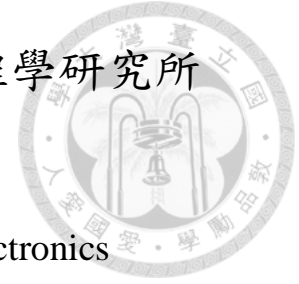


國立臺灣大學電機資訊學院光電工程學研究所

碩士論文

Graduate Institute of Photonics and Optoelectronics
College of Electrical Engineering & Computer Science
National Taiwan University
Master Thesis



紅外線光譜儀微型化之設計與製作

Designing and Manufacturing of Miniaturization of the
Infrared Spectrometer

陳紹淳

Shao-Chun Chen

指導教授：林清富 博士

Advisor: Ching-Fuh Lin, Ph.D.

中華民國 107 年 7 月

July, 2018

國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書

紅外線光譜儀微型化之設計與製作
Designing and Manufacturing of Miniaturization of
the Infrared Spectrometer

本論文係陳紹淳君（學號 R05941040）在國立臺灣大學
光電工程學研究所完成之碩士學位論文，於民國 107 年 7 月
25 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

林清高

(指導教授)

李嗣琰

林安如

所

長

林安如



誌謝

能走到這個學術的殿堂，莫過於家人對我從小的栽培與照顧。感謝當年的自己五年來的堅持，感謝自己這十餘年的爭氣，讓自己能在求學的最後階段抵達公館站。首先感謝我的指導老師林清富教授，在我進入台大懵懂無知時收我為研究生，在這一路上不只對於我的研究給予許多寶貴的建議，讓我在研究的路途順利完成我的碩士論文。感謝學長們的在我碩一時教會我做人處事、與人相處應對進退的細節，讓我能更勇敢的走出自己的平凡之路。感謝我的同學，憲哥、小編、田鼠、錦華與柏瑞帶給實驗室新的氣象，讓我了解不同的風俗民情與不一樣的相處模式，在這成長的路途上，有上路、有中路、有下路，更充滿著歡樂的嘴砲氣氛，同時感謝實驗室學弟，煜祥、佳融、惟哲，你們的加入讓實驗室多了一份歡樂與責任。我相信，只要你們能用心及努力面對，你們也能在這條路上順利安康。感謝我的大學老師，讓我能順利進入這夢寐以求、人人稱羨的學校學習，沒有你們，我沒辦法拿到這張車票。也要感謝大學同學與眾學弟妹們，是你們讓我體會到備受尊重的感覺，當然相對應的，也是讓我了解到何謂「若要萬馬奔騰，必須一馬當先」的道理。謝謝這一路上幫助過我的每位貴人，在有限的篇幅裡使我無法一一列出每位摯友的名字，僅能將我的感謝在此點到為止，但我只想讓你們知道，你們小小的幫助對於我來說都是莫大的協助並且充滿感激。最後，在要離開台大這站時，還想再對台大說聲謝謝，是你讓我知道即便我只是這裡的過客，但我也是靠著努力曾經擁有，讓我面對接下來的挑戰都能繼續築夢・踏實。

摘要



隨著科技進步與人們生活方式的改變，環境汙染與食品安全問題已成為近年備受注重的議題，如甲醛、二氧化碳等氣體在一定的濃度下會造成人體的不適，又如農藥殘留、食品添加物等化學物質亦會危害人體的健康。然而現今仍無一種有效率且相對便宜的檢測技術供一般民眾對於居家常見未知物質來進行檢測；因此，本研究以光譜學的構想以及光路設計，搭配本團隊之製程技術開發紅外高解析度之微型化光譜儀，欲求達到「隨身攜帶」光譜檢測與「即時偵測」之目的。

本論文係以二維凹面光柵高解析度之光譜儀光學系統在 $3.5 \mu\text{m} \sim 4.5 \mu\text{m}$ 進行設計與量測，而其共可分為三個主要部分。第一部分係利用 MATLAB 軟體自行撰寫以滿足「曲面反射條件」和「光柵分光條件」兩大因素下分析在不同物距、焦距、入射角度等起始變因下其最後分光且聚交的位置及其解析度之探討。並綜合該結果以最小解析度作為優化條件來找出在 $3.5 \mu\text{m} \sim 4.5 \mu\text{m}$ 波段下之起始條件。第二部分則是建立在本研究團隊已成熟的半導體製程技術下，藉由一種高分子有機化合物利用轉印技術將所開發的矽基閃耀式光柵結構拓印在該軟性基板上，進而成功發展出低成本的可撓式彎曲光柵。而本研究所開發之轉印後的光柵不但同時兼具了「完美的可撓特性」與「很好的分光效果」，而且因其可撓程度不受限於單一曲率，促使本可撓光柵可應用層面將更廣泛，同時也相對地大幅降低了製作彎曲光柵的成本。最後第三部分為光譜儀系統的雛型建製與分辨二氧化碳氣體之檢測。綜觀前述，吾從最初之光路模擬與起始條件之選擇到低成本分光關鍵技術之研製以及最後光譜儀微型化製作與實際量測驗證，完整地製作了紅外光譜儀之雛型，並藉本研究應可奠定未來開發其它波段之微型光譜儀之基礎。

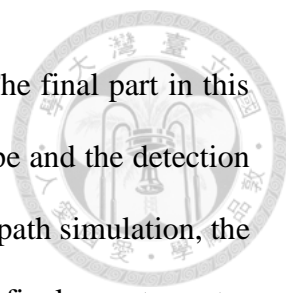
關鍵詞：繞射光柵、可撓、中紅外光、羅蘭圓、解析度、光譜儀

Abstract



As technology progresses and human lifestyle changes, environmental pollution and food safety issues have become huge concerns in recent years. Pollutants such as formaldehyde, carbon dioxide and other gases might cause discomfort to human body when reaching a certain level of concentration. Other chemicals such as pesticide residues and food additives could also pose serious hazards to human health. Despite these potential risks, there still exists no efficient and relatively inexpensive detection technology for the general public to detect common but unknown substances. In this regard, this research is devoted to the development of infrared high-resolution detection by applying the concept of spectroscopy and optical path design. The miniaturized spectrometer is intended to achieve the purpose of “portable” and “real-time” spectral detection.

This thesis investigates a high-resolution spectrometer optical system of two-dimensional concave grating designed and measures the spectrum at $3.5\ \mu\text{m} \sim 4.5\ \mu\text{m}$. The first part in this thesis is based on the MATLAB software to realize the specular reflection condition” and “grating conditions, thus to further analyze the position of the final split and the intersection of different object distance, focal length, incident angle, and so on. The results are treated as an optimal condition to find the best condition in the $3.5\ \mu\text{m} \sim 4.5\ \mu\text{m}$ with the minimum resolution. The second part in this thesis is based on the mature semiconductor process technology developed by our research team, in which a low cost flexible curved grating is transferred onto the flexible polymer substrate by transfer technology. The transferred grating has the advantages of “perfect flexible characteristics” and “excellent spectroscopic effect.” Since the flexibility is not limited to a single curvature, it makes the flexible Grating applications be used more widely. In this



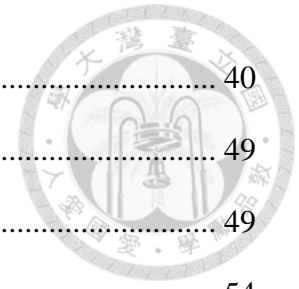
sense, the cost of making curved gratings will be greatly reduced. The final part in this thesis discusses the manufacture of the spectrometer system prototype and the detection of carbon dioxide gas. Above all, from the initial selection of optical path simulation, the development of low-cost spectroscopic key technology to the final spectrometer miniaturization and actual measurement verification, I have completely produced the prototype of infrared spectrometer. This study should help lay the groundwork for the future development of miniature spectrometers in other wavelength ranges.

Keywords: Diffraction grating, Flexible, Mid-infrared light, Roland circle, Resolution, Spectrometer

目錄

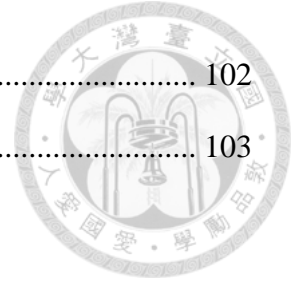


口試委員會審定書	#
誌謝	i
摘要	ii
Abstract.....	iii
目錄	v
圖目錄	viii
表目錄	xiii
第 1 章 緒論	1
1.1 研究背景與動機	1
1.2 研究概述	3
第 2 章 理論基礎與文獻回顧	5
2.1 夫朗和斐(Fraunhofer)繞射	5
2.1.1 同調振盪子(Coherent Oscillators)	5
2.1.2 單狹縫繞射	8
2.1.3 雙狹縫繞射	20
2.1.4 多狹縫繞射	24
2.1.5 繞射光柵	29
2.2 反射式光柵	31
2.2.1 閃耀式光柵	31
2.2.2 球面光柵與羅蘭圓(Rowland Circle)	34
第 3 章 光譜儀機構微型化之光路設計與分析	38
3.1 球面鏡光路模擬程序之建立	38
3.1.1 球面鏡聚交理論(近軸)	38



3.1.2 球面鏡光路實際聚交繪製	40
3.2 球面光柵光路模擬程序之建立	49
3.2.1 球面光柵光路實際聚交繪製	49
3.2.2 偵測元件其位置之選擇	54
3.2.3 羅蘭圓特例之測試	60
第 4 章 系統組件之選擇、研製與開發	67
4.1 光源之選擇	67
4.1.1 黑體輻射光源	67
4.1.2 量測儀器介紹	68
4.1.3 量測結果與討論	69
4.2 低成本可撓式光柵之研製	71
4.2.1 PDMS 轉印技術介紹	71
4.2.2 鍍膜儀器介紹	72
4.2.3 製作結果與討論	73
4.3 偵測端之量測開發	77
4.3.1 偵測元件之介紹	77
4.3.2 移動載具之介紹	78
4.3.3 偵測元件與移動載具其控制程序之結合	82
第 5 章 微型光譜儀系統雛型之製作並應用於 CO₂ 濃度之檢測	87
5.1 球面光柵光路優化	87
5.1.1 解析度之優化	87
5.1.2 光路微小化之設計	95
5.2 CO ₂ 量測結果與分析	98
第 6 章 結論與未來展望	101
6.1 結論	101

6.2 未來展望.....	102
參考文獻.....	103



圖目錄



圖 2-1 「同調」說明圖示	5
圖 2-2 同調振盪子線形陣列	8
圖 2-3 球面波行徑方向示意圖	9
圖 2-4 同調線形源之振盪子	11
圖 2-5 單狹縫繞射示意圖	13
圖 2-6 單狹縫繞射照片	14
圖 2-7 式(2.35)之解集合	15
圖 2-8 單狹縫未繞射示意圖	16
圖 2-9 單狹縫繞射第一階($m=1$)暗紋	17
圖 2-10 單狹縫繞射第二階($m=2$)暗紋	18
圖 2-11 單狹縫繞射第一階($n=1$)亮紋	19
圖 2-12 單狹縫夫朗和斐近似之繞射圖譜	20
圖 2-13 雙狹縫繞射示意圖	21
圖 2-14 雙狹縫繞射照片	21
圖 2-15 雙狹縫繞射圖譜	24
圖 2-16 多狹縫繞射示意圖	26
圖 2-17 多狹縫繞射圖譜	28
圖 2-18 多狹縫干涉項	28
圖 2-19 能量重新分配示意圖	29
圖 2-20 透射、反射光柵分光波前示意圖	30
圖 2-21 穿透式光柵與反射式光柵斜向入射示意簡圖	31
圖 2-22 閃耀式光柵繞射示意圖	32
圖 2-23 閃耀式光柵法線定義示意圖	34



圖 2-24 球面光柵示意圖.....	35
圖 2-25 羅蘭圓示意圖.....	37
圖 3-1 球面鏡與拋物面鏡.....	39
圖 3-2 球面鏡近軸反射示意圖.....	39
圖 3-3 球面鏡座標化.....	40
圖 3-4 反射點 C 在上半面.....	42
圖 3-5 反射點 C 在下半面.....	42
圖 3-6 判斷標準值 y_{judge} (a) >0 (b) <0	46
圖 3-7 判斷標準值 $y_{\text{judge}} = 0$ (a) $x_b > 0$ (b) $x_b < 0$	46
圖 3-8 以小角度入射角測試反射模擬結果.....	48
圖 3-9 以大角度入射角測試反射模擬結果.....	49
圖 3-10 球面光柵座標化.....	50
圖 3-11 以角度 $\theta_{i,1} = 50^\circ$ 入射角測試繞射模擬結果.....	52
圖 3-12 以角度 $\theta_{i,1} = 55^\circ$ 入射角測試繞射模擬結果.....	53
圖 3-13 以角度 $\theta_{i,1} = 60^\circ$ 入射角測試繞射模擬結果.....	53
圖 3-14 以角度 $\theta_{i,1} = 65^\circ$ 入射角測試繞射模擬結果.....	53
圖 3-15 式(3.30)光柵方程之角度定義示意圖.....	54
圖 3-16 入射角 $\theta_{i,1} = 50^\circ$ 之光柵方程式.....	55
圖 3-17 入射角 $\theta_{i,1} = 55^\circ$ 之光柵方程式.....	55
圖 3-18 入射角 $\theta_{i,1} = 60^\circ$ 之光柵方程式.....	56
圖 3-19 入射角 $\theta_{i,1} = 65^\circ$ 之光柵方程式.....	56



圖 3-20 入射角 $\theta_{i,1} = 5^\circ$ 之光柵方程式	56
圖 3-21 入射角 $\theta_{i,1} = 10^\circ$ 之光柵方程式	57
圖 3-22 入射角 $\theta_{i,1} = 15^\circ$ 之光柵方程式	57
圖 3-23 偵測元件之位置結果呈現.....	58
圖 3-24 偵測元件位置與目標波長計算示意圖	60
圖 3-25 入射角 $\theta_{i,1} = 50^\circ$ 之羅蘭圓測試結果	61
圖 3-26 入射角 $\theta_{i,1} = 55^\circ$ 之羅蘭圓測試結果	62
圖 3-27 入射角 $\theta_{i,1} = 60^\circ$ 之羅蘭圓測試結果	62
圖 3-28 入射角 $\theta_{i,1} = 65^\circ$ 之羅蘭圓測試結果	62
圖 3-29 入射角 $\theta_{i,1} = 5^\circ$ 之羅蘭圓測試結果	63
圖 3-30 入射角 $\theta_{i,1} = 10^\circ$ 之羅蘭圓測試結果	63
圖 3-31 入射角 $\theta_{i,1} = 15^\circ$ 之羅蘭圓測試結果	63
圖 3-32 入射角 $\theta_{i,1} = 50^\circ$ 之可見光至紅外光羅蘭圓像差測試結果	64
圖 3-33 入射角 $\theta_{i,1} = 55^\circ$ 之可見光至紅外光羅蘭圓像差測試結果	65
圖 3-34 入射角 $\theta_{i,1} = 60^\circ$ 之可見光至紅外光羅蘭圓像差測試結果	65
圖 3-35 入射角 $\theta_{i,1} = 65^\circ$ 之可見光至紅外光羅蘭圓像差測試結果	65
圖 3-36 入射角 $\theta_{i,1} = 5^\circ$ 之可見光至紅外光羅蘭圓像差測試結果	66
圖 3-37 入射角 $\theta_{i,1} = 10^\circ$ 之可見光至紅外光羅蘭圓像差測試結果	66
圖 3-38 入射角 $\theta_{i,1} = 15^\circ$ 之可見光至紅外光羅蘭圓像差測試結果	66

圖 4-1 黑體輻射發光圖譜.....	68
圖 4-2 本實驗所使用的積分球之相關資訊.....	69
圖 4-3 待測光源發光實照.....	69
圖 4-4 光源光譜圖(0.38 μm ~ 0.78 μm)與其浮動誤差.....	70
圖 4-5 光源光譜圖與黑體輻射理論擬合.....	71
圖 4-6 聚二甲基矽氧烷結構式.....	71
圖 4-7 (a)PDMS 主劑結構式 (b)固化劑結構式.....	72
圖 4-8 電子束蒸鍍系統架構示意圖.....	72
圖 4-9 塑膠基板可撓式彎曲光柵之 PDMS 轉印製程步驟.....	74
圖 4-10 靜置脫泡乾燥後之結果.....	74
圖 4-11 轉印後之 PDMS 光柵鍍膜後平坦之實照與其在平面下之繞射行為.....	74
圖 4-12 轉印後之 PDMS 光柵鍍膜後彎曲之實照與其在彎曲下之繞射行為.....	75
圖 4-13 可撓光柵轉印後在 OM 以 $\times 100$ 倍率下拍攝之.....	76
圖 4-14 改進後之 PDMS 光柵鍍膜後平坦之實照與其在平面下之繞射行為.....	76
圖 4-15 改進後之 PDMS 光柵鍍膜後彎曲之實照與其在彎曲下之繞射行為.....	77
圖 4-16 偵測元件 MLX90614 與 Arduino 配線示意圖.....	78
圖 4-17 步進電機內部結構示意圖.....	79
圖 4-18 步進原理示意圖.....	79
圖 4-19 步進電機實照.....	79
圖 4-20 步進電機驅動器 A4988 與 Arduino 配線示意圖.....	80
圖 5-1 重疊影像之瑞利指標示意圖.....	87
圖 5-2 偵測極限說明圖.....	88
圖 5-3 入射角 $\theta_{i,1} = 50^\circ$ 之繞射極限與偵測極限.....	90
圖 5-4 入射角 $\theta_{i,1} = 50^\circ$ 解析度優化之最佳光路模擬結果.....	90



圖 5-5 入射角 $\theta_{i,1} = 50^\circ$ 解析度優化之波長與偵測位置關係圖	90
圖 5-6 入射角 $\theta_{i,1} = 50^\circ$ 解析度優化之橫向像差與縱向像差對波長關係圖	91
圖 5-7 入射角 $\theta_{i,1} = 55^\circ$ 之繞射極限與偵測極限	91
圖 5-8 入射角 $\theta_{i,1} = 55^\circ$ 解析度優化之最佳光路模擬結果	91
圖 5-9 入射角 $\theta_{i,1} = 55^\circ$ 解析度優化之波長與偵測位置關係圖	92
圖 5-10 入射角 $\theta_{i,1} = 55^\circ$ 解析度優化之橫向像差與縱向像差對波長關係圖	92
圖 5-11 入射角 $\theta_{i,1} = 60^\circ$ 之繞射極限與偵測極限	92
圖 5-12 入射角 $\theta_{i,1} = 60^\circ$ 解析度優化之最佳光路模擬結果	93
圖 5-13 入射角 $\theta_{i,1} = 60^\circ$ 解析度優化之波長與偵測位置關係圖	93
圖 5-14 入射角 $\theta_{i,1} = 60^\circ$ 解析度優化之橫向像差與縱向像差對波長關係圖	93
圖 5-15 入射角 $\theta_{i,1} = 70^\circ$ 之繞射極限與偵測極限	94
圖 5-16 入射角 $\theta_{i,1} = 70^\circ$ 解析度優化之最佳光路模擬結果	94
圖 5-17 入射角 $\theta_{i,1} = 70^\circ$ 解析度優化之波長與偵測位置關係圖	94
圖 5-18 入射角 $\theta_{i,1} = 70^\circ$ 解析度優化之橫向像差與縱向像差對波長關係圖	95
圖 5-19 球面光柵加入平面鏡座標化	96
圖 5-20 以平面鏡微小化之光路模擬測試結果	98
圖 5-21 量測架構實照	99
圖 5-22 二氧化碳與氮氣光強度實際量測	99
圖 5-23 二氧化碳穿透光譜之實際量測	100

表目錄



表 4-1 偵測元件 MLX90614 各腳位之意義	78
表 4-2 驅動晶片 A4988 各腳位之意義	81
表 4-3 偵測元件與步進電機結合之程序控制	84


第1章 緒論



1.1 研究背景與動機

隨著科技日新月異的進步，除了帶來了人類的許多便利性；相對地，同時也造成了人類在生活環境品質上無心或有意的破壞。在人類發展各產業上，其對周遭環境所造成的破壞有空氣(如：一氧化碳(CO)、二氧化碳(CO₂)、二氧化硫(SO₂)、氮氧化物(NO_x)、硫化氫(H₂S)以及煤塵、粉塵、懸浮微粒等)、水(工業廢水、畜牧廢水、農業污染及垃圾滲出水等)等污染，而這些物質不論對人體或是其他動植物生長條件皆有根本性地影響，甚至死亡。一具體實例為人類生活中不免出現冰箱、冷氣等制冷裝置，乃甚至是噴霧劑、噴漆、塑膠發泡劑等等，其皆含有氟氯碳化物(CFC)此共同物質，而該物質會導至空氣中氟、氯離子濃度增加，使得高空臭氧被破壞而形成臭氧層破洞。再者，二氧化碳排放量的增加，亦會使地表溫度增加，進而導致氣候的變化，而加速了溫室效應的來臨，同時也造成酸雨的形成。另外，水污染最被關切的則是會影響自來水源的水質，無法供應日常生活的乾淨自來水，甚至可能農作物的枯萎或減產，土質變劣而導致農地廢耕。以上皆因提升人類生活上在某方面的便利而造成其周邊的污染；相反地，在食品方面，由於商人為大幅降低成本而使用了過多額外的添加劑難免亦會對人體造成負面的負擔，因此在本例上也同時係伴隨著科技的進步而對人類生活品質產生的隱憂。

而這些污染物其皆可以光譜學(Spectroscopy)於物質檢測中做出基本的判定與分析。光譜學係利用不同波段的電磁波觀測其在物質內部鍵結的影響，而其可依原理大致分為吸收光譜、散射光譜與發射光譜[1]。對於吸收光譜而言，其係利用材料對於入射電磁波或光子所產生之吸收頻譜加以判斷物質其內部鍵結與成分[2][3][4]，因此即使是混合物還是可藉由其內部特定的鍵結與成分藉由量測吸收光譜來分析其內成分與其含量組成，因此吸收光譜常被用於化學分析檢測中[5]。而



散射光譜成因為激發光經物質所產生之散射光加以分析該物質組成。其中原理的不同又可分為彈性散射與非彈性散射，前者光譜之散射光與激發光波長是相同的，係利用激發光與物質之晶格產生之繞射或散射加以分析物質之晶格排列，如 X 光繞射儀(X-ray Diffraction)[6]；後者光譜之散射光則與激發光之波長不同，其係利用激發光激發物質內之載子，使受激發載子再復合而輻射出不同波長之光子，而可判斷物質之成分或其中含有之缺陷。如光致激發(Photoluminescence, PL)或拉曼光譜學(Raman Spectroscopy)[7]。綜合本段，不論是過去、現今甚至為來中，光譜學在物質的檢測與分析上，佔有了一席重要的地位。而相對於吸收光譜而言，發射光譜則是利用電子被激發後躍遷至高能階，而在霎時間內又再次掉至低能階使得在其過程程中以輻射的方式將能量發射出來，而形成發射頻譜。而藉由此概念，亦可分析物質的組成為何，而常見的方法有「焰色試驗法(Flame Test)[8]」與常被用於「天體光譜學 (Astronomical Spectroscopy)[9]」的研究上。光譜學各種性質至今已被研究多年，但對於光譜儀之實際應用尚有許多可以倍改量與發展的地方，而目前現有最常見的兩種光譜儀分別是「單光儀式光譜儀(Monochromator)」與「傅立葉轉換紅外線光譜儀(Fourier Transform Infrared Spectrometer, FTIR)」。然而雖其在於物質的檢測方面都十分的優越，但兩者卻同時存在著設備體積龐大、價格高昂等缺點。因此本研究以致力於製作低成本可撓彎曲凹面光柵，並結合彎曲光柵光路模擬與設計，針對紅外波段將光譜儀微型化、輕便化，並希望能達便民之目的，希望讓一般人民也能隨時隨地自行掌握自身周圍空氣品質、食品安全等安危，以達立即檢測之目的。

再者，隨著現今製程技術不斷地提升，相關的光機電等研究也不斷被提出，如：光開關(Optical Switch)、微致動器(Micro Motion Actuator)[10]等。同時，現今網路寬頻需求不斷的提升，使得寬頻擴充的需求程度隨之而來，使得需要成本相對低廉的分波多工技術的亦為一主要課題。而凹面光柵因其具低成本且體積小等優點，故其是極具發展潛力的多工分波器[11]。因此本研究亦提供了除了羅蘭圓外之方法來

設計任意曲面其聚交之位置。最後，雖現今對於彎曲光柵的數學模型已有許多的研究[12]，但大多理論都僅限於近軸光學條件下的討論[13]，也因此，促使了本研究對於非近軸條件下針對球面光柵其聚交情形做一個深入的探討與數學模型之計算和建立。

1.2 研究概述

本研究係基於現有的色散式光譜儀架構提出低成本且微型化之設計與雛型製作；而在設計上則係自行撰寫其光路相關理論得以優化其最佳聚交之相關參數，以達在設計過程中不失其準確度。第一章係是人類隨著科技進步使得生活更加便利的思維中，反觀其所帶給人類生活環境的負面影響，並簡易介紹與本研究之關聯性為何，最後對本研究所提出之光譜儀微型化之概念做詳細的說明。第二章則會針對本研究相關的光學繞射基本理論進行描述與介紹，以及其應用到反射式光柵上，所須考慮之問題與推導分析，都會於本章一併做討論。

第三章開始針對本研究所提出之球面光柵以 MATLAB 進行光路之設計與分析。首先，以一般球面鏡做為範例撰寫出在「非近軸近似」下的所有聚交情形。再者，有鑑於這樣的基礎來討論光在球面光柵上的繞射和聚交情形。最後將其以圖形繪製輸出方便觀察，並比對是否吻合現有理論(羅蘭圓)以及分析其適用波長範圍之優劣。

第四章則是實際將所構想的光譜儀其所需之系統組件製作與開發。光譜儀系統之組件大致可分為光源、分光元件以及偵測端的開發三大方向。故本研究以白熾燈泡作為紅外光偵測之光源，並搭配實驗室已有的半導體製程技術轉印出可撓式彎曲光柵，最後量測端再搭配 Arduino 來進行簡易的自動控制

第五章則是實際將本光譜儀之架構雛型實際製作，並以二氧化碳氣體作為一範例還量測其穿透頻譜。在架設上，由於本研究所使用的光柵為自製可撓式彎曲光

柵，故在本章中特以解析度進行焦距上之光路聚交優化。最後再實際進行二氧化碳氣體特徵吸收頻譜的量測。

第六章即係將整體紅外光譜儀微型化研究做一個總結，並在並提出這些未來可繼續發展之研究方向。





第2章 理論基礎與文獻回顧

2.1 夫朗和斐(Fraunhofer)繞射

2.1.1 同調振盪子(Coherent Oscillators)

欲了解同調振盪子的物理行為，就必須先了解何謂「同調(相干)」[14]。如圖 2-1(a)，若有兩波源且其「相位差(Phase Difference)為一常數」，則稱該兩波源「同調」。而相位差即為兩振盪子振盪行為的差值。考慮圖 2-1(b)，明顯地，該三個波其相位差並非常數，因此該三個波兩兩皆稱為不同調。由圖 2-1(b)的討論可知若兩波要稱為同調其充分條件為兩波之波長必須相同；換言之，其(振盪)頻率亦必須相同。[15]

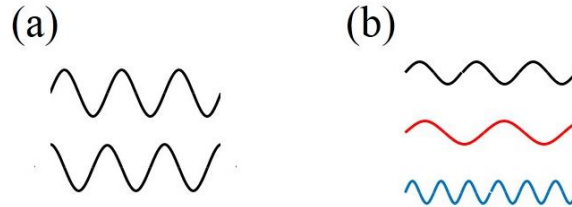


圖 2-1 「同調」說明圖示

在干涉(Interference)與繞射(Diffraction)的研究中，吾以些許的同調振盪子作為基本模型，如圖 2-2 所示[16]。該圖係以 N 個同調點振子排成一列，假設起始相位(initial phase angle)均相同，則在極遠處的觀察者點 P 可將這每個振子所發出的射線視為幾近平行；且若該陣列每個振子距離相對觀察者點 P 之距離是相對極小，則觀察者在點 P 所感受到每個振子所發出的射線其電場振幅應相同，可以下式表示之：

$$E_0(r_1) = E_0(r_2) = \cdots = E_0(r_N) = E_0(r) \quad (2.1)$$



而對於在觀察者在點 P 所感受到所有離散干涉球面波所產生的電場大小總和可以下式表示之：

$$E = E_0(r) \cos(kr_1 - \omega t) + E_0(r) \cos(kr_2 - \omega t) + \dots + E_0(r) \cos(kr_N - \omega t) \quad (2.2)$$

上式亦可改寫成複數函數以方便後續計算與理解，如下式：(將該複數電場取實部後則可得其該有的物理意義)

$$\tilde{E} = E_0(r) e^{i(kr_1 - \omega t)} + E_0(r) e^{i(kr_2 - \omega t)} + \dots + E_0(r) e^{i(kr_N - \omega t)} \quad (2.3)$$

將上式整理後可得下式：

$$\tilde{E} = E_0(r) e^{-i\omega t} e^{ikr_1} [1 + e^{ik(r_2 - r_1)} + e^{ik(r_3 - r_1)} + \dots + e^{ik(r_N - r_1)}] \quad (2.4)$$

再次考慮圖 2-2，可發現相鄰之振子其光程差 $\Lambda = d \sin \theta$ ；而相位差可以 $\delta = k\Lambda$ 表示之。故相鄰振子之相位差 $\delta = kd \sin \theta$ ，其中 $k = k_0 n$ 、 n 為介質折射率。由前述可知第一顆振子與第二顆振子的相位差為 $\delta = k(r_2 - r_1)$ ；第一顆振子與第三顆振子的相位差為 $2\delta = k(r_3 - r_1)$ ； \dots 。將此結果代回式(2.4)，可得下式：

$$\tilde{E} = E_0(r) e^{-i\omega t} e^{ikr_1} [1 + (e^{i\delta})^2 + (e^{i\delta})^3 + \dots + (e^{i\delta})^{N-1}] \quad (2.5)$$

明顯可發現上式中括弧內為一等比級數(Geometric Series)，故上式可繼續推得至下式：

$$\tilde{E} = E_0(r) e^{-i\omega t} e^{ikr_1} \left[\frac{1 - (e^{i\delta})^N}{1 - e^{i\delta}} \right] \quad (2.6)$$

將上式刻意提出公因數(分子同提出 $e^{iN\delta/2}$ ；分母同提出 $e^{i\delta/2}$)後，藉由尤拉公式(Euler's formula)可發現該結構與正弦函數有相同處可進而化簡，如下式：



$$\begin{aligned}
\tilde{E} &= E_0(r)e^{-i\omega t} e^{ikr_1} \left[\frac{1-e^{iN\delta}}{1-e^{i\delta}} \right] \\
&= E_0(r)e^{-i\omega t} e^{ikr_1} \left[\frac{e^{iN\delta/2}(e^{iN\delta/2} - e^{-iN\delta/2})}{e^{i\delta/2}(e^{i\delta/2} - e^{-i\delta/2})} \right] \\
&= E_0(r)e^{-i\omega t} e^{ikr_1} e^{i(N-1)\delta/2} \left[\frac{(e^{iN\delta/2} - e^{-iN\delta/2})/2i}{(e^{i\delta/2} - e^{-i\delta/2})/2i} \right] \\
&= E_0(r)e^{-i\omega t} e^{i[kr_1+(N-1)\delta/2]} \left[\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \right]
\end{aligned} \tag{2.7}$$

若此時吾定義線形陣列之中點振子與觀察者點 P 距離定義為 R ，則搭配圖 2-2 明顯可得下式：

$$R = r_1 + \frac{1}{2}(N-1)d \sin \theta \tag{2.8}$$

將上式代回式(2.7)，最後可得觀察者在點 P 所感受到所有離散干涉球面波所產生的電場大小總和如下式：

$$\tilde{E} = E_0(r)e^{i(kR-\omega t)} \left[\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \right] \tag{2.9}$$

由於光強度與電場平方成正比($I \propto |\tilde{E}|^2 = \tilde{E}\tilde{E}^*$)，故觀察者在點 P 所感受到所有離散干涉球面波所產生的光強度總和如下式：

$$I = I_0 \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} \tag{2.10}$$

其中 I_0 為單一振子之射線到達觀察者點 P 的光強度；換言之，即式(2.10)在 $N=1$ 時之光強度。再者，前述提及相鄰振子之相位差 $\delta = kd \sin \theta$ ，將其代回式(2.10)後可知該光強度 I 是 θ 的函數如下式：

$$I = I_0 \frac{\sin^2[N(kd/2)\sin \theta]}{\sin^2[(kd/2)\sin \theta]} \tag{2.11}$$

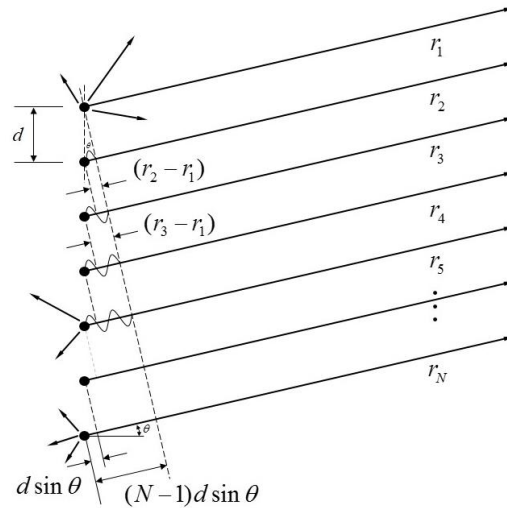


圖 2-2 同調振盪子線形陣列

觀察式(2.11)可發現 $\frac{\sin[N(kd/2)\sin\theta]}{\sin[(kd/2)\sin\theta]}$ 為快速振盪項；而相對地其分母 $\{\sin^2[(kd/2)\sin\theta]\}^{-2}$ 恰可調製該振盪項趨緩整個函數的振盪強度。因此該兩項結合在一起使整個函數形成一由次極大的峰值所分割出一系列的主極大峰值的圖形。故式(2.10)主極大的峰值發生在相位差 $\delta = 2m\pi$ ，其中 $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。又因 $\delta = kd\sin\theta$ ，故發生主極大峰值之條件可改寫為下式：(主極大發生在光程差為波長的整數倍)

$$d \sin \theta = m\lambda ; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.12)$$

而該主極大之極值 I_{Max} 為 $N^2 I_0$ (當 $\delta = 2m\pi$ ，則由羅必達定理(L'Hôpital's rule)可知： $\{\sin[N(kd/2)\sin\theta]/\sin[(kd/2)\sin\theta]\}^2 = N^2$)。順帶一提，觀察式(2.12)可發現若兩振子間之距離 d 小於繞射波長 λ ，則由於正弦函數值域的限制 ($-1 < \sin\theta < 1$)，該繞射主極大僅發生在第零階 ($m = 0$)。考慮理想線形電子振盪子其彼此距離在原子距離等級，則我們可知其繞射光場僅恰會出現一主極大的峰值。

2.1.2 單狹縫繞射

考慮一球面波如圖 2-3 所示[17]，可知對於球面波前而言其行徑方向係以球心



為原點相空間均勻輻射。此不難設想對於立體波而言，其能量會隨距離增加而減弱，因此輻射強度也會隨距離變大而明顯降低。[18]

$$I = \frac{\text{Energy/Time}}{\text{Area}} \quad (2.13)$$

由光強度定義(如上式)可知，對於球面波其光強度可以下式表示：

$$I = \frac{\text{Power}}{4\pi \cdot r^2} \quad (2.14)$$

觀察上式知該強度與距離平方成反比($I \propto 1/r^2$)，而同時光強度與電場平方成正比($I \propto |\tilde{E}|^2$)，因此對於球面波而言其輻射電場與其輻射距離成反比($E \propto 1/r$)，故球面波之電場形式可由下式呈現明顯成立：

$$E = \left(\frac{\epsilon_0}{r}\right) \sin(\omega t - kr) \quad (2.15)$$

其中 ϵ_0 為輻射源基本強度(source strength)。

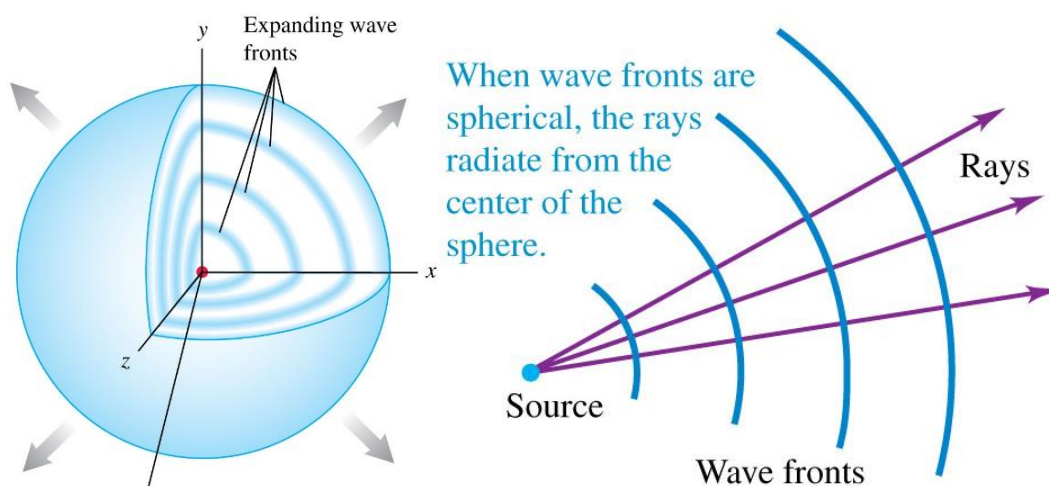


圖 2-3 球面波行徑方向示意圖

相較於圖 2-2 而言，考慮一總長度為 D 之線形同調源之振盪子如圖 2-4 所示。該線形源之振盪子的振子個數 N 明顯趨近於無窮多，則其振子間之距離想當然第小之又小。故在圖 2-4 同調線形源振盪子中須引進一振子個數線密度，如下式：

$$\# \text{ of the Oscillators Density} = \frac{N}{D} \quad (2.16)$$

承上式，將該密度乘上微小長度(dy)即為該長度上所含有之陣子個數。因此圖 2-4 觀察者在點 P 所感受到在 y 軸上之同調線形源中，微小長度上之所有振子所輻射之微小電場大小可寫成下式：

$$dE = \left(\frac{\epsilon_0}{r}\right) \sin(\omega t - kr) \cdot \left(\frac{N}{D} dy\right) \quad (2.17)$$

