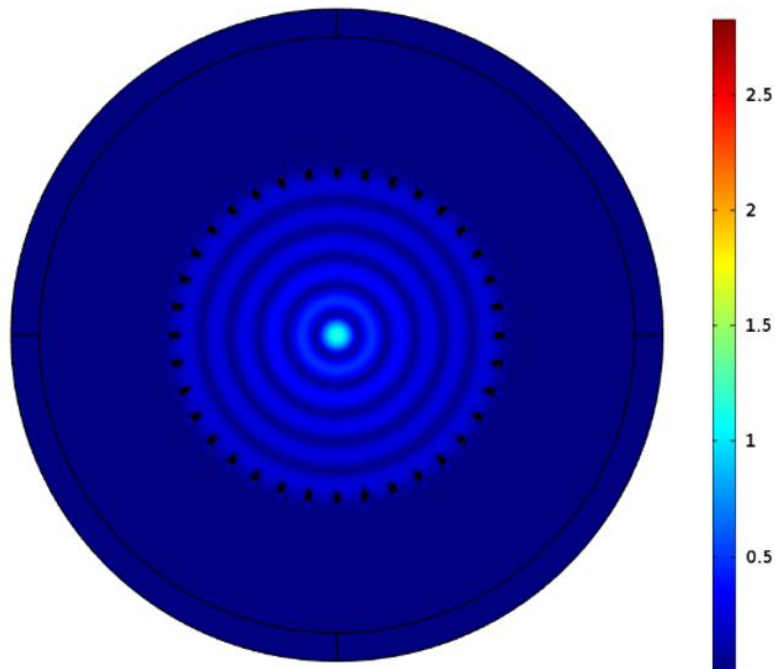


圖 5.3-2 聲波二維共振腔 p 絕對值場圖

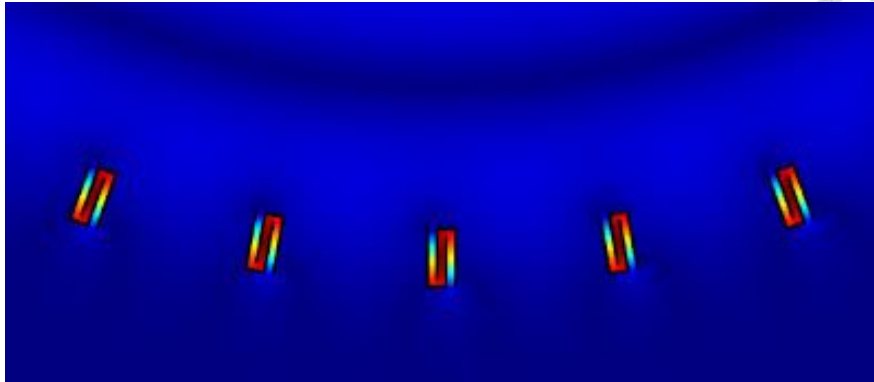


圖 5.3-3 聲波二維共振腔 p 絕對值場圖放大圖

所得到的共振頻率 $f=251.1+3.8823E-6i$ ，其品質因子 $Q=3.234E7$ 。由於反射器對於週期的依賴性較小，因此即便是扭曲成環形的，其共振的效果並不會改變太多，品質因子會較大。從放大圖也可以看出，小共振腔的共振模態與設計的相同，都是中心的壓力最大。

5.3.2 三維共振腔模擬

將前述所提到的小型共振腔以巴克球的結構進行排列，將可以達到束縛球型模態的功用。與之前所設計的三維共振腔相同，利用球貝索函數(Spherical Bessel function)找出大約的半徑，再以參數尋找的方式找到最佳的半徑，最終模擬所得的半徑 $r=2.26[m]$ ，結構如下圖所示。

