

國立臺灣大學工學院機械工程學研究所

碩士論文

Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

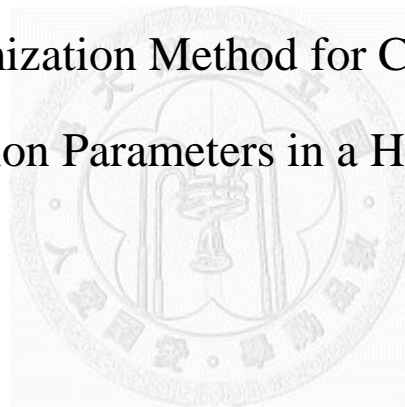
National Taiwan University

Master Thesis

應用疊層參數之複合材料複合式最佳化方法

An Optimization Method for Composites

Using Lamination Parameters in a Hybrid Algorithm



謝岳穎

Yeah-Yin Hsieh

指導教授：鄭榮和 博士

Advisor : Jung-Ho Cheng, Ph.D.

中華民國一百零一年七月

July, 2012

國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書

應用疊層參數之複合材料複合式最佳化方法
An Optimization Method for Composites
Using Lamination Parameters in a Hybrid Algorithm

本論文係 謝岳穎 君 (R99522517) 在國立臺灣大學機械工程學系完成之碩士學位論文，於民國 101 年 7 月 13 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

鄭 榮 和

鄭榮和 (指導教授)

單 秋 成

單秋成

鍾 添 東

鍾添東

系主任

楊耀州 (簽名)

誌 謝

此篇論文之順利完成，首要感謝指導教授鄭榮和老師之悉心及嚴格的指導，包括研究上的問題討論、方向指引、論文寫作、報告呈現乃至成為機械工程師及領導人才所需之專業訓練、處事方法及態度，皆獲益良多，在此獻上深刻的感恩與敬意。此外，也感謝單秋成教授與鍾添東教授給予我論文研究之寶貴建議與提點，促成此篇論文之完成。

自 2007 年加入老師的 FORMOSUN 團隊至今，經歷了燃料電池機車、電動車 Green Jumper 與智慧型個人輕量化電動載具 iPLEV 漫長的設計、研究與製作的過程。過程中與學長姐、同學及學弟妹共同犧牲寒暑假、週末打造夢想的回憶將成為我一輩子珍貴的回憶。特別感謝瑞裕學長的細心帶領，讓我在身為結構組組員的過程中，有機會習得許多寶貴的知識與技術。同時也感謝在燃料電池機車時期，在飛機工廠與舊男八工廠一起打拼的結構組夥伴們：俊志學長、玉麟學長、桓毓學長、其廣學長與晨宇、泰紳、星翰以及嘉霈、奇鴻、奇澤，在實務上的指導與協助，並帶給我許多難忘的體驗。感謝子庭學姊對於專案管理、報告撰寫與簡報設計之指導，讓我在有幸接手 iPLEV 計畫的同時仍不至於手忙腳亂。且感謝在 iPLEV 三年的計劃中曾經一起共事的成員：亦維學長、士硯學長、顯仲、思詠、忠玲、昱龍、Clément、傑葳、彥州、政翰、令沅、承穎、耘翰、景麟、冠翰、則霖、坤宏、鼎翔、選平、人平、竣棠、采君還有北科大首信所帶領的設計團隊，因為有你們的付出與努力，iPLEV 才得以順利的完成。

此外，感謝實習工廠林瑞陽師傅、陳朝琴師傅、廖慶彰師傅以及褚鴻材先生、飛菱實業張啟德先生、翰謙企業方鵬舉先生、BCCT 自動車創意工坊洪棋信先生，在加工製造上的指導與協助；同時感謝耀文學姐、智凱學長、逸祥學長、晏暉學長、家瑋學長、盈宏學長、松慶學長、毅祥學長、芄舜學長、宋儒學長、殷偉學長在研究上的寶貴意見；亦感謝固力聯合實驗室張文泰先生，協助我進行研究中的

實驗部分。上述各位的協助皆對我論文的完成有相當大的幫助。

最後感謝在碩士生涯中，每天生活在一起的同學：汶航、志誠、承佑、逸萱、安雄以及歐陽、文傑、星元、勇智、宗賢、凱帆還有聖凱與益隆，在生活上的照顧，並一起度過這充滿挑戰與冒險的兩年時光，以及許多人在這段期間對我的支持與鼓勵，謹在此表達我誠摯的感謝與祝福。

謝岳穎 于 台大工綜 144 室

2012 年 7 月



摘要

傳統複合材料(如積層板、三明治結構)之最佳化設計方法，通常選定部分設計參數(如疊層數目、角度與順序以及表材、芯材厚度等)作為設計變數，並設定限制條件與目標函數後，直接代入最佳化演算法求解。如果目標函數不具有平滑、連續的梯度關係(如當疊層角度為設計變數時)，則會因為以梯度演算法僅能求得局部最佳解，而通常使用演化式演算法，此方法雖然具有搜尋全域最佳解的能力，但過程中卻必須花費大量的演算次數。如果同時又因結構複雜而需要結合有限元素法求取限制條件及目標函數，則花費的時間將相當可觀。

本研究應用疊層參數(lamination parameter)提出一套複合材料複合式最佳化方法，將最佳化問題分為兩個步驟的子問題：第一步驟以疊層參數為設計變數，因其具凸性(convexity)且與目標函數呈現平滑、連續的梯度關係，因此適用梯度演算法求取最佳解；第二步驟以疊層角度為設計變數，使用演化式演算法逼近最佳解之疊層參數。由於僅於第一步驟需要使用有限元素法計算目標函數，因此將大幅減少收斂時間，提高求解效率。

本論文首先針對伸張與彎曲耦合的疊層參數，以二維擬合限制條件建立近似可行區域，並用於上述最佳化方法，以大幅限縮搜尋範圍而避免不存在之解。並依序透過分析方法準確性、最佳化方法準確性、效率與通用性之驗證，證實使用於積層板可較傳統方法減少約 80%的有限元素計算次數。然後提出三明治勁度矩陣估算法，讓此方法可延伸應用於三明治結構。並驗證除了具有較高的求解效率外，將可能求得優於傳統方法之最佳解。

最後本研究以輕量化個人載具結構設計展示此最佳化方法所帶來之效益。

關鍵詞： 複合材料、疊層參數、積層板、三明治結構、最佳化

Abstract

Usually traditional optimization method for composite materials' (laminates, sandwich structure) started from choosing some design variables like ply number, ply angle, stacking sequence, and the thickness of face and core materials. Second, set up the constrains and objective functions. Finally, apply these design variables and constrains into the optimization algorithm to solve. If design variables and objective functions are not smoothly and monotonically related, such as ply angle as a variable, the evolutionary algorithms are usually adopted since the gradient-based optimization algorithms could only search for local optimal solution. Although the evolutionary algorithms have the ability to search for global solutions, a number of the iterations is needed. In the same time, if the evolutionary algorithms are combined with Finite Element Method to solve the constrains and objective functions due to the complexity of the problem, the time consumed would be considerable.

This research proposes a hybrid algorithm for composites based on lamination parameters. The optimization problem is divided into two. First, set the ply number as variable and search for the optimal solution by gradient-based optimization algorithms. Second, set the ply angle as the variable and fit the optimal ply number by evolutionary algorithms. Since the Finite Element Analysis is induced in the first step, the consumed time to converge would be substantially reduced.

This thesis first set up a feasible region for extension, bending, couple ply numbers by two-dimensional fitting inequalities. Then the feasible region is induced to the optimization method mentioned above to substantially limit the boundary to avoid the does not exist solutions. Additionally, the accuracy of analysis methods, the accuracy of optimization methods, the efficiency, and the versatility are sequentially

verified and found out that about 80% of iteration in Finite Element computing is reduced when applying this method on laminates. Furthermore, the sandwich equivalent stiffness estimation is proposed so that this method could also apply to sandwich structure. Finally, the method is verified not only more efficient but also possible to find a better solution than the traditional method.

Finally, an example is used to demonstrate the benefit the optimization method in this research: the structure design of the Personal Lightweight Electric Vehicle.

Keyword: composite materials, lamination parameters, laminates, composite sandwich structure, optimization



目 錄

| | |
|--|------|
| 誌 謝 | I |
| 摘 要 | III |
| Abstract..... | IV |
| 目 錄 | VI |
| 圖目錄 | XI |
| 表目錄 | XVII |
| 符號說明 | XX |
| 第一章 緒論 | 1 |
| 1.1 前言 | 1 |
| 1.2 研究動機與目的 | 2 |
| 1.3 研究內容與方法 | 3 |
| 1.4 使用軟體簡介 | 3 |
| 1.5 論文內容架構 | 5 |
| 第二章 文獻回顧 | 7 |
| 2.1 複材疊層最佳化 | 7 |
| 2.1.1 梯度法(Gradient-based methods) | 7 |
| 2.1.2 直接搜尋法(Direct search methods) | 10 |
| 2.1.3 疊層專屬演算法 | 15 |

| | | |
|-------|-------------------------|----|
| 2.1.4 | 複合式方法 | 19 |
| 2.1.5 | 小結 | 20 |
| 2.2 | 三明治結構最佳化..... | 21 |
| 2.2.1 | 等向性表材三明治結構最佳化 | 22 |
| 2.2.2 | 積層表材三明治結構最佳化 | 28 |
| 2.3 | 討論..... | 31 |
| 第三章 | 理論背景 | 33 |
| 3.1 | 古典積層板理論..... | 33 |
| 3.1.1 | 積層板應變場推導 | 33 |
| 3.1.2 | 單層薄層應力-應變關係 | 35 |
| 3.1.3 | 積層板合應力、合力矩與勁度矩陣意義 | 37 |
| 3.1.4 | 導入一階剪切變形理論 | 40 |
| 3.2 | 疊層參數..... | 42 |
| 3.2.1 | 疊層參數介紹 | 43 |
| 3.2.2 | 可行區域探討 | 45 |
| 3.2.3 | 疊層參數的物理意義 | 50 |
| 第四章 | 複材積層板最佳化 | 54 |
| 4.1 | 近似疊層參數可行區域求取..... | 54 |
| 4.1.1 | 限制條件擬合式建立 | 56 |

| | | |
|---------|-----------------------------|----|
| 4.1.2 | 擬合式準確性驗證 | 62 |
| 4.2 | 積層板最佳化問題建立..... | 67 |
| 4.2.1 | 設計變數 | 68 |
| 4.2.2 | 設計限制 | 68 |
| 4.2.3 | 目標函數 | 68 |
| 4.3 | 方法架構與流程..... | 69 |
| 4.3.1 | Step1：以梯度演算法進行疊層參數最佳化 | 71 |
| 4.3.2 | Step2：以演化式演算法進行疊層角度擬合 | 71 |
| 4.3.3 | 小結 | 72 |
| 4.4 | 實例驗證與比較..... | 73 |
| 4.4.1 | 分析方法準確性驗證 | 73 |
| 4.4.1.a | 實驗設計與驗證方法 | 74 |
| 4.4.1.b | 有限元素分析模型 | 76 |
| 4.4.1.c | 實驗架構 | 77 |
| 4.4.1.d | 比較結果與討論 | 78 |
| 4.4.2 | 最佳化方法準確性驗證 | 80 |
| 4.4.3 | 效率與通用性驗證—平板剛性最佳化 | 84 |
| 4.4.3.a | 最佳化問題描述 | 84 |
| 4.4.3.b | 有限元素分析模型 | 85 |
| 4.4.3.c | 疊層角度擬合準確性與疊層數目之關係驗證 | 86 |
| 4.4.3.d | 結果與討論 | 89 |

| | | |
|---------|-----------------------------|-----|
| 4.4.4 | 效率與通用性驗證—圓管剛性最佳化 | 98 |
| 4.4.4.a | 最佳化問題建立 | 98 |
| 4.4.4.b | 有限元素分析模型 | 99 |
| 4.4.4.c | 結果與討論 | 100 |
| 4.5 | 總結 | 109 |
| 第五章 | 三明治結構最佳化 | 111 |
| 5.1 | 三明治結構等效勁度矩陣估算 | 111 |
| 5.1.1 | 單層表材三明治結構彎曲勁度矩陣推導 | 113 |
| 5.1.2 | 三明治結構等效勁度矩陣模型建立 | 115 |
| 5.1.3 | 等效表材厚度推導 | 120 |
| 5.1.4 | 特例說明與擬合模型建立 | 121 |
| 5.1.5 | 準確性驗證 | 124 |
| 5.2 | 三明治結構最佳化問題建立 | 126 |
| 5.2.1 | 設計變數 | 127 |
| 5.2.2 | 設計限制 | 128 |
| 5.2.3 | 目標函數 | 128 |
| 5.3 | 方法架構與流程 | 129 |
| 5.3.1 | Step1：以梯度演算法進行連續變數最佳化 | 131 |
| 5.3.2 | Step2：以演化式演算法進行離散變數擬合 | 131 |
| 5.3.3 | 小結 | 131 |

| | | |
|---------|---------------------------|-----|
| 5.4 | 實例驗證與比較..... | 132 |
| 5.4.1 | 分析方法準確性驗證 | 132 |
| 5.4.1.a | 實驗設計與驗證方法 | 132 |
| 5.4.1.b | 有限元素分析模型 | 134 |
| 5.4.1.c | 實驗架構 | 134 |
| 5.4.1.d | 比較結果與討論 | 135 |
| 5.4.2 | 效率與最佳化準確性驗證—平板剛性最佳化 | 138 |
| 5.4.2.a | 最佳化問題描述 | 138 |
| 5.4.2.b | 有限元素分析模型設定 | 140 |
| 5.4.2.c | 結果與討論 | 141 |
| 5.5 | 總結 | 143 |
| 第六章 | 應用實例 | 145 |
| 6.1 | 輕量化個人載具車體結構最佳化設計 | 145 |
| 6.1.1 | 設計方法與模型建立 | 147 |
| 6.1.2 | 最佳化問題建立 | 148 |
| 6.1.3 | 結果與討論 | 149 |
| 第七章 | 總結及討論 | 153 |
| 7.1 | 成果總結 | 153 |
| 7.2 | 未來方向 | 154 |
| 附錄 | | 156 |
| 參考文獻 | | 157 |

圖目錄

| | |
|--------------------------------------|----|
| 圖 1-1 研究流程圖..... | 3 |
| 圖 2-1 以 x^k 為起始點之凸包近似法示意圖[8]..... | 9 |
| 圖 2-2 凸殼近似法疊帶流程圖[9]..... | 10 |
| 圖 2-3 基因演算法流程圖..... | 14 |
| 圖 2-4 應用超級層(SP)於材料分層最佳化之流程圖[52]..... | 16 |
| 圖 2-5 假想層置換示意圖[53]..... | 17 |
| 圖 2-6 疊層角度與厚度分階最佳化流程圖[56]..... | 18 |
| 圖 2-7 疊層角度、厚度分階及材料分層最佳化流程[57]..... | 18 |
| 圖 2-8 結合局部搜尋之修改式基因演算法流程圖[41]..... | 19 |
| 圖 2-9 三點彎曲三明治梁..... | 23 |
| 圖 2-10 受中央集中負載圓形三明治板..... | 23 |
| 圖 2-11 三明治常見破壞模式[65]..... | 24 |
| 圖 2-12 三明治梁破壞分區圖[66]..... | 25 |
| 圖 2-13 三明治貨車車廂模型[67]..... | 26 |
| 圖 2-14 DotchEVO 電動車底盤模型[68]..... | 26 |
| 圖 2-15 火車廂壁材料分區示意[69]..... | 27 |
| 圖 2-16 包含全域、局部與音場模型之最佳化流程[69]..... | 27 |
| 圖 2-17 FORMOSUN2 車體最佳化之設計分區[64]..... | 29 |

| | |
|---|----|
| 圖 2-18 三明治結構有限元素模型[41] | 30 |
| 圖 2-20 複合材料最佳化發展趨勢示意圖 | 31 |
| 圖 3-1 Kirchhoff-Love 板理論於 XZ 平面上的幾何變形 | 34 |
| 圖 3-2 積層板疊層示意圖 | 37 |
| 圖 3-3 材料座標系統與全域座標系統夾角 θ 示意圖 | 37 |
| 圖 3-4 積層板本構關係示意圖 | 39 |
| 圖 3-5 積層板沿著厚度 z 方向：應變為線性變化；應力呈不連續分佈 | 39 |
| 圖 3.3-6 Mindlin-Reissner 板理論於 XZ 平面上的幾何變形 | 42 |
| 圖 3-7 Miki's diagram | 46 |
| 圖 3-8 包含不同疊層參數域(A_{ij} 、 D_{ij} 或 B_{ij})之可行區域隱式解[81] | 48 |
| 圖 3-9 以疊層角度 0° 、 90° 、 $\pm 30^\circ$ 、 $\pm 45^\circ$ 、 $\pm 60^\circ$ 在 $V4j = 0$ 條件下建立之 ($V1j, V2j, V3j$) 域的可行區域(其中 $j=A、D$) [83] | 49 |
| 圖 4-1 疊層參數域($V1A, V2A, V3A$)以 30° 角度增量近似之可行區域 | 55 |
| 圖 4-2 $V1A$ vs $V1D$ 限制條件解析式與擬合式之比較 | 62 |
| 圖 4-3 $V3A$ vs $V3D$ 限制條件解析式與擬合式之比較 | 63 |
| 圖 4-4 積層板複合式最佳化流程圖 | 70 |
| 圖 4-5 ASTM C 393 實驗相關幾何參數 | 73 |
| 圖 4-6 施力塊與積層板僅兩端線接觸 | 74 |
| 圖 4-7 積層板試片尺寸規格 | 75 |

| | |
|---|----|
| 圖 4-8 積層板三點彎曲分析邊界條件示意圖 | 76 |
| 圖 4-9 MTS 810 萬用試驗機..... | 77 |
| 圖 4-10 積層板三點彎曲試驗過程..... | 77 |
| 圖 4-11 $[0]_8$ 積層板分析與實驗結果比較 | 78 |
| 圖 4-12 $[\pm 30]_4$ 積層板分析與實驗結果比較 | 79 |
| 圖 4-13 $[\pm 60]_4$ 積層板分析與實驗結果比較 | 79 |
| 圖 4-14 支撐塊轉軸固定方式..... | 80 |
| 圖 4-15 積層板幾何 $[90]$ | 81 |
| 圖 4-16 定義積層板設計變數 $[90]$ | 81 |
| 圖 4-17 最佳化準確性驗證之有限元素模型..... | 83 |
| 圖 4-18 複材積層平板規格尺寸示意圖 | 85 |
| 圖 4-19 疊層數目以距離做收斂性分析..... | 88 |
| 圖 4-20 疊層數目以目標函數差值做收斂性分析..... | 88 |
| 圖 4-21 疊層數目-距離比對圖 | 89 |
| 圖 4-22 積層平板之 Case1 於不同最佳化方法的目標函數值比較 | 92 |
| 圖 4-23 積層平板之 Case1 以不同最佳化方法所需的有限元素求解器計算次數比較 | 92 |
| 圖 4-24 積層平板之 Case2 於不同最佳化方法的目標函數值比較 | 95 |
| 圖 4-25 積層平板之 Case2 以不同最佳化方法所需的有限元素求解器計算次數比較 | 96 |

| | |
|---|-----|
| 圖 4-26 積層平板之 Case3 於不同最佳化方法的目標函數值比較 | 96 |
| 圖 4-27 積層平板之 Case3 以不同最佳化方法所需的有限元素求解器計算次數比較 | 96 |
| 圖 4-28 演化式演算法與本研究之最佳解的積層板位移圖 | 98 |
| 圖 4-29 複材積層圓管負載條件示意圖 | 99 |
| 並以最小化平板自由端之最大位移量為目標函數，記為： | 99 |
| 圖 4-30 複材積層圓管有限元素分析模型 | 100 |
| 圖 4-31 積層圓管之 Case1 於不同最佳化方法的目標函數值比較 | 102 |
| 圖 4-32 積層圓管之 Case1 以不同最佳化方法所需的有限元素求解器計算次數比較 | 103 |
| 圖 4-33 積層圓管之 Case2 於不同最佳化方法的目標函數值比較 | 106 |
| 圖 4-34 積層圓管之 Case2 以不同最佳化方法所需的有限元素求解器計算次數比較 | 106 |
| 圖 4-35 積層圓管之 Case3 於不同最佳化方法的目標函數值比較 | 107 |
| 圖 4-36 積層圓管之 Case3 以不同最佳化方法所需的有限元素求解器計算次數比較 | 107 |
| 圖 5-1 三明治等效勁度矩陣估算示意圖 | 113 |
| 圖 5-2 單層表材三明治結構彎曲勁度矩陣推導示意圖 | 114 |
| 圖 5-3 多層表材三明治結構彎曲勁度矩陣求取示意圖(以四層表材為例) | 116 |
| 圖 5-4 等效表材厚度推導示意圖 | 120 |

| | |
|--|-----|
| 圖 5-5 應用等效表材厚度估算三明治結構彎曲勁度矩陣示意圖 | 121 |
| 圖 5-6 $D16f$ — $A16f$ 散佈圖 | 123 |
| 圖 5-7 $Di6f$ 發生不同情況之比例 | 123 |
| 圖 5-8 三明治勁度矩陣元素 D_{ijs} 估算流程圖 | 125 |
| 圖 5-9 本研究於無特例情況的 D_{ijs} 估算結果與古典積層板理論之比較(以 $D11s$ 為例)..... | 126 |
| 圖 5-10 本研究對 $Di6s$ 估算結果與古典積層板理論之比較(以 $D16s$ 為例)..... | 126 |
| 圖 5-11 三明治結構複合式最佳化流程圖 | 130 |
| 圖 5-12 三明治結構式片尺寸規格..... | 133 |
| 圖 5-13 三明治結構三點彎曲邊界條件示意圖 | 134 |
| 圖 5-14 三明治結構三點彎曲試驗過程..... | 135 |
| 圖 5-15 $[0]_8$ 表材三明治結構分析與實驗結果比較 | 136 |
| 圖 5-16 $[\pm 30]_4$ 表材三明治結構分析與實驗結果比較 | 136 |
| 圖 5-17 $[\pm 60]_4$ 表材三明治結構分析與實驗結果比較 | 137 |
| 圖 5-18 表材與芯材間發生脫膠破壞..... | 138 |
| 圖 5-19 三明治結構平板負載條件示意圖 | 139 |
| 圖 5-20 三明治結構平板有限元素分析模型 | 141 |
| 圖 6-1 智慧型個人輕量化電動載具..... | 145 |
| 圖 6-2 iPLEV 底盤元件配置圖..... | 146 |

圖 6-3 iPLEV 前複合材料主結構材料分區設計示意圖..... 147

圖 6-4 主結構殼元素模型與材料方向定義..... 147

圖 6-5 主結構求取扭轉剛性之邊界條件..... 148

圖 6-6 傳統方法與本研究之收斂曲線比較..... 152

圖 6-7 iPLEV 全車(左上)與複合材料底盤結構..... 152



表目錄

| | |
|--|----|
| 表 2.1 常用芯材剪切係數與密度擬合[64] | 24 |
| 表 3.1 幾種不同集合之疊層參數域的可行區域體積及建立的超平面數目(其中 V_i 為面內疊層參數、 W_i 為面外疊層參數) [82] | 48 |
| 表 3.2 面內或面外疊層參數域的可行區域體積[84] | 50 |
| 表 4.1 以凸殼近似求取不同維度疊層參數域可行區域的限制條件數量 | 55 |
| 表 4.2 V_{1A} 對 V_{iD} 建立二維限制條件列表 | 57 |
| 表 4.3 V_{1A} 對 V_{iD} 建立之擬合限制條件 | 58 |
| 表 4.4 V_{2A} 對 V_{iD} 建立之擬合限制條件 | 59 |
| 表 4.5 V_{3A} 對 V_{iD} 建立之擬合限制條件 | 60 |
| 表 4.6 V_{4A} 對 V_{iD} 建立之擬合限制條件 | 61 |
| 表 4.7 限制條件擬合式涵蓋率計算 | 64 |
| 表 4.8 序列二次規劃參數設定 | 71 |
| 表 4.9 自適應性遺傳演算法參數設定 | 72 |
| 表 4.10 TC35-12K 碳纖維高韌性環氧樹脂預浸布材料常數 | 76 |
| 表 4.11 積層板不同分析模型之結果比較 | 78 |
| 表 4.12 積層板薄層材料常數 | 83 |
| 表 4.13 解析解與本研究最佳解比較 | 83 |
| 表 4.14 複材積層平板尺寸規格列表 | 84 |

| | |
|--|-----|
| 表 4.15 不同規格尺寸之複材積層板有限元素分析模型 | 86 |
| 表 4.16 積層板薄層材料常數 | 86 |
| 表 4.17 不同疊層數目之對稱疊層的疊層角度擬合結果 | 87 |
| 表 4.18 積層平板之 Case1 於梯度演算法的最佳化結果 | 90 |
| 表 4.19 積層平板之 Case1 於演化式演算法的最佳化結果 | 90 |
| 表 4.20 積層平板之 Case1 於本研究的最佳化結果 | 91 |
| 表 4.21 積層平板之 Case2 於演化式演算法的最佳化結果 | 93 |
| 表 4.22 積層平板之 Case2 於本研究的最佳化結果 | 93 |
| 表 4.23 積層平板之 Case3 於演化式演算法的最佳化結果 | 94 |
| 表 4.24 積層平板之 Case3 於本研究的最佳化結果 | 94 |
| 表 4.25 複材積層圓管負載條件列表 | 99 |
| 表 4.26 積層圓管之 Case1 於梯度演算法的最佳化結果 | 101 |
| 表 4.27 積層圓管之 Case1 於演化式演算法的最佳化結果 | 101 |
| 表 4.28 積層圓管之 Case1 於本研究的最佳化結果 | 101 |
| 表 4.29 積層圓管之 Case2 於演化式演算法的最佳化結果 | 103 |
| 表 4.30 積層圓管之 Case2 於本研究的最佳化結果 | 104 |
| 表 4.31 積層圓管之 Case3 於演化式演算法的最佳化結果 | 105 |
| 表 4.32 積層圓管之 Case3 於本研究的最佳化結果 | 105 |
| 表 4.33 積層圓管之 Case3 於本研究修正後設計變數的最佳化結果 | 108 |

| | |
|--|-----|
| 表 5.1 多層表材之彎曲勁度矩陣元素通式內 D_{ij} 、 D_{ij} 與 D_{ij} 項..... | 118 |
| 表 5.2 三明治結構芯材蜂巢板材料常數..... | 133 |
| 表 5.3 三明治結構不同分析模型之結果比較..... | 135 |
| 表 5.4 三明治結構平板負載條件列表..... | 138 |
| 表 5.5 三明治結構表材與芯材之材料常數..... | 140 |
| 表 5.6 三明治結構不同負載條件下之剛性最佳化結果比較..... | 142 |
| 表 6.1 iPLEV 基本規格..... | 145 |
| 表 6.2 傳統方法與本研究於 iPLEV 前結構扭轉剛性最佳化結果比較..... | 151 |



符號說明

| | |
|-------------------------------------|---------------|
| $u_0(x, y) 、 v_0(x, y) 、 w_0(x, y)$ | 積層板中面位移量 |
| $\phi_x(x, y) 、 \phi_y(x, y)$ | 沿著 x、y 軸的旋轉角 |
| $\varepsilon_x^0 、 \varepsilon_y^0$ | 中面之正向應變 |
| γ_{xy}^0 | 中面之正向剪切應變 |
| $k_x 、 k_y$ | 彎曲曲率向量 |
| k_{xy} | 扭轉曲率向量 |
| Q_{ij} | 對比勁度矩陣元素 |
| \bar{Q}_{ij} | 轉換對比勁度矩陣元素 |
| $\sigma_1 、 \sigma_2$ | 材料座標系統之平面主軸應力 |
| τ_{12} | 材料座標系統之平面剪切應力 |
| $\varepsilon_1 、 \varepsilon_2$ | 材料座標系統之平面主軸應變 |
| γ_{12} | 材料座標系統之平面剪切應變 |
| E_i | 彈性模數 |
| G_{ij} | 剪切模數 |



| | |
|-----------------------------------|-----------------|
| ν_{12} 、 ν_{21} | 浦松比 |
| σ_x 、 σ_y | 全域座標系統之面內應力 |
| τ_{xy} | 全域座標系統之面內剪切應力 |
| ε_x 、 ε_y | 全域座標系統之面內應變 |
| γ_{xz} | 全域座標系統之面內剪切應變 |
| γ_{xz} 、 γ_{yz} | 垂直於面內方向之剪切應變 |
| N_i | 合應力 |
| M_i | 合力矩 |
| V_i | 合剪應力 |
| A_{ij} | 伸張勁度矩陣元素 |
| B_{ij} | 伸張-彎曲耦合勁度矩陣元素 |
| D_{ij} | 彎曲勁度矩陣元素 |
| k | 剪力修正因子 |
| U_i | Tsai- Pagano 參數 |
| V_{iA} | 伸張疊層參數 |



| | |
|-------------|-----------------|
| V_{iB} | 伸張-彎曲耦合疊層參數 |
| V_{iD} | 彎曲疊層參數 |
| \bar{z} | 正常化之厚度 |
| Γ_i | 材料相依矩陣 |
| θ_i | 第 i 層疊層角度 |
| U_{max} | 最大位移 |
| t_{total} | 積層板總厚度 |
| t_{ply} | 單層薄層厚度 |
| FAW | 每平方米纖維布重量 |
| V_{KA-OP} | 伸張疊層參數最佳解 |
| Distance | 疊層參數擬合結果與精確值之距離 |
| $[A]_f$ | 表材伸張勁度 |
| $[D]_f$ | 表材彎曲勁度 |
| t_f | 表材厚度 |
| ρ_f | 表材密度 |



| | |
|-----------------------|--------------------------------|
| $[A]_c$ | 芯材伸張勁度 |
| $[D]_c$ | 芯材彎曲勁度 |
| t_c | 芯材厚度 |
| ρ_c | 芯材密度 |
| $[A]_s$ | 三明治結構伸張勁度 |
| $[D]_s$ | 三明治結構彎曲勁度 |
| A_{ij}^f | 表材伸張勁度矩陣元素 |
| D_{ij}^f | 表材彎曲勁度矩陣元素 |
| D_{ij}^c | 芯材彎曲勁度矩陣元素 |
| D_{ij}^s | 三明治結構勁度矩陣元素 |
| \bar{Q}_{ij}^f | 表材轉換對比勁度矩陣元素 |
| \bar{Q}_{ij}^c | 芯材轉換對比勁度矩陣元素 |
| $r = \frac{t_c}{t_f}$ | 芯材對表材厚度比 |
| $D_{ij}^{\bar{f}}$ | 由 \bar{Q}_{ij}^f 組成之自定義未知項其一 |



| | |
|-----------------|--------------------------------|
| D_{ij}^f | 由 \bar{Q}_{ij}^f 組成之自定義未知項其二 |
| t_{ij}^{eq} | 等效表材厚度 |
| n_f | 表層層數 |
| t_{step} | 芯材厚度規格尺寸增量 |
| n_f^L, n_f^H | 表材層數之上下限 |
| t_c^L, t_c^H | 芯材厚度之上下限 |
| m | 總重量 |
| m^H | 總重量上限 |
| LP_{-op} | 疊層參數最佳解 |
| $t_{f-cont.}$ | 表材厚度連續解 |
| $t_{c-cont.}$ | 芯材厚度連續解 |
| θ_{n-op} | 疊層角度最佳解 |
| n_{f-op} | 表材層數最佳解 |
| t_{n-op} | 芯材厚度最佳解 |
| UR1 | 1 方向之扭轉角 |



第一章 緒論

1.1 前言

1970 年代初期，航太工業蓬勃發展。僅使用單純工程材料如金屬、陶瓷與高分子等往往無法滿足設計上的特殊需求，因而開始了大量的複合材料之相關研究。複合材料結合不同單相材料之優點，提供單相材料所無法達成的優異特性。而研究內容最為廣泛的，當屬纖維強化材與高分子基材組成之複材積層板，如碳纖維強化塑膠(Carbon Fiber Reinforce Plastic, CFRP)。它具有高比剛性、比強度、耐疲勞與性質穩定等遠優於傳統材料的機械性質。因此，即使有衝擊強度不足、脆性破壞特性、破壞檢測困難、製程品質控管不易與難以量產等缺失，讓此材料難以有效的推廣於大眾市場，但卻始終於特殊應用中具有不可取代的地位。

複合材料的應用中又以三明治結構最為常見，將高剛性、高強度的薄板材料，例如以碳纖維、玻璃纖維、kevelar 纖維做為強化材之複材積層板等，佈於結構表面，稱為表材；中央使用高厚度、低密度而並具一定剛性的多孔材料，如泡棉、蜂巢板與巴沙木等，稱為芯材。以利用芯材將表材固定於離中性軸一定距離之位置，以有效提高截面二次矩，達到高比剛性、比強度之目的。此概念其實早已存在於自然界，如動物的骨骼、植物的枝幹等。

複合材料至今發展超過 40 年，相關理論知識已具有一定的完整性，且面對複合材料的各項缺失，在這幾十年的研究中亦陸續有所突破或者找到相應適合的應用。所以相信複材材料取代大量現有工程材料，而廣泛的使用於各種不同工程領域中之時將指日可待。

因此，當未來複合材料在理論背景、設計流程、分析方法與製造技術皆齊備的情況下，面對必須在短時間產出各種不同應用領域之產品的挑戰，如何以一個通用性高且有效率的方法將複合材料做最佳的運用，將是下一步值得深入研究探討的課題。

1.2 研究動機與目的

複合材料具有超越單相材料之優異的機械性質，但是欲於實際工程應用上達到絕佳的效果，仍必須配合良好的設計能力，否則其結果甚至可能遜於傳統材料而無法發揮優勢。但是相較於與傳統材料，複合材料設計上最大的差異在於必須考慮多倍於傳統材料之設計參數，例如對於積層板而言，就必須額外對強化材與基材選用、疊層數目、角度與順序等進行設計，而三明治結構由於需同時考慮表材與芯材之搭配，其設計上將更為複雜。

未來在複合材料逐漸擴展其應用領域的同時，也將面臨須各種截然不同幾何形狀或設計目標之設計案例。如果至此仍仰賴工程師的經驗判斷進行設計，顯然除了可能需要大量的人力資源之外，亦相當耗費時間成本且仍未必可以準確獲得最佳的設計結果。因此，如何以一種通用而有效率最佳化方法對複合材料進行設計，將是複合材料相關研究中非常重要的一環，且對於目前趨勢皆欲縮短產品開發周期的商業型態，亦將帶來極大的效益。

目前已有相當多關於複合材料最佳化的研究，即印證了上述的論點。然而，現有的複合材料最佳化方法，通常可能侷限於簡單幾何形狀而得以使用解析方法求解；或者選定部分設計參數為變數，訂定限制條件以及目標函數後，直接帶入某一種現有的最佳化演算法之中，而對於求解效率的改善亦往往是一般性的針對最佳化演算法進行修正，並未利用複合材料本身的物理特性進行設計。因此對於較複雜的最佳化設計案例，當同時需結合有限元素法求取目標函數時，往往伴隨著求解效率不佳的問題，並難以有顯著的改善。

本研究目的在於建立一套以複合材料力學特性為基礎，設法將最佳化問題劃分為子問題，並運用不同演算法之優勢求解。以期可有效減少需要有限元素法計算之次數，而達到大幅提高求解效率之目標的複合材料複合式最佳化方法。

1.3 研究內容與方法

本研究之流程圖如圖 1-1 所示，以古典積層板理論(Classical Laminate Theory, CLT)與衍伸出的疊層參數(lamination parameter)做為複合材料的理論基礎。首先以擬合方式建立近似疊層參數可行區域，補足現有解析式對於疊層參數耦合域之不足。然後結合梯度演算法與演化式演算法，提出一套對於積層板型式之複合材料複合式最佳化方法。並分別透過三點彎曲實驗，驗證分析方法準確性；斜交對稱疊層平板之最佳疊層角度解析解，驗證最佳化準確性；不同規格尺寸之平板與不同負載條件之圓管的剛性最佳化問題，驗證效率與通用性。

接著進一步提出三明治結構等效勁度矩陣估算法，解除上述方法僅能用於單一材料的限制，再導入一階剪切變形理論，因此可將此方法進一步應用於三明治結構最佳化。並分別透過三點彎曲實驗先驗證分析方法準確性；再以平板結構剛性最佳化驗證其效率與準確性。

最後本研究以輕量化個人載具結構設計展示此最佳化方法所帶來之效益。

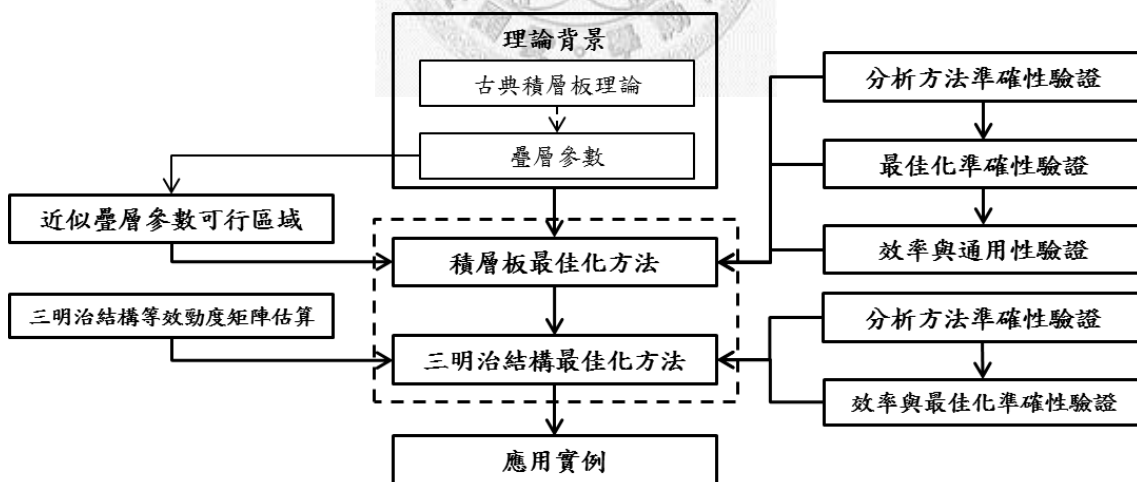


圖 1-1 研究流程圖

1.4 使用軟體簡介

本研究主要使用三套軟體，以下將分別介紹其軟體特性、功能與本研究使用之目的做介紹：

1. 程序整合與最佳化設計軟體—OPTIMUS

OPTIMUS 針對各產品設計參數進行分析模擬以及最佳化求解的過程，可以分成程序整合(Process Integration)、實驗設計(Design of Experiment)、反應曲面建置(Response Surface Modeling)、最佳化設計參數求解(Optimization) 以及穩健與可靠度分析設計(Robust & Reliability Design)等五個部分。

而本研究主要使用其程序整合以及最佳化設計參數求解之功能。在流程整合(Process Integration)方面，使用者可以透過圖形化的操作介面建立工作流程，整合許多知名的 CAD/CAE 及電路模擬設計軟體，自動進行設計參數模擬並擷取各模擬後的數據，並支援使用者自行開發的應用程式。並提供許多數值最佳化的演算法可分別求單目標及多目標解，例如序列二次規劃(Sequential Quadratic Programming)等局部最佳化方法和基因演算法等全域最佳化方法。

2. 有限元素分析軟體—ABAQUS

本研究所有複合材料之有限元素模型概使用 ABAQUS 軟體建立，並以內建的 ABAQUS/standard 做為計算目標函數與限制條件之求解器。此套裝軟體應用範圍涵蓋靜態固體力學、熱傳、電磁場及動態振動、機動學、撞擊等工程常見問題，特別專長於複雜非線性問題之分析。由於 ABAQUS 已發展多年(早期屬於美國 HKS 公司)，並具有複合材料及三明治材料分析模組、高度擴充性副程式模組及逐漸增加對 CAD 軟體(CATIA)之整合性等特點，其準確度亦廣獲各領域學術研究肯定採用，故本研究選用此一軟體為主要分析求解工具。

3. 數學軟體—MATLAB

MATLAB 是一個包含大量計算演算法的集合。函數中所使用的演算法都是科研和工程計算中的最新研究成果，從最簡單最基本的函數到諸如矩陣、特徵向量、線性方程組的求解、微分方程及偏微分方程的組的求解、符號運算、傅立葉轉換和資料的統計分析、工程中的優化問題、疏鬆陣列運算、多維陣列操作以及建模

動態模擬等。並具有方便的資料視覺化功能，以將向量和矩陣用圖形表現出來。高層次的作圖包括二維和三維的視覺化、圖像處理、動畫和運算式作圖，適用於科學計算和工程繪圖。MATLAB 的指令運算式與數學,工程中常用的形式十分相似，故用 MATLAB 來解算問題要比用 C、FORTRAN 等語言完相同的事情簡捷得多，使用者也可以將自己編寫的實用程式導入到 MATLAB 函式程式庫中方便自己以後調用。此外，許多的 MATLAB 愛好者亦編寫好一些程式，於網路平台下載後即可直接使用。

本研究即以內建函數 `convexhulln`，求取近似疊層參數域之凸包(convex hull)，然後再以這些資料點產生包絡線以建立二維不等式限制條件。此外，以 Michael Kleder[1]所撰寫的 VERT2CON 函數，可進一步將 N 維凸包轉換成 N-1 維的線性不等式。



1.5 論文內容架構

本論文共分為七章，依下列方式陳述：

第一章 緒論：

介紹本研究之動機與目的、研究內容與方法以及簡介使用軟體。

第二章 文獻回顧：

對於複材積層板最佳化方法、三明治結構最佳化方法做回顧。

第三章 理論背景：

介紹古典積層板理論、一階剪切變形理論與疊層參數，並探討疊層參數可行區域的研究現況。

第四章 複材積層板最佳化：

建立近似疊層參數可行區域之限制條件擬合式，並提出複材積層板複合式最

佳化方法。然後，先後以三點彎曲實驗驗證分析方法準確性、以壓力容器解析解驗證最佳化方法準確性及以平板與圓管在不同負載條件下的剛性最佳化問題，驗證此最佳化方法之效率與通用性。

第五章 三明治結構最佳化：

提出三明治勁度矩陣估算法，並結合第四章所提出之複合式最佳化方法，應用於三明治結構最佳化。然後，同樣先以三點彎曲實驗驗證分析方法準確性，再以平板剛性最佳化問題，驗證此最佳化方法之準確性、效率與通用性。

第六章 應用實例：

以輕量化個人載具結構設計展示最佳化方法所帶來的效益。

第七章 總結及討論：

總結說明本研究所提出之複合材料複合式最佳化方法，相較於傳統最佳化方法所具有之優勢與具體效益，並探討未來可能之發展方向。



第二章 文獻回顧

2.1 複材疊層最佳化

複合材料積層板(laminates)具有較等向或正交性材料更廣泛的設計自由度，可依需求設計出更優良的機械性質。其設計參數除了所有複合材料皆會考慮的基材、補強材的材料選擇之外；疊層數目、形狀尺寸、鋪陳順序及疊層角度等，都是必須納入考量的項目。因此，如何設計複合材料積層板以達成需求，乃至得到最佳的設計目標值，是使用此種材料型式的一大考驗。

此外，對於複合材料疊層最佳化而言，複雜與困難之處亦不僅是具有大量的設計變數，其變數與目標函數通常呈現多峰(multimodal)或不連續的特性，乃至因為設定疊層數目為變數而衍伸成變維度(variable-dimensional)的最佳化問題。使得就相同變數量而言，複材疊層最佳化往往比一般最佳化問題需要更高的求解成本，且更難以求得全域最佳解，於數學上屬於 NP-hard 問題。

從 1970 年代複合材料逐漸應用於航太領域開始，開始有相關研究提出複合材料積層板的設計方法，並探討如何得到最佳的設計結果。以下就使用的最佳化方法分類，分別介紹不同方法於複材疊層最佳化之應用，並說明其特性及優缺點。

複材疊層最佳化以方法可主要歸納為[2]：梯度法(Gradient-based methods)、直接搜尋法(Direct search methods)、疊層專屬演算法及複合式方法。

2.1.1 梯度法(Gradient-based methods)

梯度法通常需要計算目標函數及限制對設計變數之梯度資訊並以此進行演算，以決定搜尋方向與搜尋步長，而當問題無法直接以數學式表示時，會以近似方式建立關係式。此方法相較於直接搜尋與啟發式演算法而言有較高的收斂速度，且當問題為平滑、單調且單峰時，可收斂至精確解。但是一但遇到多峰(multimodal)或者不連續等較複雜的問題時，則容易收斂至局部最佳解。以下整理梯度法於複

材疊層最佳化的相關研究與應用：

a. 擬牛頓法(Quasi-Newton method)：

牛頓法(Newton methods)因為需要二階梯度資訊，不適用於複材疊層最佳化問題。取而代之的是擬牛頓法(Quasi-Newton method)，因其不需要計算二階微分項即可求取 Hessian。Kicher and Chao[3]使用該方法最佳化一個複材圓柱薄殼，以單層纖維體積含量與角度為設計變數，在不同邊界條件下，搭配懲罰函數求取滿足強度限制之最低重量。Kim and Lee[4]則用於壓電纖維複材曲致動器之性能改進，以三層壓電纖維角度為變數並比較不同材質組合，求取較佳之性能表現。

b. 可行方向法(Method of feasible directions, MFD)：

可行方向法(Method of feasible directions, MFD)可解含有不等式限制條件之問題。由於複材疊層問題通常含有不等式限制條件，因此相較於以上方法，複材疊層最佳化更適合使用此方法[5]，但同樣並不一定收斂至全域最佳解。近年來，有相關研究結合有限元素法[6, 7]，使其微分項資訊可由有限元素分析結果近似或以敏感度分析取得。

c. 近似方案(Approximation schemes)：

只要稍為複雜之最佳化問題，其目標函數與限制條件通常為設計變數的隱函數，也就是難以表示為設計變數的函數。所以在最佳化數值方法的過程中必須進行多次目標函數與限制條件的計算(如以上 a.、b.之方法)。如果為了求得目標函數或限制條件均進行有限元素分析，必然會花費大量演算時間而缺乏效率。近似法(Approximation methods)將目標函數或限制條件近似成一組可以由設計變數所表示之顯函數，以此提升演算效率。對於複材疊層最佳化問題，有研究使用近似方案(Approximation schemes)，亦即將原始問題轉換成以多個由一階或二階泰勒展開式表示之顯函數近似的子問題。

Schmit 與 Farshi[8]以將非線性規劃的問題轉換成多個線性近似的子問題的方

法，求解一複材對稱疊層最佳化之問題，其問題設定為已有既定的疊層數目及角度，以各層疊層厚度為設計變數，在達到強度與勁度矩陣需求的限制條件下，求取積層板最小重量。也因為厚度與限制條件為單調函數關係，所以使用線性近似可以達到良好的效果。

Bruyneel 與 Fleury[9]在古典積層板理論背景下，建立以疊層角度為設計變數，破壞判准為設計限制，求取最小應變能之最佳化問題，以比較八種不同近似方案之收斂速度及適應性。然後用「對於單調與非單調設計變數分別採用不同的適合近似方案」之方法，求解在既有的對稱疊層數目下，同時以各層厚度、角度為設計變數之應變能最小化問題。結論提出以如凸包近似(convex approximation)(見圖 2-1)結合數學規劃方法求解子問題[10]，對於疊層角度與厚度最佳化可大幅減少演算次數，提升求解效率。但是由於原始最佳化問題缺乏凸性(convexity)，因此僅能求得局部最佳解[9]。

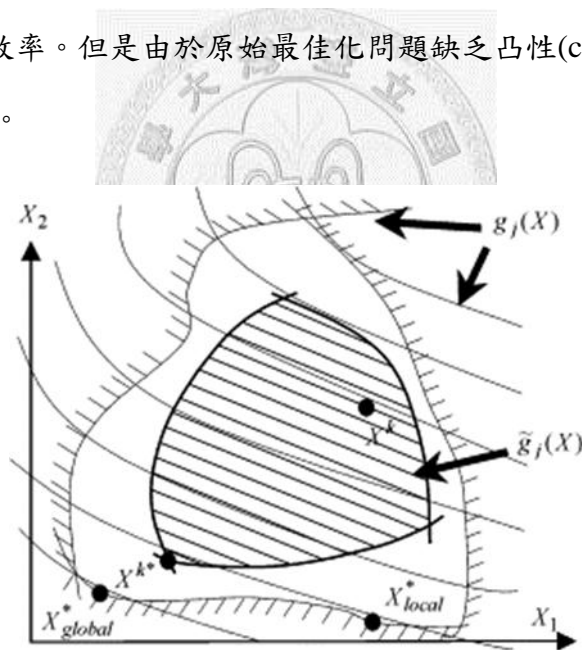


圖 2-1 以 x^k 為起始點之凸包近似法示意圖[8]

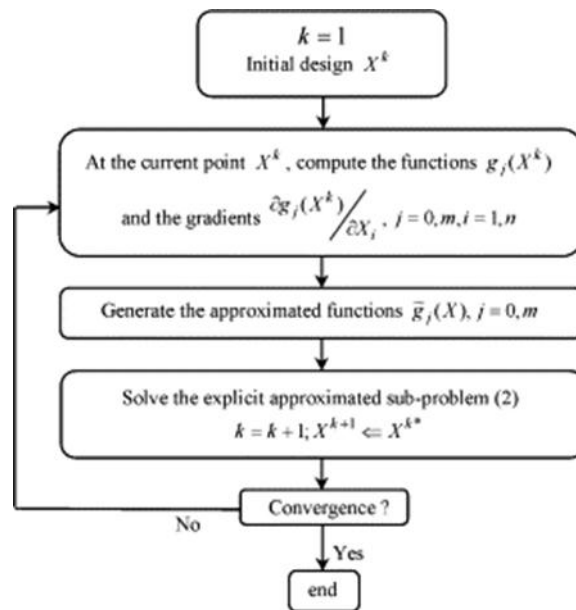


圖 2-2 凸殼近似法疊帶流程圖[9]

Wang 與 Karihaloo[10]以及 Liu[11, 12]將序列二次規劃 (Sequential Quadratic Programming, SQP) 應用於複材疊最佳化，將原本的高階非線性問題，建構成局部二階非線性規劃。以二階模型近似目標函數；以線性模型近似限制條件，而得以求解。此外 Wang 與 Karihaloo[10]表示對大多數的問題而言，序列二次規劃 (Sequential Quadratic Programming, SQP) 可較其他序列式規劃方法，如序列線性規劃 (Sequential Linear Programming, SLP)、序列凸包規劃 (Sequential Convex Programming, SCP)，在較少梯度計算下得到較精確的結果。

然而，在複材疊層設計問題中，對於結構響應，通常呈現高階非線性且有多處局部最佳解。因此，使用近似法可能不準確或者無法描述該反應，尤其是當疊層角度為設計變數時，即有可能求得錯誤的最佳化結果[2]。

2.1.2 直接搜尋法(Direct search methods)

對比於梯度法(Gradient-based methods)擁有迅速的收斂速度的優點；直接搜尋法(Direct search methods)的優勢在於不需要目標函數與限制條件的梯度資訊，而是有系統的分析每次計算的目標函數值，一步步逼近最佳解。這項優勢讓該方法較廣泛的被應用於複材疊層設計中。以下整理直接搜尋法於複材疊層最佳化的相關