為簡化上式，吾定義每單位長度之輻射源基本強度(source strength per unit length) ϵ_L 如下式：

$$\epsilon_L \equiv \frac{1}{D} \lim_{N \rightarrow \infty} (\epsilon_0 N) \quad (2.18)$$

將式(2.18)代回式(2.17)可得下式：

$$dE = \left(\frac{\epsilon_L}{r}\right) \sin(\omega t - kr) \cdot dy \quad (2.19)$$

最後將上式積分總長度(D)後可得下式：

$$E = \int dE = \epsilon_L \int_{-D/2}^{D/2} \left[\frac{\sin(\omega t - kr)}{r}\right] dy \quad (2.20)$$

而上式 r 明顯地為 y 之函數(意即： $r = r(y)$)。再由圖 2-4 知 $R \gg D$ 橫成立，故在式(2.20)中 r 對於所有微小長度 dy 而言幾乎為常數(constant)，故可將上式改寫為下式：

$$E = \frac{\epsilon_L}{R} \int_{-D/2}^{D/2} \sin(\omega t - kr) dy \quad (2.21)$$

上式即為觀察者在點 P 所感受到同調線形源振盪子所輻射之電場大小。雖然該假設(同調線形源振盪子)並不實際存在於物理中，但式(2.21)將會是很好的基礎數學模型(model)。

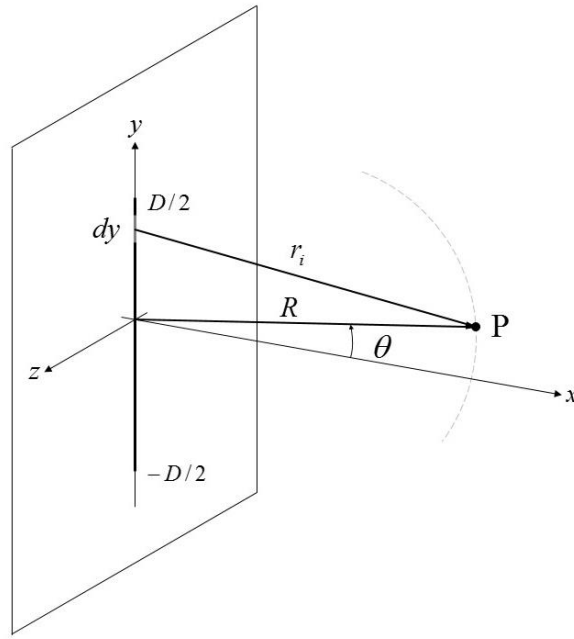


圖 2-4 同調線形源之振盪子

對於單狹縫繞射可以圖 2-5 作討論。由圖，已知 $\triangle AOP$ 三邊長度及一角度 $(90^\circ - \theta)$ ，可由餘弦定理知：

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{y^2 + R^2 - r^2}{2yR} \Rightarrow \frac{r}{R} = \sqrt{1 - 2\left(\frac{y}{R}\right)\sin\theta + \left(\frac{y}{R}\right)^2} \quad (2.22)$$

再將上式以馬克勞林級數(Maclaurin Series)展開得下式：

$$r = R - y\sin\theta + (y^2/2R)\cos^2\theta + \dots \quad (2.23)$$

由上式知：若 $|y| < D/2$ ，則 $(y^2/2R)\cos^2\theta \rightarrow 0$ 。換言之，只要觀察者與狹縫中點的距離 R 足夠大，則對於所有繞射角 θ 而言，式(2.23)第三項以後之高次項皆可忽略；換言之，觀察者與狹縫距離 r 與微小長度之位置 y 成一次線性關係，而此時以符合了夫朗和斐條件(Fraunhofer condition)。故將 $r = R - y\sin\theta$ 由(2.21)後可得下式：

$$E = \frac{\epsilon L}{R} \int_{-b/2}^{b/2} \sin[\omega t - k(R - y\sin\theta)] dy \quad (2.24)$$

上式實為三角函數的簡易積分，計算如下：



$$\begin{aligned}
E &= \frac{\epsilon_L}{R} \int_{-b/2}^{b/2} \sin[\omega t - k(R - y \sin \theta)] dy \\
&= \frac{\epsilon_L}{R} \int_{-b/2}^{b/2} \sin[(\omega t - kR) + ky \sin \theta] dy \\
&= \frac{\epsilon_L}{R} \int_{-b/2}^{b/2} [\sin(\omega t - kR) \cos(ky \sin \theta) + \sin(ky \sin \theta) \cos(\omega t - kR)] dy \quad (2.25) \\
&= \frac{\epsilon_L}{R} \frac{1}{k \sin \theta} [\sin(\omega t - kR) \sin(ky \sin \theta) - \cos(ky \sin \theta) \cos(\omega t - kR)] \Big|_{-b/2}^{b/2} \\
&= \frac{\epsilon_L b}{R} \frac{\sin[(kb/2) \sin \theta]}{(kb/2) \sin \theta} \sin(\omega t - kR)
\end{aligned}$$

為簡化式(2.25)之結果，吾定義一與 θ 有關之自變數 β 如下：

$$\beta \equiv (kb/2) \sin \theta \quad (2.26)$$

將上述定義代回式(2.25)後，最後可得單狹縫在觀察者點P繞射之電場分佈，如下式：

$$E = \frac{\epsilon_L b}{R} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \sin(\omega t - kR) \quad (2.27)$$

而對於單狹縫在觀察者點P繞射之光強度亦正比於其電場平方的時間平均值 ($I \propto \langle E^2 \rangle_T$)，計算如下：

$$\begin{aligned}
I &\propto \left\langle \left[\frac{\epsilon_L b}{R} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \sin(\omega t - kR) \right]^2 \right\rangle_T \\
&= \left(\frac{\epsilon_L b}{R} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \langle \sin^2(\omega t - kR) \rangle_T \\
&= \left(\frac{\epsilon_L b}{R} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \int_t^{t+T} \sin^2(\omega t - kR) \cdot dt \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_L b}{R} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2
\end{aligned} \quad (2.28)$$

因此理想線形光源經由夫朗和斐近似(Fraunhofer approximation)之光強度可以下式呈現之：

$$I(\theta) = I(0) \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad (2.29)$$

其中當繞射角 $\theta=0$ 時， $\sin \beta / \beta = 1$ ，而此時對應至光強度之主級大；因此，將此時的光強度定義為 $I(0)$ 。而為求後續小節討論書寫之方便，將此常數 $I(0)$ 定義為 I_0 ，



故式(2.29)可重新改寫成下式：

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad (2.30)$$

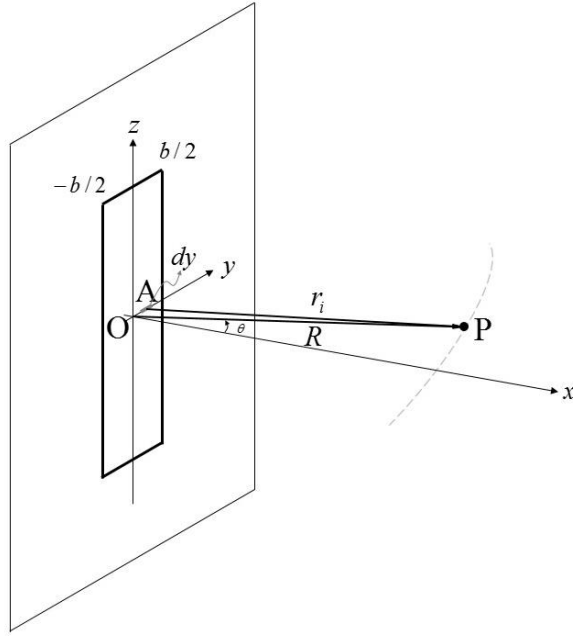


圖 2-5 單狹縫繞射示意圖

再者，因為波數 $k = 2\pi/\lambda$ ，故可將式(2.26)改寫成下式：

$$\beta = \left(\frac{b}{\lambda} \right) \pi \sin \theta \quad (2.31)$$

觀察上式並搭配式(2.29)可發現，若狹縫寬度 b 遠大於繞射波長 λ (意即： $b \gg \lambda$)，則由式(2.29)知 $(\sin \beta / \beta)^2$ 項會有明顯震盪；換言之，光強度 $I(\theta)$ 會隨繞射角 θ 從原點 (0°) 偏移後極快速降至零，而使得單狹縫在此條件下可被視為單一振子主要「只」往前方 ($\theta = 0^\circ$) 直向照射。然而，倘若今狹縫寬度 b 遠小於繞射波長 λ (意即： $b \ll \lambda$)，則因式(2.31)中 $\beta \rightarrow 0$ 使得式(2.29)中 $(\sin \beta / \beta)^2 \rightarrow 1$ ，近而得 $I(\theta) \rightarrow I_0$ ；換言之，光強度 $I(\theta)$ 不論在任何繞射角度都會有相同的繞射光強度 I_0 。

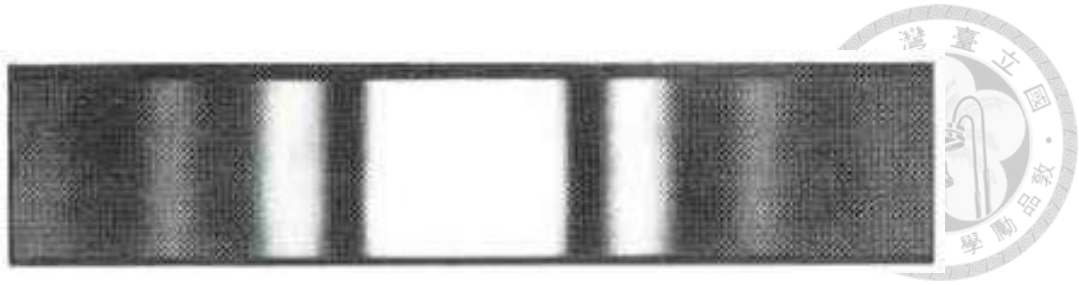


圖 2-6 單狹縫繞射照片

再回到式(2.29)考慮該函數，該函數雖然會隨著繞射角度 θ 急速下降，但觀察實際實驗(圖 2-6)其次極大仍可被觀測，因此吾有必要討論其極值發生的位置與條件[19]。討論極值發生位置，即取該函數一次微分為零，則可求得該條件，如下式：

$$\frac{dI}{d\beta} = 0 \Rightarrow I_0 \left(2 \cdot \frac{2 \sin \beta}{\beta} \right) \left(\frac{\beta \cos \beta - \sin \beta}{\beta^2} \right) = 0 \quad (2.32)$$

將上式整理後如下式：

$$\tan \beta \cdot (\beta - \tan \beta) = 0 \quad (2.33)$$

而上式等號成立的條件發生在下式：

$$\tan \beta = 0 \cup (\beta - \tan \beta) = 0 \quad (2.34)$$

明顯地，若 $\tan \beta = 0$ 會使光強度 $I(\theta)$ 有最小值，其中 $\beta = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$ ；若 $(\beta - \tan \beta) = 0$ 則使光強度 $I(\theta)$ 有相對極大(次極大)值，而該解僅能化簡成下式：

$$\tan \beta = \beta \quad (2.35)$$

而上式之解集合如圖 2-7。這些解集合集為式(2.29)之次極大所發生之位置，而該式解約為 $\{ \beta | \beta = \pm 1.4303\pi, \pm 2.459\pi, \pm 3.4707\pi, \dots \}$ 。

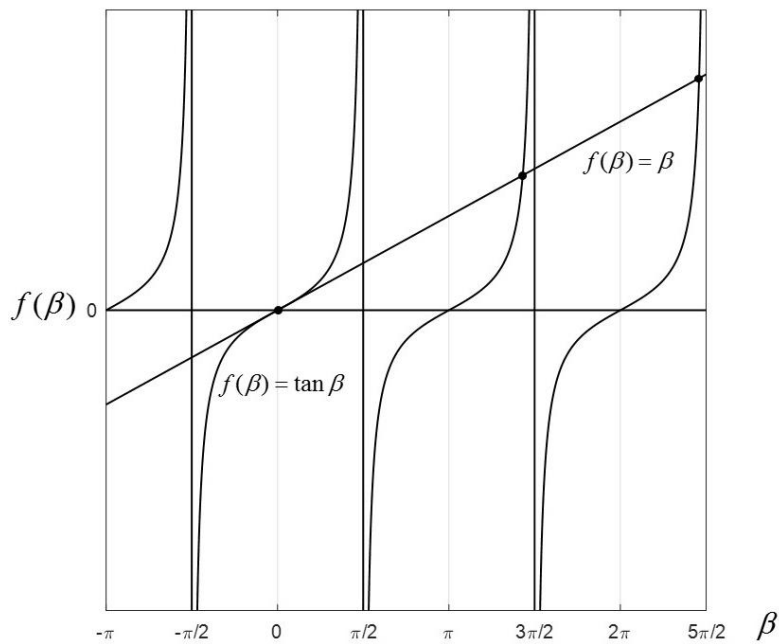


圖 2-7 式(2.35)之解集合

前述已完整計算出式(2.29)亮暗紋之發生條件，若再將暗紋簡化可如下式：

$$\begin{aligned}
 \beta &= m\pi && ; m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\
 \Rightarrow (kb/2) \sin \theta &= m\pi && ; m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\
 \Rightarrow \left(\frac{2\pi/\lambda}{2}\right) \cdot b \sin \theta &= m\pi && ; m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\
 \therefore b \sin \theta_m &= m\lambda && ; m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

另外，繞射次極亮紋由圖 2-7 之解集合不難發現，該解趨近於 $\pi/2$ 的奇數倍，因此

亦可簡化成下式：

$$\begin{aligned}
 \beta &\rightarrow (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2} && ; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\
 \Rightarrow (kb/2) \sin \theta &\rightarrow (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2} && ; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\
 \Rightarrow \left(\frac{2\pi/\lambda}{2}\right) \cdot b \sin \theta &\rightarrow (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2} && ; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\
 \therefore b \sin \theta_n &\rightarrow (2n+1) \cdot \frac{\lambda}{2} && ; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

式(2.36)和式(2.37)之簡化讓整體繞射條件以更精簡的方式呈現。而該結果可以另一



種較簡單「圖解說明」的方式來重新闡述單狹縫夫朗和斐近似之繞射結果[20]，如圖 2-8、圖 2-9 與圖 2-10 所示。

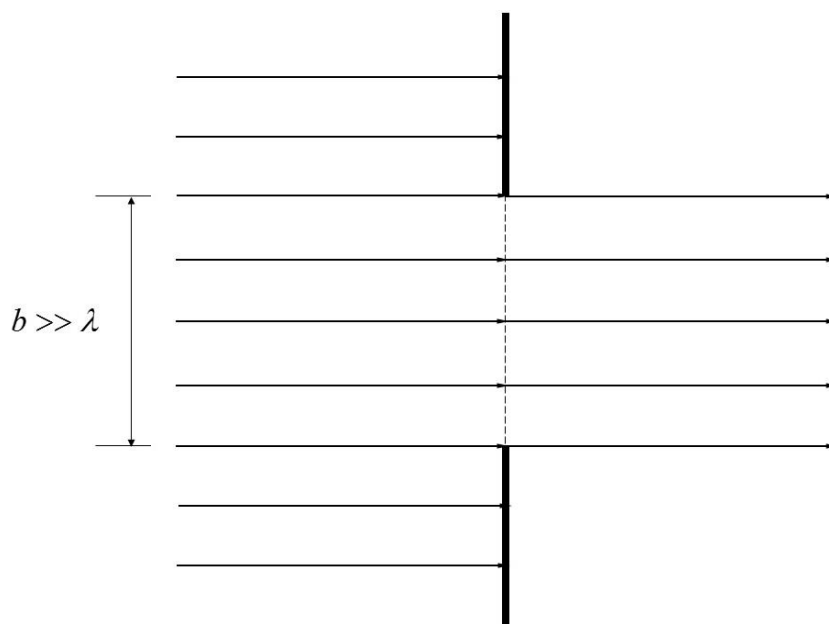


圖 2-8 單狹縫未繞射示意圖

圖 2-8 中不難可看出射線直接直行通過狹縫且沒有繞射光束。該現象可追溯至式(2.31)，在 $b \gg \lambda$ 條件下，則光強度 $I(\theta)$ 會隨繞射角 θ 從原點 (0°) 偏移後極快速降至零，使得單狹縫在此條件下可被視為單一振子主要「只」往前方 ($\theta = 0^\circ$) 直向照射。而本圖恰可較直觀的解釋了若狹縫未到一定程度的小，則狹縫效應並無法有效地影響射線直行的物理行為，使得通過狹縫的射線仍會依原入射方向直線行徑。

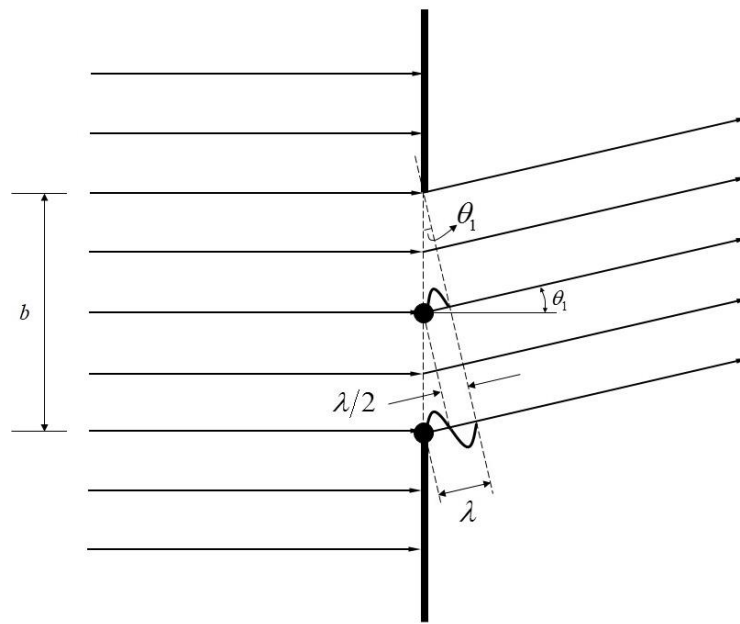


圖 2-9 單狹縫繞射第一階($m=1$)暗紋

圖 2-9 係討論在狹縫最頂端之微小振子與狹縫最底端之微小振子光程差若恰等於一個波長 λ 之情形(意即： $b\sin\theta_m=1\cdot\lambda$)。在此，吾刻意將狹縫區分為上半部與下半部兩區，則可發現上半部最頂端之微小振子與下半部最頂端(中點)之微小振子光程差恰為半個波長使該兩射線成破壞性(destructive)干涉，接著在上半部之所有微小振子「皆」可找到其所對應的下半部之所有微小振子使其接產生破壞性干涉，而最後所有射線皆相互破壞性干涉使得在此情況($b\sin\theta_m=1\cdot\lambda$)下的繞射條紋為暗紋。同理討論圖 2-10，該圖所呈現的條件係在狹縫最頂端之為小振子與狹縫最底端之微小振子光程差若恰等於兩個波長 2λ 之情形(意即： $b\sin\theta_m=2\cdot\lambda$)。本次刻意將狹縫平均區分為四個部分(quarters)，同理第一部分的所有振子與第二部分的所有振子皆有相互匹配的射線使得其兩兩形成破壞性干涉；而第三部分與第四部分亦是如此，故最後所有射線皆相互破壞性干涉使得在本情況($b\sin\theta_m=2\cdot\lambda$)下的繞射條紋亦為暗紋。而這樣的圖說恰可追溯至式(2.36)，由本圖亦可較直觀的解釋了若狹縫最頂端之微小振子與狹縫最底端之微小振子光程差若恰為波長的整數倍(意即：



$b \sin \theta_m = m\lambda, m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$), 則在屏譜上所對應之位置繞射角 θ_m 將會出現暗線條紋。

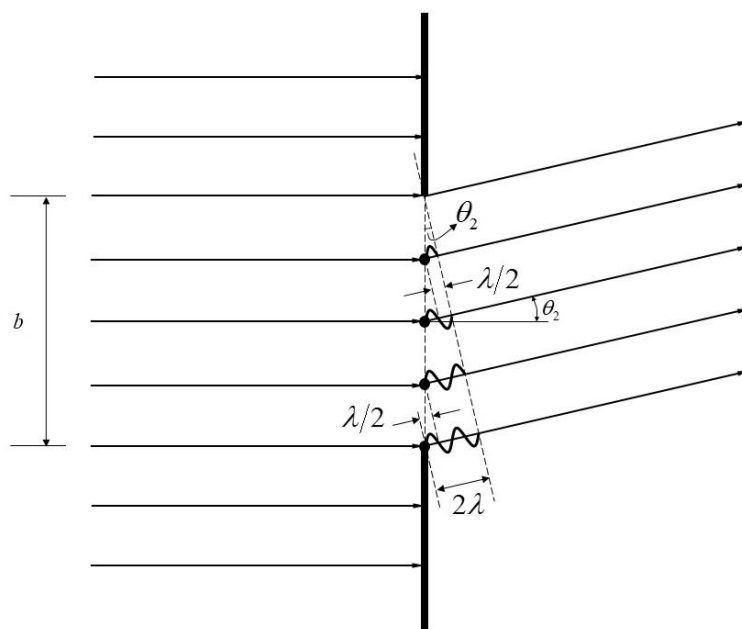


圖 2-10 單狹縫繞射第二階($m = 2$)暗紋

同理，對於繞射亮紋之圖解說明亦是如此。圖 2-11 討論在狹縫最頂端之微小振子與狹縫最底端之微小振子光程差若恰等於三個半波長 $3\lambda/2$ 之情形(意即： $b \sin \theta_m = 3 \cdot \lambda/2$)。與圖 2-9、圖 2-10 不同的是這次刻意將狹縫平均區分為三個(奇數)部分；而第一部分的所有振子與第二部分的所有振子一樣皆有相互匹配的射線使其相互形成破壞性干涉，最後僅剩下第三部分將會在屏幕上形成亮紋。同理若狹縫最頂端之微小振子與狹縫最底端之微小振子光程差若恰等於五個半波長 $5\lambda/2$ 之情形(意即： $b \sin \theta_m = 5 \cdot \lambda/2$)，僅須將狹縫平均區分為五個部分後加以討論，亦可發現會剩下最後一部分在屏幕上產生亮紋。而這樣的圖說亦可追溯至式(2.37)，由本圖較直觀的解釋了若狹縫最頂端之微小振子與狹縫最底端之微小振子光程差若恰為半波長的奇數倍(意即： $b \sin \theta_n = (2n+1) \cdot (\lambda/2), n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$)，則在屏譜上

所對應之位置繞射角 θ_n 將會出現亮線條紋。附帶一提，雖在本段落討論中之結論為「等號(=)」而非像式(2.37)中是以「趨近於(\rightarrow)」表示，但本說明本意僅是希望能以較簡單的圖解來說明繞射現象的亮紋分部；再者，觀察圖 2-7 解集合之趨勢亦不難看出若該解會隨著 β 值逾大而讓式(2.37)中之「趨近於(\rightarrow)」逐漸變成「等號(=)」使整個式子成立之。

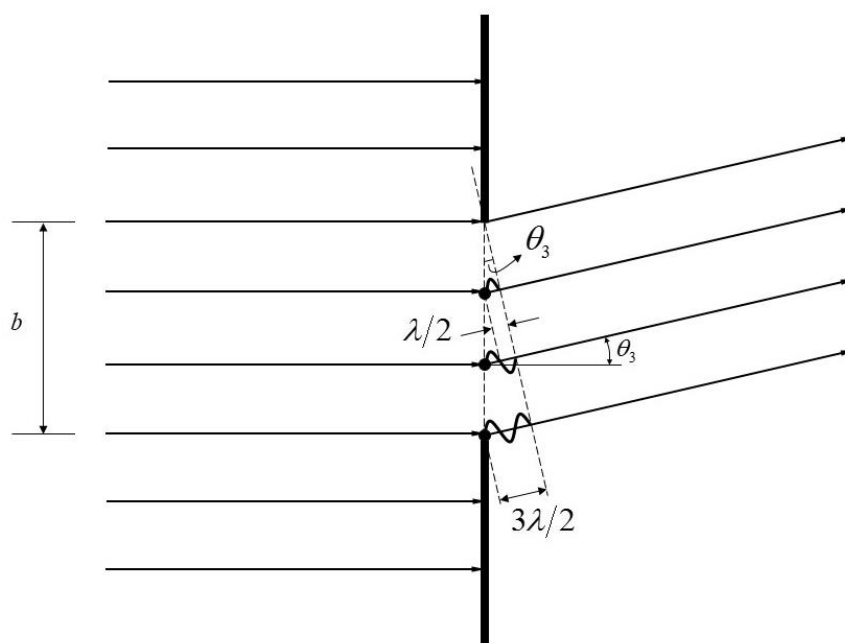


圖 2-11 單狹縫繞射第一階($n=1$)亮紋

最後，由前述討論完極值後即可繪製式(2.29)之繞射圖形如圖 2-12。圖中橫軸吾以三個不同變數(m 、 β 、 $\sin\theta$)來分別表示以方便不同自變數下的討論。首先， m 為暗紋階數(又稱第 m 暗紋)；其次， β 即為吾為簡化式(2.25)所定義之參數以方便後續繞射亮暗紋之討論；最後， $\sin\theta$ 僅為方便表示繞射波長與狹縫寬度比值之倍數。而本圖即完整描述對於單狹縫在夫朗和斐近似下之繞射圖譜。

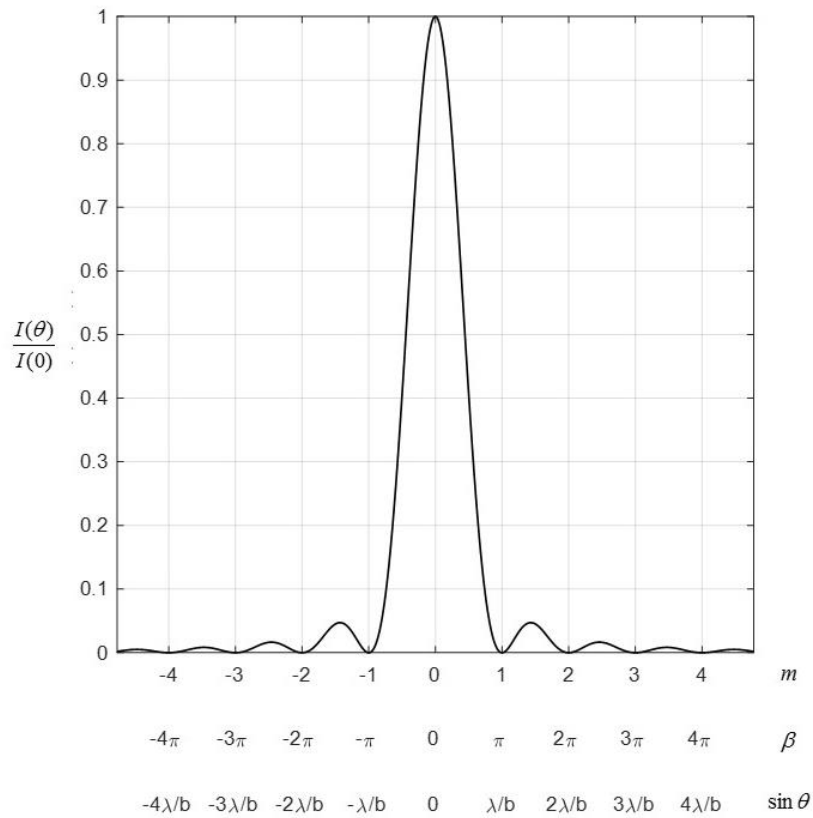


圖 2-12 單狹縫夫朗和斐近似之繞射圖譜

2.1.3 雙狹縫繞射

對於雙狹縫繞射可以圖 2-13 作討論。圖中 b 表示單一狹縫之寬度， a 表示兩狹縫間之距離。由圖可知再觀測平面上之電場大小即為兩狹縫的貢獻所疊加(overlap)，即便兩狹縫到觀側平面有相同的振幅大小，但其相位也有很明顯的不同。由於兩狹縫分別之主極大會激活另一狹縫之次極大，而最後的峰值疊加後將會具有同調且干涉之結果。如圖 2-14 所示[21]，該繞射條紋係以單狹縫繞射去調製(modulate)雙狹縫干涉系統。

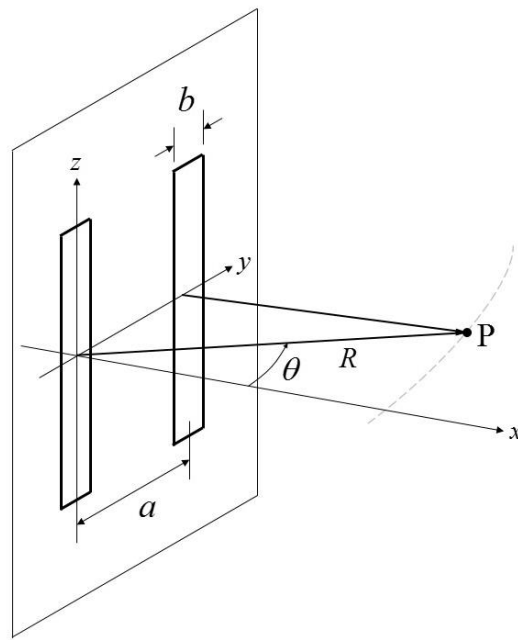


圖 2-13 雙狹縫繞射示意圖

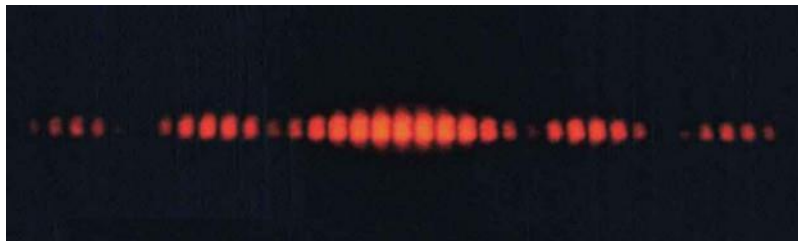


圖 2-14 雙狹縫繞射照片


由前段可知兩單狹縫對點 P 之電場疊加即為雙狹縫繞射在觀察者在點 P 所感受到的電場，因此可以下式表示之：

$$E = C \int_{-b/2}^{b/2} F(y) dy + C \int_{a-b/2}^{a+b/2} F(y) dy \quad (2.38)$$

其中 $F(y)$ 如下式：

$$F(y) = \sin[\omega t - k(R - y \sin \theta)] \quad (2.39)$$

將式(2.39)積分後可得下式：



$$\begin{aligned}
E &= C \int_{-b/2}^{b/2} \sin[\omega t - k(R - y \sin \theta)] dy + C \int_{a-b/2}^{a+b/2} \sin[\omega t - k(R - y \sin \theta)] dy \\
&= bC \frac{\sin[(kb/2) \sin \theta]}{(kb/2) \sin \theta} [\sin(\omega t - kR) + \sin(\omega t - kR + ka \sin \theta)] \\
&= 2bC \frac{\sin[(kb/2) \sin \theta]}{(kb/2) \sin \theta} \cos[k(a/2) \sin \theta] \sin[(\omega t - kR) + k(a/2) \sin \theta]
\end{aligned} \tag{2.40}$$

其中 $C \int_{a-b/2}^{a+b/2} F(y) dy$ 如下：

$$\begin{aligned}
C \int_{a-b/2}^{a+b/2} F(y) dy &= C \int_{a-b/2}^{a+b/2} \sin[\omega t - k(R - y \sin \theta)] dy \\
&= C \int_{a-b/2}^{a+b/2} \sin[(\omega t - kR) + ky \sin \theta] dy \\
&= C \int_{a-b/2}^{a+b/2} [\sin(\omega t - kR) \cos(ky \sin \theta) + \sin(ky \sin \theta) \cos(\omega t - kR)] dy \\
&= \frac{C}{k \sin \theta} [\sin(\omega t - kR) \sin(ky \sin \theta) - \cos(ky \sin \theta) \cos(\omega t - kR)] \Big|_{a-b/2}^{a+b/2} \\
&= \frac{C}{k \sin \theta} \left\{ \begin{aligned} &-\cos[ka \sin \theta + k(b/2) \sin \theta] \cos(\omega t - kR) \\ &\sin(\omega t - kR) \sin[ka \sin \theta + k(-b/2) \sin \theta] \end{aligned} \right\} \\
&= \frac{C}{k \sin \theta} \left\{ \begin{aligned} &\sin(\omega t - kR)(2) \cos(ka \sin \theta) \sin[k(b/2) \sin \theta] \\ &+ \cos(\omega t - kR)(-2) \sin(ka \sin \theta) \sin[k(b/2) \sin \theta] \end{aligned} \right\} \\
&= \frac{C}{k \sin \theta} \sin[k(b/2) \sin \theta] \sin[(\omega t - kR) + ka \sin \theta] \\
&= bC \frac{\sin[(kb/2) \sin \theta]}{(kb/2) \sin \theta} \sin(\omega t - kR + ka \sin \theta)
\end{aligned} \tag{2.41}$$

同樣地，為簡化式(2.40)之結果，吾定義兩與 θ 有關之自變數 α 、 β 如下：

$$\alpha \equiv (ka/2) \cdot \sin \theta ; \quad \beta \equiv (kb/2) \cdot \sin \theta \tag{2.42}$$

將上述定義代回式(2.40)後，最後可得單狹縫在觀察者在點 **P** 繞射之電場分佈，如下式：

$$E = 2bC \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \cos \alpha \sin[(\omega t - kR) + \alpha] \tag{2.43}$$

而對於雙狹縫在觀察者點 **P** 繞射之光強度亦正比於其電場平方的時間平均值，計算如下：



$$\begin{aligned}
 I &\propto \left[2bC \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \cos \alpha \sin(\omega t - kR + \alpha) \right]^2 \Big|_{-T}^{+T} \\
 &= (2bC)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cos^2 \alpha \left. \sin^2(\omega t - kR + \alpha) \right|_{-T}^{+T} \\
 &= (2bC)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \int_{-T}^{+T} \sin^2(\omega t - kR + \alpha) \cdot dt \\
 &= 4 \cdot \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_L b}{R} \right)^2 \right] \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cos^2 \alpha
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

因此雙狹縫繞射之光強度可以下式呈現之：

$$I(\theta) = 4I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cos^2 \alpha \tag{2.45}$$

其中如式(2.30)常數 I_0 定義為 $\epsilon_L b/R)^2/2$ ，當繞射角 $\theta=0$ 時，此時 $\sin \beta/\beta=1$ 且 $\cos^2 \alpha=1$ 使主極大 $I(\theta=0) = 4I_0$ 。

討論式(2.45)，首先，若狹縫寬度 b 趨近於零 ($kb \ll 1$) 則兩狹縫被趨近於兩線光源且同時使 $\sin \beta/\beta \rightarrow 1$ ，因此整個式(2.45)可被寫成下式：

$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2 \alpha \tag{2.46}$$

而上式實為楊氏干涉實驗(Young's Experiment)[22]之結果。再者，若討論參數 $\alpha=0$ 之情形，而該情境即為兩單狹縫重疊並繞射，其結果即為式(2.29)之兩倍。因此吾可知雙狹縫繞射是由繞射項 $(\sin \beta/\beta)^2$ 調和著干涉項 $\cos^2 \alpha$ 所產生之明暗條紋。

而式(2.45)兩個主宰項可明顯知當「 β 為 π 的整數倍」與「 α 為 $\pi/2$ 的奇數倍」時，繞射條紋在屏幕上為暗紋，如下式：

$$\beta = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots ; \alpha = \pm \pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \dots \tag{2.47}$$

搭配上式可明確知式(2.45)之繞射明暗條紋如圖 2-15 所示。

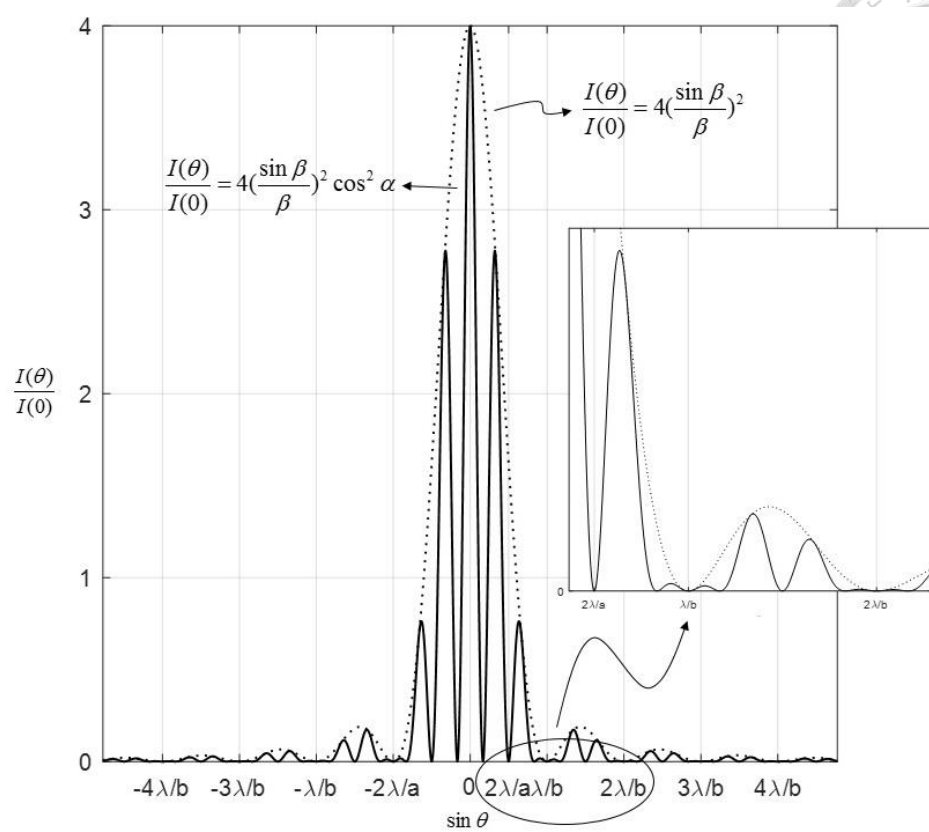


圖 2-15 雙狹縫繞射圖譜

2.1.4 多狹縫繞射

對於計算多狹縫繞射之概念實與雙狹縫繞射想法一樣，如圖 2-16，考慮 N 個寬度為 b 且狹縫彼此間距皆為 a 之多狹縫，可知 N 個單狹縫對點 P 之電場疊加即為多狹縫繞射在觀察者在點 P 所感受到的電場，因此可以下式表示之：[23]

$$E = C \int_{-b/2}^{b/2} F(y) dy + C \int_{a-b/2}^{a+b/2} F(y) dy + \dots + C \int_{(N-1)a-b/2}^{(N-1)a+b/2} F(y) dy \quad (2.48)$$