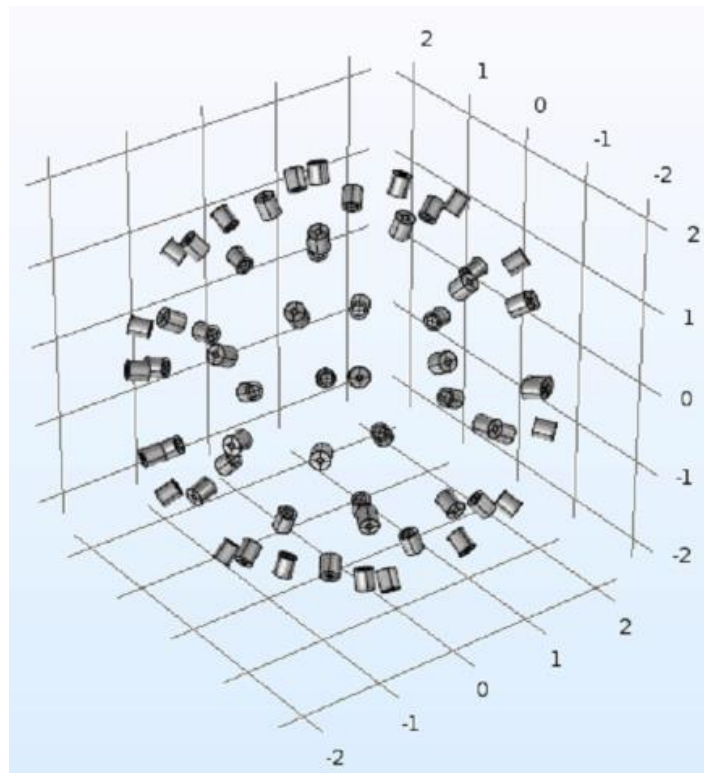


圖 5.3-4 三維共振腔結構圖

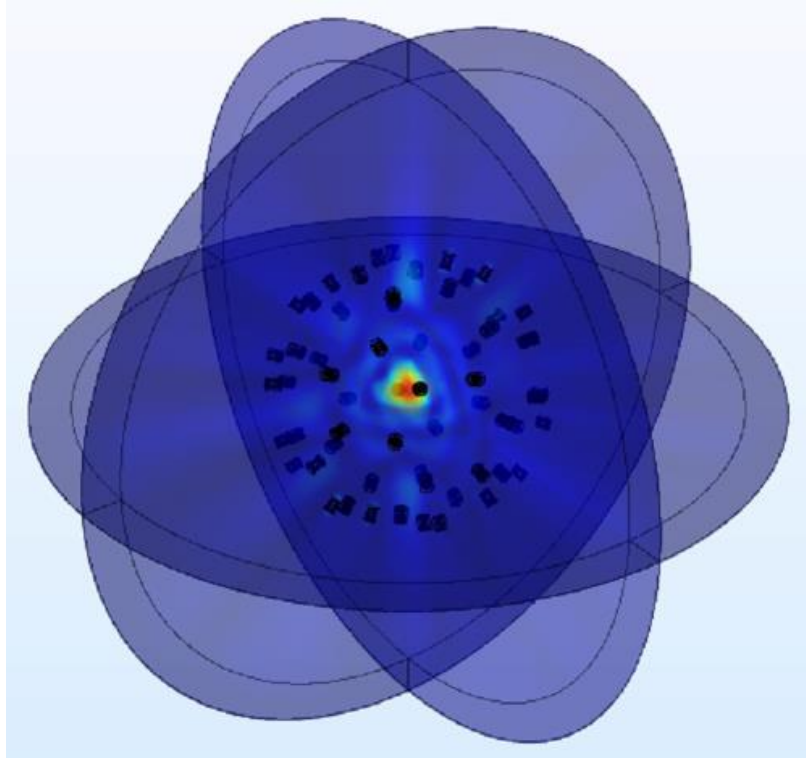


圖 5.3-5 三維共振腔 p 絕對值場圖

最終得到的共振頻率為 $f=236.14+0.71673i$ ，可以算出品質因子 $Q=164.9$ 。

第六章 實驗

在本章中，將採用前述的聲波小型共振腔設計實驗，以驗證其反射效果，並與模擬結果相互比較。由於前述模擬所使用的波長較長，在實作上較不可行，因此在實驗時，我們將整體結構等比例的縮小，並只採用一個結構以減少製作成本，將單一一個結構放置於直徑小於二分之波長的塑膠管(PVC)中當作波導，量測其穿透率。