研究與應用：

a. 列舉法(Enumeration search)：

於 1970 年代複合材料發展初期，複材疊層以列舉並計算所有可能之設計變數組合，然後從中挑選最佳解之方式進行最佳設計。例如 Waddoups[13]與 Verette[14]皆以此方法，在滿足設計需求的情況下，搜尋最輕量的複材疊層設計結果。Park[15]則以未發生首層破壞之強度為目標函數，在特定疊層數目下，繪製不同負載條件對最佳疊層角度之變化趨勢，以提供複材疊層設計參考。Weaver[16]亦以等高線圖的方式建立不同疊層配置的選擇圖，提供使用者參考之用。然而，這些方法雖然可以提供複材疊層初步設計之參考，但由於其可採用變數數量過少或者負載條件過於簡單，在實際應用上是受限的。

b. 單純形法(Simplex method)：

單純形法(Simplex method)運用單純形(Simplex)的概念，由 N 維的設計空間中的 $N+1$ 個變數組合點構成單純形。由初始產生的單純形起始，以出現新的較佳點取代原單純形中的最差點。演算過程中單純形的各端點(vertices)會逐漸往目標函數反應較佳的位置移動，直到單純形收縮至不再有更佳的點出現時即判定達到收斂。Tsau 等人[17]使用此演算法結合有限元素分析，進行拉伸負載下的鋪層順序最佳化設計。Tsau 與 Liu[18]比較單純形法與擬牛頓法(Quasi-Newton method)於疊層最佳化之表現。提出在變數數量較少的情況下(例如：疊層數目少於四層)，單純形法有較佳的收斂速度與準確性。但是隨著變數數量提升，擬牛頓法的誤差無明顯變化；而單純形法卻有因此增加的現象。Han 與 Neumann[19]亦表示單純形法較適用於少量變數之問題(例如：變數數量低於十個)，因為收斂速度對變數數量幾乎呈現指數方式下降，過多的變數數量將導致此方法效率低落。此外，因為最佳化結果仍受初始單純形的計算結果所影響而僅能視為局部最佳化方法，以及並無限制條件，皆不利於直接應用於複材疊層最佳化問題[2]。

c. 隨機與貪心搜尋(Random search & Greedy search)：

隨機搜尋(Random search)法為在設計變數空間內，指定或隨機產生一個初始點，並於此初始點周圍指定的範圍內隨機產生 n (給定之參數)個點，然後選取當中目標函數值最佳者，做為下一次演算的起始點。以此進行可預設演算次數的疊代運算。Foye[20]最先將隨機搜尋應用複材積層板的最佳疊層角度搜尋。Graesser 等人[21]則將隨機搜尋法結合線性搜尋—以隨機搜尋法之初始點與當次演算最佳點建立搜尋方向，以線性搜尋決定搜尋步長以求取下一個初始點，應用於求解疊層數目最小化之問題，而此方法即是所謂的貪心搜尋(Greedy search)法。

隨機搜尋法雖然具有簡潔的演算流程之優點，但是其收斂數度與結果仍受到目標函數之平滑性以及初始點周圍的較優與較差解比例所影響，通常只能找到局部較佳解。且演算成本幾乎與離散設計變數的增加呈現指數方式的成長[22]。因此，近年來已鮮少使用此類方法於複材疊層最佳化領域。

d. 模擬退火法(Simulated annealing, SA)：

模擬退火法(Simulated annealing, SA)模仿冶金的退火步驟，可視為全域化的修正貪心搜尋法。因為該演算法在最佳化過程中，允許一定比例的不利解，其允許的比例由「退火溫度」此參數決定。如同冶金的退火步驟，「退火溫度」會以一組設定的變化曲線逐漸下降，藉由此過程避免過早收斂至局部較佳解。

模擬退火法常被運用於複材疊層最佳化，僅次於後面將提到基因演算法(Genetic algorithm, GA) [23]。有相關研究比較兩者對於疊層最佳化的表現：Sargent 等人[24]、Sadagopan 與 Pitchumani[25]及 Sciuva 等人[26]認為基因演算法相對於模擬退火法對於各種不同的疊層最佳化問題有較好的強健性。不過仍有其他學者提出不同論點，例如 Rao 與 Shyiu[27]則表示於該研究的多個最佳化問題中，模擬退火法無論在演算成本或求得之最佳解皆優於基因演算法。整體而言，相關文獻並無統一的定論，仍須視最佳化問題而定。

e. 基因演算法(Genetic algorithm, GA)：

基因演算法(Genetic algorithm, GA)是一種演化式最佳化方法，其概念是由達爾文所提出之「物競天擇、適者生存」的遺傳學理論而來。其主要架構在 1975 年由 Holland[28]提出，演算流程如圖 2-3 所示。首先將所有設計變數轉換為基因碼，然後隨機給定基因碼產生初始族群；族群大小由設計者指定，依照問題需要，個體數可從數個至數千個。接著計算所有個體的目標函數值，選取較優良的個體。被選出的個體再互相交換基因產生下一代個體。在決定下一代個體基因時，有一定比例的基因發生突變，使新的基因可以不斷被加入。下一代個體的基因都決定後，再計算其目標函數值，並回到選擇的步驟，重新選出優秀個體以產生下一代，以此疊代演算直到達到收斂標準為止。停止搜尋的標準可以是達到某個目標函數值，或搜尋超過指定的世代數，或者超過多少代以上沒有更好的個體出現，設計者依問題需要決定其收斂標準。

基因演算法除了具有如同其他直接搜尋法不需要梯度資訊的優勢，而且因為是對整個族群的個體進行搜尋而非單一點區塊，所以只要族群個體數量及突變參數設定得宜，即可較其他直接搜尋法有更大的機會跳脫局部最佳解。此外，因為基因演算法是對基因碼進行搜尋而非變數本身，所以無論變數多寡、變數本身性質如何、變數上下界限制或者離散性的排序問題，皆可在轉換基因碼時同時考慮。同時可搭配懲罰函數機制，求解具限制條件的問題。也因為基因演算法適合用於多變數；不連續或離散變數；目標函數難以微分或無法微分；以及具有多個局部最佳解的問題，因此相當適合應用於複材疊層最佳化。而近年來，基因演算法也的確發展成為此領域最廣泛使用的最佳化演算法[29]。

從 1992 年，Callahan 與 Weeks[30]、Nagendra 等人[31]最先將基因演算法應用於積層板鋪層順序最佳化開始，基因演算法即逐漸被大量採用於求取各種不同的目標函數，例如：強度[32, 33]、扭曲負載[32, 34-36]、應變能[37]、基頻[38]、重量[39]與剛性[40]等。分析模型亦由簡單的方形平板[41]、薄殼圓柱[42]乃至於複雜的機翼[43]、葉片[44]等結構體。也由於分析模型逐漸趨於複雜，近年來往往會

將配合有限元素法，以求取其應力、應變做為目標函數或限制條件。

然而，儘管基因演算法擁有多數利於複材疊層最佳化的優勢，但是因為該演算法基礎架構即是需要在每一個世代的都經過相當於族群個體數的計算次數，且往往需要經過多個世代的演算才能得到良好的結果。假如分析模型又具有一定的複雜程度而需要搭配有限元素法，那麼整個最佳化過程將變得相當耗費演算成本而導致效率低落。

於複材疊層最佳化領域，有研究對於基因演算法收斂效率低落及避免過早收斂提出改善方法，例如：採用平行運算技術[45]、多階分段最佳化[46]、搭配近似法[47]或反應曲面[48]或根據最佳化問題修改其突變機制[49]等。但基本上仍然無法改變此演算法本質上耗費演算成本的缺點。

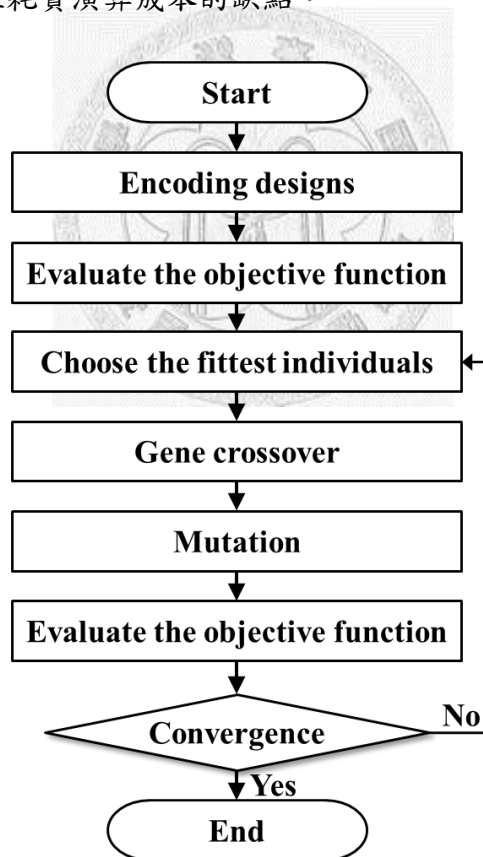


圖 2-3 基因演算法流程圖

f. 其他啟發式最佳化方法

除了以上提過的直接搜尋法，亦有研究使用其他啟發式演算法於複材疊層最

佳化，例如：粒子群最佳化(Particle swarm optimization, PSO)演算法、蟻群最佳化(Ant colony optimization)演算法等，這些研究大多會與基因演算法相比較，並於該文獻中顯示收斂速度優於後者，但對於不同種類設計變數的強健性，卻仍有不足基因演算法之處。

2.1.3 疊層專屬演算法

a. 材料分層最佳化

有研究提出以序列方式最佳化疊層，此方法會先對目標函數敏感度較高的單層或子集疊層做最佳化，例如：易於發生首層破壞[50, 51]或對於剛性影響最大[49]的外側疊層，再依序最佳化敏感度次要的子集疊層。Todoroki 等人[52]應用此概念提出一套系統化的複材疊層最佳化方法，其流程如圖 2-4 所示。此方法先以擬對稱疊層估計需要的疊層數目，再轉換成對每個方向皆有最佳材料常數的超級層(Super ply, SP)，進一步減少疊層數目。然後由最外層開始依序置換成實際的材料常數並使用分支界定法(Branch-and-bound method)求取最佳疊層角度，直到所有疊層皆完成置換動作。Narita[53]及 Narita 等人[54]則使用不具剛度(rigidity)的假想層(hypothetical layers)做為初始狀態，再從最外層開始置換成正交性材料並搜尋最佳疊層角度，其概念如圖 2-5 所示。材料分層最佳化方法的求解速度明顯高於其他最佳化方法[2]，但也因為通常每一個步驟中僅改變同一種類的單一或少量變數，其搜尋結果甚至可能並非局部最佳解。

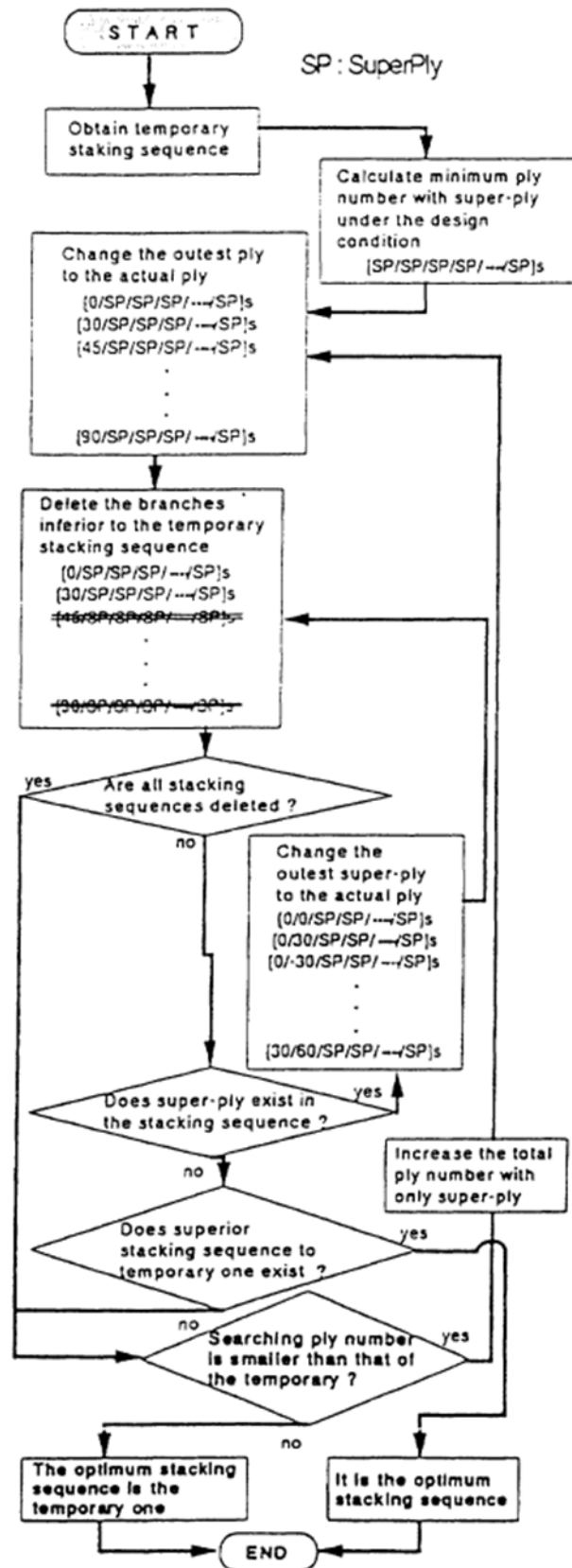


圖 2-4 應用超級層(SP)於材料分層最佳化之流程圖[52]

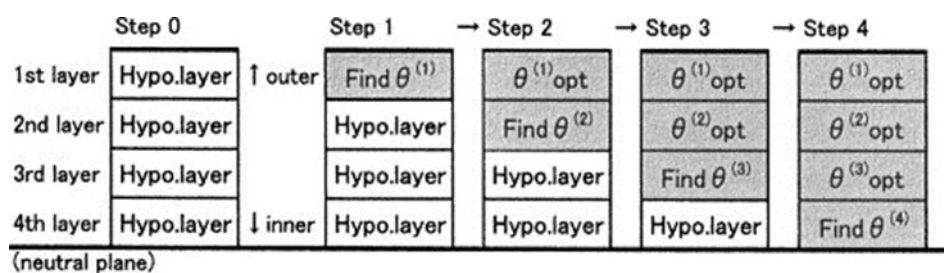


圖 2-5 假想層置換示意圖[53]

b. 問題分階拆解

複材疊層設計具有多種不同種類的设计參數，如疊層層數、角度與厚度等，因而增加最佳化的困難度。為了簡化最佳化問題，有研究提出以設計變數的類型分階，將問題拆解成不同階層的子問題。António 等人[55]及 Kim 與 Sin [56]皆將最佳化問題分為兩個階段：先決定疊層角度；再決定各層的疊層厚度以最小化重量，其最佳化流程如圖 2-6 所示。Farshi 與 Herasati[57]將前述之材料分層最佳化概念導入疊層角度與厚度最佳化流程，建立增減層數的機制，其最佳化流程如圖 2-6 所示。

然而，以問題拆解方式求解複材疊層最佳化問題，固然可以提升收斂速度，但也因為各個子問題之間的關係並非完全獨立，造成經過第二階段的變數調整後，第一階段決定的變數值已並非該狀態下最佳解之情況。使最終求得之解往往與全域最佳解有一段差距[2]。

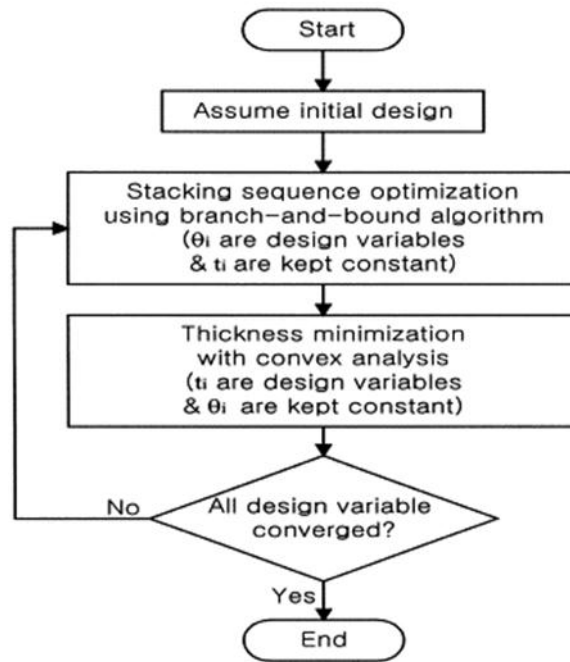


圖 2-6 疊層角度與厚度分階最佳化流程圖[56]

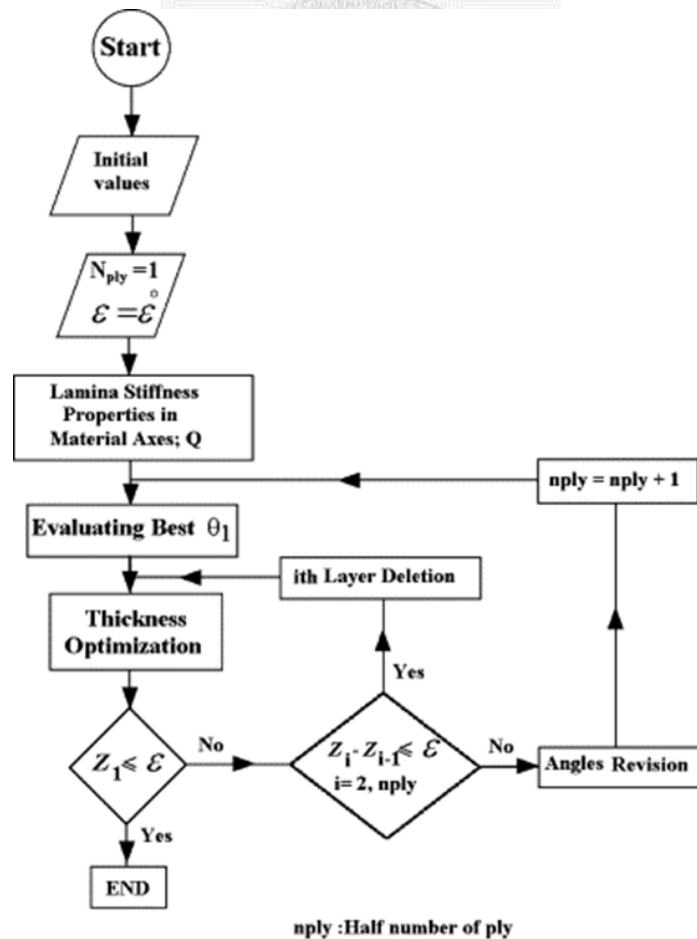


圖 2-7 疊層角度、厚度分階及材料分層最佳化流程[57]

2.1.4 複合式方法

為了進一步提升最佳化效能，例如：達到更快的收斂速度、更精確的全域最佳解、提升最佳化流程的強健性或者欲同時包含連續與離散變數等。有學者整合不同類型最佳化方法，分別利用其優勢於適合之處，提出複合式的複材疊層最佳化方法。例如：Seeley[58]提出一套結合模擬退火法(Simulated annealing, SA)與序列規劃(Sequential Programming, SP)的最佳化演算法，用於複材機翼平板簡化模型之疊層鋪層順序與壓電致動器位置最佳化，以改善氣彈(aeroelastic)響應。Kogiso等人[34]、Lin與Lee[41]及洪主頌[48]將局部最佳化技術導入基因演算法疊代過程，利用每個世代的個體目標函數計算結果，用近似法或反應曲面法(Response Surface Methodology, RSM)建立回歸模型搜尋該世代的局部最佳解，並以此置換該世代不利解，達到提高收斂速度的目的，其流程如圖 2-8 所示。

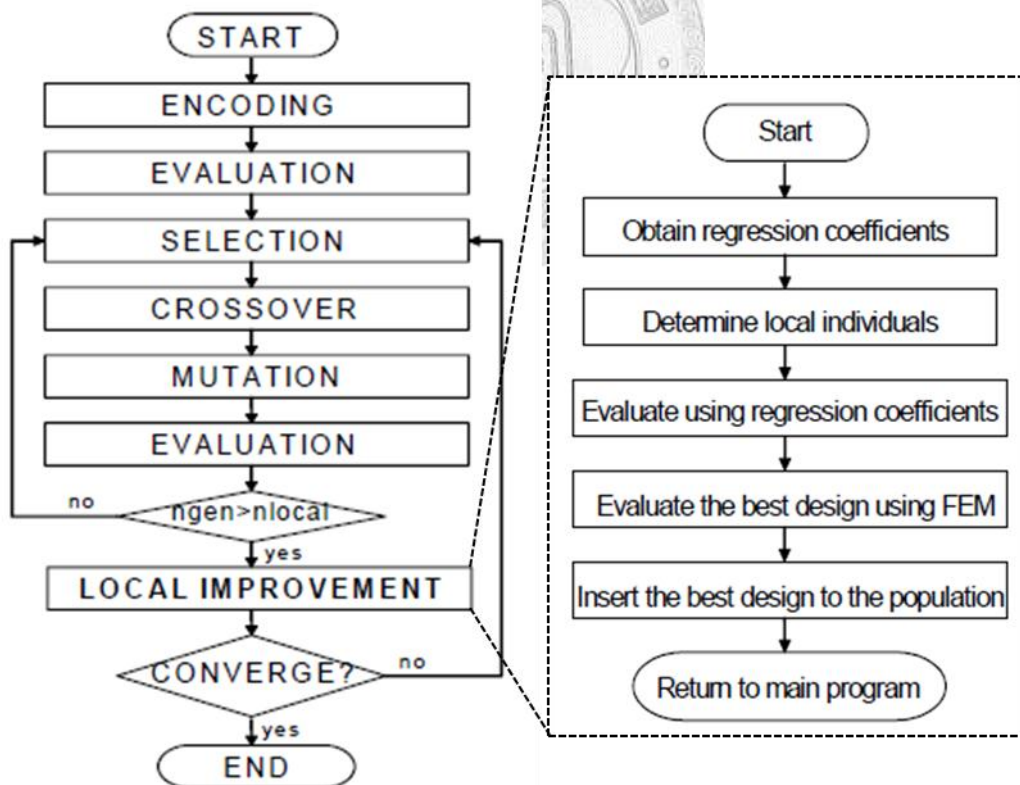


圖 2-8 結合局部搜尋之修改式基因演算法流程圖[41]

2.1.5 小結

複材疊層最佳化相關研究發展始於 1970 年代，在 1990 年代以前，以梯度法 (Gradient-based methods) 的相關研究應用佔大多數。但是由於大部分的梯度法皆需為連續變數、可求取微分項、受起始點與問題種類影響大及收斂至局部最佳解的缺點。所以就算有研究嘗試以多個起始點進行搜尋，卻仍然只適合用於少變數且可計算梯度資訊之問題。因此，面對越來越複雜的複材疊層最佳化問題，近年來已鮮少見到此方面的應用。

近似方案 (Approximation schemes) 雖然解決了難以獲得梯度資訊的問題，亦提升了收斂速度。不過對於疊層最佳化問題，尤其當疊層角度列為設計變數時，與結構體的響應通常呈現高階非線性、多峰與非凸性的函數關係，使其難以單純用一階、二階或者凸包等簡化方法達到精確的近似效果。因此若僅以近似方案求解，往往無法準確模擬而可能導致錯誤的最佳化結果。

另一方面，在啟發式演算法還未發展成熟之前，直接搜尋法於疊層最佳化的應用效果並不突出，譬如早期學者有採用列舉或隨機搜尋的方式。前者需耗費大量時間成本，且最佳化問題侷限於特定的邊界條件或疊層角度；而後者則過於依賴初始點位置及問題類型，無法收斂至全域最佳解。另外，有研究學者提出材料分層或者問題拆解的概念，衍伸出多種不同的求解方式與流程，雖然明顯降低演算次數，但所求得的最佳解往往與全域最佳解仍有一段差距。

1990 年代初期，逐漸有學者將基因演算法 (Genetic algorithm, GA)、模擬退火法 (Simulated annealing, SA) 等啟發式演算法 (Heuristic algorithm) 應用於複材疊層。至今此類型的最佳化方法已成為複材疊層領域最佳化方法的大宗，其中尤以基因演算法最廣為採用。乃歸因於基因演算法不但可同時求解連續與離散變數且具有求取全域最佳解的能力之外，對於變數種類的影響較小，使其相對於其他的啟發式方法 (例如：模擬退火法) 具有更好的強健性。

但是該方法的最大缺點在於需要大量的目標函數求解次數，其次數大致與變數數量相關，而經過上千次的目標函數計算才達到收斂，乃是基因演算法常見的情況。因此，近年來大多數研究為針對基因演算法的收斂速度提出改良方法，其中又以將基因演算法結合局部搜尋以提升收斂速度之方法應用最為廣泛。

然而，於上述之相關文獻中發現：儘管各種最佳化方法應用於複材疊層領域之研究不勝枚舉，且至今整體脈絡大致朝向使用啟發式演算法的方向發展。但近年來多數研究方向僅為針對啟發式最佳化提出改善方法，固然達到提升收斂速度之效果，不過筆者卻認為，如果能進一步搭配複合材料的力學理論，譬如將設計變數域由疊層角度、厚度等，轉換為材料性質(如勁度矩陣)做最佳化設計，會是另一個可能提升整體最佳化效率的研究方向，且與最佳化演算法的改良與演進是不互相衝突的。

因此本研究基於古典積層板理論，以疊層參數做為設計變數，應用於一套複合式的最佳化流程中，期望可以既大幅提升複材疊層最佳化的收斂速度，且仍然保有良好的全域最佳解搜尋能力，其內容方法與流程將於第三章詳細說明，並加以驗證。

2.2 三明治結構最佳化

三明治結構由高剛性、高強度的表材與低密度的芯材所構成。其中表材可選用等向性材料、正交性材料或者以多層正交性材料疊合而成的積層板；而芯材亦有均質性材料與非等向性材料之選擇。因此，表材與芯材選用的材料類型，將大幅影響設計變數之種類與數量，而與三明治最佳化問題的難易有莫大的關係。所以，不同最佳化問題，適合採用的最佳化方法與流程架構亦不盡相同。

其中，影響最大的因素一般在於表材的材料類型：如果為等向性材料或者擬等向疊層的積層板，則最佳化設計變數通常設定為表材、芯材厚度與材料選用；然而，如果表材為多層正交性材料疊合而成之積層板，則設計變數將除了前述之

項目之外，仍需考慮各層疊層角度所造成的影響，而使設計變數數量遽增。且如 2.1 所述，以疊層角度做為設計變數亦將使最佳化方法的選用受到限制。

因此，本節將依表材之材料類型三明治結構最佳化之相關研究做分類，分別探討其所採用之最佳化方法與流程架構。

2.2.1 等向性表材三明治結構最佳化

a. 單純三明治梁板結構最佳化

早期三明治結構最佳化的發展幾乎以使用等向性表材為主，且大多屬於二維梁板結構之範疇，而以討論剛性與強度最佳化為主。

例如 1965 年，美國農業部之林務研究單位-USDA Forest Product Laboratory 開始進行的一系列三明治結構之設計及最佳化研究。該研究員 Kuenzi[59]之研究以最小化重量為目標，並以彎曲剛性以及負載能力為設計限制，以得到實務上可行的設計結果。其結果提到若僅考慮三明治梁之彎曲剛性，最佳芯材對表材重量比

$(\frac{W_c}{W_f})_{opt}$ 為 4，此後並陸續由其他學者以實驗或解析方法取得類似結果[60]。1984

年，Gibson[61]針對如之三點彎曲三明治梁進行進一步的剛性最佳化研究，使用變數為面板厚 t ，芯材厚 c ，以及芯材密度 ρ_c 。其重要假設為心材橫向剪切係數 G_c 需

約為密度之 2 次函數： $G_c = C_G \left(\frac{\rho_c}{\rho_s}\right)^2 E_s$ 其中發泡材剪切係數與密度關係常數 C_G ，

發泡材原料密度 ρ_s 及楊氏係數 E_s 三個常數因使用材料而異。此關係式的存在，使得可以用解析方式求出最佳表材、芯材厚度及芯材密度，進而同樣可以得到

$(\frac{W_c}{W_f})_{opt} = 4$ 之結論。然而此 2 次關係式，實際上僅成立於其使用之特定 PU 泡棉，

此後 Demsetz 與 Gibson[62]討論如受中央集中荷載圓形三明治板之剛性最佳化，

將此 2 次關係式擴展至 $G_c = C_G \left(\frac{\rho_c}{\rho_s}\right)^n E_s$ 以適用於其他心材，並得到最佳心材對面

材重量比 $(\frac{W_c}{W_f})_{opt} = \frac{2n}{(n-1)}$ 。

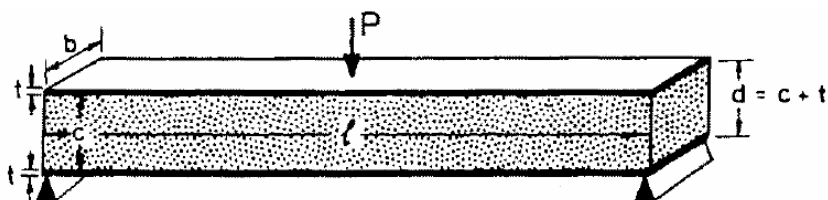


圖 2-9 三點彎曲三明治梁

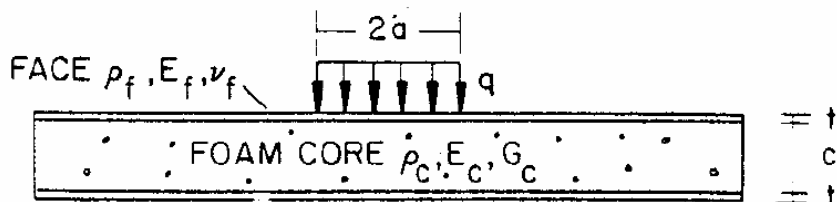


圖 2-10 受中央集中負載圓形三明治板

1997 年，Zenkert[63]整理三明治梁或板之剛性最佳化方法，認為理想的最佳化，三明治板厚度 t 及 c 、芯材密度 ρ_c 及剪切係數 G_c 皆需為設計變數。但當 ρ_c 與 G_c 之關係不存在而需以解析方法求解時，設計者需要挑選特定芯材，即其密度與剪切係數已先行固定，則可求得一最佳表材、芯材厚度組合，然而此結果必然不可能優於芯材可變情況。

因此，有研究學者嘗試以不同密度規格之同類型材料建立剪切係數與密度之關係，例如張智凱[64]以實際多種不同密度之巴沙木、蜂巢板、PVC 泡棉與 PU 泡棉分別建立剪切係數與密度之擬合式，其結果如所示，其中 r^2 為判斷擬合準確度之相關係數(regression correlation coefficient)。此外，該學者並以同樣的方式建立了剪切強度與密度之擬合關係。

表 2.1 常用芯材剪切係數與密度擬合[64]

| Core Type | Fitting Function | r^2 |
|-------------|-------------------------------|-------|
| Honeycomb-L | $1.227\rho_c^{0.926}$ | 0.994 |
| Honeycomb-W | $0.284\rho_c^{1.119}$ | 0.991 |
| PVC Foam | $0.252\rho_c^{1.100}$ | 0.991 |
| Balsa | $2.600\rho_c^{0.816}$ | 0.995 |
| PU Faom | $1.13(10)^{-2}\rho_c^{1.503}$ | 0.996 |

此外，對於三明治結構的強度最佳化而言，由於需要同時考慮多種破壞模式，且通常難以求得同時所有破壞模式之強度均有最佳目標函數值的情況。所以基本上仍會以強度為限制條件，例如在不發生任何一種破壞模式的情況下，求取最小重量。如圖 2-11 所示，其中最常於強度最佳化考慮的是表材降伏(face yield)、表材挫曲(face wrinkling)及芯材剪切降伏(core yield)三種；芯材壓潰(core indentation)在受集中荷載時考慮；膠合破壞(bond failure)則與膠材的選用及施工有很大的關係，通常不在一般結構最佳化考慮。



圖 2-11 三明治常見破壞模式[65]

1987 年，Triantafillou 與 Gibson[66]，對於三點彎曲三明治梁，將芯材楊氏

係數及剪切強度皆設定為密度的函數： $E_c = C_3 \left(\frac{\rho_c}{\rho_s}\right)^A E_s$ 及 $\tau_c^* = C_4 \left(\frac{\rho_c}{\rho_s}\right)^B \sigma_{ys}$ ，討論表材斷裂、表材挫曲與芯材剪斷三種模式，分別計算其極限破壞負載，並以圖 2.4 方式將可能破壞分區表示，其橫軸為無因次化面材厚度，縱軸為無因次化之心材密度，每區內實線代表不同施力大小，中央的虛線表示一般常用三明治板所在區域。

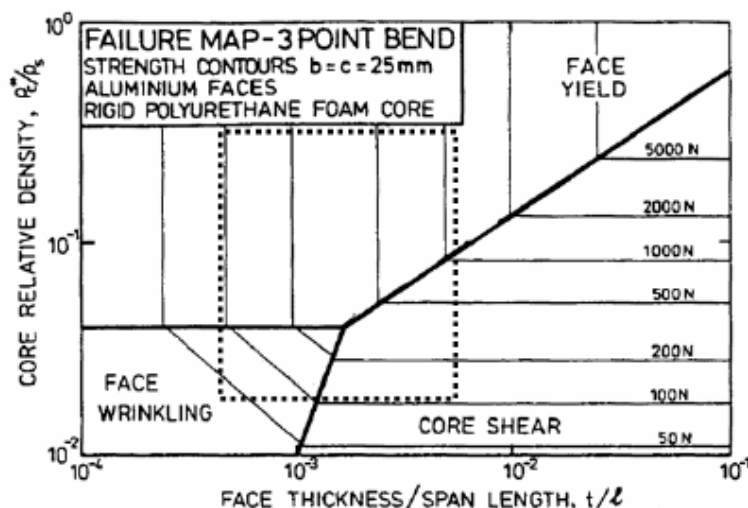


圖 2-12 三明治梁破壞分區圖[66]

根據以上相關研究整理結果可知，基本上欲求取表材等向性三明治之單純三明治梁板結構的最佳設計，無論對於剛性或強度皆可用解析方式獲得最佳解。而此有高階三明治板理論及有限元素法而能更精確的求取表材、芯材各自詳細的應力及位移場分佈。

b. 三明治結構體最佳化

實際三明治結構的應用中，卻往往不可能僅為單純三明治梁板結構，除了結構體的形狀不定之外，對於大型或者複雜形狀之結構體亦會先進行材料分區以利於提升最佳化之效果。因此，上述所提之解析方法將不再適用，通常必須導入最佳化方法並結合有限元素模型，將部份設計參數列為變數進行最佳化設計。例如：Ringertz 等人[67]使用擬牛頓法(Quasi-Newton method)結合有限元素軟體，最佳化

如圖 2-13 之貨車車廂壁材，其芯材密度已預先選定，將整個結構分為七區，每區對應一組表材及芯材厚度，共 14 個變數，其最佳化結果為剛性優先結構，即剛性足以使特定位置變形量小於其指定值時所有材料無破壞發生。

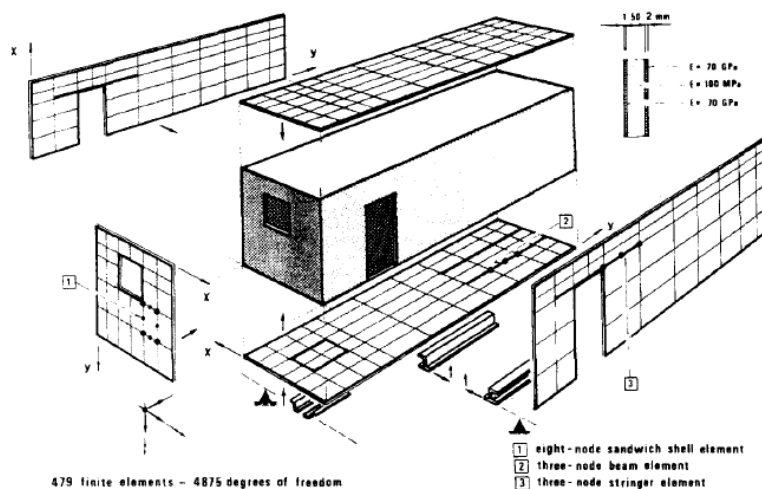


圖 2-13 三明治貨車車廂模型[67]

Ermolaeva[68]則以特定扭轉剛性為目標，最佳化如圖 2-14 之電動車底盤，其同樣固定芯材對面材厚度比 c/t ，以不同芯材厚度及密度為設計變數。其所得結果以最厚、密度最低芯材達到目標，獲得扭轉剛性優先之最佳化結果。

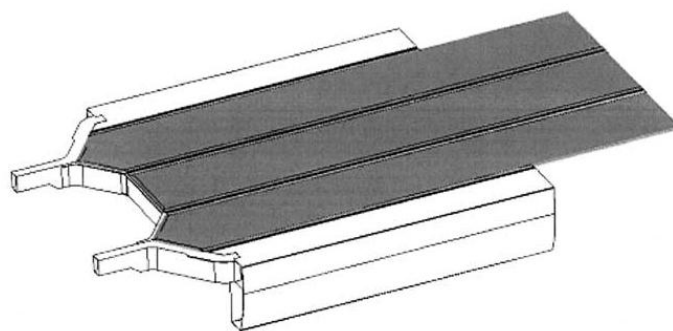


圖 2-14 DotchEVO 電動車底盤模型[68]

Wennhage[69]同樣以材料分區的方式，使用序列凸包規劃 (Sequential Convex Programming, SCP)，對如圖 2-15 之火車廂壁進行重量最佳化。但與前述研究不同之處為，此研究建立如圖 2-16 之可同時考量全域、局部與音場模型之最佳化流程。而其設計變數分別為：Mid floor 之表材、芯材厚度與芯材密度；End floor 之表材、

芯材厚度與芯材密度；side 之表材厚度；Roof 之表材厚度，共 8 個。而對於不同的模型具有不同的限制條件：全域模型為最小表材/芯材厚度比與自然振頻；局部模型為 Panel1 與 Panel2 之局部挫曲的安全係數；音場模型則考慮 Panel1 與 Panel2 兩處的聲音減少指數(Sound reduction index, SRI)。而其結論表示，將音場列入設計考量將增加最佳解之重量。

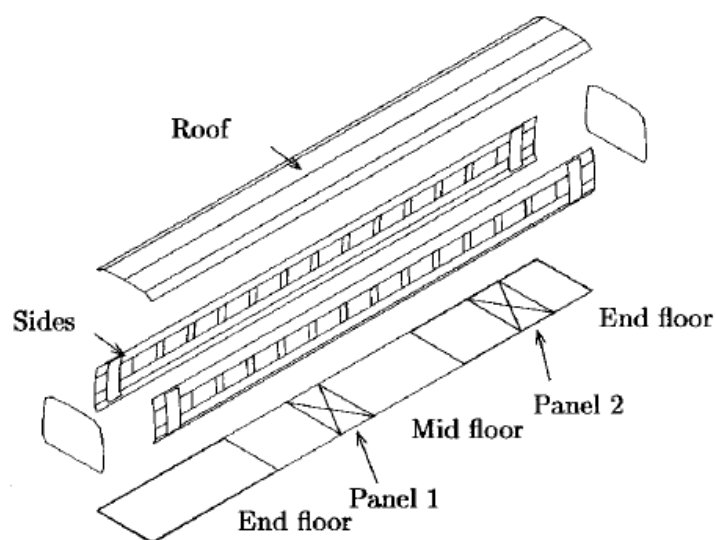


圖 2-15 火車廂壁材料分區示意[69]

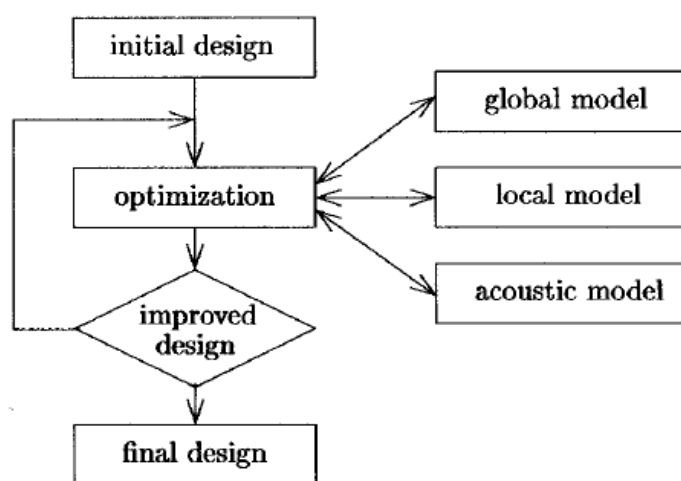


圖 2-16 包含全域、局部與音場模型之最佳化流程[69]

由以上文獻可以發現，當等向性材料表材三明治結構最佳化問題擴展至結構體時，將難以再用解析方法求解。一般會進行先進行材料分區，然後導入最佳化

方法，並視問題複雜度而建立不同的最佳化流程架構。但因為此時的設計變數數目通常不大(約在 10 個以內)，且未有難以求解之變數種類(如疊層角度)，因此大部分仍可以梯度法求解。

2.2.2 積層表材三明治結構最佳化

然而，當表材型式為積層板時，表材將由等向性材料的一個設計變數(即表材厚度)，大量增加為表材層數與各層疊層角度。除了設計變數劇增而造成求解不易之外；以疊層角度做為設計變數亦將使目標函數呈現多峰或不連續的特性而難以用收斂較快速的梯度演算法求解。此外，因為必須在決定疊層數目後，才能得知疊層角度此設計變數的數目，而構成所謂變維度最佳化問題。但回顧相關文獻後顯示，對於表材為積層板的三明治結構最佳化問題，以往的研究通常無法在一個最佳化過程中，同步將疊層數目與各層疊層角度列為設計變數。而產生兩種不同的應對方式：其一，設定表材為擬等向疊層；其二，設定既有的疊層數目，對各層疊層角度做最佳化，或固定積層板各層疊層角度，而對各層薄層的厚度進行最佳化(即近似於最佳化疊層數目)。以下分別將相關文獻以此歸類，並探討其所使用的最佳化方法與流程架構：

a. 設定表材為擬等向疊層

Rikards 與 Chate[70]將表材疊層設定為 $[0, -45, 45, 90]_s$ 之 8 層對稱疊層，並求取等效的表材材料常數。以表材總厚度與芯材厚度為設計變數，在頻率與模態損耗因子(modal loss factor)的限制條件下，求取最小重量之目標函數。由於有效縮減設計變數量，因此該研究得以採用規劃實驗(planning of experiments)的方式進行最佳解的搜尋。

本實驗室學長張智凱[64]則因為表材選用正交編織布(woven fabric)，其力學特性受疊層角度之影響不如單向纖維(unidirectional lamina)來的明顯，因此研究中並未將疊層角度列入考慮。此研究使用同樣為本實驗室之學長胡斯遠提出之

Raplex Method 於三明治結構最佳化設計，提出演化式三明治結構最佳化(ESSO)，並對台大機械太陽能車 Formosun2 結構進行材料參數最佳化設計，與複合形法 (Complex Method)進行演算次數與準確性的比較。其結構亦進行如之材料分區，並以各區之表材、芯材厚度與材料種類為設計變數，共 12 個；以重量與 3g 加載之強度需求為設計限制；求取最大扭轉剛性之目標函數。結果顯示，僅需複合形法 4.49%之演算次數即可達到接近的最佳化結果。

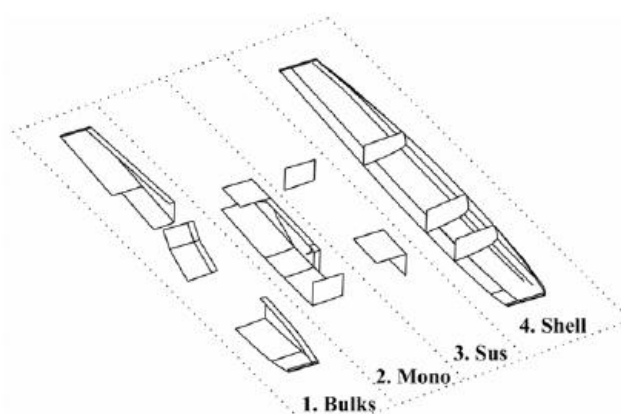


圖 2-17 FORMOSUN2 車體最佳化之設計分區[64]

將表材設定為擬等向疊層，其實等同把問題近似為等向性表材的最佳化問題，因此可以避免碰觸上述所提之難處。但是顯然的，所得到的最佳解亦並非完整考慮三明治結構所有設計參數之結果。

b. 設定既有疊層數目或角度

Lin[41]以基因演算法加入局部改進的方式，對如圖 2-18 所示邊界條件為一端固定、另一端施以一集中力之三明治平板結構限元素模型，以表材 12 層疊層角度為設計變數，並限定角度僅包含 -45° 、 0° 、 45° 與 90° 四種，以最小化自由端之位移量。並與未加入局部改進之結果比較收斂速度，其結果顯示可以達到兩倍以上的收斂速度，且對於局部近似之誤差仍在可接受範圍。

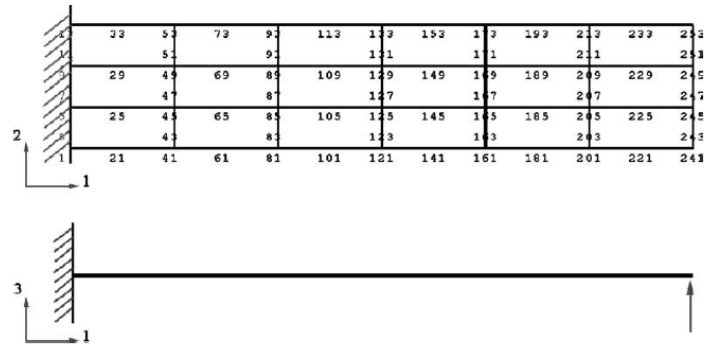


圖 2-18 三明治結構有限元素模型[41]

Kalantari 等人[71]亦使用基因演算法，以 6 層表材疊層角度為計變數，變數集合同樣設定為 -45° 、 0° 、 45° 與 90° 。最佳化三明治結構在低速衝擊(low-velocity impact)下的負載強度，如圖 2-19 所示。

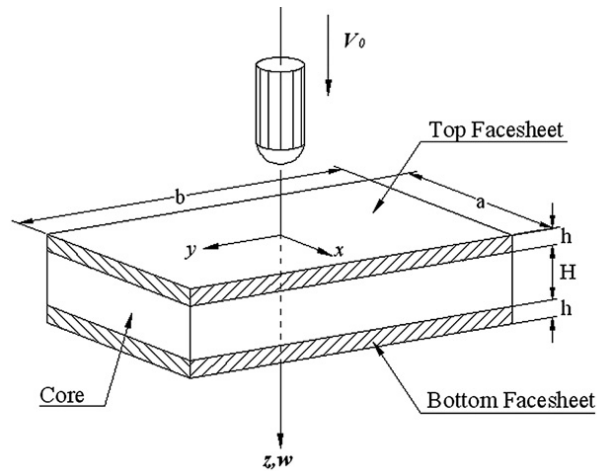


圖 2-19 三明治結構低速衝擊示意圖[71]

此外，Sciuva 等人[26]則使用基因演算法與模擬退火法求解三明治結構平板四邊簡單支撐、施以不同比例之面內(in-plane)均佈負載，並分別求取最大挫曲負載強度的最佳化問題，。其結果與 Moh 與 Hwu[72]所提出解析解相比較，擁有極相近的目標函數值。Cho[73]則使用粒子群優化演算法(particle swarm optimization, PSO)結合有限元素法，最佳化三明治平板結構，其設計變數包含表材 9 層疊層之材料排序(包含鋁、碳纖維強化塑膠與玻璃纖維強化塑膠)與各層疊層角度。分別求取以剛性、挫曲強度、破壞強度與殘留應力為目標函數之最佳解。

由以上相關研究可以發現，當三明治結構最佳化正式將疊層角度納為設計變

數後，幾乎不見以梯度法或其他除了啟發式方法之外的一些較單純的直接搜尋法求解。而以演化式演算法為主，其中目前使用最廣泛的是基因演算法。但是由於演化式演算法需要大量的演算次數，因此如果要在考慮疊層角度的情況下，再進一步進行材料分區設計，將有實際應用上的困難，而的確於文獻中亦難以搜尋到這樣的應用研究。

2.3 討論

綜觀上述對於複合材料最佳化之相關研究的探討結果，本研究整理近 40 年來複合材料最佳化之發展趨勢與主流方法的適用範圍及演進歷程概括如下圖 2-20 所示：

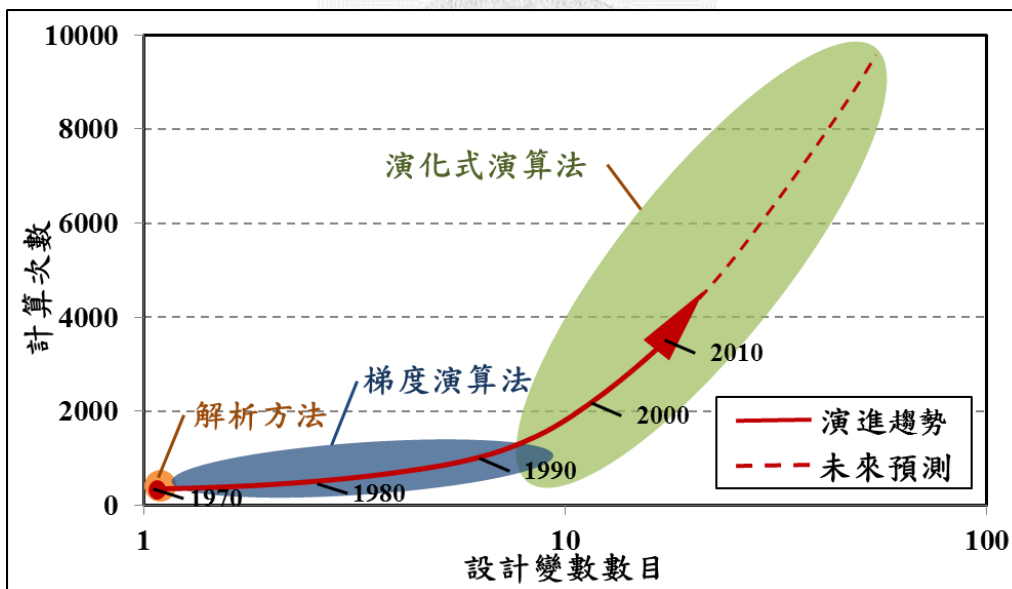


圖 2-20 複合材料最佳化發展趨勢示意圖

早期在複合材料基本理論尚處於發展的階段時，所謂的最佳設計通常是針對可解析幾何、特定邊界條件、在少數的限制條件下，以解析方式求取單一或少量之設計變數的最佳解。所以此時往往經過一次計算或者幾次判斷之後，即可獲得最佳解。

然而，隨著設計需求的提升以及考量項目的增加，解析方式將不再適用，必

需導入最佳化演算法。1980 年代可謂梯度演算法應用於複合材料之濫觴，此時大量的梯度演算法皆曾被嘗試求解複材最佳化問題，並且將設計變數數量上限推至 10 個左右。但是卻始終因為當疊層角度為設計變數時，將有極大可能落入局部最佳解之缺失，而逐漸被啟發式演算法所取代。不過仍有一些近似方案至仍有所應用，如序列二次規劃、序列凸包規劃等，對於求解表材等向性之三明治結構往往可以達到良好的求解效率。

1992 年基因演算法初次應用於複合材料積層板之設計，由於其極佳的全域最佳解搜尋能力，且避開了複合材料之設計變數對目標函數往往不具平滑、連續梯度關係之困境，因此立刻被廣泛的應用於複合材料最佳化中，另外，亦相當受到重視的亦有模擬退火法。然而，隨著複材最佳化需求的增加，研究學者注意到這些演化式演算法，固然有相當高的機會可以求得全域最佳解，但是其收斂效率將隨著設計變數的增加而趨於低落。因此 2000 年代初期，研究重點開始著重於演算法收斂效率之改進，因而衍伸出如局部近似、菁英選擇或平行運算等機制。這些機制雖然皆對演化式最佳化具有一定的提升效果，但是本質上仍無法改變收斂效率因為設計變數增加而加速降低之原則。

但是在未來複合材料應用日益廣泛的同時，其納入最佳化設計考量範圍的參數將大量增加。以積層板表材之三明治結構為例，雖然目前仍鮮少見到將其進行材料分區最佳化之應用，不過可以預見的是，為了將複合材料的使用效率推向下一個極限，此必然是日後發展的趨勢之一，如此一來，在一個複合材料最佳化問題中，設計變數達到上百個亦並非遙不可及。此時如果仍持續守成於使用現有的最佳化方法，那麼未來所面臨的困境將並非僅止於無法求得最佳解，而是需要衡量在一個產品設計週期中，是否有足夠的時間進行如此龐大的運算。

