

國立臺灣大學工學院工業工程學研究所

碩士論文

Graduate Institute of Industrial Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis

多目標連續型仿水流優化演算法

Water Flow-like Optimization Algorithm for  
Multi-objective Continuous Optimization Problems



周思婷

Szu -Ting Chou

指導教授：楊烽正 博士

Advisor: Feng-Cheng Yang, Ph.D.

中華民國 101 年 7 月

July, 2012

## 誌謝

過去兩年來感謝楊烽正老師的嚴謹教誨，在寫作上面不厭其煩的教導，並不斷給予我們琢磨與建議得以順利完成碩士論文。同時也讓我深刻體會到求學應有的態度及精神。這不僅止於做研究，也是做人處事應該具有的態度。在此向老師致上最由衷的感謝與敬意。也很感謝羅士哲教授和黃奎隆教授在口試上的糾正與建議，特此並致謝忱。

感謝家人在求學過程的支持，使我能專心致力於學業當中，得以完成大學和碩士的學業。感謝楊 group 的戰友們：趙哥、年年、瑋婷、和桓彬，不只在學業上的互相幫助，休閒娛樂上也能一起奮勇作戰。感謝楊 group 的學弟們在百忙之中來幫忙讓我們順利的進行口試。還有台大工工所的大家，也包括所辦姐姐們，沒有你們我現在不可能打這篇致謝。

將近七百個日子裡，有辛苦、有挫折，但也有充實、有成長。也許多年後回首今日，會覺得這些成就不足掛齒。潘嘉琪學姐曾說過，我們都曾是廣大學海中的一滴水珠；這片海洋孕育了我們，而我們所能回報的，就是盡我們的棉薄造就海洋的廣大。祝福每一位從工工所離開的各位之後都能展翅高飛，往自己的理想努力邁進，將所學回饋給社會。

周思婷 謹誌於  
國立台灣大學工業工程研究所  
中華民國一百零一年八月

## 摘要

仿水流優化演算法(Water Flow-like Algorithm, WFA)是近年來較為創新的優化演算法。WFA 主要概念是模擬水流在地理空間逐步流向最低點的特性，將代理人模擬成水流，在解空間中搜尋最佳解。WFA 模仿水流的分流和匯流特性，動態調整代理人的數量，有效地進行集中或分散搜尋。此外 WFA 亦模擬水流蒸發和降水的特性，使搜尋能有機會跳脫區域最佳解。因此，本研究提出多目標連續型仿水流優化演算法(Water Flow-Like Algorithm for Multi-objective Continuous Optimization Problem Optimization Problems, WFA4MC)求解多目標優化問題，並提供水流位置和水流目標函數值兩種匯流標準不同匯流法，供匯流作業使用。為驗證 WFA4MC 的演算機制，以 ZDT 標竿問題為測試對象，研擬兩種評量指標：正確率(Correctness)和涵蓋度(Coverness)來比較兩種匯流法的成效，並使用收斂距離(Generational Distance)與典型的遺傳演算法比較求解結果且探究本研究所提方法可行性。結果顯示在共同目標函數呼叫次數下，WFA4MC 表現較遺傳演算法優異。

關鍵詞：仿水流優化演算法、多目標連續優化問題、ZDT 標竿問題、正確率(Correctness)、涵蓋度(Coverness)。

# Abstract

The newly developed optimization algorithm, Water Flow-like Algorithm, that is WFA, simulates a solution searching agent as a water flow traversing the lowest point of a terrain. The number of water flows is dynamically changed while water flows split into subflows against rough terrain and merge several flows into one single flow. Flow splitting and merging are mimicked by the WAF to conduct efficient optimum search in the solution space. In addition, water evaporation and precipitation are simulated in WFA to jump out of local optima or to broaden the searching area. This paper presents a WFA for Multi-objective Continuous Optimization Problems, namely WFA4MC. This paper presents three merging methods for different merging conditions. First, the location-based merging approach is frequently adopted in general optimization problems, either continuous or discrete ones. In addition to the location-based approach, we propose an objective-based merging approach for our multi-objective optimization problems, where a set of non-dominated solutions with objective values dispersedly distributed in the objective space is preferred.

In order to prove WFA4MC performances precisely, this research proposes Correctness and Coverness to measure non-dominated solutions in ZDT functions.

Besides, the Generational Distance is used in the comparison with other heuristic Algorithms. The result showed that based on the same limit of the number of objective function calls, the WFA4MC outperform than others.

Keywords: Water Flow-like Algorithm, Multi-objective Continuous Optimization Problem, ZDT functions, Correctness, Coverness.

# 目 錄

誌謝	i
摘要	ii
Abstract	iii
目錄	iv
表目錄	vi
圖目錄	vii
第一章 導論	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究目的	2
1.3 研究方法	2
1.4 章節概論	3
第二章 文獻探討	4
2.1 仿水流優化演算法	4
2.2 多目標優化演算法	6
2.2.1 基因演算法	7
2.2.2 多目標基因演算法	7
2.2.3 粒子群演算法	9
2.2.4 多目標粒子群演算法	9
2.3 文獻小結	10
第三章 多目標連續型仿水流優化演算法	11
3.1 多目標連續優化問題	11
3.2 WFA4MC 演算流程	12
3.3 WFA4MC 整體演算程序	26
3.4 多目標連續型仿水流優化演算法小結	27

第四章 多目標連續型仿水流優化演算法範例驗證.....	28
4.1 測試的多目標優化標竿問題.....	28
4.2 評量指標.....	34
4.2.1 收斂距離(Generational Distance)和均勻變異(Spacing metric) .....	34
4.2.2 正確率(Correctness)和涵蓋度(Coverness).....	36
4.3 多目標連續型仿水流優化演算法求解系統.....	39
4.4 標竿問題效能測試.....	41
4.4.1 匯流模式的比較.....	42
4.4.2 WFA4MC 成效結果分析.....	45
4.5 範例驗證小結.....	47
第五章 結論與建議.....	49
5.1 結論.....	49
5.2 未來研究與建議.....	50
參考文獻.....	51
附錄 A.....	53
附錄 B.....	67

## 表目錄

表 4-1 WFA4MC 在五個標竿問題參數設定內容 .....	42
表 4-2 WFA4MC 在五個標竿問題的收斂距離( $G$ )平均值 .....	43
表 4-3 WFA4MC 在五個標竿問題的涵蓋度( $\ell$ )平均值 .....	43
表 4-4 WFA4MC 在五個標竿問題的正确率( $C$ )平均值 .....	43
表 4-5 WFA4MC 和三種啟發式演算法收斂距離( $G$ )的平均值 .....	46



## 圖目錄

圖 2.1 仿水流優化演算法流程(Wang, 2006).....	6
圖 2.2 非臣服解排序基因演算法之演算流程(Deb <i>et al</i> , 2002) .....	8
圖 3.1 仿水流優化演算法於多目標連續型優化問題的演算流程 .....	26
圖 4.1 ZDT1 柏拉圖前緣線(Deb, 1999).....	29
圖 4.2 ZDT2 柏拉圖前緣線(Deb, 1999).....	30
圖 4.3 ZDT3 柏拉圖前緣線(Deb, 1999) .....	31
圖 4.4 ZDT4 柏拉圖前緣線 (Deb, 1999) .....	32
圖 4.5 $f_1$ 目標函數值的分布圖(Deb, 1999).....	33
圖 4.6 100 個亂數產生的 $x_1$ (Deb, 1999).....	33
圖 4.7 ZDT6 柏拉圖前緣線(Deb, 1999) .....	33
圖 4.8 計算非臣服解和柏拉圖解的收斂距離示意.....	35
圖 4.9 計算非臣服解涵蓋度示意圖.....	37
圖 4.10 多目標仿水流優化演算法求解系統人機介面.....	40
圖 4.11 C 區域的完整介面圖 .....	40
圖 4.12 求解過程數值變化圖.....	41
圖 4.13 LM 法和 OM 法的收斂距離( $G$ )之平均直條圖.....	44
圖 4.14 LM 法和 OM 法的涵蓋度( $\ell$ )值之平均直條圖 .....	44
圖 4.15 LM 法和 OM 法的正確率( $C$ )之平均直條圖.....	45
圖 4.16 WFA4MC 和三種啟發式演算法收斂距離( $G$ )的平均直條圖 .....	47



# 第一章 導論

本章將對本論文的研究背景、方法、目的及研究流程作說明。首先概述多目標最佳化、啟發式演算法的發展和本研究所使用的仿水流優化演算法，接著再對本研究的目標和方法做說明。

## 1.1 研究背景

隨著決策問題日益複雜，單目標已無法滿足現今工業需求與應用，因此多目標最佳化的問題研究就此產生。在真實世界裡，問題通常包含了幾個同時存在但卻又互相衝突的目標，這一類的問題通常無法得到一個單一的答案，所解出的答案通常為一組可行解，是由許多符合問題條件的可選擇性解所構成一個解集合。並且在這組解集合中，沒有任何一個解可以在對所有的目標函數上皆優於其他的解，我們稱這一組解集合為柏拉圖解集合(Pareto-optimal solutions)，其中的每一個解稱為非臣服解(non-dominated solution)。

因此，優化問題的發展複雜化，也讓近數十年來許多學者致力於開發有效率的求解技術。其中以演化式演算法來解決多目標優化問題一直是許多研究中很重要的議題，也是許多研究領域所必需的解決方法。由於不同的問題和不同的領域並不是都能用同一種方法來解決，因此目前有許多的演算法被應用於解決多目標問題，這些演算法包括了基因演算法(genetic algorithm)、粒子群最佳化演算法(particle swarm optimization)和蜂群演算法(honeybee algorithm)等。但是這些演算法大部分都一個共同問題，即是過多的固定求解群體，這會使解在趨近於收斂時，產生許多相似度極高的解，所造成的運算資源的浪費。

Yang and Wang (2007)所提出的仿水流優化演算法(Water Flow-like Algorithm, WFA)的起始為單一解，視演化過程分為一個以上的解進行廣域搜尋。當兩個以上的解所搜尋到位置相鄰時即合併成單一解，避免造成無效率的重複搜尋。仿水流優化演算法以模擬自然界中水流流動現象為主要概念，水流會受地心引力吸引而流動，且因地理空間規範而漸趨流向地面的最低點。WFA 演算中反覆進行分流移步、匯流、蒸發、和降水四個作業。每個解由一股水流代表，進行數量變動的求解搜尋。水流具有質量和速度，形成的動能足夠時即可依地形變化分支出多

股子水流進行搜尋。當多股水流匯集至相同時便結合成單一股水流，並且匯聚新的速度與質量。水流的質量在流動過程中會逐漸散發於大氣中，當大氣中的水氣到達飽和程度時即會落下雨水，產生新水流或增加質量到既有的水流中。

## 1.2 研究目的

WAF發展的初期，證實WFA求解物件分群優化問題的成果較GA、EM、及PSO等啟發式演算法較佳。而在近幾年也有相關論文研究證實WAF在一般性排序優化問題的求解成果較GA優越，但是目前尚未在多目標最佳化領域上有所突破，因此本研究致力於發展能有效節省求解資源的多目標仿水流演算法。

## 1.3 研究方法

本研究以WFA的基本概念為出發點，提出專為求解多目標最佳化的WFA演算法。WFA除了著重區域性搜尋，容易使解落入區域最佳解外，且初始解空間較一般演化式演算法少，無法保證解的多樣性和分散性。因此，本研究以克服此困難為宗旨，開發多目標仿水流演算法(Water Flow-like Optimization Algorithm for Multi-objective Optimization Problems, WFA4MC)，測試的標竿問題則使用Zitzler於2000年發表，具有多目標問題特性的標竿問題—ZDT系列作測試，和基因演算法、粒子群演算法、和其它新興的演算法共同作績效比較。

本研究流程如以下所概述：

- (1) 建構研究主題：分析WFA的缺點和優點，規劃有潛力的研究範圍與方法。
- (2) 閱讀相關文獻：積極閱讀近幾年的多目標演算法相關期刊論文，評論各演算法之優缺點，制定出符合仿水流優化之多目標演化方法。
- (3) 建構和不斷改良演算機制：經由不斷測試與比較，擬定各種改良的演化方法，並不斷求證。

- (4) 開發求解系統：以 C# 為系統開發工具，建構多目標仿水流最佳化系統。
- (5) 論文撰寫：將研究成果及閱讀文獻有系統地整理成論文。

## 1.4 章節概論

本論文分為五個章節。第一章首先確認研究背景、目的、方法及流程。第二章透過相關文獻探討多目標問題的定義和過去學者對於各啟發式演算法之研究。第三章說明本研究欲探討與解決的測試問題和提出多目標仿水流優化演算法 (Water Flow-like Optimization Algorithm for Multi-objective Continuous Optimization Problems, WFA4MC)，並詳細說明 WFA4MC 的詳細作業流程。第四章則驗證 WFA4MC 的實驗結果和效能，並展示開發的求解系統。最後，第五章總結研究成果並提出未來研究方向與建議。



## 第二章 文獻探討

本章介紹仿水流優化演算法及目前現有的多目標演算法，說明其演算特性及應用。

### 2.1 仿水流優化演算法

仿水流優化演算法(Water Flow-like Algorithm, WFA)是一仿效水在物理空間中流動的特性而設計，演化過程中由水流的分流和匯流動態調整代理人的數量，使代理人朝最佳解移動。WFA 將解空間視為地理空間，每股水流位置代表一個解，當水流在空間中流動時會依地形改變流向和速度，並逐漸向地理位置低處流動。水流擁有分流的特性，在空間裡流動時會分化成數條支流。數條流經同一位置的水流，會合併成同一條水流。在流動，水流的質量會逐漸蒸散置大氣中，形成水氣，若當水氣達飽和，會形成降水的現象，讓水流在新的地理位置重新進行流動。

WFA 在分流移步作業分為兩個步驟，首先以動能為水流分流門檻，動能越高的水流可分流出較多的支流來廣域搜尋，為分流作業。移步作業是在決定水流分流數後，而水流的移步依據前幾個目標值最好的水流作為支流移步位置的依據。當分流移步完成後，檢驗是否有水流流經同一位置，若有則將水流合併。匯流作業後經由蒸發作業將一部分的質量蒸散至大氣中形成水氣，若水氣達飽和則進行降水作業，依此代代循環。

演化流程如圖 2.1 所示，主要可分為四個作業步驟：

#### 1. 分流移步

決定水流流向前必須先由分流作業決定分流數，再藉由移步作業，決定水流流動方向。分流後的支流依質量守恆原則及能量守恆原則重新計算所有支流的質量與速度。當所有水流都完成分流移動後則執行匯流作業

## 2. 匯流

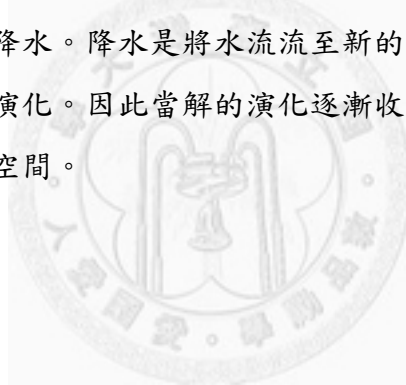
當兩股以上水流在同一演化代次，流經同一位置時則進行合併，即是匯流作業。匯流後的水流遵守質量守恆原則及動量守恆原則計算合併後的質量及速度。

## 3. 蒸發

每一代次各水流在流動的過程中會蒸散部分質量，蒸散後的質量在大氣中形成水氣繼續移動，等待水氣達飽和時，執行降水作業，可在其他區域落下形成新的水流繼續搜尋。

## 4. 降水。

水流蒸發部分質量至大氣中形成水氣後，會判斷水氣是否達飽和狀態，若達飽和則進行降水。降水是將水流流至新的地理位置，將水流重新帶入解空間中繼續演化。因此當解的演化逐漸收斂時，可藉由降水作業另開闢新的解搜尋空間。



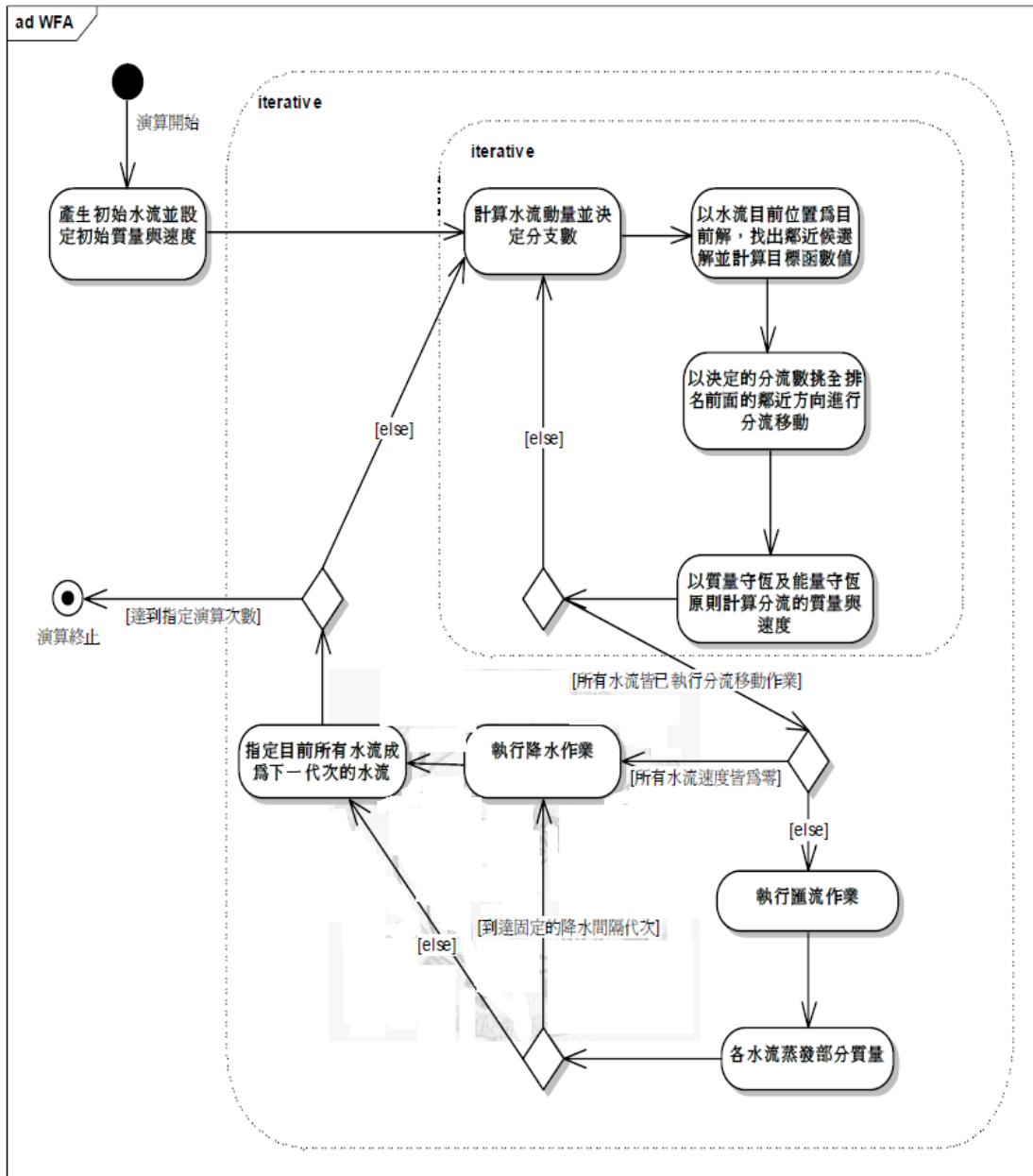


圖 2.1 仿水流優化演算法流程(Wang, 2006)

## 2.2 多目標優化演算法

過去在多目標最佳化演算法的研究範疇，大致可分為基因演算法(Genetic Algorithm, GA)和粒子群演算法(Particle Swarm Optimization, PSO)兩種演算為基礎來延伸發展，解決多目標優化問題。

## 2.2.1 基因演算法

基因演算法 (Genetic Algorithms) 由密西根大學心理學與電機工程教授 Holland 於 1975 年首先提倡，是模擬自然界演化的一種方法。其根本核心是達爾文的進化論中「物競天擇，適者生存」的自然進化法則，它能夠選擇物種中較好血統的上一母代，並且隨機的相互交換彼此的基因資訊，以期望能演化出比母代更優秀的子代，如此重複下去以產生具有高度適應力的物種。接著利用人工運算單元，在合適的解中進行複製、交配、突變等演化，並利用適應函數來評估，以產生可行解，再藉由不斷重複迭代的過程中得到最佳解。基因演算法比傳統演算法更能快速找出全域最佳解，而較小的機會掉入局部最佳解，它通常在解決較大、複雜及未知空間的搜尋上，都有不錯的成果，是一套有效且堅實的隨機演算法。

## 2.2.2 多目標基因演算法

求解多目標最佳化問題在初期時，大多將多個目標函數簡化為單一目標函數，再使用 GA 來求解。第一個多目標演化式演算法-向量估測式基因演算法(Vector evaluated genetic algorithm, VEGA)，是一個最簡化的多目標 GA，直接將單目標 GA 的概念延伸至處理多目標最佳化問題。由於多目標問題有多個目標（在此假設為  $g$  個目標問題）需要被考量，便將每一迭代的 GA 母群體，隨機分割成  $g$  個相等的子母群體。再依據每一個目標函式，給予每一子母群體適當的適合度 (Fitness) 來演化求解。藉由選擇可以選出最靠近個別目標的解，並經由交配的過程將這些選擇出來的最佳解找出來，但是這種方法只能找到各單一目標的最佳解。

在 VEGA 之後，以權重為基礎的基因演算法 (Weight-based genetic algorithm, WGBA) 被 Hajela and Lin (1992) 提出。WGBA 把各目標函數乘以一個權重值，並將它們相加當作這個解的適應值，但是權重須找到適當的方法來衡量及設定，因為權值的比重會嚴重影響解在解空間的分布與收斂情形。

Srinivas and Deb (1994) 提出非臣服解排序基因演算法 (Non-dominated sorting genetic algorithm, NSGA)。NSGA 一開始就將族群依據解之間是臣服與否的特性

做排序，解的收服各數較高的個體有較高的適應值，使所求的解朝向柏拉圖最佳前緣線移動。Deb *et al.* (2002)提出同時擁有菁英保留(Elitism Strategy)及明確的保持差異性(Diversity)機制的 NSGA-II。其改善非臣服解比較機制(Domination comparison operations)以提升演算法執行效率，並提出排擠比較機制(Crowded-comparison operator)，計算相同等級中非臣服解的排擠距離(Crowding distance)來決定出可進入交配池以進行後續基因演化作業，使所得到的非臣服解能均勻地分佈於柏拉圖前緣線上，演算流程如圖 1 所示。