其中 $F(y)$ 亦是以夫朗和斐近似後所得式(2.39)。在式(2.48)中實為將每個「相同」單狹縫繞射後加總，進而得觀察者在點 P 所感受到的電場，因此為方便計算，吾定義式(2.48)中每項積分如下式：

$$E_j \equiv C \int_{ja-b/2}^{ja+b/2} F(y) dy \quad (2.49)$$

而式(2.49)積分形式如同式(2.41)，因此式(2.49)之積分結果如下式：



$$\begin{aligned}
 E_j &= bC \frac{\sin[k(b/2)\sin\theta]}{k(b/2)\sin\theta} \sin(\omega t - kR + ka \sin\theta \cdot j) \\
 &= bC \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right) \sin(\omega t - kR + 2\alpha \cdot j)
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

同理，其中 α 與 β 定義如式(2.42)。因此將式(2.48)以式(2.50)之結果改寫成下式：

$$E = \sum_{j=0}^{N-1} E_j = \sum_{j=0}^{N-1} bC \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right) \sin(\omega t - kR + 2\alpha \cdot j) \tag{2.51}$$

為方便計算上式，以複數形式改寫上式可得下式：

$$\begin{aligned}
 E &= \text{Im} \left[\sum_{j=0}^{N-1} bC \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right) e^{i(\omega t - kR + 2\alpha \cdot j)} \right] \\
 &= bC \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right) \cdot e^{i(\omega t - kR)} \cdot \text{Im} \left[\sum_{j=0}^{N-1} (e^{i2\alpha})^j \right]
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

而上式求和計算如同式(2.5)與式(2.6)，故上式之結果計算後如下式：

$$\begin{aligned}
 E &= bC \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right) \cdot e^{i(\omega t - kR)} \cdot \text{Im} \left[\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha} e^{i(N-1)\alpha} \right] \\
 &= bC \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right) \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right) \sin[\omega t - kR + (N-1)\alpha]
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

最後上式即為多狹縫在觀察者在點 P 繞射之電場分佈，同樣地，多狹縫在觀察者點 P 繞射之光強度亦如式(2.44)計算，結果如下式：

$$\begin{aligned}
 I &\propto \left[bC \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right) \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right) \sin(\omega t - kR + (N-1)\alpha) \right]^2 >_T \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_L b}{R}\right)^2 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

故多狹縫繞射之光強度可以下式呈現之：

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 \tag{2.55}$$

其中如式(2.30)常數 I_0 定義為 $\frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_L b}{R}\right)^2$ 。當繞射角 $\theta=0$ 時， $\sin\beta/\beta=1$ 且 $\sin N\alpha/\sin\alpha=N$ 使主極大 $I(\theta=0) = N^2 I_0$ 。

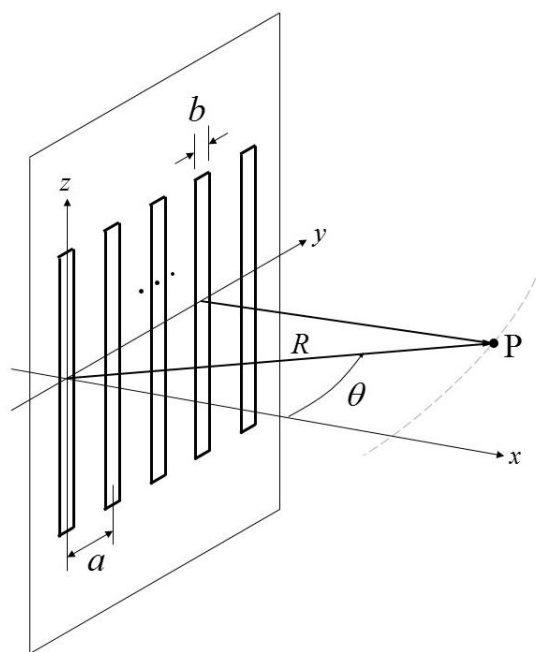


圖 2-16 多狹縫繞射示意圖

同前各繞射之討論，吾有必要討論其極值發生的位置與條件。討論極值發生位置，又由於 $(\sin \beta / \beta)^2$ 僅為整個函數之調和項，故僅需了解式(2.55)隨變數 α 之變動所產生的行為做討論即可。故將該函數對 α 取一次偏微分為零即可，如下式：

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{2 \sin N\alpha (N \cos N\alpha \sin \alpha - \sin N\alpha \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} \right) = 0 \quad (2.56)$$

將上式整理後如下式：

$$\sin N\alpha (N \tan \alpha - \tan N\alpha) \cos N\alpha \cos \alpha = 0 \quad (2.57)$$

而上式等號成立的條件發生在下式：

$$\sin N\alpha = 0 \cup (N \tan \alpha - \tan N\alpha) = 0 \cup \cos N\alpha = 0 \cup \cos \alpha = 0 \quad (2.58)$$

明顯地，若 $\sin N\alpha = 0$ 會使光強度 $I(\theta)$ 有最小值，其中 $N\alpha = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$ 。將其整理後可得式(2.55)之最小值發生位置，如下式：

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{N}, \pm \frac{2\pi}{N}, \pm \frac{3\pi}{N}, \dots \quad (2.59)$$

再者，討論 $(N \tan \alpha - \tan N\alpha) = 0$ 之成立條件。將其化簡後得下式：



$$\frac{\tan N\alpha}{\tan \alpha} = N \quad (2.60)$$

上式等號條件發生在該式等號左方分子與分母要同時趨近於零，而其必要條件即為 $\tan \alpha \rightarrow 0$ ，故滿足此式之條件為下式：

$$\alpha \rightarrow 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots \quad (2.61)$$

而滿足上式之條件將會使式(2.55)中 $(\sin N\alpha/\sin \alpha)^2$ 有最大值 N^2 ，因此滿足式(2.61)將會使觀察者感受到主極大之光強度。在此，由於此條件具有重要的物理意義，故藉式(2.42)將式(2.61)改寫成下式：

$$\begin{aligned} \alpha &= m\pi && ; \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\ \Rightarrow (ka/2) \sin \theta &= m\pi && ; \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\ \Rightarrow \left(\frac{2\pi/\lambda}{2}\right) \cdot a \sin \theta &= m\pi && ; \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\ \therefore a \sin \theta_m &= m\lambda && ; \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned} \quad (2.62)$$

而上式之簡化讓整體多狹縫繞射主極大值之條件以更精簡的方式呈現。接著，若 $\cos N\alpha = 0$ 則其等號成立條件為 $N\alpha = \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \pm 7\pi/2, \dots$ ，將其整理後可得式(2.55)之次極大值發生位置，如下式：

$$\alpha = \pm \frac{3\pi}{2N}, \pm \frac{5\pi}{2N}, \pm \frac{7\pi}{2N}, \dots \quad (2.63)$$

最後，若 $\cos \alpha = 0$ ，則其等號成立條件如下式：

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots \quad (2.64)$$

而將其代回式(2.55)可知，若狹縫個數 N 為奇數，則會使 $\sin^2 N\alpha = 1$ 而亦產生次極大值；反之，若狹縫個數 N 為偶數，則會使 $\sin^2 N\alpha = 0$ 使得此時本條件為另個最小值發生位置之條件。

綜合以上四個條件(式(2.59)、式(2.61)、式(2.63)、式(2.64))可明確知式(2.55)之繞射明暗條紋如圖 2-17 所示。

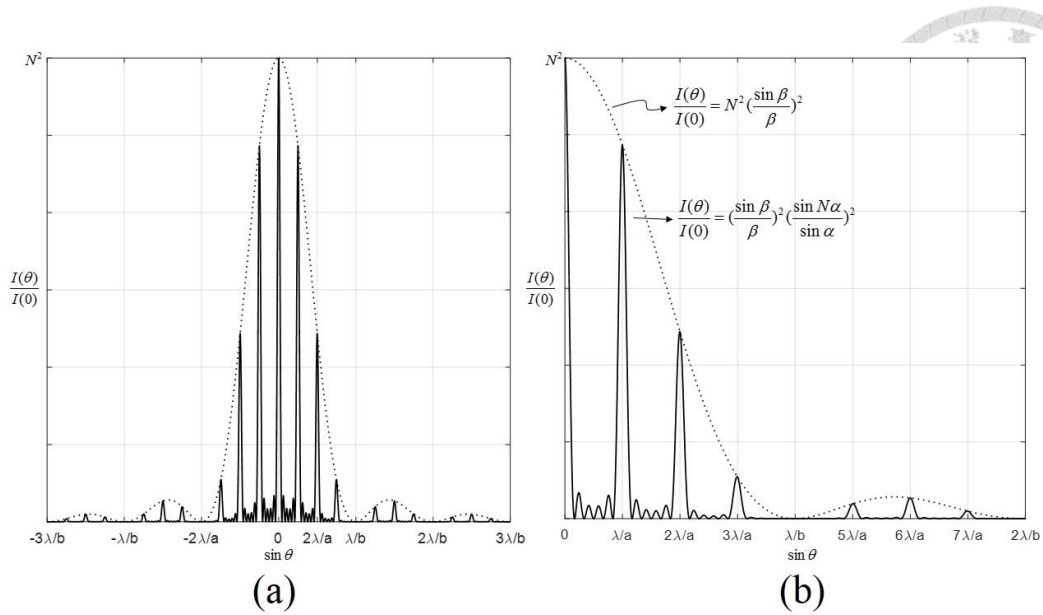


圖 2-17 多狹縫繞射圖譜

另外，由前述知 $I(\theta=0) = N^2 I_0$ ，則可將式(2.55)重新改寫成下式：[24]

$$I(\theta) = I(0) \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{N \sin \alpha} \right)^2 \quad (2.65)$$

而上式中多狹縫干涉項為 $[\sin^2(N\alpha)/(N \sin \alpha)^2]$ ，如圖 2-18。若多狹縫個數 N 很大，則 $1/(N \sin \alpha)^2$ 可以被視為 $\sin^2 N\alpha$ 快速振盪的曲線；反之，若 N 很小， $\sin \alpha \rightarrow 1$ 使得干涉項就如同 $\text{sinc}^2 N\alpha$ 。

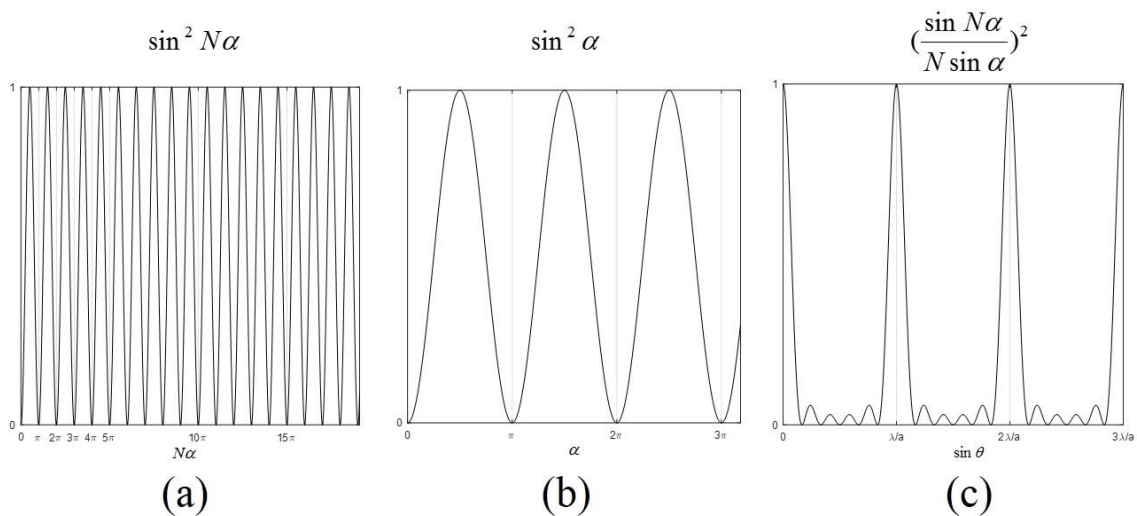


圖 2-18 多狹縫干涉項



圖 2-19 係由管狀燈泡作為光源通過不同狹縫之實際繞射照片，由上到下分別為單狹縫 $N=1$ 、雙狹縫 $N=2$ 、 \dots 、五狹縫 ($N=5$)。由該量續圖譜可知，算然並無法清楚地觀察次極大，但隱約可以發現其強度會隨著狹縫數量 N 的增加使得愈靠近中央的次極大量度增加；再者，在主亮帶中可以明顯地看出其暗帶寬度會隨著 N 值得增加而增加。而由圖 2-19 右圖之式(2.55)干涉項隨不同 N 值計算之結果。由右圖可知在亮帶位置之極大值會隨狹縫個數 N 的增加而變大；相對地，其次極大值會隨 N 的增加而變小。由此可說明光的狹縫干涉(繞射)現象實為光波的疊加後之「能量的再分配」，且能量會分配至干涉項中的主極大。

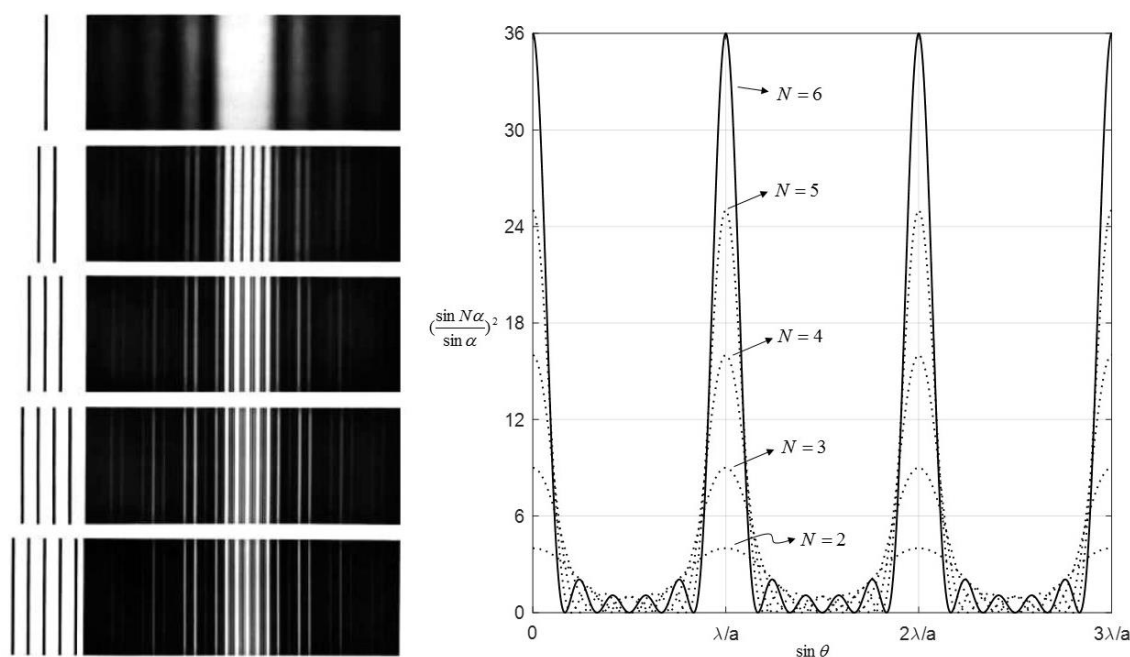


圖 2-19 能量重新分配示意圖

2.1.5 繞射光柵

若有重複繞射元素之陣列其可使出射波相位或振幅發生週期性的調製，則稱該陣列為繞射光柵(diffraction grating)。如圖 2-20 左圖，當一入射波前進入此透明

與不透明的交替系統時，該波前(wave front)會被重新被調製。在惠更斯－菲涅耳原理(Huygens-Fresnel)理論中，小波在光柵表面輻射不同的相位，因此出射波前在形狀上擁有週期性的變化。同理，圖 2-20 右圖為反射式光柵其繞射物理行為亦是如此，因此對於反射式光柵其繞射條件其實與穿透式光柵係大同小異地。

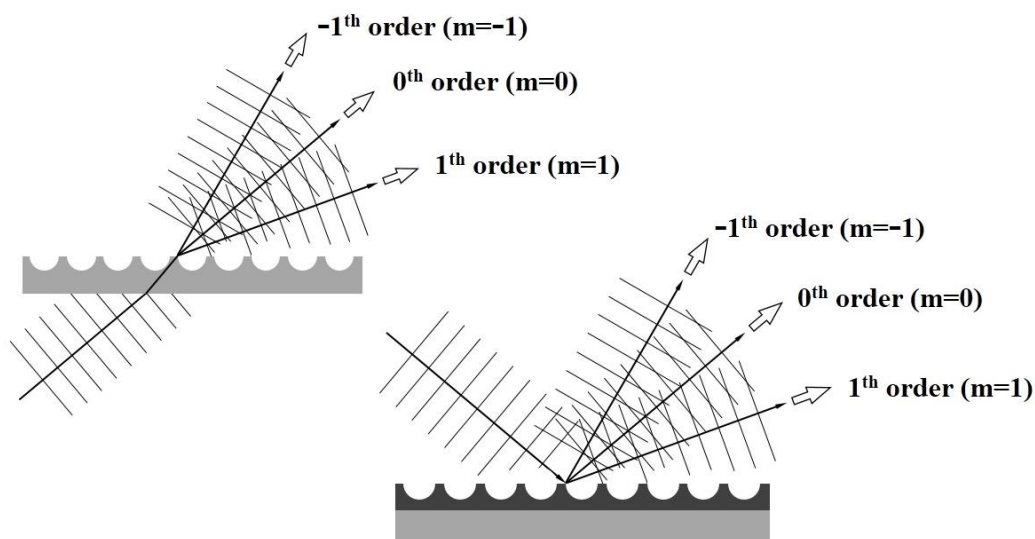


圖 2-20 透射、反射光柵分光波前示意圖

若今有一垂直光源進入穿透式(transmission)光柵，而在遙遠位置其繞射亮紋即遵循式(2.62)，而本式即稱為垂直入射之光柵方程式(grating equation)，其中常數 m 稱為不同主極大之階數。再者，考慮圖 2-21 穿透式與反射式光柵斜向入射，則其光程差為 $\overline{BC} - \overline{AD}$ ，且在幾何上其值為 $a \sin \theta_m - a \sin \theta_i$ ；若在遠處觀察者感觀測到亮線條紋，則該兩道光之光程差必為波長的整數倍，故不論穿透式光柵或反射式(reflection)光柵其分光行為皆以可式呈現之：[25]

$$a(\sin \theta_m - \sin \theta_i) = m\lambda, m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2.66)$$

由上式可知，在 $m = 0$ 之情況下會使 $\theta_m = \theta_i$ ，此時就如同一般面鏡的行為，稱其為鏡面反射(specular reflection)。明顯地，由式(2.66)知光柵實為一個簡單又方便的分



光元件，但其缺點卻因第零階($m=0$)繞射無法分出不同波長的光，使得很多光能被浪費在未分光的位置上而有些可惜。

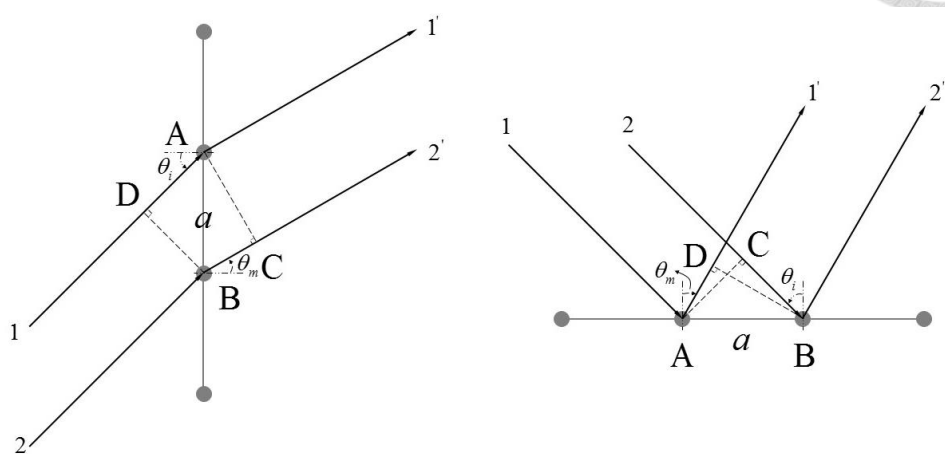


圖 2-21 穿透式光柵與反射式光柵斜向入射示意簡圖

2.2 反射式光柵

2.2.1 閃耀式光柵

承前小節，有鑑於光柵在分光時浪費了大部分的能量在第零階使該元件分光能力不佳，因此 Lord Rayleigh 在 1874 年提出藉由改變光柵表面形狀使將無價值的第零階能量轉移至其他高階的概念；而在 1910 年 Robert Williams Wood 成功的製作出形狀可被調控由規則性的刻槽，即現今眾所皆知的閃耀式(blazed)光柵，如圖 2-22。[28]

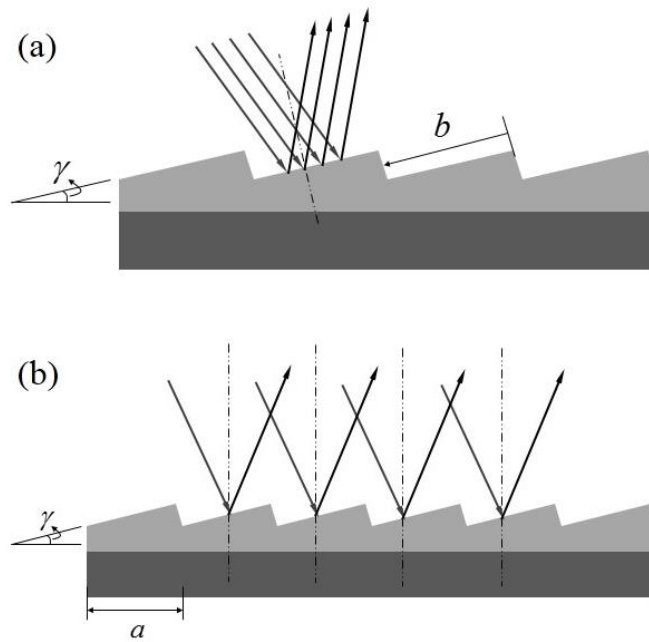


圖 2-22 閃耀式光柵繞射示意圖

在圖 2-22 中，如同多狹縫繞射一般，由於閃耀式光柵亦具有「單槽繞射(a)(單狹縫繞射)」與「槽間干涉(b)(多狹縫干涉)」之現象，故該光柵非零階(nonzero)繞射角 θ_m 仍適用於式(2.66)。在此為本小節後續計算方便，重新定義角度之正負(逆時針為正)，如圖 2-23 修正後之光柵方程式如下式：

$$a(\sin \theta_i + \sin \theta_m) = m\lambda, m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2.67)$$

其中 θ_i 仍為以光柵法線為法線之入射角， θ_m 仍為以光柵法線為法線之繞射角， λ 為 θ_m 所對應之繞射波長。而 θ_0 ($\theta_{m=0}$) 即為槽間干涉之第零階繞射(未分光)。續討論圖 2-23，由於閃耀式光柵係由許多傾斜刻槽(傾角為 γ)所構成，因此在考慮單槽繞射時應將傾角納入考慮，則此時遵守「刻槽法線」，且以刻槽法線為標準之入射角 η 與繞射角 ζ 皆如圖 2-23(a) 示。並由圖 2-23(a) 以幾何圖形可得角度彼此間之關係，如下二式：

$$\eta = \theta_i - \gamma ; \zeta = \gamma - \theta_m \quad (2.68)$$

承圖 2-23(b)，考慮第 m 階繞射，若存在有一繞射角度 Θ 恰使 $\zeta = \eta$ ，則該角度



($\theta_m = \Theta$)為最大光強度之繞射角(此時單槽繞射遵守鏡面反射($\eta = \zeta$))。而在此條件下搭配式(2.68)兩式相減可得下式條件：

$$\Theta = 2\gamma - \theta_i \quad (2.69)$$

此時將上式代回式(2.67)可得下式：

$$\begin{aligned} a(\sin \theta_i + \sin \Theta) &= m\lambda && ; \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\ \Rightarrow a[\sin \theta_i + \sin(2\gamma - \theta_i)] &= m\lambda && ; \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned} \quad (2.70)$$

上式即為在考慮不同入射角 θ_i 其所對應之單槽繞射時最大光強度之波長，而該波長所對應之位置(角度)遵循式(2.69)。將上式以三角函數中的和差化積再搭配式(2.68)可簡化如下式：

$$2a \sin \gamma \cos(\theta_i - \gamma) = m\lambda \quad ; \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2.71)$$

若再將式(2.68)左式代入上式，進而可將上式簡化成下式：

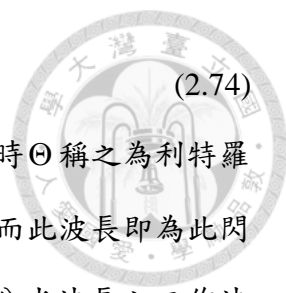
$$2a \sin \gamma \cos \eta = m\lambda \quad ; \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2.72)$$

雖為後續說明方便且形式對稱而簡化了式(2.71)成式(2.72)，但實際實驗仍以式(2.71)為計算範疇，該式實以入射角 θ_i 與刻槽傾角 γ 來調製出在第 m 階下所需量測之波長，而該波長為「考慮單槽繞射最大光強度之波長」，且該波長發生位置在角度 Θ 上。

繼續討論圖 2-23(c)，若光以平行光柵法線之方向入射($\theta_i = 0$)，則對於第零階之繞射其繞射角則為平行入射光反方向($\theta_o = 0^\circ$)射離光柵，此時單槽繞射最大光強度波長之角度發生在式(2.69)中 $\theta_i = 0^\circ$ 的時候(即 $\Theta = 2\gamma$)，此時式(2.70)或式(2.71)知該最大光強度波長必遵守下式：

$$a \sin 2\gamma = m\lambda \quad ; \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2.73)$$

最後討論圖 2-23(d)，該情境為光以平行刻槽法線之方向入射($\theta_i = \gamma$)，則第零階之繞射其以繞射角 γ ($\theta_o = -\gamma$)射離光柵，此時單槽繞射最大光強度波長之角度發生在式(2.69)中 $\theta_i = \gamma$ (即 $\Theta = \gamma$)的時候(則 $\eta = \zeta = 0^\circ$)，而由式(2.72)知最大光強度波長必遵守下式：



$$2a \sin \gamma = m \lambda_B \quad ; \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2.74)$$

上式即為利特羅(Littrow)條件($\theta_i = \gamma$ 且 $\theta_m = \gamma$)下之結果[29]。此時 Θ 稱之為利特羅角(又或稱閃耀角[30])， λ_B 稱為閃耀波長(blazed wavelength)，而此波長即為此閃耀式光柵分光效率最佳之設計波長[31][32][33]。故可視實驗時分光波長之工作波段藉由閃耀式光柵在利特羅條件下設計出對應分光效率最佳之閃耀角。

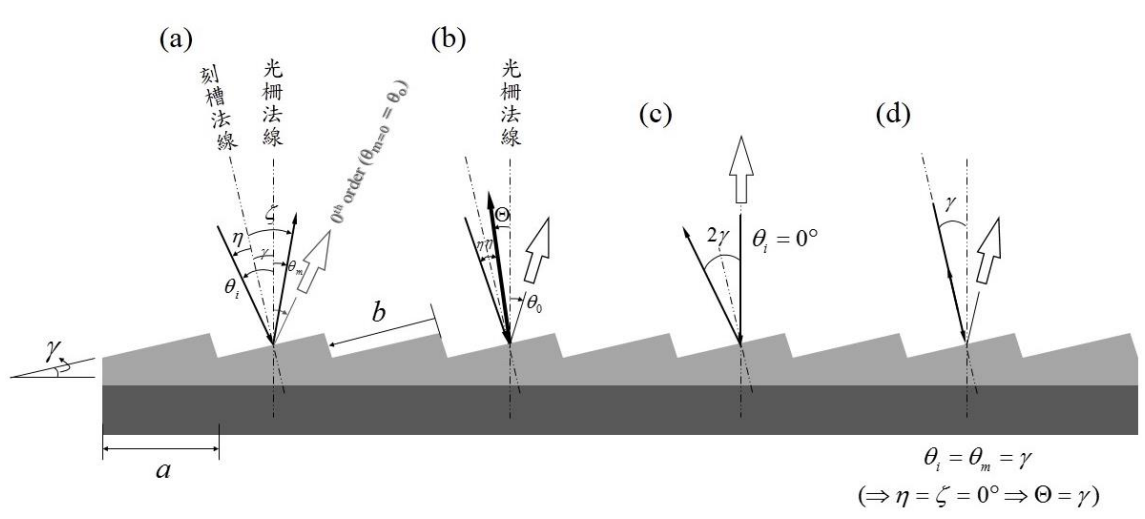


圖 2-23 閃耀式光柵法線定義示意圖

2.2.2 球面光柵與羅蘭圓(Rowland Circle)

光柵光譜的研究歷史上，一個重大突破即是 Henry A. Rowland 在 1880 年將反射式光柵與球面作結合而形成凹面光柵 (Concave grating) [34]。這樣一個凹面光柵即同時擁有了藉由繞射分光並同時藉由凹面將這些被分出相同波長開的光聚焦在一處。[35]

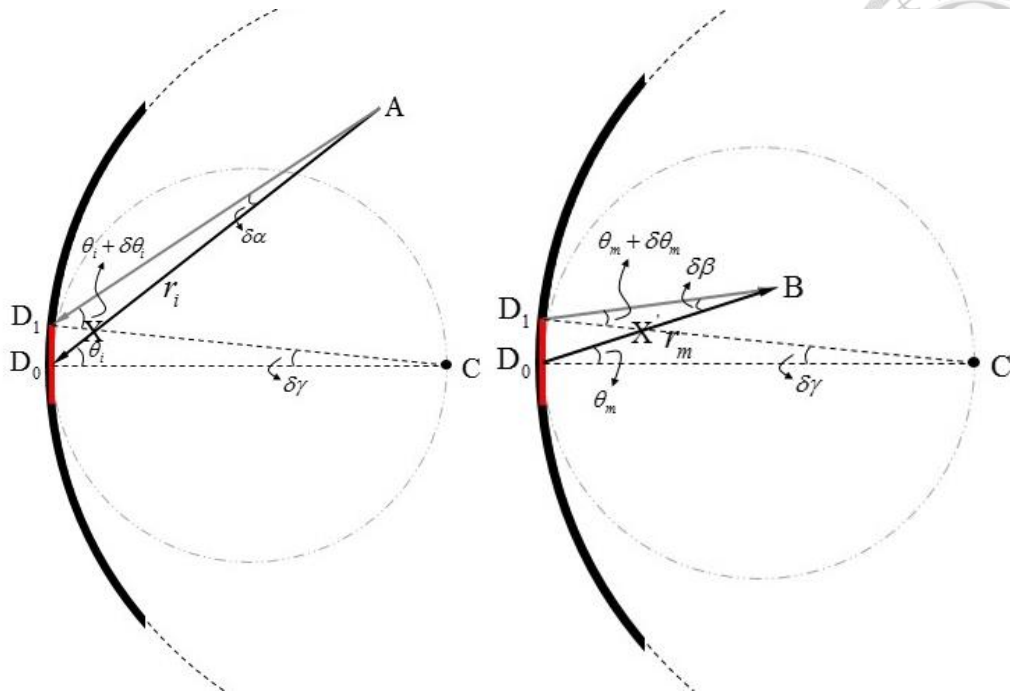


圖 2-24 球面光柵示意圖

對於球面光柵「在近軸近似下」其分光且聚交之理論如圖 2-24 所示[36][37]。圖 2-24 呈現一點光源 A 入射至球面光柵之呈現，其中主入射光(通過光柵中點) $\overline{AD_0}$ 之臂長為 r_i (入射角為 θ_i)、 $\overline{AD_1}$ 則為點光源至光柵上緣之入射光(入射角為 $\theta_i + \delta\theta_i$) 且其張角 ($\overline{AD_0}$ 與 $\overline{AD_1}$ 之夾角) 令為 $\delta\alpha$ ；相對地，點 B 即為繞射後之聚交點，且其中主繞射光(通過光柵中點) $\overline{D_0B}$ 之臂長為 r_m (繞射角為 θ_m)、 $\overline{D_1B}$ 則為光柵上緣匯聚在點 B 之繞射光(繞射角為 $\theta_m + \delta\theta_m$) 且其張角 ($\overline{D_0B}$ 與 $\overline{D_1B}$ 之夾角) 令為 $\delta\beta$ 。而點 C 則為凹面光柵之曲率中心，故 $\overline{CD_0}$ 之長度即為 R ($R=2f$) 且其張角 ($\overline{CD_0}$ 與 $\overline{CD_1}$ 之夾角) 令為 $\delta\gamma$ 。

由圖 2-24 左圖 $\triangle AXD_1$ 與 $\triangle CXD_0$ 可得下式：

$$(\theta_i + \delta\theta_i) + \delta\alpha = \theta_i + \delta\gamma \Rightarrow \delta\theta_i = \delta\gamma - \delta\alpha \quad (2.75)$$



而右圖 $\Delta BX'D_1$ 與 $\Delta CX'D_0$ 可得下式：

$$(\theta_m + \delta\theta_m) + \delta\beta = \theta_m + \delta\gamma \Rightarrow \delta\theta_m = \delta\gamma - \delta\beta \quad (2.76)$$

再者，本討論係在「近軸近似」下作討論，因此有光線的彎曲光柵近似為直線(如圖紅線)，且 $\delta\alpha$ 、 $\delta\beta$ 與 $\delta\gamma$ 皆為小角度，因此可得下三式：

$$\delta\alpha \approx \tan \delta\alpha = \frac{\overline{D_0 D_1} \cos\theta_i}{r_i} \quad (2.77)$$

$$\delta\beta \approx \tan \delta\beta = \frac{\overline{D_0 D_1} \cos\theta_m}{r_m} \quad (2.78)$$

$$\delta\gamma \approx \tan \delta\gamma = \frac{\overline{D_0 D_1}}{R} \quad (2.79)$$

將上三式代回式(2.75)和式(2.76)後可得二式：

$$\delta\theta_i = \frac{\overline{D_0 D_1}}{R} - \frac{\overline{D_0 D_1} \cos\theta_i}{r_i} \quad (2.80)$$

$$\delta\theta_m = \frac{\overline{D_0 D_1}}{R} - \frac{\overline{D_0 D_1} \cos\theta_m}{r_m} \quad (2.81)$$

接著由於係討論球面光柵，故亦滿足光柵方程式(式(2.67))，並將其微分可得下式：

$$\cos\theta_i (\delta\theta_i) + \cos\theta_m (\delta\theta_m) = 0 \quad (2.82)$$

將式(2.80)與式(2.81)代入上式可得：

$$\left(\frac{\cos\theta_i}{R} - \frac{\cos^2\theta_i}{r_i}\right) + \left(\frac{\cos\theta_m}{R} - \frac{\cos^2\theta_m}{r_m}\right) = 0 \quad (2.83)$$

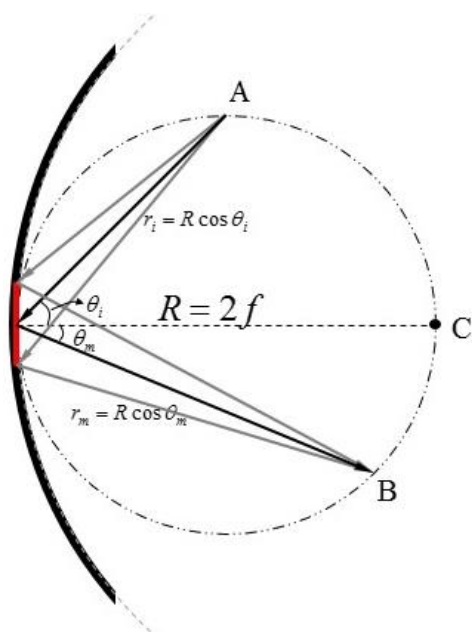


圖 2-25 羅蘭圓示意圖

由式(2.83)可得以下兩結論。首先，將式(2.83)移項後可得下式：

$$r_m = \frac{\cos^2 \theta_m}{\frac{\cos \theta_i}{R} + \frac{\cos \theta_m}{R} - \frac{\cos^2 \theta_i}{r_i}} \quad (2.84)$$

明顯地，上式在點光源位置固定下其自變數與應變數分別為 θ_m 和 r_m 。而搭配式(2.67)則可知在「近軸近似」下不同分光波長其聚交角度與距離為何。其次，將式(2.83)稍作整理可得下式：

$$\frac{\cos \theta_i}{R \cdot r_i} (r_i - R \cos \theta_i) + \frac{\cos \theta_m}{R \cdot r_m} (r_m - R \cos \theta_m) = 0 \quad (2.85)$$

觀察上式可知，若點光源所選擇的位置 $r_i = R \cos \theta_i$ ，則滿足上式繞射聚光位置的唯一解 $r_m = R \cos \theta_m$ 恆成立，即：

$$r_i = R \cos \theta_i \Rightarrow r_m = R \cos \theta_m \quad (2.86)$$

上式之物理意義為：若入射光源坐落在以 R 為直徑且相切該球面光柵(其中光柵條紋正交於該圓面)的圓上($r_i = R \cos \theta_i$)，則其繞射出來所有波長的光必會聚交於相同圓上的某一處($r_m = R \cos \theta_m$)，如圖 2-25 所示，且此時該圓即稱為「羅蘭圓 (Rowland Circle)」。^{[38][39]}

第3章 光譜儀機構微型化之光路設計與分析



3.1 球面鏡光路模擬程序之建立

3.1.1 球面鏡聚交理論(近軸)

考慮一球面鏡如圖 3-1，該球面以點 C 為球心，故該球面之方程式如下式：

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2 \quad (3.1)$$

若只考慮左半圓，上式可改寫成下式：

$$x = R \pm \sqrt{R^2 - y^2} \quad (3.2)$$

將上式做級數展開可得下式：

$$x = \frac{y^2}{2R} + \frac{y^4}{8R^3} + \frac{y^6}{16R^5} + \dots \quad (3.3)$$