因此，對於如何發展出一套專屬於複合材料的最佳化方法，以達到降低變數數目對演算次數之影響，或進一步有效減少演算次數乃是目前相當重要的研究項目之一。

第三章 理論背景

本章將先介紹本研究所提出之複合材料複合式最佳化方法所需之理論基礎，包含古典積層板理論、一階剪切變形理論與疊層參數，並由文獻探討疊層參數可行區域之研究現況。

3.1 古典積層板理論

古典積層板理論(Classical Laminate Theory, CLT)假設積層板(Laminate)由N層正交性與/或等向性材料的薄層(Lamina)疊合而成，層與層之間以無限薄且不產生剪切變形之膠層完美結合，是謂描述積層板剛性的基礎理論。對於彎曲現象之描述則遵照 Kirchhoff-Love 板理論(Kirchhoff-Love plate theory)所提出的假說—“板內任一垂直於中面(middle-surface)的直線，在變形後仍為一長度不變且垂直於中面的直線”(如圖 3-1 中之 \overline{AD})。

因此，沿著積層板厚度方向的變形為零，所以垂直於積層板的面外方向應變將被忽略。而且相較於面內的幾何尺寸，積層板的厚度甚薄，因而假設為平面應力(plane stress)狀態，忽略垂直於積層板方向的應力。

3.1.1 積層板應變場推導

積層板位移場參考圖 3-1 定義如下：

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z\phi_x(x, y) \\v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\phi_y(x, y) \\w(x, y, z) &= w_0(x, y)\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中 u_0 、 v_0 及 w_0 代表積層板中面位移量，而 ϕ_x 、 ϕ_y 則分別代表沿著 x、y 軸

的旋轉角。又依據 Kirchhoff-Love 假說使 γ_{yz} 、 γ_{xz} 皆為零，而得到以下關係式：

$$\begin{aligned} \gamma_{yz}(x, y, z) = -\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0 &\rightarrow \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \gamma_{xz}(x, y, z) = -\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 &\rightarrow \phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.2)$$

因此，積層板於全域座標系統的應變場可推導如下：

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x = -\frac{\partial \phi_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ k_y = -\frac{\partial \phi_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ k_{xy} = -\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y}\right) \\ = -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

其中 ε_x^0 、 ε_y^0 為積層板中面之正向應變； γ_{xy}^0 為正向剪切應變； k_x 、 k_y 為彎曲曲率向量； k_{xy} 為扭轉曲率向量； z 為垂直平面方向與中面之距離。

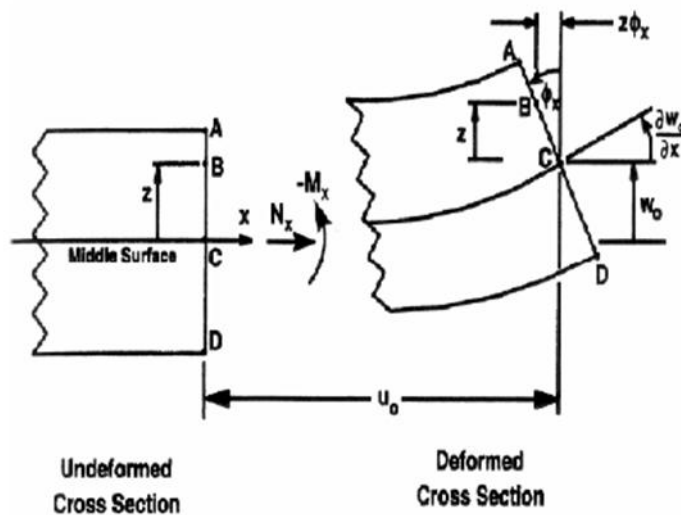


圖 3-1 Kirchhoff-Love 板理論於 XZ 平面上的幾何變形

3.1.2 單層薄層應力-應變關係

積層板由多層薄層(Lamina)疊合而成，單一薄層如圖 3-2 並參考圖 3-3，以「第 k 層薄層，其材料座標系統(1,2)主軸方向與積層板全域座標系統(x,y)夾 θ 角」描述。依據 Kirchhoff-Love 假說，單層正交性材料板沿著主軸方向負載之應力-應變的本構關係亦可簡化為：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

其中 Q_{ij} 為對比勁度矩陣(reduced laminate stiffness)元素，由縱向彈性模數 E_1 、橫向彈性模數 E_2 、剪切模數 G_{12} 及浦松比 ν_{12} 、 ν_{21} 組成：

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (3.5)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{66} = G_{12}$$

經由座標轉換，可求取第 k 層薄層於積層板全域座標系統(x,y)上之應力-應變關係：

$$\sigma_{3 \times 1} = [T]_{3 \times 3}^{-1} Q_{3 \times 3} [T]_{3 \times 3} \varepsilon_{3 \times 1} = \bar{Q}_{3 \times 3} \varepsilon_{3 \times 1} \quad (3.6)$$

其中

$$[T]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

因此第 k 層薄層於全域座標系統(x,y)上的應力-應變關係如下：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 + zk_x \\ \varepsilon_y^0 + zk_y \\ \gamma_{xy}^0 + zk_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

其中轉換勁度元素 \bar{Q}_{ij} 整理如下：

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2((Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + \\ & (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + \\ & (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \\ & Q_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (3.9)$$

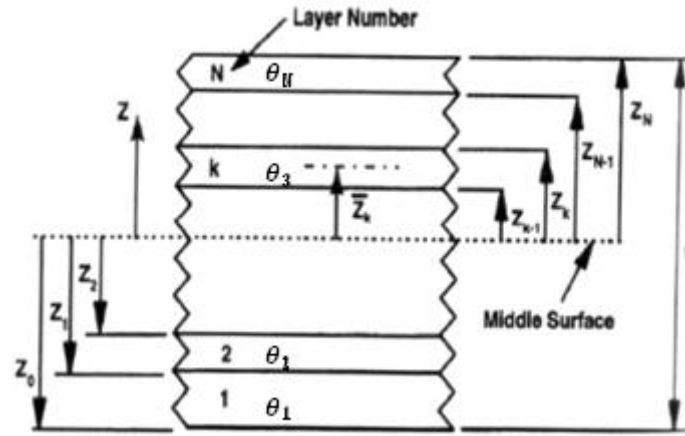


圖 3-2 積層板疊層示意圖

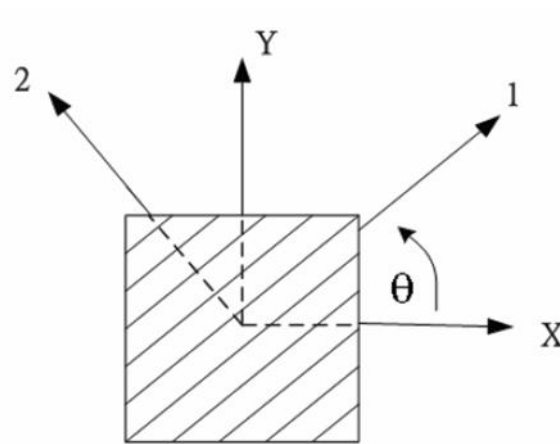


圖 3-3 材料座標系統與全域座標系統夾角 θ 示意圖

3.1.3 積層板合應力、合力矩與勁度矩陣意義

由式(3.8)可知，沿著積層板厚度 z 方向，各層的面內應力分佈為定值(當積層板曲率向量 k_i 為零時)或與應變呈線性關係。然而，即使所有薄層皆使用相同材料，卻仍會因為每層薄層材料主軸方向不同，而使得各層之間應力呈現不連續的現象，如圖 3-5 所示。因此，儘管可由積層板的整體變形推得位移場，進一步計算空間中的應變分佈(正向應變 ε_i^0 、曲率向量 k_i)，卻無法尋得僅以一組面內應力量值 (σ_x 、 σ_y 及 τ_{xy}) 滿足此整體積層板的應力-應變關係。

古典積層板理論對此提出彌補的方法：定義一組將積層板面內應力沿著厚度 h 積分後的量值，稱「合應力」(stress resultants)，於式(3.10)中表示為 N_i ；將積層板力矩沿著厚度 h 積分後的量值，稱「合力矩」(moment resultants)，於式(3.10)中表示為 M_i 。以合應力 N_i -應變 ε_i^0 及合力矩 M_i -曲率向量 k_i 的關係代替應力-應變描述積層板的力學行為，使積層板本構關係如所示。

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz \quad N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \quad (3.10)$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz$$

並將式(3.8)代入式(3.10)後可以得到：

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

其中：

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (3.13)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

A 、 D 與 B 矩陣分別為伸張(extensional)、彎曲(bending)與伸張-彎曲耦合(extension-bending)勁度矩陣。其中 A 矩陣代表面內合應力與中面應變之關係； D 矩陣則代表合力矩與曲率向量之關係；而 B 矩陣則描述面內合應力及曲率向量對中面應變之耦合效應。

附帶一提，雖然 B 矩陣所造成的耦合效應對某些特殊應用來說是有利的，例如：洪主頌[48]利用此效應設計螺槳，使螺槳承受彎矩時同時產生彎曲與扭轉變形，以改變螺槳的螺距，提升螺槳運轉性能。然而，在多數的設計中，此效應大多被視為一項缺點而盡可能地避免。而當積層板各層材料主軸夾角對稱於中面時，即可使 B 矩陣各個元素皆為零。

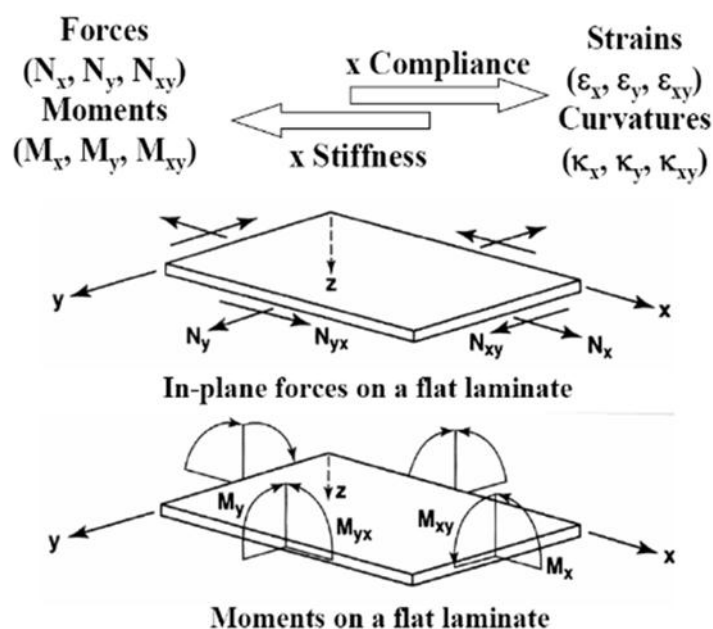


圖 3-4 積層板本構關係示意圖

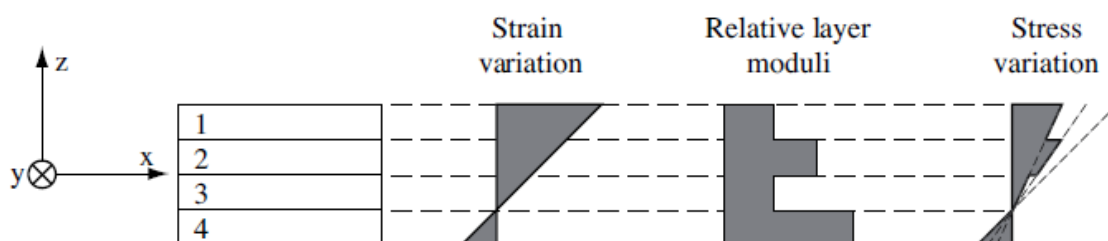


圖 3-5 積層板沿著厚度 z 方向：應變為線性變化；應力呈不連續分佈[2]

3.1.4 導入一階剪切變形理論

古典積層板理論(Classical Laminate Theory, CLT)遵照 Kirchhoff-Love 假說：板內任一垂直於中面(middle-surface)的直線，在變形後仍為一長度不變且垂直於中面的直線。此假設雖然忽略垂直於面內方向之剪切應變 γ_{xz} 、 γ_{yz} ，但是對於相較於面內方向之幾何尺寸，厚度甚薄的積層板而言，已具有相當足夠的準確性。然而，如果要直接以古典積層板理論描述複材三明治結構的力學行為，其誤差必然大幅提高。因為除了厚度增加，可能不再被界定為薄層(Thin plate)之外；且通常占大多數厚度比例的芯材，其垂直於平面方向的剪切剛性亦是較表材為低的。因此，於三明治結構相較於單純芯材可以大幅提升彎曲剛性的情況下，因為剪切變形而造成的位移比例將增加。

所以，為了更精確的描述三明治結構的實際位移，必須進一步考慮芯材的剪切變形。Mindlin-Reissner 板理論(Mindlin-Reissner plate theory)或稱一階剪切變形理論(first-order shear deformation theory, FSDT)，為 Kirchhoff-Love 板理論的衍伸——“板內任一垂直於中面(middle-surface)的直線，在變形後仍為直線但不再等長及垂直於中面”(如圖 3.3-6 中之 \overline{AD})。

此理論即適用於描述三明治結構因為芯材剪切變形而造成的位移。其剪切應變如圖 3.3-6 所示為：

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

因此，單層正交性材料板沿著主軸方向負載之應力-應變的本構關係亦將由式(3.4)衍伸為：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

其中 $Q_{44} = G_{23}$, $Q_{55} = G_{13}$, G_{23} 、 G_{13} 為垂直於平面的橫向剪切剛性。

再經由座標轉換，第 k 層薄層於全域座標系統(x,y)上的應力-應變關係如下：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (3.16)$$

其中由式(3.9)額外增加的轉換勁度元素 \bar{Q}_{ij} 為：

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta \\ \bar{Q}_{45} &= Q_{55} \cos \theta \sin \theta - Q_{44} \cos \theta \sin \theta \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\bar{Q}_{55} = Q_{44} \sin^2 \theta + Q_{55} \cos^2 \theta$$

因此，欲描述三明治結構的力學行為，除了式之合應力與合力矩之外，仍需計算「合剪應力」(shear resultants) V_y 、 V_x ，為垂直於平面的橫向剪切應變沿著厚度 h 積分的量值，表示如下：

$$V_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz \quad V_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \quad (3.18)$$

並將式(3.18)代入式(3.16)可以得到：

$$\begin{Bmatrix} V_y \\ V_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{44} & S_{45} \\ S_{45} & S_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\gamma}_{yz} \\ \bar{\gamma}_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

其中：

$$S_{ij} = k \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad i, j = 4, 5 \quad (3.20)$$

上式參數 k 為剪力修正因子(Shear Correction Coefficients)，用以修正假設的剪切變形與實際變形之間的差異，本研究使用之芯材為蜂巢板，其修正因子設定為 $\frac{5}{6}$ 。

本研究於 4.4.1 節進一步驗證：以一階剪切變形理論計算三明治結構之位移，已具備本研究所需之準確性。因此為了適當簡化模型，將不考慮使用更高階的剪切變形理論。

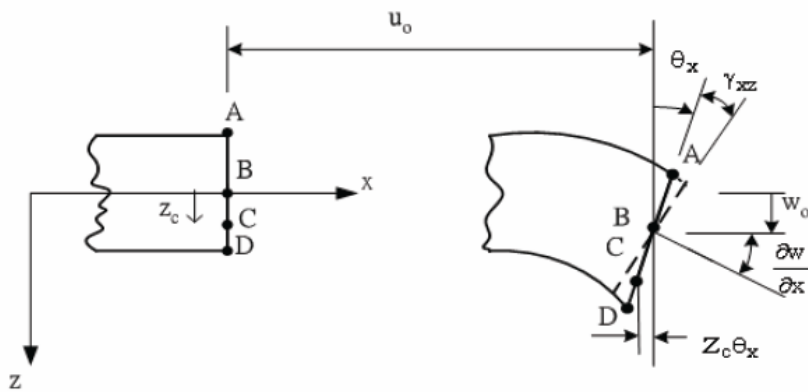


圖 3.3-6 Mindlin-Reissner 板理論於 XZ 平面上的幾何變形

3.2 疊層參數

在古典積層板理論中，以勁度矩陣 A 、 B 及 D 建立本構關係。而勁度矩陣元素 A_{ij} 、 D_{ij} 及 B_{ij} 之設計參數包含各層的對比勁度矩陣元素 $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ 和厚度 $z_k - z_{k-1}$ ，

其中對比勁度矩陣元素 $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ 仍需由材料常數 E_1 、 E_2 、 τ_{12} 、 ν_{12} 及 ν_{21} 與材料主軸方向角 θ_k 以上參數計算而得。如此繁雜計算的過程，使其難以直接利用上述參數各別設計勁度矩陣元素 A_{ij} 、 D_{ij} 及 B_{ij} 。

Tsai 與 Pagano[74]於 1968 年首先提出一種更為簡潔的勁度矩陣表示形式，將勁度矩陣表示為疊層參數(lamination parameter, LP)的線性函數。並且推導出五個以對比剛度矩陣元素 Q_{ij} 組成的不變量，亦稱為 Tsai- Pagano 參數，將應用於該勁度矩陣的表示形式中：

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}}{8} \\
 U_2 &= \frac{Q_{11} - Q_{22}}{2} \\
 U_3 &= \frac{Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}}{8} \\
 U_4 &= \frac{Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}}{8} \\
 U_5 &= \frac{Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}}{8}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

以下將介紹疊層參數(lamination parameter, LP)的計算方法及對於勁度矩陣之關係，並探討其可行區域範圍與物理意義。

3.2.1 疊層參數介紹

Tsai 與 Hahn[75]將疊層參數(lamination parameter, LP)整理為如式(3.22)無因次沿著厚度方向對厚度積分之形式：

$$(V_{1A}, V_{2A}, V_{3A}, V_{4A}) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\cos 2\theta, \sin 2\theta, \cos 4\theta, \sin 4\theta) d\bar{z}$$

$$(V_{1B}, V_{2B}, V_{3B}, V_{4B}) = 4 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \bar{z} (\cos 2\theta, \sin 2\theta, \cos 4\theta, \sin 4\theta) d\bar{z} \quad (3.22)$$

$$(V_{1D}, V_{2D}, V_{3D}, V_{4D}) = 12 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \bar{z}^2 (\cos 2\theta, \sin 2\theta, \cos 4\theta, \sin 4\theta) d\bar{z}$$

其中 V_{iA} 、 V_{iB} 、 V_{iD} 分別稱為伸張、伸張-彎曲耦合與彎曲疊層參數， \bar{z} 為正常化之厚度。此外，由於一般情況下積層板的材料主軸方向角對厚度方向而言呈現分段線性，亦即同單層薄層皆是定值，所以式(3.22)可簡化視為求和運算。

而勁度矩陣 A 、 B 與 D 即可分別表示為疊層參數 V_{iA} 、 V_{iB} 與 V_{iD} 之線性組合，公式如下：

$$A = h(\Gamma_0 + \Gamma_1 V_{1A} + \Gamma_2 V_{2A} + \Gamma_3 V_{3A} + \Gamma_4 V_{4A})$$

$$B = \frac{h^2}{4} (\Gamma_1 V_{1B} + \Gamma_2 V_{2B} + \Gamma_3 V_{3B} + \Gamma_4 V_{4B}) \quad (3.23)$$

$$D = \frac{h^3}{12} (\Gamma_0 + \Gamma_1 V_{1D} + \Gamma_2 V_{2D} + \Gamma_3 V_{3D} + \Gamma_4 V_{4D})$$

其中材料相依矩陣 Γ_i 由Tsai-Pagano 參數組成：

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} U_1 & U_4 & 0 \\ U_4 & U_1 & 0 \\ 0 & 0 & U_5 \end{bmatrix}, \Gamma_1 = \begin{bmatrix} U_2 & 0 & 0 \\ 0 & -U_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{U_2}{2} \\ 0 & 0 & \frac{U_2}{2} \\ \frac{U_2}{2} & \frac{U_2}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

$$\Gamma_3 = \begin{bmatrix} U_3 & -U_3 & 0 \\ -U_3 & U_3 & 0 \\ 0 & 0 & -U_3 \end{bmatrix}, \Gamma_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & U_3 \\ 0 & 0 & -U_3 \\ U_3 & -U_3 & 0 \end{bmatrix}$$

疊層參數與勁度矩陣為線性相關之特性，有利於用疊層參數取代疊層角度、厚度及順序及做為設計變數，直接依據邊界條件設計各個勁度矩陣元素，讓複材最佳化過程有物理意義可循。且無論積層板層數為何，皆可將設計變數數量控制為最多十二個的疊層參數，除了有效減少變數數量，亦可處理當疊層數目、角度與順序同時為設計變數時之變維度最佳化問題(將於第四章具體說明)。此外，疊層參數有範圍、具凸性(convexity)且對勁度矩陣元素乃至於目標函數通常呈現連續平滑的梯度關係[76]，皆是本研究應用做為複材最佳化之設計變數的因素。

3.2.2 可行區域探討

雖然疊層參數具有上述所提適用於複材最佳化之優勢，但觀察式(3.22)可知：因為疊層參數為各層疊層方向角的三角函數之求和運算結果，彼此具有耦合關係，所以各個疊層參數值無法任意選取。因此，必須定義真實存在的疊層參數集合之範圍，稱為可行區域(feasible region)，使所求得之勁度矩陣元素符合物理意義。

M. Miki[77]於 1982 年提出平衡對稱疊層(balanced symmetric laminates)，亦即 $V_{2A} = V_{4A} = 0$ 之條件下的面內疊層參數域可行區域解析式：

$$\begin{aligned} V_{3A} &\geq 2V_{1A}^2 - 1 \\ -1 &\leq V_{iA} \leq 1 \quad (i = 1, 3) \end{aligned} \tag{3.25}$$

而相同的解析式亦適用於面外疊層參數 V_{iD} 域，即當 $V_{2D} = V_{4D} = 0$ ：

$$V_{3D} \geq 2V_{1D}^2 - 1 \tag{3.26}$$

$$-1 \leq V_{iD} \leq 1 \quad (i = 1,3)$$

此外，M. Miki 建立如圖 3-7 所示，後人稱為”Miki’s diagram”之圖形。用以描述疊層參數之可行區域及疊層參數與疊層角度之關聯。

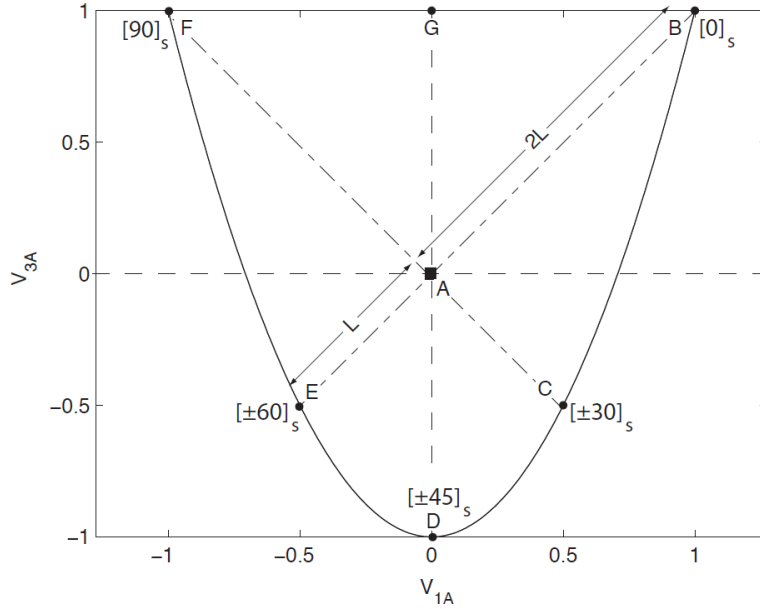


圖 3-7 Miki's diagram[2]

Fukunaga 等人[78]於 1997 進一步提出對所有面內疊層參數域 V_{iA} 的可行區域解析式，至此不再受限於既有的疊層型式：

$$\begin{aligned}
 & 2V_{1A}^2(1 - 3V_{3A}) + 2V_{2A}^2(1 + 3V_{3A}) + V_{3A}^2 + V_{4A}^2 \\
 & -4V_{1A}V_{2A}V_{4A} \leq 1 \\
 & V_{1A}^2 + V_{2A}^2 \leq 1 \\
 & -1 \leq V_{iA} \leq 1 \quad (i = 1, \dots, 4)
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

並且此解析式同樣適用於面外疊層參數域 V_{iD} ：

$$\begin{aligned}
& 2V_{1D}^2(1 - 3V_{3D}) + 2V_{2D}^2(1 + 3V_{3D}) + V_{3D}^2 + V_{4D}^2 \\
& -4V_{1D}V_{2D}V_{4D} \leq 1 \\
& V_{1D}^2 + V_{2D}^2 \leq 1 \\
& -1 \leq V_{iD} \leq 1 \quad (i = 1, \dots, 4)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

因此，對於僅單純與面內或面外相關之最佳化問題，即可於此封閉、具凸性與梯度連續的可行區域內進行變數搜尋。例如 Fukunaga 等人[79]利用面外疊層參數 V_{iD} 最佳化不同邊界條件下的對稱積層平板之挫曲負載強度。

但是對於實際大多數的複材設計問題而言，一般需要同時考慮面內與面外的積層板力學性質。因此，僅有單獨的面內疊層參數域 V_{iA} 或面外疊層參數域 V_{iD} 之可行區域是不足的，必須定義耦合面內與面外的疊層參數可行區域。然而，至今仍未有學者求得此耦合面內與面外之可行區域的充分解析式。有學者提出各種不同的彌補方法：

Diaconu 等人[80]於 2002 年應用變分法(variational method)提出一個近似方法可以求取任意疊層參數域集合之可行區域的隱式近似解，並舉例如圖 3-8 所示。Diaconu 等人[81]以此方法進一步推導出包含三個疊層參數域(A_{ij} 、 D_{ij} 及 B_{ij})之解析式，如下：

$$\begin{aligned}
4(V_{iD} - 1)(V_{iA} - 1) &\geq (V_{iA} - 1)^4 + 3V_{iB}^2, \\
4(V_{iD} + 1)(V_{iA} + 1) &\geq (V_{iA} + 1)^4 + 3V_{iB}^2, \quad i = 1, \dots, 4
\end{aligned} \tag{3.29}$$

但是 Diaconu 等人[81]仍提到，即使綜合式(3.27)、式(3.28)與式(3.29)之可行區域解析式，對於包含十二個疊層參數的設計域而言，仍僅為可行區域之必要條件而非充分條件。

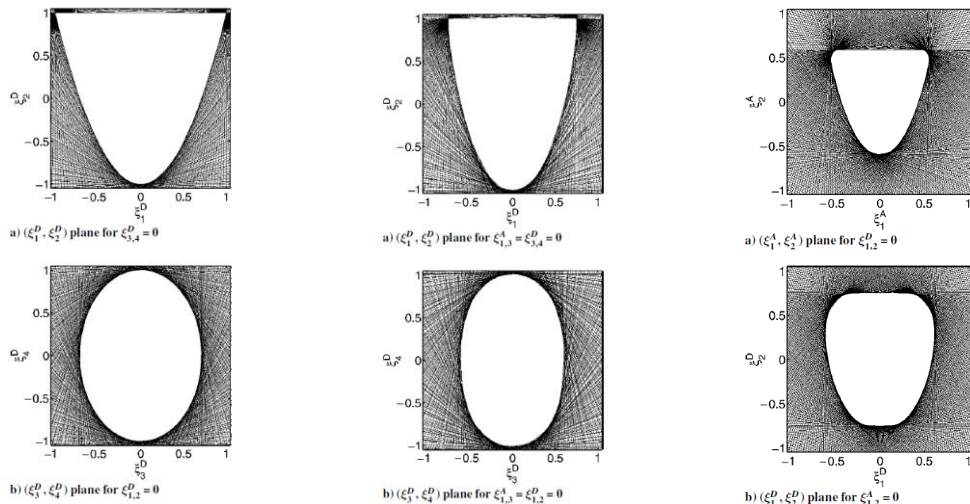


Fig. 7 Feasible region for $\xi_{1,2,3,4}^D$ ($\xi_{1,2,3,4}^A$: arbitrary, $\xi_{1,2,3,4}^B = 0$). Fig. 8 Feasible region for $\xi_{1,3}^A, \xi_{1,2,3,4}^D$ ($\xi_{2,4}^A$: arbitrary, $\xi_{1,2,3,4}^B = 0$). Fig. 9 Feasible region for $\xi_{1,2}^A, \xi_{1,2}^D$ ($\xi_{3,4}^A = 0, \xi_{1,2,3,4}^B = 0, \xi_{3,4}^D = 0$).

圖 3-8 包含不同疊層參數域(A_{ij} 、 D_{ij} 或 B_{ij})之可行區域隱式解[81]

Setoodeh 等人[82]於 2006 年提出以連續凸殼近似法(successive convex hull approximation)求取任意集合之疊層參數域的可行區間。此方法以有限個可行區域邊界上的點建立凸殼(convex hull)，轉換為多個超平面(hyperplane)(當設計域維度為 R^n 時，超平面為一個 $n-1$ 維仿射子空間)，然後求取超平面的端點(vertices)，建立與超平面數目等量之線性限制條件，這些線性限制條件之交集即為該疊層參數域的近似可行區域。該研究以幾種不同維度之設計域做為數值範例，不斷增加離散疊層角度集合直到達成收斂判准，以求取近似可行區域的體積及限制條件，其結果整理如表 3.1 所示。

表 3.1 幾種不同集合之疊層參數域的可行區域體積及建立的超平面數目(其中 V_i 為面內疊層參數、 W_i 為面外疊層參數) [82]

| Feasible Region | Approximate Volume | No. of Hyperplanes Generated |
|---|--------------------|------------------------------|
| $(V_1, V_3); V_2 = V_4 = 0$ | 2.66667 | 107 |
| (V_1, V_2, V_3, V_4) | 3.28988 | 19502 |
| $(W_1, W_3, V_1); V_2 = V_4 = W_2 = W_4 = 0$ | 2.51833 | 2357 |
| $(V_1, V_3, W_1, W_3); V_2 = V_4 = W_2 = W_4 = 0$ | 1.80042 | 37126 |

Bloomfield 等人[83]認為 Setoodeh 等人[82]提出之方法會產生極大量的限制條件，尤其在面對高維度的設計域時，其數量將造成計算效率低落而無法實際應用。

因此，於 2009 年同樣應用超平面提出在既定的離散疊層角度(0° 、 90° 、 $\pm 30^\circ$ 、 $\pm 45^\circ$ 、 $\pm 60^\circ$)下，任意不同疊層參數域集合之設計域的可行區域顯示解求取方法。如圖 3-9 所示，即是以超平面在既定疊層角度且 $V_{4j} = 0$ 的條件下建立的 (V_{1j}, V_{2j}, V_{3j}) 域的可行區域(其中 $j=A、D$)。

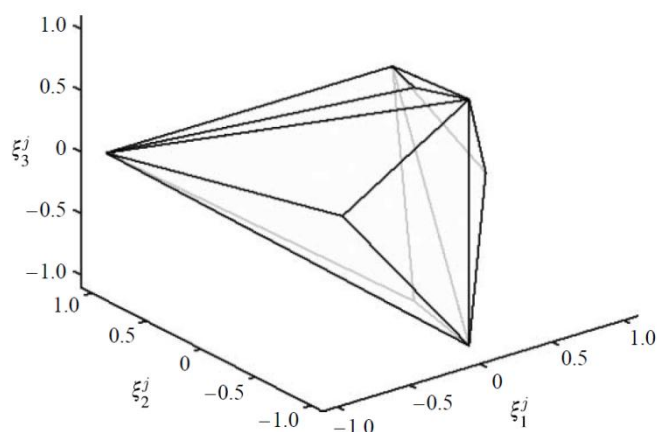


圖 3-9 以疊層角度 0° 、 90° 、 $\pm 30^\circ$ 、 $\pm 45^\circ$ 、 $\pm 60^\circ$ 在 $V_{4j} = 0$ 條件下建立之 (V_{1j}, V_{2j}, V_{3j}) 域的可行區域(其中 $j=A、D$) [83]

同樣於 2009 年，Weaver 與 Bloomfield[84]進一步探討疊層角度集合大小與超平面所包覆的可行區域體積之關係。以面內疊層參數域 V_{iA} 為例，在不考慮可行區域的情況下，此四維空間 R^4 的體積由基本三角函數性質定義為 $16(= 2^4)$ 。而考慮式(3.27)可行區域解析式後，體積限縮為 3.2890，該值即是面內疊層參數域 V_{iA} 之可行區域的理論體積。該研究針對面內、面外與耦合疊層參數，計算由小到大不同疊層角度集和所構成的可行區域體積，並與理論體積相比較，其中部分計算結果如表 3.2 所示。由計算結果可以發現，當疊層角度增量為 5° 時，已可達到超過 97.5% 的理論體積。因此該研究於結論提出：以有限的疊層角度集合，即可涵蓋絕大部分疊層參數域的可行區域。代表對於任何一組疊層參數值，只要以足量的離散疊層角度集合為變數，皆可求得至少一組相對應的疊層角度。而疊層角度與疊層參數之關係，將於 3.2.3 做更詳細的說明與探討。

表 3.2 面內或面外疊層參數域的可行區域體積[84]

| Set of ply orientation (in degrees) | Number of constraints | Volume of feasible region (Vol_j^*) | Relative volume (%) |
|---------------------------------------|-----------------------|---|---------------------|
| [0,90,±45] | 4 | 1.3333 | 41 |
| [0,90,±45,±30,±60] | 20 | 1.5774 | 48 |
| [0,90,±45,±15,±30,±60,±75] | 54 | 2.5981 | 79 |
| 5 Degree Increments between [-85, 90] | 594 | 3.2071 | 97.5 |
| 2.5 Degree Increments | 2484 | 3.2690 | 99.4 |
| 1 Degree Increments | 15930 | 3.2865 | 99.92 |

總結以上論述，包含所有疊層參數之設計域的可行區域仍屬未知，至今並未有充分解析式被推導出來。而近年來有多位學者[80] [82] [83]以近似方法，求取部分疊層參數域的可行區域，並已進一步應用於各種特殊複材最佳化設計中[85-87]。但目前這些方法仍面臨兩難的情況：當疊層角度集合過大，例如 Setoodeh 等人[82]提出的方法，則造成限制條件隨著設計域維度提高而劇增，影響計算效率；當疊層角度集合過小，例如 Bloomfield 等人[83]提出的方法(由表 3.2 可知僅涵蓋 48% 的可行區域)，則因為無法有效涵蓋可行區域，而可能發生「對於一組於可行區域內疊層參數，無法求得相對應的疊層角度組合」之窘境。此外，在這些文獻中皆並未有具體求取超過四個維度以上的設計域之可行區域結果，整體而言，在實際應用上仍是受限的。

3.2.3 疊層參數的物理意義

於 3.2.1 節提到以疊層參數做為設計變數將有利於直接設計各個勁度矩陣元素，而本節將詳細說明疊層參數與勁度矩陣之關聯性及探討疊層參數本身具有的物理意義，並以前述之圖 3-7 Miki's diagram 為例，解釋在可行區域內不同位置之間的疊層角度關係與距離的涵義。

以伸張勁度矩陣 A 為例，由式(3.23)可知，伸張勁度矩陣 A 為材料相依矩陣 Γ_i 的線性組合再乘上積層板厚度。因此，可藉由分別解讀這五個材料相依矩陣的矩陣元素，了解疊層參數與勁度矩陣之關係。

首先，經由直接計算矩陣 Γ_0 可知，矩陣 Γ_0 乘上積層板厚度 h 即等於該積層板在擬等向疊層(quasi-isotropic laminate)下的面內伸張剛性 A 。所以當積層板為擬對稱疊層時，疊層參數 V_{iA} 將全部為零。也因此疊層參數 V_{iA} 可進一步思考成“將原本擬等向疊層混入正交各向異性(orthotropy)的量值”。

矩陣 Γ_1 僅與伸張勁度矩陣 A 中的矩陣元素 A_{11} 與 A_{22} 相關，且矩陣元素 Γ_{11} 與 Γ_{22} 互為相反數。表示疊層參數 V_{1A} 可部份定性的表示兩個方向主軸勁度的分配結果，換句話說：當 V_{1A} 的值趨向於 1 時，將使 1 方向勁度之矩陣元素 A_{11} 增加，2 方向勁度之矩陣元素 A_{22} 減少，可解讀為有較多薄層的纖維方向靠近 1 方向；同樣得，當 V_{1A} 的值趨向於 -1 時，將使 2 方向勁度之矩陣元素 A_{22} 增加，1 方向勁度之矩陣元素 A_{11} 減少，可解讀為有較多的纖維方向靠近 2 方向。

矩陣 Γ_2 與 Γ_4 是唯二與矩陣元素 A_{16} 與 A_{26} 相關的材料相依矩陣，所以綜合 V_{2A} 與 V_{4A} 之值，即可表示伸張與剪切之間的耦合關係。例如：當 V_{2A} 與 V_{4A} 皆為零時，即表示該積層板屬於平衡疊層(balanced laminate)，不具伸張—剪切耦合效應。

矩陣 Γ_3 所造成的影響較為複雜，因為和 A_{11} 、 A_{12} 、 A_{22} 與 A_{66} 皆有相關。不過根據矩陣元素的正負號位置， V_{3A} 仍可作以下變化趨勢的解讀：當 V_{3A} 的值越趨向於 1 時，矩陣元素 A_{11} 與 A_{22} 均增加，而 A_{12} 與 A_{66} 減少，表示同時提高積層板兩個主軸方向伸張勁度，而降低剪切勁度。效應類似增加積層板 0° 與 90° 方向的薄層比例，減少 $\pm 45^\circ$ 方向的薄層比例。反之，當 V_{3A} 的值越趨向於 -1，則會使 A_{22} 與 A_{66} 增加， A_{11} 與 A_{12} 減少。

此外，對於疊層參數於可行區域內之位置與距離的涵義，以及和疊層角度之間的關係，將配合 Miki's diagram 作進一步說明。

Miki's diagram 為當 V_{2A} 、 V_{4A} 與 V_{iB} 皆為零，亦即積層板屬於平衡對稱疊層 (balanced symmetric laminate)時，根據 V_{1A} 與 V_{3A} 之可行區域解析式(3.25)所繪製。

見圖 3-7 並藉由前述對於疊層參數物理意義的認知，可進一步理解：A 點位置 $V_{1A} = V_{3A} = 0$ ，屬於擬等向疊層；B 點位置 $V_{1A} = V_{3A} = 1$ ，表示所有薄層的疊層角度皆為 0° ；F 點位置 $V_{1A} = V_{3A} = -1$ ，表示所有薄層的疊層角度皆為 90° ；G 點位置 $V_{1A} = 0, V_{3A} = 1$ ，表示積層板由等量疊層角度分別為 0° 與 90° 之薄層組成，例如 $[0,90]_s$ ；D 點位置 $V_{1A} = 0, V_{3A} = -1$ ，表示積層板由等量疊層角度分別為 $+45^\circ$ 與 -45° 之薄層組成，例如 $[\pm 45]_s$ 。此外，沿著邊界拋物線上所有的點，皆可視為一組以單一方向角附加正負號之疊層角度組合的計算結果，例如 B、C、D、E 與 F，即分別代表了 $[0]_s$ 、 $[\pm 30]_s$ 、 $[\pm 45]_s$ 、 $[\pm 60]_s$ 與 $[90]_s$ 的計算結果。

任一通過可行區域內某一點 (V_{1A}, V_{3A}) 的直線，皆會與邊界拋物線產生兩個交點。此即表示該點 (V_{1A}, V_{3A}) 可為兩交點所代表的疊層角度組合之合成，而合成比例為該點 (V_{1A}, V_{3A}) 與兩交點距離之反比。舉例說明：G 為 B 與 F 之中點，因此可推測 G 點所代表的疊層角度為 $[0]_s$ 與 $[90]_s$ 之等比例合成結果，滿足前段所提到之 $[0,90]_s$ ；A 又為 D 與 G 之中點，所以可推測 A 點所代表的疊層角度為 $[\pm 45]_s$ 與 $[0,90]_s$ 之等比例合成結果，亦滿足前段所提到之擬等向疊層。然而，根據此原則亦可得知，擬等向疊層並非僅可由 $[\pm 45]_s$ 與 $[0,90]_s$ 合成，因為通過 A 點之直線也可以是線段 \overline{EB} 或者 \overline{CF} 。以線段 \overline{EB} 而言，A 點的疊層角度會是 $[\pm 60]_s$ 與 $[0]_s$ 以 2：1 合成之結果，即 $[\pm 60, 0]_s$ ；以線段 \overline{CF} 而言，A 點的疊層角度則會是 $[\pm 30]_s$ 與 $[90]_s$ 以 2：1 合成之結果，即 $[\pm 30, 0]_s$ 。

同理可知，對於可行區域內的每一個位置(代表一組疊層參數)，都可以有無限多種的疊層角度組合加以表示，但是疊層參數與勁度矩陣卻是一對一的函數關係。也就是說，對於同樣一個結構響應，以疊層參數做為設計變數，其搜尋方向可以是連續的變化過程，一般可求得唯一的最佳解；而假如以疊層角度為設計變數，則可能因為具有多個分散的局部最佳解，而導致提早收斂至其中一個局部最

佳解。因此再一次證明：當最佳化演算法需考慮搜尋方向時，疊層參數較疊層角度更適合做為最佳化的設計變數。

而在下兩個章節中，將以複合材料種類中最常使用但卻不易進行最佳化設計的積層板與表材非等向性三明治結構，具體說明如何應用疊層參數的優勢於複合材料最佳化，以解決目前複合材料最佳化以基因演算法求解所面臨的效率低落問題。



第四章 複材積層板最佳化

在前一章中已對疊層參數詳加介紹，同時透露疊層參數在可行區域的限制條件上仍有很大的研究空間，並探討其物理意義以解釋相較於疊層角度與順序而言，疊層參數做為複合材料最佳化設計變數之優勢，而本章將具體說明如何將疊層參數應用於複材積層板最佳化中。

如 3.1.3 所言，對於普遍的複合材料設計而言，一般會避免伸張對彎曲或扭轉的耦合效應的產生，亦即會將積層板設計為對稱疊層使耦合勁度矩陣 B 的各個矩陣皆為零。所以，本章首先針對對稱疊層的八個耦合疊層參數域，以建立少量的限制條件擬合式，進一步排除不可行區域。並將原本複材積層板最佳化問題劃分為兩個步驟的子問題：先以梯度演算法進行疊層參數最佳化，求取最佳疊層參數組合；再用演化式演算法搜尋最符合該疊層參數組合的對稱疊層角度與順序。

此外，於本章中將先以三點彎曲實驗驗證分析方法的準確性，並以比對四邊簡單支撐之平板剛性最大化解析解驗證最佳化方法的準確性。再進而以平板在不同尺寸規格下；以及圓管在不同負載條件下的剛性最佳化做為數值範例，驗證此複材積層板最佳化方法的準確性、相較於傳統方法之效率提升以及對於不同結構幾何與邊界條件的通用性。

4.1 近似疊層參數可行區域求取

由 3.2.2 可知，目前僅有單獨的面內疊層參數域或面外疊層參數域的可行區域解析式，即式(3.27)與(3.28)。就算有學者提出部份耦合疊層參數域的必要條件顯示解，如式(3.29)，仍與真實的可行區域體積範圍有偌大的差異。因此有多位學者提出以近似方法求取部份疊層參數域的可行區域的隱式解，其中則以 Setoodeh 等人 [82] 提出使用凸殼近似求取可行區域之方法有較多的應用 [85-87]。但是文獻中皆無超過四個維度之範例，因此筆者嘗試先以該方法進行不同維度的疊層參數域可行區域之求取，藉以了解此方法對於疊層參數超過四個維度的最佳化問題之可行性。

以 8 層對稱疊層做測試之結果如下表所示：

表 4.1 以凸殼近似求取不同維度疊層參數域可行區域的限制條件數量

| Number of constrains ^{*1} | | Degree increments ^{*1} | | |
|------------------------------------|---|---------------------------------|------|-------------------|
| | | 5° [*] | 15° | 30° |
| Dimensions | 3(V_{1A}, V_{2A}, V_{3A}) | 212 | 28 | 8 |
| | 4($V_{1A}, V_{3A}, V_{1D}, V_{3D}$) | × | 3455 | 434 ^{*3} |
| | 6($V_{1A} - V_{4A}, V_{1D}, V_{3D}$) | × | × | 26810 |
| | 8($V_{1A} - V_{4A}, V_{1D} - V_{4D}$) | × | × | × |

*1 “×”表示數量過大，難以計算。

*2 避免資料點過多，此處僅以外側兩層之角度增量為 5°，內側兩層維持 15°。

*3 以此所有限制條件為例，轉換成超級面可繪製成如圖 4-1 之可行區域。

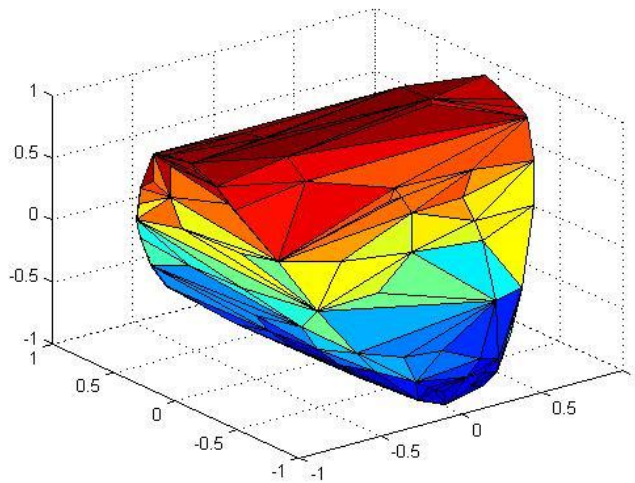


圖 4-1 疊層參數域(V_{1A}, V_{2A}, V_{3A})以 30°角度增量近似之可行區域

然而，由表 4.1 所例舉的範例可以發現，以對稱疊層所需的八個耦合疊層參數域的八維可行區域而言，當角度增量小於 30°時，用此方法完全無法有效的求得可行區域隱式解。或者可以說，就算用更高階的硬體設備計算求得，其數目亦不

可能使其應用於最佳化過程中，因為僅僅六維的可行區域以 30° 角度增量近似，即產生超過萬條的不等式限制條件。如果在每一次最佳化演算過程中皆須一一計算，那麼所耗費的資源將難以估計而無法達到最初提升效率的目標。另一方面，如果為了減少限制條件數目而一味地提高角度增量，則可能過於限縮近似可行區域體積，而與可行區域理論體積有過大的落差，導致最佳化的結果並非最佳解。

因此，在目前所有研究皆無法求得八個耦合疊層參數域之可行區域的充要限制條件的情況下，如何以最少量的近似限制條件，有效率且不過度的限縮可行區域範圍，是本研究在進行複材積層板最佳化前的首要目標。

4.1.1 限制條件擬合式建立

本研究採用「建立二維限制條件」的方式，進一步限縮「綜合現有解析式求得的八維耦合疊層參數域之必要可行區域」。所謂的二維是指：對於一個限制條件同時只考慮兩個疊層參數。因此，八個疊層參數原本共會有 $28(=C_2^8)$ 個二維面，而根據這 28 個二維面上的可行區域投影，即可以建立 28 組限制條件。但是由於已有單獨面內與面外之解析式(3.27)與(3.28)，所以其中 $12(=2C_2^4)$ 組必然自動滿足；且式(3.29)亦等同於面內與面外下標號相同($V_{iA}=V_{iD}, i=1, \dots, 4$)的 4 條耦合限制條件。故實際須以擬合方法建立的二維限制條件將縮減至 12 組。但本節仍會求取所有的耦合限制條件共 16 組，詳見表 4.2。以於下一節 4.1.2 中，將面內與面外下標號相同之擬合限制條件與式(3.29)比對，驗證其準確性。

擬合限制條件的建立方式為：先取得大量疊層角度組合所對應的八個疊層參數(本研究採用 8 層對稱疊層，最外層角度增量為 5° ，其餘為 15° ，共 62208 組疊層參數)；再將 V_{iA} 與 V_{iD} 如表 4.2 捉對建立二維散佈圖；並以 MATLAB 軟體搜尋凸殼座標點；最後以這些凸殼座標點於每個散佈圖上建立一到二條擬合多項式，做為可行區域的限制條件。

表 4.2 V_{iA} 對 V_{iD} 建立二維限制條件列表

| | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| V_{1A} vs V_{1D} | V_{2A} vs V_{1D} | V_{3A} vs V_{1D} | V_{4A} vs V_{1D} |
| V_{1A} vs V_{2D} | V_{2A} vs V_{2D} | V_{3A} vs V_{2D} | V_{4A} vs V_{2D} |
| V_{1A} vs V_{3D} | V_{2A} vs V_{3D} | V_{3A} vs V_{3D} | V_{4A} vs V_{3D} |
| V_{1A} vs V_{4D} | V_{2A} vs V_{4D} | V_{3A} vs V_{4D} | V_{4A} vs V_{4D} |

16 個散佈圖及 16 組共 30 條限制條件擬合結果列於表 4.3-表 4.6。其中每一個藍點代表一組疊層參數組合，黑線則為由凸殼座標點所建立的擬合線。此外，可對擬合式做積分運算求取該二維平面上可行區域內的面積。因此，末欄即顯示考慮此組限制條件擬合式後，於此二維平面上限縮後對限縮前的面積百分比，亦可解釋為透過這組限制條件，可使八維耦合疊層參數域限縮的體積百分比。

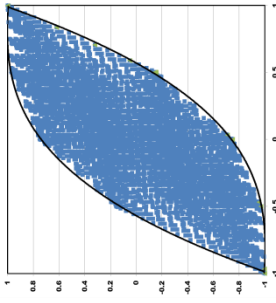


表 4.3 V_{1A} 對 V_{1D} 建立之擬合限制條件

限縮後/前體積比

擬合限制條件

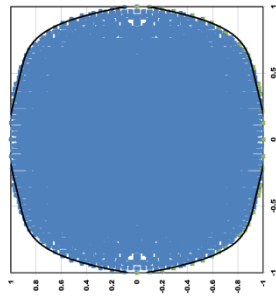
X= Y= 凸殼座標擬合線



$$V_{1D} - 0.221V_{1A}^3 + 0.758V_{1A}^2 - 0.793V_{1A} - 0.7392 \leq 0$$

$$V_{1D} - 0.221V_{1A}^3 - 0.758V_{1A}^2 - 0.793V_{1A} + 0.7392 \geq 0$$

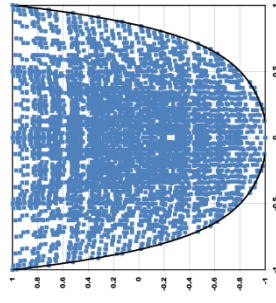
48.62%



$$V_{2D} + 1.7482V_{1A}^6 - 1.448V_{1A}^4 + 0.6447V_{1A}^2 - 1.0219 \leq 0$$

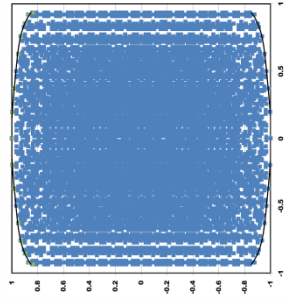
$$V_{2D} - 1.7482V_{1A}^6 + 1.448V_{1A}^4 - 0.6447V_{1A}^2 + 1.0219 \geq 0$$