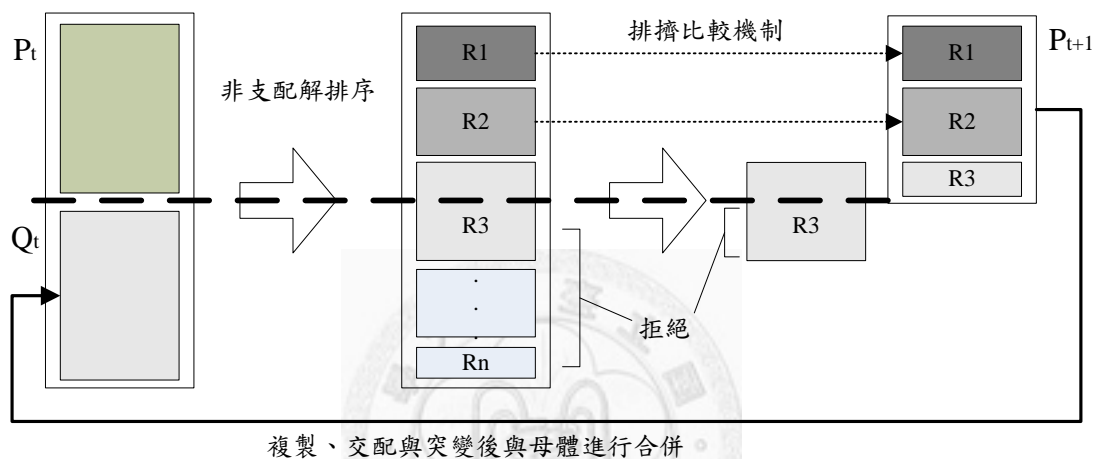


圖 2.2 非臣服解排序基因演算法之演算流程(Deb *et al.*, 2002)

菁英策略也被應用於和其他之後發展的新機制發展出新的多目標最佳化演算法，例如：強化式柏拉圖基因演算法(Strength pareto evolutionary algorithm, SPEA)、柏拉圖空間演化策略(Pareto archive evolution strategy, PAES)等。SPEA 由 Zitzler and Thiele (1999)提出，利用明確的保留精英策略並使用外部暫存器機制(External memory or archive)來額外儲存一組非臣服解族群，每個世代新找到的非臣服解與外部儲存的非臣服解做比較，並保留較好的解。PAES 採用(1+1) 演化策略，即為單一代理人進行移動搜尋，以一組固定大小的外部暫存器存取目前為止找到的非臣服解。在演化的過程，將搜尋空間切割為許多區塊，藉由同一區塊中鄰近解的數量，決定子代是否取代原先外部暫存器的成員和取代父代至下一代次進行演化，以保持解的差異性。因此，如何決定外部暫存器的大小及區塊切割的大小是 PAES 面臨的困難點。



### 2.2.3 粒子群演算法

粒子群演算法(Particle Swarm Optimization)是由 Eberhart 和 Kennedy 於 1995 年所提出，演化概念來自於鳥類飛行聚集的行為，循著一群鳥在一個區域隨機的搜尋食物，一開始不曉得食物的方向位置，鳥群會依循自己的經驗和群體間訊息的交換，選擇最好的方案去接近食物。粒子群演算法藉由這樣的學習行為來解決最佳化的問題。在演算法中我們稱鳥兒為”粒子”，在移動的空間中所有粒子都有一個由目標函數所映射的適應值和速度來決定其移動的距離與方向。粒子獨立搜尋後，將紀錄目前目標函數的最佳值在個體記憶中，即每個粒子都擁有本身最佳的搜尋資訊記憶。

### 2.2.4 多目標粒子群演算法

近幾年，由於 PSO 擁有較快的收斂速度，能快速地找到全域的解(Global solution)，因此 PSO 的發展已延伸至至多目標最佳化的問題上。Parsopoulos and Vrahatis (2002)提出以向量估測的粒子群最佳化 (Vector evaluated particle swarm optimization, VEPSO) ，以類似 WBGA 方式將多個目標函數給予適當的權重，將多個目標函數給予適當的權重來簡化至單目標問題，再使用 PSO 搜尋出最佳化的解。

Li (2003)使用非臣服解排序的觀念及二種無需設定參數的方法發展出非臣服解排序粒子群最佳化(Non-dominated sorting particle swarm optimization, NSPSO)，演算流程中加入了非臣服解排序、排擠比較機制及利基方法(Niching Method)，並產生新的群體來取代(Replacement)過於集中的粒子。研究指出 NSPSO 只需幾個步驟就可快速且可靠地收斂至柏拉圖解，並且所得到柏拉圖解的分佈性與收斂性良好。在 Li 之後，Tripathi *et al.* (2007)在 NSPSO 中導入了擾動機制，提出 AMOPSO，使非臣服解更具分散性。

Chen *et al.* (2011)於近代開發了多目標內分泌粒子群最佳化演算法 (Multi-Objective Endocrine Particle Swarm Optimization Algorithm, MOEPSO)，設計一套新的粒子更新公式。MOEPSO 的粒子更新公式除了考慮全域最佳解和個

體最佳解，也參看目前非臣服解集中的與演化粒子最接近的解來進行監度控制，產生新的粒子。藉由讓局部性和全域性的訊息，使解獲得較佳的收斂性。

## 2.4 文獻小結

本章介紹了多目標最佳化問題的定義和現有的多目標啟發式演算法。依據搜尋模式，啟發式演算法可分為單一代理人搜尋和多代理人搜尋。多代理人的演算方式雖然可以在解空間廣泛搜尋，搜尋到分散性較佳的非臣服解，但若代理人的數量過多時，會造成搜尋成本的浪費。而單一代理人可降低搜尋成本，但是在解的分散性表現上較不如預期。

針對基因演算法與粒子群演算法作特性上的分析，說明這兩種演算法的演算特性的不同對於不同問題造成演算法效率的差異。當演算法的搜尋方式具有方向性情況之下，如粒子群演算法，雖能快速的搜尋到最佳解，但在問題複雜化，區域最佳解較多的情況下，粒子群演算法往往會落入區域最佳解導致演化的停滯不進。基因演算法為不確定方向性搜尋，較無此缺點，但演化較為緩慢且無法精確朝柏拉圖前緣線解收斂。鑒於以上演算法優缺點，本研究以水流演算法的基本概念為出發點，發展能節省搜尋資源及兼顧進行全域搜尋功能的多目標演算法。

### 第三章 多目標連續型仿水流優化演算法

仿水流優化演算法(Water Flow-Like Algorithm, WFA)模擬大自然中水流流動的物理行為，由單一股水流為起始，求解各種型態的優化問題。本研究即在開發求解多目標連續型優化問題的仿水流優化演算模式和方法，簡稱 WFA4MC(Water Flow-like Optimization Algorithm for Multi-objective Optimization Problems)。求解模式將運用 WFA4MC 動態調整代理人(即水流)數量的特性，在目標空間及解空間中進行移步搜尋，有效求得非臣服解。本章說明多目標連續型優化問題的基本概念、WFA4MC 的演算內容及 WFA4MC 的演算程序。

#### 3.1 多目標連續優化問題

現今決策問題的日益複雜，最佳化問題已不能只考慮單一目標問題，而是多個目標需同時被滿足。因此單目標已無法滿足現今工業需求與應用，多目標優化問題變成工程及研究方面的重要議題。假設  $p$  為正整數且是多目標優化問題的解維度，一個解以向量  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_p]$  表示。 $\mathbf{x}$  的變數  $x_k$  限制在給定的下限  $\underline{x}_k$  和變數上限  $\bar{x}_k$  間，因此  $\underline{x}_k \leq x_k \leq \bar{x}_k$ ； $x_k, \underline{x}_k, \bar{x}_k \in \mathcal{R}$ ， $\forall k=1, 2, \dots, p$ 。若此多目標優化問題的目標函數個數為  $g$ ，解  $\mathbf{x}$  的目標函數值則定義為  $g$  維的目標值向量

$\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_g] \equiv [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_g(\mathbf{x})]$  且  $f_j(\mathbf{x}): \mathcal{R}^p \rightarrow \mathcal{R}$ ， $j=1, 2, \dots, g$ ，而每個

目標函數值的優化目標可能是最大或最小化。不同於單一目標問題求解最後得一個最佳解，多目標規劃問題最後所得到的解為非臣服解集合(non-dominated

solution set)  $\hat{X}$ 。假設  $\mathbf{f}^i = [f_1^i, f_2^i, \dots, f_g^i] \equiv [f_1(\mathbf{x}^i), f_2(\mathbf{x}^i), \dots, f_g(\mathbf{x}^i)]$  和

$\mathbf{f}^{i'} = [f_1^{i'}, f_2^{i'}, \dots, f_g^{i'}] \equiv [f_1(\mathbf{x}^{i'}), f_2(\mathbf{x}^{i'}), \dots, f_g(\mathbf{x}^{i'})]$  為解  $i$  和解  $i'$  的目標向量， $\mathbf{x}^i$ ，

$\mathbf{x}^{i'} \in \hat{X}$ 。以所有目標函數皆最小化問題為例，任兩個非臣服解  $\mathbf{x}^i$  和  $\mathbf{x}^{i'}$  中會有至

少有一  $j$  符合  $f_j^i < f_j^{i'}$ ，換句話說非臣服解互相間應有至少一個目標函數值優於

其他非臣服解。設運算式  $\text{Dominated}(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^{i'})$  是用以判斷前者  $\mathbf{x}^i$  是否臣服於後者  $\mathbf{x}^{i'}$ ，則

$$\text{Dominated}(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^{i'}) = \begin{cases} \text{false, if } \exists j \in \{1, 2, \dots, g\} \ni f_j^i < f_j^{i'} \\ \text{true, otherwise} \end{cases} \text{。意味著當 } \mathbf{x}^i \text{ 內有一目標值}$$

$f_j^i$  比  $\mathbf{x}^{i'}$  的  $f_j^{i'}$  好， $\mathbf{x}^i$  就不臣服於  $\mathbf{x}^{i'}$ ；因此回傳 false。 $\mathbf{x}^i$  不臣服於  $\mathbf{x}^{i'}$  並不意味著  $\mathbf{x}^{i'}$  一定反過來臣服於  $\mathbf{x}^i$ ；他們也可能互不相臣服而擠身於非臣服解。因此當一個新解  $\mathbf{x}^i$  和  $\hat{X}$  內所有解都執行  $\text{Dominated}(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^{i'})$ ， $\forall \mathbf{x}^{i'} \in \hat{X}$ ，運算後回傳的結果皆為 false 時，解  $i$  也是一個非臣服解，可加入  $\hat{X}$ 。

雖然本研究可提供無限多個非臣服解給使用者，但是為了應用上的便利性，使用者傾向於在非臣服解數上做限制。因此令  $\bar{s}$  為非臣服解數上限且  $s$  是  $\hat{X}$  內的非臣服解數，當  $s > \bar{s}$ ， $s - \bar{s}$  個「較差」的解必須從  $\hat{X}$  中移出。除了  $\bar{s}$  在數量上的限制， $\hat{X}$  中非臣服解的目標向量  $\mathbf{f}$  須能廣泛的分佈在目標函數值空間。意指  $\bar{s}$  個非臣服解在目標函數值空間的位置應盡可能地分散。因此一個非臣服解與目標函數值空間中的鄰近解距離太近會被歸為「較差」的非臣服解。本研究提出非臣服解刪減作業，使用擁擠距離來挑選欲刪除的  $s - \bar{s}$  個有最小擁擠距離的非臣服解，此方法會在後面的章節做詳細說明。

### 3.2 WFA4MC 演算流程

WFA4MC 的演算基礎是一個水流集合  $X = \{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n\}$ ， $n$  是當下水流集合內水流的數目。水流  $i$  的位置是  $\mathbf{x}^i = [x_1^i \ x_2^i \ \dots \ x_p^i]$ ，代表優化問題的一個解，為了方便說明，在接下來演算流程的說明中將交互以水流  $i$  或是水流  $\mathbf{x}^i$  指稱一條水流。演化作業中的分流移步和匯流作業會即時更新水流數目及水流位置，因此水流集

合  $X$  會經過一系列的演化作業後會產生新的水流集合，以演化及改善解的目標函數值。分流作業依據每條水流現在位置與其之前位置的改善量來決定是否分流，定義水流  $i$  的母水流位置為  $\tilde{\mathbf{x}}^i = [\tilde{x}_1^i \tilde{x}_2^i \cdots \tilde{x}_p^i]$ ， $\tilde{\mathbf{x}}^i$  可視為  $\mathbf{x}^i$  水流  $i$  先前的位置。令  $\mathbf{f}^i = [f_1^i f_2^i \cdots f_g^i]$  和  $\tilde{\mathbf{f}}^i = [\tilde{f}_1^i \tilde{f}_2^i \cdots \tilde{f}_g^i]$  是水流  $i$  和其母水流的目標向量。除了位置和目標函數值外， $m^i$  是水流  $i$  的質量則用來決定一條水流是否可進入下一代次演化和決定是否執行降水作業。令演算法最後所呈現的非臣服解集合是  $\hat{X} = \{\hat{\mathbf{x}}^1, \hat{\mathbf{x}}^2, \dots, \hat{\mathbf{x}}^s\}$ ， $s$  是目前所搜尋到的非臣服解個數。每一代次水流演化後，水流集合  $X$  裡的成員經過非臣服解篩選後若證實不臣服於任何  $X$  和  $\hat{X}$  內的水流，則複製至  $\hat{X}$ 。

演化之初，僅有一條水流進行演化；即  $n=1$  且  $X = \{\mathbf{x}^1\}$ 。令  $m^1 = \bar{m}$ ， $\bar{m}$  由使用者設定，代表水流演化過程中的質量總數。所產生的位置變數需在水流變數上限  $\bar{x}_k$  和變數下限  $\underline{x}_k$  之間，因此設初始水流  $\mathbf{x}^1$  的變數值為

$$x_k^1 \leftarrow \sim U(0,1)(\bar{x}_k - \underline{x}_k) + \underline{x}_k, \quad k=1,2,\dots,p,$$

$\sim U(0,1)$  是均勻分布於  $[0,1]$  之間的亂數值。因為初始水流並非從其他水流分流產生，因此需隨機產生其母水流的位置

$$\tilde{x}_k^1 \leftarrow \sim U(0,1)(\bar{x}_k - \underline{x}_k) + \underline{x}_k, \quad k=1,2,\dots,p。$$

令  $\mathbf{f}^1 = [f_1^1 f_2^1 \cdots f_g^1]$  和  $\tilde{\mathbf{f}}^1 = [\tilde{f}_1^1 \tilde{f}_2^1 \cdots \tilde{f}_g^1]$  是解  $\mathbf{x}^1$  和  $\tilde{\mathbf{x}}^1$  的目標向量，經目標函數值計算，再執行臣服與否驗算後可組成初代非臣服解，故

$$\hat{X} = \begin{cases} \{\mathbf{x}^1\}, & \text{if Dominated}(\tilde{\mathbf{x}}^1, \mathbf{x}^1) = \text{true} \\ \{\tilde{\mathbf{x}}^1\}, & \text{else if Dominated}(\mathbf{x}^1, \tilde{\mathbf{x}}^1) = \text{true} \circ \\ \{\tilde{\mathbf{x}}^1, \mathbf{x}^1\}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

目標函數值的改善量會影響水流的移動和數目，為了估計目標函數值改善量須記錄並更新演化至目前所獲得的最大和最小目標函數值。令  $\underline{f}_j$  和  $\bar{f}_j$  是目標函數值  $f_j(\mathbf{x})$  目前所搜尋到的最大和最小值。初代演化時

$$\underline{f}_j = \min(f_j^1, \tilde{f}_j^1); j = 1, 2, \dots, g$$

而

$$\bar{f}_j = \max(f_j^1, \tilde{f}_j^1); j = 1, 2, \dots, g \circ$$

由於多目標最佳化問題有多個目標函數，因此使用權重法將水流  $i$  的  $g$  個目標函數值  $f_j^i$ ， $j = 1, 2, \dots, g$ ，轉化成單一目標函數值  $F^i$  以方便評估水流改善率。使用權重法時須考量不同目標函數值的單位問題，所以水流  $i$  的目標函數值在轉化成單一值之前須先行將  $f_j^i$  標準化成單位化目標函數值

$$f_j^{ii} = \frac{f_j^i - \underline{f}_j}{\bar{f}_j - \underline{f}_j} \circ$$

接著以權重法加總目標函數值成單一目標函數值

$$F^i = \sum_{j=1}^g w_j f_j^{ii} = \sum_{j=1}^g w_j \frac{f_j^i - \underline{f}_j}{\bar{f}_j - \underline{f}_j},$$

式中  $\sum_{j=1}^g \omega_j = 1.0$ ， $0 \leq \omega_j \leq 1.0$ 。 $\omega_j$  是  $f_j(\cdot)$  的權重，同樣地水流  $i$  的母水流也須

計算單位化目標函數值  $\tilde{f}_j^i = \frac{\tilde{f}_j^i - \underline{f}_j}{\underline{f}_j - \underline{f}_j}$ ，並使用權重法得到合併後的目標函數值

$$\tilde{F}^i = \sum_{j=1}^g \omega_j \frac{\tilde{f}_j^i - \underline{f}_j}{\underline{f}_j - \underline{f}_j}。$$

進行分流作業時，各水流的分流數由目標函數值改善量來決定。為了評估改善量，設  $\theta$  是分流與否的門檻。當改善量超過分流門檻  $\theta$  則不進行分流，以單一股水流進行演化。目標值改善量會隨著演化代次趨緩，為避免形成高分流門檻，無法不進行分流，因此將累計每代次所有水流的目標值改善量並取其平均設為當下演化代次的分流門檻。設門檻值隨代次演化為

$$\theta = \frac{\Delta F}{N}$$

式中  $\Delta F$  是水流的改善量， $N$  是累積分流數。每代次完成時更新一次  $\theta$ 。因此第一代次時  $\Delta F = |F^1 - \tilde{F}^1|$  且  $N = 1$  因為  $X = \{\mathbf{x}^1\}$ 。

### 分流移步

水流的分流和移步作業是依序地引領現存在  $X$  裡的每條水流進行移步分流。每條水流的分流數由各水流的目標函數值改善量決定。決定了分流數後再變動水流的位置以產生子水流位置。每條水流的分流數不可大於分流數上限  $\bar{n}$ ， $\bar{n}$  由使用者設定防止水流數無限制地增加。通常目標函數值改善量較小的水流應分出較多的子水流多向搜尋。另一方面，改善量較大水流則進行鄰域搜尋。為了不在考慮改善量進行分流的情況下，使分流數超過分流上限，故本研究定義水流  $i$  的分流數

$$n^i = \begin{cases} 1, & \text{if } |\tilde{F}^i - F^i| > \theta \\ \text{Round} \left( \text{Pow} \left( \bar{n}, \left( 1 - \frac{|\tilde{F}^i - F^i|}{\theta} \right) \right) \right), & \text{otherwise} \end{cases} \circ$$

設  $\mathbf{x}_1^i, \mathbf{x}_2^i, \dots, \mathbf{x}_{n^i}^i$  是水流  $i$  所分流出的  $n^i$  條子水流，而水流  $i$  所分流出的第  $q$  條子水流位置是

$$\mathbf{x}_q^i = [x_{q1}^i \ x_{q2}^i \ \dots \ x_{qp}^i], \quad q=1,2,\dots,n^i; \quad \text{且 } \underline{x}_k \leq x_{qk}^i \leq \bar{x}_k, \quad k=1,2,\dots,p \circ$$

對多目標最佳化問題而言，解代理人須逐步地向非臣服解移動，因此本研究研擬水流  $i$  的子水流位置設定將參考水流  $i$ 、母水流  $i$  和非臣服解集中水流的位置。令  $\hat{\mathbf{x}}^{i'}$  是隨機選取的非臣服解， $i' \sim R(1, s) \circ \sim R(\min, \max)$  是在以  $\min$  和  $\max$  為上下限且服從均勻分配的整數亂數產生器。

第  $k$  個位置變數  $x_{qk}^i$  的數值由  $\xi$  為中心隨機決定，而  $\xi$  是隨機直接使用  $\mathbf{x}^i$ 、 $\tilde{\mathbf{x}}^i$  或  $\hat{\mathbf{x}}^{i'}$  在第  $k$  個位置的值。若水流  $i$  是非臣服解， $\xi$  則直接由  $\mathbf{x}^i$  所指派，若水流  $i$  的母水流是非臣服解， $\xi$  則從  $\tilde{\mathbf{x}}^i$  指派。若水流  $i$  和其母水流皆不屬於非臣服解，則

$$\text{由 } \hat{\mathbf{x}}^{i'} \text{ 決定 } \xi \circ \text{ 因此令 } \xi = \begin{cases} x_k^i, & \text{if } \mathbf{x}^i \in \hat{X} \\ \tilde{x}_k^i, & \text{else if } \tilde{\mathbf{x}}^i \in \hat{X} \\ \hat{x}_k^{i'}, & \text{otherwise} \end{cases} \circ$$

$x_{qk}^i$  值是由隨機的方式決定使用  $\xi$  或是在  $[\underline{\xi}, \bar{\xi}]$  中亂數地取一個值當作  $x_{qk}^i$  的數

$$\text{值, } \underline{\xi} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\underline{x}_k + \xi), & \text{if } \xi = \hat{x}_k^{i'} \\ \max(\underline{x}_k, \xi - |\xi - \hat{x}_k^{i'}|), & \text{otherwise} \end{cases}, \quad \bar{\xi} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\bar{x}_k + \xi), & \text{if } \xi = \hat{x}_k^{i'} \\ \min(\bar{x}_k, \xi + |\xi - \hat{x}_k^{i'}|), & \text{otherwise} \end{cases} \circ$$



公式中的  $\underline{\xi}$  和  $\bar{\xi}$  須被限制在  $\underline{x}_k$  和  $\bar{x}_k$  之間，除了避免產生超過變數上下限的值外，也縮小變數限制範圍，讓  $x_{qk}^i$  以  $\xi$  為中心作些許變動。因此

$$x_{qk}^i = \begin{cases} \xi, & \text{if } \sim U(0,1) \leq 0.5 \\ \text{RandomReal}(\underline{\xi}, \bar{\xi}), & \text{otherwise} \end{cases},$$