再觀察圖 3-1 以原點為頂點且以點 F 為焦點之拋物面，該方程式如下：

$$y^2 = 4fx \quad (3.4)$$

比較上式與式(3.3)，不難發現若球面之半徑恰為拋物面焦距之兩倍時(即： $R = 2f$)，

則式(3.4)實為式(3.3)的二階近似，而剩餘項(誤差項) Δx 如下式：

$$\Delta x = \frac{y^4}{8R^3} + \frac{y^6}{16R^5} + \dots \quad (3.5)$$

明顯地，在圓球面若要二階近似成立，則其充分條件為 $y \ll R$ ；換言之，若要以球面鏡代替拋物面鏡作計算，則討論區域僅限制於中心軸的附近兩側，而該區域稱為「近軸區域(paraxial region)」。

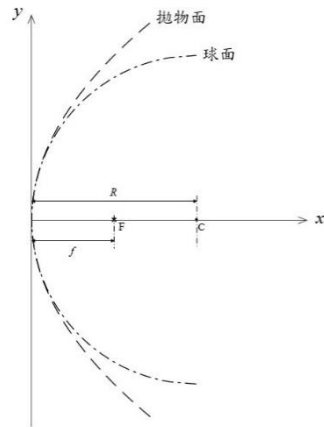


圖 3-1 球面鏡與拋物面鏡

討論在近軸區域之球面鏡反射，如圖 3-2 所示。左右兩圖明顯由相似三角形可得下二式：

$$\frac{h_o}{h_i} = \frac{s_o}{s_i} ; \frac{h_o}{h_i} = \frac{f}{s_i - f} \quad (3.6)$$

將上兩式合併後可得下式：

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} \quad (3.7)$$

上式即為在近軸區域之球面鏡成像公式(Mirror Formula)[40]，其中 s_o 稱為物距， s_i 稱為像距， f 稱為該球面鏡之焦距。故在一固定焦距的球面鏡下，只要給定物距即可知其射線所聚交之位置。

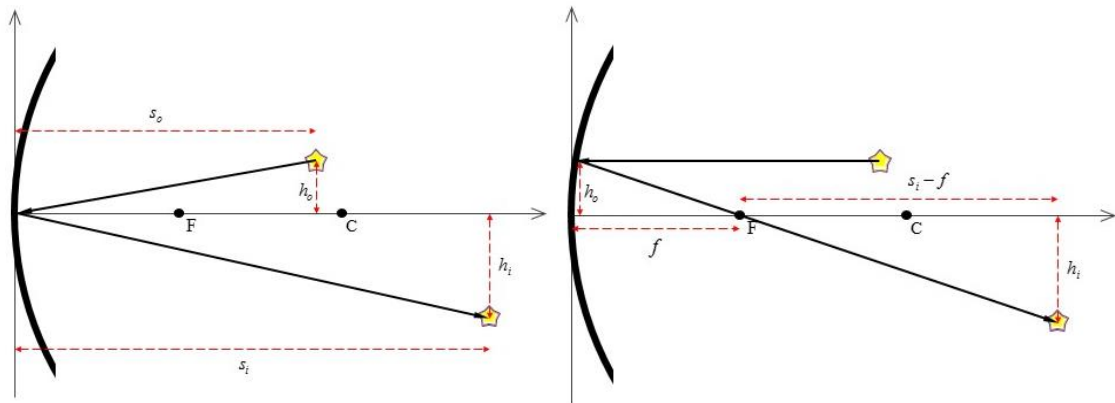


圖 3-2 球面鏡近軸反射示意圖



3.1.2 球面鏡光路實際聚交繪製

由前小節可知射線在「近軸區域」經球面鏡反射聚交之情形。但相對地，由式(3.3)、式(3.4)知式(3.7)是有使用限制的；換言之，在大角度入射會因不滿足式(3.5)趨近於零使球面鏡不會完全聚交在同一位置，而產生球面像差。為真實呈現並全盤掌握球面鏡在任意入射位置之聚交位置座標情形，故吾藉以 MATLAB 來計算並繪出該結果。

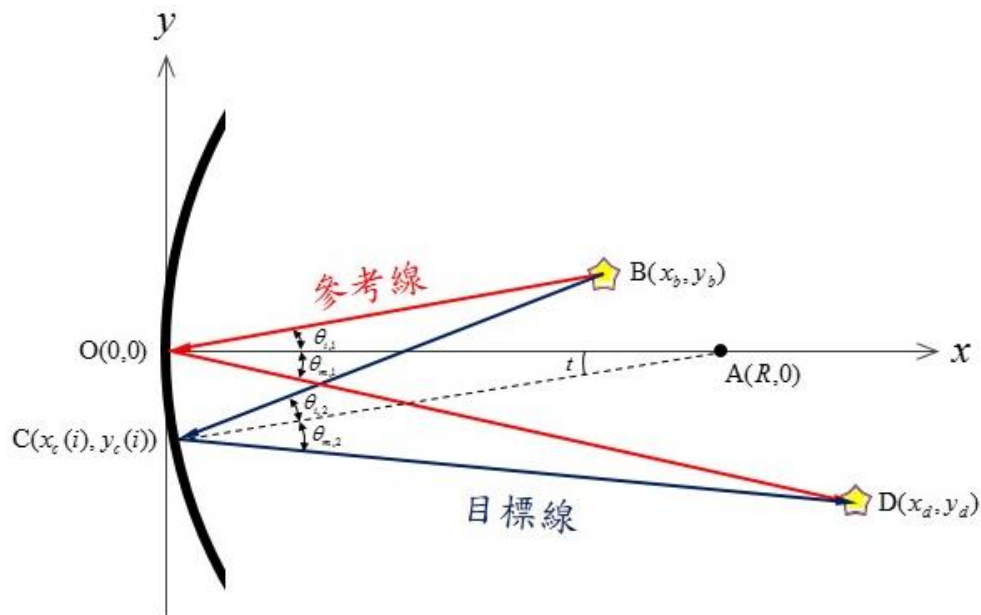


圖 3-3 球面鏡座標化

欲討論球面鏡反射聚交之所有情形，則須將其座標化，如圖 3-3 所示。該圖球面鏡之半徑為 R 且球心為點 $A(R,0)$ ，而點 $B(x_b, y_b)$ 為出光點光源，而點 $D(x_d, y_d)$ 為聚光位置。由圖可知，任意兩條反射之斜直線(且其斜率不相同)則其必有交點 D 的產生。在此，為減少未知數的個數，吾取一條通過原點(球面鏡中點)的入射斜直線作為參考線(紅色線)，由於在原點之法線恰為 x 軸，故該入射參考線之入射角為



$\theta_{i,1}$ ，且令該反射參考線之反射角為 $\theta_{m,1}$ 。而另一道目標線(藍色線)則取球面鏡上之任一(所有)點作為反射點C，而由點B經點C到點D之入射線稱為入射目標線與反射目標線，故該目標線之入射角與反射角分別為 $\theta_{i,2}$ 與 $\theta_{m,2}$ 。

繼續觀察圖 3-3，該圖已知條件有三個，分別為：為球心點A、光源位置點B、入射參考線之入射角 $\theta_{i,1}$ 。而須求得之未知條件為：入射目標線之入射角 $\theta_{i,2}$ 、夾角 t 。

由 $\triangle ABC$ 得知，在已知三點座標情況下可由餘弦定理求某一指定角之角度，如下式：

$$\cos\theta_{i,2} = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}{2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}} \Rightarrow \theta_{i,2} = \cos^{-1}\left(\frac{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}{2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}}\right) \quad (3.8)$$

同理，在 $\triangle AOC$ 中亦可求得 \overline{AO} 與 \overline{AC} 之夾角 t ，如下式：

$$\cos t = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{AO}^2 - \overline{OC}^2}{2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AO}} \Rightarrow t = \cos^{-1}\left(\frac{\overline{AC}^2 + \overline{AO}^2 - \overline{OC}^2}{2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AO}}\right) \quad (3.9)$$

而至此，明顯可得反射參考線(\overline{OD})與目標線(\overline{CD})之方程式如下二式：

$$\overline{OD} : y = -\tan\theta_{m,1} \cdot x \quad (3.10)$$

$$\overline{CD} : y = \pm \tan(\pm t \pm \theta_{m,2}) \cdot (x - x_c) + y_c \quad (3.11)$$

不難看出式(3.11)實代表了四種可能的方程式。而這四種反射目標線方程式的成因全因為入射光源位置點B與球心點A的相對位置不同而造成，而起所對應的情形如圖 3-4 與圖 3-5 所示。會有不同的情況全因光源位置點B與其在點C之法線相對位置的不同而導致，而在此姑且稱圖 3-4(a)為「上外」，亦即反射點C在上半球面鏡且反射線朝外射出；同理，吾將圖 3-4(b)稱為「上內」、圖 3-5(a)稱為「下外」、圖 3-5(b)稱為下內。

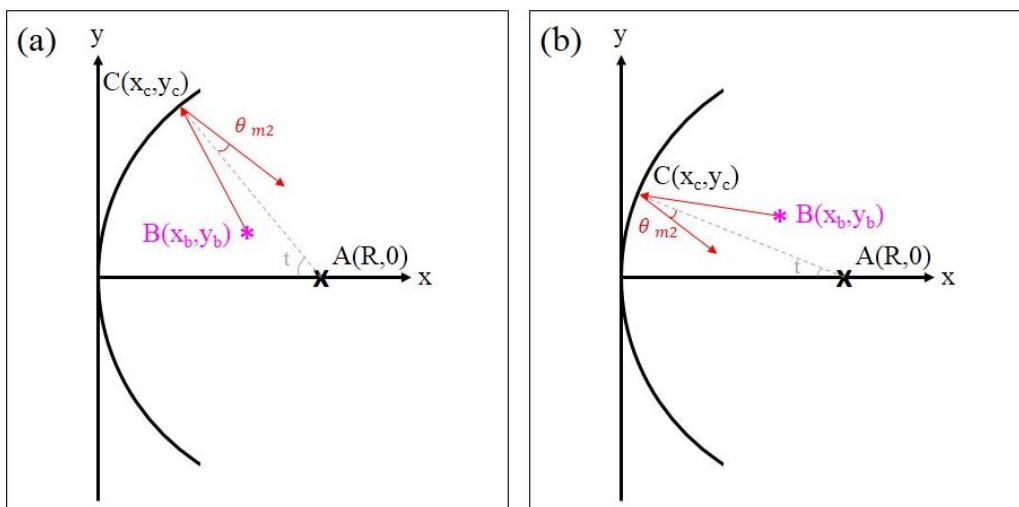


圖 3-4 反射點 C 在上半面

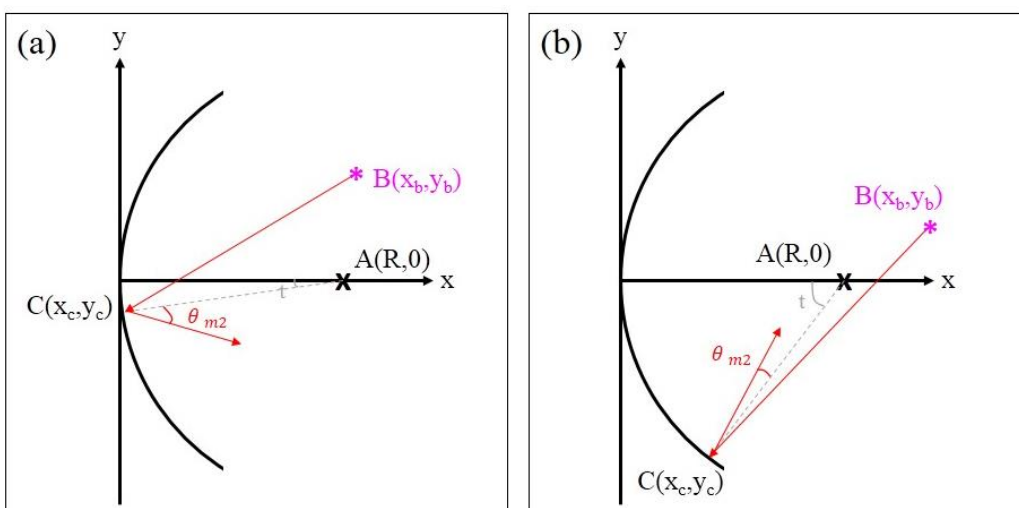


圖 3-5 反射點 C 在下半面

綜合前述，若找出光線經球面鏡反射後聚交位置點 D 之座標 (x_d, y_d) ，即將圖 3-4 與圖 3-5 四種反射線方程式與參考線方程式 (\overline{OD}) 藉由克拉瑪公式 (Cramer's rule) 解聯立後即為所求。

因此，考慮圖 3-4(a)，其反射目標線方程式為 $y = -\tan(t - \theta_{m,2}) \cdot (x - x_c) + y_c$ ，



且所相應的聯立方程式為下式：

$$\begin{cases} y = -\tan \theta_{m,1} \cdot x \\ y = -\tan(t - \theta_{m,2}) \cdot (x - x_c) + y_c \end{cases} \quad (3.12)$$

由克拉瑪公式可得下式：

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \tan \theta_{m,1} & 1 \\ \tan(t - \theta_{m,2}) & 1 \end{vmatrix} \\ \Delta_x &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ x_c \tan(t - \theta_{m,2}) + y_c & 1 \end{vmatrix} \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} \tan \theta_{m,1} & 0 \\ \tan(t - \theta_{m,2}) & x_c \tan(t - \theta_{m,2}) + y_c \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.13)$$

同理，考慮圖 3-4(b)，其反射目標線方程式為 $y = -\tan(t + \theta_{m,2}) \cdot (x - x_c) + y_c$ ，且所相應的聯立方程式為下式：

$$\begin{cases} y = -\tan \theta_{m,1} \cdot x \\ y = -\tan(t + \theta_{m,2}) \cdot (x - x_c) + y_c \end{cases} \quad (3.14)$$

由克拉瑪公式可得下式：

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \tan \theta_{m,1} & 1 \\ \tan(t + \theta_{m,2}) & 1 \end{vmatrix} \\ \Delta_x &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ x_c \tan(t + \theta_{m,2}) + y_c & 1 \end{vmatrix} \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} \tan \theta_{m,1} & 0 \\ \tan(t + \theta_{m,2}) & x_c \tan(t + \theta_{m,2}) + y_c \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.15)$$

再者，考慮圖 3-5(a)，其反射目標線方程式為 $y = -\tan(\theta_{m,2} - t) \cdot (x - x_c) + y_c$ ，且所相應的聯立方程式為下式：

$$\begin{cases} y = -\tan \theta_{m,1} \cdot x \\ y = -\tan(\theta_{m,2} - t) \cdot (x - x_c) + y_c \end{cases} \quad (3.16)$$

由克拉瑪公式可得下式：



$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \tan \theta_{m,1} & 1 \\ \tan(\theta_{m,2} - t) & 1 \end{vmatrix} \\ \Delta_x &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ x_c \tan(\theta_{m,2} - t) + y_c & 1 \end{vmatrix} \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} \tan \theta_{m,1} & 0 \\ \tan(\theta_{m,2} - t) & x_c \tan(\theta_{m,2} - t) + y_c \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

最後，考慮圖 3-5 (b)，其反射目標線方程式為 $y = \tan(\theta_{m,2} + t) \cdot (x - x_c) + y_c$ ，且所相應的聯立方程式為下式：

$$\begin{cases} y = -\tan \theta_{m,1} \cdot x \\ y = \tan(\theta_{m,2} + t) \cdot (x - x_c) + y_c \end{cases} \quad (3.18)$$

由克拉瑪公式可得下式：

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \tan \theta_{m,1} & 1 \\ \tan(\theta_{m,2} + t) & -1 \end{vmatrix} \\ \Delta_x &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ x_c \tan(\theta_{m,2} + t) - y_c & -1 \end{vmatrix} \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} \tan \theta_{m,1} & 0 \\ \tan(\theta_{m,2} + t) & x_c \tan(\theta_{m,2} + t) - y_c \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

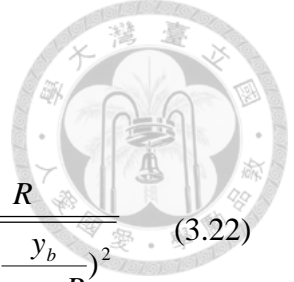
綜合式(3.13)、式(3.15)、式(3.17)、式(3.19)即可完整掌握球面鏡所有反射後聚交之方程式與其所對應的聚交點 $D(x_d, y_d)$ 。

由於根據入射光點的不同位置，該光點每道入射光相對於球面之反射線會有圖 3-4 與圖 3-5 四種可能性(上外、上內、下外、下內)，故需有一指標來判別不同光點在球面的反射情形。吾以出光點光源 $B(x_b, y_b)$ 與球面球心 $A(R, 0)$ 所構成的直線交於球面之 y 座標作為判斷標準(y_{judge})。首先， \overline{AB} 直線方程式如下式：

$$y = \frac{y_b}{x_b - R} \cdot x - \frac{y_b}{x_b - R} \cdot R \quad (3.20)$$

而左半球面之方程式為下式：

$$x = R - \sqrt{R^2 - y^2} \quad (3.21)$$



將式(3.20)與式(3.21)求解即可得判斷標準 y_{judge} 之值，如下式：

$$\begin{cases} y = \frac{y_b}{x_b - R} \cdot x - \frac{y_b}{x_b - R} \cdot R \\ x = R - \sqrt{R^2 - y^2} \end{cases} \Rightarrow y_{\text{judge}} = -\frac{y_b}{x_b - R} \frac{R}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_b}{x_b - R}\right)^2}} \quad (3.22)$$

其中由於出光點光源恆放置在 x 軸上方，故 $y_b > 0$ 恆成立。

有了式(3.22)的判斷指標後，即可將判斷標準 y_{judge} 的值區分為三塊，分別為：

$$y_{\text{judge}} > 0 ; y_{\text{judge}} < 0 ; y_{\text{judge}} = 0 \quad (3.23)$$

接著，如圖 3-6(a)所示，在 $y_{\text{judge}} > 0$ 的情況下，則不同反射點 C 會有以下三種可能：

$$\begin{aligned} y_c > y_{\text{judge}} &\Rightarrow \text{「上外」} \\ 0 < y_c < y_{\text{judge}} &\Rightarrow \text{「上內」} \\ y_c < 0 &\Rightarrow \text{「下外」} \end{aligned} \quad (3.24)$$

而若 $y_{\text{judge}} < 0$ ，如圖 3-6(b)所示，其反射點 C 對應之所有可能性如下：

$$\begin{aligned} y_c > 0 &\Rightarrow \text{「上內」} \\ y_{\text{judge}} < y_c < 0 &\Rightarrow \text{「下外」} \\ y_c < y_{\text{judge}} &\Rightarrow \text{「下內」} \end{aligned} \quad (3.25)$$

最後若 $y_{\text{judge}} = 0$ ，則可又細分為下式：

$$x_b > 0 ; x_b < 0 \quad (3.26)$$

觀察圖 3-7(a)，在 $x_b > 0$ 時，其反射點 C 對應之所有可能性如下：

$$\begin{aligned} y_c > 0 &\Rightarrow \text{「上內」} \\ y_c < 0 &\Rightarrow \text{「下內」} \end{aligned} \quad (3.27)$$

而圖 3-7(b)在 $x_b < 0$ 時，其反射點 C 對應之所有可能性如下：



$y_c > 0 \Rightarrow$ 「上外」

$y_c < 0 \Rightarrow$ 「下外」

(3.28)

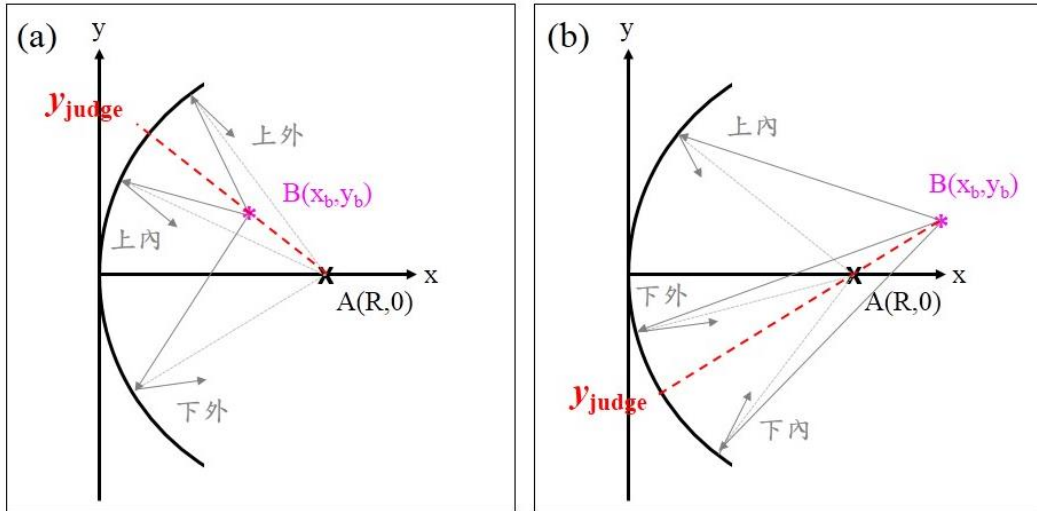


圖 3-6 判斷標準值 y_{judge} (a) > 0 (b) < 0

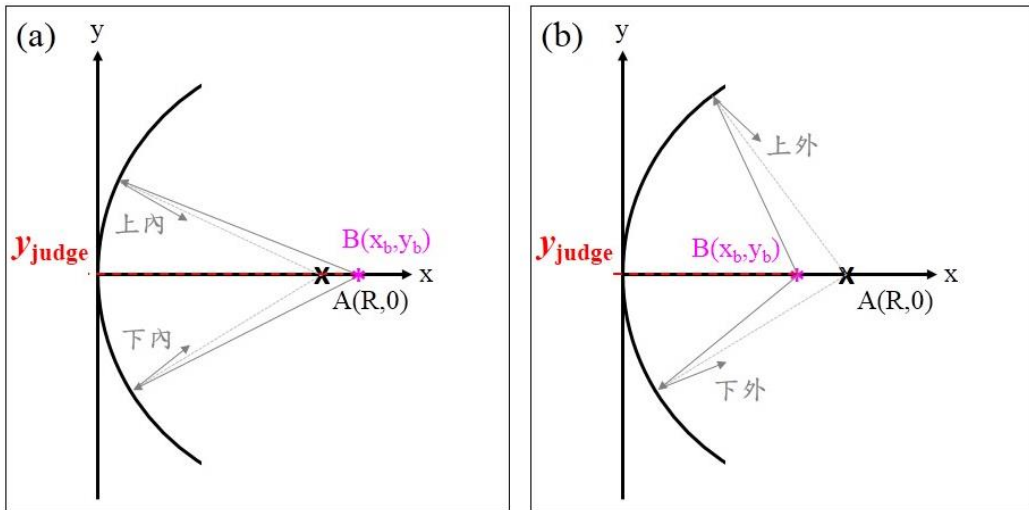


圖 3-7 判斷標準值 $y_{judge} = 0$ (a) $x_b > 0$ (b) $x_b < 0$

綜合上述，重新考慮圖 3-3 球面鏡座標化後之命題。其已知條件僅有：球面鏡

之半徑為 R 、球心位置點 $A(R,0)$ 、出光點光源點 $B(x_b, y_b)$ ；此時，入射參考線之入射角 $\theta_{i,1}$ 即同時為已知條件。而在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle AOC$ 由餘弦定理則可求得入射目標線之入射角 $\theta_{i,2}$ 與 \overline{AO} 與 \overline{AC} 之夾角 t 。而夾角 t 搭配反射目標線之反射角 $\theta_{m,2}$ 即可求得所有反射目標線之直線方程式。其中由於討論一般球面鏡之反射情形，故在反射點 C 上因遵守著「反射定律(Law of Reflection)」，故反射參考線與目標線之反射角必滿足下式：

$$\theta_{m,1} = \theta_{i,1} ; \theta_{m,2} = \theta_{i,2} \quad (3.29)$$

最後，本小節由上述思維架構以 MATLAB 數學圖形編程軟體來模擬球面鏡在二維(Dimensional)空間反射之行為，如圖 3-8 與圖 3-9 所示。圖中原點附近之黑色粗線為球面鏡之局部，且其圓心 $A(R,0)$ 以圖中黑色「+」表示之；而吾另以球面半徑 R 作直徑(即以球面焦距 f 作半徑)與半徑建構出兩虛線小圓與大圓，使空間相對位置相對清楚而能較視覺化的討論之。而紫色星形(pentagram)為出光點光源 $B(x_b, y_b)$ ，所有黃線即為光源之入射線；紅色即為根據式(3.29)反射行為所產生的反射線，最後聚交位置點 $D(x_d, y_d)$ 以藍色「。」表示之。觀察圖 3-8(圖 3-9 更為明顯)，由於反射面為球面而非拋物面，因此聚交位置點 $D(x_d, y_d)$ 基本上不大會座落在相同位置，因此取「中位數」以表示其整體聚交之平均概況，如圖中藍色「X」；相對地，式(3.7)計算所得知的理論聚交位置，如圖中藍色「O」表示之。

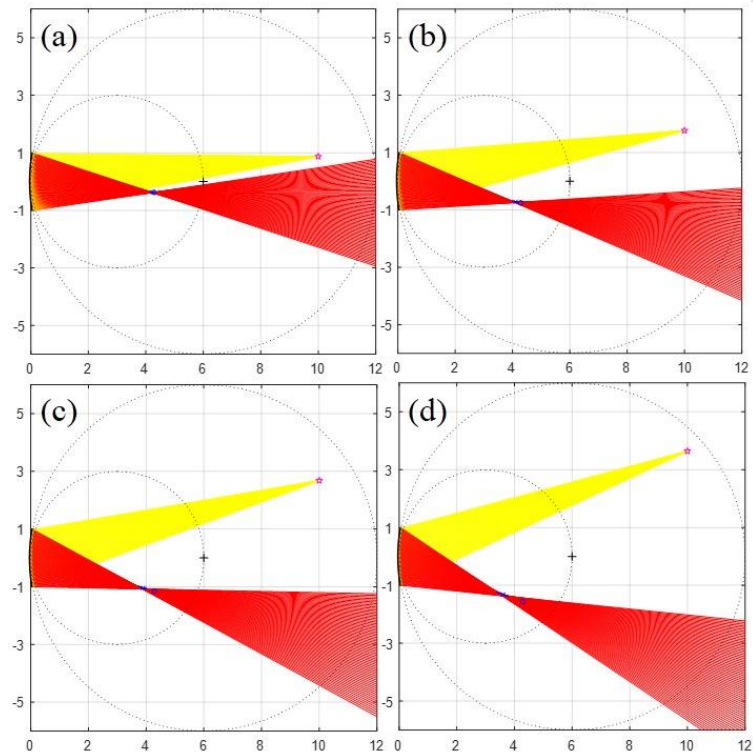


圖 3-8 以小角度入射角測試反射模擬結果

圖 3-8 係以小角度入射角來測試所模擬的結果，圖中(a)至(d)依序分別為 $\theta_{i,1} = 5^\circ$ 、 $\theta_{i,1} = 10^\circ$ 、 $\theta_{i,1} = 15^\circ$ 與 $\theta_{i,1} = 20^\circ$ 入射所呈現之反射結果；再觀察圖 3-9(a)至(c)，圖中所呈現之結果為以 $\theta_{i,1} = 30^\circ$ 、 $\theta_{i,1} = 40^\circ$ 、 $\theta_{i,1} = 50^\circ$ 大角度入射角來測試所模擬的結果。不難發現，圖 3-8 與圖 3-9 中藍色「x」與藍色「o」在角度越小時越幾乎重合，如式(3.3)至式(3.5)所討論之，這可以呼應至式(3.7)僅限用於「近軸光學(Paraxial Rays)」的討論範疇。也因此，本節嘗試以 MATLAB 由較簡易之想法建立起最初步的光追跡程序算是完成，也藉由本例可進一步的建立其他不同特性的光學元件之光線追跡。

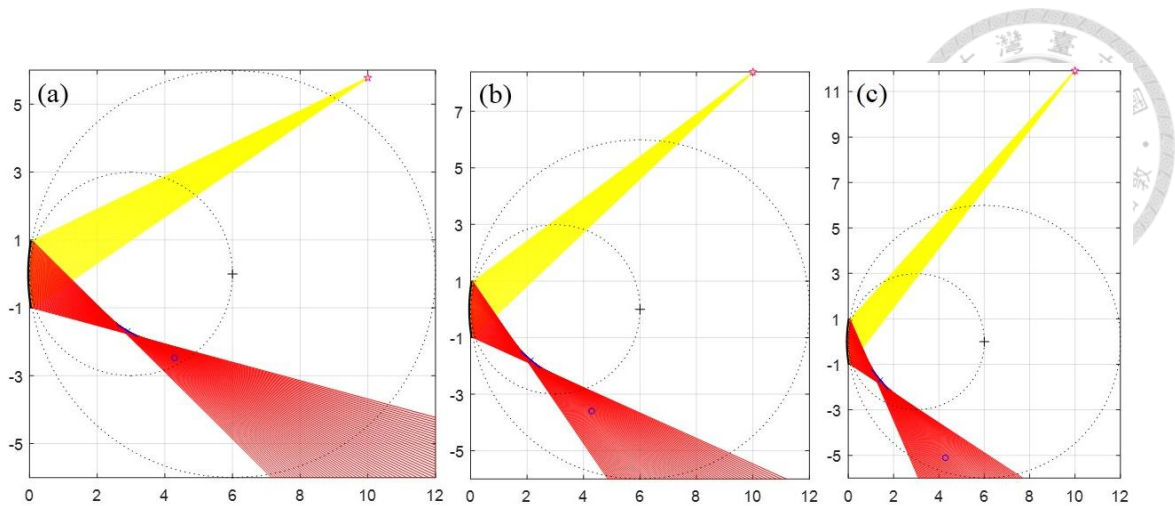


圖 3-9 以大角度入射角測試反射模擬結果

3.2 球面光柵光路模擬程序之建立

3.2.1 球面光柵光路實際聚交繪製

在球面光柵與球面鏡之差別僅在於光入反射點 C 後所遵循的方程式不同而已。對於球面光柵而言，其僅是將光柵進行一個球面彎曲的動作，因此其在反射點 C 應遵守著「光柵方程式」，如式(2.67)，但其反射點是一球面(而非平面)。而吾亦在之前以小節之篇幅討論了球面鏡以 MATLAB 在鏡面反射理論所設計之光線數學化與程序的邏輯思維。故對於球面光柵而言，僅是將反射光在反射點 C 上所依循的「反射定律(式(3.29))」以「光柵方程式」取代之，即可完成球面光柵光路實際聚交圖之位置。

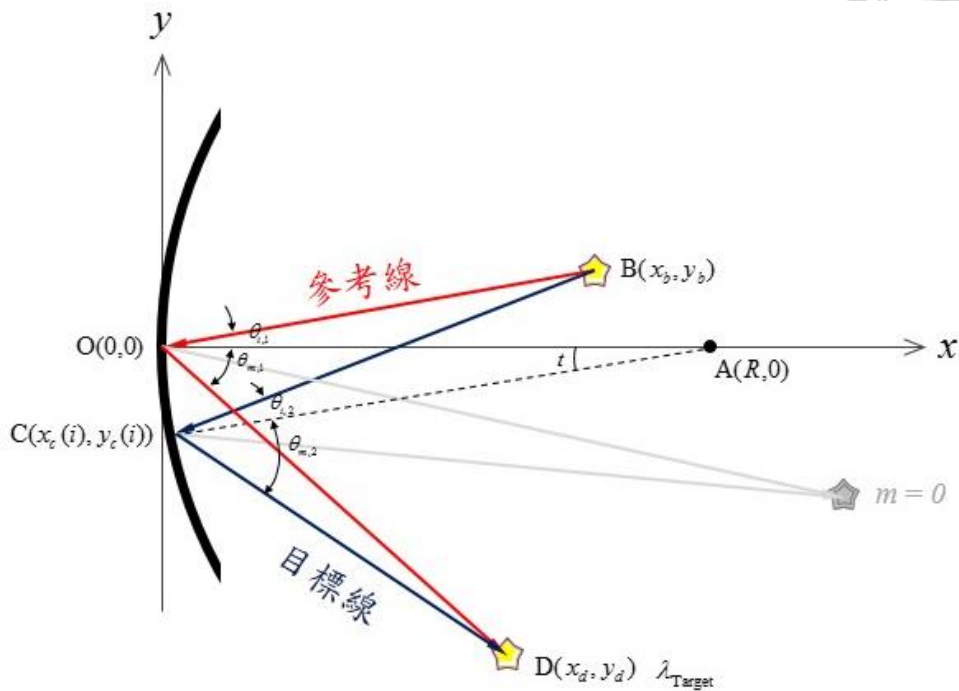


圖 3-10 球面光柵座標化

考慮圖 3-10，球面光柵之半徑為 R 且球心為點 $A(R,0)$ ，而點 $B(x_b, y_b)$ 為出光點光源，而點 $D(x_d, y_d)$ 為繞射後聚光位置。由圖可知，任意兩條繞射之斜直線(且其斜率不相同)則其必有交點 D 的產生。與球面鏡相同，為減少未知數的個數，吾取一條通過原點(球面鏡中點)的入射斜直線作為參考線(紅色線)，由於在原點之法線恰為 x 軸，故該入射參考線之入射角為 $\theta_{i,1}$ ，且令該反射參考線之反射角為 $\theta_{m,1}$ 。而另一道目標線(藍色線)則取球面光柵上之任一(所有)點作為繞射點 C ，而由點 B 經點 C 到點 D 之入射線稱為入射目標線與繞射目標線，故該目標線之入射角與繞射角分別為 $\theta_{i,2}$ 與 $\theta_{m,2}$ 。

觀察圖 3-10，與球面鏡討論相同，入射目標線之入射角 $\theta_{i,2}$ 與夾角 t 亦可由球心點 A 、光源位置點 B 、原點點 O 與繞射點點 C 之座標求得，如式(3.8)與(3.9)所示。而繞射參考線(\overline{OD})與目標線(\overline{CD})之方程式亦可由繞射角 $\theta_{m,1}$ 、 $\theta_{m,2}$ 與夾角 t 所得，



如式(3.10)與式(3.11)所示；且點B與點A相對位置因法線的不同所造成不同情形之方程式如式(3.12)至式(3.18)之討論。

討論圖 3-10，考慮參考線之繞射情形，若入射參考線以 $\theta_{i,1}$ 之入射角進入球面光柵之中點(原點O)，且經點O後以繞射角 $\theta_{m,1}$ 射出，則根據光柵方程式考慮在點O之繞射情形如下：

$$a \cdot (\sin \theta_{m,1} - \sin \theta_{i,1}) = m\lambda, m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (3.30)$$

再者，考慮光源進球面光柵上其他繞射點C之目標繞射線，其入射角可由式(3.8)求得 $\theta_{i,2}$ ，且其以繞射角 $\theta_{m,2}$ 射出，則根據光柵方程式考慮在點C之繞射情形如下：

$$a \cdot (\sin \theta_{m,2} - \sin \theta_{i,2}) = m\lambda, m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (3.31)$$

由式(3.30)與式(3.31)知，在相同的階數 m 中，不論在原點O或是其他繞射點C，只要在適當的入射角與繞射角下，必可繞射出相同的波長；換言之，只要找到所有目標線繞射後之波長係與參考線所繞射之波長相同，則必可找到目標線與參考線在相同繞射波長中之聚交情形。因此，可得下式：

$$\begin{cases} a \cdot (\sin \theta_{m,1} - \sin \theta_{i,1}) = m\lambda_{\text{Target}}, m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\ a \cdot (\sin \theta_{m,2} - \sin \theta_{i,2}) = m\lambda_{\text{Target}}, m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{cases} \quad (3.32)$$

將上式解聯立可得下式：

$$\sin \theta_{m,1} - \sin \theta_{i,1} = \sin \theta_{m,2} - \sin \theta_{i,2} \quad (3.33)$$

最後將上式整理後可得下式：

$$\theta_{m,2} = \sin^{-1}(\sin \theta_{m,1} - \sin \theta_{i,1} + \sin \theta_{i,2}) \quad (3.34)$$

由式(3.34)知，對於球面光柵在一固定點出光點光源的命題下，其入射至球面光柵中點O的入射參考線之入射角 $\theta_{i,1}$ 與入射至球面光柵其他繞射點C的入射目標線之入射角 $\theta_{i,2}$ 皆為定值，此時若欲尋找繞射後之某一波長 λ_{Target} ，則可藉由調變參考線



之入射角 $\theta_{m,1}$ ，進而取得目標線之對應相同波長 λ_{Target} 之繞射角 $\theta_{m,2}$ 。其中，參考線之繞射角 $\theta_{m,1}$ 必遵循式(3.30)，進而可得下式：

$$\theta_{m,1}(\lambda_{\text{Target}}) = \sin^{-1}(\sin \theta_{i,1} + \frac{m\lambda_{\text{Target}}}{a}), m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (3.35)$$

由上式明顯知參考線之入射角 $\theta_{m,1}$ 係為目標波長 λ_{Target} 的函數。故式(3.34)與式(3.35)

上式充分地建立了球面光柵繞射目標線之繞射角 $\theta_{m,2}$ 所應遵守的方程式。

最後，本小節同樣由上述思維架構以 MATLAB 數學圖形編程軟體來模擬球面光柵在二維(Dimensional)空間繞射之行為，如圖 3-11 至圖 3-14 所示。四圖中，皆取 6.4 cm 作為焦距 f 、取 6.6 cm 作為光源物距 x_b ，取 6 μm 為光柵週期，並皆在階數為「 $m = -1$ 」情況下測試繞射波長範圍在 3.5 $\mu\text{m} \sim 4.5 \mu\text{m}$ ($\Delta\lambda = 0.05 \mu\text{m}$) 之不同入射角(分別為： $\theta_{i,1} = 50^\circ$ 、 $\theta_{i,1} = 55^\circ$ 、 $\theta_{i,1} = 60^\circ$ 、 $\theta_{i,1} = 65^\circ$)所對應的聚交情形作為範例結果。圖中呈現了在「不受限於任何條件」下，如預期地將球面光柵完整的聚交情形完整的計算出來。這樣的模擬計算將不僅亦以 MATLAB 由較簡易之想法建立出球面光柵的光追跡程序，本小節也因此為本文主題種下了良好的理論模擬基礎，更成為後續光路微型化與參數優化之墊腳石。