6.1 小型共振腔實驗

實驗的架構如下圖所示，藉由在 PVC 管中放入一個小型共振腔，PVC 管右端為喇叭，而左端為分貝計，喇叭會發出不同頻率的正弦波，量測其在分貝計所得到的聲波大小，並比較有無小型共振腔分貝計所接受到的數值大小差異。



圖 6.1-1 小型共振腔實驗示意圖

單一一個小型共振腔如下圖所示，兩個圓柱體靠著中間兩個連通的金屬板子作為連接，小型共振腔的高度為 80.64[mm]、厚度為 3.3[mm]、三個圓柱的內半徑分別為 10.42[mm]、26.95[mm]以及 42.39[mm]。而製作的材質為不鏽鋼，其密度為 7900[kg/m³]，聲速為 5660[m/s]。



圖 6.1-2 小型共振腔實體照片

實驗所用的 PVC 管長度為 1[m]，內半徑為 78.5[mm]，厚度為 4[mm]。為了使小型共振腔能夠固定在 PVC 管的正中央，我們將 PVC 管的中間管壁挖一個小洞，並用釣魚線將小型共振腔垂放在 PVC 管中央，其前後兩端再用釣魚線固定住避免其轉動，如下圖所示。



圖 6.1-3 小型共振腔位置圖

接著我們將喇叭用膠帶固定在 PVC 管一側，如下圖所示，喇叭的口盡量朝向管內的方向以期能夠更接近平面波。