$\sim \text{RandomReal}(min, max)$  是介於  $min$  和  $max$  之間且均勻分布的亂數值。而所有子水流的位置向量會依據位置順序一一的指派。

本研究研擬多目標連續優化仿水流演算法提供兩種不同的匯流模式：一種是以水流位置的接近程度當作匯流標準，另一種為以水流目標函數值的相似度為匯流標準。分流的最後一個步驟是子水流質量的分配和指定其母水流，本研究依據不同的匯流模式分別使用不同的質量分配法。第一種質量分配法是平均地分配質量給子水流，設  $m_q^i$  是水流  $i$  所分流出的第  $q$  條子水流之質量；於是

$$m_q^i = \frac{1}{n^i} m^i, \quad q=1, 2, \dots, n^i。$$

第二種質量分配需先計算子水流的目標函數值。設水流  $i$  所分支出的第  $q$  條子水流之目標函數值是

$$\mathbf{f}_q^i \equiv [f_1(\mathbf{x}_q^i) \cdots f_g(\mathbf{x}_q^i)] = [f_{q1}^i \ f_{q2}^i \ \cdots \ f_{qg}^i]$$

而權重加總後的目標函數值是  $F_q^i = \sum_{j=1}^g w_j \frac{f_{qj}^i - \underline{f}_j}{\bar{f}_j - \underline{f}_j}$ ， $q=1, 2, \dots, n^i$ 。公式中的最

大值  $\bar{f}_j$  和最小值  $\underline{f}_j$  需在每次計算過所有子水流的目標函數值後更新。質量會依據各子水流的目標值改善量進行分配。以水流  $i$  所分流出的第  $q$  條子水流為例，

第  $q$  條子水流的改善量即是  $F^i - F_q^i$ ，但是改善量可能為負值。本研究讓有改善量

最大的子水流所分配到的質量是改善量最小的子水流的兩倍。首先求得子水流的  
最大和最小目標值改善量，分別是

$$\bar{\delta} = \max_{q=1,2,\dots,n^i} \{F^i - F_q^i\}$$

和

$$\underline{\delta} = \min_{q=1,2,\dots,n^i} \{F^i - F_q^i\}。$$

子水流  $q$  的質量分配比例為

$$\rho_q = (F^i - F_q^i - \underline{\delta}) + (\bar{\delta} - \underline{\delta})，$$

水流  $i$  的子水流的質量

$$m_q^i = \frac{\rho_q}{\sum_{q'=1}^{n^i} \rho_{q'}} m^i，q = 1, 2, \dots, n^i。$$

在所有質量皆分配完畢後，水流  $i$  的位置、目標函數值和加權後的目標函數值轉

變為子水流的母代屬性資料，即  $\left. \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{x}}_q^i \leftarrow \mathbf{x}^i \\ \tilde{\mathbf{f}}_q^i \leftarrow \mathbf{f}^i \\ \tilde{F}_q^i \leftarrow F^i \end{array} \right\} q = 1, 2, \dots, n^i$ 。若  $n^i = 1$ ，則將水流  $i$  經

由移步轉換成該水流的唯一子水流。

最後更新當下水流集合  $X$  為所有子水流所構成，即

$$X \leftarrow \bigcup_{i=1}^n \{\mathbf{x}_1^i, \mathbf{x}_2^i, \dots, \mathbf{x}_{n^i}^i\}$$

，同時更新水流數

$$n \leftarrow \sum_{i=1}^n n^i。$$

分流移步作業的演算細節如下。

```

FlowSplittingAndMoving()
1  for  $i \leftarrow 1$  to  $n$ 
2       $n^i \leftarrow \begin{cases} 1, \text{if } |\tilde{F}^i - F^i| > \alpha \\ \text{Round}\left(\text{Pow}\left(\bar{n}, \left(1 - \frac{|\tilde{F}^i - F^i|}{\alpha}\right)\right)\right), \text{otherwise} \end{cases}$ 
3      for  $q \leftarrow 1$  to  $n^i$ 
4           $i' \leftarrow \sim R(1, m)$ 
5          for  $k \leftarrow 1$  to  $p$ 
6               $\xi \leftarrow \begin{cases} x_k^i, \text{if } \mathbf{x}^i \in \hat{X} \\ \tilde{x}_k^i, \text{else if } \tilde{\mathbf{x}}^i \in \hat{X} \\ \hat{x}_k^{i'}, \text{otherwise} \end{cases}$ 
7               $\underline{\xi} \leftarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(x_k + \xi), \text{if } \xi = \hat{x}_k^{i'} \\ \max(x_k, \xi - |\xi - \hat{x}_k^{i'}|), \text{otherwise} \end{cases}$ 
8               $\bar{\xi} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\bar{x}_k + \xi), \text{if } \xi = \hat{x}_k^{i'} \\ \min(\bar{x}_k, \xi + |\xi - \hat{x}_k^{i'}|), \text{otherwise} \end{cases}$ 
6              if  $\sim U(0,1) \leq 0.5x$ 
7                   $x_{qk}^i \leftarrow \xi$ 
8              else
10                  $x_{qk}^i \leftarrow \sim U_b(\underline{\xi}, \bar{\xi})$ 
16                 end if
17             end for
18         end for
19     end for
20      $X \leftarrow \bigcup_{i=1}^n \{\mathbf{x}_1^i, \mathbf{x}_2^i, \dots, \mathbf{x}_{n^i}^i\}$ 

```

上述流程中行 2 先決定水流  $i$  的分流數  $n^i$ ，在行 3 到行 10 將其子水流的位置一一指派，最後在行 20 更新水流集合  $X$ 。

## 匯流

匯流作業目的在於刪除重複和過於相似的解，避免不必要的搜尋和運算。本研究研擬兩種匯流法供使用者選用，第一種是位置匯流法(Location-based Merging approach, LM)以解在解空間的位置向量相似度為匯流參考，可用於連續或離散型多目標問題。除了位置匯流模式，本研究另設計第二種匯流法，目標函數值匯流法(Objective-based Merging approach, OM)，以解在目標函數值空間的位置相近程度為匯流參考。

使用LM法時，若兩條以上的水流的位置向量近乎相同時，則進行匯流作業。LM法是以位置向量相似度 $\beta_L$ 為衡量水流相似度的門檻， $0 < \beta_L < 1$ 。當多股水流的所有位置變數單位化後的差異皆小於 $\beta_L$ ，則將水流進行匯流。令

$\text{LocationMergeable}(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^{i'})$ 是估計水流 $i$ 能否和水流 $i'$ 進行位置模式匯流的運算式；

$$\text{LocationMergeable}(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^{i'}) = \begin{cases} \text{false, if } \exists k \in \{1, 2, \dots, p\} \ni \frac{|x_k^i - x_k^{i'}|}{\bar{x}_k - \underline{x}_k} > \beta_L. \\ \text{true, otherwise} \end{cases}$$

另一種匯流法—OM法則是當兩條以上的水流的目标函數值在函數值空間的位置相近時則進行匯流。因此OM法的優點是可以增加非臣服解的分散性。設目標函數值相似度 $\beta_o$ 為匯流門檻， $0 < \beta_o < 1$ 且設 $\text{ObjectiveMergeable}(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^{i'})$ 是評估水流 $i$ 否能和水流 $i'$ 匯流的運算式；

$$\text{ObjectiveMergeable}(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^{i'}) = \begin{cases} \text{false, if } \exists j \in \{1, 2, \dots, g\} \ni \frac{|f_j^i - f_j^{i'}|}{\bar{f}_j - \underline{f}_j} > \beta_o. \\ \text{true, otherwise} \end{cases}$$

若是目標函數的數目小於位置變數的數目，則OM法運算效能會較LM法高，但子水流需先計算目標函數值。

進行匯流作業之前先將水流集合  $X$  中每一條水流  $i$  各自形成匯流集合  $A^i$ ，接著依使用所選用的匯流法來評估水流相似度。評估水流相似度時須依據  $X$  內每水流的順序由前往後檢視是否與前面的目標水流  $i$  相似。當水流  $i$  和水流  $i'$  經評估後可以合併，若  $i < i'$ ，則將水流  $i'$  加入  $A^i$  且令  $A^{i'}$  是空集合。另一方面，若水流  $i'$  和  $X$  內其他水流並不相似，則  $A^{i'}$  內至少含有水流  $i'$ ，即  $A^{i'} \neq \emptyset$  且  $\mathbf{x}_{i'} \in A^{i'}$ 。假設  $A^i \neq \emptyset$  且  $A^i = \{\mathbf{x}^i\} \cup \{\mathbf{x}_1^{i'}, \mathbf{x}_2^{i'}, \dots, \mathbf{x}_{n^{i'}}^{i'}\}$ ，表示有  $n^{i'}$  條水流可和水流  $i$  進行匯流。

確認已將所有和水流  $i$  相似的水流加入  $A^i$  後，由  $A^i$  內任選一條水流為匯流後的代表水流並更新其質量為  $A^i$  內水流質量的加總。令  $\text{RandomElement}(A)$  是一個可以隨機從集合  $A$  中挑選出一個元素的運算式；換言之  $\text{RandomElement}(A) \in A$ 。

所以設水流  $\mathbf{x}^{i'} = \text{RandomElement}(A^i)$  是從非空集合  $A^i$  中挑選出的代表水流。將  $A^i$  內水流的質量相加作為代表水流的質量  $m^{i'} = \sum_{v_i, \mathbf{x}^i \in A^i} m^i$ 。當所有非空匯流集合都匯流成單一水流後，更新現有水流集合

$X \leftarrow \{\mathbf{x}^{i'} \mid A^i \neq \emptyset \wedge \mathbf{x}^{i'} = \text{RandomElement}(A^i)\}$  和現有水流數

$n \leftarrow \text{Count}(A^i \neq \emptyset)$ 。

## 蒸發

蒸發作業是模擬自然界中水蒸發至大氣中的行為。地表上的水流會隨時間蒸散至大氣中，當大氣中的水氣達到飽和點，再透過降雨回到地表。WFA4MC 的蒸發率  $\alpha$  由使用者所設定，值域為  $0 < \alpha < 1$ 。令  $v$  是大氣中的累積的水氣量，演化初始時歸零， $v \leftarrow 0$ 。在蒸發作業中蒸發後的水氣質量會加到大氣的水氣量  $v$  內，即

$$v \leftarrow v + \alpha \sum_{i=1}^n m^i。$$

經過蒸發後， $X$  中每條水流的質量更新為

$$m^i \leftarrow (1-\alpha)m^i; i=1,2,\dots,n \quad \circ$$

水流的質量關係到水流是否能繼續參與下個代次的演算流程，蒸發後若水流的質量小於質量下限則刪除該水流。總水流數由使用者自行設定，令  $\bar{z}$  是總水流上限；則水流的最小質量限定是  $\bar{m}/\bar{z}$ ， $\bar{m}$  是使用者所設定的水流初始質量。當水流質量小於  $\bar{m}/\bar{z}$  表示水流質量小於演化環境中每條水流應有的平均質量，判定水流的質量不足以使水流繼續進行演化，因此並刪除質量不足的水流並將其質量全數蒸散於大氣之中，

$$v \leftarrow v + \sum_{\forall i, m^i \leq \bar{m}/\bar{z}} m^i$$

同時更新水流集合

$$X \leftarrow X - \{\mathbf{x}^i \mid m^i \leq \bar{m}/\bar{z}\} \circ$$

## 降水

降水作業的功能在於將大氣中的水氣降於地面成新水流。求解過程有助於開發新的搜尋區域以跳脫區域最佳解。當大氣中的水氣含量達使用者設定的水氣飽和度即自動進行降水作業。降水的水氣質量下限是： $\rho\bar{m}$ ； $0 < \rho < 1$  的  $\rho$  是水氣飽和度。因此水氣質量  $v \geq \rho\bar{m}$  時大氣中水氣達飽和狀態，執行降水作業。

降水產生的水流數設定是目前  $X$  內的水流數  $n$ ，但是水流總數被  $\bar{z}$  所限制。另一方面，在每條水流最小質量是  $\bar{m}/\bar{z}$  的限制下，依照  $\bar{m}/\bar{z}$  的比例分配水氣質量  $v$  時，最多可產生  $\lfloor v\bar{z}/\bar{m} \rfloor$  條水流，因此降水的水流數是

$$n'' = \min(n, \bar{z} - n, \lfloor v\bar{z}/\bar{m} \rfloor) \circ$$

令  $X'' = \{\mathbf{x}''^1, \mathbf{x}''^2, \dots, \mathbf{x}''^{n''}\}$  是由降水作業產生的水流，而  $X''$  裡每條水流的質量由大氣中的水氣質量  $v$  來分配。令  $m''^i$  是降水水流  $\mathbf{x}''^i$  的質量，於是  $m''^i = v/n''$ 。每條降水水流的位置是以現有水流集合中隨機抽出一股水流的位置為基礎隨機偏離一範圍。在派定  $\mathbf{x}''_i = [x''_{i1}, x''_{i2}, \dots, x''_{iq}]$  的位置時首先須從  $X$  中隨機選出一條水流

$i'$ ，接下來在每個元素  $x_k^{i'}$  上給定一個介於位置變數上限和下限之間的隨機距離  $\delta_k^i$ ；即  $x_k^{m i'}$  是  $x_k^{i'}$  隨機向正向或負向偏移，再隨機距離偏移。偏移結果若  $x_k^{m i'}$  超出變數的上下界  $[\underline{x}_k, \bar{x}_k]$  時，則指定  $\mathbf{x}^{m i'} = x_k^{i'}$  否則設成偏移結果，因此得到

$$x_k^{m i'} = \left\{ \begin{array}{l} x_k^{i'}, \text{if } (x_k^{i'} + \delta_k^i > \bar{x}_k \vee x_k^{i'} - \delta_k^i < \underline{x}_k) \\ x_k^{i'} + \delta_k^i, \text{else if } \sim U(0,1) \geq 0.5 \\ x_k^{i'} - \delta_k^i, \text{otherwise} \\ i' = \text{RandomInteger}(1, n) \\ \delta_k^i = \sim U(0,1)(\bar{x}_k - \underline{x}_k) \end{array} \right. \quad , i = 1, 2, \dots, n'' ,$$

降水水流  $\mathbf{x}^{m i'}$  的母水流  $\tilde{\mathbf{x}}^{m i'}$  則是水流  $i'$  的母水流，因此  $\tilde{\mathbf{x}}^{m i'} \leftarrow \tilde{\mathbf{x}}^{i'}$ 。

最後更新水流集合  $X \leftarrow X \cup X''$  和水流數  $n \leftarrow n + n''$ 。

### 非臣服解更新

經上述演算程序更新水流集合後，須評估  $X$  內現存水流的目標函數值，計算每條水流  $i$  的目標值向量是

$$\mathbf{f}^i = [f_1(\mathbf{x}^i) f_2(\mathbf{x}^i) \cdots f_g(\mathbf{x}^i)] \equiv [f_j^i]_{1 \times g} , i = 1, 2, \dots, n ,$$

並更新目標函數值的最大值和最小值

$$\left. \begin{array}{l} \underline{f}_j \leftarrow \min(\underline{f}_j, f_j^i) \\ \bar{f}_j \leftarrow \max(\bar{f}_j, f_j^i) \end{array} \right\} j = 1, 2, \dots, g .$$

此外，累計水流的改善量  $\Delta F$  和累計水流數也一同更新

$$\Delta F \leftarrow \Delta F + \sum_{i=1}^n |F^i - \tilde{F}^i| , N \leftarrow N + n .$$

非臣服解集合  $\hat{X}$  是用以呈現給使用者的最終解。當該代次全部水流的目標數值都已計算完畢後，須檢視  $X$  內是否有水流可以加入  $\hat{X}$  且加入後是否會使  $\hat{X}$

內的解移出。水流為了加入  $\hat{X}$  須經過非臣服解篩選運算式的篩選，若水流不臣服於被  $\hat{X}$  和  $X$  裡的水流即可加入  $\hat{X}$ 。所以令

$$X^{(1)} \leftarrow \left\{ \mathbf{x}^i \mid \mathbf{x}^i \in X, \left( \bigwedge_{\forall \mathbf{x}^{i'} \in X, i \neq i'} \neg \text{Dominated}(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^{i'}) \right) \wedge \left( \bigwedge_{\forall \hat{\mathbf{x}}^{i'} \in \hat{X}} \neg \text{Dominated}(\mathbf{x}^i, \hat{\mathbf{x}}^{i'}) \right) \right\},$$

式中當  $\mathbf{x}^i$  與  $X$  內所有解  $\mathbf{x}^{i'}$  經過  $\text{Dominated}(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^{i'})$  運算輸出結果皆為 false，「 $\neg$ 」

符號為布林運算子，表示「非、不」。且  $\mathbf{x}^i$  與  $\hat{X}$  內所有解  $\hat{\mathbf{x}}^{i'}$  經過  $\text{Dominated}(\mathbf{x}^i, \hat{\mathbf{x}}^{i'})$

運算輸出結果同樣皆為 false，則  $\mathbf{x}^i$  是  $X$  內可以加入  $X^{(1)}$  的水流，並加入  $\hat{X}$ 。當  $X^{(1)}$

不是空集合時需再檢視  $\hat{X}$  內是否有成員臣服於  $X^{(1)}$  內的新非臣服解。設

$$X^{(2)} \leftarrow \left\{ \hat{\mathbf{x}}^i \mid \mathbf{x}^i \in \hat{X}, \bigvee_{\forall \mathbf{x}^{(1)i'} \in X^{(1)}, i \neq i'} \neg \text{Dominated}(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^{(1)i'}) \right\},$$

表示當  $\hat{\mathbf{x}}^i$  臣服於  $X^{(1)}$  內任一解  $\mathbf{x}^{(1)i}$  則加入  $X^{(2)}$ 。非臣服解集合更新為

$$\hat{\tilde{X}} \leftarrow (X - X^{(2)}) \cup X^{(1)}.$$

### 非臣服解集合裁減

當目前非臣服解集合  $\hat{X}$  內解的數量  $s$  超過使用者所要設定的非臣服解數上限  $\bar{s}$  時，必須對非臣服解集合進行裁減作業。裁減程序執行一次刪除一個「較差」的非臣服解，因此非臣服解集合裁減作業須執行  $s - \bar{s}$  次裁減程序。裁減程序是刪除擁擠距離最小的最差解。令擁擠距離  $\tau^i$  是  $\hat{X}$  中的解  $\hat{\mathbf{x}}^i$  和其他非臣服解在目標函數值空間中最小的標準化距離。標準化距離是兩個非臣服解的目標函數值差除以  $\hat{X}$  內目標函數值的臨界值的長度。令  $r_j$  是目標函數值  $j$  的臨限值的長度，

$$r_j = \max_{i'=1, \dots, s} \{ \hat{f}_j^{i'} \} - \min_{i'=1, \dots, s} \{ f_j^{i'} \}, \quad j=1, 2, \dots, g$$

非臣服解  $i$  的擁擠距離是



$$\tau^i = \min_{i'=1, \dots, s; i' \neq i} \left\{ \sum_{j=1}^g \left( \frac{1}{r_j} |\hat{f}_j^i - f_j^{i'}| \right) \right\}。$$

在反復執行的過程中  $\tau^i$  和  $r_j$  會不斷的更新，每刪除一個非臣服解後需更新現有非臣服解的  $\tau^i$  且更新目前  $\hat{X}$  內目標  $j$  的最大值和最小值計算新的  $r_j$ 。擁有最小  $\tau^i$  值的非臣服解會從  $\hat{X}$  剔除；即  $\hat{X} \leftarrow X - \{\hat{\mathbf{x}}^{i^*}\}$ ，式中  $i^* = \arg \min_{i=1, \dots, s} \tau^i$ 。

分流移步的程序需參看現有非臣服解來因引領水流動，為了讓子水流朝目標函數值空間中較分散的位置前進，而非過於擁擠的位置。因此每代次結束後若繼續保留過多在目標函數空間分布過於緊密的解並非有意義的事。為了讓分散性較佳的非臣服解來領導後續產生的水流，在每一代次結束後若  $s > \bar{s}$ ，則刪除較擁擠的  $s - \bar{s}$  個非臣服解，保留  $\bar{s}$  個在目標函數值空間分布較分散的非臣服解。



### 3.3 WFA4MC 整體演算程序

圖3.1展示的流程圖是仿水流優化演算法在多目標連續型優化問題的運算程序。停止條件可設定演化時間上限、演化代次上限，和目標函式呼叫上限，使用者可依需求從中選擇其中一項。由水流初始化開始依序進行分流移步、匯流作業，和蒸發作業。蒸發作業執行完畢後大氣中所累積的水氣達到飽和執行降水作業，否則對直接對非臣服解進行更新。非臣服解更新完成後，會對多餘的非臣服解進行裁減。執行一代次水流演化作業後，檢查是否符合停止條件。若是則完成水流演化，以迄今最佳解作為求解最終結果。否則以現有水流再次由分流作業開始進行下一代次水流演化程序。

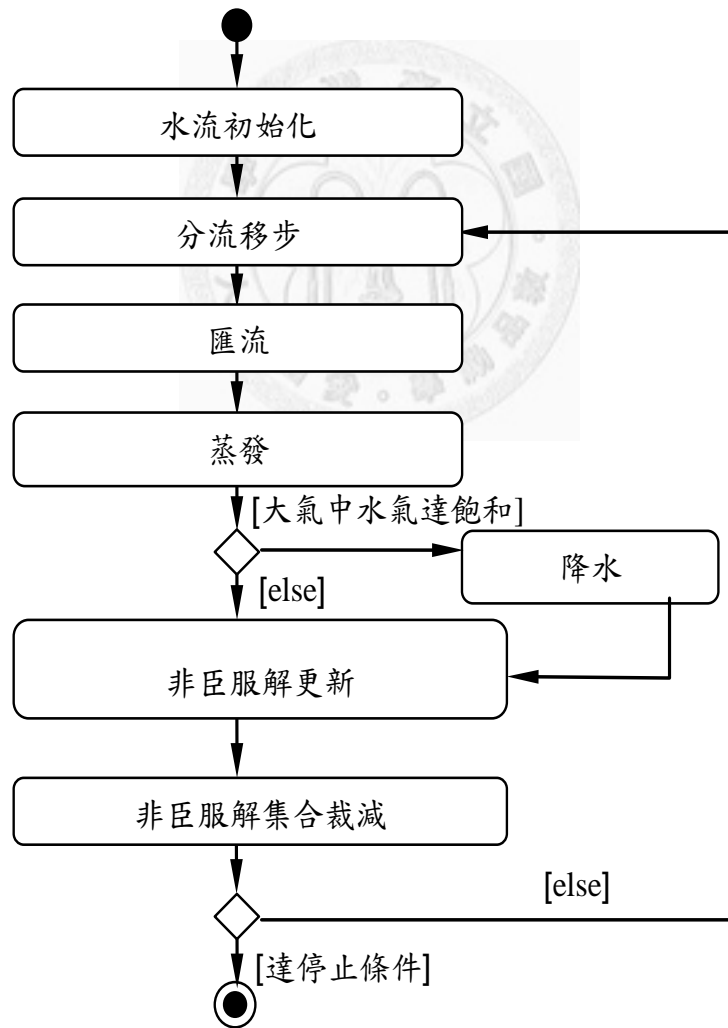


圖 3.1 仿水流優化演算法於多目標連續型優化問題的演算流程

### 3.4 多目標連續型仿水流優化演算法小結

WFA4MC 演算中的主要四大步驟，分流移步、匯流、蒸發和降水四項作業的功能為：

- (1) 分流移步：產生代理人做廣域搜尋。
- (2) 匯流：刪去過於鄰近的解代理人，節省搜尋資源。
- (3) 蒸發：累積水氣提供降水。
- (4) 降水：跳脫區域最佳解，開發新的搜尋區域。