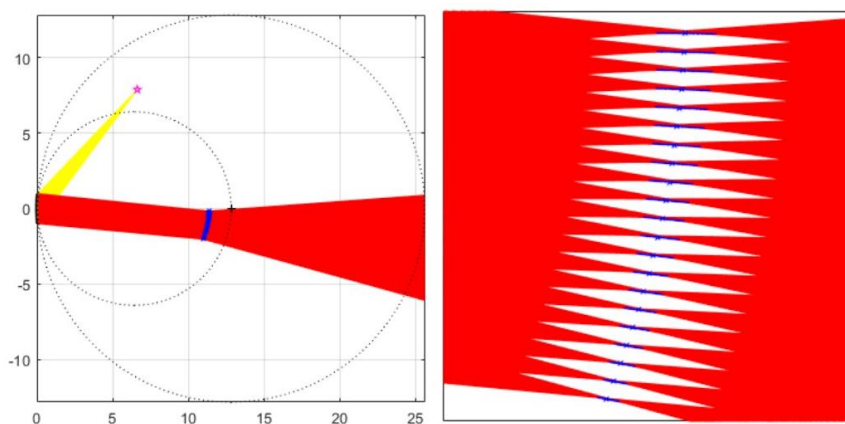


圖 3-11 以角度 $\theta_{i,1} = 50^\circ$ 入射角測試繞射模擬結果

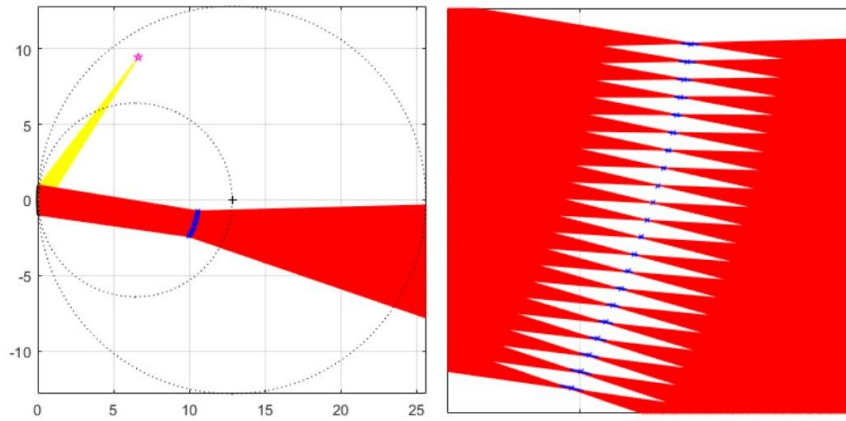


圖 3-12 以角度 $\theta_{i,1} = 55^\circ$ 入射角測試繞射模擬結果

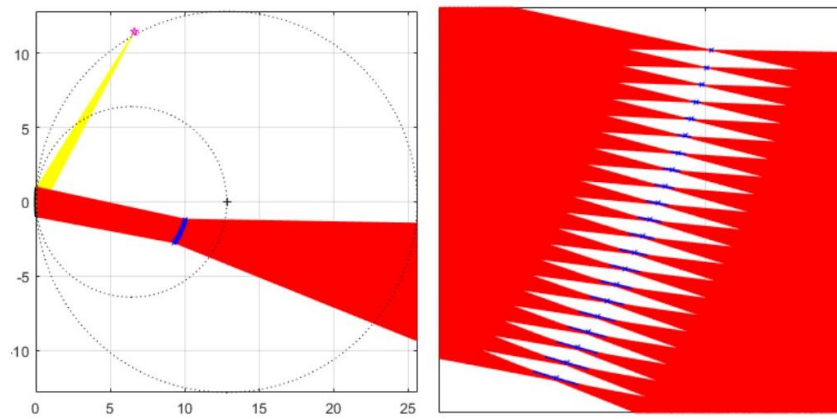


圖 3-13 以角度 $\theta_{i,1} = 60^\circ$ 入射角測試繞射模擬結果

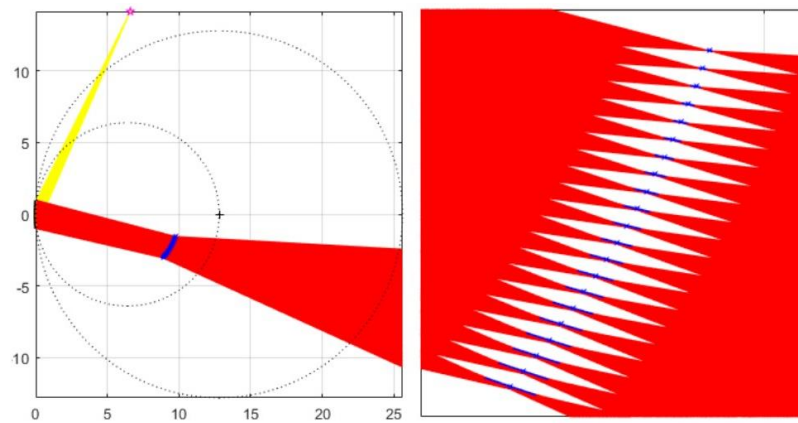


圖 3-14 以角度 $\theta_{i,1} = 65^\circ$ 入射角測試繞射模擬結果



3.2.2 偵測元件其位置之選擇

由前小節可知，本研究已可用較簡易之方法得到球面光柵所有光路聚交最真實(沒有近似假設)的情形，並以數值記錄且以圖形繪製視覺化呈現之。對光譜儀而言，決定目標波長 λ_{Target} 範圍係必然地；然而，在此須先明確定義角度正負符號以免造成公式的誤用。由前小節之基礎，係以式(3.30)作為整體數學計算之基礎，而對於其角度之正負號定義如圖 3-15 所呈現之。對於入射角 $\theta_{i,1}$ 而言，其係以 x 軸為起點逆時針方向為正；相反地，對於球面光柵之繞射角 $\theta_{m,1}$ 則以 x 軸為起點順時針方向為正。

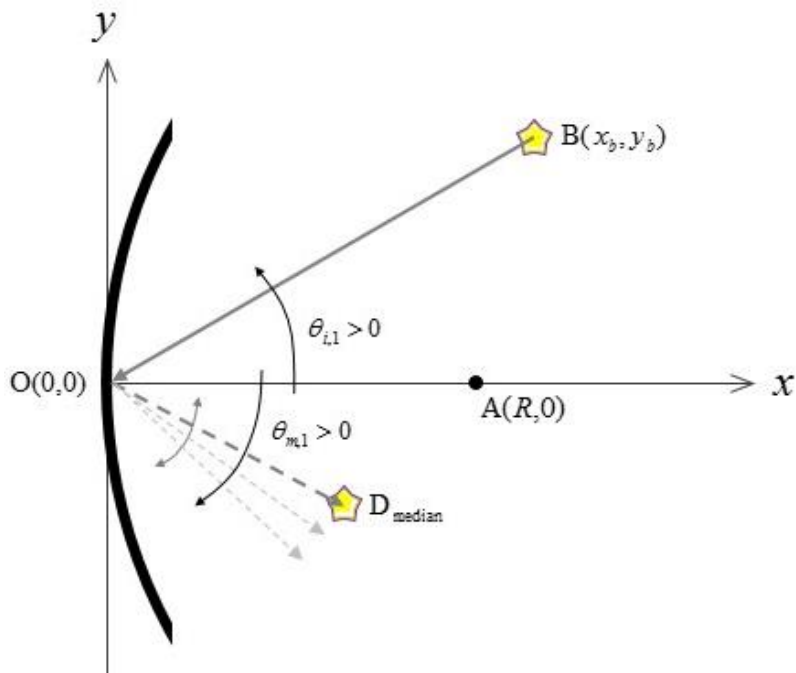


圖 3-15 式(3.30)光柵方程之角度定義示意圖

由圖 3-15 對於角度有明確定義說明後，吾將式(3.35)以目標波長 λ_{Target} 為自變



數，繞射角 $\theta_{m,1}$ 為應變數作圖，如圖 3-16 至圖 3-22 所示。而其所考慮之變因為為入射角之不同，分別為 $\theta_{i,1} = 50^\circ$ 、 $\theta_{i,1} = 55^\circ$ 、 $\theta_{i,1} = 60^\circ$ 、 $\theta_{i,1} = 65^\circ$ 、 $\theta_{i,1} = 5^\circ$ 、 $\theta_{i,1} = 10^\circ$ 、 $\theta_{i,1} = 15^\circ$ 。明顯地，若僅考慮繞射聚交位置 D 在第四象限 ($x_d > 0, y_d < 0$)，則配合繞射角方向之定義，僅須考慮圖 3-16 至圖 3-22 中之右圖即可，而藉由本一系列由光柵方程所建立之繞射角與繞射波長之關係圖，即可尋找適當的繞射角度或角度範圍。

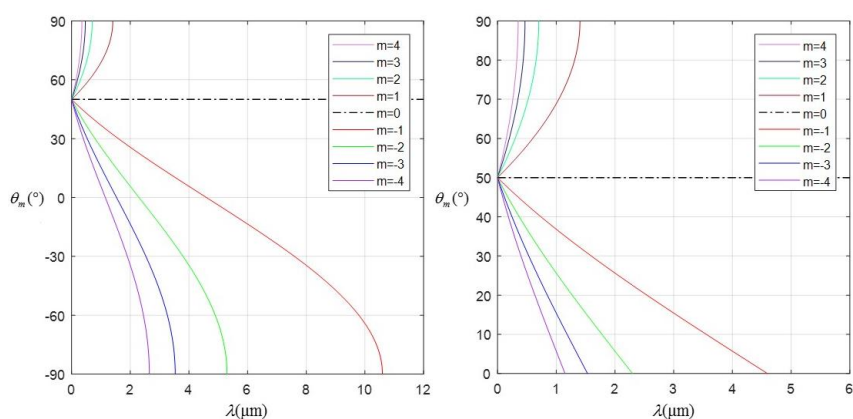


圖 3-16 入射角 $\theta_{i,1} = 50^\circ$ 之光柵方程式

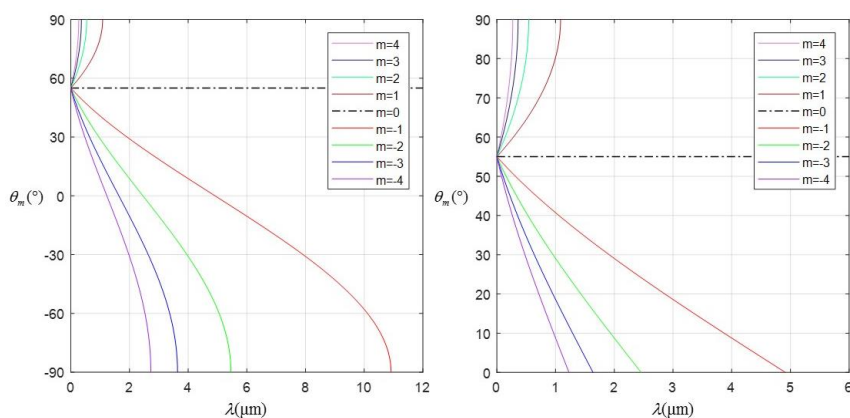


圖 3-17 入射角 $\theta_{i,1} = 55^\circ$ 之光柵方程式

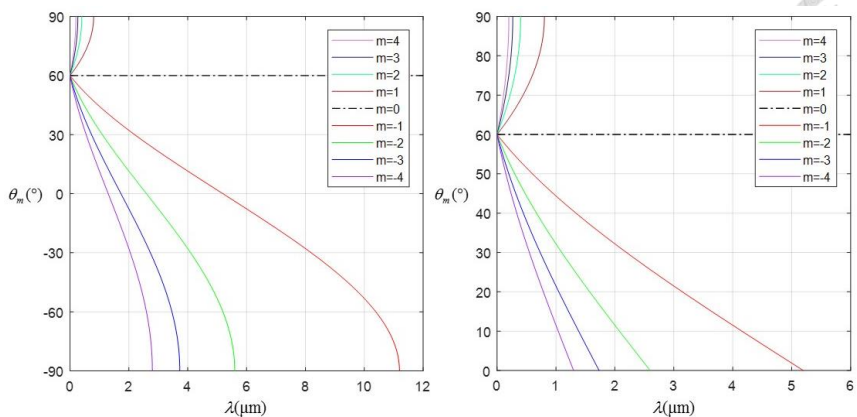
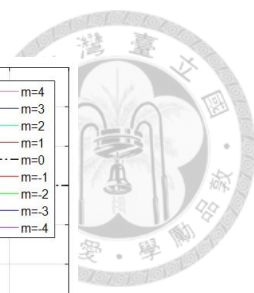


圖 3-18 入射角 $\theta_{i,1} = 60^\circ$ 之光柵方程式

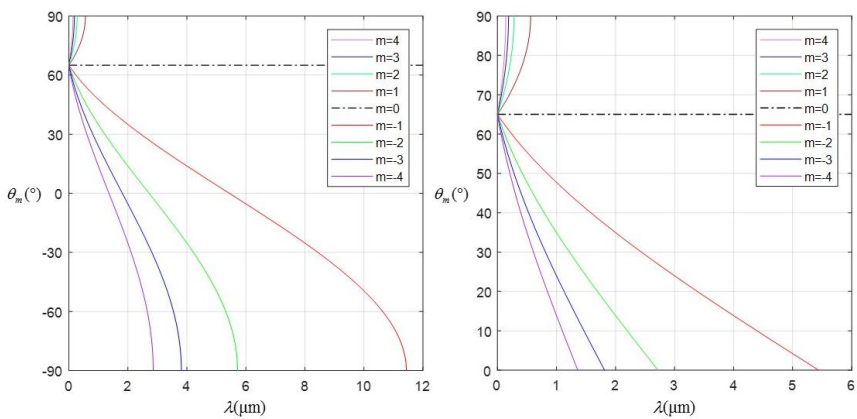


圖 3-19 入射角 $\theta_{i,1} = 65^\circ$ 之光柵方程式

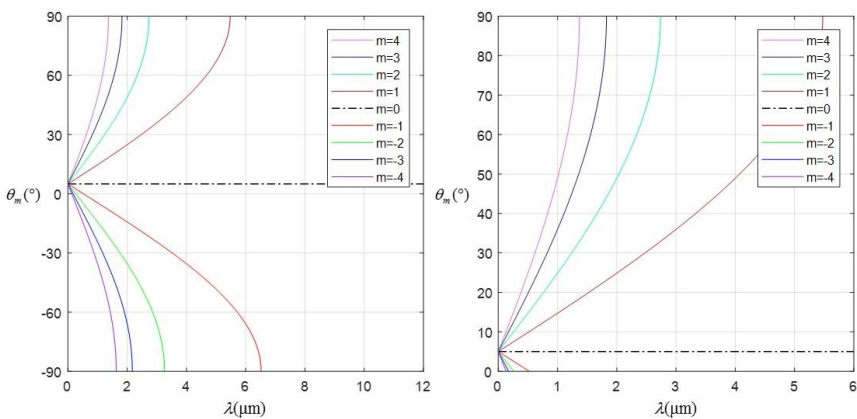


圖 3-20 入射角 $\theta_{i,1} = 5^\circ$ 之光柵方程式

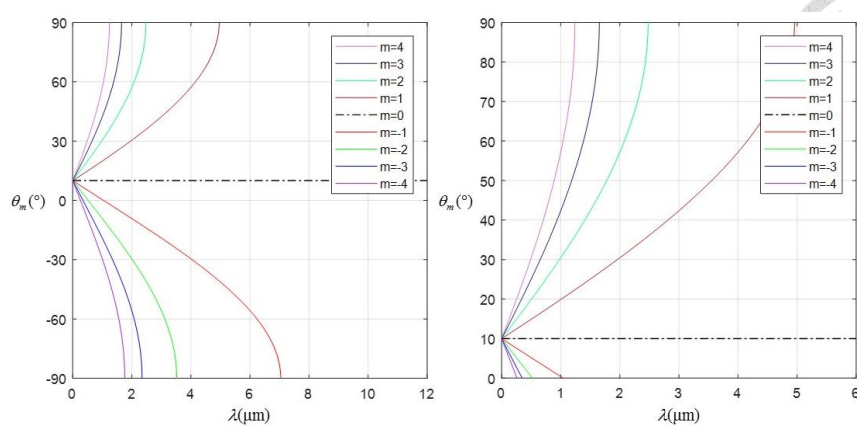
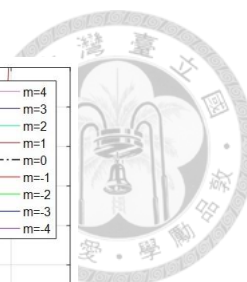


圖 3-21 入射角 $\theta_{i,1} = 10^\circ$ 之光柵方程式

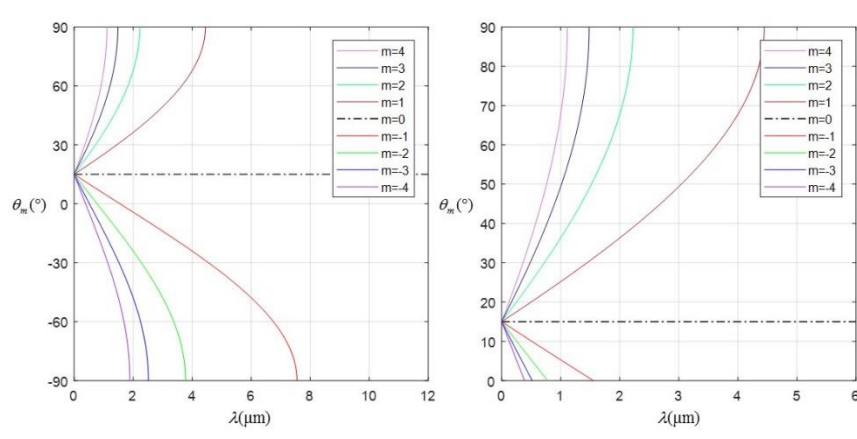


圖 3-22 入射角 $\theta_{i,1} = 15^\circ$ 之光柵方程式

再者，由於大多偵測元件(或感光耦合元件(Charge-coupled Device, CCD))為一直線(平面)，但由前小節模擬結果(如圖 3-11 至圖 3-14)知球面光柵聚交為一曲線(面)，因此選擇一直線(面)來放置偵測元件是必須的課題。而本研究所採用的數學方法為「普通最小平方(ordinary least squares)」，以「最小化誤差的平方和」來擬合兩變量之間的最相關(殘差平方總和的最小化)的直線，而藉此尋求偵測元件最佳偵測直線路徑。在此承前小節之討論，藍色「 \cdot 」表示最後聚交位置點 $D(x_d, y_d)$ ；藍色「 \times 」係在繞射角下取「中位數」以表示其整體聚交之平均概況。故吾將各繞射角之聚交中位點之座標以最小平方法做出最相關直線，如圖 3-23「綠線」所示，其

中圖 3-23(a)至(d)依序分別為圖 3-11 至圖 3-14 之偵測元件位置結果呈現。當然地，若所取得之繞射聚交各數變多時，由於該聚交為一曲面，故擬合之直線必然會相當不匹配各聚交平均值，因此使用此方法須注意所選取之目標波長 λ_{Target} 的範圍不宜過大；又或說當擬合直線的相關係數(R^2 , correlation coefficient)小於 0.9 時，就要重新評估慎選目標波長之範圍。

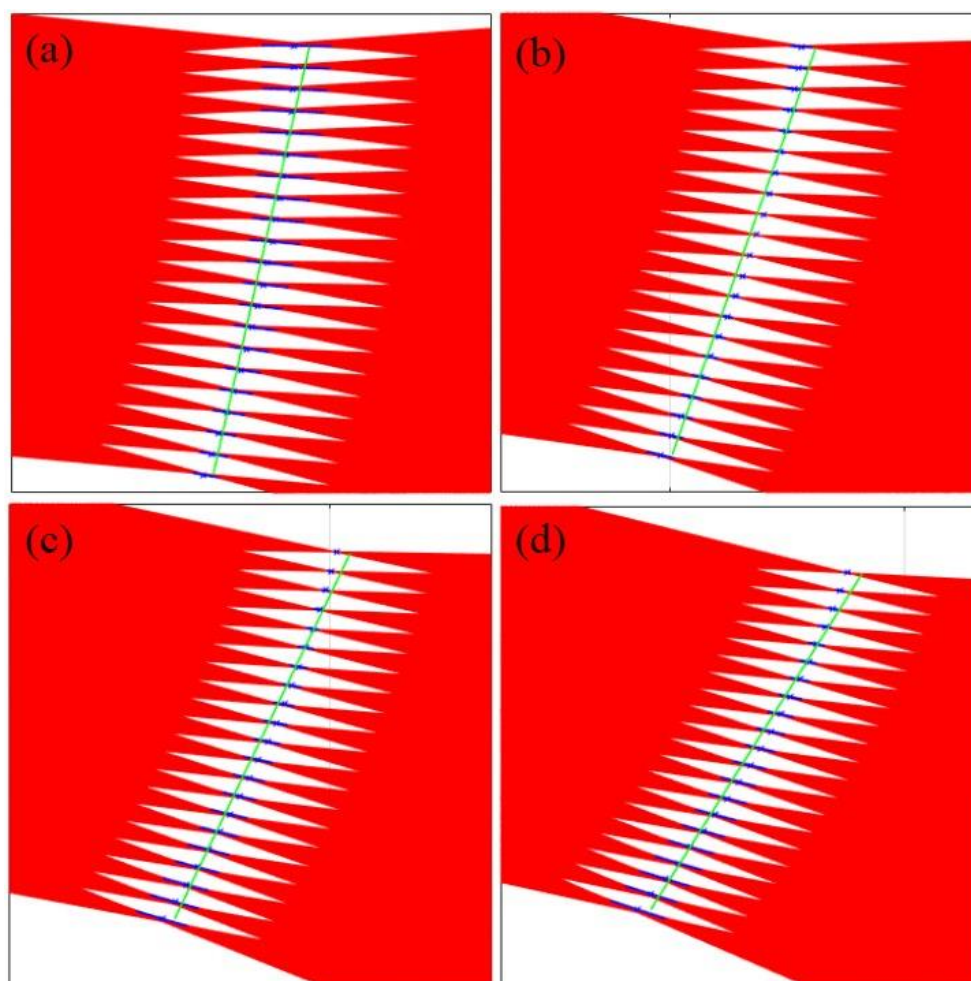


圖 3-23 偵測元件之位置結果呈現

當確定偵測元件位置後，即須找出偵測元件位置與目標波長對應關係，方可知偵測元件在該直線上不同位置其所量測的目標波長為何。如圖 3-24，點 A 與點 B



亦為球面光柵球心與出光點光源，而圖中紅線即為線性擬合之直線，且其方程式如下：

$$y = ax + b \quad (3.36)$$

其中係數 a 、 b 為該直線擬合後之已知數，且對於該直線其「傾斜角度 α 」和「與 x 軸截距 l 」亦可由已知參數 a 、 b 搭配式(3.36)導出，如下式：

$$\alpha = \tan^{-1} a ; l = -\frac{b}{a} \quad (3.37)$$

而圖中點 D_{median} 即為在目標波長 λ_{Target} 所對應的聚交中位點，且該點以 x 軸之截點 G 為起始點沿擬合直線之距離為 x_{DTR} (detector)。再次觀察圖 3-24，由 $\triangle ODG$ 得知，在已知兩角 ($\theta_{m,1}$ 、 α) 與某一邊長度 (l) 之情況下可由正弦定理求某一指定邊長度 (x_{DTR})，如下式：

$$\frac{x_{\text{DTR}}}{\sin \theta_{m,1}} = \frac{l}{\sin(180^\circ - (\theta_{m,1} + \alpha))} \quad (3.38)$$

由於正弦函數在第一、二象限皆為正數，故可將上式整理成下式：

$$\frac{x_{\text{DTR}}}{\sin \theta_{m,1}} = \frac{l}{\sin(\theta_{m,1} + \alpha)} \quad (3.39)$$

再以和角公式將上式改寫如下：

$$x_{\text{DTR}} = \frac{l \cdot \sin \theta_{m,1}}{\sin \theta_{m,1} \cos \alpha + \sin \alpha \cos \theta_{m,1}} \quad (3.40)$$

將上式分式同除以 $\cos \theta_{m,1}$ 得下式：

$$x_{\text{DTR}} = \frac{l \cdot \tan \theta_{m,1}}{\tan \theta_{m,1} \cos \alpha + \sin \alpha} \quad (3.41)$$

最後將上式移項整理後如下式：



$$\theta_{m,1} = \tan^{-1}\left(\frac{\sin \alpha}{l - x \cos \alpha} \cdot x_{\text{DTR}}\right) \quad (3.42)$$

上式即為在完成線性擬合後繞射角 $\theta_{m,1}$ 與偵測元件位置 x_{DTR} 關係式。而若要再將式

(3.42) 以更直觀的物理量展示，可將其代入式(3.30)得下式：

$$\lambda_{\text{Target}}(x_{\text{DTR}}) = \frac{a}{m} \cdot \sin\left[\tan^{-1}\left(\frac{\sin \alpha}{l - x \cos \alpha} \cdot x_{\text{DTR}}\right)\right] - \sin \theta_{i,1} \quad (3.43)$$

再次附註地說，上式 a 為光柵週期。而式(3.43)導出了偵測元件位置與其相對應之繞射目標波長的關係。

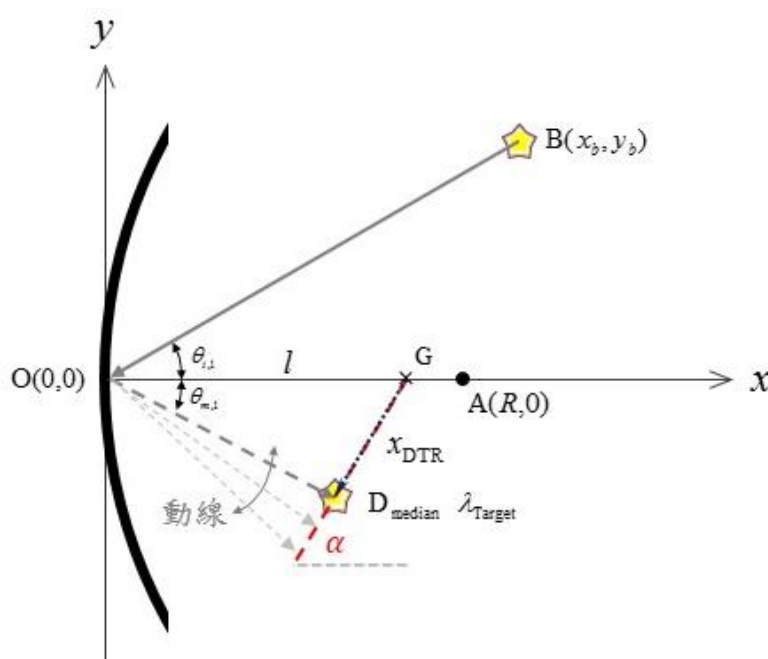


圖 3-24 偵測元件位置與目標波長計算示意圖

3.2.3 羅蘭圓特例之測試

在前章理論基礎與文獻回顧中曾提即過羅蘭圓之源由與理論，且由該小節討論過其結論(式(2.84)、式(2.86))有兩大限制所在，一為繞射點 C 僅在「近軸近似」下作討論，其二則為「羅蘭圓」本身即為對出光點光源點 B 造成空間上的限制，使其無法依使用者所需任意調整整體光路，故才在本章以大量的篇幅建構球面光柵



之真實光路作程序上的設計。然而，本節所提出光路程序之設計應亦須符合羅蘭圓此特例之所有聚交情形；也因此，本小節將本節設計結果之出光點光源B設計座落在羅蘭圓上，故點B之座標可以下式表示：

$$x_b = f + f \cdot \cos(2\theta_{i,1}) ; y_b = f \cdot \sin(2\theta_{i,1}) \quad (3.44)$$

此時，自變數即為參考線之入射角 $\theta_{i,1}$ ，即會有其對應之出光點光源座標 (x_b, y_b) ，如圖 3-25 至圖 3-31 所示(其中虛線大圓半徑為 R ；虛線小圓則為此曲率下之對應羅蘭圓)。再者，根據圖 3-16 至圖 3-19 光柵方程式之結果可知，圖 3-25 至圖 3-28 係考慮在 $m = -1$ 階時討論入射角 $\theta_{i,1} = 50^\circ$ 、 $\theta_{i,1} = 55^\circ$ 、 $\theta_{i,1} = 60^\circ$ 與 $\theta_{i,1} = 65^\circ$ 繞射波長範圍在 $3.5 \mu\text{m} \sim 4.5 \mu\text{m}$ ($\Delta\lambda = 0.05 \mu\text{m}$) 之羅蘭圓測試結果；而圖 3-29 至圖 3-31 則係由圖 3-20 至圖 3-22 知係討論在 $m = 1$ 階時入射角 $\theta_{i,1} = 5^\circ$ 、 $\theta_{i,1} = 10^\circ$ 、 $\theta_{i,1} = 15^\circ$ 繞射波長範圍在 $3.5 \mu\text{m} \sim 4.5 \mu\text{m}$ ($\Delta\lambda = 0.05 \mu\text{m}$) 之羅蘭圓測試結果。觀察此系列代表範例，明顯可看出不論何種角度入射亦或不同階數其對應所有繞射之聚交位置皆完美座落於羅蘭圓上，由此測試可以充分說明本節之理論演算模擬架構在亦滿足特定條件之結果。

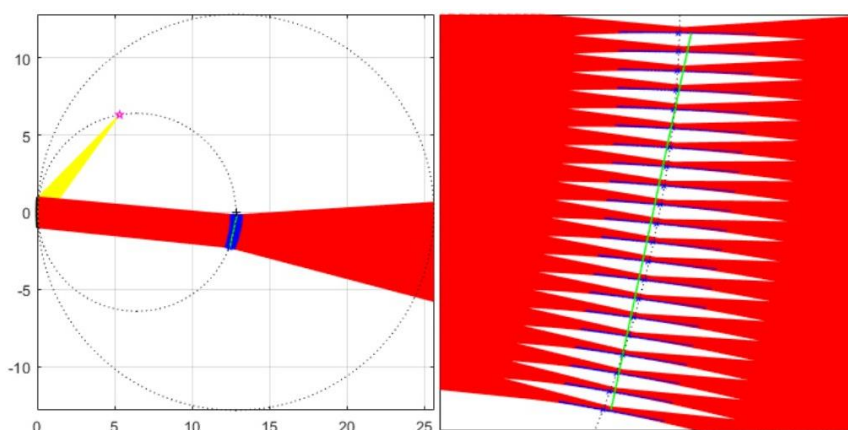


圖 3-25 入射角 $\theta_{i,1} = 50^\circ$ 之羅蘭圓測試結果

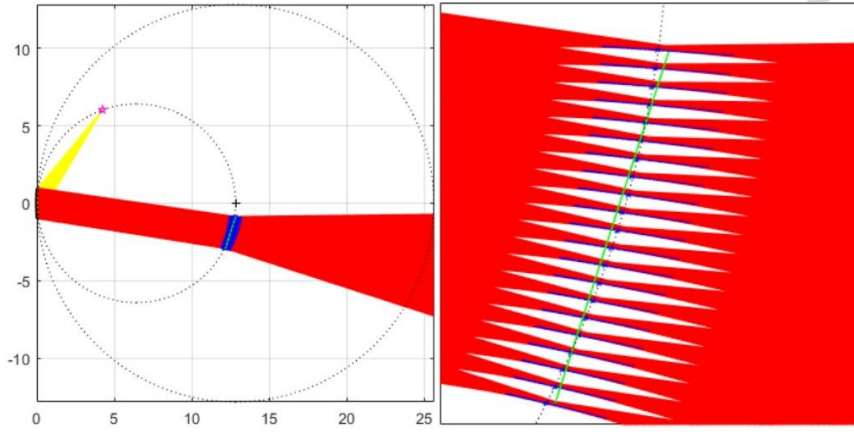


圖 3-26 入射角 $\theta_{i,1} = 55^\circ$ 之羅蘭圓測試結果

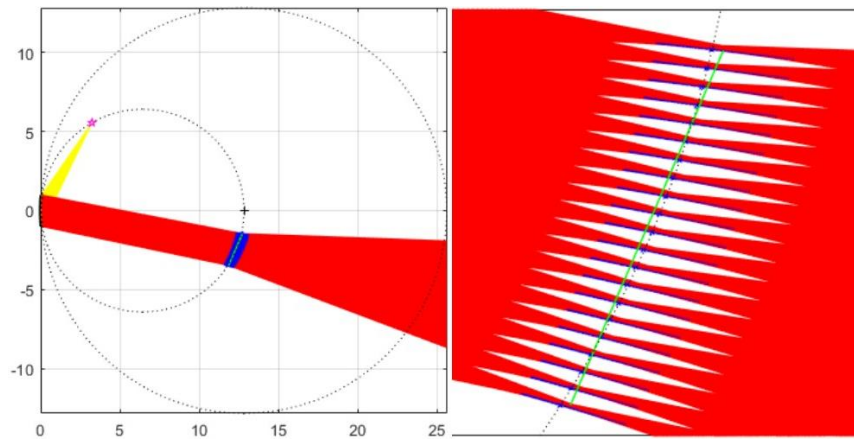


圖 3-27 入射角 $\theta_{i,1} = 60^\circ$ 之羅蘭圓測試結果

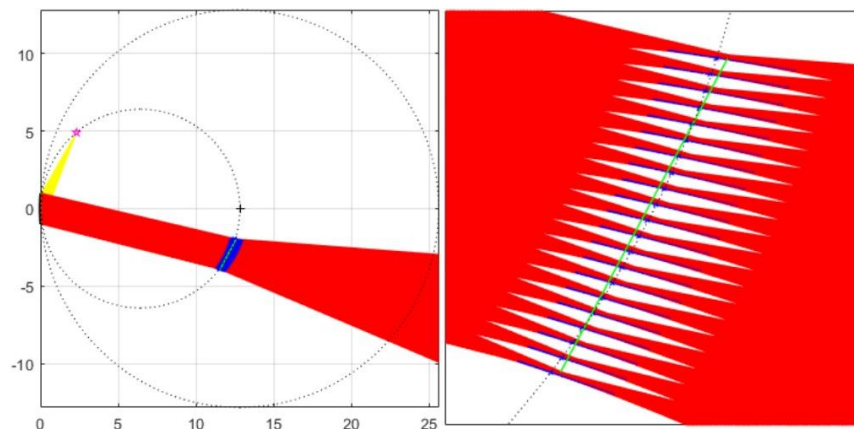


圖 3-28 入射角 $\theta_{i,1} = 65^\circ$ 之羅蘭圓測試結果

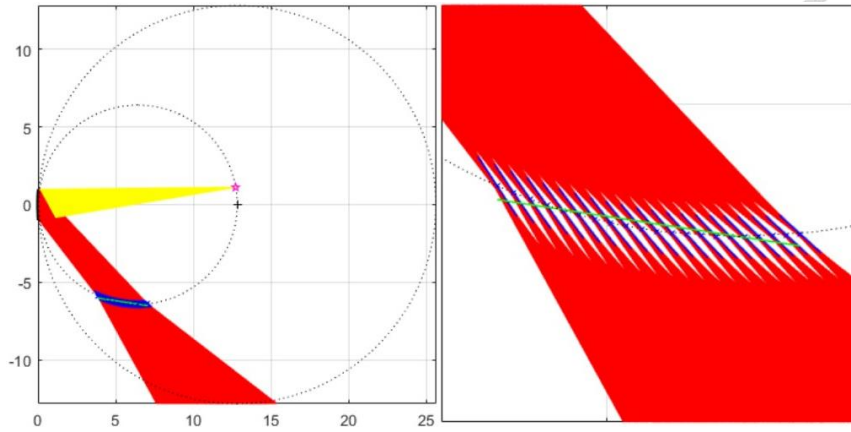


圖 3-29 入射角 $\theta_{i,1} = 5^\circ$ 之羅蘭圓測試結果

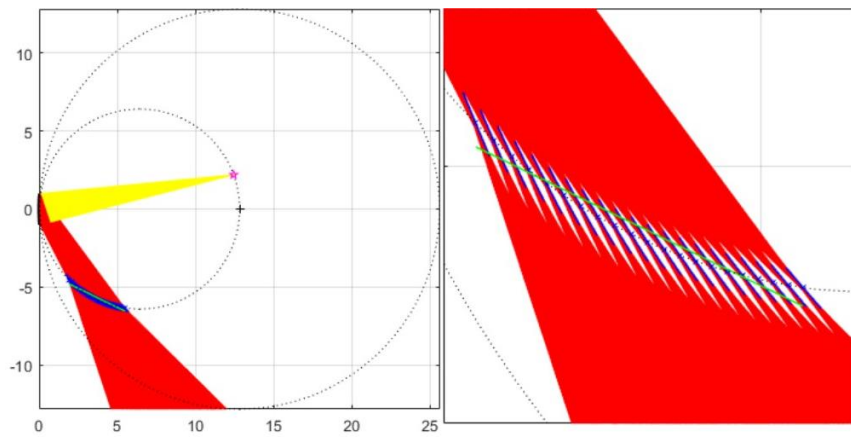


圖 3-30 入射角 $\theta_{i,1} = 10^\circ$ 之羅蘭圓測試結果

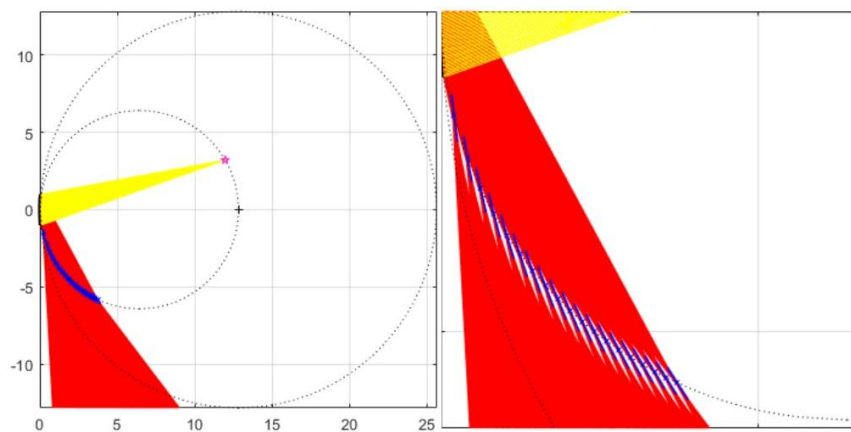


圖 3-31 入射角 $\theta_{i,1} = 15^\circ$ 之羅蘭圓測試結果

再者，本小節亦囉嗦地將波長範圍拉大至 $0.4 \mu\text{m} \sim 3.5 \mu\text{m}$ ($\Delta\lambda = 0.05 \mu\text{m}$) 來觀察其結果，如圖 3-32 至圖 3-38 所示。而吾以綠色、藍色與紅色三種顏色將繞射波長範圍大致分成：可見光($0.4 \mu\text{m} \sim 0.7 \mu\text{m}$)、近紅外光($0.7 \mu\text{m} \sim 3.5 \mu\text{m}$)與中紅外光($3.5 \mu\text{m} \sim 4.5 \mu\text{m}$)三個區間，如圖所示。一樣地，吾僅稍為列舉幾種不同入射角度之結果呈現之(圖 3-32 至圖 3-35 係呈現 $m = -1$ 階，入射角 $\theta_{i,1} = 50^\circ$ 、 $\theta_{i,1} = 55^\circ$ 、 $\theta_{i,1} = 60^\circ$ 與 $\theta_{i,1} = 65^\circ$ 之命題；圖 3-36 至圖 3-38 係呈現 $m = 1$ 階，入射角 $\theta_{i,1} = 5^\circ$ 、 $\theta_{i,1} = 10^\circ$ 、 $\theta_{i,1} = 15^\circ$ 之命題)。在本段測試下，不難發現本系列圖片之呈現其共通點皆為繞射波長可見光範圍下其縱向像差(Longitude Spherical Aberration)明顯較小，表示聚交效果極佳；反之，若越往中紅外波段觀察，其縱向像差會隨波長增加而增大。故由圖 3-32 至圖 3-38 討論得知一結論：「球面光柵在羅蘭圓條件下繞射較適合量測可見光之波段，其原因為在此波段下其縱像像差極小，使其可幾乎完美聚交於一點。」