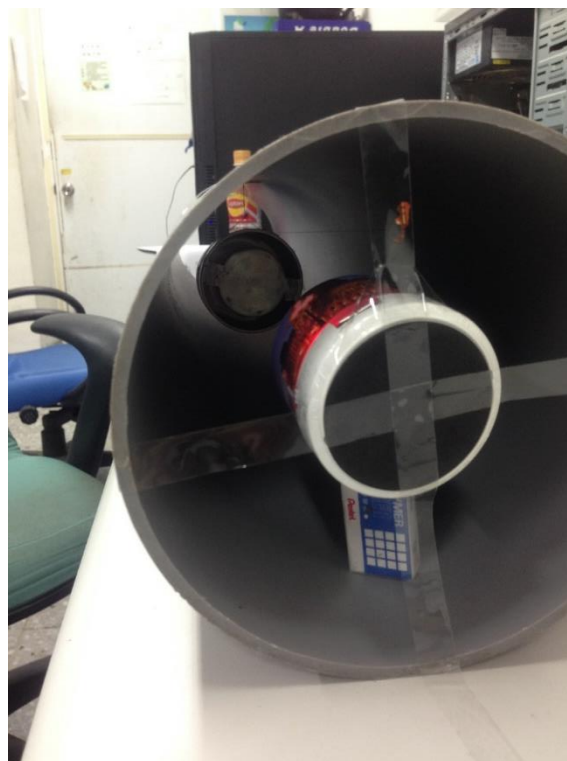


圖 6.1-4 喇叭位置圖

在另外一側則用手機當作分貝計，固定在 PVC 管出口位置，如下圖所示。

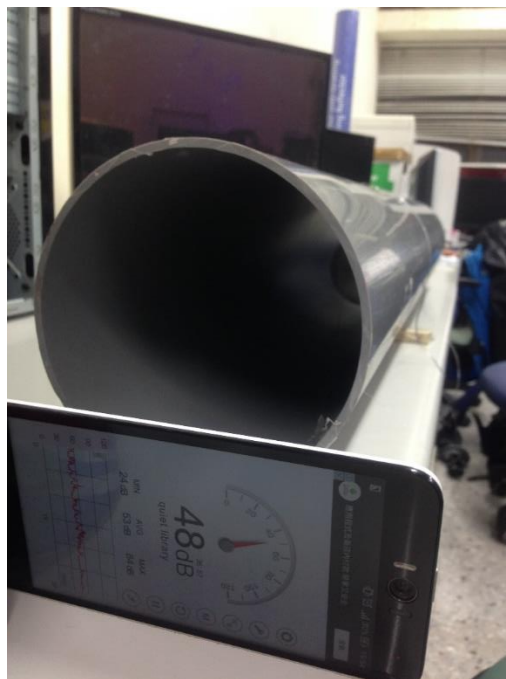


圖 6.1-4 分貝計位置圖

經由喇叭發出不同頻率的正弦波後，我們可以量測其分貝大小得到頻率響應，並比較有無小型共振腔所造成的差異，得到的結果如下圖所示：

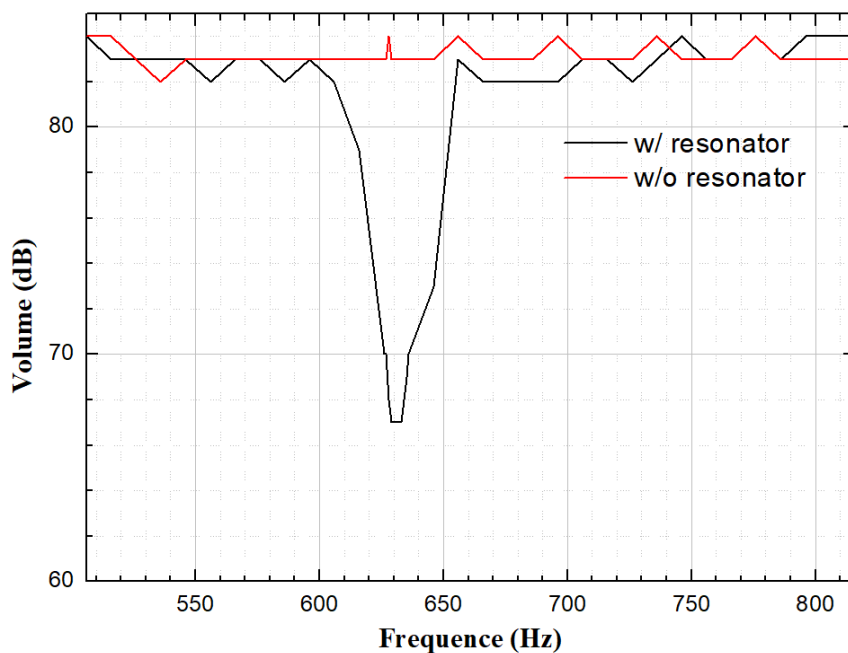


圖 6.1-5 實驗量測之分貝圖

環境噪音約為 46 (dB)，分貝計的誤差大約為 1 (dB)，若沒有共振腔的話，分貝計所量測到的數值皆在 83 或 84 (dB)；加入分貝計後，在小型共振腔的共振頻率時，分貝計所量測



到的數值將會下降最低到 67 (dB)，可以看出共振腔所造成的反射效果使得音量下降了約 17 (dB)，證實了先前的結果。

6.2 與模擬結果相比較

在這一節裡我們將實驗的結構參數以 COMSOL 模擬軟體進行模擬，並與實驗結果相比較，我們假設 PVC 管為聲學剛性邊界(Sound Hard Boundary)，由上方的 Port 打入垂直往下的聲波，其結構如下圖所示。