本研究依據多目標規劃求解對於廣度方面的訴求，在分流移步作業除了參考母水流資訊外，也加入非臣服解當作移步參考，令解兼具方向性和廣度。而大部份多目標優化問題對相似定義皆是解代理人在目標函數值空間的位置上作探討，因此本研究將匯流作業分兩種，第一種為在代理人所求得解作相似性合併，另一種以代理人的相似度做合併依據，並比較其求解效能。



## 第四章 多目標連續型仿水流優化演算法範例驗證

本章展示 WFA4MC 求解系統及對標竿問題的測試結果。首先說明測試的多目標最佳化問題的測試標竿問題和使用的評量指標。接著分別測試 WFA4MC 中兩種匯流法的求解效能，再比較 WFA4MC 與其他多目標最佳化演算法的求解結果和效能。

### 4.1 測試的多目標優化標竿問題

本研究主要研擬 WFA4MC 求解模式並測試，目的在驗證求解效能。求解對象使用 Zitzler *et al.* (2000)提出的 ZDT 系列標竿問題：ZDT1、ZDT2、ZDT3、ZDT4、ZDT5 及 ZDT6。這些標竿問題的共同形式是

$$\begin{aligned} \min \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= (f_1(x_1), f_2(\mathbf{x})) \\ \text{when } f_2(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}') \cdot h(f_1(x_1), g(\mathbf{x}')) \\ x_i &\leq x_i \leq \bar{x}_i, i = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (4-1)$$

，式中  $\mathbf{x} = [x_1 x_2 \dots x_p]$ ， $\mathbf{x}' = [x_2 x_3 \dots x_p]$ ，式 4-1 中顯示這些標竿問題只有二個目標函數  $f_1(x_1)$  和  $f_2(\mathbf{x})$ ； $g = 2$  且解的維度是  $p$ 。目標函數  $f_1(x_1)$  僅與一個變數  $x_1$  有關，相對地  $g(\cdot)$  函數和  $x_2 \dots x_q$  等  $q-1$  個變數有關。此外  $f_2(\mathbf{x})$  則是  $g(\mathbf{x}')$  函數和  $h(f_1(x_1), g(\mathbf{x}'))$  函數值乘積。函數  $h(f_1(x_1), g(\mathbf{x}'))$  則與  $f_1(x_1)$  和  $g(\mathbf{x}')$  的函數值有關。本論文在使用這些標竿問題時由於 ZDT5 是離散多目標優化問題，不納入求解範圍內，因此只使用其中的五個標竿問題，ZDT1、ZDT2、ZDT3、ZDT4 及 ZDT6。

## ZDT1 標竿問題

ZDT1 標竿問題有兩個目標函數，變數個數  $p=30$ 。目標空間是二維的柏拉圖前緣是一連續的凸曲線。在 Zitzler 的六個標竿問題中是最容易求解的問題。

此標竿問題的  $f_1(x_1) = x_1$ ;  $g(\mathbf{x}') = 1 + 9 \frac{\left(\sum_{i=2}^p x_i\right)}{(p-1)}$ ，且  $h(\mathbf{x}) = 1 - \sqrt{\frac{f_1(x_1)}{g(\mathbf{x}')}}$ 。此外所有

變數定義域在  $[0,1]$  區域間中，意即  $x_i \in [0,1]$ ， $\forall i$ 。當  $x_1 \in [0,1]$  且  $x_{i'} = 0$ ，

$\forall i' = 2, \dots, p$  時即  $\mathbf{x} = [x_1 00 \dots 0]$  是柏拉圖前緣線解。圖 4.1 顯示 ZDT1 的柏拉圖前緣線和目標函數值空間。

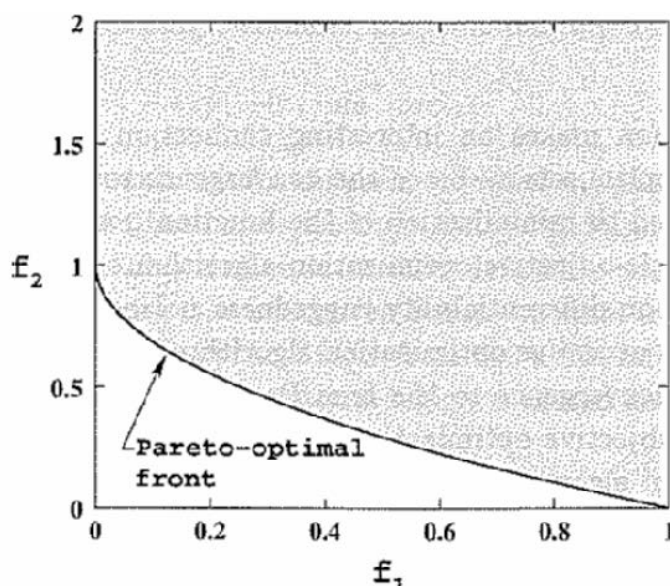


圖 4.1 ZDT1 柏拉圖前緣線(Deb, 1999)

## ZDT2 標竿問題

ZDT2 是個兩個目標函數的多目標問題， $p=30$ 。它的柏拉圖前緣是一連續

的非凸曲線。此測試函數  $f_1(x_1) = x_1$ ，式中  $g(\mathbf{x}') = 1 + 9 \frac{\left(\sum_{i=2}^p x_i\right)}{(p-1)}$ ，

$h(\mathbf{x}) = 1 - \left(\frac{f_1(x_1)}{g(\mathbf{x}')}\right)^2$ 。此外所有變數定義域在  $[0,1]$  區域間中，意即  $x_i \in [0,1]$ ， $\forall i$ 。

當  $x_1 \in [0,1]$ ，且  $x_{i'} = 0$ ， $\forall i' = 2, \dots, p$  時即  $\mathbf{x} = [x_1 00 \dots 0]$  柏拉圖前緣線解。圖 4.2 顯示 ZDT2 的柏拉圖前緣線和目標函數解空間。

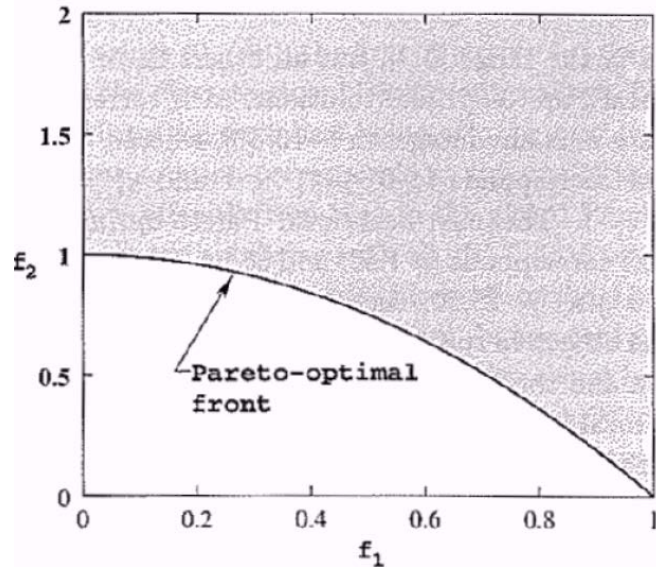


圖 4.2 ZDT2 柏拉圖前緣線(Deb, 1999)

### ZDT3 標竿問題

ZDT3 也是一個二維的多目標問題，擁有幾個分離而不連接的柏拉圖前緣。變數維度  $p=30$ ，因柏拉圖前緣線是分離的，求解 ZDT3 的困難處在於能否求得

每個不連續的前緣解。此測試函數  $f_1(x_1) = x_1$ ；式中  $g(\mathbf{x}') = 1 + 9 \frac{(\sum_{i=2}^p x_i)}{(p-1)}$ ，

$h(\mathbf{x}) = 1 - \sqrt{\frac{f_1(x_1)}{g(\mathbf{x}')}} - \left( \frac{f_1(x_1)}{g(\mathbf{x}')} \right) \sin(10\pi f_1(x_1))$ 。此外所有變數定義域在  $[0,1]$  區域間

中，意即  $x_i \in [0,1]$ ， $\forall i$ 。當  $x_1 \in [0,1]$ ，且  $x_{i'} = 0$ ， $\forall i' = 2, \dots, p$  時即  $\mathbf{x} = [x_1 00 \dots 0]$ ，

這些解即為柏拉圖前緣線解。圖 4.3 中顯示在目標函數定義域範圍內有五段的柏拉圖前緣線。

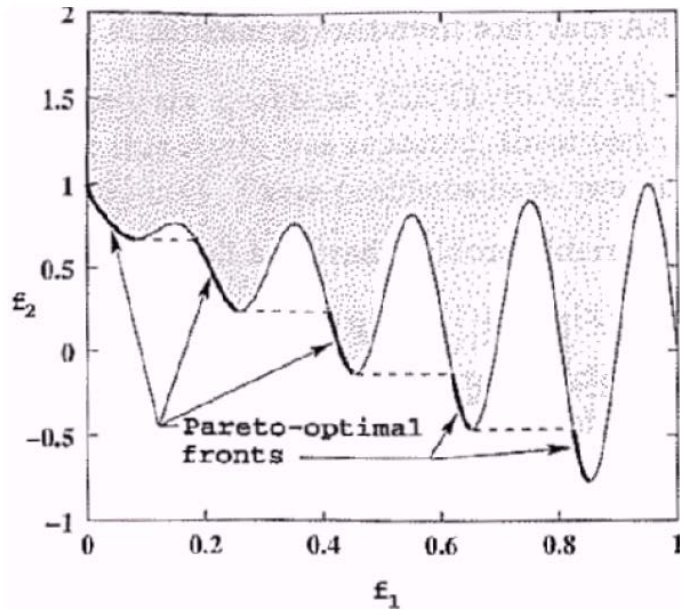


圖 4.3 ZDT3 柏拉圖前緣線(Deb, 1999)

#### ZDT4 標竿問題

ZDT4 同樣是一個二維的多目標問題， $p=10$ ，柏拉圖前緣線是連續凸曲線，擁有 100 條區域柏拉圖前緣線為此函數最大的特色，最前端才是全域柏拉圖前緣線。此範例的函數  $f_1(x_1) = x_1$ ， $g(\mathbf{x}') = 1 + 10(p-1) + \sum_{i=2}^p (x_i^2 - 10 \cos(4\pi x_i))$ ，

$h(\mathbf{x}) = 1 - \sqrt{\frac{f_1(x_1)}{g(\mathbf{x}')}}}$ 。除了  $x_1$  的定數定義域在  $[0,1]$  區域間中，其他變數  $x_i$  皆在  $[-5,5]$

之間， $i=2,3,\dots,p$ ，即  $x_1 \in [0,1]$ ， $x_i \in [-5,5]$ ， $\forall i'=2,\dots,p$ 。當  $x_1 \in [0,1]$ ，且  $x_i = 0$ ，

$i=2,3,\dots,p$  時即  $\mathbf{x} = [x_1 00\dots 0]$ ，這些解即為柏拉圖前緣線解。柏拉圖前緣線的

收斂性會被  $g(\mathbf{x}')$  影響，當  $g(\mathbf{x}')$  為多峰函數會有許多區域最佳解，這些區域最佳解在目標函數空間上產生數條區域柏拉圖前緣線。區域最佳解會使柏拉圖解的搜尋困難度增加。圖 4.4 是 ZDT4 的柏拉圖前緣線和目標函數解空間。

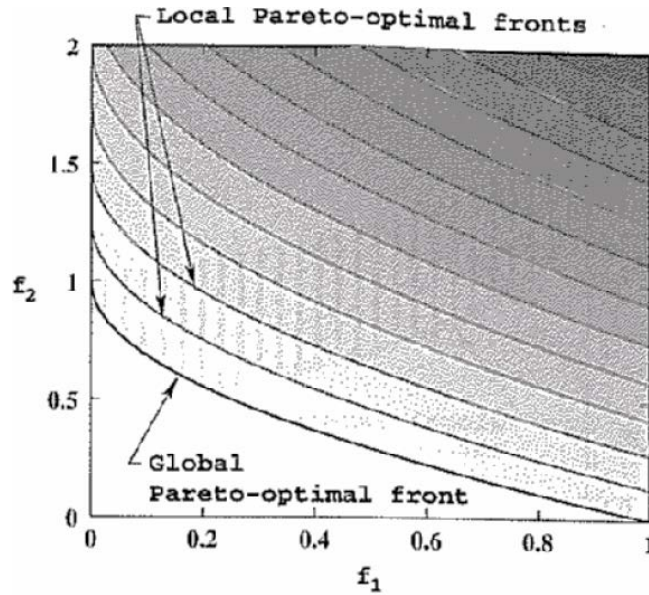


圖 4.4 ZDT4 柏拉圖前緣線(Deb, 1999)

### ZDT6 標竿問題

ZDT6如同上述 4 個標竿問題，同樣是一個二維的多目標問題，變數個數 10 維，是連續非凸曲面的柏拉圖前緣線多目標問題。此測試函數

$$f_1(x_1) = 1 - \exp(-4x_1) \sin^6(6\pi x_1); \quad g(\mathbf{x}') = 1 + 9 \left( \frac{\left( \sum_{i=2}^p x_i \right)}{(p-1)} \right)^{0.25},$$

$$h(\mathbf{x}) = 1 - \left( \frac{f_1(x_1)}{g(\mathbf{x}')} \right)^2, \quad \text{此外所有變數定義域在 } [0,1] \text{ 區域間中，意即 } x_i \in [0,1], \forall i。$$

當  $x_1 \in [0,1]$ ，且  $x_{i'} = 0$ ， $i' = 2, \dots, p$  時即  $\mathbf{x} = [x_1 00 \dots 0]$ ，這些解即為柏拉圖前緣線解。求解此問題較不容易產生均勻分布的非臣服解， $f_1(x_1)$  當在  $x_1$  接近 0、0.328、0.50、0.67、0.83 及 1 時都會使  $f_1(x_1) = 1$ ，如圖 4.5 所示。當亂數產生 100 個介於  $[0,1]$  的實數值指定給  $x_1$  時，而  $x_{i'} = 0$ ， $i' = 2, \dots, p$ ，求算  $f_1(\cdot)$  及  $f_2(\cdot)$  標示在目標空間上，得到圖 4.6，這些柏拉圖解集中在  $f_1(x_1)$  接近 1 的位置。整體來說，各



種求解法均不易求得平均分布的非臣服解。因此求得平均分布的非臣服解成為求解 ZDT6 問題的主要挑戰。

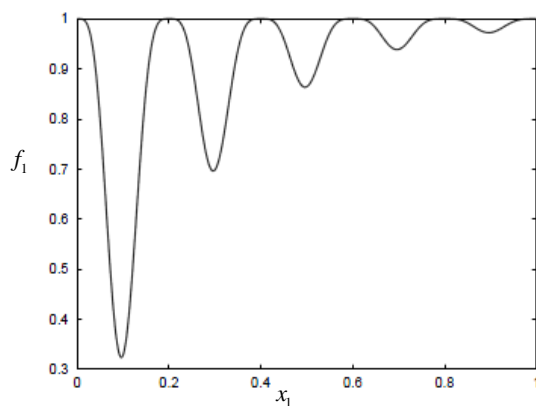


圖 4.5  $f_1$  目標函數值的分布圖(Deb, 1999)

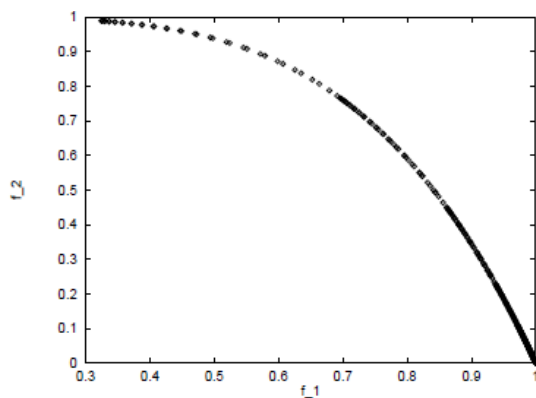


圖 4.6 100 個亂數產生的  $x_1$ (Deb, 1999)

ZDT6 的柏拉圖前緣線和目標函數解空間如圖 4.7 所示。

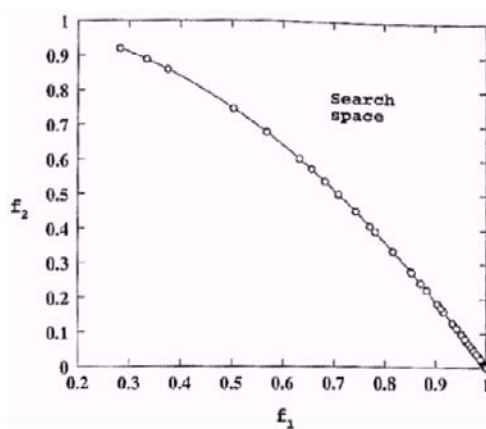


圖 4.7 ZDT6 柏拉圖前緣線(Deb, 1999)

## 4.2 評量指標

單目標問題的解在目標空間只有唯一一個值，只需比較該值大小，便可分辨出解的好壞。不同於單目標問題，多目標最佳化問題的解與解間有互不臣服的關係存在。解在目標空間上有多個值。沒有一個解的所有目標函數值都優於另一個解，因此必須以其他的方式評估演算法求解多目標最優化問題的效能。本研究測試的標竿問題都有已知的柏拉圖解，因此可使用收斂距離和均勻變異兩種評量指標來衡量非臣服解的品質。除了收斂距離和均勻變異指標外，本研究提出兩種非臣服解品質評量指標，正確率和涵蓋率來評估非臣服解的品質。以上所有指標將在後面章節做說明。

### 4.2.1 收斂距離(Generational Distance)和均勻變異(Spacing metric)

Chen *et al.* (2011)在文獻中使用收斂距離和均勻變異兩種評量指標來衡量非臣服解品質。Veldhuizen (1999)定義一種非臣服解和柏拉圖前緣解間的距離代表收斂程度。求得的非臣服解與柏拉圖前緣解距離就越小收斂性越好，反之若收斂性較差時，距離就越大。將每一個非臣服解和最近的柏拉圖解之間的距離相加後除以所以找到的非臣服解數代表求得的解組合與真正的柏拉圖之間的時間距離，將為收斂距離(Generational Distance)。因此定義距離

$$G = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{\bar{s}} (d^i)^2}}{\bar{s}},$$
$$d^i = \min_{i'=1,2,\dots,\bar{n}} \left\{ \sqrt{\sum_{j=1}^g (\hat{f}_j^i - \hat{f}_j^{i'})^2} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, \bar{s},$$
$$\hat{X} = \{\hat{\mathbf{x}}^1, \hat{\mathbf{x}}^2, \dots, \hat{\mathbf{x}}^{\bar{n}}\},$$
$$\hat{\mathbf{f}}^{i'} = [\hat{f}_1^{i'} \hat{f}_2^{i'} \dots \hat{f}_g^{i'}] = [f_1(\mathbf{x}^{i'}) f_2(\mathbf{x}^{i'}) \dots f_g(\mathbf{x}^{i'})],$$

式中  $\hat{X}$  是標竿問題已知柏拉圖解集合，而  $\hat{n}$  是柏拉圖解數，且設柏拉圖解  $i$  是  $\hat{\mathbf{x}}^i = [x_1^i x_2^i \dots x_p^i]$ ， $\hat{\mathbf{f}}^i$  是柏拉圖解  $i$  的目標值向量。距離  $d^i$  是非臣服解  $i$  與柏拉圖前緣線解上最接近的柏拉圖解的目標值歐式距離， $\bar{s}$  為非臣服解的數量。

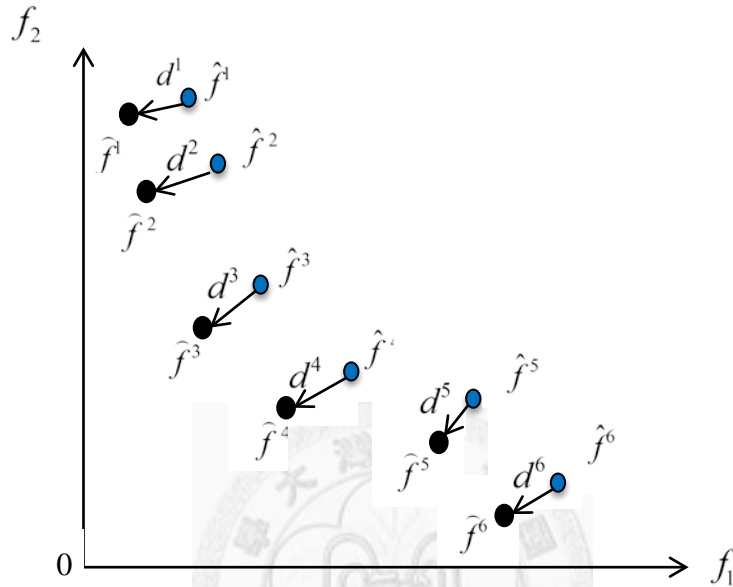


圖 4.8 計算非臣服解和柏拉圖解的收斂距離示意

如圖 4.8 所示離  $\hat{\mathbf{x}}^1$  最近的柏拉圖解是  $\hat{\mathbf{x}}^1$ ，兩者的距離為  $d^1 = \sqrt{\sum_{j=1}^g (\hat{f}_j^1 - \hat{f}_j^1)^2}$ ，依序