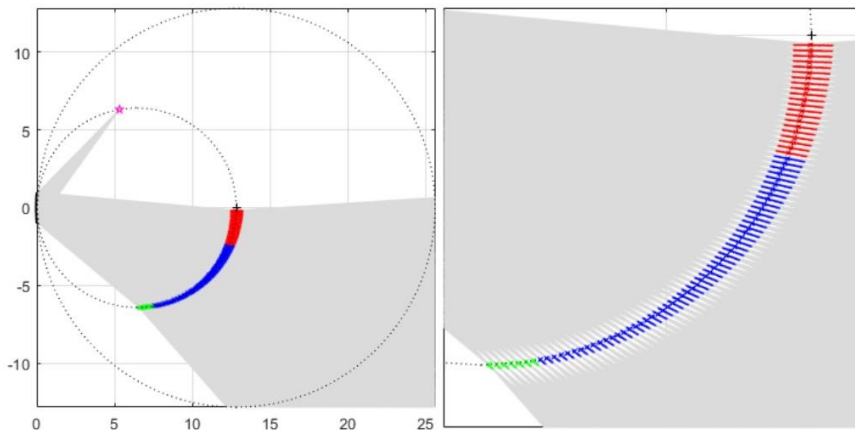


圖 3-32 入射角 $\theta_{i,1} = 50^\circ$ 之可見光至紅外光羅蘭圓像差測試結果

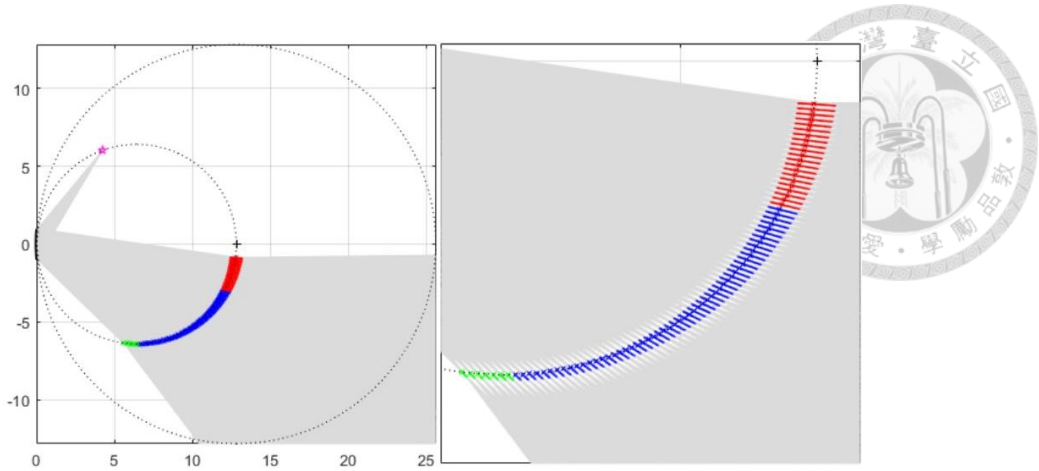


圖 3-33 入射角 $\theta_{i,1} = 55^\circ$ 之可見光至紅外光羅蘭圓像差測試結果

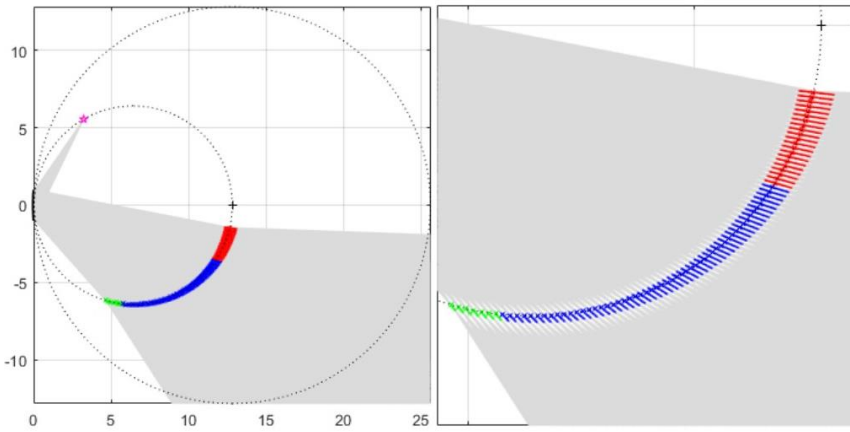


圖 3-34 入射角 $\theta_{i,1} = 60^\circ$ 之可見光至紅外光羅蘭圓像差測試結果

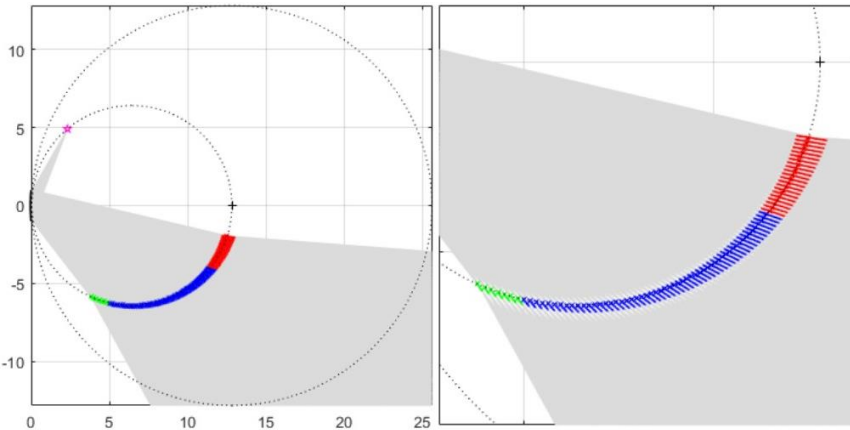


圖 3-35 入射角 $\theta_{i,1} = 65^\circ$ 之可見光至紅外光羅蘭圓像差測試結果

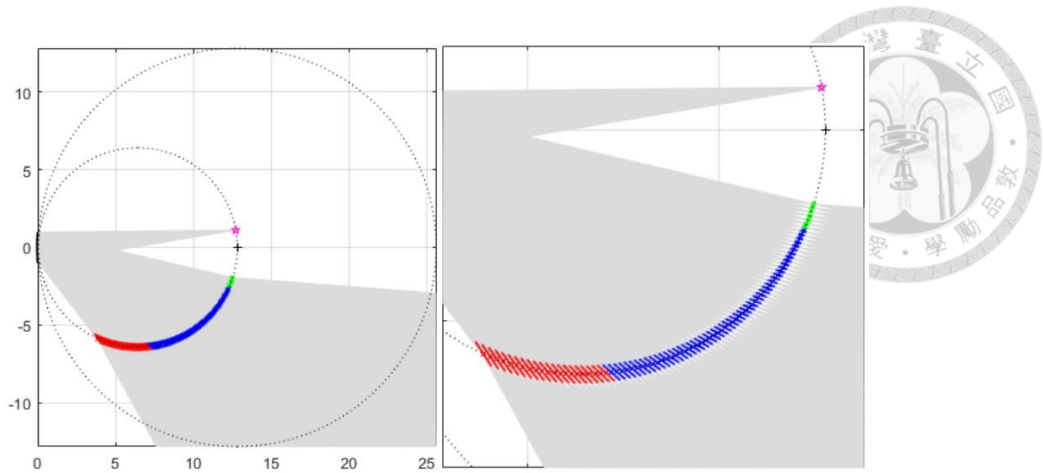


圖 3-36 入射角 $\theta_{i,1} = 5^\circ$ 之可見光至紅外光羅蘭圓像差測試結果

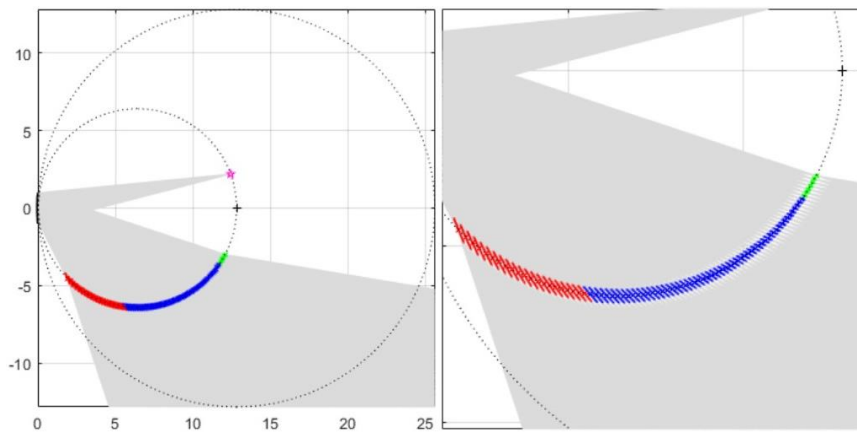


圖 3-37 入射角 $\theta_{i,1} = 10^\circ$ 之可見光至紅外光羅蘭圓像差測試結果

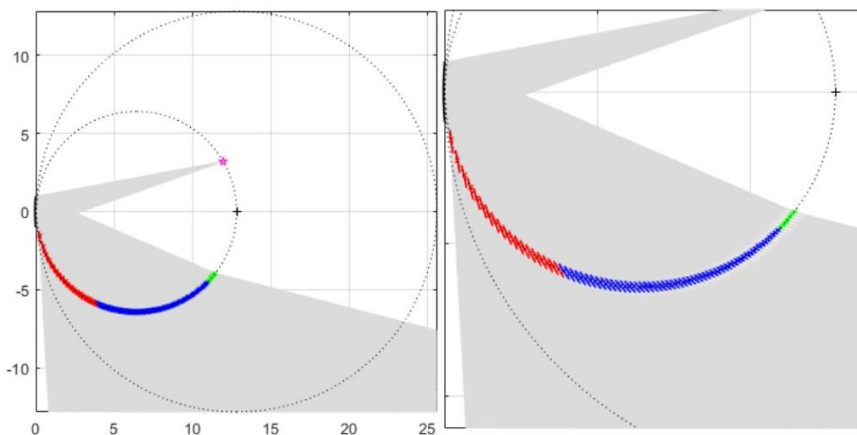


圖 3-38 入射角 $\theta_{i,1} = 15^\circ$ 之可見光至紅外光羅蘭圓像差測試結果

第4章 系統組件之選擇、研製與開發



4.1 光源之選擇

4.1.1 黑體輻射光源

若有一物體其可吸收外來的全部電磁輻射且不會有任何的反射與透射(完美吸收)，則稱該物體為「黑體」；相對地，而該物體因吸收外來輻射使得溫度隨之而上升，而同時會放出電磁輻射，則稱該電磁輻射為「黑體輻射」。而黑體輻射定律(Planck's law, Blackbody radiation law)可以下式表示：[41][42][43]

$$I(\lambda, T)d\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1} d\lambda \quad (4.1)$$

根據上式可知，黑體所放出之輻射率(照度， W/m^3)與該黑體的溫度(絕對色溫)以及輻射出之波長有關；換言之，不同的溫度 T 下，黑體輻射率會隨波長變化而不同，如圖 4-1 所示[44]。觀察該圖不難圖 4-1 發現，黑體其所釋放出之發光圖譜在不同溫度下之圖形極為相似。而該結可由下式描述之：

$$\lambda_{\text{Max}} = \frac{2.89 \times 10^3 (\mu\text{m} \cdot \text{K})}{T} \quad (4.2)$$

該結果稱為「維恩位移定律 (Wien's displacement law)」[45]。根據上式可知，最大輻射率其所對應之波長與黑體溫度成反比。故對於任一黑體而言，只要找到該發光強度最強之點，量測該點所輻射之波長，即可反推該黑體之溫度。

相反地，而對於任意光源而言，若其發光圖譜相似於某一黑體之「特定溫度下」所輻射圖譜，則稱該「特定溫度」為該光源之色溫。因此，對該定義而言，任意光源之色溫實只對近似黑體之光源有意義，而白熾燈(Incandescent Light)即為一例。

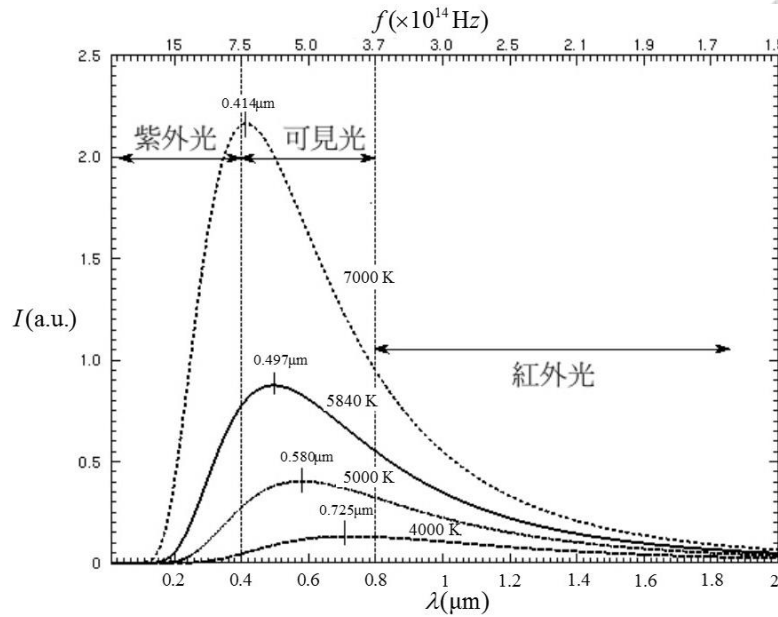
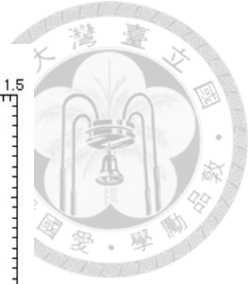


圖 4-1 黑體輻射發光圖譜

4.1.2 量測儀器介紹

本結為測定所使用的待測光源之色溫與其光通量實際值為多少，並與黑體輻射之理論比對，故使用積分球來測量之。

積分球是由鋁或由其他金屬等材料所做成的空心球體，且內壁通常會塗上多層硫酸鋇(BaSO_4)作為光漫反射之目的，使其在可見光與近紅外之反射率高達 90% 以上。最後在藉由光偵測元件測量收集到的所有光線以輸出光通量等實驗參數。

本研究所使用之積分球為先鋒科技所販售的「LED 積分球流明光譜測試機台量測系統」，如圖 4-2 所示[46]。其量測範圍為可見光之區域(380 nm ~ 780 nm)，且波長解析度為 1 nm。由於本積分球輸出結果為光通量($\text{W} \cdot \text{Sr}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$)，而為與(4.1) 輻射率($\text{W} \cdot \text{m}^{-1}$)比較對照之，其之間關係如下式：

$$\text{照度}(E) = \frac{\text{光通量}(\Phi)}{\text{面積}(A)} = \frac{\text{光度}(I)}{\text{距離}^2(r^2)} \quad (4.3)$$



分光輻射計	積分球直徑	200mm	500mm
	最大輻射度測量 (W)	16	100
	最大光通量測量 (lm)	3000	22000
	最大紅光LED測量 (lm)	600	3800
	最大綠光LED測量 (lm)	1800	11000
	最大藍光LED測量 (lm)	800	5000

*以上規格為搭配1%中性光密度濾光片的參考數據

波長範圍：380 - 780nm

測試項目：IV(lm、Watt)；x/y；λd；λp；λc；FWHM；**CCT**；CRI

波長解析：1nm

測試範圍：5mcd ~ 30000mcd 或 20lm ~ 200 lm

量測精度：IV: +/- 7%、XXX；x/y：0.005 (Stable lamp)

量測重複性：IV: +/- 2%；XXX，x/y：+/- 0.002 (Stable lamp)

註：公司備有展示機，請連絡負責人員作系統展示

系統可視測試件尺寸大小及流明範圍，搭配不同直徑積分球 (5cm ~ 2 meter)

電性測試部份，可提供 500mA /1500mA 及更高功率輸出，請洽詢負責人員提供全套測試方案

圖 4-2 本實驗所使用的積分球之相關資訊

4.1.3 量測結果與討論

本實驗所選擇的光源是「OSRAM 35W 標準鹵素燈泡」，如圖 4-3。吾將此光源放入積分球內直接進行色溫與光通量之量測，再藉由(4.3)將光通量轉換成照度如圖 4-4 所示。圖 4-4 中左圖為連續量測三筆數聚結果之疊圖，可發現本次量測結果的浮動不高，進而將其平均後計算其百分誤差。如本圖右圖所示，黑、藍和綠線分別表示不同次之量測結果，不難看出其誤差皆小於5%內，屬於可接受之合理範圍。



圖 4-3 待測光源發光實照

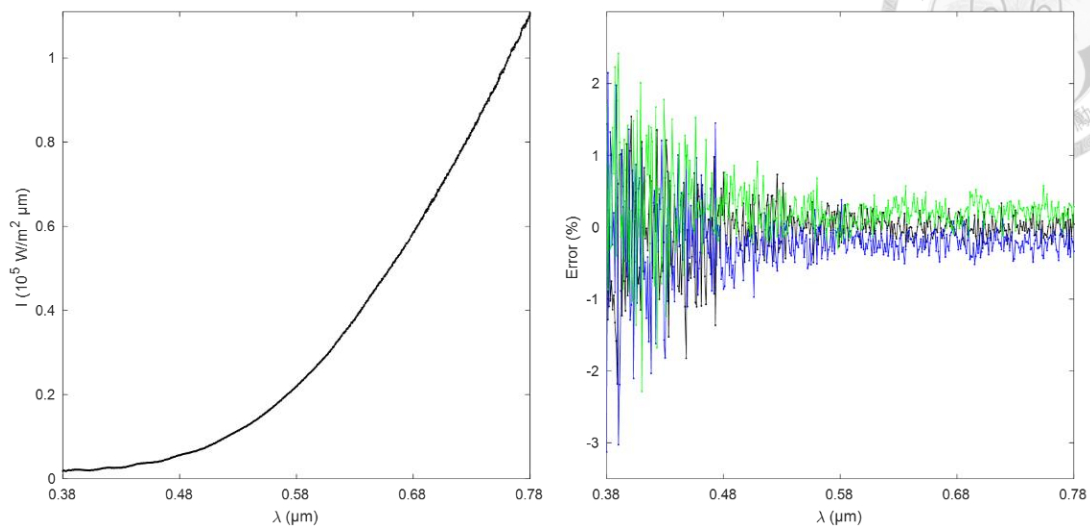


圖 4-4 光源光譜圖(0.38 μm ~ 0.78 μm)與其浮動誤差

可惜的是，本研究所使用的積分球其光通量量測範圍僅限於可見光範圍(0.38 μm ~ 0.78 μm)內；對於本研究所需要之目標波段(中紅外光)範圍有所差距，殊為可惜。然而慶幸的是，本量測結果亦會輸出待測光源之色溫，因此吾將該給定之色溫(2230K)代入式(4.1)求其照度與波長之關係圖，如圖 4-5 紅線所示。吾將黑體輻射擬合之理論紅線與實際量測之黑線疊圖後其結果幾為吻合，如該圖右圖所示。

該白熾光源經 2230 K 之擬合後偏近紅外光，雖使其在 0.38 μm ~ 0.78 μm 之強度僅為該曲線最大強度的三分之一，看似相當微弱，但由圖 4-3 肉眼判斷可知在可見光波段亦有一定相當地強度。再者，本文所需之工作波長為 4.26 μm (4 μm ~ 4.5 μm)，由圖發現其輻射照度與可見光波段恰好雷同，故根據該推論應可說明該光源在中紅外光之照度應足已可應用於本文之研究中。

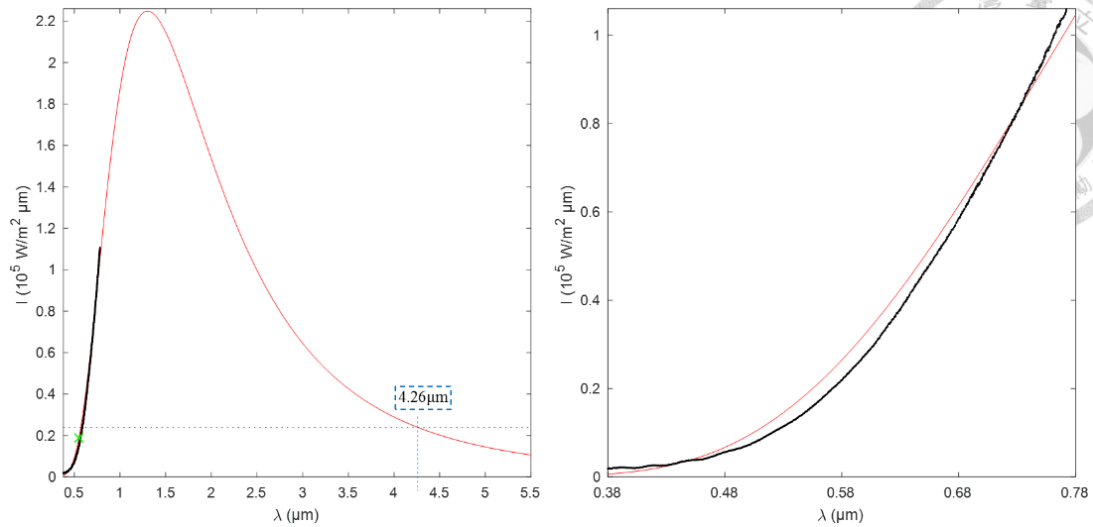


圖 4-5 光源光譜圖與黑體輻射理論擬合

4.2 低成本可撓式光柵之研製

4.2.1 PDMS 轉印技術介紹

現今，聚二甲基矽氧烷(Polydimethylsiloxane, PDMS)這種熱塑性高分子材料已不同領域上得已應用，其為一有機矽聚合物，如圖 4-6 所示。而其高可塑性與可撓性很適合應用於需彎曲之目的。

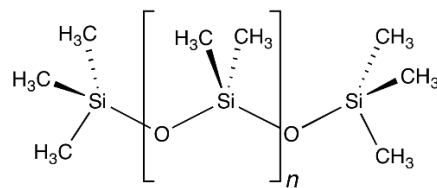


圖 4-6 聚二甲基矽氧烷結構式

再者，PDMS 固化前為黏稠之液體(其結構式如圖 4-7(a))，因此製作過程行狀可自行定義。定義其圖紋(pattern)後以重量比 10:1 加入固化劑(其化學式如圖 4-7(b))靜置數日後使其定型。由於 PDMS 的相態可從液態轉至固態，基於此特性其亦可應用於基板上微結構的轉印技術。

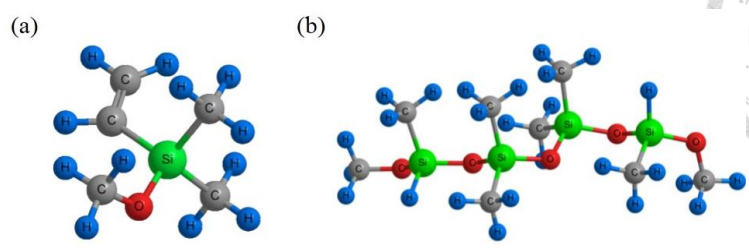


圖 4-7 (a)PDMS 主劑結構式 (b)固化劑結構式

4.2.2 鍍膜儀器介紹

本研究所使用到的鍍膜系統為電子束蒸鍍系統(electron-beam evaporation system)，其腔內架構如圖 4-8 所示。該系統係在真空環境下以電子束轟擊坩堝裡的金屬靶材，使其昇華成氣態，並附著於溫度相對低之基板上而成膜。其中該電子束係以一組直流電源加熱鎢絲後使電子因熱游離後，在給予一外加電場使其加速直線射出，並同時藉由一外加磁場改變該電子束的軌跡使其以一定的速度 v 撞擊於坩堝上的目標金屬靶材。而熱蒸鍍系統不同之處在於本系統可調控靶材位置使得電子束可以較精準的轟擊靶材，以降低加熱其他區域可能造成的製程汙染。

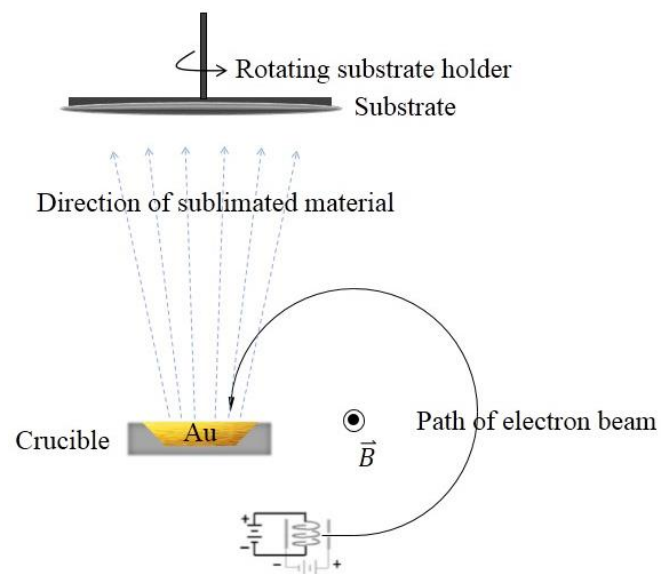


圖 4-8 電子束蒸鍍系統架構示意圖



4.2.3 製作結果與討論

以 PDMS 轉印法製作彎曲可撓式光柵之步驟如圖 4-9 所示。有鑑於本實驗室過去已成功研發出以黃光微影製程技術與 KOH 濕式非等向性蝕刻於矽晶圓上製作矽基閃耀式光柵，因此本小節將此以此矽基閃耀式光柵最為後續的轉印的母片，如圖 4-9(a)所示。接著以 PDMS-A：PDMS-B = 6 g：0.6 g 之比例倒入至一直徑為 6 cm 的塑膠培養皿，且由於混合主劑和副劑會使溶劑中產生需多的小汽泡，因此在混合主副劑後吾將其放至真空乾燥皿大至脫泡約三分鐘後，再將矽基光柵母片正面朝上浸入其中並壓至容器底部，如圖 4-9(b)所示。然而，當母片放入溶劑時亦會使溶劑再次產生小氣泡，因此再將其放入真空乾燥皿靜置三天，如圖 4-10(c)所示。而將其脫膜取出後如圖 4-9(d)，並以美工刀小心裁切掉未轉印的部分後，其實際結果如圖 4-10(b)所示。吾將 460 nm 之雷射筆射入至轉印後之 PDMS 可撓光柵作為是否轉印成功的測試，可發現其有不錯的繞射現象(包含透射及反射)。由於有看似不錯的繞射條紋，因此吾將其鍍上金屬反射層以增加該光柵之反射率，如圖 4-9(e)所示。吾將該轉印後之 PDMS 放入電子束蒸鍍系統(ULVAC)在壓力為 4×10^{-6} torr 的環境下先沉積 40 nm 的鈦(Ti)作為金屬和高分子間的黏著層，再沉積 100 nm 的金(Au)作為提高 PDMS 光柵反射率之反射層，其結果如圖 4-11 所示。觀察圖 4-11 其表面即有許多小皺摺與部分龜裂現象，而吾以 460 nm 之雷射筆射入該光柵觀察其繞射能力，似乎還算是明顯清晰；然而，觀察圖 4-12 明顯發現在有施加外力於該可撓光柵之該表面有非常明顯的皺摺，同樣以相同雷射筆測試其繞射行為可發現，隨著彎曲程度愈大(由圖 4-12(a)至(c))使得該分光效果愈不明顯。綜合 PDMS 光柵鍍完全屬後之表面形貌與其對應之繞射行為，推估原因有二，一為在等待其固化時間過短，使其雖表面看似乾燥但其內部尚未乾燥；二是沉積過程長時間處於高溫(40°C)使其沉積品質沒有很好。

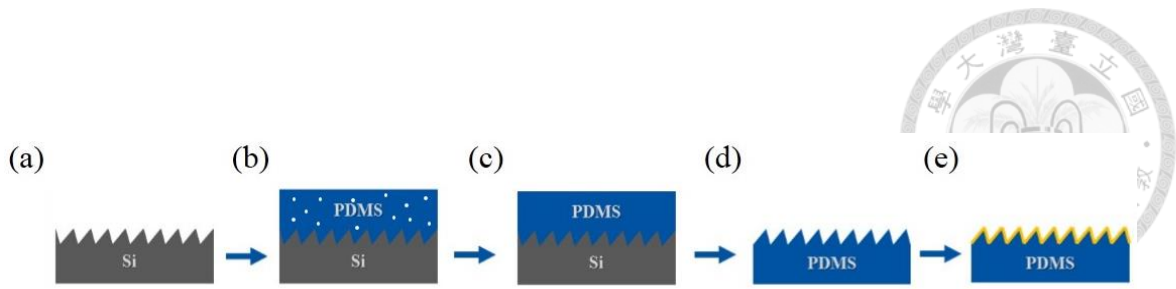


圖 4-9 塑膠基板可撓式彎曲光柵之 PDMS 轉印製程步驟

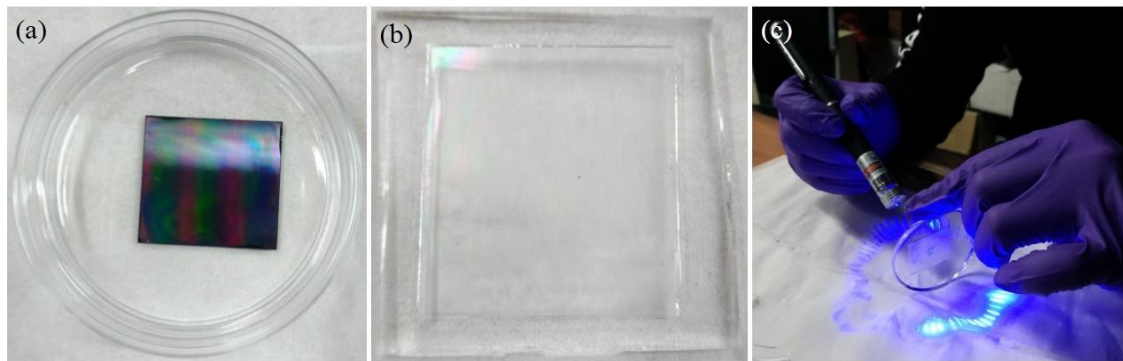


圖 4-10 靜置脫泡乾燥後之結果

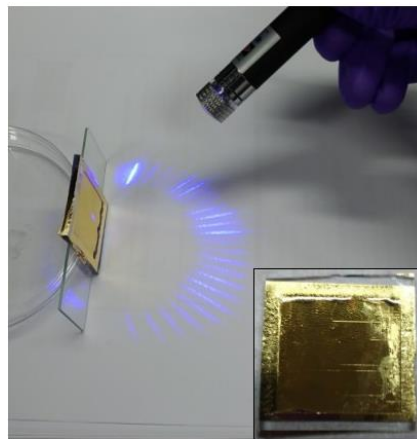


圖 4-11 轉印後之 PDMS 光柵鍍膜後平坦之實照與其在平面下之繞射行為

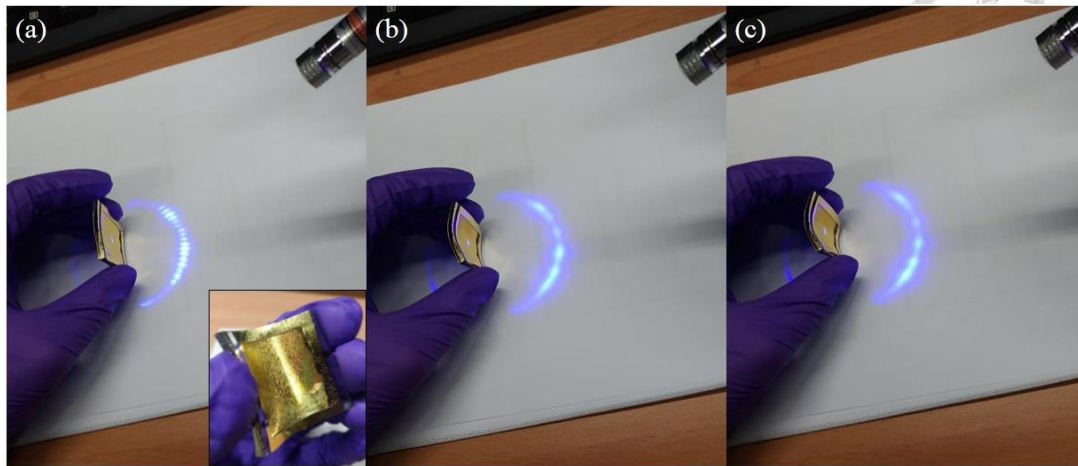


圖 4-12 轉印後之 PDMS 光柵鍍膜後彎曲之實照與其在彎曲下之繞射行為

為了改善前段所列舉之問題，吾改變了部分參數再次製作 PDMS 可撓式彎曲光柵。首先，在主劑與副劑的重量的混合上，吾以相同比例但兩劑之克數皆減半 (PDMS-A : PDMS-B = 3 g : 0.3 g) 進行混合，這應可使乾燥後過程加速並確保因其厚度不會太厚使得乾燥沒有想像中的完全與快速。再者，放入真空乾燥皿靜置時間增長為五天，並再以烘箱 60°C 連續烘烤 24 小時共六天的乾燥時間已確保其完全固化使得不會因需些許外力脫膜而傷及光柵表面之條紋。而此時其微結構在光學顯微鏡(Optical Microscope, OM)底下以 100 倍率放大觀察如圖 4-13，可發現其光柵條紋被完美的轉印幾乎沒有缺損，且其週期為 6 μm 。接著，在鍍膜之前觀察圖 4-11、圖 4-12 不難發現在光柵的背面有部分的光線透射導至能量的浪費，因此將反射金屬的厚度從 100 nm 增加至 200 nm，使得 PDMS 轉印後的表面有更緊緻的反射面。最後，由圖 4-11、圖 4-12 鍍完全後的表面有許多皺褶使得分光不明顯，估計與沉積過程中的熱漲冷縮有關，因此在沉積金屬的過程中腔體溫度變化量(ΔT)皆控制在 10°C 以內，使其在沉積金的過程中不會因為有較大的熱漲冷縮而導致最後有許多的皺紋在表面上。經上述之改良後所製成的 PDMS 轉印可撓彎曲光柵結果如圖 4-14、圖 4-15 所示。圖 4-14(a)與圖 4-15(a)分別為光柵平坦與彎曲情境下表面情形之實照，比對圖 4-11、圖 4-12 可發現在經製作參數的改良後其表面皺褶得已

大幅的改善；而圖 4-14(b)與圖 4-15(b)分別為光柵平坦與彎曲情境下其繞射行為之實照，同樣比對圖 4-11、圖 4-12 後可發現分光結果更清晰，尤其是光柵在彎曲情境下其繞射結果得以明顯得改善，且為本光譜儀微型化關鍵技術之一。