84.69%



$$V_{3D} - 1.1933V_{1A}^6 - 0.0588V_{1A}^4 - 0.7522V_{1A}^2 + 1.011 \geq 0$$

78.90%



$$V_{1A} + 0.3437V_{4D}^6 - 0.3314V_{4D}^4 + 0.2007V_{4D}^2 - 1.0035 \leq 0$$

$$V_{1A} - 0.3437V_{4D}^6 + 0.3314V_{4D}^4 - 0.2007V_{4D}^2 + 1.0035 \geq 0$$

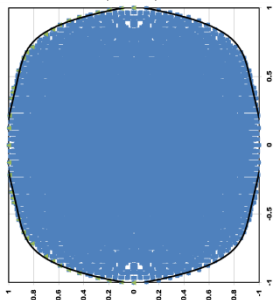
95.38%

表 4.4 V_{2A} 對 V_{1D} 建立之擬合限制條件

Y= 凸殼座標點擬合線

擬合限制條件

X= 限縮後/前體積比

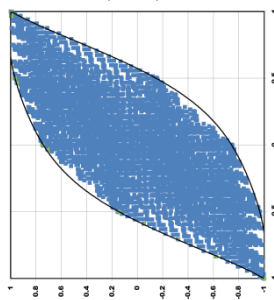


$$V_{1D} - 1.7482N_{2A}^6 - 1.448N_{2A}^4 + 0.6447N_{2A}^2 - 1.0219 \leq 0$$

$$V_{1D} - 1.7482N_{2A}^6 + 1.448N_{2A}^4 - 0.6447N_{2A}^2 + 1.0219 \geq 0$$

V_{2A} V_{1D}

84.69%

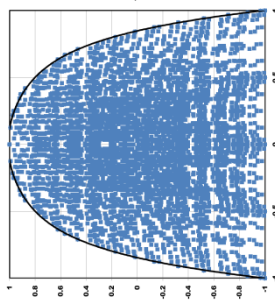


$$V_{2D} - 0.2211V_{2A}^3 + 0.7589V_{2A}^2 - 0.7939V_{2A} - 0.7392 \leq 0$$

$$V_{2D} - 0.2211V_{2A}^3 - 0.7589V_{2A}^2 - 0.7939V_{2A} + 0.7392 \geq 0$$

V_{2A} V_{2D}

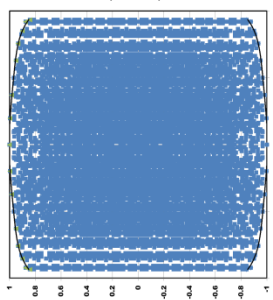
48.62%



$$V_{3D} + 1.1933V_{2A}^6 + 0.0588V_{2A}^4 + 0.7522V_{2A}^2 - 1.011 \geq 0$$

V_{2A} V_{3D}

91.05%



$$V_{2A} + 0.3437V_{4D}^6 - 0.3314V_{4D}^4 + 0.2007V_{4D}^2 - 1.0035 \leq 0$$

$$V_{2A} - 0.3437V_{4D}^6 + 0.3314V_{4D}^4 - 0.2007V_{4D}^2 + 1.0035 \geq 0$$

V_{2A} V_{4D}

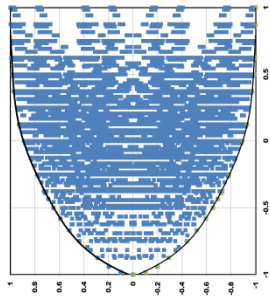
95.38%

表 4.5 V_{3A} 對 V_{1D} 建立之擬合限制條件

Y = 凸殼座標擬合線

擬合限制條件

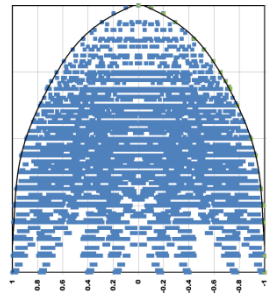
X = 限縮後/前體積比



$$\begin{aligned}
 &V_{D1} + 0.3054V_{A3}^6 - 0.233V_{A3}^5 - 0.3061V_{A3}^4 + \\
 &0.0977V_{A3}^3 + 0.3777V_{A3}^2 - 0.3443V_{A3} - 0.8938 \leq 0 \\
 &V_{D1} - 0.3054V_{A3}^6 + 0.233V_{A3}^5 + 0.3061V_{A3}^4 - \\
 &0.0977V_{A3}^3 - 0.3777V_{A3}^2 + 0.3443V_{A3} + 0.8938 \geq 0
 \end{aligned}$$

V_{3A} V_{1D}

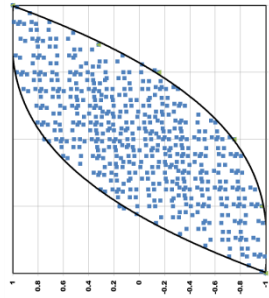
78.57%



$$\begin{aligned}
 &V_{D2} + 0.3054V_{A3}^6 + 0.233V_{A3}^5 - 0.3061V_{A3}^4 - \\
 &0.0977V_{A3}^3 + 0.3777V_{A3}^2 + 0.3443V_{A3} - 0.8938 \leq 0 \\
 &V_{D2} + 0.3054V_{A3}^6 - 0.233V_{A3}^5 + 0.3061V_{A3}^4 + \\
 &0.0977V_{A3}^3 - 0.3777V_{A3}^2 - 0.3443V_{A3} + 0.8938 \geq 0
 \end{aligned}$$

V_{3A} V_{2D}

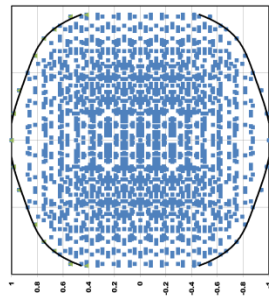
78.57%



$$\begin{aligned}
 &V_{D3} - 0.198V_{A3}^3 + 0.75V_{A3}^2 - 0.8075V_{A3} - 0.7405 \leq 0 \\
 &V_{D3} - 0.198V_{A3}^3 - 0.75V_{A3}^2 - 0.8075V_{A3} + 0.7405 \geq 0
 \end{aligned}$$

V_{3A} V_{3D}

48.05%



$$\begin{aligned}
 &V_{A3} - 1.2616V_{D4} + 1.2544V_{D4}^4 - 0.766V_{D4}^2 + 1.0129 \leq 0 \\
 &V_{A3} + 1.2616V_{D4} - 1.2544V_{D4}^4 + 0.766V_{D4}^2 - 1.0129 \geq 0
 \end{aligned}$$

V_{4D} V_{3A}

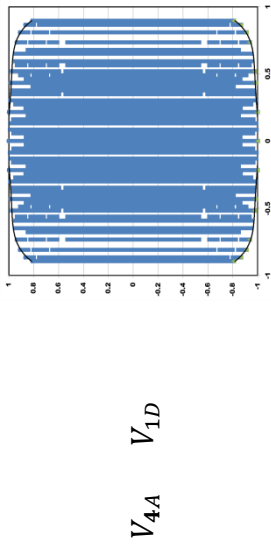
82.82%

表 4.6 V_{4A} 對 V_{1D} 建立之擬合限制條件

Y = 凸殼座標點擬合線

擬合限制條件

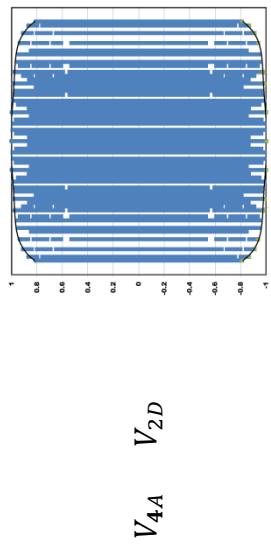
X = 限縮後/前體積比



$$V_{D1} + 0.8345V_{A4}^6 - 0.6653V_{A4}^4 + 0.2309V_{A4}^2 - 1.0054 \leq 0$$

$$V_{D1} - 0.8345V_{A4}^6 + 0.6653V_{A4}^4 - 0.2309V_{A4}^2 + 1.0054 \geq 0$$

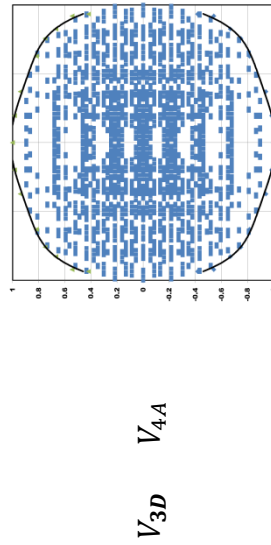
94.23%



$$V_{D2} + 0.8345V_{A4}^6 - 0.6653V_{A4}^4 + 0.2309V_{A4}^2 - 1.0054 \leq 0$$

$$V_{D2} - 0.8345V_{A4}^6 + 0.6653V_{A4}^4 - 0.2309V_{A4}^2 + 1.0054 \geq 0$$

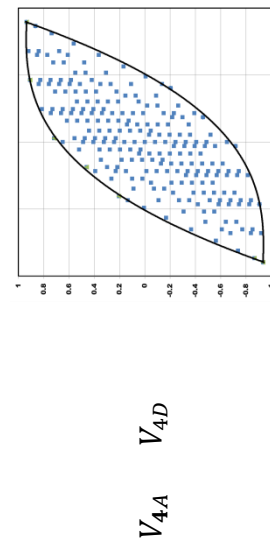
94.23%



$$V_{A4} + 1.2616V_{D3}^6 - 1.2544V_{D3}^4 + 0.766V_{D3}^2 - 1.0129 \leq 0$$

$$V_{A4} - 1.2616V_{D3}^6 + 1.2544V_{D3}^4 - 0.766V_{D3}^2 + 1.0129 \geq 0$$

82.82%



$$V_{D4} - 0.198V_{A4}^3 + 0.75V_{A4}^2 - 0.8075V_{A4} - 0.7405 \leq 0$$

$$V_{D4} - 0.198V_{A4}^3 - 0.75V_{A4}^2 - 0.8075V_{A4} + 0.7405 \geq 0$$

48.05%

4.1.2 擬合式準確性驗證

本小節將針對上一節建立的16組共30條限制條件擬合式分兩階段進行驗證。於第一階段，定量比較式(3.29)與綜合面內對面外下標號相同($V_{iA}=V_{iD}, i = 1, \dots, 4$)的4條耦合限制條件之限縮後的面積百分比，以了解所建立的限制條件擬合式是否適當；第二階段以隨機產生不同層數的疊層角度組合並求取對應的疊層參數組合代入該30條限制條件擬合式，計算涵蓋率及定性觀察疊層參數組合於散佈圖上是否充滿整個可行區域。

式(3.29)與綜合面內對面外下標號相同($V_{iA}=V_{iD}, i = 1, \dots, 4$)的4條耦合限制條件的比較結果，其中「 V_{1A} vs V_{1D} 」與「 V_{2A} vs V_{2D} 」擬合式係數完全相同，且「 V_{3A} vs V_{3D} 」與「 V_{4A} vs V_{4D} 」亦相同。所以僅以「 V_{1A} vs V_{1D} 」及「 V_{3A} vs V_{3D} 」之比較結果表示於下圖 4-2 圖 4-3：

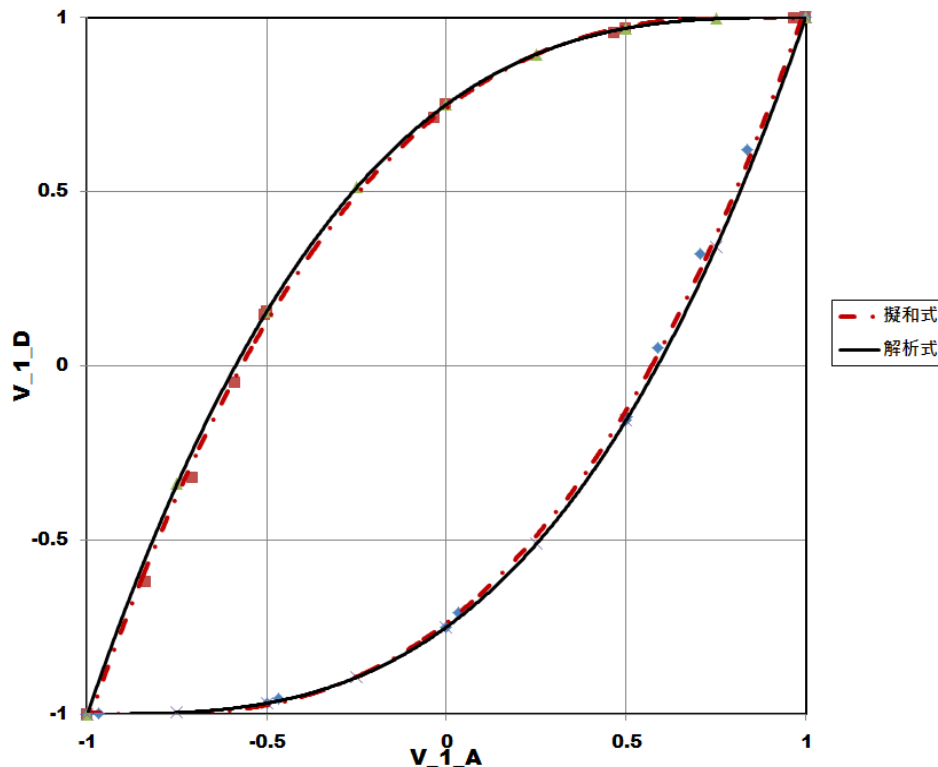


圖 4-2 V_{1A} vs V_{1D} 限制條件解析式與擬合式之比較

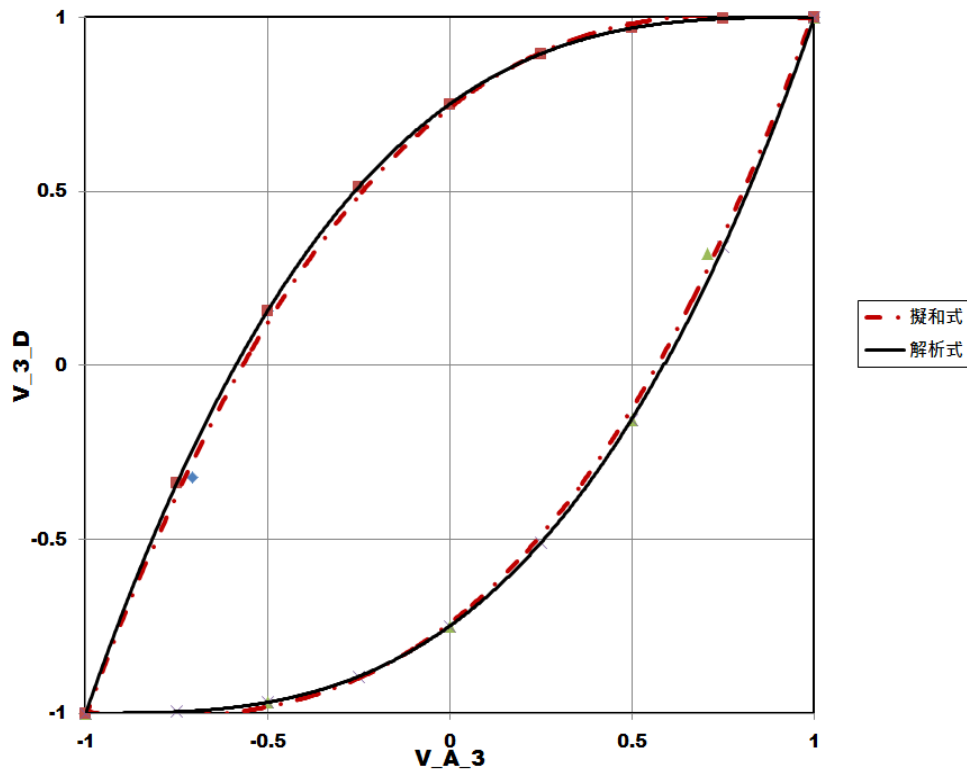


圖 4-3 V_{3A} vs V_{3D} 限制條件解析式與擬合式之比較

其中，解析式以黑色實線繪製，限縮後/前面積比經過積分計算後為 50%；擬合式以紅色虛線繪製，「 V_{1A} vs V_{1D} 」與「 V_{3A} vs V_{3D} 」之限縮後/前面積比由表 4.3 表 4.5 可知分別為 48.62% 與 48.05%。此外，觀察圖 4-2 圖 4-3 可以見得，解析式與擬合式所建立的可行區域大致相同，但解析式幾乎涵蓋了擬合式所建立的可行區域。所以，如果將兩者之限縮後/前面積比做比較，可進一步推估「 V_{1A} vs V_{1D} 」與「 V_{3A} vs V_{3D} 」限制條件擬合式的可行區域涵蓋率約分別達 97.24%(=48.62%/50%) 與 96.1%(=48.05%/50%)。顯示以此疊層角度集合所產生的 62208 個疊層參數組合所建立之限制條件擬合式做為必要條件時，已具有極高的判別準確率。

但是對於其他建立的 12 條限制條件擬合式，卻必然無法有相對應的解析式加以比對驗證，所以本研究以任意產生不同層數的疊層角度組合(本研究採用層數 8 層、16 層與 24 層之疊層角度組合各 10000 組，共 30000 組疊層角度組合)並計算其疊層參數組合，如表 4.7 所示代入 12 條擬合式當中，除了計算涵蓋率以推估準確性，亦可藉由疊層參數資料點的分佈情況，評判所建立的限制條件擬合式是否

適當，例如：如果涵蓋率甚高且未有大面積的未填滿區塊，則表示該限制條件擬合式可有效且準確地於二維疊層參數域內限縮可行區域面積。

表 4.7 限制條件擬合式涵蓋率計算

| X= | Y= | 隨機取點散佈圖 | 擬合式涵蓋率 |
|-----------------|-----------------|---------|--------|
| V _{1A} | V _{2D} | | 99.95% |
| V _{1A} | V _{3D} | | 99.96% |
| V _{4D} | V _{1A} | | 99.99% |
| V _{2A} | V _{1D} | | 99.95% |

X=

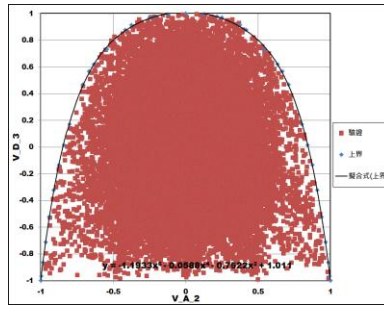
Y=

隨機取點散佈圖

擬合式涵蓋率

V_{2A}

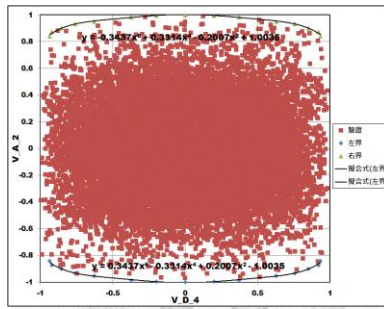
V_{3D}



99.97%

V_{4D}

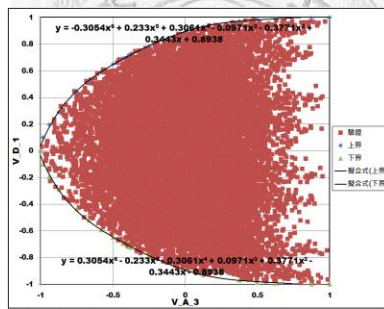
V_{2A}



99.99%

V_{3A}

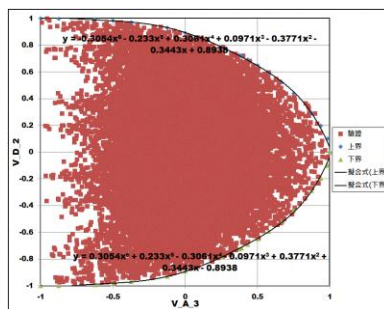
V_{1D}



99.94%

V_{3A}

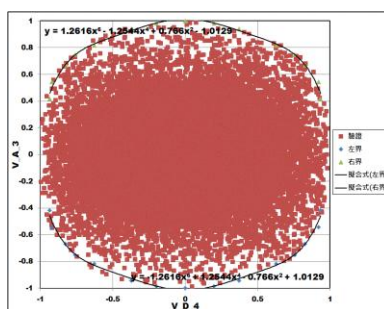
V_{2D}



99.94%

V_{4D}

V_{3A}



99.95%

X=

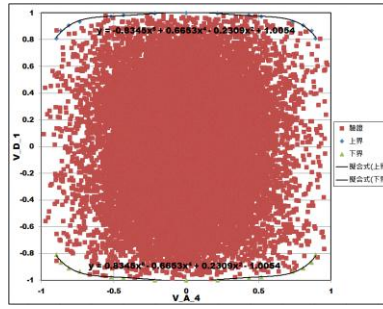
Y=

隨機取點散佈圖

擬合式涵蓋率

V_{4A}

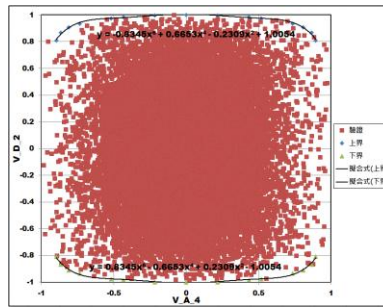
V_{1D}



99.98%

V_{4A}

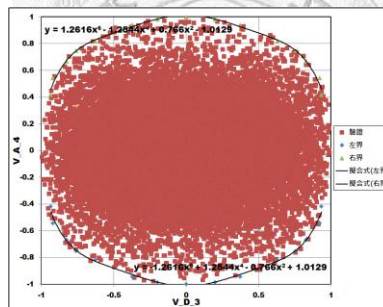
V_{2D}



99.98%

V_{3D}

V_{4A}



99.93%

由上表可知，擬合式涵蓋率皆超過 99.9%，而未涵蓋的少數點亦相去擬合式邊界不遠；且觀察散佈圖上的點，幾乎佈滿擬合式內的區域。表示此擬合式可有效的應用於極大多數的疊層組合中。

因此，原本八維耦合疊層參數域的體積為 $256(= 2^8)$ ，先考慮式(3.27)與(3.28)後可使體積限縮為 $10.8175(= 3.2890^2)$ ，再透過式(3.29)可進一步限縮為 $0.6761(= 10.8175 \times 0.5^4)$ ，最後再加入本研究新建立的 26 條限制條件擬合式，可將體積限縮至 $0.1192(= 0.6761 \times 17.62\%)$ 。儘管八維耦合疊層參數域的理论可行區域體積必然小於此值，但僅透過這 32 條限制條件即可排除 99.95%的體積，有效率的大幅降低所求得的疊層參數組合並無真實對應的疊層角度與順序之可能性。此外，於 4.4 節將進一步驗證，即使上述情況發生，只要此疊層參數組合離可行區域邊界尚不遠，依據疊層參數域梯度連續的特性，仍有機會在最靠近此疊層參數組合的邊界上求得最佳解。

所以，於後述的章節中，將皆以此 32 條限制條件(解析式 6 條與擬合式 26 條)做為以疊層參數為設計變數之子問題的設計限制。

4.2 積層板最佳化問題建立

雖然於 2.1 中，為了有系統的探討複材積層板最佳化，而以最佳化方法的種類做為分類依據。但是在該節中亦提及，對於不同的研究方向所建立之積層板最佳化問題的亦不盡相同。例如：設計變數可能為材料種類、疊層厚度、角度或順序等之中的某些項目；目標函數可能為強度、挫曲負載、應變能、基頻、重量或剛性等；而設計限制亦有其多寡。因此，最佳化問題的建立是否得當，與求解難易以及是否可以求得合理的最佳解皆有相關。

而本節的目的在於先建立一個標準的積層板最佳化問題，以利於在下一節中說明如何應用疊層參數將此最佳化問題分解為兩個子問題，並以複合式最佳化方法求解。

4.2.1 設計變數

於積層板最佳化問題中，當設計變數包含疊層角度時，通常具有較高的求解難度，也是大多數積層板最佳化的研究方向。所以本研究將屏除各層薄層的材料選擇與厚度變化之影響，簡化最佳化問題，以利於直接比較本研究之方法相較於傳統方法，在以疊層角度做為設計變數時之效益。

此外，Weaver 與 Bloomfield[84]提到，以有限的疊層角度集合，即可涵蓋絕大部分疊層參數域的可行區域。表示即使疊層角度設定為離散變數，只要變數範圍選取適當，對於所求得的最佳解之目標函數值，與設定為連續變數應是相去不遠的。

因此本研究參考表 3.2，以可行區域範圍達理論體積的 97.5% 之「5° 角度增量」之各層疊層角度做為設計變數，可表示如下：

$$-90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ, \{\theta_i | p \times 5^\circ, p \in Z\} \quad (4.1)$$

4.2.2 設計限制

由於本研究的積層板最佳化問題將預先指定材料且各層厚度為定值，所以對於單件積層板而言，在給予重量限制條件後，即可推得疊層數目限制條件。且由於疊層數目與目標函數基本上為單調函數關係，因此最佳疊層數目顯然為限制條件的上界。此外，基於簡化最佳化問題的原則，亦先不將傳統複材設計手冊中所條列之疊層規則列入考慮。

4.2.3 目標函數

於實務應用上，複材結構體的設計大多以強度或剛性為首要考量。但是由於複合材料並非單一的破壞模式，在必須考慮多種破壞判准的情況下，對於較複雜

的結構體而言，強度最佳化可能無法求取或不切實際，因為各種破壞判准幾乎不可能同時成立。雖然已有研究[88]嘗試建立疊層參數與積層板強度之間的關係，但仍有兩個問題尚待解決：一為取決於材料勁度與破壞強度之保守破壞包絡線的形狀仍然未知；二為尚未證明在疊層參數域中，破壞指數函數具凸性。除此之外，此方法亦無法考慮局部或層間等破壞模式的發生。所以本研究的最佳化問題仍將以最大化剛性為目標函數，亦即求取積層板結構體的最小位移，可記為：

$$\min U_{max}(\theta_i), i \in \{1, \dots, n\} \quad (4.2)$$

其中 n 為表材層數。

4.3 方法架構與流程

本節將具體說明如何應用疊層參數將上節所述的積層板最佳化問題分解為兩個子問題，並依據子問題的特性，分別選擇適合的最佳化演算法求解。如圖 4-4 所示，最佳化流程將劃分為兩個步驟：Step1—以梯度演算法進行疊層參數最佳化；Step2—以演化式演算法進行疊層角度擬合。以下將分別就這兩個步驟的執行過程作詳細說明：

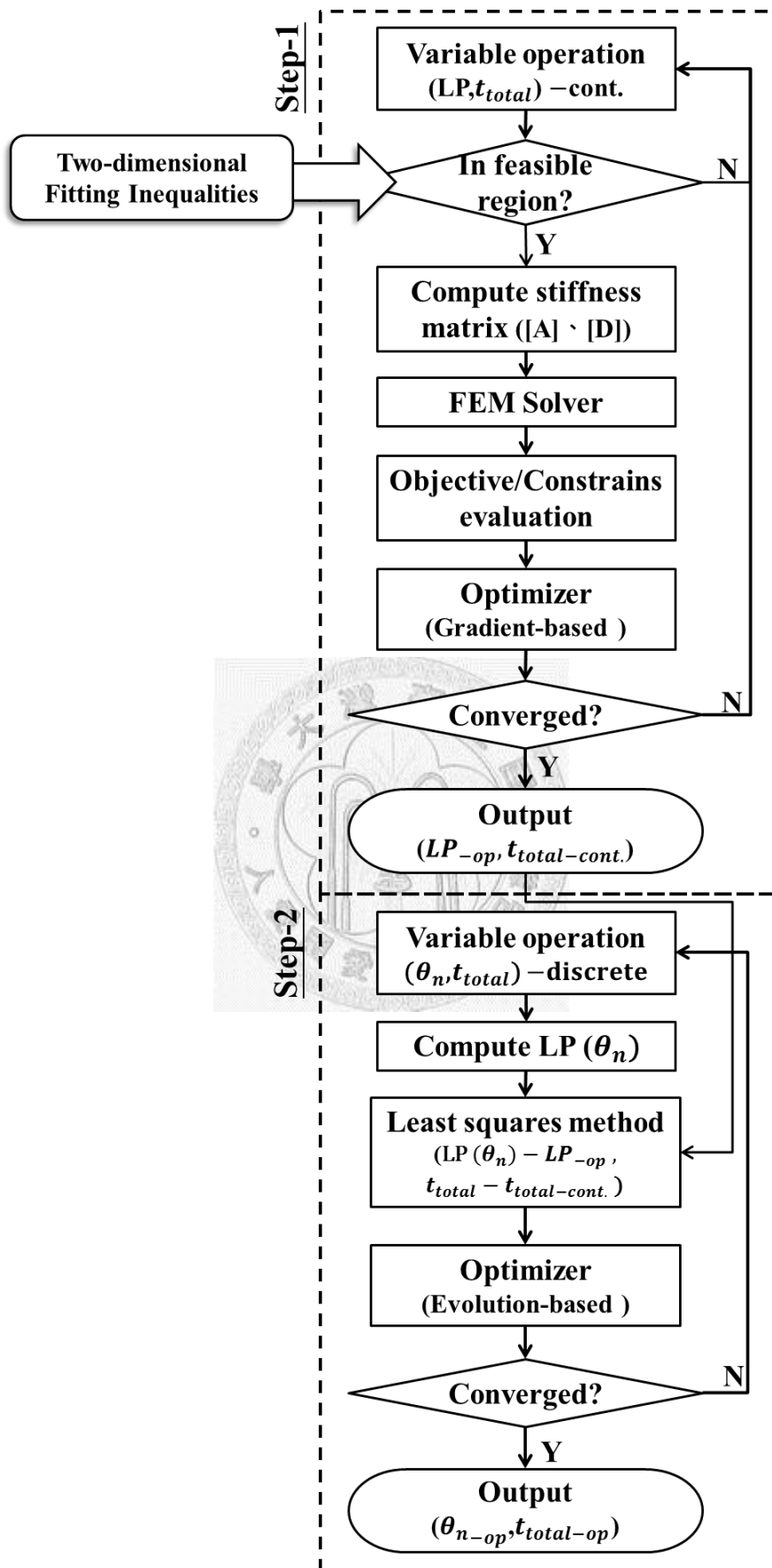


圖 4-4 積層板複合式最佳化流程圖

4.3.1 Step1：以梯度演算法進行疊層參數最佳化

如圖 4-4 上半部所示，此步驟以疊層參數 LP 與積層板厚度 t_{total} 做為設計變數。其中因為積層板設為對稱疊層，所以設計變數中的疊層參數 LP 僅包含 V_{1A} 、 V_{2A} 、 V_{3A} 、 V_{4A} 、 V_{1D} 、 V_{2D} 、 V_{3D} 與 V_{4D} 。此外，如果是單件積層板，最佳厚度基本上可由重量限制上界直接計算獲得，而不需納入設計變數當中。

此步驟首先給定一起始值，計算是否滿足 32 條可行區域限制條件，如果其中有未滿足的限制條件，則需重新給定起始值。如果該組疊層參數位於可行區域內，則進一步以此組疊層參數計算伸張與彎曲勁度矩陣 A 、 D ，並代入有限元素模型，以有限元素法求解器(本研究以 ABAQUS 建立有限元素模型並求解)計算目標函數值(即最大位移)與限制條件。接著進入最佳化程序，在此步驟使用梯度演算法求取搜尋方向與步長(本研究以 OPIMUS 建立最佳化程序，演算法選用序列二次規劃(sequential quadratic programming, SQP)，參數設定如表 4.8 所示，並仍將可行區域視為設計限制，以避免新的位置超出可行區域邊界。然後，進行疊代運算直到滿足收斂判准，則此組疊層參數與積層板厚度即為該子問題的最佳解。

表 4.8 序列二次規劃參數設定

| | |
|----------------------|--------------------|
| Tolerance | 0.0001 |
| Max. nr. Iterations | 50 |
| Max. line search | 20 |
| Gradient calculation | Finite Difference |
| Gradient method | Forward Difference |

4.3.2 Step2：以演化式演算法進行疊層角度擬合

如圖 4-4 下半部所示，此步驟以離散的疊層角度集合 θ^n 與積層板厚度 t_{total} 做為設計變數。其中疊層角度集合 θ^n 如 4.2.1 所述以「5°角度增量」做為變數集合，而積層板厚度 t_{total} 則為單層薄層厚度的 $2n$ 倍， $n \in \mathbb{N}$ 。先求取疊層角度所對應的疊層參數組合 $LP(\theta_n)$ ，並以最小平方法(least squares method)計算該組設計變數與上

個步驟的最佳解之距離。以此「距離」做為目標函數，使用演化式演算法求取最小化距離的最佳解(本研究選用自適應性遺傳演算法(Self-Adaptive Evolution Algorithms)，參數設定如所示)，其中包含最佳各層疊層角度 θ_{n-op} 與最佳積層板厚度 $t_{total-op}$ ，即是 4.2 節所建立的最佳化問題之最佳解。

表 4.9 自適應性遺傳演算法參數設定

| | |
|-----------------------------|------|
| Number of parents | N |
| Sexuality | N |
| Population size | 5N |
| Initial step-width | 1 |
| Average stopping step-width | 0.01 |
| Step-width mutation factor | 1.3 |

N : number of variables

4.3.3 小結

在整個最佳化過程中(包含 Step1 與 Step2)，大部分的時間(約 95% 以上)耗費於以有限元素求解器計算目標函數與限制條件上。換言之，欲提高最佳化的求解效率，最有效的方法即為在不降低最佳化準確性的前提下，減少呼叫有限元素求解器作計算的次數。

於 2.1.5 中提到，當以疊層角度做為設計變數時，與目標函數(如最大位移)通常呈現高階非線性、多峰與非凸性的函數關係。因此，雖然梯度演算法具有較佳精確度與收斂速度，卻往往僅能求得局部最佳解。所以，面對較複雜的積層板最佳化問題，目前的趨勢為使用啟發式演算法，因其具有良好的全域最佳解搜尋能力，其中又以演化式演算法(如基因演算法)最廣為使用。然而，這類演算法的最大缺點即是需要大量的目標函數求解次數，對於略為複雜的問題，往往可能需要上千次的目標函數計算才達到收斂。

而本研究所提出之複合式最佳化方法，應用疊層參數將原最佳化問題分解為兩個子問題。因此，在需要計算目標函數的 Step1 中，即可利用疊層參數平滑、連

續且具凸性的特性，先使用梯度演算法求取最佳疊層參數組合，達到大幅減少用有限元素求解器作計算的次數的目的。然後於 Step2 再以演化式演算法搜尋轉換結果最接近該組疊層參數的疊層角度組合。因為此時不需要再呼叫有限元素求解器，所以即使需要大量的演算次數，亦幾乎不影響整體最佳化的效率表現。

4.4 實例驗證與比較

本節將首先以三點彎曲實驗驗證使用古典積層板理論結合有限元素法之方析方法的準確性；然後以一個可解析之積層板最佳化問題，驗證本研究所提出之最佳化方法的準確性；再分別以不同尺寸規格之積層平板與不同附載條件之積層圓管最佳化問題，驗證此方法之效率提升與通用性。以充分證明此方法的可行性與進步性。

4.4.1 分析方法準確性驗證

本研究欲以三點彎曲實驗驗證分析方法之準確性，使用與本實驗室林逸祥[89]學長之研究相同的實驗器材並參考其設定方法，該實驗內容是參照 ASTM C 393 (Standard Test Method for Flexural Properties of Sandwich Constructions) 所建立的，圖 4-5 為相關之幾何參數設定。

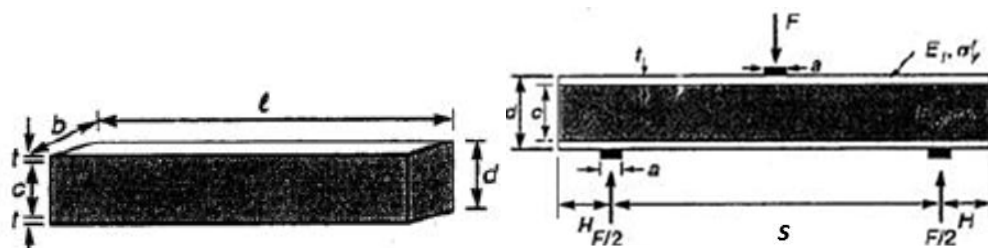


圖 4-5 ASTM C 393 實驗相關幾何參數

原實驗主要目的為測試三明治結構之表材降伏或芯材剪切破壞強度與彎曲剛性。但於本研究中僅藉此負載模式與邊界條件，驗證積層板在不同疊層角度下，使用不同有限元素分析模型之「彎曲剛性」的分析準確性，以了解在本研究中以

古典積層板理論結合有限元素分析是否可行。因此，將不考慮實驗後段之非線性乃至破壞之行為。

此外，由於積層板之比彎曲剛性大幅低於三明治結構，導致加載過程中會產生如圖 4-6 所示，施力塊與試片並非面接觸而近似線接觸之情況，因此有限元素模型的設定上，相較於林逸祥學長於研究中之邊界條件設定，必須更精確地描述此一現象，避面與實驗結果產生過大的誤差。詳細內容將在 4.4.1.b 做進一步的說明。



圖 4-6 施力塊與積層板僅兩端線接觸

4.4.1.a 實驗設計與驗證方法

本實驗試片尺寸規格統一如圖 4-7 所示，其中 l 為試片長度， b 為試片寬度， a 為三個接觸面之寬度， s 為固定塊之接觸面的中心距，單位為 mm。而試片種類分為 $[0]_8$ 、 $[\pm 30]_4$ 與 $[\pm 60]_4$ 三種以 l 向為主軸方向之不同角度的 8 層斜交(angle-ply)疊層。

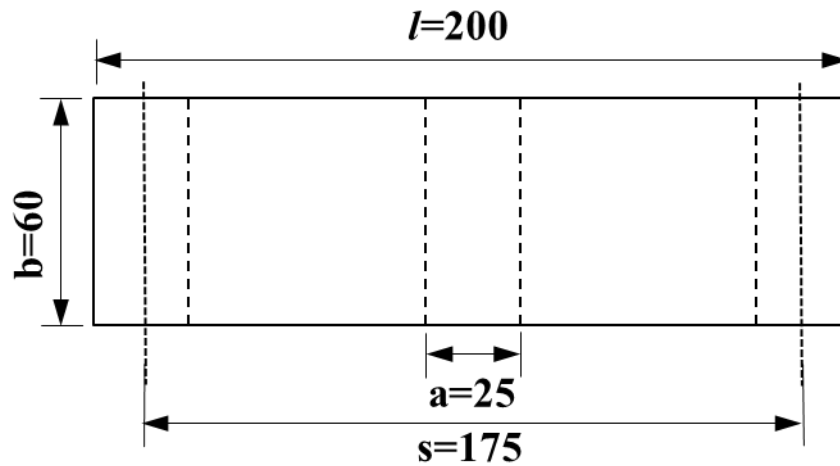


圖 4-7 積層板試片尺寸規格

本研究期望以實驗結果為參考基準，比較本研究所使用的方法——“以古典積層板理論先計算 A 、 B 與 D 矩陣，再帶入有限元素法軟體”與直接使用一般有限元素軟體常用的實體元素(solid)或 ABAQUS 軟體中內建的複合材料殼元素(composite shell)之差異。

而無論以上三種分析模型或實驗，皆是擷取中央施力塊之負載(load)對位移(displacement)的資訊，然後以負載-位移曲線比較在線性區段內，同樣負載下的位移量誤差。

本實驗試片使用台麗朗公司所提供之強化材為 TC35-12K 碳纖維、基材 $T_g=145^\circ\text{C}$ 高韌性環氧樹脂之單向碳纖維預浸布，固化條件為 1atm 在 150°C 的環境下加熱 40 分鐘。表 4.10 為廠商所提供之材料常數資訊：

表 4.10 TC35-12K 碳纖維高韌性環氧樹脂預浸布材料常數

| Lamina (TC35-12K) | |
|-------------------|---------------------|
| E_1 | 129.2GPa |
| E_2 | 8.13GPa |
| G_{12} | 6.9GPa |
| ν_{12} | 0.3 |
| t_{ply} | 0.15mm |
| FAW | 150g/m ² |

4.4.1.b 有限元素分析模型

依圖 4-7 之尺寸分別建立試片之實體與薄殼模型，其中實體模型由表 4.10 可知 8 層疊層積層板總厚度為 1.2mm。並根據 ASTM C 393 對試片的固定與加載方式設定邊界條件，如圖 4-18 以實體模型為例說明如下：

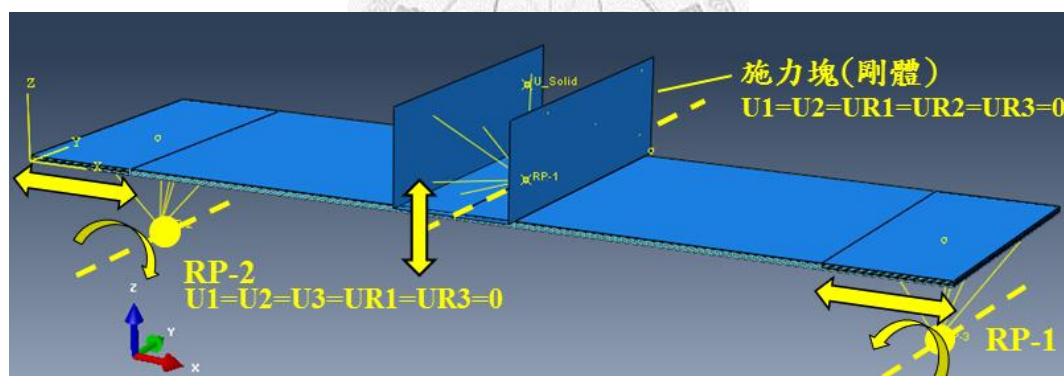


圖 4-8 積層板三點彎曲分析邊界條件示意圖

原三明治結構三點彎曲的試驗中，支撐塊與施力塊皆具有轉軸之設計(參考圖 4-6)，目的為讓接觸面可近似承受均佈壓力。雖然目前已知在替換成積層板之後，施力塊將難以避免地呈現線接觸的情況，但是位於兩端支撐塊仍盡可能的符合條件。因此於模型中建立參考點(reference point)以代表該轉軸，設定僅有繞 Y 軸的旋轉的自由度。並將積層板接觸面與轉軸自由度耦合，而僅放開 X 方向之自由度，模擬積層板在支撐塊上滑移的情況。然後依照尺寸建立視為剛體之施力塊，並設定其僅有 Z 方向之自由度，模擬實際加載的情形。此外，設定施力塊與積層板之

間為發生接觸(contact)，以表現圖 4-6 之情況。

4.4.1.c 實驗架構

本實驗機台使用國立台灣大學工學院固體力學聯合實驗室的 MTS810 萬用試驗機，如圖 4-9。搭配張智凱學長所製的三點彎曲試具來進行，如圖 4-10。實驗設定：5kN 荷重計 (load cell) (該機台最小單位之荷重計)、加載速率 1N/s、每 0.1 秒紀錄一筆。



圖 4-9 MTS 810 萬用試驗機

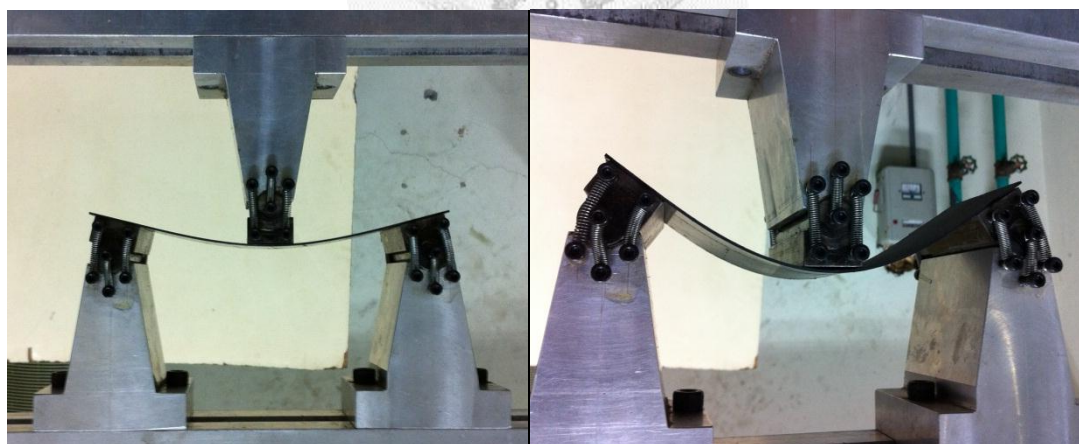


圖 4-10 積層板三點彎曲試驗過程

$[0]_8$ 、 $[\pm 30]_4$ 與 $[\pm 60]_4$ 三種疊層角度之試片各有 3 片，因此共有 9 組實驗數據結果。

4.4.1.d 比較結果與討論

因為僅探討負載-位移線性區段，且避免試驗時位移過大而導致試片彈出。各種類試片先分別於分析中嘗試幾種負載大小，使其位移盡量不超過 30mm 而又有足夠的比較數據。最後定出 $[0]_8$ 、 $[\pm 30]_4$ 與 $[\pm 60]_4$ 之負載條件分別為 0.25kN、0.15kN 與 0.15kN，並以達到此負載大小時之位移量作為進一步的比較依據。

三種試片之實體(Solid)模型、複合材料殼元素模型(Shell)及古典積層板理論殼元素模型(CLT)分析結果分別整理如下表 4.11：

表 4.11 積層板不同分析模型之結果比較

| Ply angle | Loading(kN) | Displacement(mm) | | |
|--------------|-------------|------------------|---------|---------|
| | | Solid | Shell | CLT |
| $[0]_8$ | 0.25 | 23.9888 | 23.5962 | 23.6565 |
| $[\pm 30]_4$ | 0.15 | 26.0378 | 25.6740 | 25.1029 |
| $[\pm 60]_4$ | 0.05 | 39.6046 | 39.4800 | 38.7165 |

並與實驗數據(Exp1-3)比對結果整理如下圖 4-11-圖 4-13：

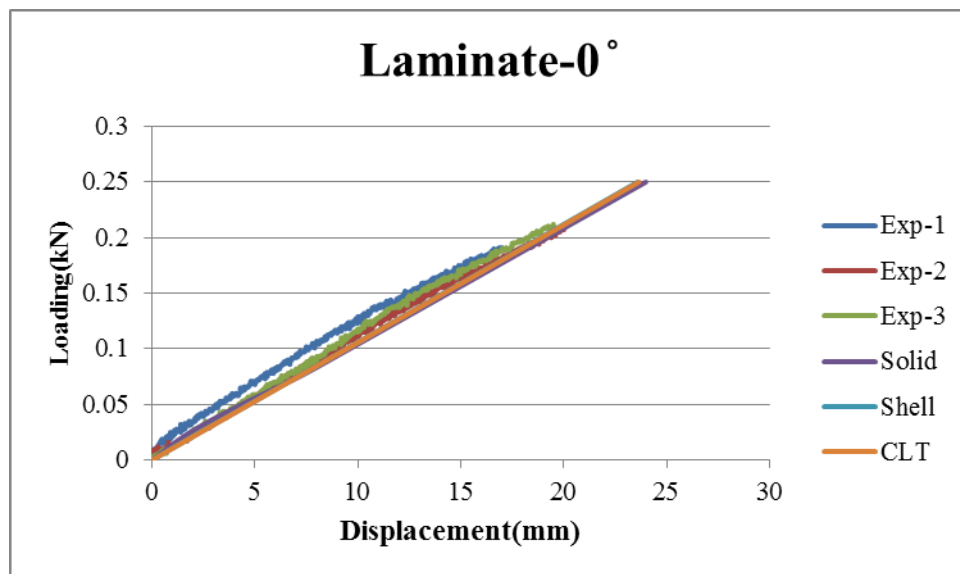


圖 4-11 $[0]_8$ 積層板分析與實驗結果比較

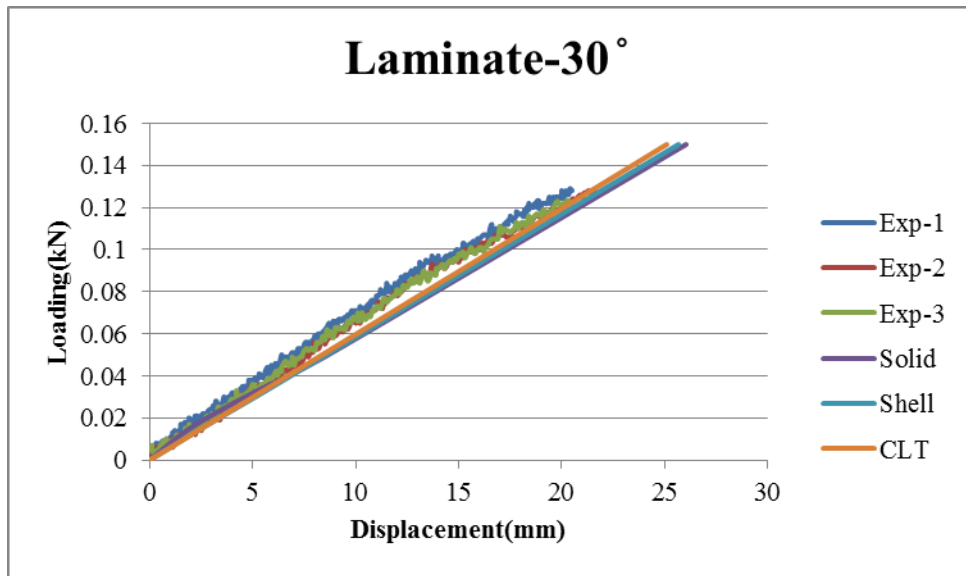


圖 4-12 $[\pm 30]_4$ 積層板分析與實驗結果比較

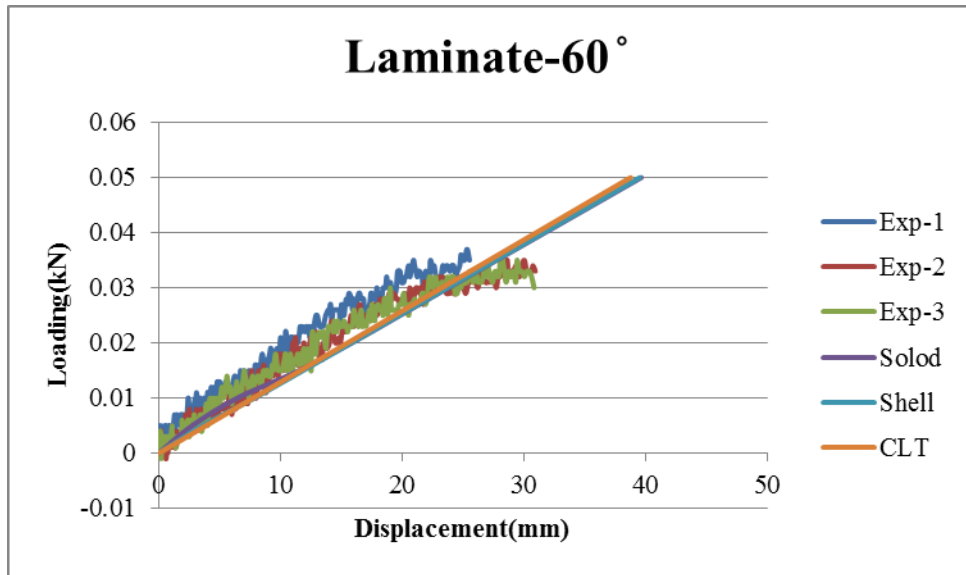


圖 4-13 $[\pm 60]_4$ 積層板分析與實驗結果比較

由表 4.11 可知，對於不同疊層角度之積層板，3 種分析模型皆表現出極為相近之結果，雖然古典積層板理論殼元素模型所得到的位移量普遍略小於前兩者，而筆者推測此乃因為古典積層板理論並未考慮垂直平面方向之剪切變形之結果，但是由於積層板一般而言厚度方向之尺寸皆遠小於另外兩個方向，因此應該不至於有太大的誤差。例如於此表當中，如以實體元素為基準，所出現的最大誤差也僅有 3.5%，仍屬於可接受範圍。

由圖 4-11 圖 4-13 則發現，實驗所求得之剛性普遍較明顯的大於分析結果，且差異又以 $[\pm 60]_4$ 最大， $[\pm 30]_4$ 次之， $[0]_8$ 時則最為接近。由此趨勢筆者推測原因為三點彎曲試具之支撐塊的轉軸設計是採用三個彈簧加以固定(如圖 4-14 所示)，這樣的設計使用於高比剛性的三明治結構試驗中所造成影響幾乎微乎其微，但是如果用在積層板的試驗上，將有較大比例的負載用於抵抗彈簧對支撐塊轉軸所產生的力矩，因此在剛性最低的 $[\pm 60]_4$ 積層板試驗中尤為明顯。此外， $[\pm 60]_4$ 積層板試驗中表現出較大的雜訊，應是由於該荷重計之解析度不足所致(該荷重計為 5kN，但本試驗之變化僅在 0.05kN 範圍內)。