類推  $\hat{\mathbf{x}}^2$ 、 $\hat{\mathbf{x}}^3$ 、 $\hat{\mathbf{x}}^4$ 、 $\hat{\mathbf{x}}^5$ 、 $\hat{\mathbf{x}}^6$  距離  $\hat{X}$  最近點的距離分別是  $d^2$ 、 $d^3$ 、 $d^4$ 、 $d^5$ 、 $d^6$ 。

設  $\bar{s}=6$ ，則非臣服解集合  $\hat{X}$  與  $\hat{X}$  的收斂距離是  $G = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^6 (d^i)^2}}{6}$ 。若演算法向柏拉圖前緣線的收斂性越好，則收斂距離  $G$  越小。

多目標最佳化問題中除了非臣服解對柏拉圖前緣線解的收斂性是探討解品質的一個議題，另外還必須從非臣服解彼此間的分散性來衡量整個解集合的品質。為了評估所求的解是否都集中在某些區域，因此須對非臣服解間的分散的均勻程度做評估，Chen *et al.* (2011)使用雙目標值的解之間的均勻變異指標(Spacing

metric)

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\bar{s}-1} (\bar{d} - d^i)^2}{(\bar{s} - 1)}} ,$$

$$d^i = \min_{i'=1,2,\dots,\bar{s}, i \neq i'} \left( \sum_{j=1}^g \|\hat{\mathbf{f}}^j - \mathbf{f}^{i'j}\| \right), i=1,2,\dots,\bar{s}-1 ,$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{\bar{s}-1} d^i}{(\bar{s} - 1)} ,$$

式中  $\bar{s}$  是非臣服解個數， $g$  是目標值數目， $d^i$  是  $\hat{\mathbf{x}}^i$  和在目標函數值空間中最鄰近非臣服解間的距離， $\bar{d}$  是所有  $d^i$  的平均。 $d^i$  與  $\bar{d}$  的差距越小表示解的分佈狀況越均勻，因此當非臣服解分布越平均時， $S$  會趨近於零。

#### 4.2.2 正確率(Correctness)和涵蓋度(Coverness)

收斂距離然可以非臣服解和柏拉圖解之間的相近程度，但並未考量非臣服解的正確性，即非臣服解能否成為柏拉圖的一員。因此為了衡量最終求得的非臣服解集合  $\hat{X}$  內的非臣服解與已知的柏拉圖前緣線解集合  $\hat{X}$  隸屬程度，本研究研擬正確率(Correctness)為求解品質評量指標。令正確率

$$C = \frac{|\hat{X}'|}{|\hat{X}|} \times 100\% = \frac{1}{\bar{s}} \cdot |\hat{X}'| \times 100\% ,$$

$$\hat{X}' = \left\{ \mathbf{x}^i \mid \mathbf{x}^i \in X \text{ and } \bigwedge_{\forall \hat{\mathbf{x}}^i \in \hat{X}} \neg \text{Dominated}(\mathbf{x}^i, \hat{\mathbf{x}}^i) \right\} ,$$

$C$  是百分比定義成  $\hat{X}$  內的非臣服解也是柏拉圖解的比例百分比，而式中  $\hat{X}'$  是

$\hat{X}$  內未臣服於任何一個柏拉圖解的非臣服解組成的集合。當  $C = 100\%$  時，表示求得的非臣服解均是柏拉圖前緣解，因此  $C$  越大表示演算法的可信度越高。

任何多目標演算法最主要的目的是提供決策者完整的決策資訊，即使所求的收斂距離和正確程度再好，若非臣服解的廣度不佳，則所到的資訊也只是局部的。而均勻變異指標雖然可評估非臣服解之間的均勻性，但是無法表示非臣服解在目標函數值空間的涵蓋度，即所求的非臣服解分布的廣度。因此本研究提出涵蓋度(Coverness)來表示非臣服解的廣度。令  $\ell$  是解的涵蓋度，

$$\ell = \frac{u}{|\hat{X}|},$$

式中  $u$  表示非臣服解所涵蓋的柏拉圖解鄰近區域的個數。

令  $\varepsilon$  是區域半徑(Radius for Pareto Neighbourhood)，為使用者設定，為了平均分配目標函數值空間，建議  $\varepsilon = \frac{1}{|\hat{X}|}$ 。且令  $Q = \{Q^1, Q^2, \dots, Q^{\hat{n}}\}$  是柏拉圖鄰近區域是否被非臣服解所占有的辨識集合， $\hat{n}$  是柏拉圖解數，初始化時  $Q^{i'} = 0$ ， $i' = 1, 2, \dots, \hat{n}$ 。

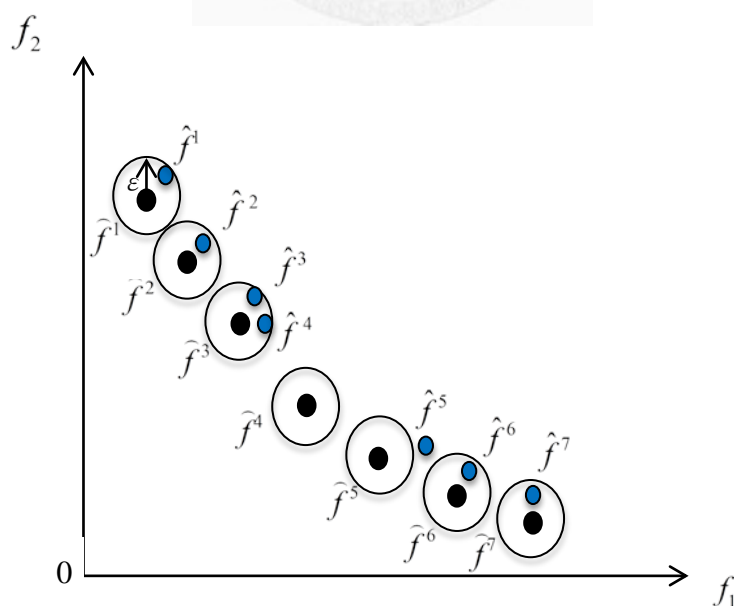


圖 4.9 計算非臣服解涵蓋度示意圖

如圖4.9所表示，每個柏拉圖解依據  $\varepsilon$  為半徑形成圓形的柏拉圖解鄰近區域，共有8個非臣服解和最接近的柏拉圖解距離小於  $\varepsilon$ 。但是  $\hat{x}^3$  和  $\hat{x}^4$  都佔領同一個柏拉圖解鄰近區域，故  $Q^3 = 1$  鄰近區域，而其他鄰近區域也分別被其他非臣服解所佔領，因此  $Q^1$ 、 $Q^2$ 、 $Q^6$ 、 $Q^7$  和皆等於1。因此  $\hat{X}$  共佔有5個柏拉圖解鄰近區域，，所以涵蓋度為  $\frac{5}{7}$ 。當  $l$  越大，代表非臣服解的分散性越好；若  $l$  越小則分散性越差。須注意在使用此指標的時候為了比較的公平性， $\hat{n} = s$  為必要條件。因為當  $\hat{n} > s$ ，就算所有非臣服解皆平均地分散在柏拉圖解鄰域，但是分母  $\hat{n}$  較大，會讓涵蓋的數值過小不足以表達分散度。因此柏拉圖解數須等於非臣服解數才能在涵蓋度指標中表示  $\hat{X}$  的分散度。

計算涵蓋率時首先須將所有柏拉圖解依據  $\varepsilon$  成立柏拉圖解鄰近區域，然後判斷每一個非臣服解所佔領的柏拉圖解鄰近區域。當非臣服解  $i$  和柏拉圖解  $i'$  的單位化最小距離小於  $\varepsilon$  且柏拉圖解  $i'$  的鄰近區域並未被任何非臣服解所佔有即  $Q^{i'} = 0$ ，表示非臣服解  $i$  可以佔有了柏拉圖解  $i'$  的鄰近區域並令  $Q^{i'} = 1$  及。當柏拉圖解  $i'$  的鄰近區域早已被其他非臣服所佔有，即  $Q^{i'} = 1$ ，在非臣服解  $i$  和柏拉圖解  $i'$  的單位化最小距離小於  $\varepsilon$  的同時非臣服解  $i$  和另外一個柏拉圖解  $i''$  的單位化距離同樣也小於  $\varepsilon$ ，則非臣服解  $i$  佔有  $i''$  並使  $Q^{i''} = 1$ 。另一方面，當非臣服解  $i$  和柏拉圖解  $i'$  的單位化最小距離小於  $\varepsilon$ ，但柏拉圖解  $i'$  的鄰近區域已被其他非臣服所佔有，即  $Q^{i'} = 1$ ，但是非臣服解  $i$  和其他柏拉圖解的單位距離皆大於  $\varepsilon$ ，則非臣服解  $i$  只能佔領柏拉圖解  $i'$  的鄰近區域且  $Q^{i'}$  仍然等於1。一個非臣服解只能佔有一個柏拉圖解鄰近區域或是未占有任何柏拉圖解鄰近區域。因此令

$$Q_{i^*} = \begin{cases} 1, & \text{if } i^* = \arg \min \left\{ \sqrt{\sum_{j=1}^g \left( \frac{|\widehat{f}_j^{i'} - f_j^i|}{f_j^{(u)} - f_j^{(l)}} \right)^2} \mid \sqrt{\sum_{j=1}^g \left( \frac{|\widehat{f}_j^{i'} - f_j^i|}{f_j^{(u)} - f_j^{(l)}} \right)^2} < \varepsilon \right\}, \forall Q_{i'} = 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases},$$

式中  $f_j^{(u)}$  和  $f_j^{(l)}$  是柏拉圖解及非臣服解兩個集合中第  $j$  個目標的最大值和最小值。

最後可以統計柏拉圖解鄰近區域被佔領的數量  $u = \sum_{i'=1}^{\hat{n}} Q_{i'}$ ，並求得涵蓋度  $\ell$ 。

### 4.3 多目標連續型仿水流優化演算法求解系統

本研究在 Microsoft .Net Framework 平台下使用 Microsoft Visual Studio 2010 為開發工具及 C# 程式語言開發 WFA4MC 多目標仿水流優化演算法求解系統 (Multi-WFA Optimization System)。本系統已納入 ZDT 系列標竿問題的求解模式，使用者可自行選定問題透過本系統進行求解。

圖 4.10 是本系統的人機介面。供使用者設定求解的問題並呈現最終非臣服解和評量指標，分為 A、B、和 C 三個區塊。圖 4.10 中 A 區塊讀入計算評量指標所需的柏拉圖解檔案。B 區塊顯示非臣服解和柏拉圖解圖型，並視覺效果展示供使用者檢視每一代次非臣服解目標函數值的平均和水流數。C 區塊是 WFA4MC 的初始設定區域，包含相關參數設定和最終非臣服解評量指標。C 區塊分為三個部分，如圖 4.11 所示。使用者可以在圖 4.11 的(a)中設定 WFA4MC 的相關參數設定，並在(b)設定停止條件和選擇所要求解的題目。在執行完畢後會在(c)展示求解品質的評量指標和目前演化代次、柏拉圖解數、非臣服解數和目標函數呼叫次數。

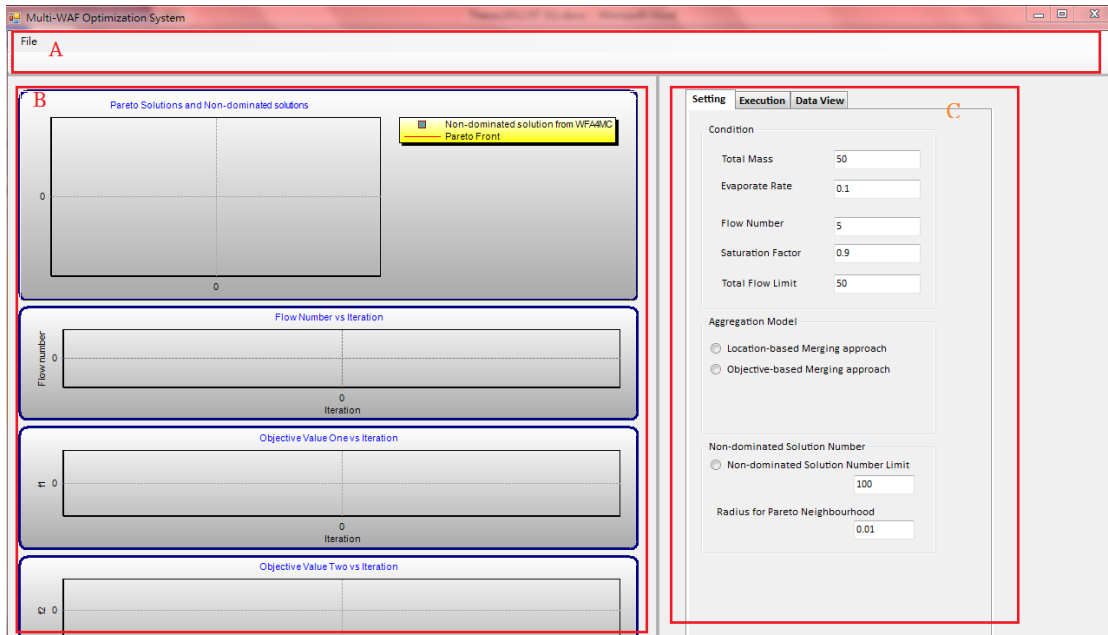


圖 4.10 多目標仿水流優化演算法求解系統人機介面



圖 4.11 C 區域的完整介面圖



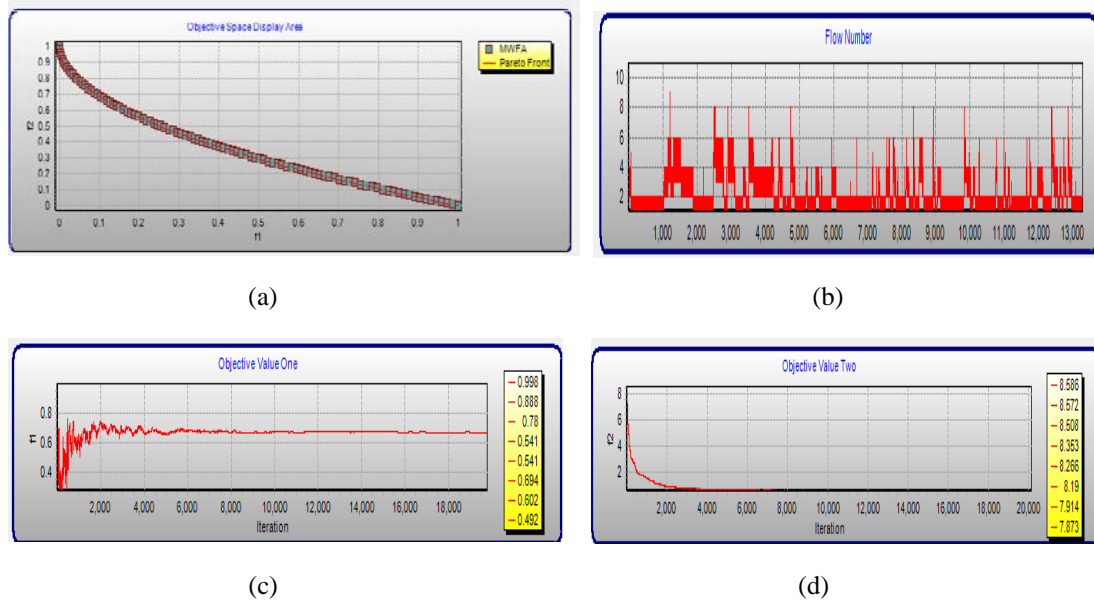


圖 4.12 求解過程數值變化圖

B 區塊如圖 4.12 所呈現，為使用者展示求解過程中的變化和演算法所獲得的非臣服解圖形。圖 4.12 的(a)是非臣服解所形成的圖形，(b)為每代次水流數。而(c)和(d)是每一代次非臣服解集合的第一個目標函數值和第二個目標函數值平均值的變化曲。

#### 4.4 標竿問題效能測試

本章節展示兩組實驗測試的結果，第一組實驗測試本研究提出的兩種匯流法測試4.1節的標竿問題並比較兩者的求解品質。第二組實驗是在以目標函數呼叫次數上限限定下，和其他多目標啟發式演算法比較求解品質。

所有參數設定如表4-1所展示。在參數設定上，為了避免產生過多子水流和保留過量的水流造成資源浪費，最大分流數及總水流數的設定不能過高，因此設最大分流數  $\bar{n} = 5$  和總水流數上限  $\bar{z} = 50$ 。降水作業雖可以助目前所求的解脫離區域最佳解。但在降水次數過高的情況下，不參看任何資訊只是以隨機的方式改變水流的位置變數的降水作業會造成過多次無效搜尋。而降水作業發生在  $v \geq \rho \bar{m}$ ，

因此建議初始質量 $\bar{m}$ 和降水飽和度 $\rho$ 不宜過低，另外水流蒸發率 $\alpha$ 會影響水氣 $v$ 的累積，故本實驗中設 $\bar{m}=50$ 、 $\rho=0.9$ 、 $\alpha=0.1$ 。而本研究為雙目標的連續型優化問題，因此目標函數值權重 $\omega_j$ 皆為0.5， $j=1,2,\dots,g$ ， $g=2$ 。

表4-1 WFA4MC在五個標竿問題參數設定內容

參數設定	標竿問題				
	ZDT1	ZDT2	ZDT3	ZDT4	ZDT6
初始質量 $\bar{m}$	50	50	50	50	50
最大分流數 $\bar{n}$	5	5	5	5	5
總水流數上限 $\bar{z}$	15	15	15	15	15
降水飽和度 $\rho$	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
水流蒸發率 $\alpha$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

#### 4.4.1 匯流模式的比較

第一組實驗為WFA4MC在兩種匯流模式下比較解的品質，為了比較兩種匯流法的差異，在此實驗中將 $\beta_L$ 和 $\beta_o$ 皆等於0.01。過去的仿水流優化演算法會在分流出子水流後計算目標函數值，如同OM法，由目標函數值的優劣分配質量，因此匯流作業時可以直接使用目前擁有的目標函數值作為匯流的參看資訊。但是此方法有缺點，若所分出的子水流在經目標函數計算後相發現與其他水流的目標函數值相近，爾後跟其他水流結合成一條水流，對運算資源造成無謂的浪費。基於結構相似的代理人其目標函數可能極為接近，因而另外設計LM法，經由匯流後再判別是否需計算目標函數值，來節省運算資源。為了比較兩種匯流模式的求解效能差異，參數設定如表4-1所說明，每題執行30次並設所有問題求解的非臣服解數 $\bar{s}=100$ ，選用Zitzler *et al.* (2000)所提供如附錄A所表示的100個柏拉圖解執行非臣服解的品質評量。在停止條件的設定上選用目標函數呼叫次數為停止條件，ZDT1、ZDT2、ZDT3和ZDT6的目標函式呼叫上限是30000，ZDT4是250000，並求得 $G$ 、 $C$ 和 $\ell$ 值平均值，說明兩種匯流方式的求解效能。

表4-2 WFA4MC在五個標竿問題的收斂距離(G)平均值

標竿問題	LM法	OM法	目標函式呼叫上限
ZDT1	<b>0.000508</b>	0.000715	30000
ZDT2	<b>0.000427</b>	0.000487	30000
ZDT3	<b>0.000501</b>	0.000504	30000
ZDT4	<b>0.000438</b>	0.000476	250000
ZDT6	<b>0.000991</b>	0.001069	30000

表4-3 WFA4MC在五個標竿問題的涵蓋度( $\ell$ )平均值

標竿問題	LM法	OM法	目標函式呼叫上限
ZDT1	<b>0.973333</b>	0.971333	30000
ZDT2	0.954483	<b>0.965333</b>	30000
ZDT3	0.853103	<b>0.861724</b>	30000
ZDT4	<b>0.978621</b>	0.965423	250000
ZDT6	0.903561	<b>0.918946</b>	30000

表4-4 WFA4MC在五個標竿問題的正确率(C)平均值

標竿問題	LM法	OM法	目標函式呼叫上限
ZDT1	<b>65.5</b>	64.7	30000
ZDT2	<b>98.3</b>	96.2	30000
ZDT3	40.4	<b>44.5</b>	30000
ZDT4	<b>98.4</b>	97.0	250000
ZDT6	<b>0.45</b>	0.37	30000