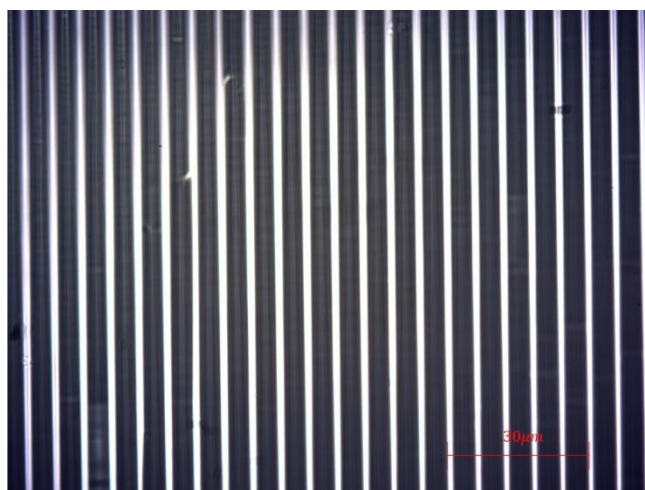


圖 4-13 可撓光柵轉印後在 OM 以×100 倍率下拍攝之

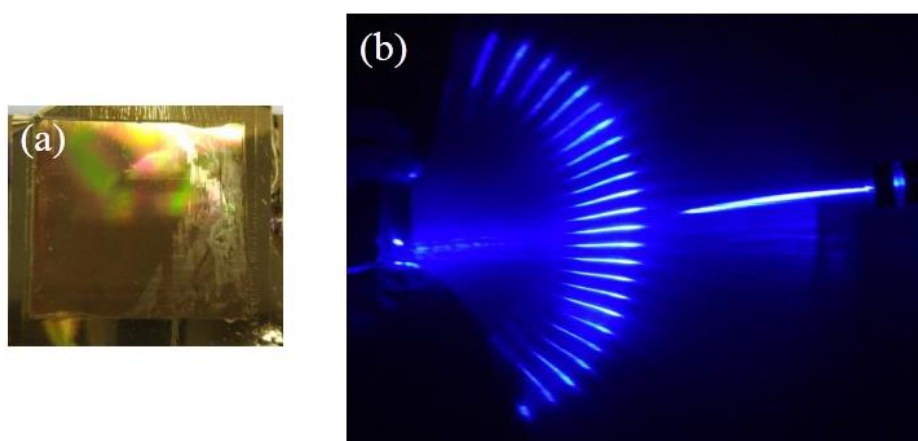


圖 4-14 改進後之 PDMS 光柵鍍膜後平坦之實照與其在平面下之繞射行為

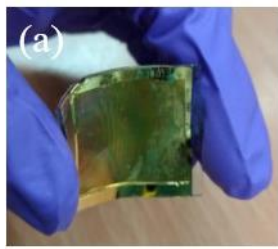


圖 4-15 改進後之 PDMS 光柵鍍膜後彎曲之實照與其在彎曲下之繞射行為

4.3 偵測端之量測開發

4.3.1 偵測元件之介紹

本論文目標為製作在「紅外波段」之光譜儀，故在偵測器的工作波長須在 $4.26\ \mu\text{m}$ ($4\ \mu\text{m} \sim 4.5\ \mu\text{m}$) 中有響應；然而，在此波段的偵測器非常罕見，故本研究使用以紅外線偵測溫度之「MLX90614」，藉由偵測溫度來反推估其紅外線強度，如下式：[47]

$$V = C \times (T_b^4 - T_a^4) \quad (4.4)$$

其中， T_b 是物體的絕對溫度、 T_a 是感測器晶片的環境絕對溫度、 C 則為靈敏度。其先利用熱敏電阻元件感測器量測環境溫度 T_a ，再藉由所量測到的紅外熱輻射轉換成輸出電壓 V ，最後經由上式回傳出輻射物所對應的溫度 T_b 。因此透過 MLX90416 所偵測出的環境溫度 T_a 以及物體溫度 T_b 則可回推計算感測器晶片偵測時輸出的電壓強度 V 。而其各腳位與接線圖如圖 4-16 所示，且以表 4-1 說明各腳位所代表之含意。

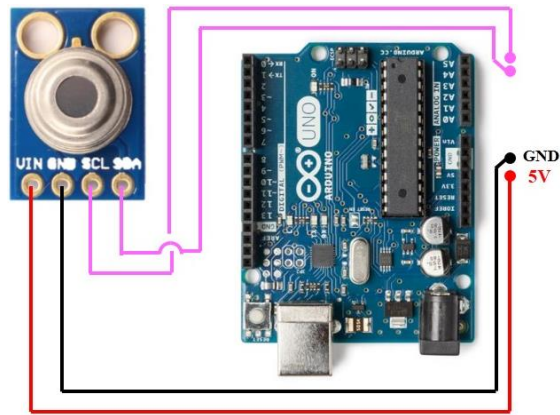


圖 4-16 偵測元件 MLX90614 與 Arduino 配線示意圖

表 4-1 偵測元件 MLX90614 各腳位之意義

VIN	驅動偵測元件之電源
GND	(VMOT：接 5V 電源；GND：接地)
SCL	Serial Clock：時間訊號 (插入 Arduino UNO 板 A5 腳位)
SDA	Serial Data：數距雙向傳輸 (插入 Arduino UNO 板 A4 腳位)

4.3.2 移動載具之介紹

由前章圖 3-23 結果可知，在實際量測方面需要一「直線且定位精確」之移動偵測裝置，故本小節選用「微型步進電機」以達承載偵測元件之目的。步進電機又稱為脈衝電機，其功能係將所給予的電脈衝訊號轉換成腳位移，甚至可與絲桿或皮帶結合而將腳位移轉換成線位移，因此其為自動控制的環節裡扮演著主要執行的元件，故其在半導體、醫療儀器、工廠設備等應用皆極為廣泛。

步進電機內部構造主要係依序由線圈、定子、承軸、轉子 1、永久磁鐵、轉子 2、出力軸所構成，如圖 4-17 所示[48]。當電流通過定子線圈時，定子線圈會產生一磁場而帶動轉子旋轉一固定角度，使得轉子的磁場方向與定子磁場的方向一致。如此一來，其通過定子的電流與轉子的旋轉角度得一固定的比例關係，因此每輸入



一個固定的脈衝電流，即可精準地讓轉子旋轉一固定的角度。明顯地，其輸入的脈衝個數與腳位移成正比，而當然脈衝頻率與承軸轉速亦成正比，其概念如圖 4-18 所示。



圖 4-17 步進電機內部結構示意圖

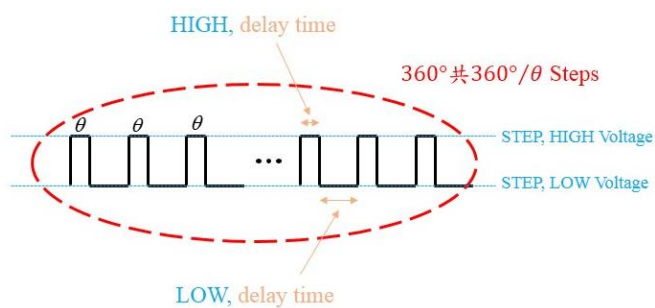


圖 4-18 步進原理示意圖

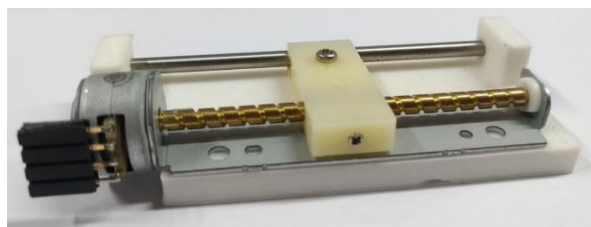


圖 4-19 步進電機實照

一般而言，步進電機可分為二相四線式、三相三線式、五項五線式等類別，其中相數越多表示內部線圈數越多，當然其所能控制的步進角度就越精細。本研究使用的是二相四線微型步進電機(步進角為 $18^\circ/\text{step}$)，如圖 4-19 所示，隨著步進電機的轉動會帶動著絲桿的轉動使得其螺母會跟著作線性的移動。而步進電機運轉方式並不像直流電機或交流電機如此的簡易，其必須搭配脈衝訊號、驅動電路等組件方能工作。其工作原理係藉由電子電路將直流供電轉換成分時供電，使得步進電機得以正常工作。再者，所提即的電子電路即為此步進電機的驅動器，其即為步進電機分時供電的多相時序控制電流。因此整個步進電機運轉系統除了「步進電機本身機械組件」外，還需要一「驅動器」給予步進電機適當的脈衝電流使其依指令驅動運轉，最後還需要一「控制器」輸出控制步進電機實際運轉的信號指令。因此本研究使用「A4988」作為驅動晶片，並以「Arduino」作為輸出信號之控制器，其各腳位與接線圖如圖 4-20 所示，且以表 4-2 說明各腳位所代表之含意[49]。附帶一提的是，圖 4-20 中「hc-05」為藍芽模組，在此可方便將所讀取之資料傳輸至其他裝置。

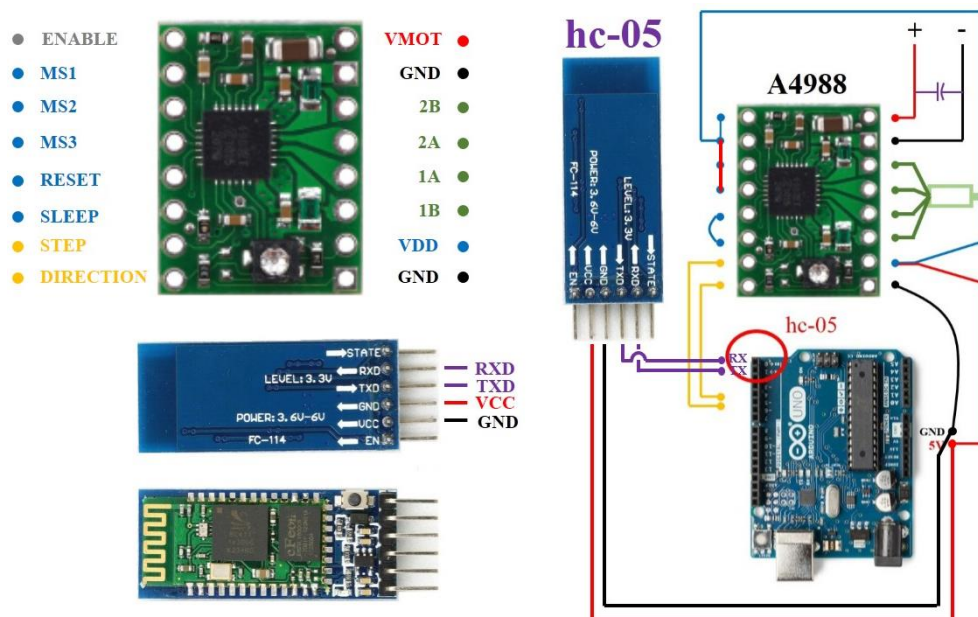


圖 4-20 步進電機驅動器 A4988 與 Arduino 配線示意圖



表 4-2 驅動晶片 A4988 各腳位之意義

VMOT	驅動步進電機之電源
GND	(VMOT：接 5V 電源；GND：接地)
2B	二相四線步進馬達之插角 (1A1B 連接步進電機某一線圈；2A2B 連接步進電機另一相)
2A	
1B	
1A	
VDD	驅動 A4988 Stepper Driver 之電源
GND	(與 Arduino UNO 板相互連接)
DIRECTION	控制步進電機旋轉方向
STEP	控制每單位脈衝之馬達步數
SLEEP	步進電機停止運轉時，降低能量損耗
RESET	重新定義新零點位置 (若無須控制此設定，須將其與 SLEEP 連接)
MS1	MS1、MS2、MS3 三個腳位實為一邏輯電路，藉由此邏輯電路來設定五種不同之解析度(精確度、分割數)，如下表所示：
MS2	

MS3	MS1	MS2	MS3	RESOLUTION																		
	LOW	LOW	LOW	FULL STEP																		
	HIGHT	LOW	LOW	HALF STEP																		
	LOW	HIGHT	LOW	QUARTER STEP																		
	HIGHT	HIGHT	LOW	EIGHTH STEP																		
	HIGHT	HIGHT	HIGHT	SIXTEENTH STEP																		
	註：若此三個腳位都沒有連接高低電壓，則視為第一型的解析度(FULL STEP)																					
<p>藉由此驅動器，更是實現了「微」步驅動之目標。以本二相步進電機基本步進角($18^\circ/\text{step}$)為例，藉由此邏輯設計，最大分割可達$1/16$ ($1.125^\circ/\text{step}$)，如下表所示：</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>解析度</th> <th>分割數</th> <th>步級角</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>FULL STEP</td> <td>1</td> <td>18°</td> </tr> <tr> <td>HALF STEP</td> <td>2</td> <td>9°</td> </tr> <tr> <td>QUARTER STEP</td> <td>4</td> <td>4.5°</td> </tr> <tr> <td>EIGHTH STEP</td> <td>8</td> <td>2.25°</td> </tr> <tr> <td>SIXTEENTH STEP</td> <td>16</td> <td>1.125°</td> </tr> </tbody> </table>					解析度	分割數	步級角	FULL STEP	1	18°	HALF STEP	2	9°	QUARTER STEP	4	4.5°	EIGHTH STEP	8	2.25°	SIXTEENTH STEP	16	1.125°
解析度	分割數	步級角																				
FULL STEP	1	18°																				
HALF STEP	2	9°																				
QUARTER STEP	4	4.5°																				
EIGHTH STEP	8	2.25°																				
SIXTEENTH STEP	16	1.125°																				
ENABLE	<p>LOW：Arduino 板子是啟動的(enabled)，且步進電機是通電的(energised)。</p> <p>HIGH：Arduino 板子是關閉的(disabled)，且步進電機是斷電的(de-energised)。</p>																					

4.3.3 偵測元件與移動載具其控制程序之結合

本小節對於偵測端的架設採用微型步進電機承載 MLX90614 偵測元件以 3.2.2 所討論之路徑來進行量測。顯然地，本節得目的在於隨著微型步進電機轉動帶動螺

母作直線移動使偵測元件在不同位置(繞射波長)端進行量測。因此本小節搭配 Arduino 分別撰寫了控制偵測元件與控制步進電機的程序,其主程序如表 4-3 所示。

在量測方面如表 4-3 之第 9 至 40 行所示。其主要控制 MLX90614 量測的指令如表 4-3 的第 12、13 兩行,分別為輸出環境溫度 T_a 與目標溫度 T_b , 而搭配式(4.4)可換算出該瞬間所量測的光強度,如表 4-3 第 23 行。再者,由於在量測過程中偵測元件可能有時候會讀出非預期之數值而直接輸出「Error」數字指令,故吾在表 4-3 中之第 15 至 22 行加入了一個自行判斷量測結果是否有異常。而異常時所讀取的數字通長會大於 1000,顯然並非是所量測到的正常數值,故吾在第 15 行設定了一道門檻,若輸出數值為異常「Error」數字,則立即跳出第 10 行之『for 迴圈』(for(int k=0; k<5; k++){...})」,並令 dw=1 作為第 9 行『do...while 迴圈』do{...}while(dw==1);」之開關,使其立即在相同位置重新進行量測。而在表 4-3 中第 26 至 30 行係以「泡泡排序(Bubble Sort)」將所量測五次的 I[k]做數值從小到大的排序,目的是希望所量測五筆數值中,扣除最大和最小值後再取平均(第 31 行)使偏差能降低。其中考慮若量測五筆數值精細度(Precision)較小,會使得量測上較無意義,因此在第 32 至 39 行中所設定的條件為若五筆數值與之前所算的平均值(第 31 行)百分誤差過大,則一樣立即跳出第 9 行『do...while 迴圈』do{...}while(dw==1);」並令 dw=1 使其立即在相同位置重新進行量測。

在量測方面如表 4-3 之第 42 至 50 行所示。其主要控制微型步進電機的指令如表 4-3 的第 42 至 46 行。而對於本步進電機其步進角為 $18^\circ/\text{step}$, 再經由 A4988 驅動晶片 1/16 的分割使其步級角小至 $1.125^\circ/\text{step}$; 換言之,控制器須給予其 320 個脈衝方能使步進電機轉動恰好一圈(360°)。而本步進電機螺距為 3mm(即轉動一圈恰能使螺母移動 3mm,故若使螺母移動 1mm 則每次須輸入 320/3 個脈衝數,如第 43 行所示(其中「delta_x」即為螺母每次移動的距離)。而在表 4-3 第 2 至 4 行則是每次量測時所須給控制器的起始指令,在此以輸入螺母所須移動之總長度 L 作為指令,故以第 7 行作為整個系統量測的總次數。而在第 5 行僅是讓偵測元件分別作正掃

與逆掃的量測動作。



表 4-3 偵測元件與步進電機結合之程序控制

```
1 void loop() {
2   if (Serial.available()){
3     Serial.readBytesUntil('\n', C, sizeof(C) / sizeof(char) );
4     int L = atoi(C); delay(100);
5
6     for(int fbw=0; fbw<2; fbw++){
7       Serial.print(x,1); Serial.print(" ; ");
8       for(int i=0; i<L/delta_x; i++){
9         lastmeasurement:
10        e=0; do{ e=e+1; delay(2000);
11          SI=0; for(int k=0; k<5; k++){
12            delay(1000);
13            Ta = Onion_mlx.readAmbientTempC();
14            Tb = Onion_mlx.readObjectTempC();
15            delay(100);
16            if(Ta<100&&Tb<100){
17              Serial.print(Ta+273); Serial. print(" ; ");}
18              Serial. print(Tb+273); Serial. print (" ; ");} dw=0;
19            } //if(sa<100&&sb<100){
20            else{
21              Serial. print("Error_"); Serial.println(e); Serial. print(x,1); Serial. print(" ; ");
```



```
21     dw=1; break;
22     } //if(sa<100&&sb<100){
23     I[k] = 0.0001 * ( pow(Tb+273,4) - pow(Ta+273,4) ); SI = SI + I[k];
24     } //SI=0 ; for(int k = 0 ; k<5 ; k++){
25     for(int k=0; k<5; k++){ Serial.print(I[k]); Serial.print(" ; ");}
26     for(int p=0; p<4; p++){
27         for(int q=p; q<5; q++){
28             if(I[q]>I[p]){float bubble=I[p]; I[p]=I[q]; I[q]=bubble;}
29         } //for(int q=p ; q<5 ; q++){
30     } //for(int p=0 ; p<4 ; p++){
31     I_av=(SI-I[0]-I[4])/(5-2);
32     for(int k=0; k<5; k++){StandardDeviation[k]=abs((I[k]-I_av)*100/I_av);}
33     if(StandardDeviation[1]<25 && StandardDeviation[2]<25 && StandardDeviation[3]<25){
34         Serial.print(I_av); Serial.println(" ; "); dw=0;
35     } //if(StandardDeviation[1]<25 && StandardDeviation[2]<25 && StandardDeviation[3]<25){
36     else{
37         Serial.print("S.D.>25%_"); Serial.println(e); Serial.print(x,1); Serial.print(" ; ");
38         dw=1;
39     } //if(StandardDeviation[1]<25 && StandardDeviation[2]<25 && StandardDeviation[3]<25){
40     }while(dw==1); // do{ e=e+1; delay(1000);
41     if(last==1){last=0; break;}
42     digitalWrite(6,LOW); if(fbw==0){ digitalWrite(4,HIGH);}else{ digitalWrite(4,LOW);}
43     for(outputstep=0; outputstep<320*delta_x/3; outputstep++){
```



```
44     digitalWrite(5,HIGH); delay(1);
45     digitalWrite(5,LOW); delay(1);
46     } //for(outputstep=0; outputstep<320*delta_x/3; outputstep++){
47     if(fbw==0){x = x + outputstep/(320/3);}else{x = x - outputstep/(320/3);}
48     Serial.print(x,1); Serial.print(" ");
49     if(x>=L/delta_x||x<1){last=1; goto lastmeasurement;}
50     } //for(int i = 0; i < L/delta_x; i++){
51     if(fbw==0){ Serial.println(F("Forward Completely"));}
52     else{ Serial.println(F("Backward Completely"));}
53     } //for(int fbw=0; fbw<2; fbw++){
```

第5章 微型光譜儀系統雛型之製作並應用於 CO₂ 濃度之檢測



5.1 球面光柵光路優化

5.1.1 解析度之優化

光譜儀係用來探討某一物理量其因波長的不同而對應的物理行為；換言之，其係以波長為自變數來探討縱軸的變化趨勢。因此用來描述量測過程中的細膩程度對於光譜儀而言至關重要，而該指標稱為「解析度(Resolution)」，即橫軸變化量($\Delta\lambda$)。而影響解析度的主要因素大致可分為「光柵繞自身射極限(光柵尺寸)」與「偵測極限(偵測元件尺寸)」[50]。

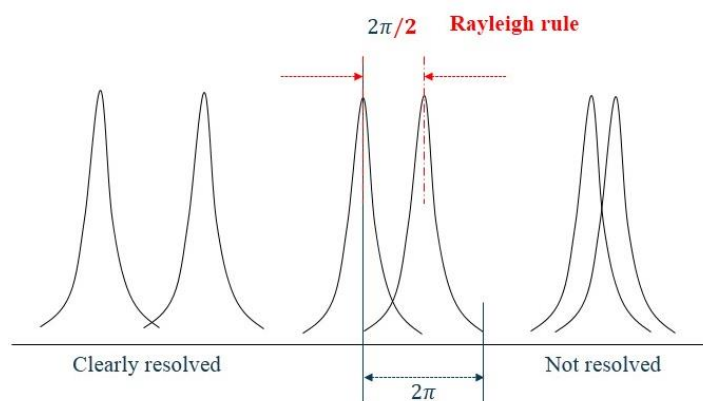


圖 5-1 重疊影像之瑞利指標示意圖

首先討論「光柵繞自身射極限」，由式(2.42)可明顯得知下式：

$$\alpha \equiv (ka/2) \cdot \sin \theta \Rightarrow \Delta\alpha = \frac{\pi \cdot a \cos \theta_m (\Delta\theta_m)}{\lambda} \quad (5.1)$$

再者，由圖 5-1 可知若要達到恰可解析，須滿足瑞利指標(Rayleigh rule)[51]，故由式(2.59)與上式可得：

$$\frac{\pi \cdot a \cos \theta_m (\Delta\theta_m)}{\lambda} = \frac{\pi}{N} \quad (5.2)$$



整理後可得下式：

$$\Delta\theta_m = \frac{\lambda}{Na\cos\theta_m} \quad (5.3)$$

而由式(2.66)光柵方程得：

$$a(\sin\theta_m - \sin\theta_i) = m\lambda, m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \Rightarrow \Delta\theta_m = \frac{m\Delta\lambda}{a \cdot \cos\theta_m}, m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (5.4)$$

綜合前兩式後即可得出光柵本身繞射極限，如下式：

$$\Delta\lambda_{\text{Grating}} = \frac{\lambda}{m \cdot N} \quad (5.5)$$

由於上式僅跟繞射階數 m 和光柵條紋數 N ($N = \text{光柵尺寸}/\text{光柵週期}$) 有關，故該式又可解釋為由光柵尺寸所造成之解析度。

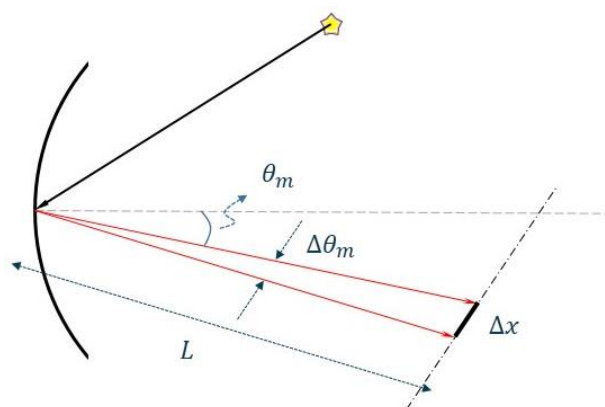


圖 5-2 偵測極限說明圖

考慮圖 5-2，因為光偵測元件的尺寸不能無限地小，故該尺寸 (Δx) 與光柵距離 (L) 所產生的張角 ($\Delta\theta_m$) 即為影響解析度的另一因素，其關係如下式：

$$\Delta\theta_m = \frac{\Delta x}{L} \quad (5.6)$$

同理，再搭配式(5.4)之推論，綜合可得下式：

$$\Delta\lambda_{\text{Detector}} = a \cos\theta_m \cdot \frac{\Delta x}{m \cdot L} \quad (5.7)$$

上式即為「偵測極限」之條件。其中，由於上式與光偵測元件的尺寸 (Δx) 有直接地



關係，故該式又可解釋為由偵測元件尺寸所造成之解析度。

本文第三章已可以計算出對於「任意出光點光原之位置 $B(x_b, y_b)$ 」與「任意球面光柵之焦距 f 」下的所有繞射且聚交之命題，因此本小節欲利用前段所提及之解析度參數作為優化「物距 x_b 」及「焦距 f 」的指標。

本小節係以波長範為 $3.5 \mu\text{m} \sim 4.5 \mu\text{m}$ ($\Delta\lambda = 0.05 \mu\text{m}$)，討論在「出光點光源物距 x_b 範圍為 $5.8 \text{ cm} \sim 13.8 \text{ cm}$ ；球面光柵焦距 f 範圍為 $2.9 \text{ cm} \sim 6.9 \text{ cm}$ 」中之最小解析度(球面光柵週期設在 $6 \mu\text{m}$ 且其尺寸設為 2 cm ；偵測元件尺寸 Δx 設在 0.1 mm) 優化解，而本小節以入射角 $\theta_{i,1} = 50^\circ$ (圖 5-3 至圖 5-6)、 $\theta_{i,1} = 55^\circ$ (圖 5-7 至圖 5-10)、 $\theta_{i,1} = 60^\circ$ (圖 5-11 至圖 5-14) 與 $\theta_{i,1} = 70^\circ$ (圖 5-15 至圖 5-18) 作為測試範例。每個入射角皆以四張圖呈現其優化結果，分別為「繞射極限與偵測極限」、「解析度優化之最佳光路模擬結果」、「解析度優化之波長與偵測位置關係圖」、「解析度優化之橫向像差與縱向像差對波長關係圖」，即圖 5-3 至圖 5-18 所呈現之。

討論圖 5-3、圖 5-7、圖 5-11、圖 5-15，由式(5.5)知該只標僅與繞射階數 m 和光柵條紋數 N 有關，而本小節所使用之球面光柵皆相同，故左圖為「繞射極限」皆相同，且其值約為 $1 \text{ nm} \sim 1.3 \text{ nm}$ 左右。而討論式(5.7)在偵測元件尺寸 Δx 設定在 0.1 mm 時，其「偵測極限」分別約落於 $4.85 \text{ nm} \sim 4.90 \text{ nm}$ 、 $5.20 \text{ nm} \sim 5.25 \text{ nm}$ 、 $5.40 \text{ nm} \sim 5.50 \text{ nm}$ 、 $5.47 \text{ nm} \sim 5.56 \text{ nm}$ 。由於其偵測極限皆大於繞射極限，故皆以偵測極限作為優化之標準，並找出最佳物距 x_b 為 7 cm ；球面光柵最佳焦距 f 為 6.9 cm 。藉此優化各角度 $\theta_{i,1}$ 入射後「最佳解析度之光路」以圖 5-4、圖 5-8、圖 5-12 與圖 5-16 呈現之，同時每個聚交位置之「波長和偵測元件位置(x_{DTR})」關係呈現結果如圖 5-5、圖 5-9、圖 5-13 與圖 5-17。當決定了偵測元件偵測路徑時，其代表了所有聚交點的橫向像差可被定義，因此對於該入射角所對應之「橫向像差(Transverse Spherical Aberration, T.S.A.)」與「縱向像差(Longitudinal Spherical aberration, L.S.A.)」分別如圖 5-6、圖 5-10、圖 5-14 與圖 5-18 所示。

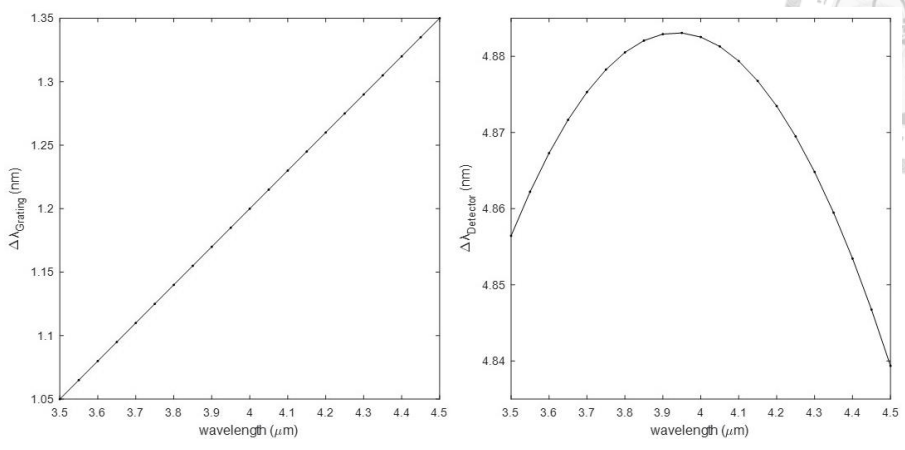
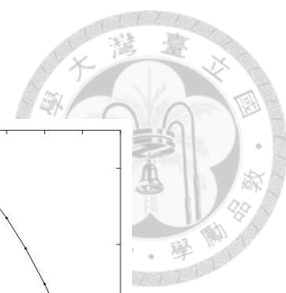


圖 5-3 入射角 $\theta_{i,1} = 50^\circ$ 之繞射極限與偵測極限

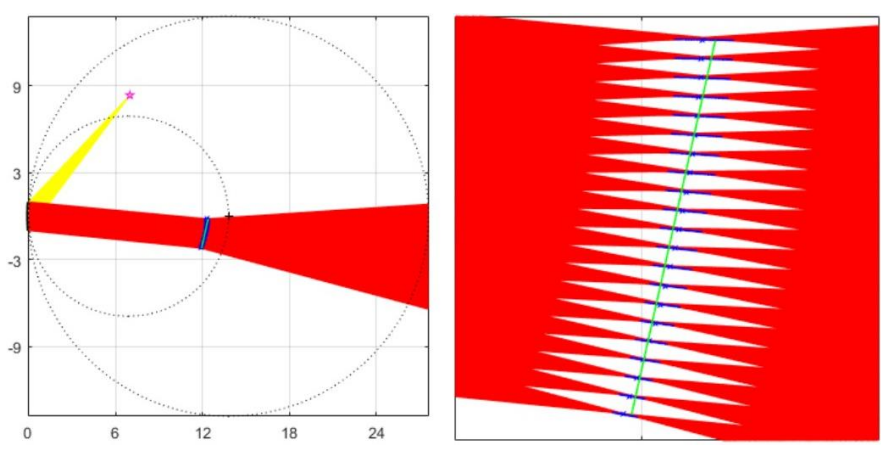


圖 5-4 入射角 $\theta_{i,1} = 50^\circ$ 解析度優化之最佳光路模擬結果

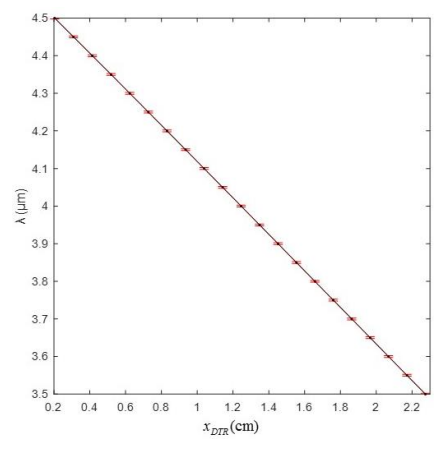


圖 5-5 入射角 $\theta_{i,1} = 50^\circ$ 解析度優化之波長與偵測位置關係圖

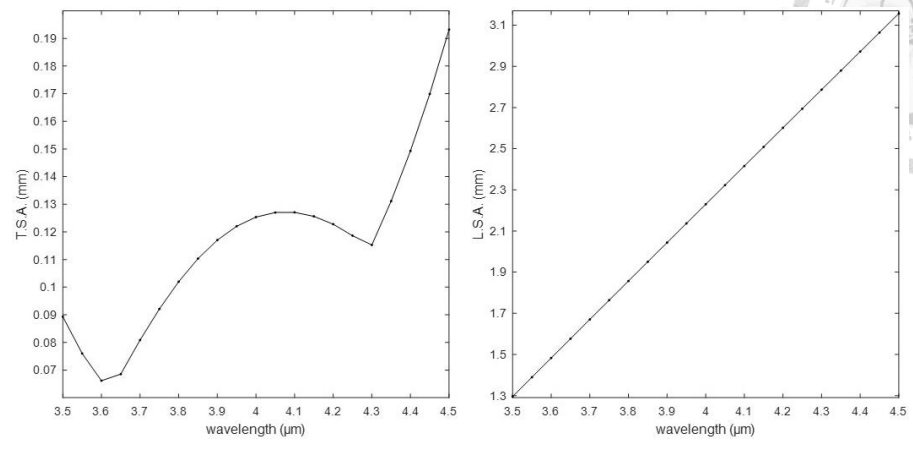
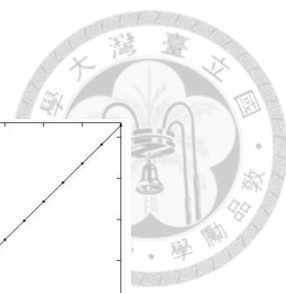


圖 5-6 入射角 $\theta_{i,1} = 50^\circ$ 解析度優化之橫向像差與縱向像差對波長關係圖

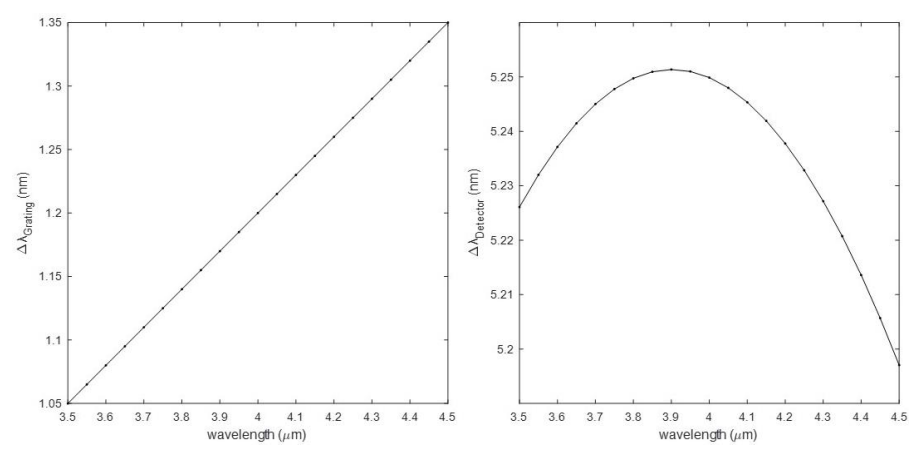


圖 5-7 入射角 $\theta_{i,1} = 55^\circ$ 之繞射極限與偵測極限

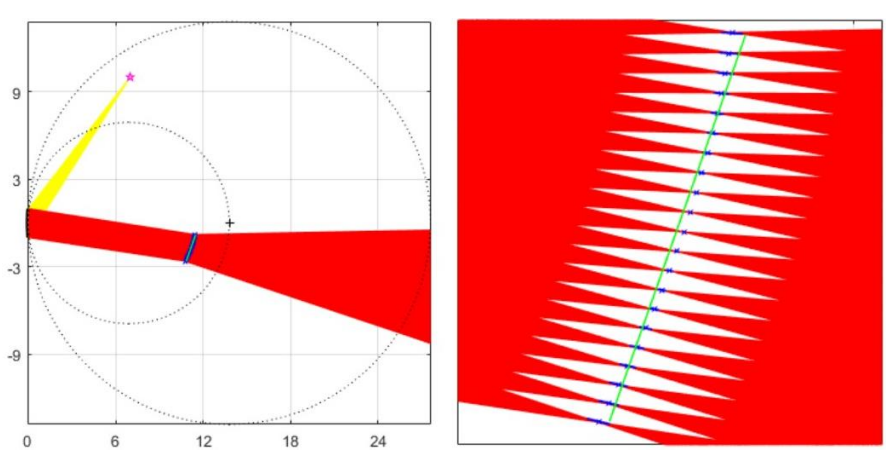


圖 5-8 入射角 $\theta_{i,1} = 55^\circ$ 解析度優化之最佳光路模擬結果

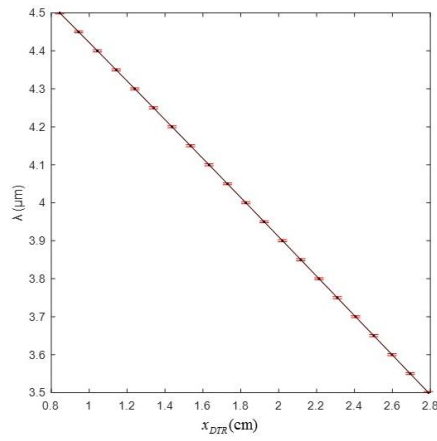


圖 5-9 入射角 $\theta_{i,1} = 55^\circ$ 解析度優化之波長與偵測位置關係圖

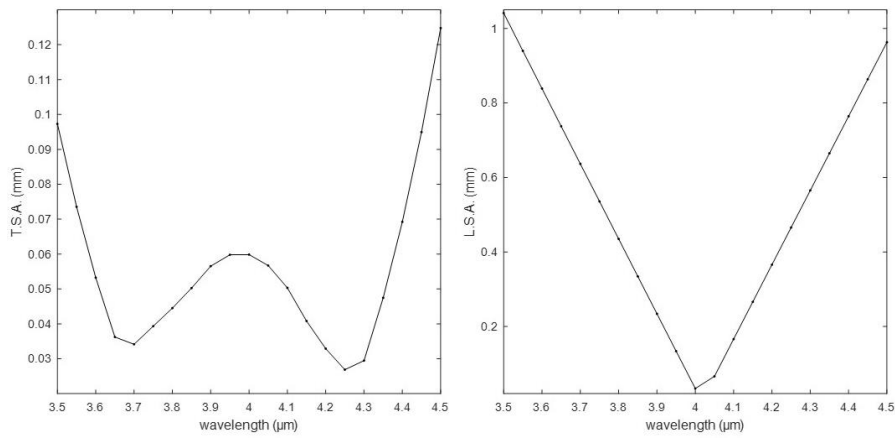


圖 5-10 入射角 $\theta_{i,1} = 55^\circ$ 解析度優化之橫向像差與縱向像差對波長關係圖

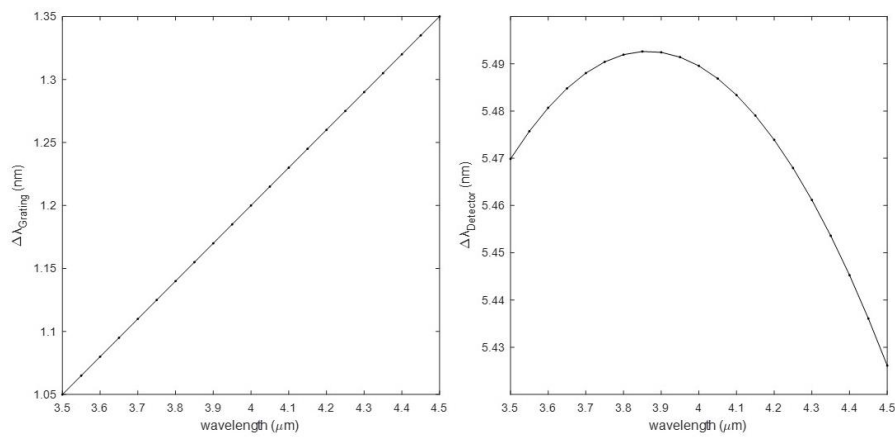


圖 5-11 入射角 $\theta_{i,1} = 60^\circ$ 之繞射極限與偵測極限

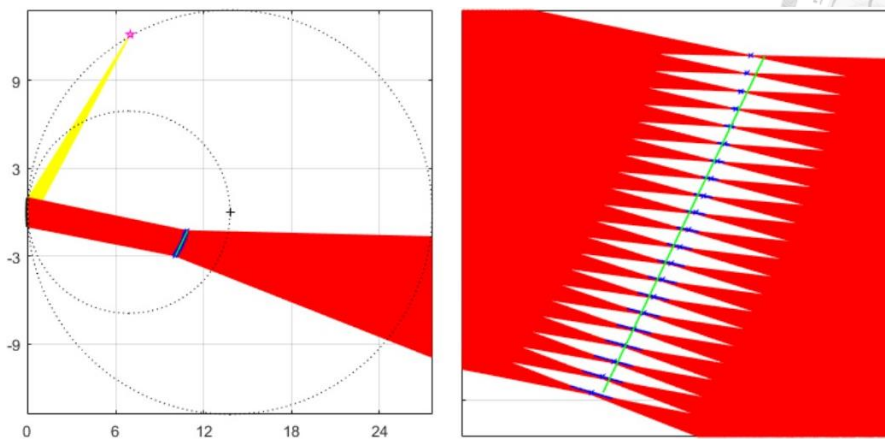


圖 5-12 入射角 $\theta_{i,1} = 60^\circ$ 解析度優化之最佳光路模擬結果

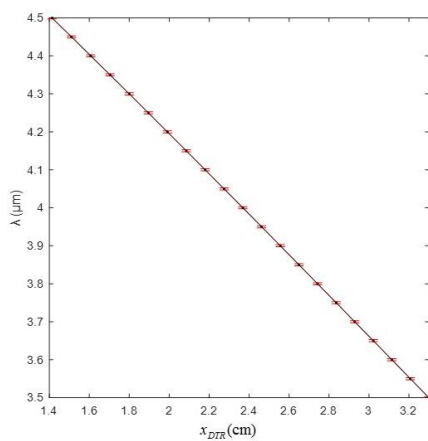


圖 5-13 入射角 $\theta_{i,1} = 60^\circ$ 解析度優化之波長與偵測位置關係圖

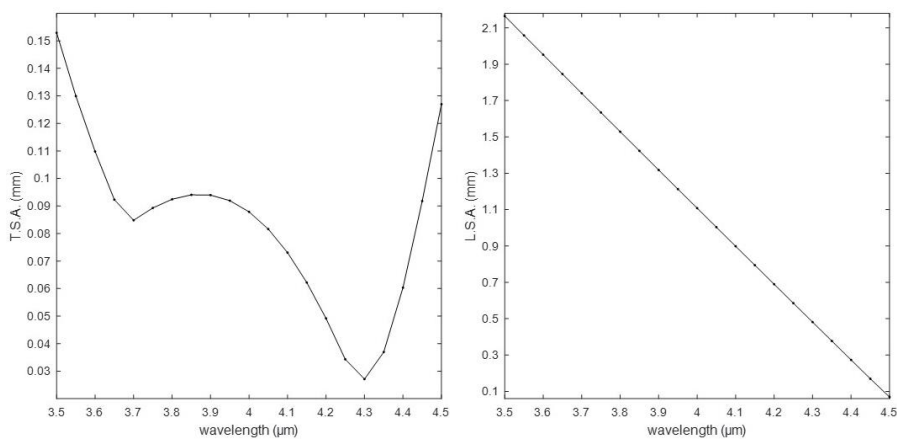


圖 5-14 入射角 $\theta_{i,1} = 60^\circ$ 解析度優化之橫向像差與縱向像差對波長關係圖

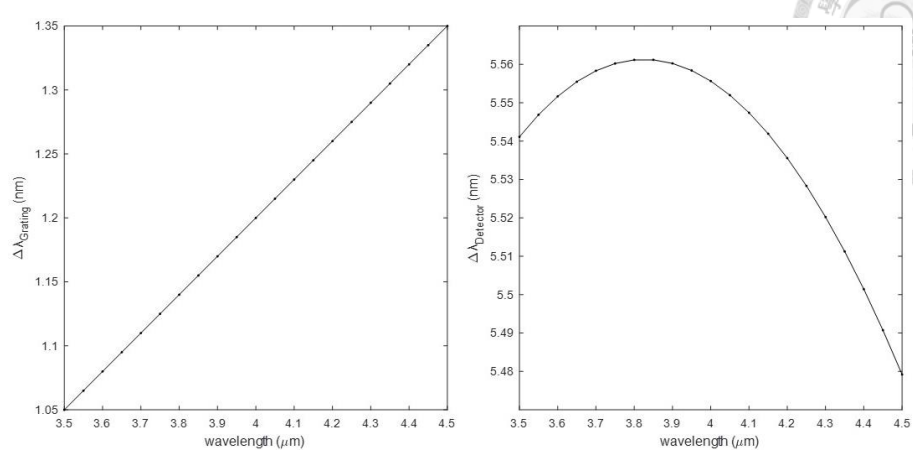
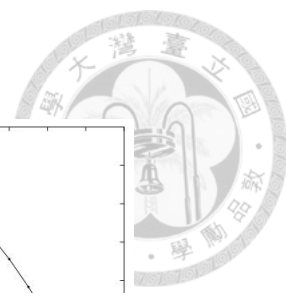