圖 6.2-1 模擬結構圖

經由量測下方邊界壓力的大小，我們可以得到其穿透率，如下圖所示：

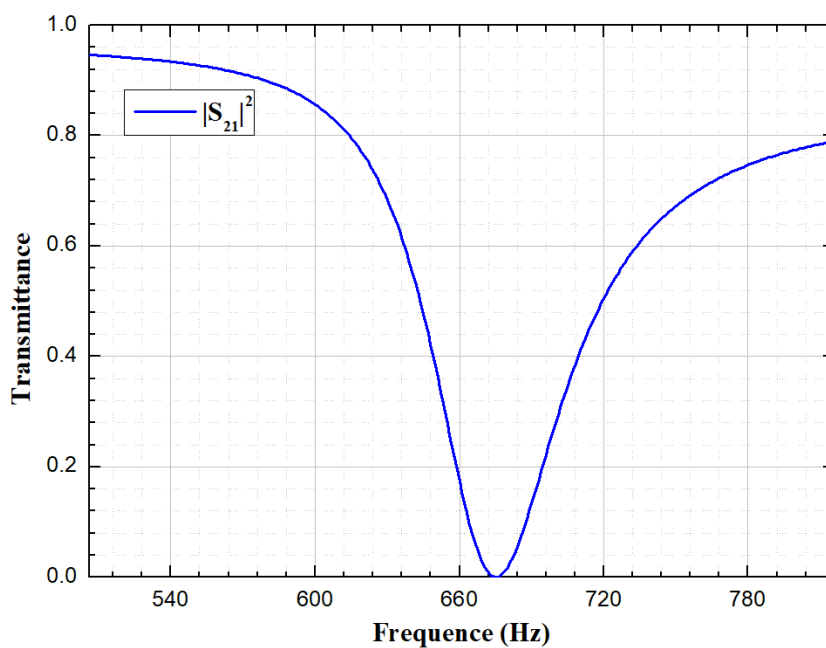
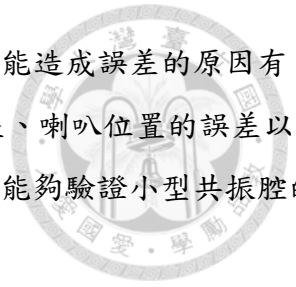


圖 6.2-2 模擬所得頻率響應圖

模擬所得的共振頻率與實驗所得大致相近，但有一些小偏差，可能造成誤差的原因有 PVC 假設為聲學剛性邊界所造成的誤差、小型共振腔擺放位置的誤差、喇叭位置的誤差以及將喇叭假設為平面波所造成的誤差等等，儘管如此，在定性上仍然能夠驗證小型共振腔的反射特性。



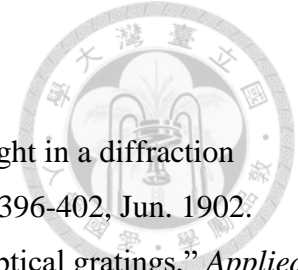
第七章 結論

在這篇論文中，我們用了三種不同的反射器來設計共振腔，分別為布拉格反射器、光柵反射器、小型共振腔反射器，並涵蓋了電磁波與聲波一維到三維的共振腔。布拉格反射器需要多層介電質的堆疊，因此會導致反射器的厚度過厚，且其反射頻寬通常較大，將會使得共振腔內所能容納的模態過多。而光柵反射器對於週期性的要求高，因此將其彎曲後通常效果會變差。而小型共振腔反射器對於週期性的要求並不高，因此在彎曲後仍然能夠保有不錯的反射特性，但缺點是其結構較複雜。

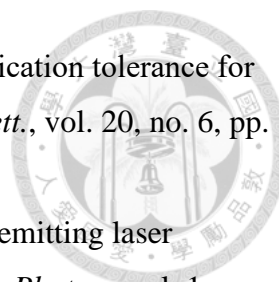
在光柵反射器及小型共振腔反射器的模擬中，為了找出共振腔的共振模態，必須使得共振腔的共振頻率及反射器的共振頻率兩者吻合，同時必須考慮相位差的影響。在設計上從共振模態的節點開始尋找為一個有效的辦法，在二維中為貝索函數(Bessel function)，三維中為球貝索函數(Spherical Bessel function)。