然而整體而言，分析結果仍與實驗數據相近，且不同分析模型之間的誤差亦非常小，顯示以古典積層板理論結合有限元素之分析方法已具有足夠的準確性。



圖 4-14 支撐塊轉軸固定方式

4.4.2 最佳化方法準確性驗證

本節將以一個可解析之積層板最佳化問題，比較以本研究最佳化方法所求得之最佳解與解析解之差異，以驗證其準確性。

Avalle 與 Belingardi[90]提出如所示對於四個邊簡單支撐之矩形對稱疊層積層板，在同樣對稱於矩形對稱平面(XZ、YZ)的負載下，以最大化彎曲剛性(flexural stiffness)為目標之最佳斜交疊層(angle-ply laminates)角度解析解。

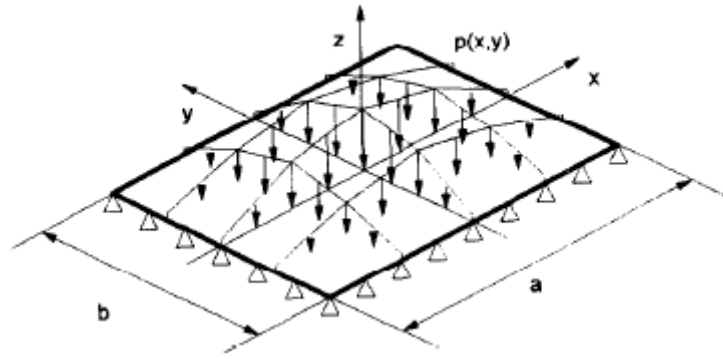


圖 4-15 積層板幾何[90]

該研究首先以 Ritz-Rayleigh method 得到平板剛性表達式：

$$K = \frac{\pi^4}{4} \frac{ab}{P_0^2 F^2} D, \quad D = \frac{D_{11}}{a^4} + \frac{2(D_{11} + 2D_{66})}{a^2 b^2} + \frac{D_{22}}{b^4} \quad (4.3)$$

其中 $F = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{p(x,y)}{P_0^2} dx dy$ 。此外，由於 D_{16} 、 D_{26} 並未列式中，表示不考慮彎曲與扭曲耦合情況，近似函數將對稱於積層板主軸方向。

然後參考圖 4-16 建立最佳化問題如下：

$$\begin{cases} \text{find} & \max(K(\theta_k, z_k)), \quad k = 1, \dots, N ; k'' = 0, \dots, N-1 \\ \text{subject to} & g(z_k) = z_0 - t = 0 \\ \text{and} & z_0 < z_1 < \dots < z_N \end{cases} \quad (4.4)$$

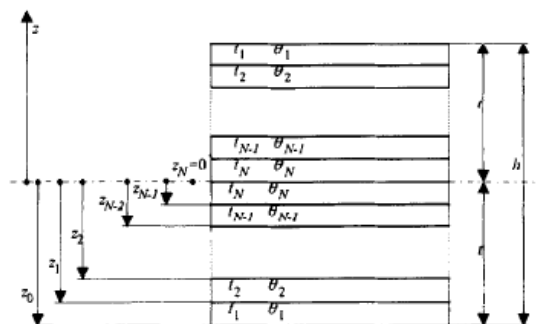


圖 4-16 定義積層板設計變數[90]

並進一步導入 lagrangian function $L: L=K+\lambda g(z_k)$ ，整理後可得到最佳化條件如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial K}{\partial \theta_k} = 0, & k = 1, \dots, N \\ \frac{\partial K}{\partial z_{k''}} + \lambda = 0, & k'' = 0, \dots, N-1 \\ \frac{\partial K}{\partial z_k} = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

由上式之計算結果並經過分別討論後，可得到最佳斜交疊層角度解析結果如下：

$$\theta_k = \pm \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{U_2}{4U_3} \frac{a^4 - b^4}{a^4 - 6a^2b^2 + b^4} \right) = (-\theta_{k+1}) \quad (4.6)$$

其中 U_2 與 U_3 即為 Tsai- Pagano 參數，如式(3.21)以材料常數計算而得。此外 $r = \frac{a}{b}$ 必須介於 0.55 到 1.75 之間，因為當 r 小於 0.55 時最佳解將趨近於 0° ，大於 1.75 時則趨近於 90° 。

本研究仿照該文獻內有限元素驗證模型之幾何尺寸與邊界條件： $a=1000\text{mm}$ 、 $b=800\text{mm}$ 、四個邊簡單支撐、中央 $200\text{mm} \times 200\text{mm}$ 之範圍施加 2500Pa 之壓力。而材料選用 AS/3501 碳纖環氧樹脂單向纖維預浸布，材料常數列於表 4.12。元素使用已於 4.4.1 驗證其準確性的二次薄殼減積分元素 S8R。以 ABAQUS 重建有限元素模型如圖 4-17 所示。

此外，如果是疊層參數作為設計變數，則並非直接給與 ABAQUS/CAE 材料常數，而是先以 OPTIMUS 計算出複材積層板勁度矩陣後，再輸出於 ABAQUS/CAE 之 General Shell Stiffness 中。

表 4.12 積層板薄層材料常數

| Lamina (AS/3501) | |
|------------------|-----------------------|
| E_1 | 138GPa |
| E_2 | 9GPa |
| G_{12} | 6.9GPa |
| ν_{12} | 0.3 |
| t_{ply} | 0.125mm |
| ρ_f | 1500kg/m ³ |

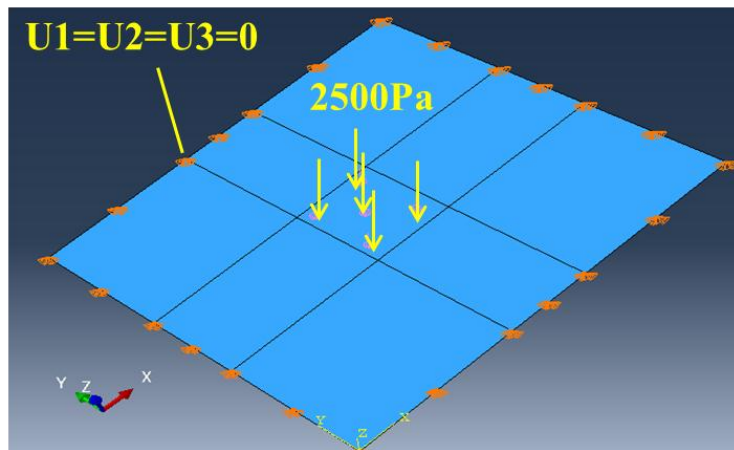


圖 4-17 最佳化準確性驗證之有限元素模型

固定積層板厚度，以 16 層斜交對稱疊層 $[(\theta, -\theta)_4]_s$ 中的 θ 為設計變數，最小化模型之最大位移為目標函數，以近似求取最大化平板剛性之結果。其解析解與本研究求得之最佳解比較如下：

表 4.13 解析解與本研究最佳解比較

| | Analytical solution | Present |
|--|---------------------|---------|
| Optimum(θ) | 52.03° | 55° |
| Objective function($\times 10^{-2}mm$) | 59.42 | 58.62 |

由表 4.13 可以發現，本研究之最佳解與解析解的誤差小於 3°，筆者認為仍在合理的誤差範圍內，因為兩者對於“剛性”之定義本來就不盡相同。但是對於此最佳化問題而言，本研究之目標函數值反而優於解析解，顯示此最佳化方法對於可

解析的問題，具有求得全域最佳解之能力。

4.4.3 效率與通用性驗證—平板剛性最佳化

本節將以複材積層之平板在不同尺寸規格下的剛性最佳化問題，比較傳統方法，即直接以梯度演算法(採用序列二次規劃)或演化式演算法(採用自適應性遺傳演算法)求取最佳疊層角度；以及本研究所提出之複材積層板複合式最佳化方法(最佳化程序以 OPTIMUS 軟體建立)於效率上的差異，並希望藉此了解本研究所提出的方法在不同的規格尺寸下是否皆能有良好的表現，即驗證其「通用性」。以下分別對分析項目、設計變數、設計限制與目標函數作描述，並說明分析模型之設定，最後整理比較三種最佳化方法之演算結果。

4.4.3.a 最佳化問題描述

參考圖 4-18，本研究將固定平板末端之負載為力矩 0.05N-m 與合力 2000N，而以不同的平板規格尺寸，分別進行剛性最佳化。平板規格尺寸共有三種，如以單位長寬尺寸 $L=150\text{mm}$ 、 $W=150\text{mm}$ 之倍數表示，可整理如下表：

表 4.14 複材積層平板尺寸規格列表

| | Case 1(k=2, n=1) | Case 2(k=1, n=1) | Case 3(k=1, n=2) |
|---------------|------------------|------------------|------------------|
| Length | 300mm | 150mm | 150mm |
| Width | 150mm | 150mm | 300mm |

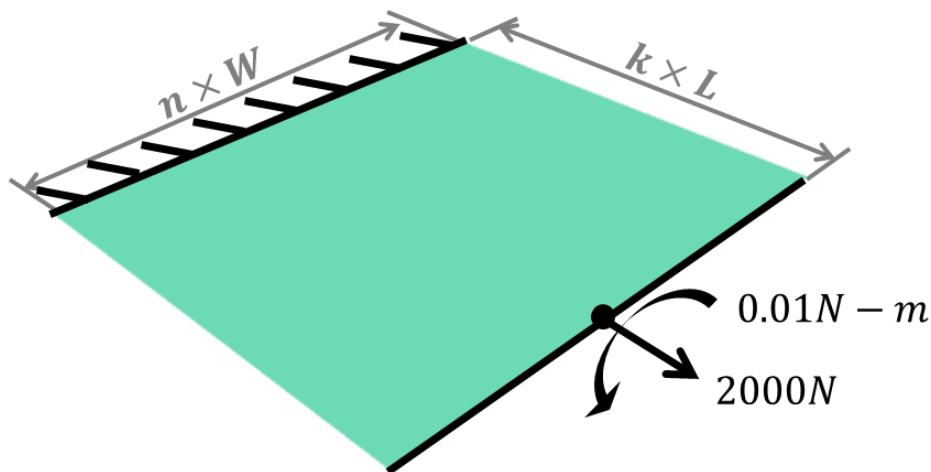


圖 4-18 複材積層平板規格尺寸示意圖

參考 4.2，此最佳化問題之設計變數為 16 層對稱疊層之疊層角度 θ_i ，共 8 個設計變數，可表示如下：

$$-90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ ; \{ \theta_i, i = 1, \dots, 8 | p \times 5^\circ, p \in Z \} \quad (4.7)$$

但是如果以本研究所提之複合式最佳化方法求解，於 Step1 則將先以疊層參數為設計變數，並使用梯度演算法，因此必須給定設計變數的起始值。而本研究將八個疊層參數的起始值皆設定為 0，因為由表 4.3-表 4.6 可知，以此點作為起始點可避免最佳化過程一開始，即馬上接觸到可行區域邊界的情況，以減少不必要的演算次數。

並以最小化平板自由端之最大位移量為目標函數，記為：

$$\min U_{max}(\theta_i), i \in \{1, \dots, n\} \quad (4.8)$$

4.4.3.b 有限元素分析模型

以 ABAQUS/CAE 建立上述不同規格尺寸之複材積層平板有限元素模型如表 4.15 所示。邊界條件分為固定端與自由端，其中固定端設定 X、Y 與 Z 三個軸向及繞三個軸的旋轉方向位移量皆為零；並於自由端中心建立一個參考點(reference point)，與自由端的端線六個自由度作聯結(couple)。然後將 X 軸向之力矩 0.05N-m

與合力 2000N 施於參考點上。元素使用已於 4.4.1 驗證其準確性的二次薄殼減積分元素 S8R。複材積層板選用 AS/3501 碳纖環氧樹脂單向纖維預浸布為薄層，其材料常數如下表所示：

表 4.15 不同規格尺寸之複材積層板有限元素分析模型

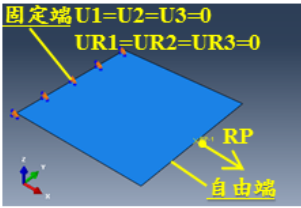
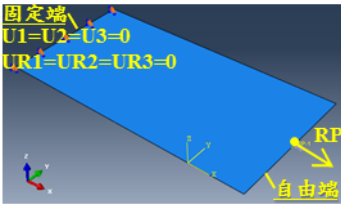
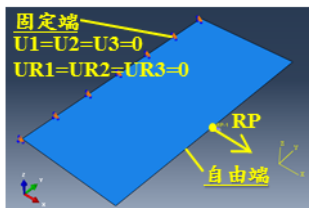
| Case1(k=1, n=1) | Case2(k=2, n=1) | Case3(k=1, n=2) |
|---|---|---|
|  |  |  |

表 4.16 積層板薄層材料常數

| Lamina (AS/3501) | |
|------------------|-----------------------|
| E_1 | 138GPa |
| E_2 | 9GPa |
| G_{12} | 6.9GPa |
| ν_{12} | 0.3 |
| t_{ply} | 0.125mm |
| ρ_f | 1500kg/m ³ |

4.4.3.c 疊層角度擬合準確性與疊層數目之關係驗證

藉由於 3.2.3 對於疊層參數物理意義的探討可知，對於任何一組位於可行區域內的疊層參數，必然可求得至少一組相符的疊層角度組合。但是顯然的，這基於假設該積層板以無限多層的薄層組成的結果，也就是說疊層角度於厚度方向可以是連續的變化。然而，於實務應用上這卻是難以達成的，因此對於多維度之疊層參數域內的一組疊層參數組合而言，往往無法求得一組精確相符的疊層角度。不過，仍可以獲得以下的推論：當疊層數目越多，可以求得越符合疊層參數組合之疊層角度。

因此，本研究於進行平板剛性最佳化前，將先驗證此一推論，並做收斂性分析，藉以了解疊層角度擬合準確性與疊層數目之關係。

本研究以 Case1 為例，先經由積層板複合式最佳化方法之 Step1 求取最佳疊層參數組合，再於 Step2 分別以相等積層板厚度之 8 層、16 層與 24 層之對稱疊層各進行 5 次疊層角度之擬合，並計算擬合結果與精確值之距離，其中距離之計算方式為：

$$Distance = \sqrt{\sum_{k=1}^4 (V_{kA} - V_{kA-OP})^2 + \sum_{k=1}^4 (V_{kA} - V_{kA-OP})^2} \quad (4.9)$$

而結果整理如下表所示：

表 4.17 不同疊層數目之對稱疊層的疊層角度擬合結果

| | | Test 1 | Test 2 | Test 3 | Test 4 | Test 5 | Average |
|--------------|-----------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|------------------|
| Step1 | Optimum ($\times 10^{-2}mm$) | — | — | — | — | — | 2.92 |
| | Distance | 0.4332 | 0.4332 | 0.4332 | 0.4356 | 0.3626 | 0.4196 |
| 8-ply | Optimum ($\times 10^{-2}mm$) | 3.31 | 3.31 | 3.31 | 4.03 | 3.57 | 3.50 (+19.8%) |
| | Distance | 0.1344 | 0.1227 | 0.1566 | 0.0944 | 0.0976 | 0.1212 |
| Step2 16-ply | Optimum ($\times 10^{-2}mm$) | 3.05 | 3.01 | 3.15 | 2.93 | 3.01 | 3.03 (+3.77%) |
| | Distance | 0.0589 | 0.0664 | 0.0774 | 0.0441 | 0.0441 | 0.0582 |
| 24-ply | Optimum ($\times 10^{-2}mm$) | 2.98 | 3.00 | 2.98 | 2.96 | 2.97 | 2.98 (+2.05%) |

並由表 4.17 可進一步分別將距離與目標函數差值之平均值對疊層數目做收斂性分析，其中目標函數差值即為 Step2 的目標函數平均值減去 Step1 之精確值。分析結果分別整理如下圖：

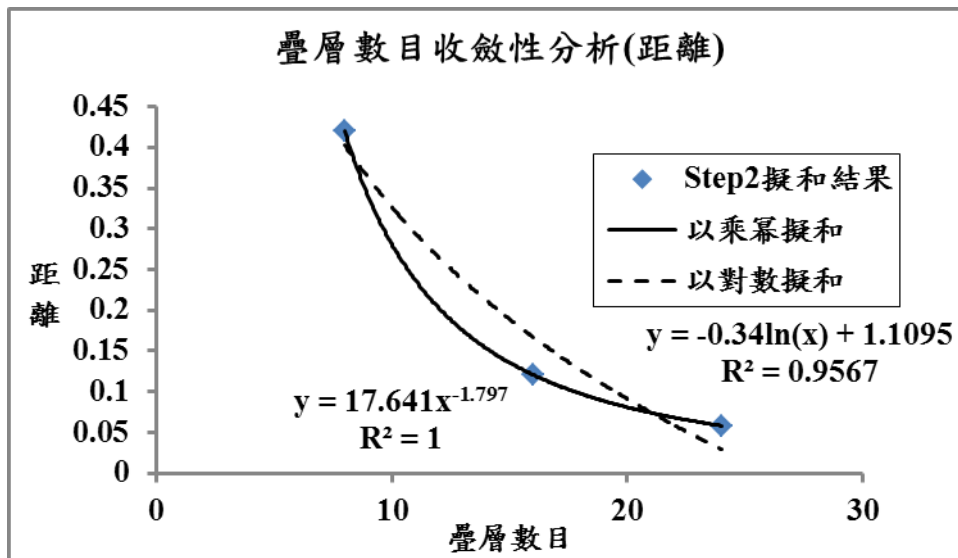


圖 4-19 疊層數目以距離做收斂性分析

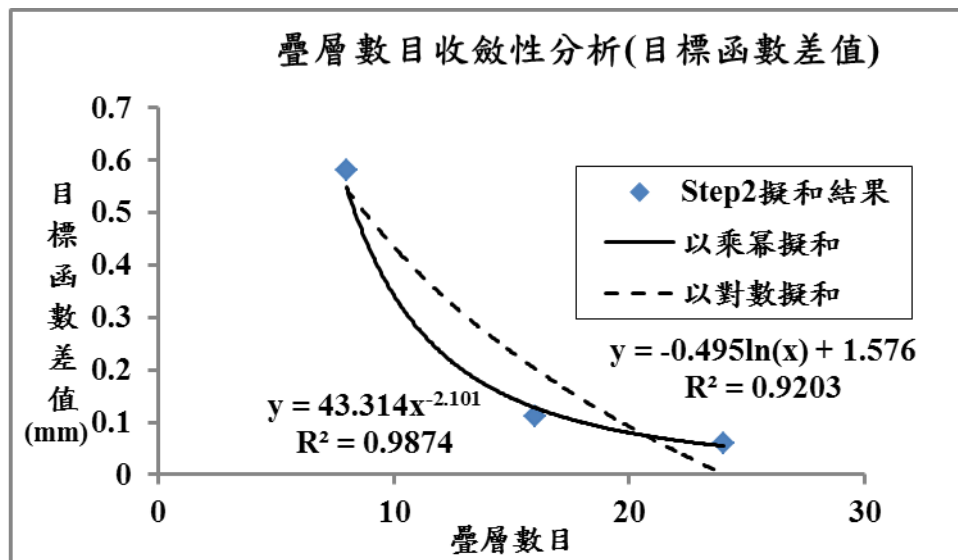


圖 4-20 疊層數目以目標函數差值做收斂性分析

圖 4-19 與圖 4-20 顯示，無論距離或者目標函數差值，皆會隨著疊層數目的增加而遞減。如果以乘幂函數擬合資料點，則皆可獲得極佳的效果，但是如此一來便無法取得有效的收斂性分析的結果，因為 Y 值將不可能為零。上述現象即印證了一開始的推論——當疊層數目越多，可以求得越符合疊層參數組合之疊層角度，然而精確值卻可能並不實際存在。於此如果換個方式思考，可以說即使在 Step1 輸出之疊層參數最佳解並不在現實的可行區域內，只要與可行區域之邊界相差不遠，仍有機會可於邊界上最靠近該點的位置求得最佳解。此亦是本研究的一個重要推論，將作為本研究所提出之複合材料複合式最佳化中的基本假設。

而本研究為了求得有效的收斂性分析的結果，因此以效果第二佳的對數函數進行擬合，如圖 4-19 與圖 4-20 所示。得到疊層數目以距離及目標函數差值做收斂性分析的結果分別為 26.13 層與 24.14 層。因此，基本上當疊層數目超過 27 層時，則幾乎可以不用考慮無法準確擬合真實存在的疊層參數組合之問題。

此外，比較圖 4-19 圖 4-20 亦可發現，距離與目標函數差值兩者隨著疊層數目增加的變化趨勢相當接近，而且表 4.17 中的各個解，亦顯示當擬合結果越靠近精確值的時候，則有越低的目標函數。進一步印證了於 3.2.1 所提：疊層參數對於目標函數值通常具有平滑而連續梯度關係。

4.4.3.d 結果與討論

上一小節先初步以 Case1 驗證了 Step2 的擬合結果之目標函數值將隨著疊層數目增加而逼近精確解之推論。換言之，最佳化過程中將可能由於疊層數目的不足，而出現擬合結果與 Step1 的精確值之落差。因此，由圖 4-20 進行擬合線的趨勢預測後得到圖 4-21，而本研究設定只要最佳解所計算的距離比對此圖，誤差未高於對應疊層數目之距離的 5%，則仍判定該擬合結果為合理值。

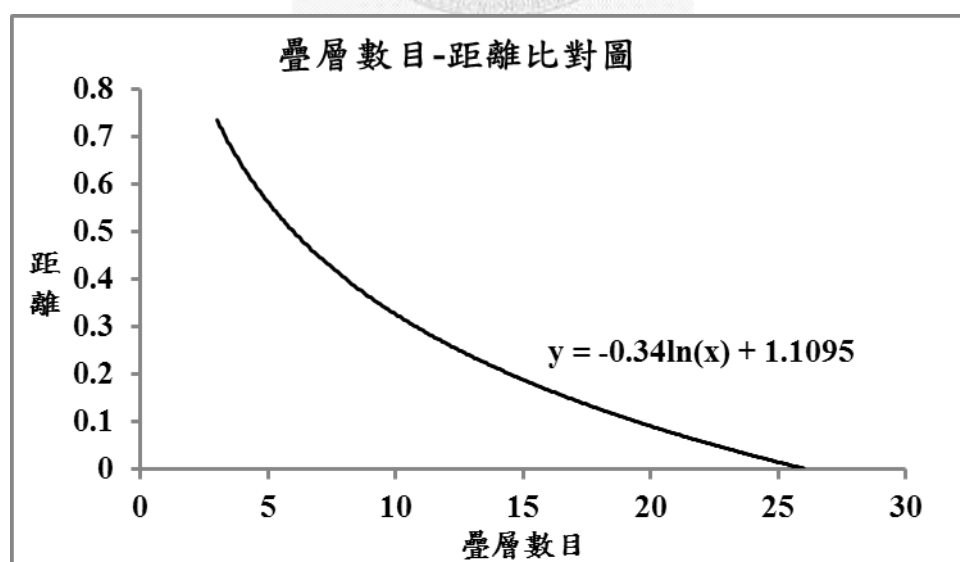


圖 4-21 疊層數目-距離比對圖

本節將接著以上述三種不同尺寸規格之複材積層平板剛性最佳化問題，分別

以梯度演算法、演化式演算法與本研究所提出之三明治結構複合式最佳化方法 (Present) 求解。其中如果是使用演化式演算法，則因為考量到每次的最佳解皆不盡相同，皆進行 5 次試驗而求取其各項平均值。而依據不同規格尺寸，分別將結果整理如下：

Case1 分別以梯度演算法、演化式演算法與本研究提出之複材積層板複合式最佳化方法(包含 Step1 與 Step2 結果)求解，結果分別列於下表 4.18-表 4.20：

表 4.18 積層平板之 Case1 於梯度演算法的最佳化結果

| Gradient Algorithms | |
|---|--|
| Starting point(θ_i) | [45,-45,-90,0,45,-45,-90,0] _s |
| Optimum(θ_i) | [46.5,-28.9,-88.6,-0.13,42.8,-39.1,-89.8,0] _s |
| Objective function ($\times 10^{-2}mm$) | 3.68 |
| Iterations | 91 |
| CPU time(s) | 331 |

表 4.19 積層平板之 Case1 於演化式演算法的最佳化結果

| EAs | Test 1 | Test 2 | Test 3 | Test 4 | Test 5 | Average |
|---|--|--|---|--|---|---------|
| Optimum(θ_i) | [-35,35,30,-15,-10,15,5,-5] _s | [35,-35,-5,-35,20,5,15,-15] _s | [35,-30,-35,15,10,-15,5,0] _s | [35,-35,-30,30,0,-10,0,5] _s | [-35,30,-10,35,25,-10,-5,-5] _s | — |
| Objective function ($\times 10^{-2}mm$) | 2.90 | 2.94 | 2.89 | 2.88 | 2.92 | 2.91 |
| Iterations | 1200 | 1200 | 1840 | 2240 | 1440 | 1584 |
| CPU time(s) | 4574 | 4349 | 5827 | 7783 | 5280 | 5563 |

*Range= $12.8 \times 10^{-2}mm$

表 4.20 積層平板之 Case1 於本研究的最佳化結果

| | | | | | | |
|---|---|--|--|---|---|---------|
| Present(Step1) | | | | | | |
| Optimum($V_{iA}, V_{iD}, i = 1, \dots, 4$) | (0.3619,0,0.1351,0,0.5397,0,-0.4172,0) | | | | | |
| Objective function ($\times 10^{-2}mm$) | 2.92 | | | | | |
| Iterations | 253 | | | | | |
| CPU time(s) | 859 | | | | | |
| Present(Step2) | Test 1 | Test 2 | Test 3 | Test 4 | Test 5 | Average |
| Distance | 0.1344 | 0.1228 | 0.1055 | 0.0944 | 0.0976 | 0.1110 |
| Optimum(θ_i) | [-35,40,15,20,-2 0,-25,-90,5] _s | [-40,35,-5,40,5 -25,0,-85] _s | [35,-35,-30,15,- 10,25,-5,-90] _s | [30,-30,-35,40,- 5,5,0,-85] _s | [-35,30,40,-5,0, -35,5,-90] _s | — |
| Objective function ($\times 10^{-2}mm$) | 3.05 | 3.01 | 3.15 | 2.93 | 3.01 | 3.03 |
| Iterations | 1320 | 2960 | 2320 | 3680 | 4000 | 2856 |
| CPU time(s) | 32 | 60 | 44 | 85 | 93 | 63 |
| Total(Step1+2) | 891 | 919 | 903 | 944 | 952 | 922 |

其中，藉由觀察表 4.18 之結果可以發現，雖然梯度演算法使用最少的演算次數即達到收斂，但其所求得之最佳解卻幾乎與起始點無太大差異，且目標函數值亦遠大於其他演算法之結果。說明對於這個最佳化問題而言，使用此方法將輕易落入局部最佳解。

然後，進一步整理上表之梯度演算法、演化式演算法與本研究所提出之複合材料複合式最佳化方法的目標函數值與有限元素求解器計算次數之比較圖表，分別如圖 4-22 與圖 4-23 所示。圖 4-22 額外加入最差解以及擬等向對稱疊層之結果，以了解使用最佳化方法後所帶來的效益。其中最差解為最佳解加上全距(range)的計算結果。

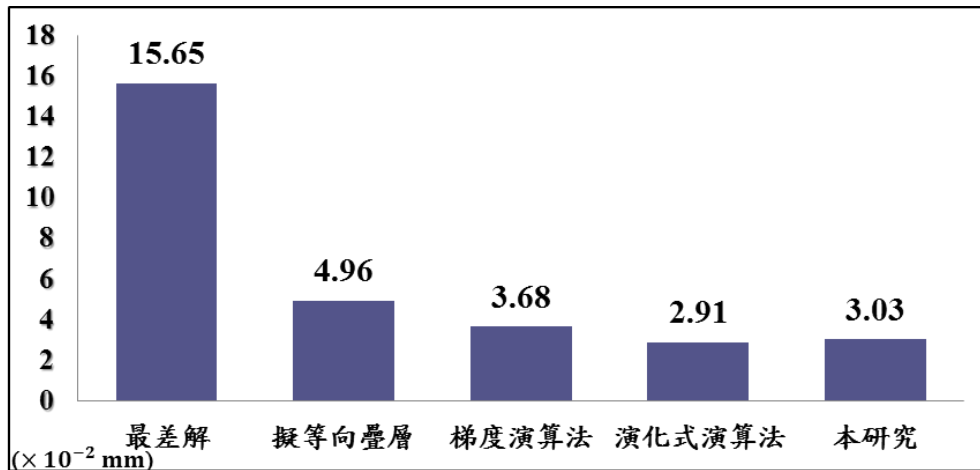


圖 4-22 積層平板之 Case1 於不同最佳化方法的目標函數值比較

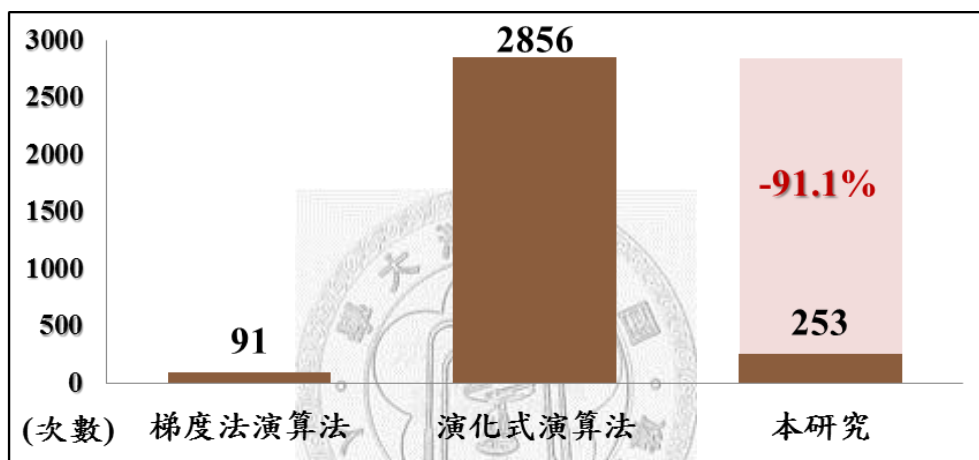


圖 4-23 積層平板之 Case1 以不同最佳化方法所需的有限元素求解器計算次數比較

由圖 4-22 可以明顯體會對於複合材料積層板而言，對疊層角度進行設計的重要性，因為最差解的目標函數值將高達最佳解的 5 倍有餘，且即使於此使用擬等向疊層，也仍有很大的進步空間。而梯度演算法雖然可稍微降低目標函數值，但效果同樣有限。只有演化式演算法與本研究可以有效的求得合理誤差範圍內的最佳解。而關於本研究的目標函數值仍略微大於演化式演算法之問題，可分為兩個部分討論：其一為 Step1 的最佳解與演化式演算法之差異；其二為 Step2 擬合結果與 Step1 之差異。第二個部分造成的原因已於前面說明，而第一個部分之因素將於後方綜合 Case2 與 Case3 一併討論。

然而，於圖 4-23 卻可以明顯的發現，除了梯度演算法以最少的計算次數快速收斂至局部最佳解外，本研究所需的計算次數僅需演化式演算法的十分之一不

到。顯示相較於演化式演算法，對於此最佳化問題，本研究擁有極高的求解效率。

此外，由於在 Case1 中已經幾乎可以推斷梯度演算法無法有效求解積層平板剛性最佳化問題，因此於後續的 Case1 與 Case2 將不再將其列入考慮，而僅對演化式演算法與本研究做比較。

Case2 與 Case3 分別以演化式演算法與本研究提出之複材積層板複合式最佳化方法(包含 Step1 與 Step2 結果)求解之結果依序列於下表 4.21-表 4.24：

表 4.21 積層平板之 Case2 於演化式演算法的最佳化結果

| EAs | Test 1 | Test 2 | Test 3 | Test 4 | Test 5 | Average |
|---|---|--|---|---|---|---------|
| Optimum(θ_i) | [40,-40,-45,40,-30,10,-5,10] _s | [40,-45,-40,45,40,15,0,5] _s | [40,-40,-40,30,-25,5,20,-15] _s | [-40,40,40,-40,40,-20,0,0] _s | [40,-40,45,-30,-25,20,10,20] _s | — |
| Objective function ($\times 10^{-2}mm$) | 7.42 | 7.54 | 7.54 | 7.39 | 7.70 | 7.52 |
| Iterations | 4000 | 2200 | 1520 | 2240 | 1840 | 2360 |
| CPU time(s) | 14912 | 7783 | 4236 | 7229 | 7804 | 8393 |
| *Range=64.0 $\times 10^{-2}mm$ | | | | | | |

表 4.22 積層平板之 Case2 於本研究的最佳化結果

| | | | | | | |
|--|---|--------|--------|--------|--------|---------|
| Present(Step1) | | | | | | |
| Optimum($V_{iA}, V_{iD}, i = 1, \dots, 4$) | (0.2159,0,0.06,0,0.2844,0.0792,-0.6992,-0.0621) | | | | | |
| Objective function ($\times 10^{-2}mm$) | 7.78 | | | | | |
| Iterations | 232 | | | | | |
| CPU time(s) | 748 | | | | | |
| Present(Step2) | Test 1 | Test 2 | Test 3 | Test 4 | Test 5 | Average |
| Distance | 0.1348 | 0.1984 | 0.1439 | 0.1882 | 0.1695 | 0.1669 |

| | | | | | | |
|---|--|---|---|--|--|------|
| Optimum(θ_i) | [45,-40,-40,20, 5,70,-5,-80] _s | [40,-35,-40,50, 10,-85,0,0] _s | [40,-35,-40,50, 10,-85,0,0] _s | [-40,40,50,-25, 20,-80,0,-5] _s | [45,-45,-10,40, -45,0,5,-90] _s | — |
| Objective function ($\times 10^{-2}mm$) | 8.26 | 8.42 | 8.23 | 8.42 | 8.14 | 8.29 |
| Iterations | 1360 | 1480 | 1200 | 1160 | 1600 | 1360 |
| CPU time(s) | 31 | 35 | 28 | 27 | 37 | 32 |
| Total(Step1+2) | 779 | 783 | 776 | 775 | 785 | 780 |

表 4.23 積層平板之 Case3 於演化式演算法的最佳化結果

| EAs | Test 1 | Test 2 | Test 3 | Test 4 | Test 5 | Average |
|---|------------------------------------|--|---------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|----------------|
| Optimum(θ_i) | [0,0,0,0, 0,0,0,0] _s | [0,5,0,-5, -5,-5,-10,20] _s | [0,0,0,-5, 5,5,5,-10] _s | [-0,0,0,0, 0,0,0,0] _s | [0,0,0,0, 0,0,10,-10] _s | — |
| Objective function ($\times 10^{-2}mm$) | 1.02 | 1.03 | 1.03 | 1.02 | 1.03 | 1.03 |
| Iterations | 1520 | 2040 | 1520 | 2080 | 1240 | 1680 |
| CPU time(s) | 6424 | 5037 | 6792 | 10096 | 6188 | 6907 |
| *Range=4.89$\times 10^{-2}mm$ | | | | | | |

表 4.24 積層平板之 Case3 於本研究的最佳化結果

| | | | | | | |
|---|---|--------|--------|--------|--------|---------|
| Present(Step1) | | | | | | |
| Optimum($V_{iA}, V_{iD}, i = 1, \dots 4$) | (0.2789,0,0.08868,0,0.6906,0,-0.0459,0) | | | | | |
| Objective function ($\times 10^{-2}mm$) | 1.28 | | | | | |
| Iterations | 331 | | | | | |
| CPU time(s) | 1245 | | | | | |
| Present(Step2) | Test 1 | Test 2 | Test 3 | Test 4 | Test 5 | Average |

| | | | | | | |
|---|--|--|--|--|---|--------|
| Distance | 0.1017 | 0.1096 | 0.12263 | 0.0911 | 0.0869 | 0.1024 |
| Optimum(θ_i) | [20,-30,-15,20,60,-40,10,-85] _s | [30,-10,-25,-30,20,-70,15,70] _s | [5,-30,30,-30,30,70,-75,-5] _s | [25,-25,10,-35,-15,65,25,-80] _s | [-25,25,0,25,-45,60,-10,-80] _s | — |
| Objective function ($\times 10^{-2}mm$) | 1.32 | 1.31 | 1.33 | 1.31 | 1.31 | 1.32 |
| Iterations | 3920 | 3840 | 3280 | 4160 | 2800 | 3600 |
| CPU time(s) | 89 | 87 | 76 | 95 | 64 | 82 |
| Total(Step1+2) | 1334 | 1332 | 1321 | 1340 | 1309 | 1327 |

然後，同樣整理上表之演化式演算法與本研究所提出之複合材料複合式最佳化方法的目標函數值與有限元素求解器計算次數之比較圖表如下：

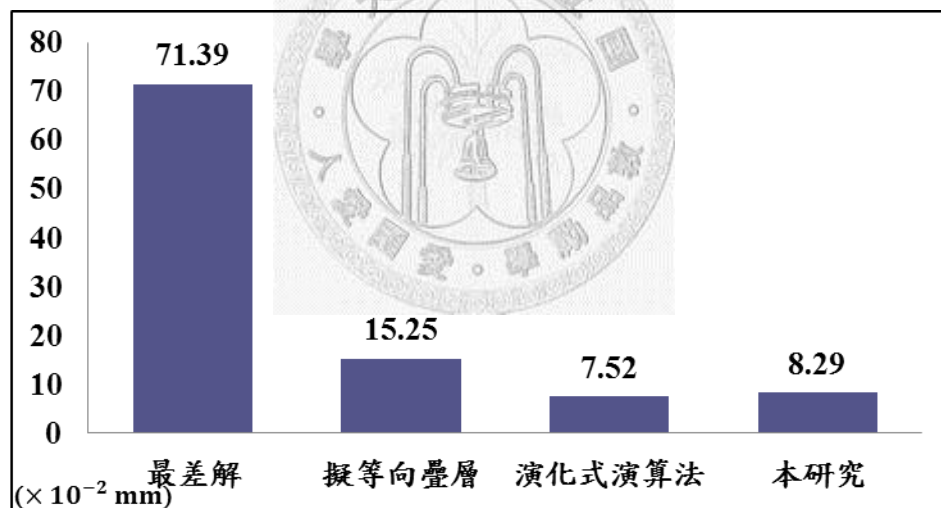


圖 4-24 積層平板之 Case2 於不同最佳化方法的目標函數值比較

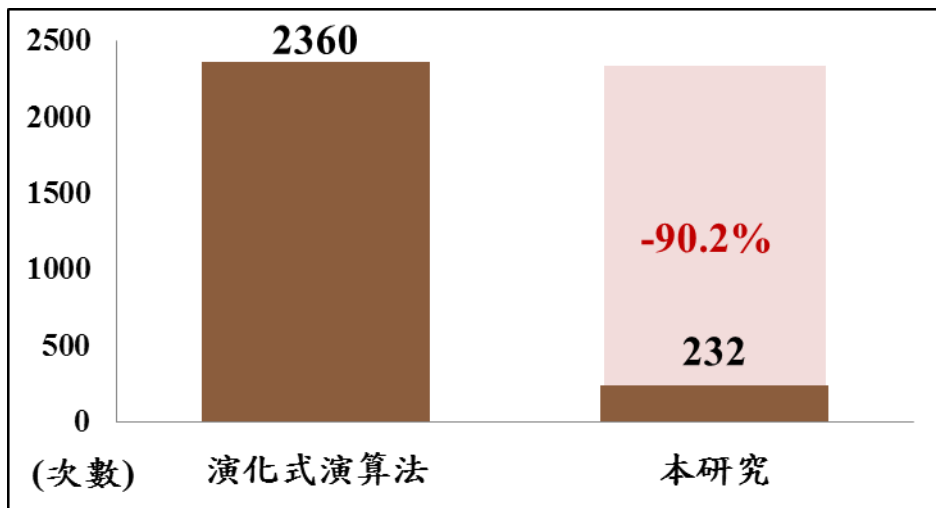


圖 4-25 積層平板之 Case2 以不同最佳化方法所需的有限元素求解器計算次數比較

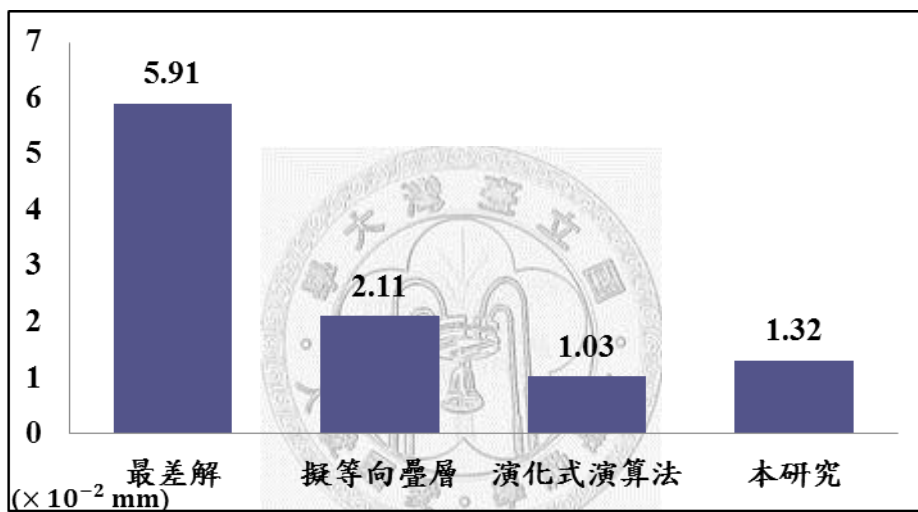


圖 4-26 積層平板之 Case3 於不同最佳化方法的目標函數值比較

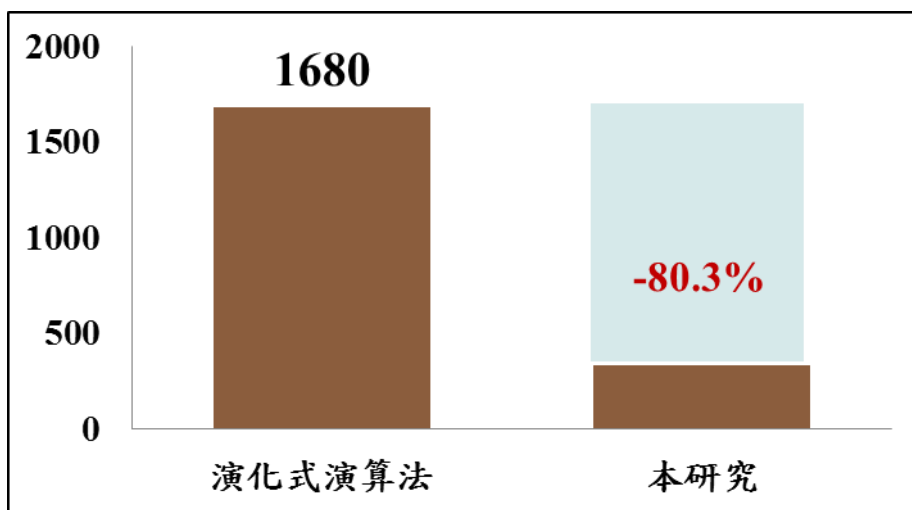


圖 4-27 積層平板之 Case3 以不同最佳化方法所需的有限元素求解器計算次數比較

藉由綜合比較圖 4-22、圖 4-23 與圖 4-24 圖 4-27 可做以下結論：對於不同

規格尺寸的積層平板剛性最佳化問題，演化式演算法與本研究皆可有效的降低目標函數值。而本研究相較於演化式演算法而言，卻僅需要極少量的有限元素求解器計算次數，成功地大幅提高求解效率。

但仍有一個問題須待釐清，也就是為何以本研究 Step1 求得之最佳解的目標函數值與演化式演算法之值有所差異。於此筆者認為，兩者所求的皆可稱為全域最佳解，而造成其差異的原因在於：演化式演算法是以離散而包含些許隨機成份的方式產生設計變數；而本研究之最佳化過程則是連續的調整積層板各個勁度矩陣元素之間的分配比例，如果以一種材料來代表這組勁度矩陣的話，則可進一步想像成是在合理的範圍內有物理意義的設計此材料的材料常數。所以，由於兩者的搜尋最佳解的方式有所出入，所求得之最佳解的積層板整體變形方式也將不同。但於此最佳化問題中，目標函數的設定卻僅是針對最大位移點之值，而無法變形的情況列入考慮。因此，雖然演化式演算法求得較低之目標函數值，但筆者認為本研究所求之最佳解應更符合實務應用上所欲之結果。

以對於兩種方法而言，最佳解之目標函數值差異較大的 Case3 為例。圖 4-28 顯示兩種方法之最佳解的積層板位移。其中位移量放大倍率皆為 10000 倍，且調整兩圖相同顏色之色塊所表示的位移值相同，因此可直接經由此圖比較兩者變形方式的差異。

由圖 4-28 可以發現，演化式演算法之最佳解，其積層板靠近扭轉中心附近幾乎未有太大的位移量，而是在自由端的兩側產生局部變形；而本研究之最佳解，則使積層板呈現整體均勻變形的情況，自然會因為疊加的關係於自由端的兩側有較大的位移量。但是，對於一般結構設計而言，我們往往會希望其變形方式如後者而非前者的局部變形，因為局部變形往往伴隨著應力集中的現象。

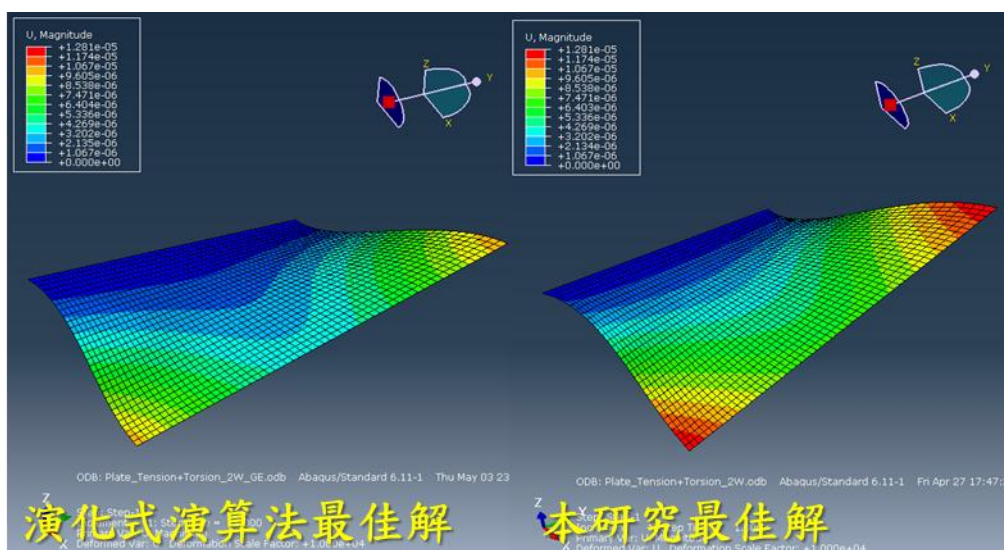


圖 4-28 演化式演算法與本研究之最佳解的積層板位移圖

4.4.4 效率與通用性驗證—圓管剛性最佳化

本節將以複材積層之圓管在不同負載條件下的剛性最佳化問題，比較傳統方法，即直接以梯度演算法(採用序列二次規劃)或演化式演算法(採用自適應性遺傳演算法)求取最佳疊層角度；以及本研究所提出之複材積層板複合式最佳化方法(最佳化程序以 OPTIMUS 軟體建立)於效率上的差異，並希望藉此了解本研究所提出的方法在不同的負載條件下是否皆能有良好的表現，即驗證其「通用性」。以下分別對分析項目、設計變數、設計限制與目標函數作描述，並說明分析模型之設定，最後整理比較這三種最佳化方法之演算結果。

4.4.4.a 最佳化問題建立

參考圖 4-29，本研究以將一長度 50mm、直徑 20mm 之圓管，施以不同型式之負載條件，分別進行剛性最佳化設計。負載條件共有三種型式，即分別改變圓管末端之力矩與合力之負載大小。如以單位負載 $M=20\text{N}\cdot\text{m}$ 、 $F=2000\text{N}$ 之倍數表示，可整理如下表：

表 4.25 複材積層圓管負載條件列表

| | Case 1(k=1, n=1) | Case 2(k=2, n=1) | Case 3(k=1, n=2) |
|---------------|------------------|------------------|------------------|
| Moment | 20N-m | 40N-m | 20N-m |
| Force | 2000N | 2000N | 4000N |

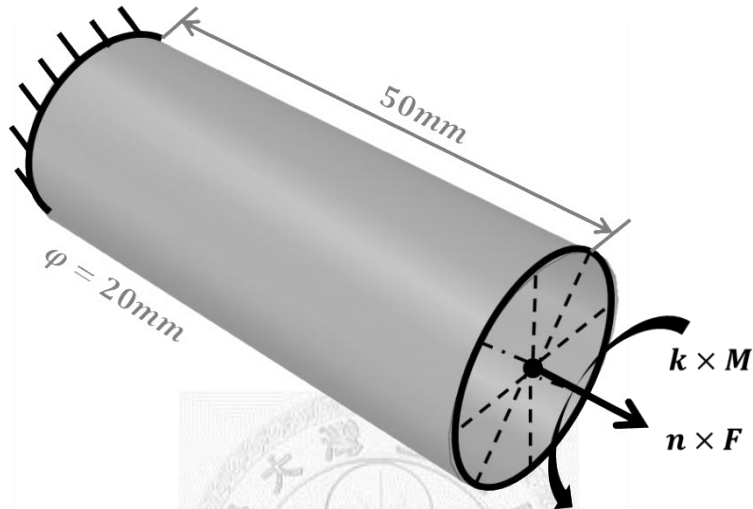


圖 4-29 複材積層圓管負載條件示意圖

參考圖 4-29，此最佳化問題之設計變數為 16 層對稱疊層之疊層角度 θ_i ，共 8 個設計變數，可表示如下：

$$-90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ, \{\theta_i, i = 1, \dots, 8 | p \times 5^\circ, p \in Z\} \quad (4.10)$$

並以最小化平板自由端之最大位移量為目標函數，記為：

$$\min U_{max}(\theta_i), i \in \{1, \dots, n\} \quad (4.11)$$

4.4.4.b 有限元素分析模型

以 ABAQUS/CAE 建立上述複材積層圓管之有限元素模型如圖 4-30。邊界條件分為固定端與自由端，其中固定端設定 X、Y 與 Z 三個軸向及繞三個軸的旋轉方向位移量皆為零；並於自由端中心建立一個參考點(reference point)，與自由端上圓周的六個自由度作聯結(couple)。然後將負載設定於該參考點上，分別為 X 軸向

的力矩($k \times M$)與力($n \times F$)。元素同樣使用已於 4.4.1 驗證其準確性的二次薄殼減積分元素 S8R。複材積層板同樣選用 AS/3501 碳纖環氧樹脂單向纖維預浸布為薄層，其材料常數見 4.4.3.b 之表 4.16。

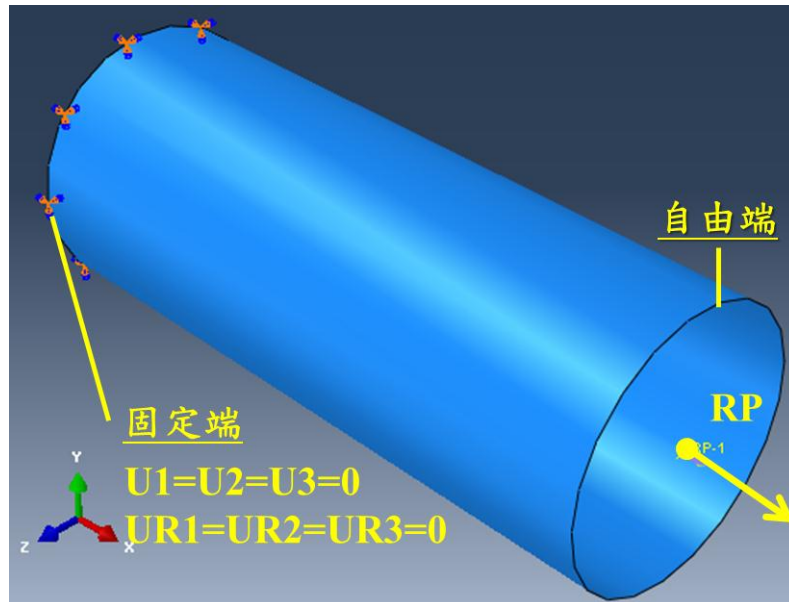


圖 4-30 複材積層圓管有限元素分析模型

4.4.4.c 結果與討論

三種不同負載條件之複材積層圓管剛性最佳化問題，分別以梯度演算法、演化式演算法與本研究所提出之三明治結構複合式最佳化方法(Present)求解。其中如果是使用演化式演算法，則因為考量到每次的最佳解皆不盡相同，皆進行 5 次試驗而求取其各項平均值。而依據不同負載條件，分別將結果整理如下：