圖 5-15 入射角 $\theta_{i,1} = 70^\circ$ 之繞射極限與偵測極限

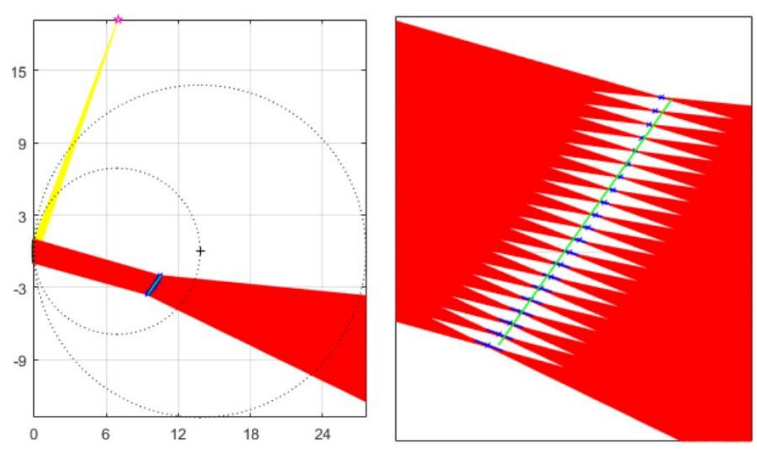


圖 5-16 入射角 $\theta_{i,1} = 70^\circ$ 解析度優化之最佳光路模擬結果

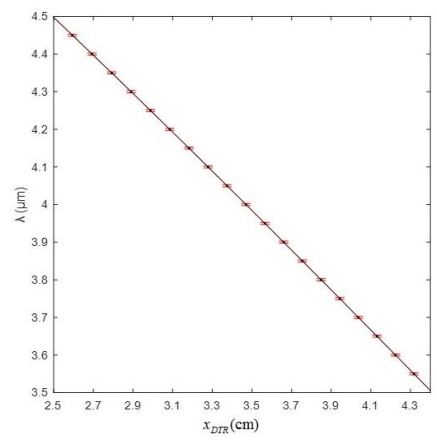


圖 5-17 入射角 $\theta_{i,1} = 70^\circ$ 解析度優化之波長與偵測位置關係圖

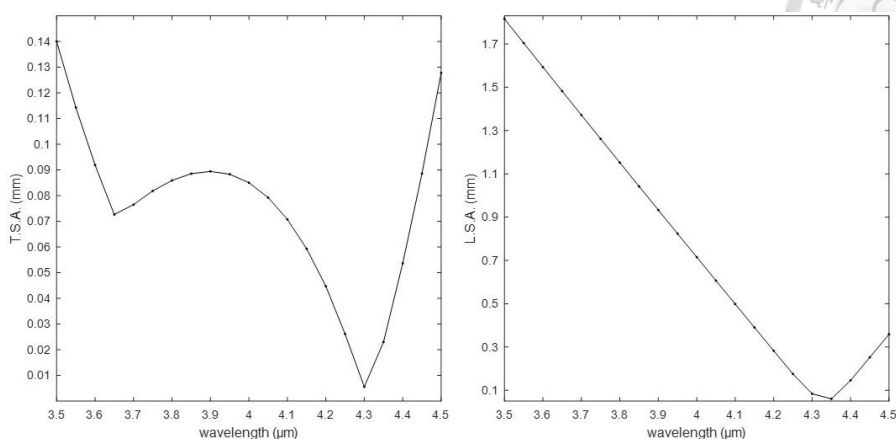
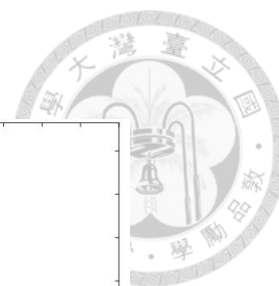


圖 5-18 入射角 $\theta_{i,1} = 70^\circ$ 解析度優化之橫向像差與縱向像差對波長關係圖

5.1.2 光路微小化之設計

本論文另一目標係希望達到光譜儀微小化之目的，因此本小節欲利用平面鏡折返光路之概念將本雛型(prototype)微小化，如圖 5-19 所示。考慮圖 5-19，同 3.2.1 在出光點光源點 B 以兩道光線(參考線、目標線)之交點決定該球面光柵之聚交位置 $D(x_d, y_d)$ ；然而，在其經繞射後以一平面鏡(L_{Mirror})放至在原會經過之光路上(灰色線)，使其因平面鏡反射而聚交至點 $R(x_r, y_r)$ 。而該平面鏡擺放之方程係先取其傾斜角度為 ϕ_M ，而可得 $y = \tan \phi_M \cdot x$ ；在將其向右平移 x_{MS} 單位且向上平移 y_{MS} 單位後可得下式：

$$L_{\text{Mirror}} : y = \tan \phi_M \cdot (x - x_{MS}) + y_{MS} \quad (5.8)$$

由上式可知，只需要有單位平移量(x_{MS} 、 y_{MS})與傾斜角度為(ϕ_M)則可決定該平面鏡位置方程式。

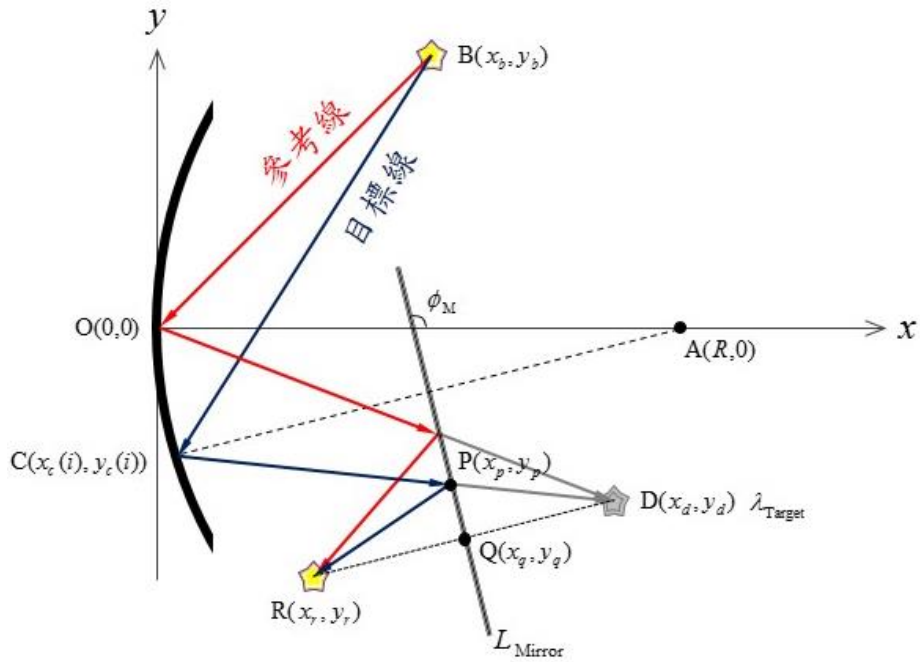


圖 5-19 球面光柵加入平面鏡座標化

由平面鏡的性質可以得知，物體與虛像以鏡面呈左右對稱，因此圖 5-19 中，點 $R(x_r, y_r)$ 係點 $D(x_d, y_d)$ 以 L_{Mirror} 為對稱軸之對稱點。在此命題中，已知數為聚交點 $D(x_d, y_d)$ 、繞射點 $C(x_c(i), y_c(i))$ 與平面鏡方程式 L_{Mirror} ，因此吾先做一垂直 L_{Mirror} 且過點 D 之方程式如下：(圖中虛線)

$$x + \tan \phi_M \cdot y = x_d + \tan \phi_M \cdot y_d \quad (5.9)$$

將上式與(5.8)求解聯立如下：

$$\begin{cases} \tan \phi_M \cdot x - y = \tan \phi_M \cdot x_{\text{MS}} - y_{\text{MS}} \\ x + \tan \phi_M \cdot y = x_d + \tan \phi_M \cdot y_d \end{cases} \quad (5.10)$$

由克拉瑪公式可得下式：

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \tan \phi_M & -1 \\ 1 & \tan \phi_M \end{vmatrix} \\ \Delta_x &= \begin{vmatrix} \tan \phi_M \cdot x_{\text{MS}} - y_{\text{MS}} & -1 \\ x_d + \tan \phi_M \cdot y_d & \tan \phi_M \end{vmatrix} \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} \tan \phi_M & \tan \phi_M \cdot x_{\text{MS}} - y_{\text{MS}} \\ 1 & x_d + \tan \phi_M \cdot y_d \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (5.11)$$



上式即為式(5.10)的解，且該解即為座標點 $Q(x_q, y_q)$ 。由於點 Q 過直線 L_{Mirror} ，故該點即為 R 點與 Q 點之「中點座標」，因此反射點 $R(x_r, y_r)$ 其座標可由下式求得：

$$x_r = 2x_q - x_d ; y_r = 2y_q - y_d \quad (5.12)$$

再者，倘若要繪製出該反射光(\overline{PR})，則需再求得鏡面直線 L_{Mirror} 與繞射光(\overline{CD})之交

集點 $P(x_p, y_p)$ 座標，故所需求解方程式如下：

$$\begin{cases} y = \tan \phi_M \cdot (x - x_{\text{MS}}) + y_{\text{MS}} \\ y = \left(\frac{y_d - y_c}{x_d - x_c}\right) \cdot (x - x_c) + y_c \end{cases} \quad (5.13)$$

而由克拉瑪公式可得下式：

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \tan \phi_M & -1 \\ \left(\frac{y_d - y_c}{x_d - x_c}\right) & -1 \end{vmatrix} \\ \Delta_x &= \begin{vmatrix} \tan \phi_M \cdot x_{\text{MS}} - y_{\text{MS}} & -1 \\ \left(\frac{y_d - y_c}{x_d - x_c}\right) \cdot x_c - y_c & -1 \end{vmatrix} \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} \tan \phi_M & \tan \phi_M \cdot x_{\text{MS}} - y_{\text{MS}} \\ \left(\frac{y_d - y_c}{x_d - x_c}\right) & \left(\frac{y_d - y_c}{x_d - x_c}\right) \cdot x_c - y_c \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (5.14)$$

上式即為式(5.13)的解，且該解即為座標點 $P(x_p, y_p)$ 。故在繪圖上，增加平面鏡後

之繞射光線即為 \overline{CP} 與 \overline{PR} 之聯集。

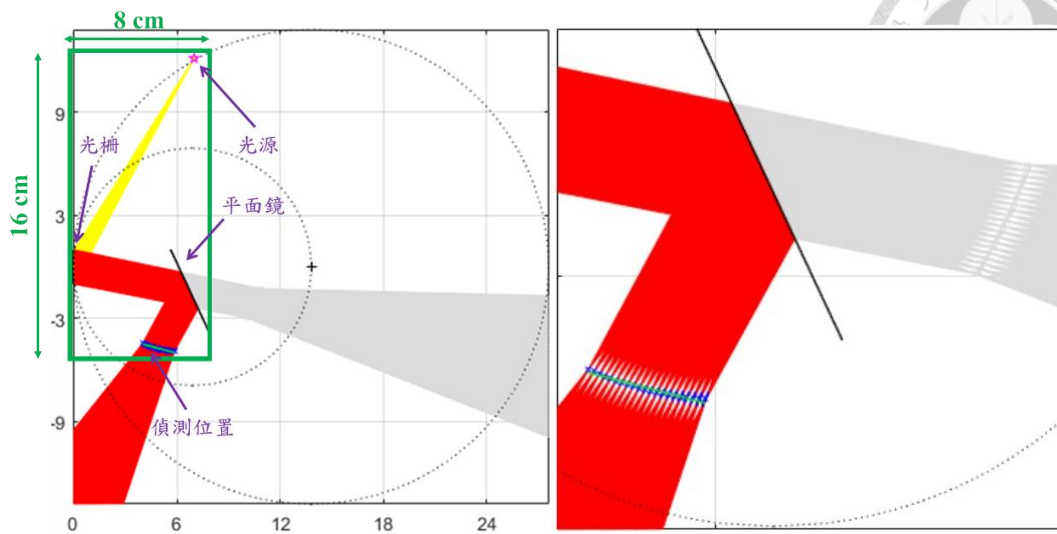


圖 5-20 以平面鏡微小化之光路模擬測試結果

最後，本小節將前述之數學邏輯以 MATLAB 繪製出球面光柵和平面鏡兩光學元件在空間繞射後聚交之行為，如圖 5-20 所示。該測試以入射角 $\theta_{i,1} = 60^\circ$ 射入光柵週期為 $6 \mu\text{m}$ 之球面光柵，階數為「 $m = -1$ 」情況下且測試繞射波長範圍在 $3.5 \mu\text{m} \sim 4.5 \mu\text{m}$ ($\Delta\lambda = 0.05 \mu\text{m}$)，由前小節優化之結果在取 6.9 cm 作為焦距 f 、取 7 cm 作為光源物距 x_b ；同時，平面鏡之右平移量 x_{MS} 為 7.5 cm 、右平移量 y_{MS} 為 -3 cm 與傾角 ϕ_M 為 115° ，所對應的聚交情形作為範例結果。

5.2 CO₂ 量測結果與分析

根據圖 5-20 所設計之結果，其實際量測架設如圖 5-21 所示。該架設係以白熾燈泡作為光源，以入射角 $\theta_{i,1} = 60^\circ$ 入射後，經自製可撓凹面光柵繞射後，再經由平面反射鏡入射至偵測器。其中可撓凹面光柵週期為 $6 \mu\text{m}$ ，且其尺寸為 $2 \mu\text{m}$ ，故其條紋數 $N = (2 \times 10^{-2}) / (6 \times 10^{-6})$ 。其中再繞射端可清楚看見一團白光恰坐落在 60° 之位置，而該位置即為 $m = 0$ 之繞設條紋。

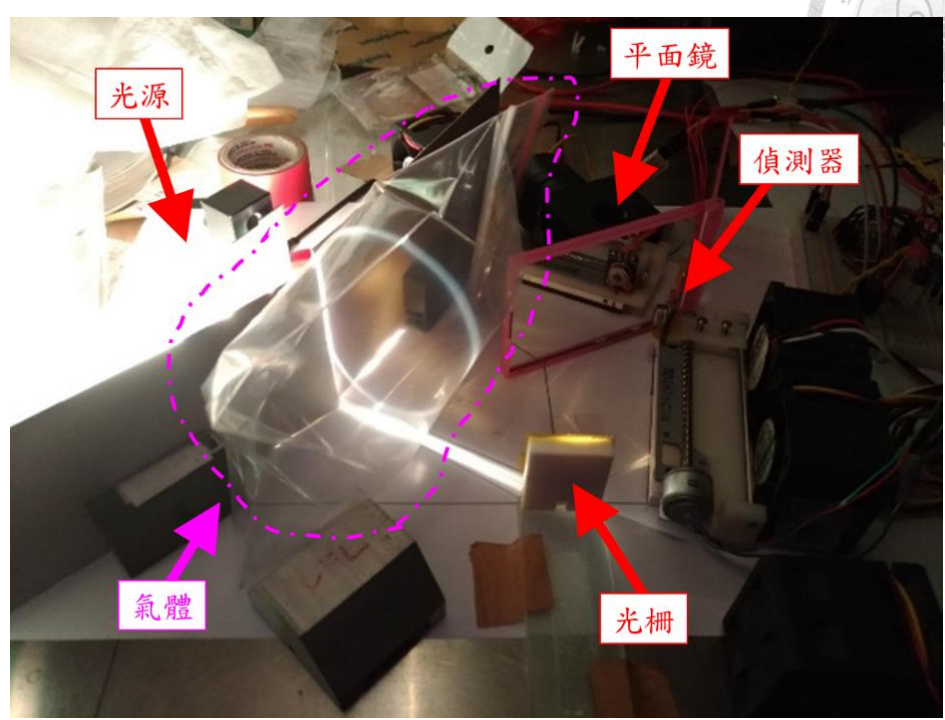


圖 5-21 量測架構實照

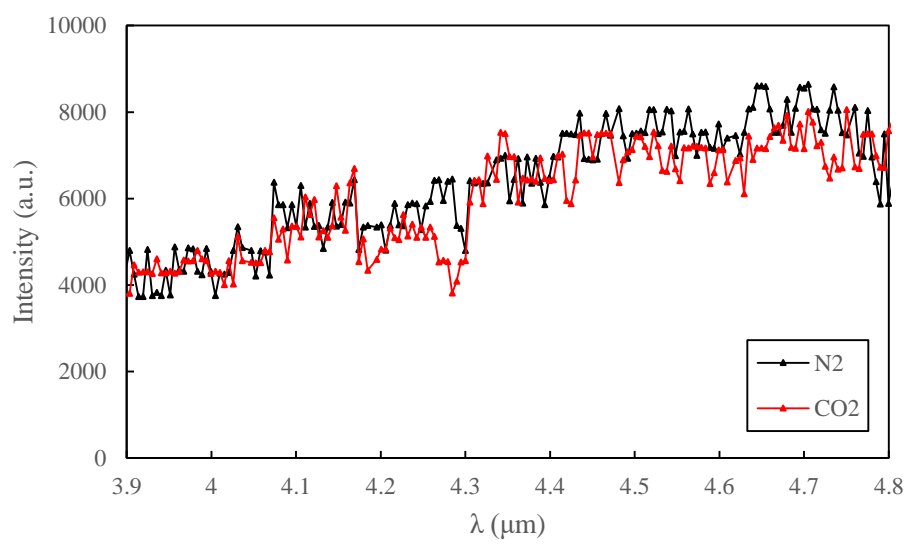


圖 5-22 二氧化碳與氮氣光強度實際量測

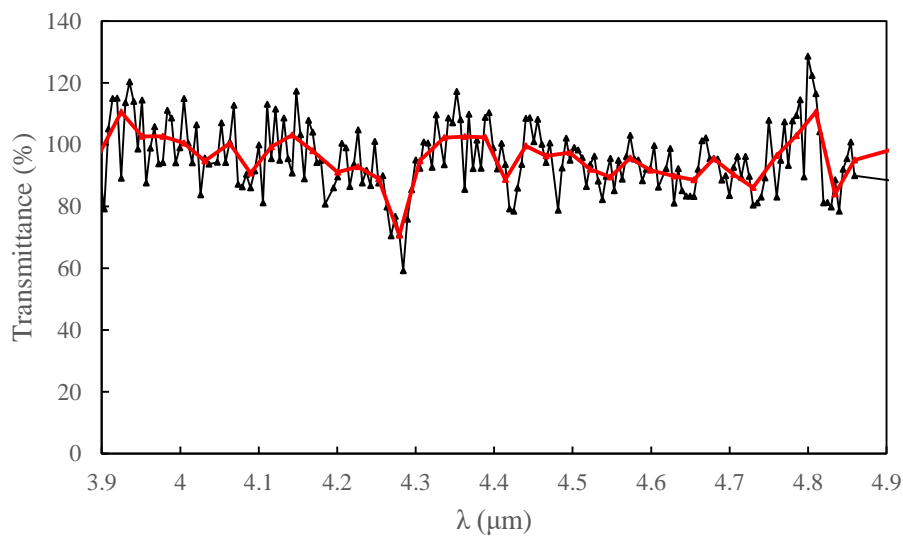


圖 5-23 二氧化碳穿透光譜之實際量測

而本節之目的係希望藉由量測二氧化碳穿透光譜觀察其是否有特徵吸收峰值以驗證本論文光路分析之可行性。如圖 5-21 所示，吾以 PE 夾鏈袋分別填充二氧化碳氣體與氮氣氣體並放置在光源與光柵之間，來量測其光強度與對應波長之關係，如圖 5-22；而將其相除可得對應之二氧化碳之穿透頻譜，如圖 5-23 黑線所示。該圖橫軸波長量測範圍係從 $3.9 \mu\text{m}$ ~ $4.9 \mu\text{m}$ 且以每 5 nm 量測一次資料點，而其縱軸則為二氧化碳之穿透率。再者，吾將 $3.9 \mu\text{m}$ ~ $4.9 \mu\text{m}$ 每 5 個資料點作平均來消除量測雜訊，而可得圖 5-23 紅線，並可以知其在 $4.28 \mu\text{m}$ 有 30% 的吸收峰值，與二氧化碳實際吸收峰值 $4.26 \mu\text{m}$ 差異並不大，相較於所量測之其他波長是一個明顯的吸收峰值，故本研究即以圖 5-23 之量測結果作為整體之結論。

第6章 結論與未來展望



6.1 結論

第一章先說明了空氣等污染對於人類之嚴重性，並介紹了光譜技術可以有效地偵測許多有害物質，藉此引出與本論文之關聯性。

第二章介紹本論文中在紅外光譜儀微型化之光學理論介紹。首先介紹夫朗和斐(Fraunhofer)繞射的理論，其中包含了單狹縫繞、雙狹縫繞射至多狹縫繞射的頻譜分析，並推廣至繞射光柵的應用。再者，針對本論文預期以「反射式」光柵作為實驗基礎而加以介紹其理論，除了基本的閃耀式光柵相關理論外，亦推導了球面光柵在近軸近似下的光學行為，順帶也推論了羅蘭圓的結果。

第三章提以 MATLAB 數學圖形編程軟體來撰寫光譜儀機構微型化之光路設計與分析。首先，因球面光柵與一般球面反射鏡的不同僅在於其繞射與反射所遵循的條件不同而已，故吾先以一般球面鏡作為示範，撰寫出了一般反射鏡所遵循的反射行為後，再將其遵循的反射條件改為繞射條件，如此一來即輕鬆得出球面光柵的繞射行為，此時並沒有任何的假設近似並同時將像差視覺化的呈現之，如此一來本章可以說是將球面光柵繞射命題以真實的情境的呈現之。最後藉由本章理論重新檢視羅蘭圓條件下之聚交情形，可發現羅蘭圓條件較適合用於可見光波段的量測；對於中紅外波段而言，則須以本章之理論重新尋找較佳之聚交條件。

第四章則是著重在光譜儀實體架構上的建立。首先選用白熾鹵素燈泡作為紅外光譜儀之光源，並說明其可行性。再者，成功的以 PDMS 轉印技術製作低成本的可撓式彎曲光柵作為整體紅外光譜儀的核心。最後搭配 Arduino 撰寫機械自動控制程序，以利精準地控制偵測元件在不同繞射波長之位置進行偵測。

第五章則是延續第三章之研究，將球面光柵之光路進行優化，以求得球面光柵最佳焦距與出光點光源之最佳物距。並加入面鏡作為微小化之基礎，同時計算出其理論距焦之情形。並且搭配第四章將系統各元件組裝後以 CO₂ 作為量測目標進行

量測，以加強本論文在實際測量端之完整性。



6.2 未來展望

本研究的目標是製作紅外線光譜儀並以球面光柵對其進行微型化之設計。然而，由於以光柵分光來製作光譜儀係須要對內部光路有通盤的了解與掌握方能「設計」出所需之光譜儀架構。故本研究在第三章跳脫了在「近軸近似」與「羅蘭圓限制」下的討論，以 MATLAB 藉由簡易的數學重新撰寫出光在球面光柵上之所有繞射所遵守的行為。並針對「球面」這樣的光柵進行最適當焦距之優化，且實際進行二氧化碳吸收峰值的量測。因此接下來可依第三章現有理論與程序之基礎，可嘗試設計出最佳解析度之優化曲面作為一理論的指標。而在第五章亦可嘗試其他物質的光譜吸收量測，使本研究所設計之紅外光譜儀得到更多的驗證。此外，以往在光纖通訊以繞射光柵(Free Space Diffraction Grating, FSDG)作為分波解多工器時幾乎係以羅蘭圓作為入射端與接收端之相對位置作設計，然而若以此概念作為可攜式晶片型光譜儀以作紅外光感測之構想，其相對位置上則可藉由本研究來實現之。

參考文獻



- [1] Skoog, D. A., Holler, F. J., & Crouch, S. R. (1998). Principles of instrumental analysis. Cengage learning.
- [2] Bernath, P. F. (2015). Spectra of atoms and molecules. Oxford university press.
- [3] Hollas, J. M. (2004). Modern spectroscopy. John Wiley & Sons.
- [4] Harris, D. C., & Bertolucci, M. D. (1978). Symmetry and spectroscopy: an introduction to vibrational and electronic spectroscopy. Courier Corporation.
- [5] Ingle Jr, J. D., & Crouch, S. R. (1988). Spectrochemical analysis.
- [6] Sands, D. E. (1969). Introduction to crystallography. Courier Corporation.
- [7] Bowley, H. J., Gerrard, D. L., Loudon, J. D., & Turrell, G. (2012). Practical raman spectroscopy. Springer Science & Business Media.
- [8] R. F. Hirsh, "The Riddle of the Gaseous Nebulae", ISIS, vol. 70, No. 2, pp. 196-200, 1979.
- [9] D. Sands, Introduction to crystallography. New York: W.A. Benjamin, pp. 200-210, 1969.
- [10] 吳清沂, 鍾震桂, 「微機電系統技術簡介」, 科儀新知, 第十八卷第三期, 26~40 頁, 民國 85 年 12 月。
- [11] 林俊廷, 「凹面柱狀型微光柵的設計與製作」, 國立交通大學, 碩士論文, 民國 92 年
- [12] M. C. Hutley, "Diffraction Grating," Academic Press, London (1982)
- [13] "近軸和旁軸光線 (Paraxial Rays and Parabasal Rays)", Forum.zemax.com, 2018. [Online]. Available: <https://forum.zemax.com/11248/Paraxial-Rays-and-Parabasal-Rays?JumpToFirstUnreadPost=1>. [Accessed: 3- Jul- 2018].
- [14] "A Level Physics - Coherence and Path Difference", YouTube, 2018. [Online]. Available: https://www.youtube.com/watch?v=S9U_KWP5gB8. [Accessed: 08- Jul- 2018].
- [15] N. Kipnis, History of the Principle of Interference of Light. Basel: Birkhäuser Basel, 1991.



- [16] E. Hecht, Optics. Harlow: Pearson, 2014.
- [17] "The Nature and Propagation of Light", Slideplayer.com, 2018. [Online]. Available: <http://slideplayer.com/slide/12577845/>. [Accessed: 06- Jul- 2018].
- [18] "照度計算基本方法簡介", Wenku.baidu.com, 2018. [Online]. Available: <https://wenku.baidu.com/view/726a6bd428ea81c758f578f5.html>. [Accessed: 05- Jul- 2018].
- [19] "Diffraction from narrow slits-Intensity of single-slit diffraction patterns-Intensity of two-slit diffraction patterns | Wave optics", Kshitij-iitjee.com, 2018. [Online]. Available: <http://www.kshitij-iitjee.com/diffraction-from-narrow-slits/>. [Accessed: 08- Jul- 2018].
- [20] F. Sears, Optics. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1964.
- [21] R. Bright, "The Double Slit Experiment explained - Interlialia Magazine", Interlialia Magazine, 2018. [Online]. Available: <https://www.interlialiamag.org/blog/the-double-slit-experiment-explained/>. [Accessed: 08- Jul- 2018].
- [22] "Young's Experiment", Physicsclassroom.com, 2018. [Online]. Available: <http://www.physicsclassroom.com/class/light/Lesson-3/Young-s-Experiment>. [Accessed: 08- Jul- 2018].
- [23] 王以撒,「光波導多工器中凹面梯形光柵之研究」,國立中央大學,碩士論文,民國91年
- [24] M. Born, E. Wolf and A. Bhatia, Principles of optics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2016.
- [25] J. Durnin, "Exact solutions for nondiffracting beams I The scalar theory", Journal of the Optical Society of America A, vol. 4, no. 4, p. 651, 1987.
- [26] C. McQueen, J. Arlt and K. Dholakia, "An experiment to study a “nondiffracting” light beam", American Journal of Physics, vol. 67, no. 10, pp. 912-915, 1999.
- [27] L. Rayleigh, "On the passage of electric waves through tubes, or the vibrations of



dielectric cylinders", The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, vol. 43, no. 261, pp. 125-132, 1897.

[28] R. Wood, "LXXXV. The echelette grating for the infra-red", The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, vol. 20, no. 118, pp. 770-778, 1910.

[29] "Thorlabs.com - Tutorials", Thorlabs.com, 2018. [Online]. Available: <https://www.thorlabs.com/tutorials.cfm?tabID=0ca9a8bd-2332-48f8-b01a-7f8bf0c03d4e>. [Accessed: 10- Jul- 2018].

[30] Edmund Optics Inc. and E. Inc., "What is the blaze angle and blaze wavelength of a grating and how are they related?", Edmundoptics.com, 2018. [Online]. Available: <https://www.edmundoptics.com/resources/faqs/optics/diffraction-gratings/what-is-the-blaze-angle-and-blaze-wavelength-of-a-grating-and-how-are-they-related/>. [Accessed: 10- Jul- 2018].

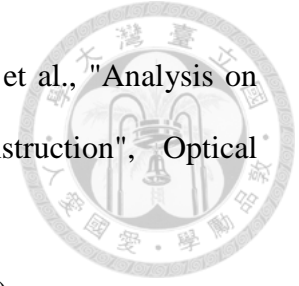
[31] E. Loewen, M. Nevière and D. Maystre, "Grating efficiency theory as it applies to blazed and holographic gratings", Applied Optics, vol. 16, no. 10, p. 2711, 1977.

[32] B. Tek, "An Introduction to a Spectrometer: Diffraction Grating", AZoM.com, 2018. [Online]. Available: <https://www.azom.com/article.aspx?ArticleID=13368>. [Accessed: 10- Jul- 2018]

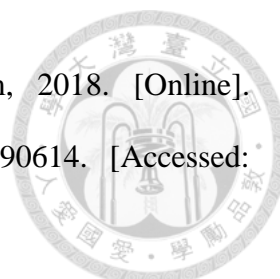
[33] "MODULE 6-9, Gratings", Pe2bz.philpem.me.uk, 2018. [Online]. Available: https://pe2bz.philpem.me.uk/Lights/-%20Laser/Info-999-LaserCourse/C06-M09-Gratings/mod06_09.htm. [Accessed: 10- Jul- 2018].

[34] "Henry Augustus Rowland 1848-1901", History.aip.org, 2018. [Online]. Available: <https://history.aip.org/exhibits/gap/Rowland/Rowland.html>. [Accessed: 11- Jul- 2018].

[35] H. Noda, T. Namioka and M. Seya, "Geometric theory of the grating", Journal of the Optical Society of America, vol. 64, no. 8, p. 1031, 1974.



- [36] H. Yinlei, Y. Jianyi, J. Xiaoqing, Z. Wei, Z. Jianying, Z. Haifeng, et al., "Analysis on Curve Waveguide Grating(CWG) with Rowland Circle construction", Optical Communication and Optoelectronics Conference, pp. 339-341, 2007
- [37] M. C. Hutley, "Diffraction Grating", Academic Press, London (1982)
- [38] "AWG 的工作原理和主要技術指標", Cctime.com, 2018. [Online]. Available: <http://www.cctime.com/html/2008-6-26/20086262356266393.htm>. [Accessed: 11- Jul- 2018].
- [39] P. Pottier and M. Packirisamy, "High-efficiency metallic multistratum concave diffraction grating", Applied Optics, vol. 51, no. 18, p. 4073, 2012.
- [40] "The Physics Hypertextbook", Physics.info, 2018. [Online]. Available: <https://physics.info/>. [Accessed: 13- Jul- 2018].
- [41] "Blackbody Radiation | COSMOS", Astronomy.swin.edu.au, 2018. [Online]. Available: <http://astronomy.swin.edu.au/cosmos/B/Blackbody+Radiation>. [Accessed: 13- Jul- 2018].
- [42] "Black Body Radiation", Galileo.phys.virginia.edu, 2018. [Online]. Available: http://galileo.phys.virginia.edu/classes/252/black_body_radiation.html. [Accessed: 18- Jul- 2018].
- [43] S. Stewart, "Blackbody radiation functions and polylogarithms", Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, vol. 113, no. 3, pp. 232-238, 2012.
- [44] G. (lovesharelove), "Wien's displacement law", 2018. [Online]. Available: <http://blog.xuite.net/lovesharelove/twblog/126542234-%E9%9F%8B%E6%81%A9%E5%AE%9A%E5%BE%8B>. [Accessed: 18- Jul- 2018].
- [45] K. Krane, Modern physics. Hoboken, NJ: Wiley, 2012.
- [46] "LED 積分球流明光譜測試機台系統 - 輝度,色度計,光度計,照度計.流明 - 先鋒科技 - 光電光學光譜儀器雷射", Teo.com.tw, 2018. [Online]. Available: <http://www.teo.com.tw/prodDetail.asp?id=305>. [Accessed: 13- Jul- 2018].



- [47] "MLX90614 Datasheet, PDF - Alldatasheet", Alldatasheet.com, 2018. [Online]. Available: <https://www.alldatasheet.com/view.jsp?Searchword=Mlx90614>. [Accessed: 13- Jul- 2018].
- [48] "如何避免步进电机失步", Eepw.com.cn, 2018. [Online]. Available: <http://www.eepw.com.cn/article/201607/294678.htm>. [Accessed: 13- Jul- 2018].
- [49] "A4988 Datasheet, PDF - Alldatasheet", Alldatasheet.com, 2018. [Online]. Available: https://www.alldatasheet.com/view.jsp?Searchword=A4988%2520datasheet&gclid=CjwKCAjwyrvaBRACEiwAcyuzRCSCpFRgnhaqlTpiHghfGgmmcyujP2dkVvDQBIW4hQ9F0qoQDqbxkBoC3wwQAvD_BwE. [Accessed: 13- Jul- 2018].
- [50] 林清富，陸瑞強，「光電工程概論」，高立圖書，台北，民國 106 年
- [51] J. Meyer-Arendt, Introduction to classical and modern optics. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall International, 1995.