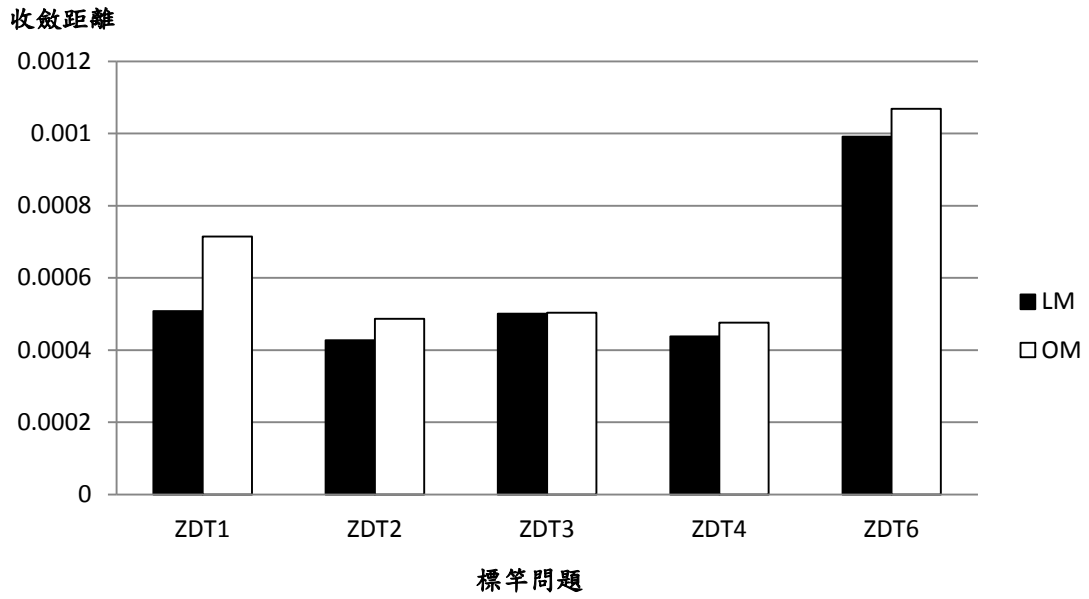


圖4.13 LM法和OM法的收斂距離( $G$ )之平均直條圖

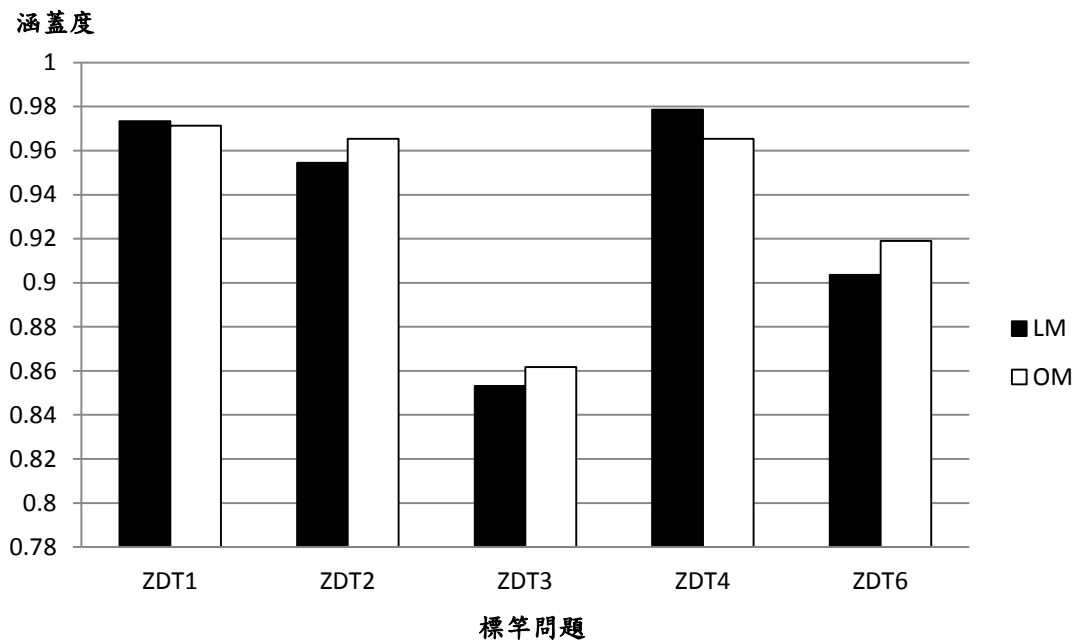


圖4.14 LM法和OM法的涵蓋度( $l$ )值之平均直條圖

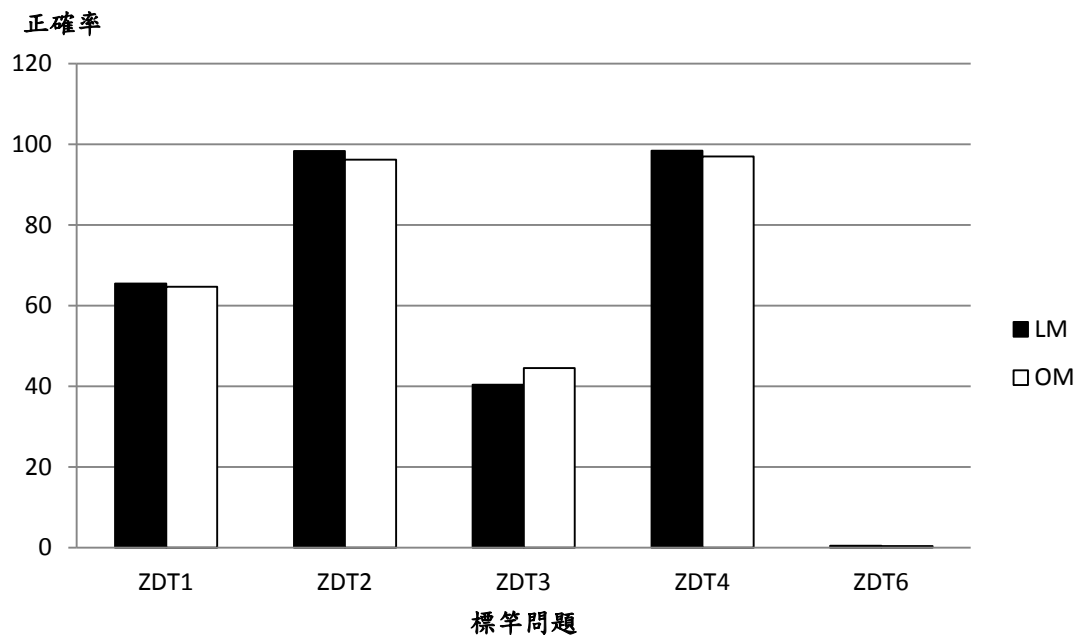


圖4.15 LM法和OM法的正確率(C)之平均直條圖

表4-2、4-3、和4-4是WFA4MC在兩種匯流法下三種評量指標的平均值，圖4.13、4.14、和4.15為其評量指標的平均值直條圖。圖4.13和圖4.15顯示LM法對柏拉圖解的收斂距離和正確率較OM法出色。因為LM法先對水流做相似性評估，再進行運算，可省去不必要的目標函式運算次數，較有機會搜尋到與柏拉圖解較接近的非臣服解。而OM法的優點在於匯流時是根據非臣服解彼此在目標函數值空間的位置，能較準確刪除在目標函數值空間較擁擠的解，有所求得的非臣服解有較佳的分散性。因此可以從圖4.14和表4-3觀察到OM法在涵蓋度的表現略優於LM法。在以上三項評量指標中LM法在其中兩項表現比OM法好，因此以本研究所解決的題目類型而言，LM法較OM法適用。

#### 4.4.2 WFA4MC成效結果分析

第二組實驗在相同的停止條件下將WFA4MC和多目標粒子群演算法MOEPSO，AMOPSO和NSGA-II兩種方法進行求解結果比較。除了兩種匯流法的匯流相似度外，其它參數和目標函式呼叫上限停止條件的設定和第4.4.1節相同。

經實驗設計後，OM 匯流法的相似度  $\beta_L$  和  $\beta_o$  設定上，而在使 LM 用法時，ZDT1、和 ZDT4 的  $\beta_L = 0.01$ ，ZDT3 的  $\beta_L = 0.05$ ，ZDT2 和 ZDT6 的  $\beta_L = 0.1$ 。OM 法除了 ZDT2 在  $\beta_o = 0.1$  時表現較佳，其他題目皆在  $\beta_o = 0.01$ 。

使用收錄於附錄 B 中 Huband *et al.* (2003) 所提供 500 個柏拉圖解，非臣服解數為 100，每標竿問題執行 50 次後取各衡量指標的平均值和上述四種演算法比較結果。表 4-5 中 WFA4MC(LM) 是 WFA4MC 使用 LM 法執行匯流的情境而 WFA4MC(OM) 代表 WFA4MC 使用 OM 法進行匯流。

由於本研究認為  $S$  值無法表達非臣服解集合的廣度。當非臣服解之間分布極為平均，但全體非臣服解過度集中在目標函數值空間的某個區塊時，單討論非臣服解集合之間分布的平均性是沒有意義的，所以本研究只參看 MOEPSO 的  $G$  值來和其他演算法進行績效。表 4-5 是 ZDT 標竿問題中  $G$  值的平均值而圖 4.16 是其  $G$  值的平均值的直條圖。但是圖 4.16 可以看到 ZDT1 和 ZDT2 在非臣服解對柏拉圖解的趨近性上，WFA4MC 的成效較雖然較 MOEPSO 差，但是相對於 AMOPSO 和 NSGA-II 兩種演算法和 MOEPSO 的差異，WFA4MC 和 MOEPSO 的差異是相對較小的。

表 4-5 WFA4MC 和三種啟發式演算法收斂距離( $G$ )的平均值

標竿問題	WFA4MC(LM)	WFA4MC(OM)	AMOPSO	NSGA-II	MOEPSO
ZDT1	0.0004	0.0004	0.0215	0.0243	<b>0.0002</b>
ZDT2	9.71E-05	9.88E-05	0.0083	0.0214	<b>9.43E-05</b>
ZDT3	<b>0.0002</b>	<b>0.0002</b>	0.0058	0.0126	0.0005
ZDT4	<b>0.0002</b>	<b>0.0002</b>	0.0224	0.0217	0.0185
ZDT6	<b>0.0009</b>	0.0010	0.0167	0.0195	0.0177

ZDT3、ZDT4 和 ZDT6 問題的求解績效表現上，WFA4MC 的  $G$  值明顯較 AMOPSO 和 NSGA-II 優越，甚至優於 MOEPSO。可以看出 WFA4MC 依然有機會與多群體解代理人演算法一樣有較高的機會搜尋到逼近柏拉圖解的非臣服解。由

以上數據資料可說明在大部分的問題中，對非臣服解的趨近性也勝於AMOPSO、NSGA-II和MOEPSO。

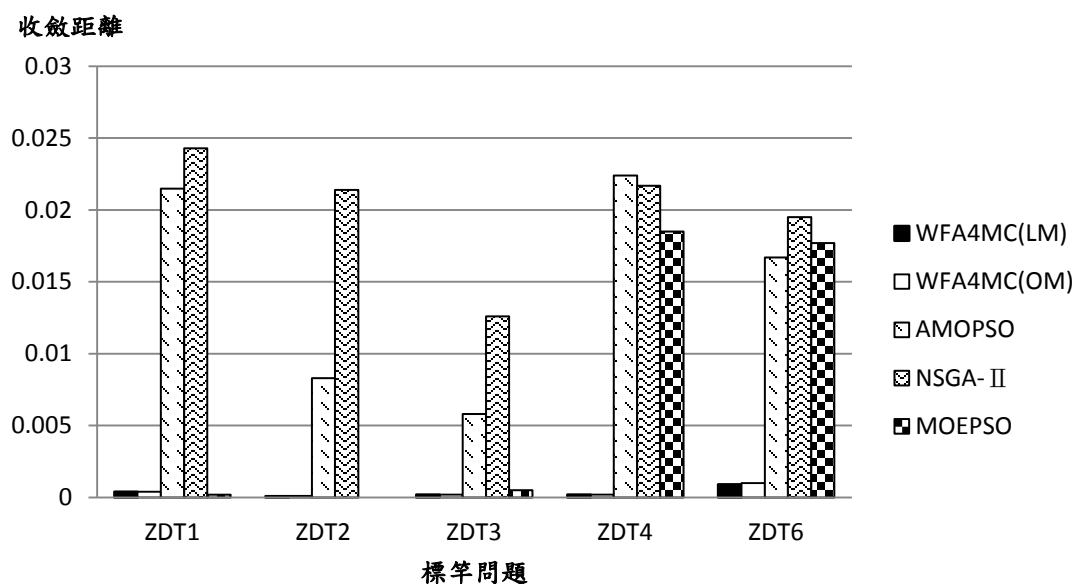


圖4.16 WFA4MC和三種啟發式演算法收斂距離(G)的平均直條圖

除了和比較啟發式演算法在收斂距離的表現可以WFA4MC的求解成效外，表4-3也說明了WFA4MC的求解廣度極佳，不易求出過多目標函數值相似的非臣服解造成所求的非臣服解在目標函數空間時過度集中在某區塊。

#### 4.5 範例驗證小結

根據範例測試結果顯示，WFA4MC所求的非臣服解在分散性上都能有不錯的表現。AMOPSO和MOEPSO承襲粒子群優化演算法的優點，均參看非臣服解的作為解代理人演化基礎能具方向性地朝非臣服解前進。AMOPSO雖然結合了擾動機制，但未考慮非臣服解在目標函數值空間的相似性，因此表現會略遜於MOEPSO和WFA4MC。而MOEPSO進行演化時會朝離解最近的非臣服解移動，但並無擾動機制可能會導致所獲得的非臣解在目標函數值空間易陷入區域最佳解。

NSGA-II的演化過程雖設有突變作業的擾動機制，能獲得在目標函數值空間

分散較平均的非臣服解。但解代理人的產生並不參閱非臣服解所提供的資訊，只是隨機選取現有染色體進行交配較不具方向性，因此 $G$ 值的表現較差，所求得的非臣服解不易向柏拉圖解趨近。

WFA4MC雖然結合了上述三種演算法的優點有擾動機制跳脫區域最佳解，也參看現有非臣服解進行新的解代理人演化，由非臣服解為中心隨機作微量變動，讓非臣服解具有較佳的分散性，如同表4-3的數據顯示，涵蓋度皆達百分之八十五以上。但不像粒子群優化演算法是具有方向性地移動，因此需要較多的運算資源才能會得到較接近柏拉圖解的非臣服解，如ZDT1或ZDT2類型的高維度連續多目標優化。此外在正確率方面，ZDT3和ZDT6的正確率都未達百分之五十。因此如何在較少的運算資源內讓非臣服解更有效地朝柏拉圖解邁進並提高正確率，為WFA4MC的一項挑戰。





## 第五章 結論與建議

仿水流優化演算法是以水流流動形式為構想，動態調整代理人為概念而設計的啟發式演算法。本研究據此開發求解連續多目標規劃問題的分流法和匯流模式並和其他多目標啟發式演算法比較求解成效。

### 5.1 結論

仿水流優化演算法為近年較為創新的演算法，主要以水流的自然特性，參考現有多目標啟發式演算法的優缺點，試圖找出解空間的最佳解。承襲傳統仿水流優化演算法的架構，提出求解連續型多目標優化問題的仿水流優化演算法，WFA4MC。依據 WFA 的缺點設計新的匯流方法，與 WFA 舊有的匯流模式比較。並以 ZDT 標竿問題為測試對象，和其他啟發式演算法進行比較分析，得到以下結論：

1. 水流在分流或移步時，為能有效率地朝柏拉圖解移動，除了參看水流和母水流的資訊外，也藉由現有非臣服解的參與，讓水流的位置向量作為微量變動，使產生的解能往目前非臣服解邁進。若是所有水流皆在非臣服解做鄰近搜尋，就會產生過多相似的非臣服解，因此藉由降水防止水流位置過於集中，讓水流可以廣域流動。
2. 兩種匯流方法 WFA4MC(OM)和 WFA4MC(LM)經過實驗後，證明 WFA4MC(LM)雖然可以節省不必要的多餘運算，得到較逼近柏拉圖前緣線解的非臣服解，但是在涵蓋度的估計上，WFA4MC(OM)對於解的涵蓋度評估較 WFA4MC(LM)準確。因為有時水流彼此的位置變數極為相近但是在目標函數值空間的分布上位置極為分散，因此在解的分散性上，WFA4MC(OM)會略勝於 WFA4MC(LM)。
3. WFA4MC 的非臣服解在分散性上有相當好的表現，這是由於水流在分流時會在不同的範圍內，抽出一值作為該位置的變數，能產生較多樣的解。加上匯流作業會防刪除相似的解節省運算資源，增加了非臣服解的廣度。

4. WFA4MC 以 WFA 為基，針對連續型多目標問題的求解環境來規劃演算流程，經實驗驗證 WFA4MC 所求的非臣服解有極佳的分散性及不錯非臣服解趨近性，顯示 WFA 可用於求解連續型多目標問題。

## 5.2 未來研究與建議

過去在 WFA 的研究範疇，包含物件分群、物件排序和單一目標連續優化問題，都有不錯的成效，而在連續型多目標問題上 WFA 也驗證了自身的效能和可行性，但仍有待改善的空間。本研究提出幾點建議供後續研究參考：

1. 雖然 WFA4MC 在五個測試範例問題中幾乎都可以達到不錯的收斂距離，但從 ZDT1 和 ZDT2 問題可以看出在對柏拉圖解的趨近性上，WFA4MC 仍有改進空間。
2. 本研究在移步作業時，雖然已參看非臣服解集合的位置變數，讓水流流向朝非臣服解，但是 WFA4MC 為單一解代理人為出發，無法像多解代理人演算法一樣在初始時就有多個非臣服解。舉例來說，若在第一個代次，只有一個非臣服解，在移步時所有水流只能參看唯一的非臣服解來執行移步作業，會造成子水流位置向量過於相似。未來可研擬有效保持子水流多樣性的分流方法，讓非臣服解能分布更為平均。
3. WFA4MC 是針對連續型多目標問題的特性而設計的演算機制，未來可進一步求解離散型多目標優化問題，拓展 WFA 在多目標優化問題的應用。

## 參考文獻

- Altıparmak, F., Gen, M., Lin, L. & Paksoy, T., 2006. A genetic algorithm approach for multi-objective optimization of supply chain networks. *Computers & Industrial Engineering*, 51 (1), 196-215.
- Chen, D.-B., Zou, F. & Wang, J.-T., 2011. A multi-objective endocrine pso algorithm and application. *Applied Soft Computing*, 11 (8), 4508-4520.
- Chung, L.-C., 2004. *A Genetic Algorithm and Objective Randomly Switched Strategy Based Multi-Objective Programming Method*. Thesis(MS). National Taiwan University.
- Deb, K., 1999. Multi-objective genetic algorithms: Problem difficulties and construction of test problems. *Evol. Comput.*, 7 (3), 205-230.
- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S. & Meyarivan, T., 2002. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-ii. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, 6 (2), 182-197.
- Fischer, M., Jähn, H. & Teich, T., 2004. Optimizing the selection of partners in production networks. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 20 (6), 593-601.
- Hajela, P. & Lin, C.Y., 1992. Genetic search strategies in multicriterion optimal design. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 4 (2), 99-107.
- Huband, S., Hingston, P., While, L. & Barone, L., Year. An evolution strategy with probabilistic mutation for multi-objective optimisation. <sup>^</sup>eds. *Evolutionary Computation, 2003. CEC '03. The 2003 Congress on*, 2284-2291 Vol.4.
- Ip, W.H., Huang, M., Yung, K.L. & Wang, D., 2003. Genetic algorithm solution for a risk-based partner selection problem in a virtual enterprise. *Computers & Operations Research*, 30 (2), 213-231.
- Knowles, J. & Corne, D., Year. The pareto archived evolution strategy: A new baseline algorithm for pareto multiobjective optimisation. <sup>^</sup>eds. *Evolutionary Computation, 1999. CEC 99. Proceedings of the 1999 Congress on*, 105 Vol. 1.
- Large, J.W., Jones, D.F. & Tamiz, M., 2007. Hyper-spherical inversion transformations in multi-objective evolutionary optimization. *European Journal of Operational Research*, 177 (3), 1678-1702.
- Li, X., 2003. A non-dominated sorting particle swarm optimizer for multiobjective optimization. *Proceedings of the 2003 international conference on Genetic and evolutionary computation: Part I*. Chicago, IL, USA: Springer-Verlag, 37-48.

- Murata, T., Ishibuchi, H. & Tanaka, H., 1996. Multi-objective genetic algorithm and its applications to flowshop scheduling. *Computers & Industrial Engineering*, 30 (4), 957-968.
- Pan, C.-C., 2008. *Water Flow-like Algorithm for Sequencing Problems*. Thesis(MS). National Taiwan University.
- Parsopoulos, K.E. & Vrahatis, M.N., 2002. Recent approaches to global optimization problems through particle swarm optimization. 1 (2-3), 235-306.
- Shih-Yuan, C., Tsung-Ying, S., Sheng-Ta, H. & Cheng-Wei, L., Year. Cross-searching strategy for multi-objective particle swarm optimization. ^eds. *Evolutionary Computation, 2007. CEC 2007. IEEE Congress on*, 3135-3141.
- Srinivas, N. & Deb, K., 1994. Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms. *Evol. Comput.*, 2 (3), 221-248.
- Tripathi, P.K., Bandyopadhyay, S. & Pal, S.K., Year. Adaptive multi-objective particle swarm optimization algorithm. ^eds. *Evolutionary Computation, 2007. CEC 2007. IEEE Congress on*, 2281-2288.
- Veldhuizen, D.a.V., 1999. *Multiobjective evolutionary algorithms: Classifications, analyses, and new innovations*. Air Force Institute of Technology.
- Wang, P.-Y., 2006. *Water Flow-like Algorithm for Discrete Optimum Problems*. Thesis(MS). National Taiwan University.
- Watanabe, M., Ida, K. & Gen, M., 2005. A genetic algorithm with modified crossover operator and search area adaptation for the job-shop scheduling problem. *Computers & Industrial Engineering*, 48 (4), 743-752.
- Yang, F.-C. & Wang, Y.-P., 2007. Water flow-like algorithm for object grouping problems. *Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers*, 24 (6), 475-488.
- Yeh, W.-C. & Chuang, M.-C., 2011. Using multi-objective genetic algorithm for partner selection in green supply chain problems. *Expert Systems with Applications*, 38 (4), 4244-4253.
- Youyuan, W. & Weiping, X., Year. Research on partners selection of collaborative design based on ant and genetic algorithm. ^eds. *International Conference on Natural Computation*, 554-558.
- Zitzler, E., Deb, K. & Thiele, L., 2000. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results. *Evol. Comput.*, 8 (2), 173-195.
- Zitzler, E. & Thiele, L., 1999. Multiobjective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength pareto approach. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, 3 (4), 257-271.