Case1 分別以梯度演算法、演化式演算法與本研究提出之複材積層板複合式最佳化方法(包含 Step1 與 Step2 結果)求解，結果分別列於下表 4.26-表 4.28：

表 4.26 積層圓管之 Case1 於梯度演算法的最佳化結果

| Gradient Algorithms | |
|---|--|
| Starting point(θ_i) | [45,-45,-90,0,45,-45,-90,0] _s |
| Optimum(θ_i) | [49.7,-38.7,-90,0,49.7,-38.7,-90,0] _s |
| Objective function ($\times 10^{-2}mm$) | 3.91 |
| Iterations | 29 |
| CPU time(s) | 96 |

表 4.27 積層圓管之 Case1 於演化式演算法的最佳化結果

| EAs | Test 1 | Test 2 | Test 3 | Test 4 | Test 5 | Average |
|---|---|--------|--------|--------|--------|---------|
| Optimum(θ_i) | [-35,-35,-35,55, [-35,-35,-35,-40 [-35,60,-35,55,- [55,-35,55,-35,- [-35,-35,60,-40, -35,55,-35,-35] _s , 55,-35,60,-35] _s 35,60,-35,-35] _s 35,-35,-35,-35] _s -35,-35,-35,55] _s | | | | | — |
| Objective function ($\times 10^{-2}mm$) | 2.17 | 2.18 | 2.20 | 2.17 | 2.18 | 2.18 |
| Iterations | 1200 | 840 | 1040 | 1160 | 1040 | 1056 |
| CPU time(s) | 2831 | 3079 | 2841 | 3468 | 3285 | 3101 |

*Range= $8.97 \times 10^{-2}mm$

表 4.28 積層圓管之 Case1 於本研究的最佳化結果

| Present(Step1) | |
|--|---|
| Optimum($V_{iA}, V_{iD}, i = 1, \dots, 4$) | (0.1032,-0.4665,0.0887,-0.4192,0,0,-0.0006,0) |
| Objective function ($\times 10^{-2}mm$) | 2.53 |
| Iterations | 384 |
| CPU time(s) | 1324 |

| Present(Step2) | Test 1 | Test 2 | Test 3 | Test 4 | Test 5 | Average |
|--|---|---|--|---|---|---------|
| Distance | 0.1344 | 0.1228 | 0.1055 | 0.0944 | 0.0976 | 0.1110 |
| Optimum(θ_i) | [-35,40,15,20,-20,-25,-90,5] _s | [-40,35,-5,40,5,-25,0,-85] _s | [35,-35,-30,15,-10,25,-5,-90] _s | [30,-30,-35,40,-5,5,0,-85] _s | [-35,30,40,-5,0,-35,5,-90] _s | — |
| Objective function ($\times 10^{-2}mm$) | 2.68 | 2.67 | 2.70 | 2.70 | 2.71 | 2.69 |
| Iterations | 1360 | 1920 | 1680 | 2560 | 2000 | 1904 |
| CPU time(s) | 32 | 45 | 39 | 60 | 47 | 45 |
| Total(Step1+2) | 1356 | 1369 | 1363 | 1384 | 1371 | 1369 |

其中，由表 4.26 可知其結果與平板剛性最佳化問題的情況相同，梯度演算法同樣使用最少的演算次數即達到收斂，但其所求得之最佳解仍與起始點無太大差異，且目標函數值亦遠大於其他演算法之結果。說明對於這個最佳化問題而言，使用此方法亦將輕易落入局部最佳解。

整理上表之梯度演算法、演化式演算法與本研究所提出之複合材料複合式最佳化方法的目標函數值與有限元素求解器計算次數之比較圖表，分別如圖 4-31 與圖 4-32 所示。

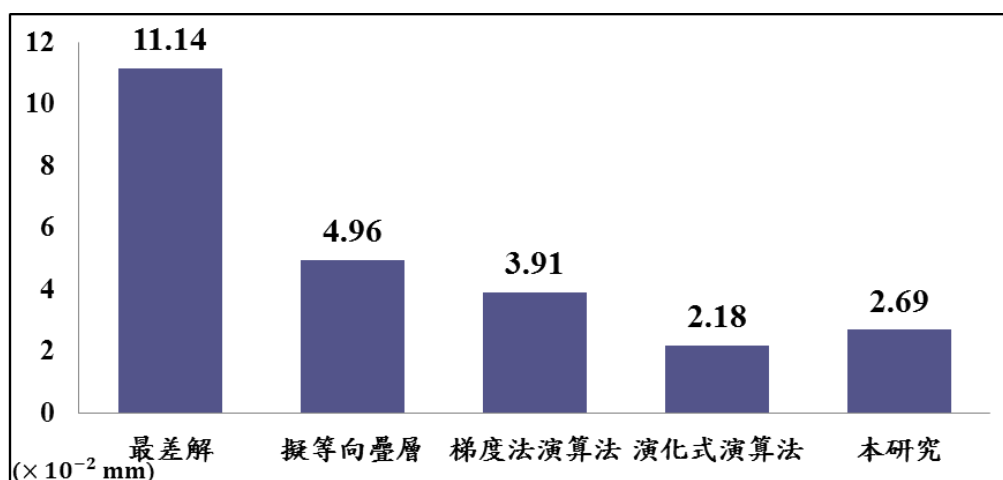


圖 4-31 積層圓管之 Case1 於不同最佳化方法的目標函數值比較

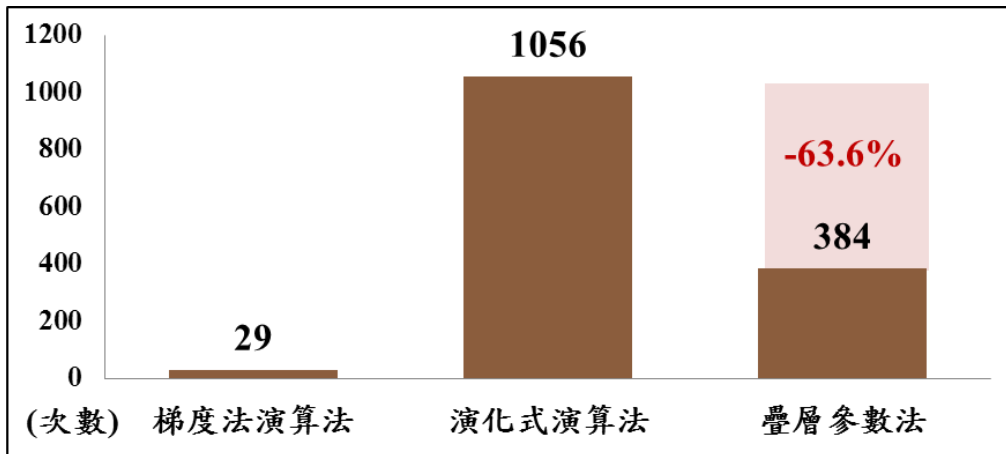


圖 4-32 積層圓管之 Case1 以不同最佳化方法所需的有限元素求解器計算次數比較

由圖 4-31 圖 4-32 可知，與複材積層平板剛性最佳化問題的結果相似，最差解的目標函數值亦超過最佳解的 5 倍，顯示疊層角度設計的重要性。使用擬等向疊層則仍亦有一段進步空間，而梯度演算法雖然可稍微降低目標函數值，但效果同樣有限。此外，雖然除了梯度演算法以最少的計算次數快速收斂至局部最佳解外，本研究相較於演化式演算法同樣擁有極高的求解效率。

然而，其結果卻似乎與積層平板剛性最佳化問題有所差異。由圖 4-31 可以發現，本研究之最佳解的目標函數值明顯高於演化式演算法之結果，但對於此最佳化問題應該不會有如平板剛性最佳化問題可能產生不同的變形方式。於此將先以演化式演算法與本研究提出之複材積層板複合式最佳化方法(包含 Step1 與 Step2 結果)完成後續的 Case2 與 Case3，再一併觀察其結果後進行討論並提出可能原因及改善方法。而以下整理剩下兩種負載條件之最佳化結果，列於下表 4.29-表

4.32：

表 4.29 積層圓管之 Case2 於演化式演算法的最佳化結果

| EAs | Test 1 | Test 2 | Test 3 | Test 4 | Test 5 | Average |
|---------------------------------------|--|---|---|--|--|---------|
| Optimum(θ_i) | [-40,50,-40 , -40,50,50, -40,-40]s | [50,-40,-40 ,50,50,-40, -40,-40]s | [-40,50,50, -40,-40,-40 ,50,-40]s | [-40,-40,50 , -40,-40,50 ,50,-40]s | [-40,50,-40 ,50,-40,-40 , -40,50]s | — |
| Objective function | 4.47 | 4.47 | 4.47 | 4.47 | 4.47 | 4.47 |

| | | | | | | |
|---|------|------|------|------|------|------|
| $(\times 10^{-2}mm)$ | | | | | | |
| Iterations | 1280 | 1000 | 1840 | 2520 | 800 | 1488 |
| CPU time(s) | 2718 | 2763 | 3064 | 4284 | 2547 | 3075 |
| *Range=7.76$\times 10^{-2}mm$ | | | | | | |

表 4.30 積層圓管之 Case2 於本研究的最佳化結果

| | | | | | | |
|---|---|---------------------------------------|---|--|---|---------|
| Present(Step1) | | | | | | |
| Optimum($V_{iA}, V_{iD}, i = 1, \dots, 4$) | (0.0236,-0.1922,-0.5708,-0.1945,0,0,0.0078,0) | | | | | |
| Objective function ($\times 10^{-2}mm$) | 5.37 | | | | | |
| Iterations | 220 | | | | | |
| CPU time(s) | 790 | | | | | |
| Present(Step2) | Test 1 | Test 2 | Test 3 | Test 4 | Test 5 | Average |
| Distance | 0.1149 | 0.1136 | 0.1409 | 0.1137 | 0.1473 | 0.1261 |
| Optimum(θ_i) | [-80,-15,40 ,45,-40,55, -40,-40]s | [0,-65,60,5 5,-40,-40,4 5,-40]s | [-85,25,-30 ,55,-35,50, -40,-45]s | [0,-65,60,5 5,-40,-40,- 45,-40]s | [-75,-15,35 ,55,55,-35, -40,-45]s | — |
| Objective function ($\times 10^{-2}mm$) | 5.48 | 5.48 | 5.51 | 5.48 | 5.55 | 5.50 |
| Iterations | 2560 | 2160 | 1600 | 2160 | 2480 | 2192 |
| CPU time(s) | 59 | 51 | 38 | 50 | 57 | 51 |
| Total(Step1+2) | 849 | 841 | 828 | 840 | 847 | 841 |

表 4.31 積層圓管之 Case3 於演化式演算法的最佳化結果

| EAs | Test 1 | Test 2 | Test 3 | Test 4 | Test 5 | Average |
|---|-------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|---------|
| Optimum(θ_i) | [-25,-25,65,-30,-25,-25,-25]s | [-25,-25,-30,-30,70,-25,-25,-25]s | [-25,-25,-30,-30,-25,-25,70,-25]s | [-25,-25,-25,-30,-25,-30,70,-25]s | [-25,-30,-25,-25,-30,70,-25,-25]s | — |
| Objective function ($\times 10^{-2}mm$) | 2.14 | 2.14 | 2.14 | 2.14 | 2.14 | 2.14 |
| Iterations | 1280 | 1480 | 1800 | 1200 | 920 | 1336 |
| CPU time(s) | 3732 | 3708 | 2661 | 3361 | 3233 | 3339 |

*Range= $9.23 \times 10^{-2}mm$

表 4.32 積層圓管之 Case3 於本研究的最佳化結果

| | | | | | | |
|--|---|----------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|---------|
| Present(Step1) | | | | | | |
| Optimum($V_{iA}, V_{iD}, i = 1, \dots, 4$) | (0.2724,-0.5696,-0.2319,-0.5057,0.0020,0,-0.0015,0) | | | | | |
| Objective function ($\times 10^{-2}mm$) | 2.70 | | | | | |
| Iterations | 472 | | | | | |
| CPU time(s) | 1526 | | | | | |
| Present(Step2) | Test 1 | Test 2 | Test 3 | Test 4 | Test 5 | Average |
| Distance | 0.1799 | 0.2454 | 0.1595 | 0.2568 | 0.1421 | 0.1967 |
| Optimum(θ_i) | [70,15,-65,-35,-30,-25,-30,-25]s | [-80,15,55,-30,-30,-30,-30,-30]s | [80,25,-55,-30,-25,-25,-30,-30]s | [-80,0,50,-35,-35,-30,-30,-25]s | [25,80,-55,-25,-25,-30,-25,-30]s | — |
| Objective function ($\times 10^{-2}mm$) | 2.84 | 2.86 | 2.80 | 2.79 | 2.80 | 2.82 |
| Iterations | 1840 | 2480 | 1440 | 2000 | 2240 | 2000 |
| CPU time(s) | 43 | 57 | 34 | 46 | 52 | 46 |
| Total(Step1+2) | 1569 | 1583 | 1560 | 1572 | 1578 | 1572 |

然後，同樣整理上表之演化式演算法與本研究所提出之複合材料複合式最佳化方法的目標函數值與有限元素求解器計算次數之比較圖表如下：

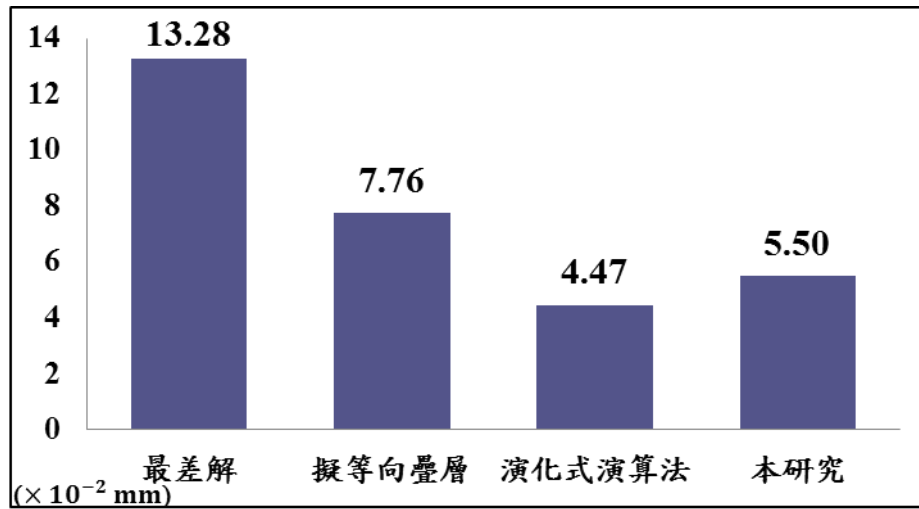


圖 4-33 積層圓管之 Case2 於不同最佳化方法的目標函數值比較

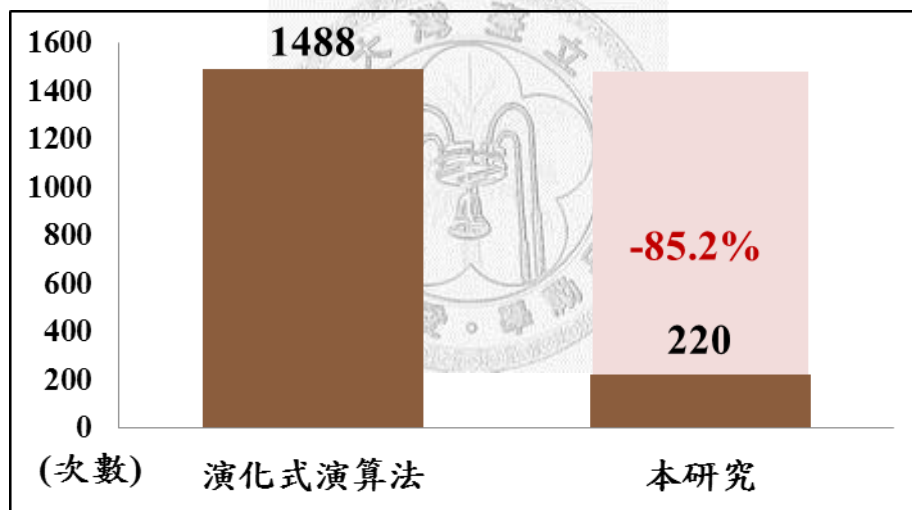


圖 4-34 積層圓管之 Case2 以不同最佳化方法所需的有限元素求解器計算次數比較

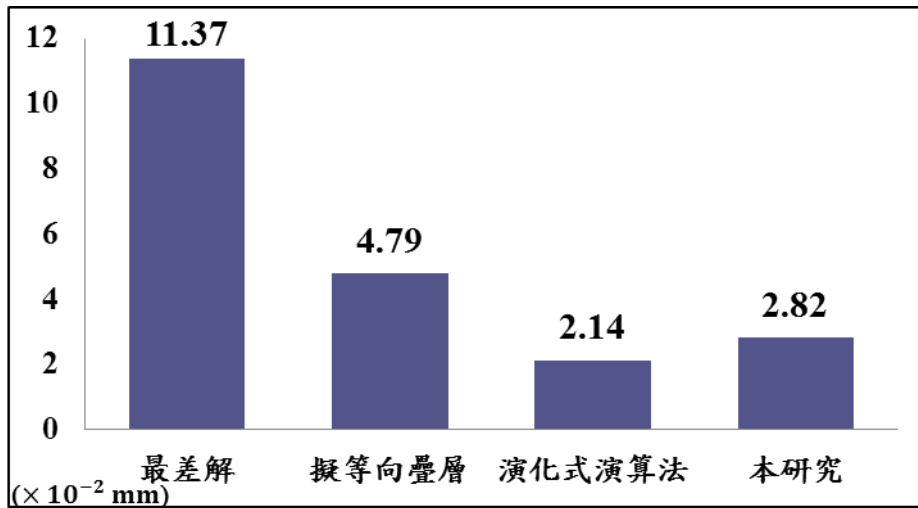


圖 4-35 積層圓管之 Case3 於不同最佳化方法的目標函數值比較

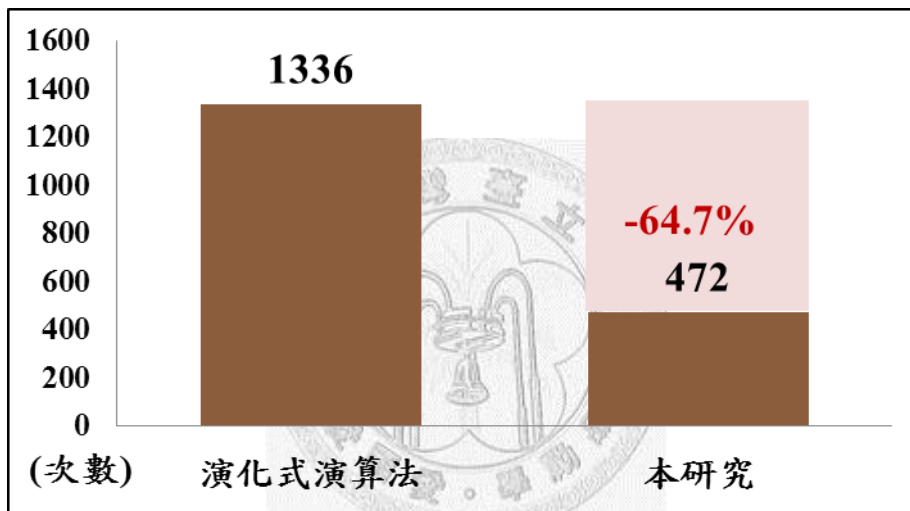


圖 4-36 積層圓管之 Case3 以不同最佳化方法所需的有限元素求解器計算次數比較

藉由綜合比較圖 4-31、圖 4-32 與圖 4-33 圖 4-36 可做以下結論：對於不同負載條件的積層圓管剛性最佳化問題，演化式演算法與本研究皆可有效的降低目標函數值。而本研究相較於演化式演算法而言，卻僅需要極少量的有限元素求解器計算次數，成功地大幅提高求解效率。

但是，就以上的結果來看，本研究於積層圓管剛性最佳化問題所求得之目標函數值卻始終不如演化式演算法。欲探究其原因，於表 4.28、表 4.30 與表 4.32 中，觀察三個不同負載條件於本研究 Step1 之最佳化結果可以發現：輸出的 8 個最佳疊層參數，其中四個彎曲疊層參數 V_{iD} 幾乎沒有變動而仍然近似維持初始值 0，換言之，彎曲疊層參數 V_{iD} 幾乎不對目標函數造成梯度變化。筆者認為此乃肇因於

該圓管剛性最佳化之問題，雖然具有合力與力矩兩種負載型式，但其實對於積層板而言，卻僅是屬於面內(In-plane)負載，因為原本施於自由端圓周上的力矩，對於圓管而言幾乎只造成面內的剪切變形。

如此一來，在求解該面內最佳化問題時，如果仍以 8 個疊層參數為設計變數，筆者推測可能將對於 Step1 與 Step2 的最佳化過程分別造成以下不良的影響：

於 Step1 中，因為彎曲疊層參數 V_{iD} 幾乎不變動而維持起始值 0，但於最佳化過程中卻又必須持續滿足可行區域的限制條件，因此對另外四個伸張疊層參數 V_{iA} 造成牽制的效果。以式(3.29)中「 V_{iA} vs V_{iD} 」之可行區域解析式為例，當 V_{iD} 固定為 0 時， V_{iA} 的可行區域範圍將限縮為 $-0.5 \leq V_{iA} \leq 0.5$ 。此外，於 Step1 所輸出的最佳疊層參數組合，雖然符合本研究所使用之 32 條可行區域之限制條件，但是已知僅有少數特殊情況下會讓彎曲疊層參數 V_{iD} 皆為 0，也就是說大部份這些解，實際上是屬於無法被條限制條件排除的不可行解。

於 Step2 的過程中，則因為計算目標函數值所需的疊層參數組合非最佳解，或者可能為不可行解。所以造成以實際疊層角度擬合的結果與演化式演算法有一段落差，甚至有難以擬合的情況。後者可由「距離」看出一些端倪，例如 Case3 的 Step2 中所求得的距離明顯較其他負載條件為大，所以該組疊層參數最有可能屬於不可行解。

因此，本研究挑選圓管剛性最佳化問題中與演化式演算法之目標函數值差異比例最大的 Case3，將其設計變數改為僅有四個伸張疊層參數 V_{iA} ，觀察其結果是否有所改善，以驗證以上推論。其最佳化結果整理於下表：

表 4.33 積層圓管之 Case3 於本研究修正後設計變數的最佳化結果

| | |
|--|----------------------------------|
| Present(Step1) | |
| Optimum(V_{iA} $i = 1, \dots, 4$) | (0.3709,-0.6046,-0.1344,-0.9365) |
| Objective function ($\times 10^{-2}mm$) | 2.17 |

| | | | | | | |
|---|--|--------|--------|--------|--------|---------|
| Iterations | 319 | | | | | |
| CPU time(s) | 1105 | | | | | |
| Present(Step2) | Test 1 | Test 2 | Test 3 | Test 4 | Test 5 | Average |
| Distance | 0.0602 | 0.0602 | 0.0602 | 0.0602 | 0.0602 | 0.0602 |
| Optimum(θ_i) | [75,-30,-25,-20,-25,75,-25,-20,-25,75,-25,-35,-25,-25,-30,-25,-25,-25,-35,-20,25,-35,-25,-25]s 25,-35,-25,-30]s 30,-20,-25,-25]s -20,-35,-25,75]s 75,-30,-25,-25]s — | | | | | |
| Objective function ($\times 10^{-2}mm$) | 2.22 | 2.22 | 2.22 | 2.22 | 2.22 | 2.22 |
| Iterations | 880 | 1200 | 1200 | 1200 | 1200 | 1136 |
| CPU time(s) | 22 | 29 | 29 | 29 | 28 | 27 |
| Total(Step1+2) | 1127 | 1134 | 1134 | 1134 | 1133 | 1134 |

比較表 4.31 與表 4.33 可以發現，於此最佳化問題中，雖然不考慮彎曲疊層參數 V_{iD} ，卻反而有助於提升其準確性，甚至加快收斂速度，且所求得之目標函數值亦已相當接近演化式演算法之結果，進一步印證了先前的推論。總結而言，對於近似單純面內或面外受力之最佳化問題，若欲使用本研究提出之方法求取較準確之最佳解，必須適當減少「對目標函數不造成梯度變化」之作為設計變數的疊層參數。

4.5 總結

本章首先建立 26 條二維擬合限制條件並配合現有 6 條解析式，建構近似疊層參數域之可行區域，並驗證其準確率皆超過 99.9%。而以此限制條件可以有效率地排除耦合疊層參數域內 99.95% 的不可行解。

並提出複材積層板複合式最佳化方法：於 Step1 先以梯度演算法進行疊層參數最佳化，再於 Step2 以演化式演算法進行疊層角度擬合。利用疊層參數平滑、連續且具凸性的特性，使其在需要呼叫有限元素求解器計算目標函數值的 Step1 中，

可以採用梯度演算法減少演算次數，提升求解效率。

然後，透過各種不同的實例驗證與比較證明此方法的準確性、效率與通用性：

1. 以三點彎曲實驗驗證使用古典積層板理論結合有限元素之分析方法的準確性，分別與實體模型、薄殼模型與實驗做比較，其結果顯示分析仍與實驗數據相近，且不同分析模型之間的誤差亦非常小，顯示以古典積層板理論結合有限元素之分析方法已具有足夠的準確性。
2. 以一個可解析之積層板最佳化問題，比較本研究與解析解之差異，初步驗證本研究最佳化方法的準確性。其結果顯示本研究與解析解之誤差小於 3° ，推測肇因於兩者對於剛性本來就不盡相同，且本研究之目標函數仍優於解析解，表示此最佳化方法對於可解析之問題，具有求得全域最佳解的能力。
3. 以積層平板剛性最佳化問題，驗證在不同規格尺寸下，本研究皆具有良好的準確性與求解效率，並僅需傳統演化式演算法大約 10% 至 20% 的演算次數。此外，本研究可求得較符合一般結構設計所期待之結果。
4. 以積層圓管剛性最佳化問題，驗證在不同負載條件下，本研究同樣具有良好的求解效率。並得知對於近似純面內之最佳化問題，應僅以伸張疊層參數 V_{iA} 做為設計變數，可以得到較為準確之最佳化結果。
5. 綜合上述 3 與 4 項，進一步說明本研究所提出的複材積層板複合式最佳化方法可適用不同結構幾何之中，並且皆能有良好的表現。

本章已確立了此方法於複材積層板之可行性與效益。在下一章中，將設法把此方法延伸應用至三明治結構，除了希望同樣以此提升最佳化求解效率外，並將設法運用此方法所帶來優勢，求解傳統三明治結構最佳化方法難以實現之變維度最佳化問題。

第五章 三明治結構最佳化

在上一個章節，已驗證本研究所提出的應用疊層參數之複合材料複合式最佳化方法對於求解積層板最佳化問題的效益，而本章節將進一步將此方法延伸應用至三明治結構最佳化問題。

三明治結構與上一章所提的積層板有兩個主要差異之處：

1. 不再以單一材料所組成
2. 需考慮垂直平面方向的橫向剪切變形

因此，就第一點而言，首先必須克服的困難是：由 3.2 可知，材料相依矩陣 U_i 只以一組材料常數計算而得，換言之，如果要求取疊層參數，必須為同一種材料，如此一來便無法直接透過疊層參數計算三明治結構的勁度矩陣。本研究提出三明治等效勁度矩陣估算法：不透過以往古典積層板理論對三明治結構各層對比勁度矩陣 Q_i 的厚度積分與疊加運算；直接以表材與芯材的勁度矩陣，估算三明治結構的勁度矩陣。所以表材仍可視為積層板，以疊層參數進行最佳化。關於第二點的部分，則將如 3.1 所述，導入一階剪切變形理論，以減少位移量的誤差。

藉由以上的應對方案，本研究所提出的複合材料複合式最佳化方法即可同樣適用於三明治結構，並且達成傳統三明治最佳化方法難以實現之同步最佳化表材疊層數目、疊層角度與順序、芯材厚度乃至於芯材種類之目標，因而求得更為正確的全域最佳解。本章將以平板剛性最佳化問題為例，比較此方法與傳統三明治結構最佳化方法，以驗證其效率與準確性皆有所提升。

5.1 三明治結構等效勁度矩陣估算

傳統三明治結構勁度計算方式即同樣根據古典積層板理論，先求取各層的對比勁度矩陣元素 \bar{Q}_{ij} ，再對厚度作積分與疊加運算。

對於三明治結構而言，芯材的主要目的在於增加表材與中性軸之距離，並維持表材於該位置，以提高截面二次矩。因此，如圖 5-1 所示，典型的三明治結構可視為將一片對稱積層板於中性軸再置入一塊不同材料的芯材，而把積層板以中性軸一分為二後，上下等距推離中性軸之結果。

所以，本研究希望可以僅透過該積層板的伸張勁度 $[A]_f$ 、彎曲勁度 $[D]_f$ 與厚度 t_f ，以及芯材的伸張勁度 $[A]_c$ 、彎曲勁度 $[D]_c$ 、與厚度 t_c 後，直接估算三明治結構的伸張勁度 $[A]_s$ 與彎曲勁度 $[D]_s$ 。原因在於，使用疊層參數為設計變數作最佳化的步驟中，將不會出現任何角度資訊，因此無從得知各層的對比勁度矩陣元素 \bar{Q}_{ij} ，無法使用傳統三明治結構勁度計算方式。

然而，根據古典積層板理論(參考式(3.13))，伸張勁度的計算僅與各層厚度有關，而與各層離中性軸之距離無關。因此，其中三明治結構的伸張勁度 $[A]_s$ 即為表材積層板伸張勁度 $[A]_f$ 與芯材伸張勁度 $[A]_c$ 的疊加，表示如下：

$$[A]_s = [A]_f + [A]_c \quad (5.1)$$

此外，由於芯材的伸張勁度一般遠低於表材，所以三明治結構的伸張勁度矩陣基本上可以表材積層板伸張勁度近似，即：

$$[A]_s \cong [A]_f \quad (5.2)$$

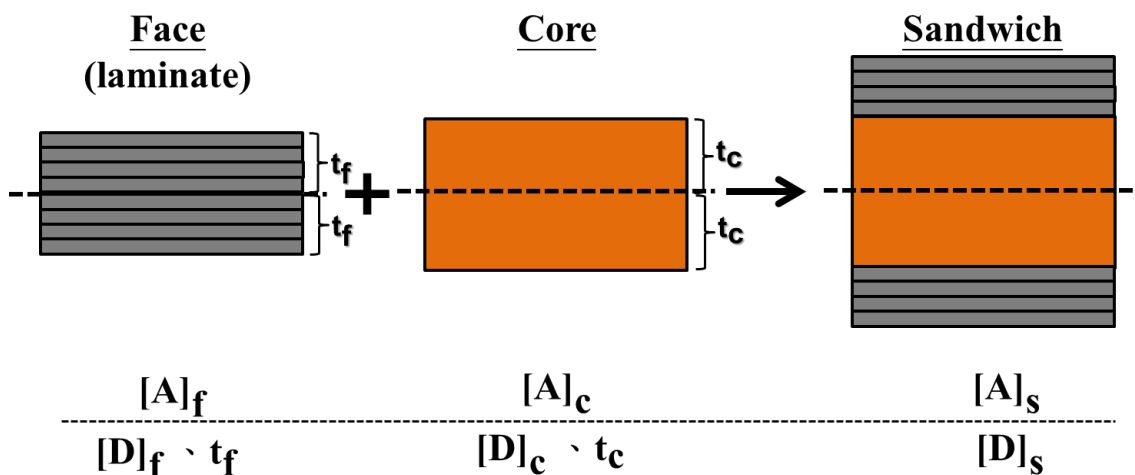


圖 5-1 三明治等效勁度矩陣估算示意圖

而本節將以單層表材的三明治結構彎曲勁度矩陣推導結果做為標準式。然後即可將兩層表材以上之三明治結構的表材積層板，一律透過計算等效表材厚度的方式近似為單層表材，並以標準式表示。但有少部分特例無法計算等效表材厚度(這些特例只會發生於伸張與剪切耦合之勁度矩陣元素 D_{16} 、 D_{26})，因此本研究針對這些特例之型式作分類，並且分別建立相對應的擬合勁度矩陣元素模型，以減少特例發生時所造成的誤差。

最後以大量隨機產生的表材疊層角度組合，比較本研究所提出的等效勁度矩陣估算結果與古典積層板理論計算結果，以驗證準確性。

5.1.1 單層表材三明治結構彎曲勁度矩陣推導

如圖 5-2 所示，本小節將推導單層三明治結構彎曲勁度矩陣 $[D]_s$ 以表材彎曲勁度矩陣 $[D]_f$ 與厚度 t_f 以及芯材彎曲勁度矩陣 $[D]_c$ 與厚度 t_c 的表示結果。

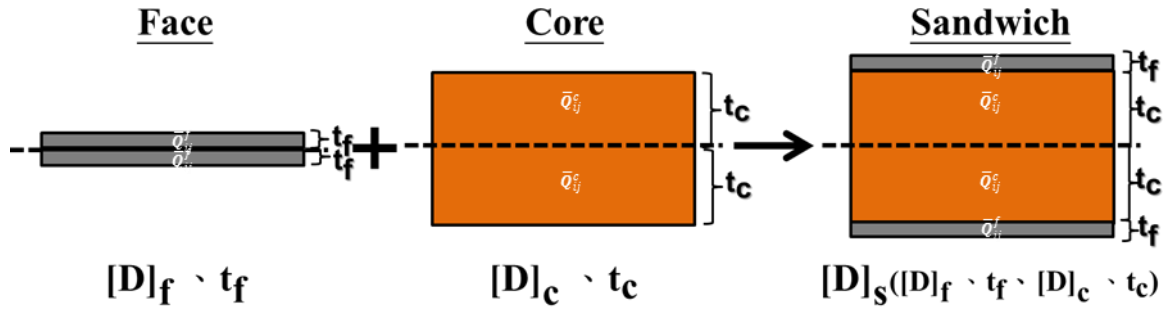


圖 5-2 單層表材三明治結構彎曲勁度矩陣推導示意圖

先分別計算表材彎曲勁度矩陣元素 D_{ij}^f 與芯材彎曲勁度矩陣元素 D_{ij}^c ，過程如下：

下：

$$D_{ij}^f = \frac{1}{3} \{ \bar{Q}_{ij}^f [t_f^3 - (-t_f)^3] \} = \frac{2}{3} \bar{Q}_{ij}^f t_f^3 \quad (5.3)$$

$$D_{ij}^c = \frac{1}{3} \{ \bar{Q}_{ij}^c [t_c^3 - (-t_c)^3] \} = \frac{2}{3} \bar{Q}_{ij}^c t_c^3 \quad (5.4)$$

再以古典積層板理論計算三明治結構勁度矩陣元素 D_{ij}^s ，並整理後以 D_{ij}^f 、 t_f 、 D_{ij}^c 與 t_c 表示，過程如下：

$$\begin{aligned} D_{ij}^s &= \frac{1}{3} \{ \bar{Q}_{ij}^f [(t_f + t_c)^3 - t_c^3] + \bar{Q}_{ij}^c [t_c^3 - (-t_c)^3] \\ &\quad + \bar{Q}_{ij}^f [(-t_c)^3 - (-t_c - t_f)^3] \} \\ &= \frac{2}{3} \{ \bar{Q}_{ij}^f (t_f + t_c)^3 - \bar{Q}_{ij}^f t_c^3 + \bar{Q}_{ij}^c t_c^3 \} \\ &= D_{ij}^f + 3 \left(\frac{2}{3} \bar{Q}_{ij}^f t_f t_c^2 + \frac{2}{3} \bar{Q}_{ij}^f t_f^2 t_c \right) + D_{ij}^c \\ &= D_{ij}^f + 3 \left[\left(\frac{t_c}{t_f} \right)^2 \frac{2}{3} \bar{Q}_{ij}^f t_f^3 + \left(\frac{t_c}{t_f} \right) \frac{2}{3} \bar{Q}_{ij}^f t_f^3 \right] + D_{ij}^c \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$= \left\{ 1 + 3 \left[\left(\frac{t_c}{t_f} \right)^2 + \left(\frac{t_c}{t_f} \right) \right] \right\} D_{ij}^f + D_{ij}^c \quad (5.6)$$

$$= [1 + 3(r^2 + r)] D_{ij}^f + D_{ij}^c, \quad r = \frac{t_c}{t_f} \quad (5.7)$$

式(5.7)即為計算三明治結構彎曲勁度矩陣元素的標準式，其中 r 代表芯材對表材的厚度比。此外，當芯材厚度遠大於表材時， r^2 將遠大於 r 與1，此時三明治結構彎曲勁度矩陣元素可近似為：

$$D_{ij}^s \cong 3r^2 D_{ij}^f + D_{ij}^c, \quad r = \frac{t_c}{t_f} \quad (5.8)$$

而此式將在 5.1.5 中有進一步的應用。

5.1.2 三明治結構等效勁度矩陣模型建立

在建立標準式後，本研究進一步以同樣方式求取多層表材的彎曲勁度矩陣元素之整理結果，希望藉此找出層數對彎曲勁度矩陣元素整理結果之影響，並嘗試將整理結果以標準式的型式表示。

例如兩層表材的表材、芯材與三明治結構的彎曲勁度矩陣元素參考圖 5-3，整理結果如下：

$$D_{ij}^f = \frac{2}{3} \left(\frac{\bar{Q}_{ij}^{f1} + 7\bar{Q}_{ij}^{f2}}{8} \right) t_f^3, \quad D_{ij}^c = \frac{2}{3} \bar{Q}_{ij}^f t_c^3 \quad (5.9)$$

$$D_{ij}^s = D_{ij}^f + 3 \left\{ r^2 \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\bar{Q}_{ij}^{f1} + \bar{Q}_{ij}^{f2}}{2} \right) t_f^3 \right] + r \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\bar{Q}_{ij}^{f1} + 3\bar{Q}_{ij}^{f2}}{4} \right) t_f^3 \right] \right\} \quad (5.10)$$

$$+ D_{ij}^c$$

而四層表材的表材、芯材與三明治結構的彎曲勁度矩陣元素參考圖 5-3，整理結果如下：

$$D_{ij}^f = \frac{2}{3} \left(\frac{\bar{Q}_{ij}^{f1} + 7\bar{Q}_{ij}^{f2} + 19\bar{Q}_{ij}^{f3} + 37\bar{Q}_{ij}^{f4}}{64} \right) t_f^3, \quad D_{ij}^c = \frac{2}{3} \bar{Q}_{ij}^c t_c^3 \quad (5.11)$$

$$D_{ij}^s = D_{ij}^f + 3 \left\{ r^2 \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\bar{Q}_{ij}^{f1} + \bar{Q}_{ij}^{f2} + \bar{Q}_{ij}^{f3} + \bar{Q}_{ij}^{f4}}{4} \right) t_f^3 \right] + 3r \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\bar{Q}_{ij}^{f1} + 3\bar{Q}_{ij}^{f2} + 5\bar{Q}_{ij}^{f3} + 7\bar{Q}_{ij}^{f4}}{16} \right) t_f^3 \right] \right\} + D_{ij}^c \quad (5.12)$$

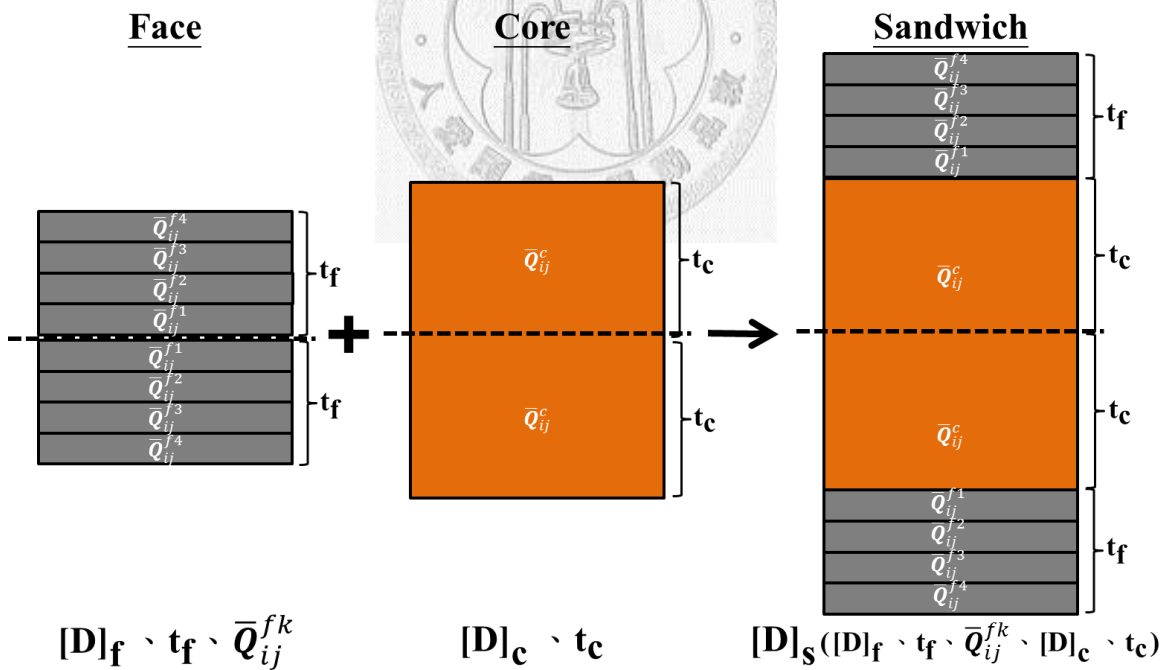


圖 5-3 多層表材三明治結構彎曲勁度矩陣求取示意圖(以四層表材為例)

然而，由式(5.10)與(5.12)可知，兩層與四層表材之三明治結構的彎曲勁度元素 D_{ij}^s 皆無法如同標準式僅以 r 、 D_{ij}^f 與 D_{ij}^c 表示，因為其中出現以各層表材之對比勁

度矩陣元素 \bar{Q}_{ij}^{fk} 組合而成的未知項，例如式(5.10)中的 $\frac{2}{3}\left(\frac{\bar{Q}_{ij}^{f1}+\bar{Q}_{ij}^{f2}}{2}\right)t_f^3$ 與 $\frac{2}{3}\left(\frac{3\bar{Q}_{ij}^{f1}+\bar{Q}_{ij}^{f2}}{4}\right)t_f^3$ ，且可推斷對於多層表材的三明治結構皆是如此。但是比較式(5.10)與(5.12)發現，即使無法僅以 r 、 D_{ij}^f 與 D_{ij}^c 表示，不過卻仍是有一些規則可循的，而筆者先將符合兩者的通式列於下方：

$$D_{ij}^s = D_{ij}^f + 3\left(r^2 D_{ij}^{\bar{f}} + r D_{ij}^{\hat{f}}\right) + D_{ij}^c, \quad r = \frac{t_c}{t_f} \quad (5.13)$$

其中 $D_{ij}^{\bar{f}}$ 與 $D_{ij}^{\hat{f}}$ 為筆者於此所定義的符號，用以分別表示兩組以各層表材之對比勁度矩陣元素 \bar{Q}_{ij}^{fk} 組合而成的未知項。本研究整理不同表材層數之彎曲勁度矩陣元素的 D_{ij}^f 、 $D_{ij}^{\bar{f}}$ 與 $D_{ij}^{\hat{f}}$ ，並進一步推導出三者於 n 層表材的一般式，列於下表：



表 5.1 多層表材之彎曲勁度矩陣元素通式內 D_{ij}^f 、 $D_{ij}^{\bar{f}}$ 與 $D_{ij}^{f^k}$ 項

| 層數 | D_{ij}^f | $D_{ij}^{\bar{f}}$ | D_{ij}^f |
|----|--|--|--|
| 2 | $\frac{2}{3} \left(\frac{\bar{Q}_{ij}^{f^1} + 7\bar{Q}_{ij}^{f^2}}{8} \right) t_f^3$ | $\frac{2}{3} \left(\frac{\bar{Q}_{ij}^{f^1} + \bar{Q}_{ij}^{f^2}}{2} \right) t_f^3$ | $\frac{2}{3} \left(\frac{\bar{Q}_{ij}^{f^1} + 3\bar{Q}_{ij}^{f^2}}{4} \right) t_f^3$ |
| 3 | $\frac{2}{3} \left(\frac{\bar{Q}_{ij}^{f^1} + 7\bar{Q}_{ij}^{f^2} + 19\bar{Q}_{ij}^{f^3}}{27} \right) t_f^3$ | $\frac{2}{3} \left(\frac{\bar{Q}_{ij}^{f^1} + \bar{Q}_{ij}^{f^2} + \bar{Q}_{ij}^{f^3}}{4} \right) t_f^3$ | $\frac{2}{3} \left(\frac{\bar{Q}_{ij}^{f^1} + 3\bar{Q}_{ij}^{f^2} + 5\bar{Q}_{ij}^{f^3}}{9} \right) t_f^3$ |
| 4 | $\frac{2}{3} \left(\frac{\bar{Q}_{ij}^{f^1} + 7\bar{Q}_{ij}^{f^2} + 19\bar{Q}_{ij}^{f^3} + 37\bar{Q}_{ij}^{f^4}}{64} \right) t_f^3$ | $\frac{2}{3} \left(\frac{\bar{Q}_{ij}^{f^1} + \bar{Q}_{ij}^{f^2} + \bar{Q}_{ij}^{f^3} + \bar{Q}_{ij}^{f^4}}{4} \right) t_f^3$ | $\frac{2}{3} \left(\frac{\bar{Q}_{ij}^{f^1} + 3\bar{Q}_{ij}^{f^2} + 5\bar{Q}_{ij}^{f^3} + 7\bar{Q}_{ij}^{f^4}}{16} \right) t_f^3$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| n | $\frac{2}{3} \left[\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (3n^2 - 3n + 1) \bar{Q}_{ij}^{f^k} \right] t_f^3$ | $\frac{2}{3} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{f^k} \right) t_f^3$ | $\frac{2}{3} \left[\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (2n - 1) \bar{Q}_{ij}^{f^k} \right] t_f^3$ |

為方便比較，將式(5.7)與(5.13)的格式統一後，重新條列於下：

$$D_{ij}^s = D_{ij}^f + 3(r^2 D_{ij}^f + r D_{ij}^f) + D_{ij}^c, \quad r = \frac{t_c}{t_f} \quad (5.7)$$

$$D_{ij}^s = D_{ij}^f + 3(r^2 D_{ij}^{\bar{f}} + r D_{ij}^{\hat{f}}) + D_{ij}^c, \quad r = \frac{t_c}{t_f} \quad (5.13)$$

觀察表 5.1 並比較式(5.7)與(5.13)，本研究嘗試先對 $D_{ij}^{\bar{f}}$ 與 $D_{ij}^{\hat{f}}$ 所具有的物理意義作解讀： $D_{ij}^{\bar{f}}$ 以等比例的各層對比勁度矩陣元素 \bar{Q}_{ij}^{fk} 所組成，且相乘的係數為 r^2 ，表示此項受芯材對表材的厚度比例影響甚大，而且對於三明治結構勁度矩陣元素 D_{ij}^s 的貢獻比亦是三者中最大的。因此，此項可視為在不考慮表材的疊層順序，亦即將表材視為一片薄層的情況下，先直接移動表材至形成三明治結構時該有的位置，所增加的勁度。然後表材於該位置再考慮疊層順序所造成的影響，即構成了 $D_{ij}^{\hat{f}}$ 。所以對於 D_{ij}^f 與 $D_{ij}^{\hat{f}}$ ，由內至外各層的對比勁度矩陣元素 \bar{Q}_{ij}^{fk} 組成比例之差異(例如表材為4層時， $D_{ij}^f = \frac{2}{3} \left(\frac{\bar{Q}_{ij}^{f1} + 7\bar{Q}_{ij}^{f2} + 19\bar{Q}_{ij}^{f3} + 37\bar{Q}_{ij}^{f4}}{64} \right) t_f^3$ ， $D_{ij}^{\hat{f}} = \frac{2}{3} \left(\frac{\bar{Q}_{ij}^{f1} + 3\bar{Q}_{ij}^{f2} + 5\bar{Q}_{ij}^{f3} + 7\bar{Q}_{ij}^{f4}}{16} \right) t_f^3$)，亦獲得合理的解釋：一旦表材積層板遠離中性軸，顯然的，將弱化表材積層板內外層排序所造成的影響。

由於 D_{ij}^f 對於疊層內外層順序的敏感度皆高於 $D_{ij}^{\bar{f}}$ 與 $D_{ij}^{\hat{f}}$ ，其中又以高於 $D_{ij}^{\bar{f}}$ 為甚。所以如欲將式(5.13)近似為式(5.7)，則必然需要同時降低 $r^2 D_{ij}^f$ 項與 $r D_{ij}^f$ 項對於疊層內外層順序的敏感度，且其中又以 $r^2 D_{ij}^f$ 項需要降低的比例為大。而顯然的，透過提高 r 可以達到此目的，因為當心材對表材的厚度比例增加，即代表疊層內外層順序對三明治結構彎曲勁度矩陣的影響減少。此外，如果採用這個方式，那麼 $r^2 D_{ij}^f$ 項所降低的幅度將大於 $r D_{ij}^f$ 項，正好符合先前所提之期待。欲降低 r 的方法有兩個：

一為提高位於分子的 t_c ；二為降低位於分母的 t_f 。但是第一種方法將會改變 D_{ij}^c 的值，而徒增將式(5.13)近似為式(5.7)的困難度。因此，本研究將採用降低 t_f 的方法來達到此目的。而本研究將此降低後的值定義為「等效表材厚度 t_{eq} 」，具體的求取方法將於下方說明。

5.1.3 等效表材厚度推導

如圖 5-4 所示，左方為原始表材積層板，為了配合疊層參數的使用，因此各層的對比勁度矩陣元素 \bar{Q}_{ij}^{fk} 列為未知項，而僅有 A_{ij}^f 與 D_{ij}^f 兩項資訊。本研究希望在不變動這兩個值的情況下求取等效為單層表材後的兩個未知項，即等效對比勁度矩陣元素 \bar{Q}_{ij}^{eq} 與等效表材厚度 t_{ij}^{eq} 。可透過求解下列聯立方程式獲得：

$$\begin{cases} A_{ij}^f = 2\bar{Q}_{ij}^{eq} t_{ij}^{eq} \\ D_{ij}^f = \frac{2}{3}\bar{Q}_{ij}^{eq} t_{ij}^{eq^3} \end{cases} \quad (5.14)$$

其中

$$\bar{Q}_{ij}^{eq} = \frac{\sqrt{3}A_{ij}^f}{6D_{ij}^f} \sqrt{A_{ij}^f D_{ij}^f}, \quad t_{ij}^{eq} = \sqrt{\frac{3D_{ij}^f}{A_{ij}^f}} \quad (5.15)$$