本論文成功的呈現利用模態耦合理論中的側向耦合，能夠將共振腔變成良好的反射器，且反射的頻寬將與共振腔的品質因子相關，在本論文中為了設計上的方便，會選用頻寬較寬的反射器。然而若用頻寬較窄的反射器設計的話在理論上也是可行，只是對於參數的敏感度更高，在設計上較不易。

參考文獻



- [1] R. W. Wood, "On a remarkable case of uneven distribution of light in a diffraction grating spectrum," *Philosophical Magazine Series 6*, vol. 4, pp. 396-402, Jun. 1902.
- [2] A. H. a. A. A. Oliner, "A new theory of Wood's anomalies on optical gratings," *Applied Optics*, vol. 4, pp. 1275-1297, Oct. 1965.
- [3] M. Neviere, R. Petit, and M. Cadilhac, "About the theory of optical grating coupler-waveguide systems," *Optics Communications*, vol. 8, pp. 113-117, Jun. 1973.
- [4] M. Neviere, P. Vincent, R. Petit, and M. Cadilhac, "Systematic study of resonances of holographic thin film couplers," *Optics Communications*, vol. 9, pp. 48-53, Sep. 1973.
- [5] M. Gale, "Diffraction, beauty and commerce," *Physics World*, pp. 24-29, Oct. 1989.
- [6] S. S. Wang and R. Magnusson, "Theory and applications of guided-mode resonance filters," *Applied Optics*, vol. 32, pp. 2606-2613, May 10 1993.
- [7] S. S. Wang, R. Magnusson, J. S. Bagby, and M. G. Moharam, "Guided-mode resonances in planar dielectric-layer diffraction gratings," *Journal of the Optical Society of America A-Optics Image Science and Vision*, vol. 7, pp. 1470-1474, Aug. 1990.
- [8] D. K. Jacob, S. C. Dunn, and M. G. Moharam, "Normally incident resonant grating reflection filters for efficient narrow-band spectral filtering of finite beams," *Journal of the Optical Society of America A-Optics Image Science and Vision*, vol. 18, pp. 2109-2120, Sep. 2001.
- [9] D. K. Jacob, S. C. Dunn, and M. G. Moharam, "Design considerations for narrowband dielectric resonant grating reflection filters of finite length," *Journal of the Optical Society of America A-Optics Image Science and Vision*, vol. 17, pp. 1241- 1249, Jul. 2000.
- [10] A. Greenwell, S. Boonruang, and M. G. Moharam, "Control of resonance separation over a wide spectral range in multiwavelength resonant grating filters," *Applied Optics*, vol. 46, pp. 6355-6361, Sep. 2007.
- [11] Y. Zhou, M. C. Y. Huang, and C. J. Chang-Hasnain, "Novel surface emitting laser using high-contrast subwavelength grating," in *Proc. 20th Int. Semicond. Laser Conf.*, pp. 107-108, Sep. 2006
- [12] Y. Zhou, M. C. Y. Huang, C. Chase, V. Karagodsky, M. Moewe, B. Pesala, F. G. Sedgwick, and C. J. Chang-Hasnain, "High-index-contrast grating (HCG) and Its applications in optoelectronic devices," *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, vol. 15, pp. 1485-1499, Sep./Oct. 2009.



- [13] Y. Zhou, M. C. Y. Huang, and C. J. Chang-Hasnain, "Large fabrication tolerance for VCSELs using high-contrast grating," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 20, no. 6, pp. 434–436, Mar. 2008.
- [14] M. C. Y. Huang, Y. Zhou, and C. J. Chang-Hasnain, "A surface-emitting laser incorporating a high-index-contrast subwavelength grating," *Nat. Photon.*, vol. 1, pp. 119–122, 2007.
- [15] C. Sheppard, "Approximate calculation of the reflection coefficient from a stratified medium", *Pure and Applied Optics: J. Eur. Opt.*, 4: 665–9, 1995.
- [16] D. Staelin. *Electromagnetics and Applications*. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 2008.
- [17] C. Yeh, F. I. Shimabukuro, *The Essence of Dielectric Waveguides*, New York, Springer, 2008.