## 附錄 A Zitzler 所提供的 100 柏拉圖解目標函數值

ZDT1	
$f_1$	$f_2$
5E-09	0.999929
0.001415	0.962385
0.004239	0.93489
0.00782	0.911571
0.011944	0.890712
0.016503	0.871535
0.02143	0.853609
0.026679	0.836664
0.032214	0.820517
0.038011	0.805037
0.044046	0.790128
0.050305	0.775713
0.056771	0.761734
0.063432	0.748143
0.070278	0.7349
0.077299	0.721972
0.084488	0.709332
0.091836	0.696955
0.099338	0.684821
0.106987	0.672912
0.114777	0.661212
0.122705	0.649708
0.130764	0.638386
0.138952	0.627237
0.147265	0.616249
0.155698	0.605415
0.164248	0.594725
0.172913	0.584172
0.181689	0.57375
0.190573	0.563453
0.199564	0.553274
0.208658	0.543209

0.217854	0.533252
0.227148	0.523399
0.23654	0.513646
0.246027	0.503989
0.255607	0.494424
0.265279	0.484948
0.27504	0.475557
0.28489	0.466249
0.294826	0.457021
0.304847	0.44787
0.314952	0.438794
0.32514	0.42979
0.335408	0.420856
0.345757	0.411989
0.356184	0.403189
0.366688	0.394452
0.377269	0.385778
0.387924	0.377164
0.398655	0.368609
0.409458	0.360111
0.420333	0.351669
0.43128	0.343281
0.442297	0.334946
0.453384	0.326662
0.464539	0.318429
0.475762	0.310245
0.487052	0.302109
0.498408	0.29402
0.509829	0.285977
0.521316	0.277978
0.532866	0.270023
0.544479	0.262112
0.556155	0.254242
0.567893	0.246413
0.579692	0.238625
0.591552	0.230876
0.603472	0.223165
0.615451	0.215493



0.62749	0.207858
0.639586	0.200259
0.65174	0.192696
0.663952	0.185168
0.67622	0.177674
0.688544	0.170214
0.700924	0.162788
0.713359	0.155394
0.725849	0.148032
0.738393	0.140702
0.75099	0.133403
0.763641	0.126134
0.776345	0.118896
0.789101	0.111687
0.801909	0.104506
0.814768	0.097355
0.827679	0.090231
0.840641	0.083135
0.853652	0.076067
0.866714	0.069025
0.879826	0.06201
0.892986	0.055021
0.906196	0.048057
0.919454	0.041119
0.93276	0.034205
0.946113	0.027316
0.959515	0.020452
0.972963	0.013611
0.986458	0.006794
1	0

---



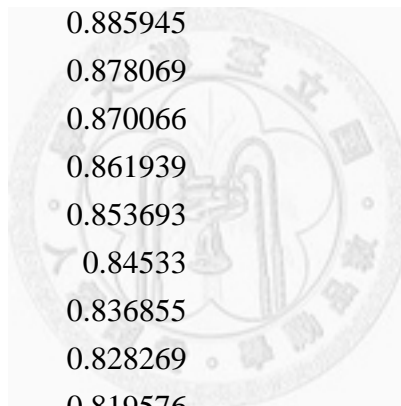
---

ZDT2

---

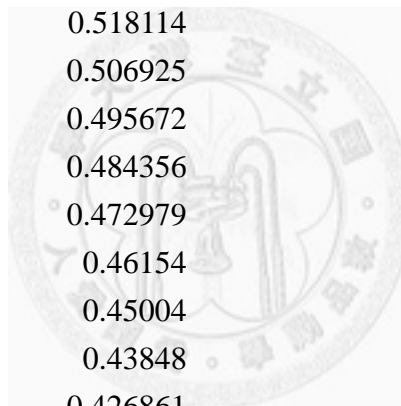
$f_1$	$f_2$
0	1
0.05467	0.997011
0.082005	0.993275
0.104784	0.98902

0.125087	0.984353
0.143742	0.979338
0.161187	0.974019
0.177688	0.968427
0.193422	0.962588
0.208517	0.956521
0.223065	0.950242
0.237139	0.943765
0.250795	0.937102
0.26408	0.930262
0.27703	0.923254
0.289678	0.916087
0.302049	0.908766
0.314167	0.901299
0.326052	0.89369
0.33772	0.885945
0.349186	0.878069
0.360464	0.870066
0.371566	0.861939
0.382501	0.853693
0.393281	0.84533
0.403913	0.836855
0.414405	0.828269
0.424764	0.819576
0.434996	0.810778
0.445109	0.801878
0.455106	0.792878
0.464994	0.783781
0.474776	0.774587
0.484458	0.7653
0.494043	0.755921
0.503535	0.746452
0.512938	0.736895
0.522255	0.72725
0.531488	0.717521
0.540641	0.707707
0.549717	0.697811
0.558718	0.687835





0.567646	0.677778
0.576504	0.667643
0.585294	0.657431
0.594018	0.647142
0.602678	0.636779
0.611276	0.626342
0.619813	0.615831
0.628292	0.605249
0.636713	0.594596
0.645079	0.583873
0.65339	0.573081
0.661649	0.562221
0.669856	0.551293
0.678013	0.540299
0.68612	0.529239
0.69418	0.518114
0.702193	0.506925
0.710161	0.495672
0.718083	0.484356
0.725962	0.472979
0.733798	0.46154
0.741593	0.45004
0.749346	0.43848
0.757059	0.426861
0.764733	0.415183
0.772369	0.403446
0.779967	0.391652
0.787528	0.3798
0.795052	0.367892
0.802541	0.355928
0.809995	0.343908
0.817415	0.331833
0.824801	0.319704
0.832153	0.307521
0.839474	0.295284
0.846762	0.282993
0.85402	0.27065
0.861246	0.258255



0.868442	0.245808
0.875608	0.23331
0.882745	0.220761
0.889853	0.208161
0.896933	0.195511
0.903985	0.182812
0.911009	0.170063
0.918006	0.157265
0.924976	0.144418
0.931921	0.131524
0.938839	0.118581
0.945732	0.105591
0.9526	0.092554
0.959443	0.07947
0.966261	0.066339
0.973056	0.053162
0.979827	0.03994
0.986574	0.026672
0.993298	0.013358
1	0

---

ZDT3

---

$f_1$	$f_2$
0	1
0.000827	0.971214
0.002478	0.950024
0.004555	0.931857
0.006916	0.91535
0.009478	0.899866
0.012187	0.885052
0.015003	0.870699
0.017899	0.856669
0.020855	0.84288
0.023858	0.829285
0.0269	0.815864
0.029982	0.802602
0.033101	0.78952

0.036263	0.776635
0.039474	0.763984
0.042746	0.751608
0.046094	0.739557
0.049537	0.727898
0.053103	0.716709
0.056829	0.706085
0.060771	0.696158
0.065016	0.687103
0.069722	0.679188
0.075235	0.672905
0.082703	0.669657
0.185232	0.652501
0.188131	0.634794
0.190945	0.616619
0.193691	0.598037
0.196382	0.57912
0.199031	0.559931
0.201645	0.540532
0.204235	0.520981
0.206808	0.50134
0.209374	0.481657
0.211938	0.461994
0.21451	0.442414
0.217097	0.422983
0.219708	0.403767
0.222352	0.384841
0.225042	0.366275
0.227792	0.348163
0.230617	0.33061
0.233541	0.31373
0.236595	0.297666
0.239822	0.282617
0.243292	0.268843
0.247128	0.256757
0.251603	0.247115
0.25764	0.242163
0.411218	0.216798



0.413133	0.191584
0.415065	0.16656
0.417016	0.141774
0.41899	0.117305
0.420994	0.093193
0.423032	0.069514
0.425111	0.046347
0.427241	0.023757
0.429432	0.001834
0.431697	-0.01931
0.434054	-0.03954
0.436526	-0.0587
0.43915	-0.07657
0.441985	-0.09287
0.445132	-0.10712
0.448816	-0.11844
0.453804	-0.12422
0.619971	-0.15134
0.621568	-0.17806
0.623191	-0.20435
0.624843	-0.23012
0.626529	-0.25532
0.628257	-0.27992
0.630031	-0.30382
0.631864	-0.32694
0.633762	-0.34916
0.635741	-0.37035
0.637822	-0.39035
0.640036	-0.40895
0.64243	-0.42587
0.645093	-0.44062
0.648216	-0.45232
0.652458	-0.45826
0.824717	-0.4861
0.826129	-0.51343
0.827568	-0.54015
0.829039	-0.56621
0.830549	-0.59159



0.832101	-0.61617
0.833702	-0.63986
0.835365	-0.66259
0.8371	-0.68422
0.838926	-0.70459
0.840871	-0.72352
0.842977	-0.74068
0.845323	-0.75563
0.848079	-0.76745
0.851833	-0.77337

---



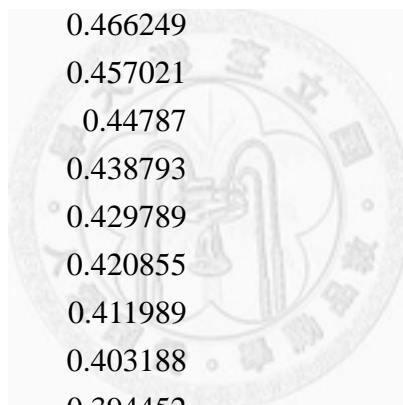
---

ZDT4

---

$f_1$	$f_2$
5E-09	0.999929
0.001415	0.962385
0.004239	0.93489
0.00782	0.911571
0.011944	0.890711
0.016503	0.871535
0.02143	0.853609
0.026679	0.836664
0.032214	0.820517
0.038011	0.805037
0.044046	0.790127
0.050305	0.775713
0.056771	0.761734
0.063432	0.748143
0.070278	0.7349
0.077299	0.721972
0.084488	0.709332
0.091836	0.696955
0.099338	0.684821
0.106987	0.672912
0.114777	0.661212
0.122705	0.649708
0.130765	0.638386
0.138953	0.627237

0.147265	0.616249
0.155698	0.605414
0.164248	0.594724
0.172913	0.584172
0.181689	0.57375
0.190574	0.563453
0.199564	0.553274
0.208659	0.543208
0.217854	0.533252
0.227149	0.523399
0.236541	0.513646
0.246027	0.503988
0.255608	0.494424
0.265279	0.484947
0.275041	0.475557
0.28489	0.466249
0.294826	0.457021
0.304848	0.44787
0.314953	0.438793
0.32514	0.429789
0.335409	0.420855
0.345757	0.411989
0.356184	0.403188
0.366688	0.394452
0.377269	0.385778
0.387925	0.377164
0.398655	0.368609
0.409458	0.360111
0.420334	0.351668
0.431281	0.34328
0.442298	0.334945
0.453384	0.326662
0.464539	0.318429
0.475762	0.310245
0.487052	0.302109
0.498408	0.29402
0.50983	0.285976
0.521316	0.277978



0.532866	0.270023
0.54448	0.262111
0.556156	0.254242
0.567894	0.246413
0.579693	0.238624
0.591553	0.230875
0.603473	0.223165
0.615452	0.215493
0.62749	0.207857
0.639587	0.200258
0.651741	0.192695
0.663952	0.185167
0.67622	0.177674
0.688545	0.170214
0.700924	0.162788
0.713359	0.155394
0.725849	0.148032
0.738393	0.140702
0.750991	0.133403
0.763641	0.126134
0.776345	0.118896
0.789101	0.111686
0.801909	0.104506
0.814769	0.097355
0.827679	0.090231
0.840641	0.083135
0.853653	0.076067
0.866714	0.069025
0.879826	0.06201
0.892986	0.05502
0.906196	0.048057
0.919454	0.041119
0.93276	0.034205
0.946113	0.027316
0.959515	0.020452
0.972963	0.013611
0.986458	0.006794

1

0

---

---

ZDT6

---

$f_1$	$f_2$
0.280775	0.921165
0.290908	0.915373
0.300865	0.90948
0.310659	0.903491
0.3203	0.897408
0.329796	0.891235
0.339157	0.884972
0.348391	0.878624
0.357514	0.872184
0.366528	0.865657
0.375431	0.859052
0.38423	0.852368
0.39294	0.845598
0.401559	0.83875
0.410096	0.831821
0.418543	0.824822
0.426917	0.817742
0.435212	0.810591
0.443438	0.803363
0.451599	0.796059
0.459686	0.788689
0.467713	0.781245
0.475692	0.773717
0.483604	0.766127
0.491473	0.758455
0.499286	0.750713
0.507039	0.742912
0.51474	0.735043
0.522407	0.727091
0.530024	0.719074
0.537587	0.711
0.545119	0.702846
0.552617	0.694614
0.560065	0.686327

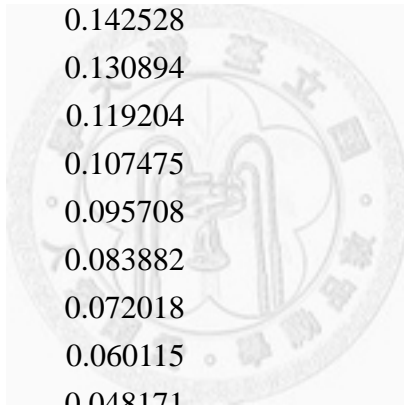


0.567483	0.677963
0.574856	0.66954
0.582213	0.661028
0.589522	0.652464
0.596799	0.643831
0.604056	0.635117
0.611269	0.62635
0.618454	0.617515
0.625624	0.608594
0.632754	0.599623
0.639849	0.590593
0.646927	0.581486
0.653984	0.572305
0.66102	0.563052
0.668019	0.553751
0.675008	0.544365
0.681961	0.53493
0.688903	0.525413
0.69581	0.515849
0.702711	0.506197
0.709578	0.496499
0.716431	0.486726
0.723265	0.476888
0.730066	0.467004
0.736862	0.457035
0.743638	0.447003
0.750391	0.436913
0.757115	0.426777
0.763817	0.416583
0.770527	0.406288
0.777208	0.395947
0.783861	0.385562
0.790493	0.375121
0.797127	0.364589
0.803733	0.354013
0.810325	0.343373
0.81689	0.33269
0.823449	0.321932



0.829991	0.311116
0.836506	0.300257
0.843012	0.289331
0.849503	0.278345
0.855969	0.267317
0.862413	0.256243
0.868854	0.245092
0.875271	0.2339
0.881668	0.222661
0.888048	0.21137
0.894416	0.20002
0.900761	0.18863
0.907099	0.177172
0.913419	0.165666
0.919719	0.154117
0.925998	0.142528
0.932259	0.130894
0.938507	0.119204
0.944735	0.107475
0.950943	0.095708
0.957141	0.083882
0.963318	0.072018
0.969477	0.060115
0.975617	0.048171
0.98174	0.036186
0.987845	0.024163
0.993932	0.0121
1	0

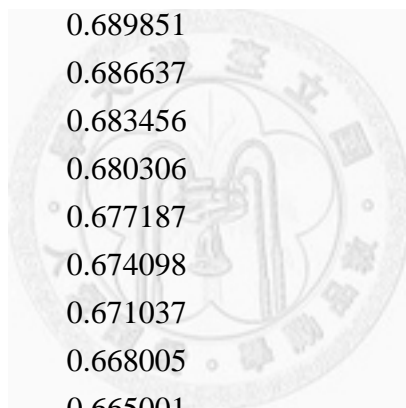
---



## 附錄 B Huband 所提供的 500 柏拉圖解目標函數值

<b>ZDT1</b>	
$f_1$	$f_2$
0	1
0.002004	0.955234
0.004008	0.936691
0.006012	0.922463
0.008016	0.910468
0.01002	0.8999
0.012024	0.890346
0.014028	0.88156
0.016032	0.873382
0.018036	0.865702
0.02004	0.858437
0.022044	0.851527
0.024048	0.844926
0.026052	0.838593
0.028056	0.8325
0.03006	0.826621
0.032064	0.820935
0.034068	0.815424
0.036072	0.810073
0.038076	0.804869
0.04008	0.7998
0.042084	0.794856
0.044088	0.790028
0.046092	0.785309
0.048096	0.780692
0.0501	0.776169
0.052104	0.771737
0.054108	0.767388
0.056112	0.76312
0.058116	0.758927
0.06012	0.754806
0.062124	0.750753
0.064128	0.746764

0.066132	0.742838
0.068136	0.738971
0.07014	0.73516
0.072144	0.731403
0.074148	0.727698
0.076152	0.724043
0.078156	0.720435
0.08016	0.716874
0.082164	0.713357
0.084168	0.709882
0.086172	0.706449
0.088176	0.703055
0.09018	0.6997
0.092184	0.696381
0.094188	0.693099
0.096192	0.689851
0.098196	0.686637
0.1002	0.683456
0.102204	0.680306
0.104208	0.677187
0.106212	0.674098
0.108216	0.671037
0.11022	0.668005
0.112224	0.665001
0.114228	0.662023
0.116232	0.659071
0.118236	0.656145
0.12024	0.653243
0.122244	0.650365
0.124248	0.647511
0.126253	0.64468
0.128257	0.641871
0.130261	0.639084
0.132265	0.636318
0.134269	0.633573
0.136273	0.630849
0.138277	0.628144
0.140281	0.62546



0.142285	0.622794
0.144289	0.620147
0.146293	0.617518
0.148297	0.614907
0.150301	0.612314
0.152305	0.609738
0.154309	0.607179
0.156313	0.604636
0.158317	0.60211
0.160321	0.599599
0.162325	0.597105
0.164329	0.594625
0.166333	0.592161
0.168337	0.589711
0.170341	0.587277
0.172345	0.584856
0.174349	0.582449
0.176353	0.580056
0.178357	0.577677
0.180361	0.575311
0.182365	0.572958
0.184369	0.570618
0.186373	0.568291
0.188377	0.565976
0.190381	0.563674
0.192385	0.561383
0.194389	0.559105
0.196393	0.556838
0.198397	0.554582
0.200401	0.552339
0.202405	0.550106
0.204409	0.547884
0.206413	0.545673
0.208417	0.543473
0.210421	0.541283
0.212425	0.539104
0.214429	0.536935
0.216433	0.534777



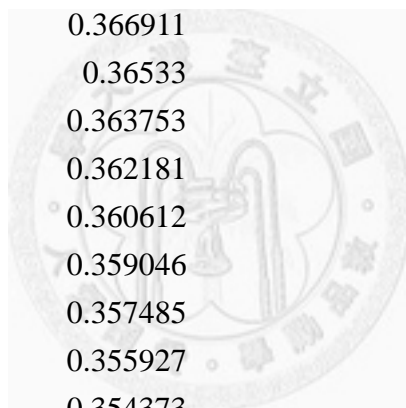
0.218437	0.532628
0.220441	0.530489
0.222445	0.528359
0.224449	0.52624
0.226453	0.524129
0.228457	0.522028
0.230461	0.519937
0.232465	0.517854
0.234469	0.51578
0.236473	0.513715
0.238477	0.511659
0.240481	0.509611
0.242485	0.507572
0.244489	0.505542
0.246493	0.503519
0.248497	0.501505
0.250501	0.499499
0.252505	0.497501
0.254509	0.495511
0.256513	0.493529
0.258517	0.491554
0.260521	0.489587
0.262525	0.487628
0.264529	0.485676
0.266533	0.483732
0.268537	0.481794
0.270541	0.479864
0.272545	0.477941
0.274549	0.476026
0.276553	0.474117
0.278557	0.472215
0.280561	0.47032
0.282565	0.468431
0.284569	0.46655
0.286573	0.464675
0.288577	0.462806
0.290581	0.460944
0.292585	0.459089



0.294589	0.457239
0.296593	0.455396
0.298597	0.45356
0.300601	0.451729
0.302605	0.449904
0.304609	0.448086
0.306613	0.446273
0.308617	0.444467
0.310621	0.442666
0.312625	0.440871
0.314629	0.439082
0.316633	0.437298
0.318637	0.43552
0.320641	0.433748
0.322645	0.431981
0.324649	0.43022
0.326653	0.428464
0.328657	0.426714
0.330661	0.424968
0.332665	0.423229
0.334669	0.421494
0.336673	0.419764
0.338677	0.41804
0.340681	0.416321
0.342685	0.414607
0.344689	0.412897
0.346693	0.411193
0.348697	0.409494
0.350701	0.4078
0.352705	0.40611
0.354709	0.404425
0.356713	0.402745
0.358717	0.40107
0.360721	0.399399
0.362725	0.397733
0.364729	0.396072
0.366733	0.394415
0.368737	0.392762



0.370741	0.391115
0.372745	0.389471
0.374749	0.387832
0.376754	0.386198
0.378758	0.384567
0.380762	0.382941
0.382766	0.38132
0.38477	0.379702
0.386774	0.378089
0.388778	0.37648
0.390782	0.374875
0.392786	0.373274
0.39479	0.371677
0.396794	0.370084
0.398798	0.368496
0.400802	0.366911
0.402806	0.36533
0.40481	0.363753
0.406814	0.362181
0.408818	0.360612
0.410822	0.359046
0.412826	0.357485
0.41483	0.355927
0.416834	0.354373
0.418838	0.352823
0.420842	0.351277
0.422846	0.349734
0.42485	0.348195
0.426854	0.34666
0.428858	0.345128
0.430862	0.343599
0.432866	0.342075
0.43487	0.340553
0.436874	0.339036
0.438878	0.337522
0.440882	0.336011
0.442886	0.334503
0.44489	0.332999





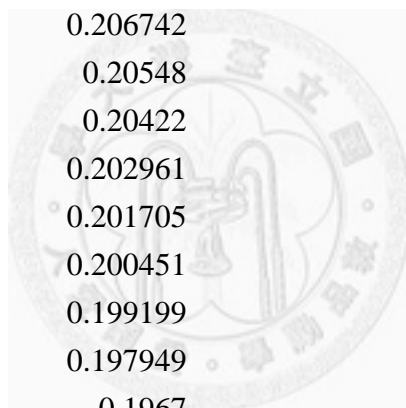
0.446894	0.331499
0.448898	0.330002
0.450902	0.328508
0.452906	0.327017
0.45491	0.32553
0.456914	0.324046
0.458918	0.322565
0.460922	0.321088
0.462926	0.319613
0.46493	0.318142
0.466934	0.316674
0.468938	0.31521
0.470942	0.313748
0.472946	0.312289
0.47495	0.310834
0.476954	0.309382
0.478958	0.307932
0.480962	0.306486
0.482966	0.305042
0.48497	0.303602
0.486974	0.302165
0.488978	0.30073
0.490982	0.299299
0.492986	0.29787
0.49499	0.296445
0.496994	0.295022
0.498998	0.293602
0.501002	0.292185
0.503006	0.290771
0.50501	0.289359
0.507014	0.287951
0.509018	0.286545
0.511022	0.285142
0.513026	0.283742
0.51503	0.282344
0.517034	0.280949
0.519038	0.279557
0.521042	0.278168



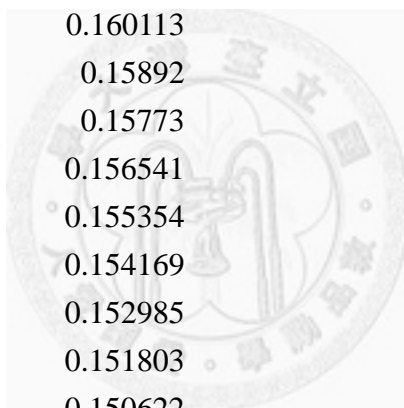
0.523046	0.276781
0.52505	0.275397
0.527054	0.274015
0.529058	0.272636
0.531062	0.27126
0.533066	0.269886
0.53507	0.268515
0.537074	0.267147
0.539078	0.265781
0.541082	0.264417
0.543086	0.263056
0.54509	0.261698
0.547094	0.260342
0.549098	0.258988
0.551102	0.257637
0.553106	0.256289
0.55511	0.254943
0.557114	0.253599
0.559118	0.252258
0.561122	0.250919
0.563126	0.249583
0.56513	0.248249
0.567134	0.246917
0.569138	0.245587
0.571142	0.24426
0.573146	0.242936
0.57515	0.241613
0.577154	0.240293
0.579158	0.238975
0.581162	0.23766
0.583166	0.236347
0.58517	0.235036
0.587174	0.233727
0.589178	0.23242
0.591182	0.231116
0.593186	0.229814
0.59519	0.228514
0.597194	0.227216