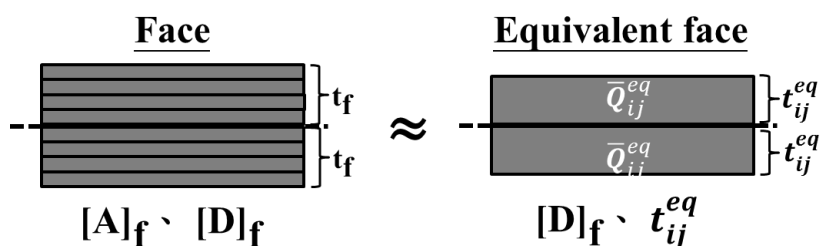


圖 5-4 等效表材厚度推導示意圖

對於每一個表材彎曲勁度矩陣元素 D_{ij}^f ，皆可求得一個對應的等效表材厚度

t_{ij}^{eq} 。因此，如欲估算多層表材的三明治結構彎曲勁度矩陣 D_{ij}^s ，即可如圖 5-5 所示，將其等效為單層表材後，求取表材等效厚度 t_{ij}^{eq} 再代入標準式(5.7)，其結果表示如下：

$$D_{ij}^s = [1 + 3(r_{eq}^2 + r_{eq})] D_{ij}^f + D_{ij}^c, \quad r_{eq} = \frac{t_c}{t_{eq}} \quad (5.16)$$

附帶一提，此估算方法的基本假設，經筆者透過令式(5.13)與(5.16)相等，整理後而得到為：

$$D_{ij}^{f3} = D_{ij}^{\bar{f}} \times D_{ij}^{\hat{f}2} \quad (5.17)$$

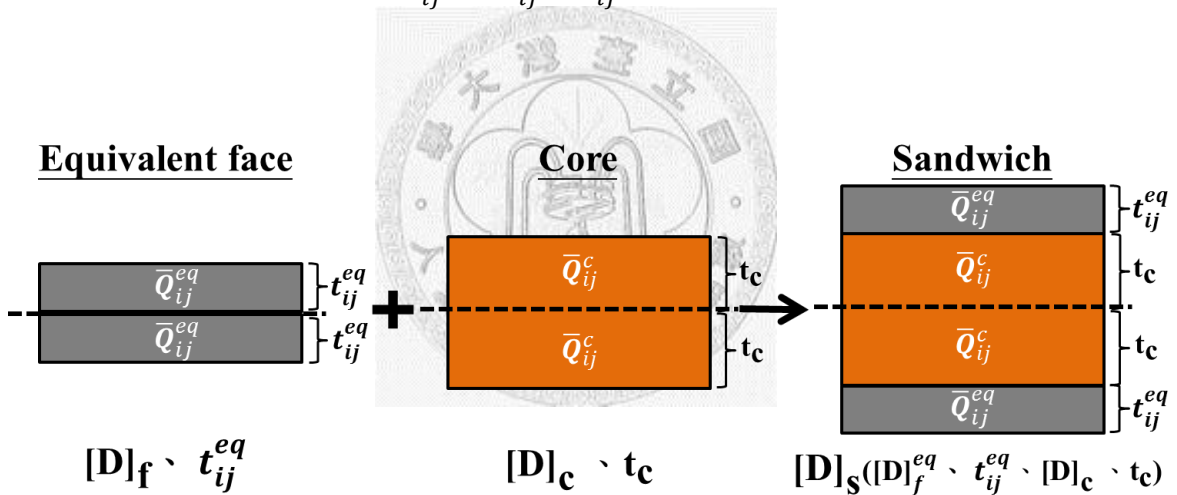


圖 5-5 應用等效表材厚度估算三明治結構彎曲勁度矩陣示意圖

5.1.4 特例說明與擬合模型建立

然而，儘管大部份情況下的三明治結構彎曲勁度矩陣皆可由式(5.16)近似而得，但仍有些許特例，這些特例會發生於彎曲與扭轉耦合之勁度矩陣元素 D_{16}^s 、 D_{26}^s ，以下先將之分類並舉例說明：

1. $A_{i6}^f = 0, D_{i6}^f = 0$:

出現於積層板為正交疊層(cross-ply laminates)或反對稱疊層(antisymmetric laminates)時。但由於本研究之三明治結構已預設為對稱疊層，並無反對稱疊

層之情況，因此只可能出現正交對稱疊層，表示積層板對稱且僅以 0° 與 90° 薄層組成，例如： $[90,0,0,90]_s$ 。而此情況會讓 t_{ij}^{eq} 計算結果為無意義。

2. $A_{i6}^f = 0, D_{i6}^f \neq 0$:

出現於積層板為斜交疊層(angle-ply laminates)或平衡疊層(balanced laminates)。表示積層板可能以具有相同正負號數量的一種或多種角度之薄層組成，例如： $[\theta_1, -\theta_2, -\theta_1, \theta_2]_s$ 。此情況亦會讓 t_{ij}^{eq} 計算結果為無意義。

3. $\frac{D_{i6}^f}{A_{i6}^f} < 0$:

這類情況較為特殊，無法以任何一種標準的疊層型式表示。但往往發生於積層板靠內側疊層與靠外側疊層的對比勁度矩陣元素 \bar{Q}_{ij}^{fk} 異號，且內側疊層 \bar{Q}_{ij}^{fk} 的絕對值略大於外側疊層時。因為，假設計算結果 $A_{i6}^f > 0$ ，基本上可表示 $\sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{fk} > 0$ ，但 D_{i6}^f 卻可能因為上述情況，在受疊層內外順序影響下，增強了外側疊層 \bar{Q}_{ij}^{fk} 影響比例，使得 $\sum_{k=1}^n (3n^2 - 3n + 1) \bar{Q}_{ij}^{fk} < 0$ (參考表 5.1 之 D_{ij}^f 一般式)，造成 D_{i6}^f 與 A_{i6}^f 異號，反之亦然，例如： $[5,0,0,-10]_s$ 、 $[-5,0,0,10]_s$ 。而此情況會讓 t_{ij}^{eq} 為虛根。

因此，針對這些無法計算等效表材厚度 t_{ij}^{eq} 之特例，本研究將分別尋求不同的應對方式。其中，特例 1. 由於 A_{i6}^f 與 D_{i6}^f 皆為零，表示表材積層板無論伸張對剪切或彎曲對扭轉皆無耦合的現象，因此即便轉換為三明治結構也可很直觀的理解：

$$D_{i6}^s = D_{i6}^c \quad (5.18)$$

但特例 2. 與 3. 卻無法推導出相應的替代公式，筆者推測此乃由於積層板複雜的疊合結果，例如外側與內側薄層力學性質之差異，的確難以在所有的情況下，皆以一層薄層之勁度矩陣加以近似，而出現如虛根等無法解釋其物理意義之解。因此，本研究將以擬合的方式建立特例 2. 與 3. 之三明治勁度矩陣元素計算式。

以 15° 角度增量列舉出 8 層對稱疊層所有的疊層角度組合，並設定 $r=10$ 與 $r=15$ 兩種厚度比，共 41472 筆組合($= 12^4 \times 3$)，並皆以本研究之方法進行 D_{16}^f 之估算(於此改用 D_{26} 結果亦完全相同)。由圖 5-6 之 D_{16}^f 對 A_{16}^f 之散佈圖可知，除了原點表示特例 1. 之外；其餘位於橫軸線上之資料點皆為特例 2. 之情況，共有 1451 筆組合；而位於第二、四象限資料點則代表了特例 3. 之情況，包含 7677 筆組合，而不同情況所佔之比例繪製如圖 5-7。因此取出發生特例 2. 與特例 3. 之資料點，分別以 D_{16}^f 、 A_{16}^f 與 r 進行擬合。

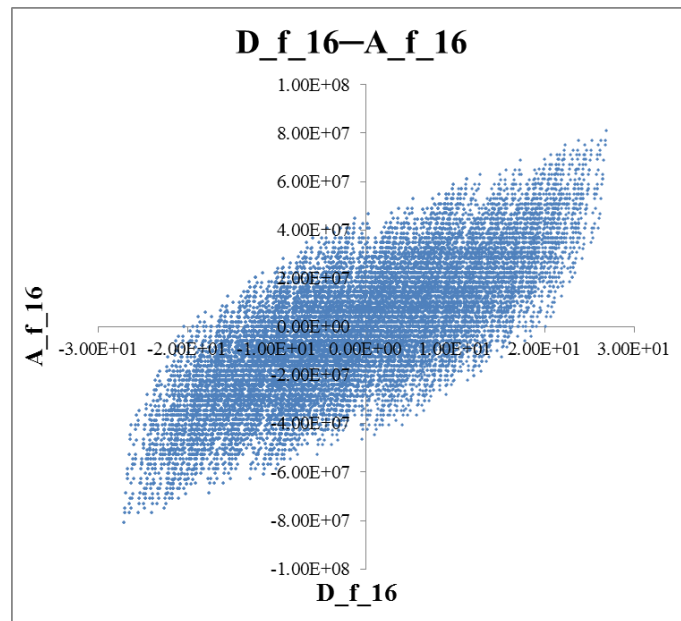


圖 5-6 D_{16}^f — A_{16}^f 散佈圖

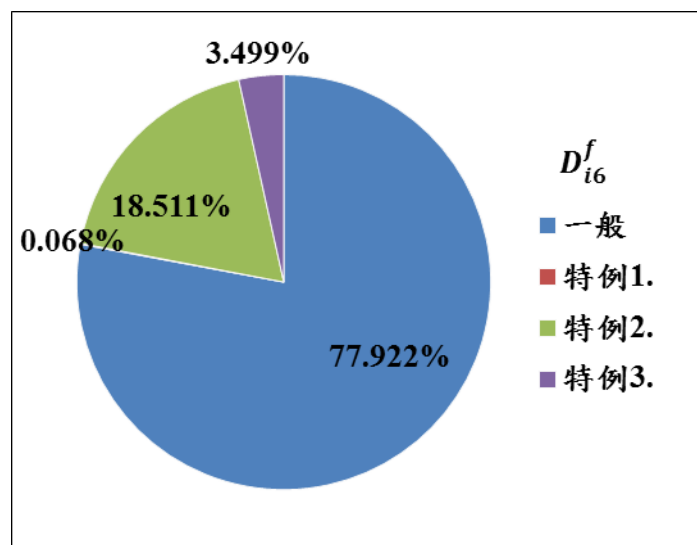


圖 5-7 D_{i6}^f 發生不同情況之比例

其中特例 2.的擬合結果相當接近於：

$$D_{i6}^s = D_{i6}^f + 3 \frac{D_{i6}^{f^2}}{A_{i6}^f} \quad (5.19)$$

因此將其進一步整理為：

$$D_{i6}^s = (1 + 3r_{eq}^2)D_{i6}^f \quad (5.20)$$

而比較式(5.23)與(5.16)可以發現，在暫不考慮芯材彎曲勁度矩陣的情況下，此擬合式其實即為忽略 r_{eq} 項之結果。顯示雖然 r_{eq} 為虛根，但對於標準式而言， r_{eq}^2 項基本上仍符合其趨勢。因此由式(5.8)可知，當心材厚度對等效表材厚度比 r_{eq} 越大時將有越準確地擬合結果。

特例 3.的擬合結果則為：

$$D_{i6}^s = 1.9408rD_{i6}^f + 0.2726D_{i6}^f \quad (5.21)$$

5.1.5 準確性驗證

總結上述結果，本研究建立如下之三明治勁度矩陣元素 D_{ij}^s 估算流程：

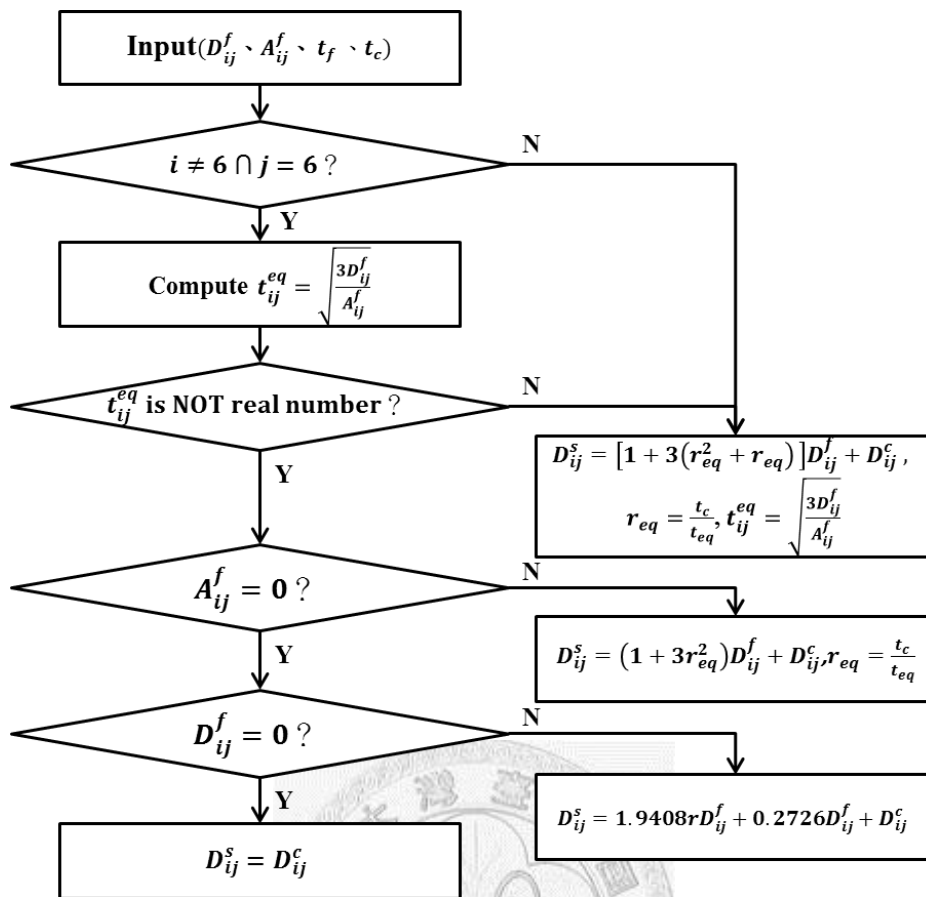


圖 5-8 三明治勁度矩陣元素 D_{ij}^s 估算流程圖

而本節將由圖 5-6 內的 41472 筆資料點，比較古典積層板理論與本研究估算結果之差異，以驗證其準確性。結果如圖 5-9 圖 5-10 所示，縱軸為古典積層板理論計算結果；橫軸為本研究之估算結果。

圖 5-9 顯示，本研究對於無特例之 D_{11}^s 、 D_{12}^s 、 D_{22}^s 與 D_{66}^s 以及一般情況下的 D_{i6}^s ，比較單一資料點而言，可達到 99% 以上的準確度，而整體之相關係數(correlation) 則高達 0.99996。此外，由圖 5-10 可知，雖然有特例發生之勁度矩陣元素需以擬合方式近似，但整體相關係數亦可達 0.99978。且本研究找出如圖上標示之誤差最大的一筆資料"exp.24189"，代入圖 4-18 之有限元素模型中，可發現古典積層板理論與本研究所求得之勁度矩陣對於目標函數值計算結果的誤差仍小於 0.3%。顯示本研究之估算方法具有極高的準確性，並適合導入於複合式最佳化流程中，而不會使演算過程中的搜尋方向有所偏差。

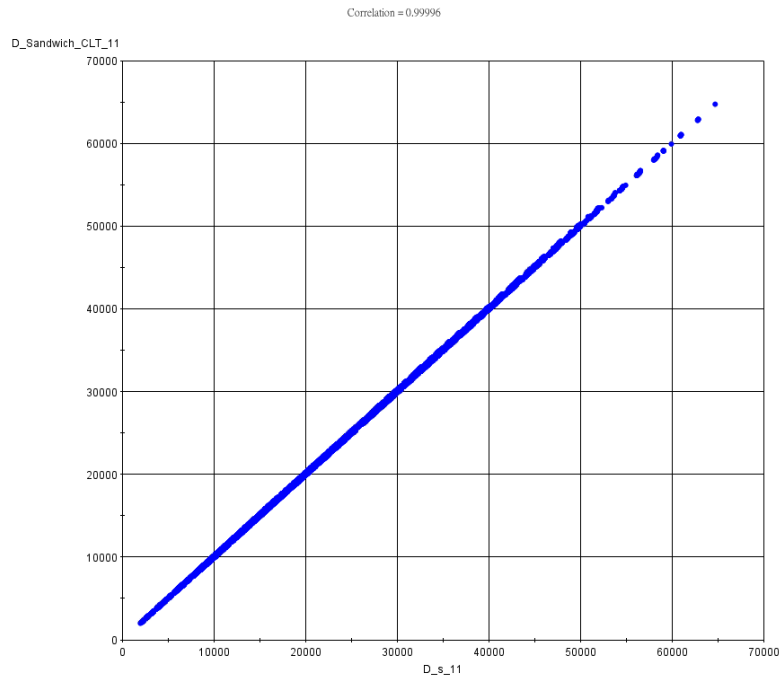


圖 5-9 本研究於無特例情況的 D_{ij}^S 估算結果與古典積層板理論之比較(以 D_{11}^S 為例)

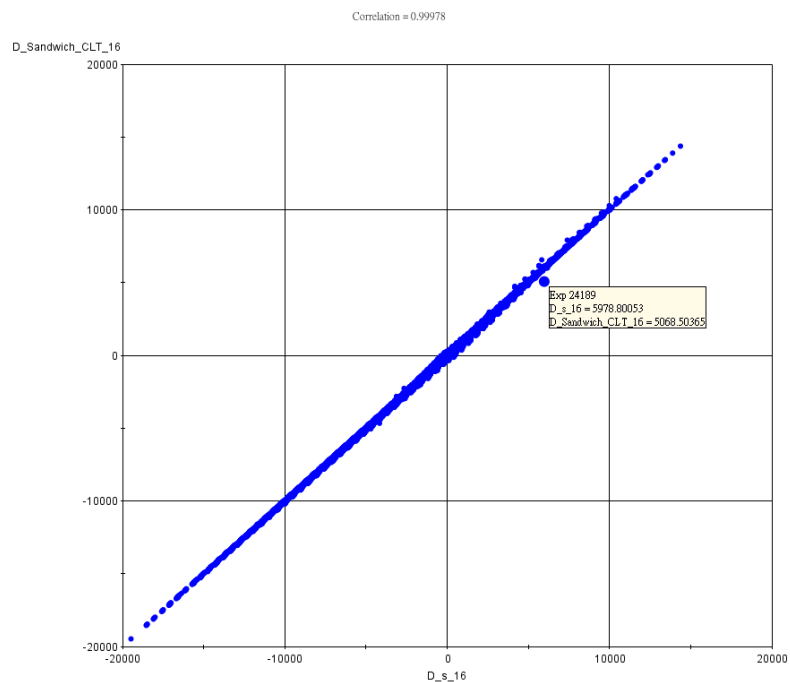


圖 5-10 本研究對 D_{i6}^S 估算結果與古典積層板理論之比較(以 D_{16}^S 為例)

5.2 三明治結構最佳化問題建立

於 2.2 中提到，傳統三明治結構的最佳化方法，因為難以求解同時將表材疊層數目與角度做為設計變數的變維度(variable-dimensional) 最佳化問題。所以，文

獻中以各種不同方式將問題簡化或分層，基本上可分為兩種方式：其一，表材為等向性材料，或先以擬等向性疊層做最佳化，決定表材層數與芯材厚度後，再針對表材各層表材角度進行最佳化；其二，已有既定的表材層數，因此得以在固定的變數數目下(如各層疊層角度與芯材厚度)進行最佳化。然而，以上方法雖然皆可求得一組最佳解，但往往因為受簡化或分層的影響，而局限了最佳化問題的搜尋範圍，使得該最佳解對於原始可變維度的最佳化問題而言，其實僅是局部最佳解。本研究透過上節所提出的三明治勁度矩陣估算法，可將 4.3 所提出的積層板複合式最佳化方法延伸應用至三明治結構，而得以求解上述之變維度最佳化問題。

本節的目的在於先進立一個標準的三明治結構最佳化問題，以利於在下一節中說明如何結合三明治勁度矩陣估算法與複合式最佳化方法進行求解。

5.2.1 設計變數

本研究之三明治結構最佳化問題的設計變數包含表材層數 n_f 、芯材厚度 t_c 與表材疊層角度 θ_i 。其中，由於表材仍視為積層板，所以參考 4.2.1，將變數集合設為「5°角度增量」。而芯材厚度 t_c ，雖然本研究所提出的最佳化方法可適用離散與連續變數，但考慮實務上芯材厚度的挑選通常已有固定的尺寸，因此，於此仍設定為離散變數。設計變數可表示如下：

$$n_f \in N$$

$$t_c = \{t_c | q \times t_{step}, q \in N\} \quad (5.22)$$

$$-90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ, \{\theta_i | p \times 5^\circ, p \in Z\}$$

其中 t_{step} 為芯材厚度的規格尺寸增量。

且由於積層板通常已有既定的單層薄層厚度，因此基本上可透過表材層數 n_f 直接求得表材厚度 t_f ：

$$t_f = n_f \times t_{ply} \quad (5.23)$$

其中 t_{ply} 為單層薄層厚度。

此外，如果欲將芯材材料也做為設計變數，可參考 2.2 進一步將剪切勁度設定為密度的函數，但因為對求解的困難度影響不大，本研究暫時先不列入考慮。

5.2.2 設計限制

以表材層數 n_f 、芯材厚度 t_c 之上下限與三明治結構總重量 m 做為設計限制，記為：

$$\begin{aligned} n_f^L &\leq n_f \leq n_f^H, \quad n_f \in N \\ t_c^L &\leq t_c \leq t_c^H, \quad \{t_c | q \times t_{step}, q \in N\} \\ m &\leq m^H \end{aligned} \quad (5.24)$$

其中 n_f^L 與 n_f^H 為表材層數之上下限； t_c^L 與 t_c^H 為芯材厚度之上下限； m^H 為重量上限。

此外，可由式(5.23)進一步求得表材厚度 t_f 的設計限制，表示如下：

$$t_f^L \leq t_f \leq t_f^H \quad (5.25)$$

其中 $t_f^L = n_f^L \times t_{ply}$, $t_f^H = n_f^H \times t_{ply}$ 。

5.2.3 目標函數

三明治結構的目標函數與積層板相似，實務應用上多以強度或剛性為主。其

破壞模式又較積層板更為複雜，需額外考慮芯材挫曲、剪切破壞等情況的發生。因此同 4.2.3 所述，此最佳化問題以最大化剛性為目標函數，亦即求取三明治結構的最小位移，記為：

$$\min U_{max}(n_f, \theta_i, t_c), i \in \{1, \dots, n\} \quad (5.26)$$

其中 n 為表材層數。

5.3 方法架構與流程

本節將具體說明如何將三明治勁度矩陣估算法導入 4.3 所提出的應用疊層參數之積層板複合式最佳化方法，求解變維度的三明治結構最佳化問題。同樣將上述最佳化問題分解為兩個子問題，並以兩個步驟求解：Step1—以梯度演算法進行連續變數最佳化；Step2—以演化式演算法進行離散變數擬合。以下將分別就這兩個步驟的執行過程作說明：



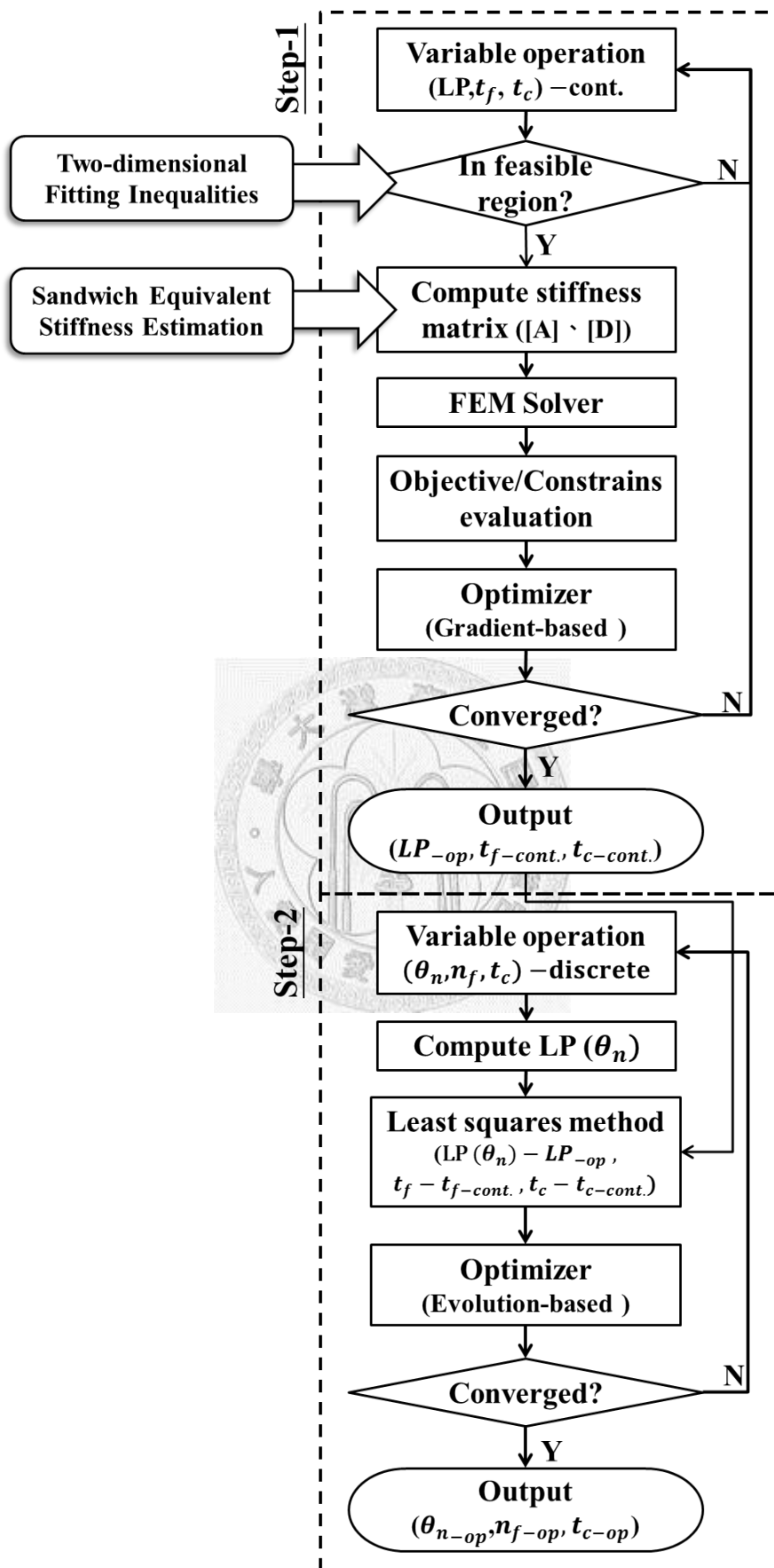


圖 5-11 三明治結構複合式最佳化流程圖

5.3.1 Step1：以梯度演算法進行連續變數最佳化

如圖 5-11 上半部所示，此步驟以疊層參數 LP、連續表材厚度 t_f 與芯材厚度 t_c 做為設計變數。由於同樣視為對稱疊層，因此做為設計變數的疊層參數 LP 亦為 V_{1A} 、 V_{2A} 、 V_{3A} 、 V_{4A} 、 V_{1D} 、 V_{2D} 、 V_{3D} 與 V_{4D} 。

此步驟同樣先給定一組設計變數起始值，此組起始值需滿足設計限制，亦即疊層參數 LP 需滿足 32 條可行區域限制條件，而連續表材厚度 t_f 與芯材厚度 t_c 皆位於上下限之間，且重量未超出上限。

然後先計算表材積層板與芯材的伸張勁度矩陣 $[A]_f$ 、 $[A]_c$ 與彎曲勁度矩陣 $[D]_f$ 、 $[D]_c$ ，再透過三明治等效勁度矩陣估算法以 $[A]_f$ 、 $[A]_c$ 、 $[D]_f$ 、 $[D]_c$ 、 t_f 與 t_c 求取三明治結構的伸張與彎曲勁度矩陣 $[A]_s$ 、 $[D]_s$ 。如此一來，此步驟的後續流程即可如同 4.3.1 的方式進行，最後輸出連續疊層參數 LP_{-op} 、表材厚度 $t_{f-cont.}$ 與芯材厚度 $t_{c-cont.}$ 的最佳解做為下一個步驟的目標函數。

5.3.2 Step2：以演化式演算法進行離散變數擬合

如圖 5-11 下半部所示，此步驟以離散的表材層數 n_f 、芯材厚度 t_c 、與表材疊層角度 θ^n 做為設計變數。其中表材疊層角度 θ^n 如 5.2.1 所述，以「5°角度增量」做為變數集合，而透過式(5.23)則可進一步由表材層數 n_f 計算表材厚度 t_f 。然後如同 4.3.2 的方式，先求取各表材疊層角度組合所對應的疊層參數組合 $LP(\theta_n)$ ，並以最小平方方法(least squares method)計算該組設計變數與上個步驟的最佳解之距離。以此「距離」作為目標函數，使用演化式演算法求取最小化距離的最佳解，其中包含最佳各層疊層角度 θ_{n-op} 、表材層數 n_{f-op} 與芯材厚度 t_{n-op} ，即是 5.2 最佳化問題的最佳解。

5.3.3 小結

傳統三明治結構最佳化方法直接將表材疊層角度列為設計變數，因此在表材

層數未定之前，完全無法對表材疊層角度做最佳化，因為尚不知此變數的數量究竟為何。

然而，可知改變疊層參數與改變疊層角度，對於複合材料的影響其實是相同的，即皆是造成勁度矩陣元素的變化，但是疊層參數卻不受限表材層數，有固定的變數數量(以對稱疊層而言為 V_{1A} 、 V_{2A} 、 V_{3A} 、 V_{4A} 、 V_{1D} 、 V_{2D} 、 V_{3D} 與 V_{4D})。換句話說，吾人可以藉由同時最佳化表材層數與疊層參數，達到等同於同時最佳化表材層數與疊層角度的效果。

因此，將本研究所提出之複合式最佳化方法，透過三明治勁度矩陣估算法，應用於三明治結構上，除了可以大幅減少最佳化過程中，使用有限元素求解器做計算的次數之外；且由於在 Step1，同時以疊層參數、表材層數與芯材厚度作為最佳化設計變數，因此，可求得較傳統最佳化方法更為精確的全域最佳解。

5.4 實例驗證與比較

5.4.1 分析方法準確性驗證

本節欲驗證以古典積層板理論為基礎，再加入一階剪變理論與勁度矩陣估算後之分析方法的準確性。因此同樣以 4.4.1 所述之三點彎曲實驗，比較三明治結構在不同表材疊層角度下，使用不同有限元素分析模型，比較其結果與實驗數據之「彎曲剛性」的差異。

5.4.1.a 實驗設計與驗證方法

本實驗試片尺寸規格統一如圖 5-12 所示，其中 l 為試片長度， b 為試片寬度， a 為三個接觸面之寬度， s 為固定塊之接觸面的中心距， t_f 為表材厚度， t_c 為芯材厚度，單位為 mm。而試片種類分為表材 $[0]_8$ 、 $[\pm 30]_4$ 與 $[\pm 60]_4$ 三種以 l 向為主軸方向之不同角度的 8 層斜交(angle-ply)疊層，但對於整個三明治結構，仍屬於對稱疊層。

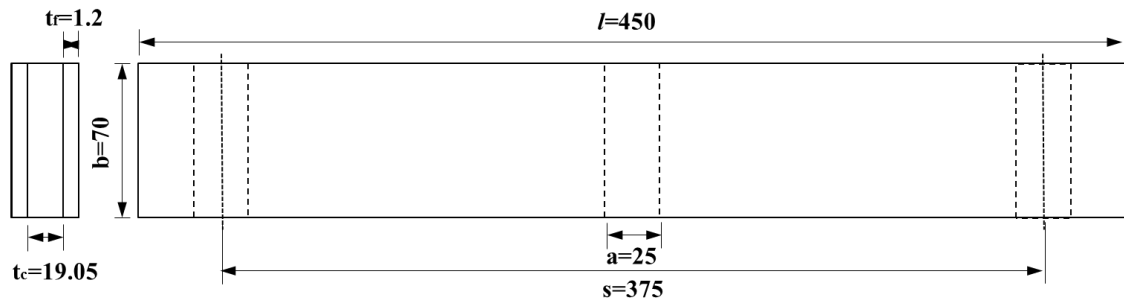


圖 5-12 三明治結構式片尺寸規格

本研究期望以實驗結果為參考基準，比較本研究所使用的方法——“以古典積層板理論先計算表材與芯材的 A 、 B 與 D 矩陣，透過勁度矩陣估算後，再與剪切係數一起代入有限元素法軟體”與直接使用一般有限元素軟體常用的實體元素(solid)或 ABAQUS 軟體中內建的複合材料殼元素(composite shell)之差異。

而無論以上三種分析模型或實驗，皆是擷取中央施力塊之負載(load)對位移(displacement)的資訊，然後以負載-位移曲線比較在線性區段內，同樣負載下的位移量誤差。

本實驗試片表材同樣使用台麗朗公司所提供之強化材為 TC35-12K 碳纖維、基材 $T_g=145^\circ\text{C}$ 高韌性環氧樹脂之單向碳纖維預浸布，其材料常數參考表 4.10；芯材使用型號 HRH-78-3.0 之蜂巢板，材料常數如下表 5.2 所示：

表 5.2 三明治結構芯材蜂巢板材料常數

| Core (HRH-78-3.0) | |
|-------------------|---------------------|
| $E_1 = E_2$ | 2.32MPa |
| E_3 | 130MPa |
| G_{12} | 0.109MPa |
| G_{13} | 37.1MPa |
| G_{23} | 21.7MPa |
| ρ_c | 48kg/m ³ |

5.4.1.b 有限元素分析模型

依圖 5-12 之尺寸分別建立試片之實體與薄殼模型，並根據 ASTM C 393 對試片的固定與加載方式設定邊界條件，如以實體模型為例說明如下：

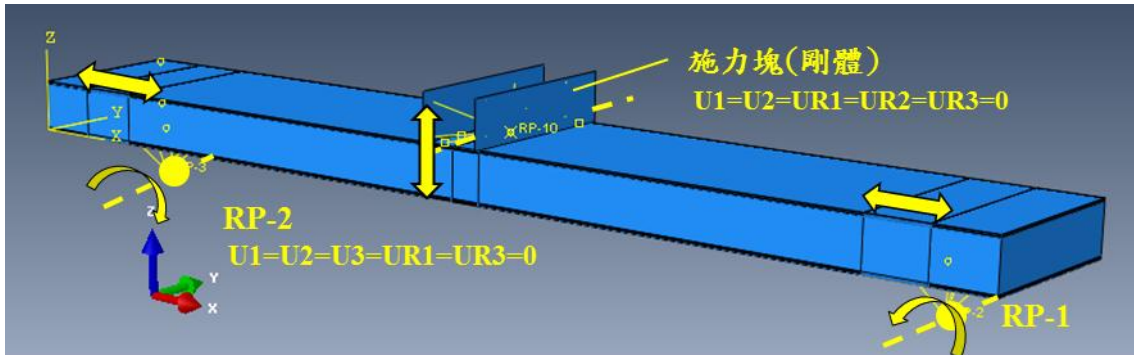


圖 5-13 三明治結構三點彎曲邊界條件示意圖

與 4.4.1.b 積層板三點彎曲分析相似，於模型中建立參考點(reference points)以代表轉軸，設定僅有繞 Y 軸的旋轉的自由度。並將三明治結構接觸面與轉軸自由度耦合，而僅放開 X 方向之自由度，模擬三明治結構在支撐塊上滑移的情況。然後依照尺寸建立視為剛體之施力塊，並設定其僅有 Z 方向之自由度，模擬實際加載的情形，並設定施力塊與積層板之間為發生接觸(contact)。

5.4.1.c 實驗架構

本實驗所使用之機台與試具亦同於 4.4.1.c 之積層板三點彎曲實驗。 $[0]_8$ 、 $[\pm 30]_4$ 與 $[\pm 60]_4$ 三種表材疊層角度之試片各有 3 片，因此共有 9 組實驗數據結果。

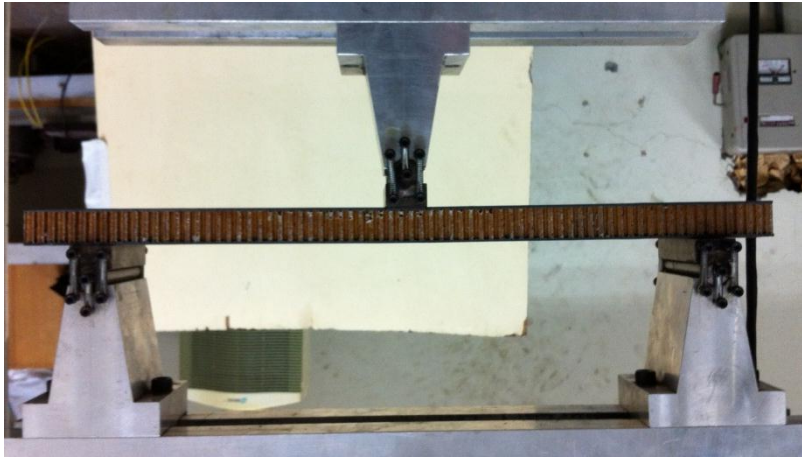


圖 5-14 三明治結構三點彎曲試驗過程

5.4.1.d 比較結果與討論

如同 4.4.1.d 定出 $[0]_8$ 、 $[\pm 30]_4$ 與 $[\pm 60]_4$ 之負載條件分別為 3.5kN、1.5kN 與 1.0kN，並以達到此負載大小時之位移量作為比較依據。

三種試片之實體(Solid)模型、複合材料殼元素模型(Shell)及古典積層板理論殼元素模型(CLT)分析結果分別整理如下表 5.3：

表 5.3 三明治結構不同分析模型之結果比較

| Face ply angle | Loading(kN) | Displacement(mm) | | |
|----------------|-------------|------------------|---------------|---------------|
| | | Solid | Shell | CLT |
| $[0]_8$ | 3.5 | 8.2876 | 7.9213(-4.4%) | 8.5149(+2.7%) |
| $[\pm 30]_4$ | 1.5 | 3.9609 | 3.7981(-4.1%) | 4.1059(+3.7%) |
| $[\pm 60]_4$ | 1.0 | 6.4512 | 6.2360(-3.3%) | 6.4419(-0.1%) |

並與實驗數據(Exp1-3)比對結果整理如下圖 5-15-圖 5-17

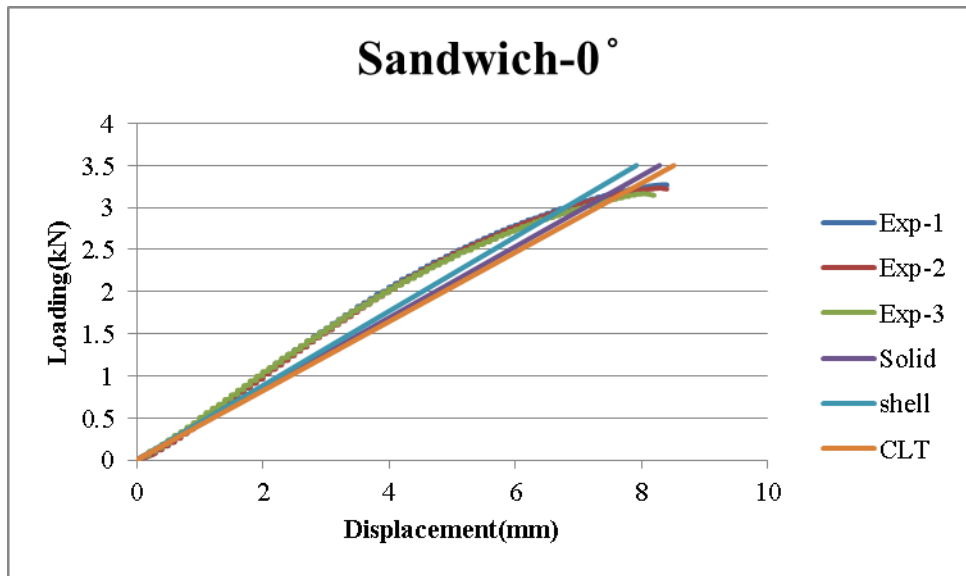


圖 5-15 $[0]_8$ 表材三明治結構分析與實驗結果比較

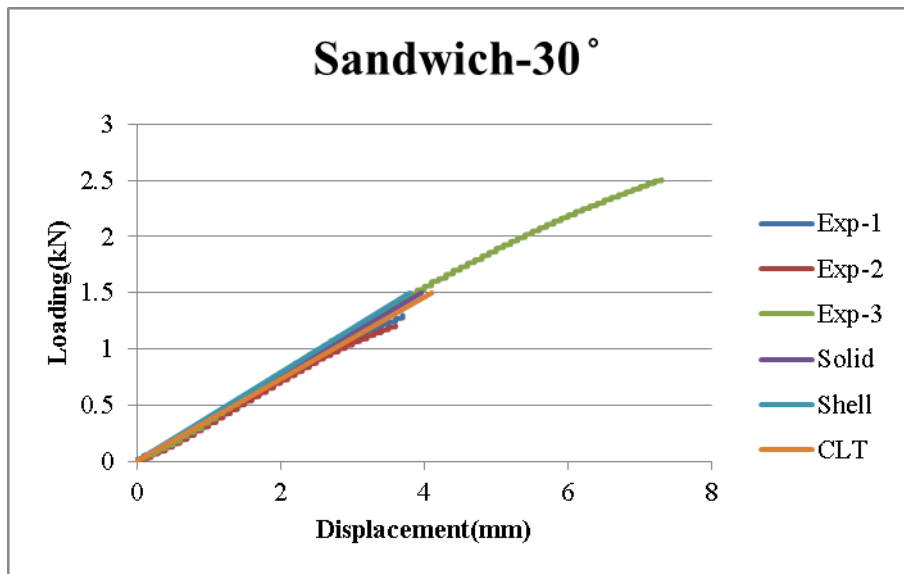


圖 5-16 $[\pm 30]_4$ 表材三明治結構分析與實驗結果比較

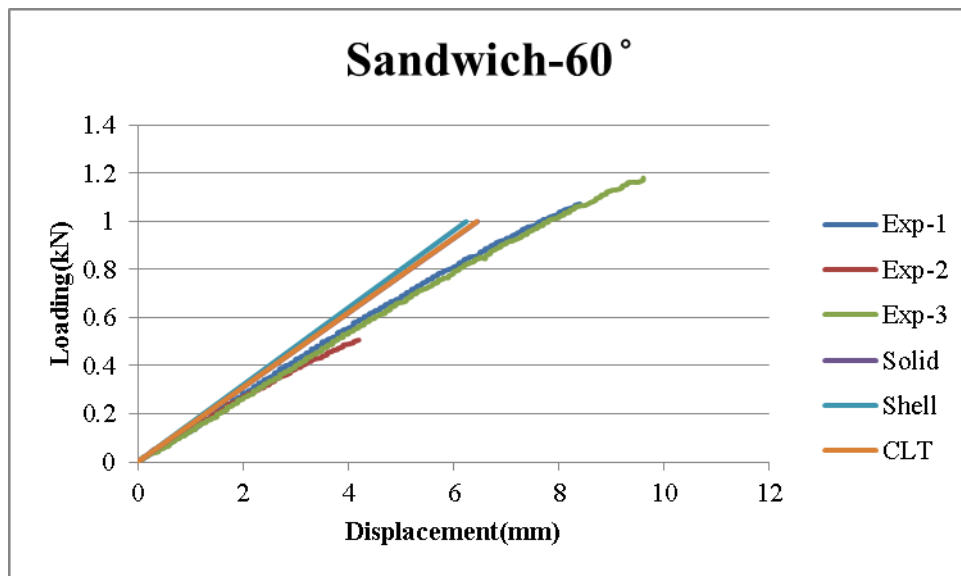


圖 5-17 $[\pm 60]_4$ 表材三明治結構分析與實驗結果比較

由表 5.3 可以發現，雖然以古典積層板理論計算後再進行勁度估算之分析結果，與一般常用的複合材料殼元素模型有較明顯的誤差，但如果以實體模型為基準，卻顯示擁有較複合材料殼元素模型更高的準確性。

而由圖 5-15-圖 5-17 進一步比對試驗結果可以發現， $[0]_8$ 表材疊層之試片雖然不如分析呈現如此線性的變化，但整體而言實驗結果仍符合分析之預期。推測其誤差原因在於分析中為了簡化模型，而採用一階剪切變形理論，有別於實際非線性變形的情况；此外，由於 $[0]_8$ 表材疊層之試片彎曲勁度顯然較另外兩者高，使得因芯材剪切變形所造成位移的比例亦為最高，可預測 $[0]_8$ 表材疊層之試片非線性變形的情况將最為明顯，亦與實驗結果相符合。因此 $[\pm 30]_4$ 表材疊層之試片的試驗與分析即具有高度吻合之結果。但是 $[\pm 60]_4$ 表材疊層之試片的試驗結果卻顯示分析結果似乎有高估剛性的現象，這有可能肇因於試片本身製作上的瑕疵，因為此 3 片試片最後皆並非發生如預期的芯材剪切破壞，而是表材與芯材間的脫膠，如圖 5-18 所示。雖然破壞模式基本上應該不影響線性段之剛性，但從提早發生脫膠現象的結果看來，可能該試片表材與芯材之間本來就有區域未完全膠合，而導致在負載的過程中產生間隙，造成位移量的累加而降低了該有的剛性。

然而，如果僅比對未有明顯製程缺陷之試片的試驗數據，仍證明分析結果可以達到預測剛性的目的。且本研究所採用的分析方法，與實體元素有相當接近之結果，表示已具有足夠的準確性。



圖 5-18 表材與芯材間發生脫膠破壞

5.4.2 效率與最佳化準確性驗證—平板剛性最佳化

本節將以一個三明治結構之平板在不同負載條件下的剛性最佳化問題，比較傳統方法，即直接以演化式演算法(同樣採用自適應性遺傳演算法)，先假設表材為擬等向疊層，對表材層數與芯材厚度作最佳化後，再最佳化表材疊層角度；以及本研究所提出之三明治結構複合式最佳化方法(最佳化程序以 OPTIMUS 軟體建立)於效率與準確性上的差異。以下分別對分析項目、設計變數、設計限制與目標函數作描述，並說明分析模型之設定，最後整理比較兩種最佳化方法之演算結果。

5.4.2.a 最佳化問題描述

參考圖 5-19，本研究將以此長寬皆為 150mm 之矩形，施以不同型式之負載條件，分別進行剛性最佳化設計。負載條件共有三種型式，即分別改變平板末端之力矩與合力之負載大小。如以單位負載 $M=0.2N\cdot m$ 、 $F=1000N$ 之倍數表示，可整理如下表：

表 5.4 三明治結構平板負載條件列表

| Case 1(k=5, n=1) | Case 2(k=1, n=1) | Case 3(k=1, n=5) |
|------------------|------------------|------------------|
|------------------|------------------|------------------|

| | | | |
|---------------|-------|--------|--------|
| Moment | 1N-m | 0.2N-m | 0.2N-m |
| Force | 1000N | 1000N | 5000N |

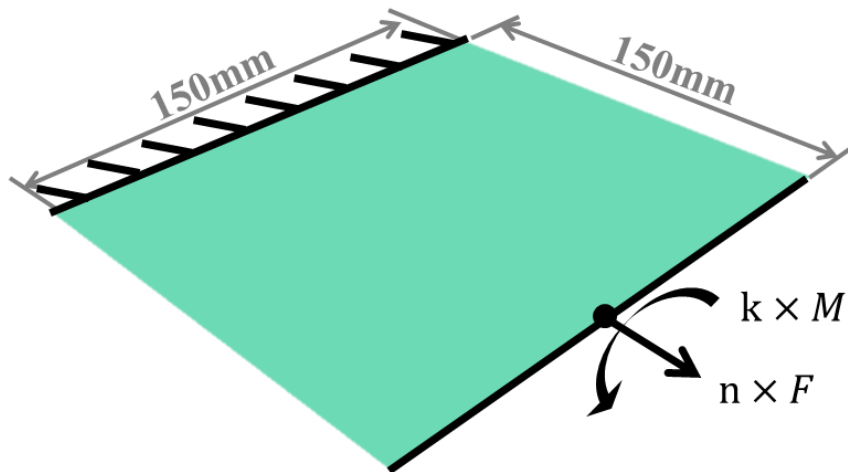


圖 5-19 三明治結構平板負載條件示意圖

參考 5.2，此最佳化問題之設計變數為表材層數 n_f 、芯材厚度 t_c 與表材疊層角度 θ_i ，可表示如下：



$$n_f \in N$$

$$t_c = \left\{ t_c \mid q \times \frac{1}{8} \text{", } q \in N \right\} \quad (5.27)$$

$$-90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ, \{ \theta_i \mid p \times 5^\circ, p \in Z \}$$

而設計限制設定如下：

$$1 \leq n_f \leq 16, n_f \in N$$

$$\frac{1}{4} \text{"} \leq t_c \leq 1 \text{"}, \left\{ t_c \mid q \times \frac{1}{8} \text{"}, q \in N \right\} \quad (5.28)$$

$$m \leq 100g$$

此外，表材選用 AS/3501 碳纖環氧樹脂單向纖維預浸布，單層薄層厚度 t_{ply} 為 0.125mm，因此表材厚度之設計限制可表示為：

$$0.125mm \leq t_f \leq 2mm \quad (5.29)$$

並以最小化平板自由端之最大位移量為目標函數，記為：

$$\min U_{max}(n_f, \theta_i, t_c), i \in \{1, \dots, n\} \quad (5.30)$$

5.4.2.b 有限元素分析模型設定

以 ABAQUS/CAE 建立上述三明治結構平板之有限元素模型如圖 5-20。邊界條件分為固定端與自由端，其中固定端設定 X、Y 與 Z 三個軸向及繞三個軸的旋轉方向位移量皆為零；並於自由端中心建立一個參考點(reference point)，與自由端的端線六個自由度作聯結(couple)。然後將負載設定於該參考點上，分別為 X 軸向的力矩($k \times M$)與力($n \times F$)。元素同樣使用已於 4.4.1 驗證其準確性的二次薄殼減積分元素 S8R。表材與芯材分別選用 AS/3501 碳纖環氧樹脂單向纖維預浸布與 HRH-10-30 蜂巢板，其材料常數如下表所示：

表 5.5 三明治結構表材與芯材之材料常數

| Face (AS/3501) | Core (HRH-10-30) |
|------------------------------|-----------------------------|
| $E_1 = 138\text{GPa}$ | $E_1 = E_2 = 2.5\text{MPa}$ |
| $E_2 = 9\text{GPa}$ | $E_3 = 140\text{MPa}$ |
| $G_{12} = 6.9\text{GPa}$ | $G_{12} = 0.109\text{MPa}$ |
| $\nu_{12} = 0.3$ | $G_{13} = 45.5\text{MPa}$ |
| $t_{ply} = 0.125\text{mm}$ | $G_{23} = 24.5\text{MPa}$ |
| $\rho_f = 1500\text{kg/m}^3$ | $\rho_c = 48\text{kg/m}^3$ |

此外，如果是疊層參數作為設計變數，則並非直接給與 ABAQUS/CAE 材

料常數，而是先以 OPTIMUS 計算出三明治結構勁度矩陣後，再輸出於 ABAQUS/CAE 之 General Shell Stiffness 中。

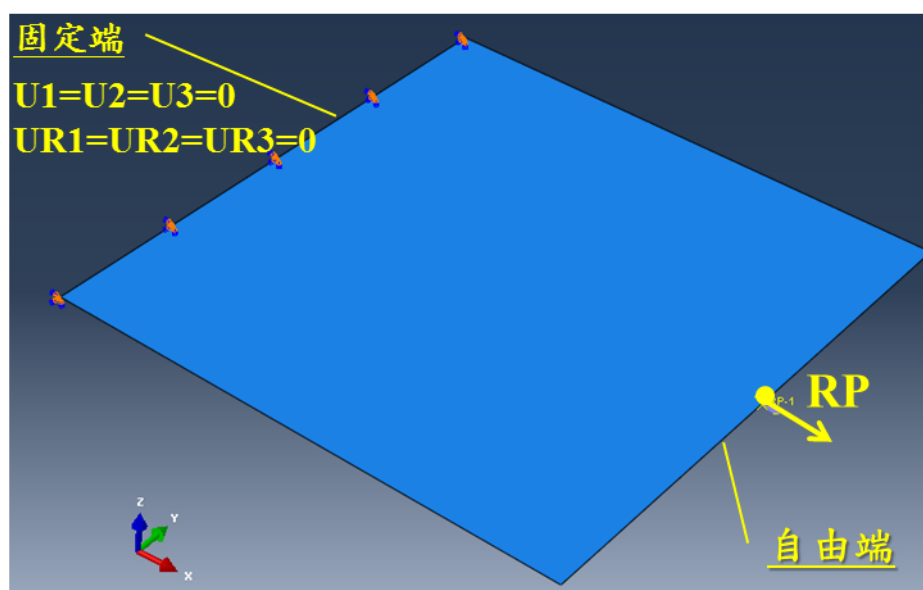


圖 5-20 三明治結構平板有限元素分析模型

5.4.2.c 結果與討論

三種不同負載條件之三明治結構平板剛性最佳化問題，分別以傳統演化式演算法與本研究所提出之三明治結構複合式最佳化方法(Present)求解，結果整理於下表 5.6：

表 5.6 三明治結構不同負載條件下之剛性最佳化結果比較

| Load conditions | Case 1 ($k=5, n=1$) | | Case 2 ($k=1, n=1$) | | Case 3 ($k=1, n=5$) | |
|--------------------------|---|--|--|--|---|---|
| Method | EAs | Present | EAs | Present | EAs | Present |
| m (g) | 94.93 | 94.93 | 98.09 | 99.94 | 99.67 | 98.09 |
| n_f | 8 | 8 | 10 | 9 | 11 | 10 |
| t_c (in) | 1'' | 1'' | 1/2'' | 7/8'' | 1/4'' | 1/2'' |
| $[\theta_n]_s$ | [-25,25,-30,25,25,-2 5,-25,25] _s | [-30,25,-30,25,30[-25,-25,25,25,25,-2 , -25,25,-25] _s | [-25,-25,25,25,25,-2 0,20,-20,10,-10] _s | [-80,50,-30,25,-3 0,25,-25,5,0] _s | [15,20,-15,-20,-1 5,-5,0,5,15,0,0] _s | [-10,10,10,5,-10,- 5,10,0,-10,0] _s |
| Objective function (nm) | 10.18 | 10.22 | 5.96 | 5.81 | 18.87 | 16.40 |
| Iterations ^{*1} | 1715 (=90+1625) | 350 | 3970 (=170+3800) | 404 | 5610 (=110+5500) | 543 |

*1 required number of FEM solution calls, which is the sum of calls in two steps

由表 5.6 可以發現，除了在負載條件 Case1 中，因為芯材厚度皆已達設計限制之上限，所以兩種最佳化方法具有相同的表材層數與芯材厚度最佳解之外；對於另外兩種負載條件 Case2 與 Case3，本研究皆求得與傳統方法相異之最佳解：趨向於使用更少層數的表材而增加芯材厚度。

並且在這兩個負載條件下，本研究所求得之目標函數值皆優於傳統方法，尤其於負載條件 Case3，本研究相較於傳統方法，可用較低的重量而達到更高的剛性。顯示先假設表材為等向性或擬等向疊層做最佳化設計，其實無法將三明治結構做最有效率的運用；而必須同時將表材疊層角度納入考慮。舉例而言，比較負載條件 Case3，傳統方法與本研究之疊層角度最佳解的差異，可以明顯看出，傳統方法最佳解之外側疊層角度較大，表示部份表材被設定於抵抗扭矩，所以需要較多的層數。然而，我們知道欲抵抗扭矩，其實增厚芯材絕對是比增加表材層數有效的，且表材應該被利用於抵抗伸張應力，即如本研究之最佳解所示。顯示本研究之三明治結構複合式最佳化方法擁有較傳統方法更高的最佳化準確性。

此外，比較傳統方法與本研究於最佳化過程中，以有限元素求解器計算目標函數的次數(其中傳統方法的計算次數為兩個階段的總和)。可以明顯得知，本研究所需的計算次數皆大幅低於傳統方法，尤其於負載條件 Case3 中，僅需傳統方法約 9.7% 的有限元素求解器計算次數。顯示本研究之三明治結構複合式最佳化方法亦擁有較傳統方法更高的最佳化求解效率。

5.5 總結

本章首先為了克服使用疊層參數，其結構必須以單一材料組成之限制，而提出三明治結構勁度矩陣估算法。以將三明治結構視為由積層板於中性軸置入芯材之概念，利用計算等效厚度將多層表材近似為單層表材，再代入本研究推導而得的單層表材三明治勁度矩陣元素計算標準式。使其可直接以表材與芯材的勁度矩陣，估算三明治結構的勁度矩陣。此外，由於此等效厚度計算公式在某些特例下

將不適用，因此本研究進一步用近似或擬合的方式求取。

然後，本研究先以三點彎曲實驗驗證使用古典積層板理論與一階剪切變形理論並結合有限元素之分析方法的準確性，分別與實體模型、薄殼模型與實驗做比較。其結果顯示分析結果可以達到預測剛性的目的，且本研究所採用的分析方法，與實體元素有相當接近之結果，表示已具有足夠的準確性。再以一個三明治結構平板剛性最佳化問題，驗證效率與準確性。其結果顯示，本研究可較使用演化式演算法求得更為正確之最佳解，且僅需後者大約 10% 的有限元素求解器計算次數。

所以下一章中，本研究將把此複材三明治結構複合式最佳化方法，實際應用於兩個複材結構的設計中，以進一步證明其效益與實用性。



第六章 應用實例

本章將透過一個複合材料三明治結構的設計案例「輕量化個人載具車體結構最佳化」，展示以本研究所提出之複合式最佳化方法相較於直接使用演化式演算法所達到之效率與準確性的提升。

6.1 輕量化個人載具車體結構最佳化設計

本載具全名為「智慧型個人輕量化電動載具」(Intelligent Personal Lightweight Electric Vehicle)，以下簡稱 iPLEV，為本實驗室於國科會「智慧型輕量化移動載具前瞻技術跨領域專案計畫」中之成果。如下圖 6-1 所示 iPLEV 為一輛適合未來都市交通發展趨勢之個人載具，具有輕量節能、綠能環保、節省停車空間(軸距可變)與方便進出等優勢，其基本規格如表 6.1 所示。

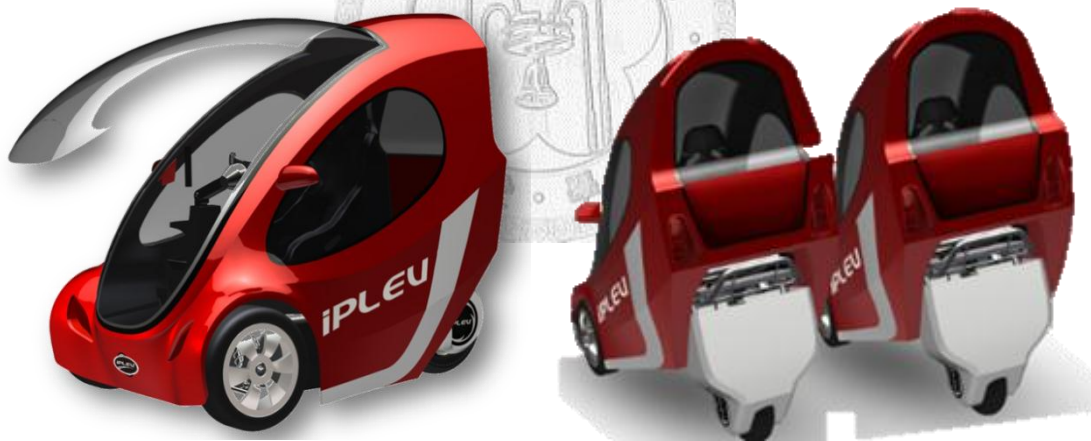


圖 6-1 智慧型個人輕量化電動載具

表 6.1 iPLEV 基本規格

| | | |
|------|-------------|-----------------|
| 乘載人數 | 1(+1)人 | |
| 續航力 | 50km | |
| 淨重 | 180kg | |
| 底盤規格 | 前二輪轉向、後一輪驅動 | |
| | 軸距 | 1800mm(1000mm*) |
| | 輪距 | 1200mm |

*變軸距後尺寸

iPLEV 主要可分為外殼與底盤兩大部分，其中重要元件皆位於底盤上，如下圖 6-2 所示。且因為外殼僅為裝飾件，基本上不提供有效的剛性，所以僅依靠底盤此非封閉式的結構，就必須滿足全車的剛性需求。此外，在全車淨重限制下，扣除車上重要元件所佔的重量，底盤結構僅分配到 20kg 的裕度。這樣的設計限制，如果僅以傳統的鋼管焊接方式設計車架，基本上是難以達成的。此外，因為 iPLEV 具有可變軸距的機構，因此底盤結構可分為前後兩個部分。後結構因為需要安裝較多的元件，且空間利用上較為零散而不利於使用近似封閉的結構，因此仍維持設定為鋼管焊接車架。

但是佔大部份體積的前主結構則有元件配置單純的特點(主要元件為鋰電池)，因此適合以複合材料做設計(不須額外安裝大量的套筒增加重量)。在扣除掉必要的金屬接點重量後，得到前主結構的設計限制為 12kg。並且由以往同樣為前二後一型式之台大機械太陽能車之設計經驗[64]可知，該型式之載具最難以提升卻讓駕駛者感受最明顯的項目即是「扭轉剛性」。因此，本研究欲以所提出之「複合材料複合式最佳化方法」，使用單向纖維預浸布為表材、蜂巢板為芯材構成之三明治結構，求取在 12kg 的設計限制下，前結構可達最大扭轉剛性之材料配置與疊層角度最佳解。

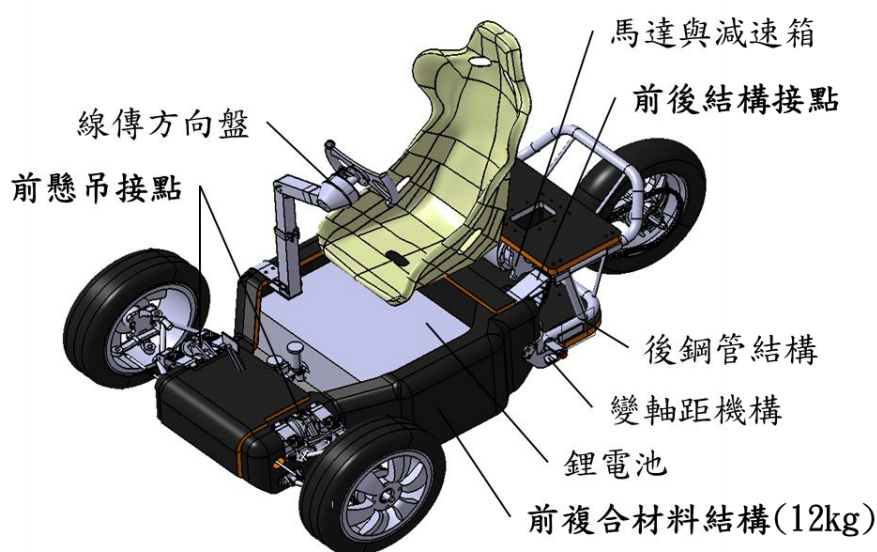


圖 6-2 iPLEV 底盤元件配置圖

6.1.1 設計方法與模型建立

iPLEV 的結構形狀為參考本實驗室林逸祥學長[89]之研究，進行演化式結構最佳化(Evolutionary structural optimization, ESO)所得。並根據林俊志學長[91]研究中以可製造性及受力型式對複合材料的分件方法，建立如下圖 6-3 之材料分區型式，共包含 Front、Bottom、Left、Right 與 Rear 五個材料設計區域，其中 Left 與 Right 之配置為對稱。

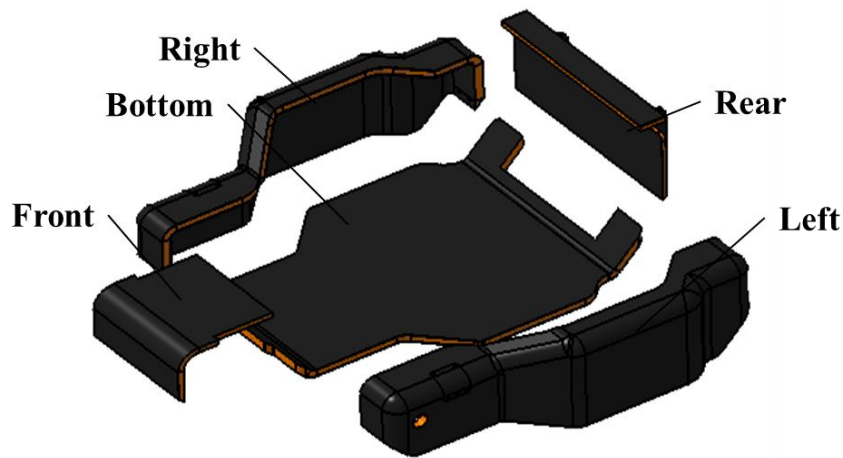


圖 6-3 iPLEV 前複合材料主結構材料分區設計示意圖

然後以 ABAQUS 建立簡化為殼元素之有限元素分析模型，並定義材料主軸方向如圖 6-4 所示，其中 1 方向代表 0° 方向、2 方向代表 $+90^\circ$ 方向。

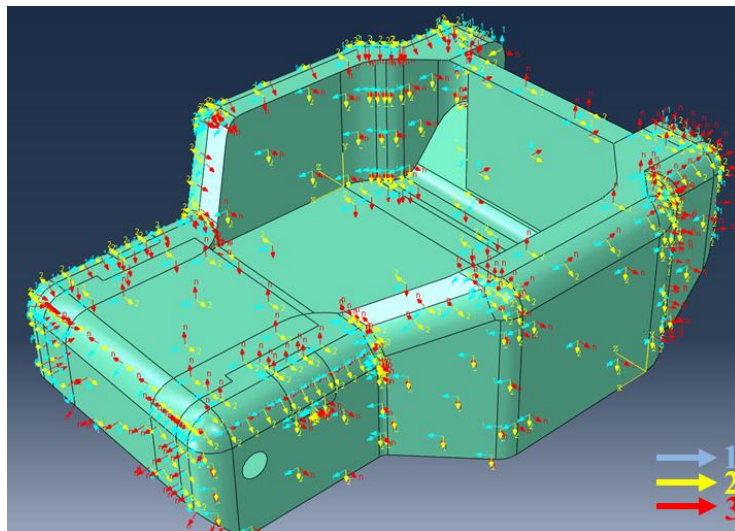


圖 6-4 主結構殼元素模型與材料方向定義

接著設定求取扭轉剛性的邊界條件，由於 iPLEV 的結構型式與台大機械太陽能車相似，因此參考張智凱[64]學長於研究中對於太陽能車扭轉之邊界條件的設定。但略微不同的是，目前的分析模型只包含了前結構的部分，且僅欲單純求取此結構體的扭轉剛性做為最佳化的比較依據。因此可簡化將後結構視為剛體，且不考慮機構件之變形，也就等同於完全固定前後結構之接點處(參考圖 6-2)的六個自由度。並於兩前懸吊接點中間建立一個參考點(reference point)，設定該參考點與兩懸吊接點之自由度完全耦合(couple)，因此通過該點之 X 軸向即為此結構體的扭轉中心軸。而造成此軸產生 1° 扭轉角所需施加的力矩即為車體的「扭轉剛性」，單位為 N-m/°。在此分析模型中設定參考點上 X 方向的力矩為 1000N-m。

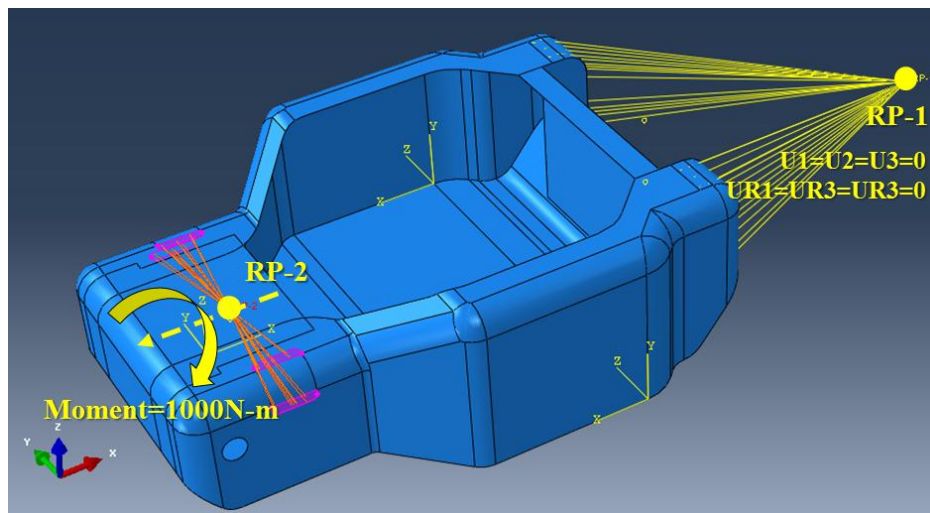


圖 6-5 主結構求取扭轉剛性之邊界條件

6.1.2 最佳化問題建立

所謂最大化扭轉剛性，即同等於在固定的力矩(1000N-m)下，求取最小的扭轉角。所以本研究以最小化參考點 UR1 方向之扭轉角為目標函數；各分區材料之表材疊層數目、角度與芯材厚度為設計變數；並給定設計變數集合與重量限制。最佳化問題表示如下：

$$\min UR1(r(n_f, \theta_i, t_c)), i \in \{1, \dots, n_r\} \quad (6.1)$$

$$2 \leq n_f \leq 16, n_f \in N$$

$$\frac{1}{4} \leq t_c \leq 1, \left\{ t_c \left| q \times \frac{1}{8}, q \in N \right. \right\} \quad (6.2)$$

$$m \leq 12\text{kg}$$

其中 $r()$ 表示不同材料分區之配置、 n_f 為表材層數、 θ_i 為疊層角度、 t_c 為芯材厚度。表材選用 AS/3501 碳纖環氧樹脂單向纖維預浸布，芯材選用 HRH-10-30 蜂巢板，材料常數如表 5.2 所示。

6.1.3 結果與討論

分別以傳統方法(以演化式演算法先求取最佳材料配置，再最佳化疊層角度)、與本研究所提出之複合式最佳化方法求取最佳解，並比較其最佳解、目標函數值、演算次數以及收斂曲線，其結果整理於表 6.2 與圖 6-6。

由表 6.2 可以發現，兩種方法於 Left、Right 與 Bottom 接收斂至相同的材料配置結果，其中 Left、Right 接達設計限制之上界，亦顯示這兩塊區域對於結構整體扭轉剛性的影響極大。但是對於 Front 之配置結果，本研究之方法顯示只要使用較少的材料，筆者推測此乃因為同時考量材料配置與疊層角度之結果，因此得以用適當的疊層角度減少不必要的材料。並將多餘的重量用至需要的地方，如 Rear 的芯材部分，因為該分件兩種方法皆顯示僅需要 2 層表材，所以可以透過疊層角度減少材料的程度有限。

由於本研究之方法較趨向於充分利用材料，因此雖然目標函數值收斂結果略高於傳統方法，但重量卻是較傳統方法為低的。此外，配合觀察圖 6-6 可以發現，其實本研究之方法於 Step1 的收斂結果是較傳統方法更為低的，是在 Step2 的擬合過程中產生些許的「失真」，無法完全表現 Step1 之最佳化結果。但筆者認為此亦是必然發生的情況，以 Rear 為例，因為只有 2 層表材，的確難以擬合與 Step1 相

近的結果，因此其代表與最佳解相近程度的 Distance 才會高達 1.029。表示如果表材厚度方向的變化可以更連續，換言之，使用厚度更薄的薄層(lamina)，讓同樣厚度的表材層數增加，那麼擬合效果必然會有所提升。

最後由圖 6-6 比較兩種方法於收斂過程中的差異。相當明顯的，本研究之方法具有較高的收斂效率，僅需約傳統方法 11% 的有限元素求解次數即達到收斂，且目標函數值仍小於傳統方法的收斂結果。而傳統方法雖然在材料配置階段亦表現出不錯的收斂效率，但因為在材料配置時並不考慮疊層角度，因此此配置的結果基本上可視為以落入局部最佳解，而且是就算使用演化式演算法也無法跳脫的(因為原本的設計變數以被轉換成設計參數)，所以在後段疊層角度的最佳化過程中，表現出極低的收斂效率，且始終無法有效找到全域最佳解。

藉由這個應用實例，可充分展現本研究之方法對於複合材料最佳化問題而言，相較於傳統方法，具有收斂效率高且可更精確地獲得全域最佳解之優勢。



表 6.2 傳統方法與本研究於 iPLEV 前結構扭轉剛性最佳化結果比較

| Method | | EA | Present |
|--------------------|----------------|--|--|
| Front | n_f | 14 | 12 |
| | t_c (in) | 5/8" | 1/2" |
| | $[\theta_n]_s$ | [50,40,-40,40,-40,60,40, -35,-40,35,-40,35,-50,-55] _s | [5,85,-50,50,-45,-45, 45,45,45,-45,45,-45] _s |
| | Distance | — | 0.1417 |
| Left Right | n_f | 16 | 16 |
| | t_c (in) | 1" | 1" |
| | $[\theta_n]_s$ | [-25,75,-5,-25,5,-35,15,50, 35,5,-55,-45,55,70,40,-50] _s | [-75,-75,-5,-5,55,55,45,45, -20,-20,-20,-20,-60,-60,40,40] _s |
| | Distance | — | 0.0031 |
| Bottom | n_f | 9 | 9 |
| | t_c (in) | 5/8" | 5/8" |
| | $[\theta_n]_s$ | [-35,30,30,-25,-50,40,-40,65,25] _s | [20,-10,-50,-20,55,45,-45,40,-50] _s |
| | Distance | — | 0.0129 |
| Rear | n_f | 2 | 2 |
| | t_c (in) | 1/4" | 1/2" |
| | $[\theta_n]_s$ | [20,-50] _s | [35,-15] _s |
| | Distance | — | 1.029 |
| m(kg) | | 11.97 | 11.92(-0.4%) |
| Objective function | | 7.34 | 7.38(+0.5%) |
| Iterations | | 8962 | 967(-89.2%) |

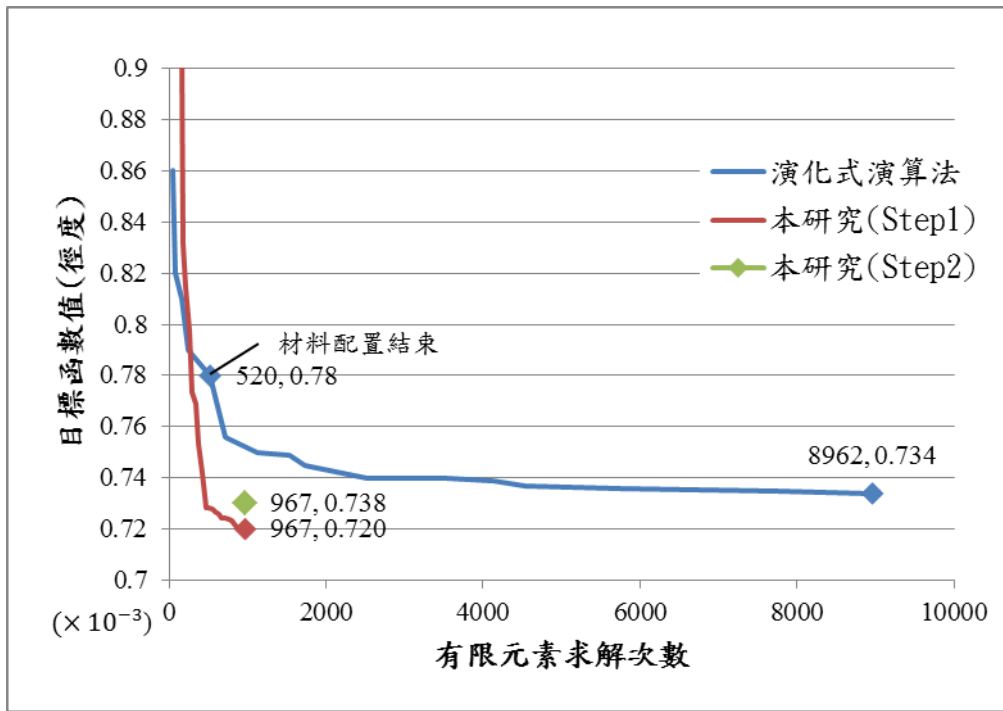


圖 6-6 傳統方法與本研究之收斂曲線比較

而最終完成的 iPLEV 與經過最佳化設計的複合材料底盤結構如圖 6-7 所示：



圖 6-7 iPLEV 全車(左上)與複合材料底盤結構

第七章 總結及討論

7.1 成果總結

本研究應用疊層參數提出一套嶄新的複合材料複合式最佳化方法。將複合材料最佳化問題分為兩個步驟的子問題：第一步驟以疊層參數為設計變數，透過有限元素法計算目標函數與限制條件，使用梯度演算法求取最佳疊層參數；第二步驟以疊層角度為設計變數，使用演化式演算法逼近該組最佳疊層參數。

於本文中驗證對於不同複合材料之結構形式(積層板、三明治結構)、幾何形狀(簡單平板、圓管與複雜車體結構)、尺寸規格與負載條件，相較於傳統方法將可減少 80% 以上的有限元素法計算次數，進而提升超過 4 倍的收斂速度(以 CPU time 為比較基準)，且達到極為相近的目標函數值。對於如三明治結構或經過分件的複雜結構體所面臨的變維度最佳化問題，甚至可能找到優於傳統方法之全域最佳解。

對於疊層參數之可行區域，目前僅有單純伸張或彎曲域的解析式。為了極近似出耦合域的可行區域，以往的研究將可能產生上萬、甚至上百萬條的高維線性限制條件，導致實際應用上的困難。本研究僅以所建立的 26 條二維擬合限制條件搭配 6 條現有之解析式，對於對稱疊層所需考慮的 8 維疊層參數域，經驗證已可排除 99.95% 之體積，有效率的大幅減少於第一步驟求得不可行解之機率。

原本疊層參數因為受限於需為同一種材料，且使用疊層參數將不具有對比勁度矩陣 \bar{Q}_{ij} 資訊，因此無法應用於三明治結構。本研究提出一套三明治結構勁度矩陣估算法：以表材與芯材的勁度矩陣，直接估算三明治結構的勁度矩陣。並驗證於一般情況下準確率可達到 99% 以上，在特例中誤差最大之情況亦對目標函數之差異小於 0.3%，不影響最佳化搜尋方向之計算。所以表材即仍可以疊層參數作為設計變數，使用本研究之複合式最佳化方法求解，進一步達到同步最佳化表材、芯材厚度與表材疊層角度之目標。

本研究成果—「複合材料複合式最佳化方法」，達成利用複合材料力學特性做為最佳化基礎，進而提高求解效率與通用性之目的，且演算時間幾乎不受疊層角度該設計變數之多寡之影響。適合導入於一般傳統複合材料設計流程中，除了可減少工程師以試誤方式進行設計所耗費的人力成本；且避免對於較複雜的結構體，僅憑工程師的經驗判斷可能有所失準的情況之外；最重要的是可望縮短產品設計開發時程，以因應未來複合材料之發展趨勢。

7.2 未來方向

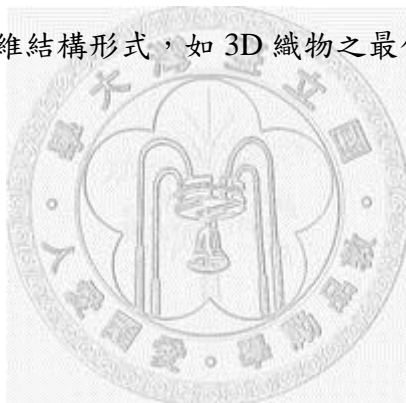
由於本研究之目標為建立通用型的複合材料最佳化方法，因此先選擇對於結構體而言，在全域設計階段最常優先考慮的「剛性」做為單一目標函數，以避免過多的變因，影響驗證與比較的可信度。因此，未來的研究將可以此最佳化方法為基礎，延伸應用於不同之目標函數，而目前對於疊層參數的相關研究內容包括振動[92]、挫曲[93]、強度[86, 94]、局部強化[95]與變勁度設計[86]等。此外，甚至可能整合以上相關研究結果，而發展出一套更全面、可多目標並以疊層參數為基礎之複合材料複合式最佳化方法。

於本研究之複合式最佳化方法的 Step2 中，目前是以最小差方法擬合最佳疊層參數組合，此乃將各個疊層參數對角度搜尋的影響力皆視為相同之算法。然而由 4.4.4.c 的圓管積層板最佳化問題可知，並非所有問題皆會對 8 個疊層參數產生梯度，而此時梯度大者，顯然對疊層角度的搜尋應該要有較大的影響力，甚至應該排除無梯度者於設計變數之外，而目前這個動作乃需由人工判斷。雖然忽略此效應基本上仍可求得一個近似最佳解之值，但是如果可以在進入 Step2 之前，建立一個演算機制先對 Step1 之疊層參數變化量進行判讀，以自行修正 Step2 中各個疊層參數之擬合比重，預期將會對最佳化的準確性有所提升，再進一步提高此方法之通用性。

對於疊層參數的可行區域，本研究以 26 條二維擬合不等式限制條件配合 6

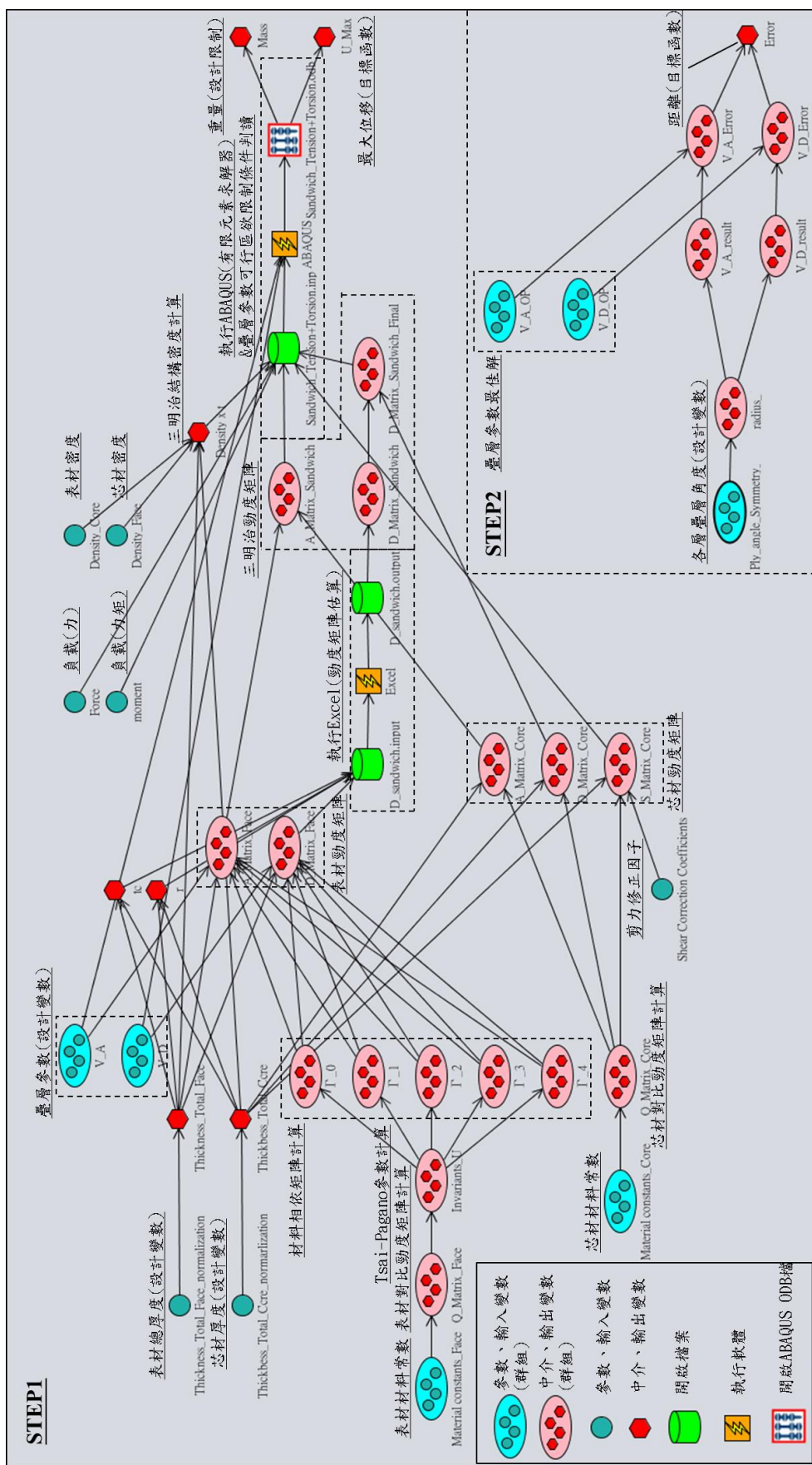
條解析式加以近似，雖然對於排除不可行區域已具有極高的效率，但是如果可以進一步推導求得新的耦合式解析式，將在學術上有更高的價值，也是目前多數學者亟欲達成之目標。而同樣以擬合方式近似的仍有勁度矩陣估算法之特例 2.與 3.，對於目前仍無法解釋其物理意義之虛根、無意義之值，仍可待未來的研究加以突破。

由於本研究所有最佳化問題其積層板乃設定為對稱疊層， $B_{ij} = 0$ ，因此無須考慮伸張與彎曲耦合之疊層參數 V_{iB} 。但對於特殊限制條件或目標之最佳化問題， B_{ij} 將可能成為重要設計參數[48]，此時即須以古典積層板理論推導而來的完整 12 個疊層參數 V_{iA} 、 V_{iB} 與 V_{iD} 作為設計變數。此外，疊層參數其實可進一步擴展至三維型式，達到 28 個之數。而未來可能將其同樣導入複合式最佳化方法中，使其用途進一步推廣至更複雜的三維結構形式，如 3D 織物之最佳化設計。



• OPTIMUS 介面下之最佳化流程介紹

以 5.4.2 中，三明治結構平板剛性最佳化問題為範例，說明於 OPTIMUS 中如何建立與實現本研究提出之複合式最佳化流程，詳見下圖：



參考文獻

- [1] <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/7895-vert2-con-vertices-to-constraints>.
- [2] H. Ghiasi, D. Pasini, and L. Lessard, "Optimum stacking sequence design of composite materials Part I: Constant stiffness design," *Composite Structures*, vol. 90, pp. 1-11, 2009.
- [3] T. P. Kicher and T. L. Chao, "Minimum weight design of stiffened fibre composite cylinders," *J Aircraft*, vol. 8, pp. 562-568, 1971.
- [4] C. Kim and D. Y. Lee, "Design optimization of a curved actuator with piezoelectric fibers," *International Journal of Modern Physics B*, vol. 17, pp. 1971-1975, 2003.
- [5] D. A. Saravanos and C. C. Chamis, "An integrated methodology for optimizing the passive damping of composite structures," *Polymer Composites*, vol. 11, pp. 328-336, 1990.
- [6] S. K. Ha, D. J. Kim, and T. H. Sung, "Optimum design of multi-ring composite flywheel rotor using a modified generalized plane strain assumption," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 43, pp. 993-1007, 2001.
- [7] M. D. Thompson, C. D. Eamon, and M. Rais-Rohani, "Reliability-based optimization of fiber-reinforced polymer composite bridge deck panels," *Journal of Structural Engineering*, vol. 132, pp. 1898-1906, 2006.
- [8] L. A. Schmit and B. Farshi, "Optimum laminate design for strength and stiffness," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 7, pp. 519-536, 1973.
- [9] M. Bruyneel and C. Fleury, "Composite structures optimization using sequential convex programming," *Advances in Engineering Software*, vol. 33, pp. 697-711, 2002.
- [10] L. A. Schmit and C. Fleury, "Structural synthesis by combining approximation concepts and dual methods," *AIAA Journal*, vol. 18, pp. 1252-1260, 1980.
- [11] J. Wang and B. L. Karihaloo, "Cracked composite laminates least

- prone to delamination," *Proce Math Phys Sci*, vol. 444, pp. 17-35, 1994.
- [12] B. Liu, "Two-level optimization of composite wing structures based on panel genetic optimization," PhD thesis, Aerospace Engineering, Mechanics, and Engineering Science, University of Florida, 2001.
- [13] M. E. Waddoups, "Structural airframe application of advanced composite materials-analytical methods," Air Force Materials Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1969.
- [14] R. M. Verette, "Stiffness, strength and stability optimization of laminated composites," Northrop Aircraft Co, Hawthorne, California, 1970.
- [15] W. J. Park, "An Optimal Design of Simple Symmetric Laminates Under the First Ply Failure Criterion," *Journal of Composite Materials*, vol. 16, pp. 341-352, 1982.
- [16] P. M. Weaver, "Designing composite structures: lay-up selection," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, vol. 216, pp. 105-116, 2002.
- [17] L. R. Tsau, Y. H. Chang, and F. L. Tsao, "The design of optimal stacking sequence for laminated FRP plates with inplane loading," *Computers & Structures*, vol. 55, pp. 565-580, 1995.
- [18] L. R. Tsau and C. H. Liu, "A comparison between two optimization methods on the stacking sequence of fiber-reinforced composite laminate," *Computers & Structures*, vol. 55, pp. 515-525, 1995.
- [19] L. Han and M. Neumann, "Effect of dimensionality on the Nelder–Mead simplex method," *Optimization Methods and Software*, vol. 21, pp. 1-16, 2006.
- [20] R. Foye, "Advanced design concepts for advanced composite air frames," Air Force Materials Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1968.
- [21] D. L. Graesser, Z. B. Zabinsky, M. E. Tuttle, and G. I. Kim, "Designing laminated composites using random search techniques," *Composite Structures*, vol. 18, pp. 311-325, 1991.

- [22] V. Savic, M. E. Tuttle, and Z. B. Zabinsky, "Optimization of composite I-sections using fiber angles as design variables," *Composite Structures*, vol. 53, pp. 265-277, 2001.
- [23] M. Lombardi, R. T. Haftka, and C. Cinquini, "Optimization of composite plates for buckling using simulated annealing," presented at the Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 33rd structures, structural dynamics and materials conference, Dallas, Texas, 1992.
- [24] M. S. Philip, O. L. David, and R. B. Nigel, "Design of laminate composite layups using genetic algorithms," *Engineering with Computers*, vol. 11, pp. 59-69, 1995.
- [25] D. Sadagopan and R. Pitchumani, "Application of genetic algorithms to optimal tailoring of composite materials.pdf>," *Composites Science and Technology*, vol. 58, pp. 571-589, 1998.
- [26] M. D. Sciuva, M. Gherlone, and D. Lomario, "Multiconstrained optimization of laminated and sandwich plates using evolutionary algorithms and higher-order plate theories," *Composite Structures*, vol. 59, pp. 149-154, 2003.
- [27] A. R. M. Rao and P. P. Shyju, "Development of a hybrid meta-heuristic algorithm for combinatorial optimisation and its application for optimal design of laminated composite cylindrical skirt," *Computers & Structures*, vol. 86, pp. 796-815, 2008.
- [28] J. H. Holland, "Adaptation in natural and artificial systems," *Computer and Information Science*, vol. Ann Arbor, 1975.
- [29] S. Venkataraman and R. T. Haftka, "Optimization of composite panels – a review," presented at the Proceedings of the 14th annual technical conference of the American society of composites, Dayton, OH., 1999.
- [30] K. J. Callahan and G. E. Weeks, "Optimum design of composite laminates using genetic algorithms," *Composites Engineering*, vol. 2, pp. 149-160, 1992.
- [31] S. Nagendra, R. T. Haftka, and Z. Gürdal, "Stacking sequence optimization of simply supported laminates with stability and strain constraints," *AIAA Journal*, vol. 30, pp. 2132-2137, 1992.

- [32] R. R. Le and R. T. Haftka, "Optimization of laminate stacking sequence for buckling load maximization by generic algorithm," *AIAA Journal*, vol. 31, pp. 951-969, 1993.
- [33] J. H. Park, J. H. Hwang, C. S. Lee, and W. Hwang, "Stacking sequence design of composite laminates for maximum strength using genetic algorithms," *Composite Structures*, vol. 52, pp. 217-231, 2001.
- [34] N. Kogiso, L. T. Watson, Z. Gürdal, and R. T. Haftka, "Genetic algorithms with local improvement for composite laminate design," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 7, 1994.
- [35] Z. Gurdal, R. T. Haftka, and S. Nagendra, "Genetic algorithm for the design of laminated composite panels," *SAMPE J*, vol. 30, pp. 207-218, 1994.
- [36] A. Todoroki and R. T. Haftka, "Stacking sequence matching by a two stage genetic algorithm with consanguineous initial population," presented at the Proceedings of the 38th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC structures, structural dynamics and materials conference part 2, 1997.
- [37] E. Potgeiter and N. Stander, "The genetic algorithm applied to stiffness maximization of laminated plates: review and comparison," *Struct Optim*, vol. 15, pp. 221-229, 1998.
- [38] M. K. Apalak, M. Yildirim, and R. Ekici, "Layer optimisation for maximum undamental frequency of laminated composite plates for different edge onditions," *Compos Sci Technol*, vol. 68, pp. 537-550, 2008.
- [39] M. Walker and R. Smith, "A technique for the multiobjective optimization of laminated composite structures using genetic algorithms and finite element analysis," *Composite Structures*, vol. 62, pp. 123-128, 2003.
- [40] A. Todoroki, K. Watanabe, and H. Kobayashi, "Application of genetic algorithms to stiffness optimization of laminated composite plates with stress-concentrated open holes," *JSME Int J A: Mech Mater Eng*, vol. 38, pp. 458-464, 1995.
- [41] C. C. Lin and Y. J. Lee, "Stacking sequence optimization of

- laminated composite structures using genetic algorithm with local improvement," *Composite Structures*, vol. 63, pp. 339-345, 2004.
- [42] M. Abouhamze and M. Shakeri, "Multi-objective stacking sequence optimization of laminated cylindrical panels using a genetic algorithm and neural networks," *Composite Structures*, vol. 81, pp. 253-263, 2007.
- [43] R. Sørensen, "Optimisation of Composite Structures Using Lamination Parameters in a Finite Element Application," Master, Department of Mechanical & Manufacturing Engineering, Aalborg University, 2011.
- [44] M. Jureczko, M. Pawlak, and A. Mężyk, "Optimisation of wind turbine blades," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 167, pp. 463-471, 2005.
- [45] P. Kere and J. Lento, "Design optimization of laminated composite structures using distributed grid resources," *Compos Struct*, vol. 71, pp. 435-438, 2005.
- [46] W. F. Punch, R. C. Averill, E. D. Goodman, S. C. Lin, Y. Ding, and Y. C. Yip, "Optimal design of laminated composite structures using coarse-grain parallel genetic algorithms," *Comput Syst Eng*, vol. 5, pp. 415-423, 1994.
- [47] B. Liu, R. T. Haftka, and M. Akgun, "Composite wing structural optimization using genetic algorithms and response surfaces," *AIAA Journal*, vol. 98, p. 4854, 1998.
- [48] 洪主頌, "高歪斜、高偏斜 FRP 船用螺槳疊層最佳化探討," 碩士論文, 工程科學及海洋工程學研究所, 國立台灣大學, 2004.
- [49] 張益偉, "複合材材料積層板之兩段式最佳化設計," 碩士論文, 機械工程研究所, 國立台灣科技大學, 2007.
- [50] P. Kere and J. Koski, "Multicriterion optimization of composite laminates for maximum failure margins with an interactive descent algorithm," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 23,

pp. 436-447, 2002.

- [51] P. Kere, M. Lyly, and J. Koski, "Using multicriterion optimization for strength design of composite laminates," *Composite Structures*, vol. 62, pp. 329-333, 2003.
- [52] A. Todoroki, N. Sasada, and M. Miki, "Object-Oriented Approach to Optimize Composite Laminated Plate Stiffness with Discrete Ply Angles," *Journal of Composite Materials*, vol. 30, pp. 1020-1041, 1996.
- [53] Y. Narita, "Layerwise optimization for the maximum fundamental frequency of laminated composite plates," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 263, pp. 1005-1016, 2003.
- [54] Y. Narita and J. M. Hodgkinson, "Layerwise optimisation for maximising the fundamental frequencies of point-supported rectangular laminated composite plates," *Composite Structures*, vol. 69, pp. 127-135, 2005.
- [55] C. A. C. António, A. T. Marques, and A. V. Soeiro, "Optimization of laminated composite structures using a bilevel strategy," *Composite Structures*, vol. 33, pp. 193-200, 1995.
- [56] T. U. Kim and H. C. Sin, "Optimal design of composite laminated plates with the discreteness in ply angles and uncertainty in material properties considered," *Computers & Structures*, vol. 79, pp. 2501-2509, 2001.
- [57] B. Farshi and S. Herasati, "Optimum weight design of fiber composite plates in flexure based on a two level strategy," *Composite Structures*, vol. 73, pp. 495-504, 2006.
- [58] A. Chattopadhyay, C. E. Seeley, and R. Jha, "Aeroelastic tailoring using piezoelectric actuation and hybrid optimization," *Smart Materials and Structures*, vol. 8, pp. 21-32, 1999.
- [59] E. W. Kuenzi, "Minimum weight structural sandwich," Forest Product Laboratory, U.S. Department of Agriculture 1965.
- [60] J. C. M. Theulen and A. A. J. M. Peijs, "Tech. Note: Optimization of the Bending Stiffness and Strength of Composite Sandwich Panels," *Composite Structures*, vol. 17, pp. 87-92, 1991.

- [61] L. J. Gibson, "Optimization of stiffness in sandwich beams with rigid foam cores," *Materials Science and Engineering*, vol. 67, pp. 125-135, 1984.
- [62] L. A. Demsetz and L. J. Gibson, "Minimum Weight Design for Stiffness in Sandwich Plates with Rigid Foam Cores," *Materials Science and Engineering*, vol. 85, pp. 33-42, 1987.
- [63] D. Zenkert, *The Handbook of Sandwich Construction*. Cradley Heath, UK: EMAS, 1997.
- [64] 張智凱, "系統化複材三明治車體結構設計及最佳化方法," 博士論文, 機械工程學系研究所, 國立臺灣大學, 2007.
- [65] M. F. Ashby, A. G. Evans, N. A. Fleck, L. J. Gibson, J. W. Hutchinson, and H. N. G. Wadley, *Metal Foams: A Design Guide*. Woburn, MA, USA: Butterworth-Heinemann, 2000.
- [66] T. C. Triantafillou and L. J. Gibson, "Minimum Weight Design of Foam Cores Sandwich Panels for a Given Strength," *Materials Science and Engineering*, vol. 95, pp. 55-62, 1987.
- [67] U. Ringertz, B. Esping, and J. Bäcklund, "Computer sizing of sandwich constructions," *Composite Structures*, vol. 5, pp. 251-279, 1986.
- [68] N. S. Ermolaeva, M. B. G. Castro, and P. V. Kandachar, "Materials selection for an automotive structure by integrating structural optimization with environmental impact assessment," *Materials & Design*, vol. 25, pp. 689-698, 2004.
- [69] P. Wennhage, "Weight optimization of large scale sandwich structures with acoustic and mechanical constraints," *Journal of Sandwich Structures and Materials*, vol. 5, pp. 253-266, 2003.
- [70] R. Rikards and A. Chate, "Optimal design of sandwich and laminated composite plates based on the planning of experiments," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 10, pp. 46-53, 1995.
- [71] M. Kalantari, M. R. Nami, and M. H. Kadivar, "Optimization of composite sandwich panel against impact using genetic algorithm," *International Journal of Impact Engineering*, vol. 37, pp. 599-604,

2010.

- [72] J. Moh and C. Hwu, "Optimization for Buckling of Composite Sandwich Plates " *AIAA Journal*, vol. 35, pp. 863-868, 1997.
- [73] H. K. Cho, "Maximizing structure performances of a sandwich panel with hybrid composite skins using particle swarm optimization algorithm," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 23, pp. 3143-3152, 2010.
- [74] S. W. Tsai and N. J. Pagano, "Invariant properties of composite materials," *Composite materials workshop*, pp. 62-71, 1968.
- [75] S. W. Tsai and H. T. Hahn, *Introduction of Composite Materials*. Lancaster, PA: Technomic Publishing Company, 1980.
- [76] J. L. Grenestedt, "Layup optimization against buckling of shear panels," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 3, pp. 115-120, 1991.
- [77] M. Miki, "Material design of composite laminates with required in-plane elastic properties.," presented at the Progress in Science and Engineering of Composites, Tokyo, 1982.
- [78] H. Fukunaga and H. Sekine, "Stiffness design method of symmetric laminates using lamination parameters," *AIAA Journal*, vol. 30, pp. 2791-2793, 1992.
- [79] H. Fukunaga, H. Sekine, and A. Lino, "Buckling design of symmetrically laminated plates using lamination parameters," *Computers & Structures*, vol. 57, 1995.
- [80] C. G. Diaconu, M. Sato, and H. Sekine, "Feasible region in general design space of lamination parameters for laminated composites," *AIAA Journal*, vol. 40, pp. 559-565, 2002.
- [81] C. G. Diaconu, M. Sato, and H. Sekine, "Buckling characteristics and layup optimization of long laminated composite cylindrical shells subjected to combined loads using lamination parameters," *Composite Structures*, vol. 58, pp. 423-433, 2002.
- [82] S. Setoodeh, M. M. Abdalla, and Z. Gürdal, "Approximate feasible regions for lamination parameters," presented at the 11th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization

- Conference, Virginia, 2006.
- [83] P. M. Weaver, C. G. Diaconu, and M. W. Bloomfield, "On feasible regions of lamination parameters for lay-up optimization of laminated composites," *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 465, pp. 1123-1143, 2009.
- [84] P. M. Weaver and M. W. Bloomfield, "On the Potential for Elastic Tailoring in Layered Composites Buckling Considerations," presented at the ICCM-17, Edinburgh, UK, 2009.
- [85] S. Setoodeh, M. M. Abdalla, S. T. Ijsselmuiden, and Z. Gürdal, "Design of variable-stiffness composite panels for maximum buckling load," *Composite Structures*, vol. 87, pp. 109-117, 2009.
- [86] A. Khani, S. T. Ijsselmuiden, M. M. Abdalla, and Z. Gürdal, "Design of variable stiffness panels for maximum strength using lamination parameters," *Composites Part B: Engineering*, vol. 42, pp. 546-552, 2011.
- [87] F. X. Irisarri, M. M. Abdalla, and Z. Gürdal, "Improved Shepard's Method for the Optimization of Composite Structures," *AIAA Journal*, vol. 49, pp. 2726-2736, 2011.
- [88] S. T. Ijsselmuiden, "Optimal design of variable stiffness composite structures using lamination parameters," PhD, Mechanics, Aerospace Structures and Materials, Delft University of Technology, Julianalaan 134 2628 BL Delft, Nederland, 2011.
- [89] 林逸祥, "燃料電池混合動力車複合材料車體結構設計方法之研究," 碩士論文, 機械工程學系研究所, 國立臺灣大學, 2006.
- [90] M. Avalle and G. Belingardi, "A theoretical approach to the optimization of flexural stiffness of symmetric laminates," *Composite Structures*, vol. 31, pp. 75-86, 1995.
- [91] 林俊志, "可量產性設計複材車體結構之研究," 碩士論文, 機械工程學系研究所, 國立臺灣大學, 2009.

- [92] S. Honda, Y. Narita, and K. Sasaki, "Discrete Optimization for Vibration Design of Composite Plates by Using Lamination Parameters," *Advanced Composite Materials*, vol. 18, pp. 297-314, 2009.
- [93] B. Liu, R. T. Haftka, and P. Trompette, "Maximization of buckling loads of composite panels using flexural lamination parameters," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 26, pp. 28-36, 2004.
- [94] S. T. Ijsselmuiden, M. M. Abdalla, and Z. Gurdal, "Implementation of Strength-Based Failure Criteria in the Lamination Parameter Design Space," *AIAA Journal*, vol. 46, pp. 1826-1834, 2008.
- [95] J. E. Herencia, P. M. Weaver, and M. I. Friswell, "Optimization of Long Anisotropic Laminated Fibre Composite Panels with T-Shaped Stiffeners," *AIAA Journal*, vol. 45, pp. 2497-2509, 2007.