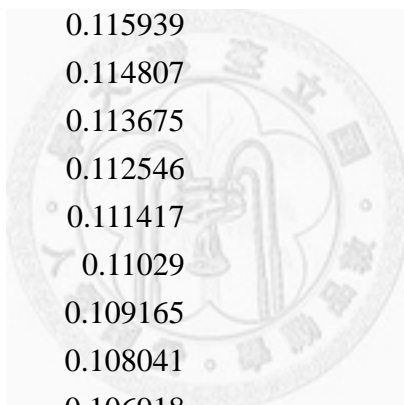
0.599198	0.225921
0.601202	0.224628
0.603206	0.223336
0.60521	0.222047
0.607214	0.22076
0.609218	0.219476
0.611222	0.218193
0.613226	0.216912
0.61523	0.215634
0.617234	0.214357
0.619238	0.213083
0.621242	0.211811
0.623246	0.21054
0.625251	0.209272
0.627255	0.208006
0.629259	0.206742
0.631263	0.20548
0.633267	0.20422
0.635271	0.202961
0.637275	0.201705
0.639279	0.200451
0.641283	0.199199
0.643287	0.197949
0.645291	0.1967
0.647295	0.195454
0.649299	0.194209
0.651303	0.192967
0.653307	0.191726
0.655311	0.190487
0.657315	0.189251
0.659319	0.188016
0.661323	0.186783
0.663327	0.185551
0.665331	0.184322
0.667335	0.183094
0.669339	0.181869
0.671343	0.180645
0.673347	0.179423



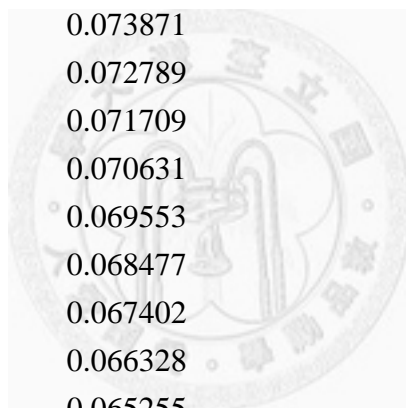
0.675351	0.178203
0.677355	0.176984
0.679359	0.175768
0.681363	0.174553
0.683367	0.17334
0.685371	0.172129
0.687375	0.170919
0.689379	0.169712
0.691383	0.168506
0.693387	0.167302
0.695391	0.166099
0.697395	0.164898
0.699399	0.163699
0.701403	0.162502
0.703407	0.161306
0.705411	0.160113
0.707415	0.15892
0.709419	0.15773
0.711423	0.156541
0.713427	0.155354
0.715431	0.154169
0.717435	0.152985
0.719439	0.151803
0.721443	0.150622
0.723447	0.149443
0.725451	0.148266
0.727455	0.14709
0.729459	0.145916
0.731463	0.144744
0.733467	0.143573
0.735471	0.142404
0.737475	0.141236
0.739479	0.14007
0.741483	0.138906
0.743487	0.137743
0.745491	0.136582
0.747495	0.135422
0.749499	0.134264



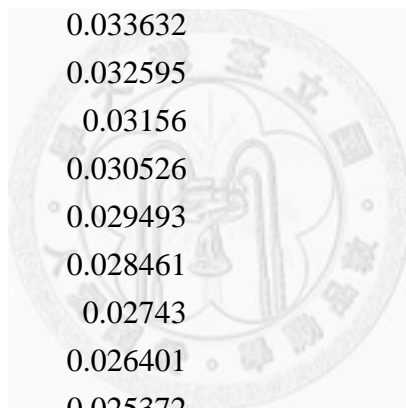
0.751503	0.133107
0.753507	0.131952
0.755511	0.130799
0.757515	0.129647
0.759519	0.128496
0.761523	0.127347
0.763527	0.1262
0.765531	0.125054
0.767535	0.123909
0.769539	0.122766
0.771543	0.121625
0.773547	0.120485
0.775551	0.119346
0.777555	0.118209
0.779559	0.117074
0.781563	0.115939
0.783567	0.114807
0.785571	0.113675
0.787575	0.112546
0.789579	0.111417
0.791583	0.11029
0.793587	0.109165
0.795591	0.108041
0.797595	0.106918
0.799599	0.105797
0.801603	0.104677
0.803607	0.103559
0.805611	0.102442
0.807615	0.101326
0.809619	0.100212
0.811623	0.099099
0.813627	0.097987
0.815631	0.096877
0.817635	0.095768
0.819639	0.094661
0.821643	0.093555
0.823647	0.09245
0.825651	0.091346



0.827655	0.090244
0.829659	0.089144
0.831663	0.088044
0.833667	0.086946
0.835671	0.085849
0.837675	0.084754
0.839679	0.08366
0.841683	0.082567
0.843687	0.081475
0.845691	0.080385
0.847695	0.079296
0.849699	0.078209
0.851703	0.077122
0.853707	0.076037
0.855711	0.074953
0.857715	0.073871
0.859719	0.072789
0.861723	0.071709
0.863727	0.070631
0.865731	0.069553
0.867735	0.068477
0.869739	0.067402
0.871743	0.066328
0.873747	0.065255
0.875752	0.064184
0.877756	0.063114
0.87976	0.062045
0.881764	0.060977
0.883768	0.059911
0.885772	0.058846
0.887776	0.057782
0.88978	0.056719
0.891784	0.055657
0.893788	0.054597
0.895792	0.053537
0.897796	0.052479
0.8998	0.051422
0.901804	0.050367



0.903808	0.049312
0.905812	0.048259
0.907816	0.047206
0.90982	0.046155
0.911824	0.045105
0.913828	0.044057
0.915832	0.043009
0.917836	0.041963
0.91984	0.040917
0.921844	0.039873
0.923848	0.03883
0.925852	0.037788
0.927856	0.036747
0.92986	0.035708
0.931864	0.034669
0.933868	0.033632
0.935872	0.032595
0.937876	0.03156
0.93988	0.030526
0.941884	0.029493
0.943888	0.028461
0.945892	0.02743
0.947896	0.026401
0.9499	0.025372
0.951904	0.024344
0.953908	0.023318
0.955912	0.022293
0.957916	0.021268
0.95992	0.020245
0.961924	0.019223
0.963928	0.018202
0.965932	0.017182
0.967936	0.016163
0.96994	0.015145
0.971944	0.014128
0.973948	0.013112
0.975952	0.012097
0.977956	0.011083



0.97996	0.010071
0.981964	0.009059
0.983968	0.008048
0.985972	0.007039
0.987976	0.00603
0.98998	0.005023
0.991984	0.004016
0.993988	0.003011
0.995992	0.002006
0.997996	0.001003
1	1.11E-16

---

**ZDT2**

---

$f_1$	$f_2$
0	1
0.002004	0.999996
0.004008	0.999984
0.006012	0.999964
0.008016	0.999936
0.01002	0.9999
0.012024	0.999855
0.014028	0.999803
0.016032	0.999743
0.018036	0.999675
0.02004	0.999598
0.022044	0.999514
0.024048	0.999422
0.026052	0.999321
0.028056	0.999213
0.03006	0.999096
0.032064	0.998972
0.034068	0.998839
0.036072	0.998699
0.038076	0.99855
0.04008	0.998394
0.042084	0.998229
0.044088	0.998056
0.046092	0.997876



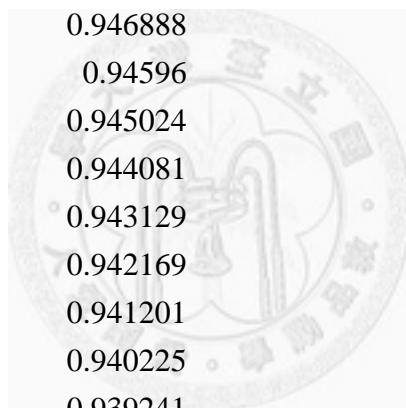
0.048096	0.997687
0.0501	0.99749
0.052104	0.997285
0.054108	0.997072
0.056112	0.996851
0.058116	0.996623
0.06012	0.996386
0.062124	0.996141
0.064128	0.995888
0.066132	0.995627
0.068136	0.995357
0.07014	0.99508
0.072144	0.994795
0.074148	0.994502
0.076152	0.994201
0.078156	0.993892
0.08016	0.993574
0.082164	0.993249
0.084168	0.992916
0.086172	0.992574
0.088176	0.992225
0.09018	0.991868
0.092184	0.991502
0.094188	0.991129
0.096192	0.990747
0.098196	0.990357
0.1002	0.98996
0.102204	0.989554
0.104208	0.989141
0.106212	0.988719
0.108216	0.988289
0.11022	0.987851
0.112224	0.987406
0.114228	0.986952
0.116232	0.98649
0.118236	0.98602
0.12024	0.985542
0.122244	0.985056



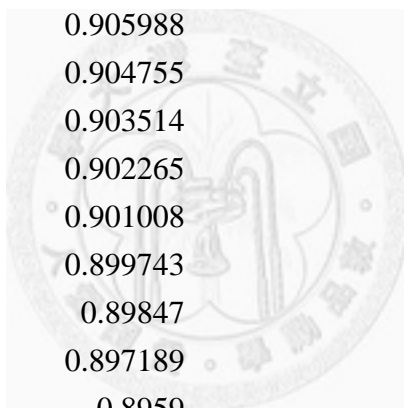
0.124248	0.984562
0.126253	0.98406
0.128257	0.98355
0.130261	0.983032
0.132265	0.982506
0.134269	0.981972
0.136273	0.98143
0.138277	0.98088
0.140281	0.980321
0.142285	0.979755
0.144289	0.979181
0.146293	0.978598
0.148297	0.978008
0.150301	0.97741
0.152305	0.976803
0.154309	0.976189
0.156313	0.975566
0.158317	0.974936
0.160321	0.974297
0.162325	0.973651
0.164329	0.972996
0.166333	0.972333
0.168337	0.971663
0.170341	0.970984
0.172345	0.970297
0.174349	0.969603
0.176353	0.9689
0.178357	0.968189
0.180361	0.96747
0.182365	0.966743
0.184369	0.966008
0.186373	0.965265
0.188377	0.964514
0.190381	0.963755
0.192385	0.962988
0.194389	0.962213
0.196393	0.96143
0.198397	0.960639



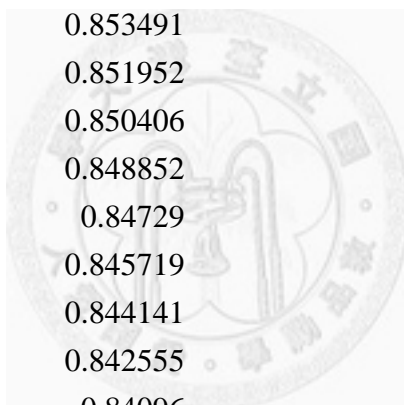
0.200401	0.95984
0.202405	0.959032
0.204409	0.958217
0.206413	0.957394
0.208417	0.956562
0.210421	0.955723
0.212425	0.954876
0.214429	0.95402
0.216433	0.953157
0.218437	0.952285
0.220441	0.951406
0.222445	0.950518
0.224449	0.949623
0.226453	0.948719
0.228457	0.947807
0.230461	0.946888
0.232465	0.94596
0.234469	0.945024
0.236473	0.944081
0.238477	0.943129
0.240481	0.942169
0.242485	0.941201
0.244489	0.940225
0.246493	0.939241
0.248497	0.938249
0.250501	0.937249
0.252505	0.936241
0.254509	0.935225
0.256513	0.934201
0.258517	0.933169
0.260521	0.932129
0.262525	0.931081
0.264529	0.930024
0.266533	0.92896
0.268537	0.927888
0.270541	0.926808
0.272545	0.925719
0.274549	0.924623



0.276553	0.923518
0.278557	0.922406
0.280561	0.921285
0.282565	0.920157
0.284569	0.91902
0.286573	0.917876
0.288577	0.916723
0.290581	0.915563
0.292585	0.914394
0.294589	0.913217
0.296593	0.912032
0.298597	0.91084
0.300601	0.909639
0.302605	0.90843
0.304609	0.907213
0.306613	0.905988
0.308617	0.904755
0.310621	0.903514
0.312625	0.902265
0.314629	0.901008
0.316633	0.899743
0.318637	0.89847
0.320641	0.897189
0.322645	0.8959
0.324649	0.894603
0.326653	0.893298
0.328657	0.891984
0.330661	0.890663
0.332665	0.889334
0.334669	0.887996
0.336673	0.886651
0.338677	0.885298
0.340681	0.883936
0.342685	0.882567
0.344689	0.881189
0.346693	0.879804
0.348697	0.87841
0.350701	0.877009



0.352705	0.875599
0.354709	0.874181
0.356713	0.872756
0.358717	0.871322
0.360721	0.86988
0.362725	0.86843
0.364729	0.866972
0.366733	0.865507
0.368737	0.864033
0.370741	0.862551
0.372745	0.861061
0.374749	0.859563
0.376754	0.858057
0.378758	0.856543
0.380762	0.855021
0.382766	0.853491
0.38477	0.851952
0.386774	0.850406
0.388778	0.848852
0.390782	0.84729
0.392786	0.845719
0.39479	0.844141
0.396794	0.842555
0.398798	0.84096
0.400802	0.839358
0.402806	0.837748
0.40481	0.836129
0.406814	0.834503
0.408818	0.832868
0.410822	0.831226
0.412826	0.829575
0.41483	0.827916
0.416834	0.82625
0.418838	0.824575
0.420842	0.822892
0.422846	0.821202
0.42485	0.819503
0.426854	0.817796



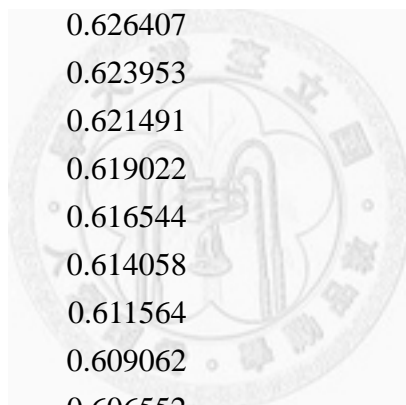
0.428858	0.816081
0.430862	0.814358
0.432866	0.812627
0.43487	0.810888
0.436874	0.809141
0.438878	0.807386
0.440882	0.805623
0.442886	0.803852
0.44489	0.802073
0.446894	0.800286
0.448898	0.798491
0.450902	0.796688
0.452906	0.794876
0.45491	0.793057
0.456914	0.79123
0.458918	0.789394
0.460922	0.787551
0.462926	0.7857
0.46493	0.78384
0.466934	0.781973
0.468938	0.780097
0.470942	0.778214
0.472946	0.776322
0.47495	0.774423
0.476954	0.772515
0.478958	0.770599
0.480962	0.768676
0.482966	0.766744
0.48497	0.764804
0.486974	0.762856
0.488978	0.760901
0.490982	0.758937
0.492986	0.756965
0.49499	0.754985
0.496994	0.752997
0.498998	0.751001
0.501002	0.748997
0.503006	0.746985



0.50501	0.744965
0.507014	0.742937
0.509018	0.740901
0.511022	0.738856
0.513026	0.736804
0.51503	0.734744
0.517034	0.732676
0.519038	0.730599
0.521042	0.728515
0.523046	0.726423
0.52505	0.724322
0.527054	0.722214
0.529058	0.720098
0.531062	0.717973
0.533066	0.71584
0.53507	0.7137
0.537074	0.711551
0.539078	0.709395
0.541082	0.70723
0.543086	0.705057
0.54509	0.702877
0.547094	0.700688
0.549098	0.698491
0.551102	0.696286
0.553106	0.694074
0.55511	0.691853
0.557114	0.689624
0.559118	0.687387
0.561122	0.685142
0.563126	0.682889
0.56513	0.680628
0.567134	0.678359
0.569138	0.676082
0.571142	0.673796
0.573146	0.671503
0.57515	0.669202
0.577154	0.666893
0.579158	0.664576



0.581162	0.66225
0.583166	0.659917
0.58517	0.657576
0.587174	0.655226
0.589178	0.652869
0.591182	0.650503
0.593186	0.64813
0.59519	0.645748
0.597194	0.643359
0.599198	0.640961
0.601202	0.638556
0.603206	0.636142
0.60521	0.63372
0.607214	0.631291
0.609218	0.628853
0.611222	0.626407
0.613226	0.623953
0.61523	0.621491
0.617234	0.619022
0.619238	0.616544
0.621242	0.614058
0.623246	0.611564
0.625251	0.609062
0.627255	0.606552
0.629259	0.604034
0.631263	0.601508
0.633267	0.598973
0.635271	0.596431
0.637275	0.593881
0.639279	0.591323
0.641283	0.588757
0.643287	0.586182
0.645291	0.5836
0.647295	0.58101
0.649299	0.578411
0.651303	0.575805
0.653307	0.57319
0.655311	0.570568





0.657315	0.567937
0.659319	0.565299
0.661323	0.562652
0.663327	0.559998
0.665331	0.557335
0.667335	0.554664
0.669339	0.551986
0.671343	0.549299
0.673347	0.546604
0.675351	0.543901
0.677355	0.541191
0.679359	0.538472
0.681363	0.535745
0.683367	0.53301
0.685371	0.530267
0.687375	0.527516
0.689379	0.524757
0.691383	0.52199
0.693387	0.519215
0.695391	0.516432
0.697395	0.513641
0.699399	0.510841
0.701403	0.508034
0.703407	0.505219
0.705411	0.502396
0.707415	0.499564
0.709419	0.496725
0.711423	0.493878
0.713427	0.491022
0.715431	0.488159
0.717435	0.485287
0.719439	0.482408
0.721443	0.47952
0.723447	0.476625
0.725451	0.473721
0.727455	0.470809
0.729459	0.46789
0.731463	0.464962



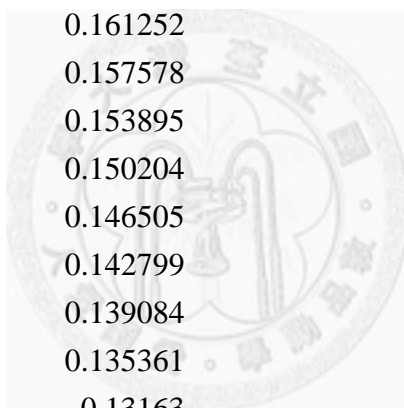
0.733467	0.462026
0.735471	0.459082
0.737475	0.456131
0.739479	0.453171
0.741483	0.450203
0.743487	0.447227
0.745491	0.444243
0.747495	0.441251
0.749499	0.438251
0.751503	0.435243
0.753507	0.432227
0.755511	0.429203
0.757515	0.426171
0.759519	0.423131
0.761523	0.420083
0.763527	0.417026
0.765531	0.413962
0.767535	0.41089
0.769539	0.40781
0.771543	0.404721
0.773547	0.401625
0.775551	0.39852
0.777555	0.395408
0.779559	0.392288
0.781563	0.389159
0.783567	0.386023
0.785571	0.382878
0.787575	0.379725
0.789579	0.376565
0.791583	0.373396
0.793587	0.370219
0.795591	0.367035
0.797595	0.363842
0.799599	0.360641
0.801603	0.357432
0.803607	0.354215
0.805611	0.350991
0.807615	0.347758



0.809619	0.344517
0.811623	0.341268
0.813627	0.338011
0.815631	0.334746
0.817635	0.331473
0.819639	0.328191
0.821643	0.324902
0.823647	0.321605
0.825651	0.3183
0.827655	0.314987
0.829659	0.311665
0.831663	0.308336
0.833667	0.304999
0.835671	0.301653
0.837675	0.2983
0.839679	0.294939
0.841683	0.291569
0.843687	0.288192
0.845691	0.284806
0.847695	0.281413
0.849699	0.278011
0.851703	0.274601
0.853707	0.271184
0.855711	0.267758
0.857715	0.264324
0.859719	0.260882
0.861723	0.257433
0.863727	0.253975
0.865731	0.250509
0.867735	0.247035
0.869739	0.243553
0.871743	0.240063
0.873747	0.236565
0.875752	0.233059
0.877756	0.229545
0.87976	0.226023
0.881764	0.222493
0.883768	0.218955



0.885772	0.215409
0.887776	0.211855
0.88978	0.208292
0.891784	0.204722
0.893788	0.201144
0.895792	0.197557
0.897796	0.193963
0.8998	0.190361
0.901804	0.18675
0.903808	0.183132
0.905812	0.179505
0.907816	0.175871
0.90982	0.172228
0.911824	0.168578
0.913828	0.164919
0.915832	0.161252
0.917836	0.157578
0.91984	0.153895
0.921844	0.150204
0.923848	0.146505
0.925852	0.142799
0.927856	0.139084
0.92986	0.135361
0.931864	0.13163
0.933868	0.127891
0.935872	0.124144
0.937876	0.120389
0.93988	0.116626
0.941884	0.112855
0.943888	0.109076
0.945892	0.105289
0.947896	0.101494
0.9499	0.09769
0.951904	0.093879
0.953908	0.09006
0.955912	0.086233
0.957916	0.082397
0.95992	0.078554



0.961924	0.074703
0.963928	0.070843
0.965932	0.066976
0.967936	0.0631
0.96994	0.059217
0.971944	0.055325
0.973948	0.051425
0.975952	0.047518
0.977956	0.043602
0.97996	0.039679
0.981964	0.035747
0.983968	0.031807
0.985972	0.027859
0.987976	0.023904
0.98998	0.01994
0.991984	0.015968
0.993988	0.011988
0.995992	0.008
0.997996	0.004004
1	2.22E-16

---

**ZDT3**

---

$f_1$	$f_2$
0	1
0.000536	0.976841
0.001072	0.967225
0.001608	0.959822
0.002144	0.953556
0.00268	0.948011
0.003215	0.942971
0.003751	0.938311
0.004287	0.933947
0.004823	0.929823
0.005359	0.925896
0.005895	0.922136
0.006431	0.918517
0.006967	0.91502
0.007503	0.91163

0.008039	0.908333
0.008574	0.90512
0.00911	0.90198
0.009646	0.898906
0.010182	0.895891
0.010718	0.89293
0.011254	0.890018
0.01179	0.887151
0.012326	0.884324
0.012862	0.881534
0.013398	0.878778
0.013934	0.876053
0.014469	0.873358
0.015005	0.870689
0.015541	0.868045
0.016077	0.865425
0.016613	0.862826
0.017149	0.860247
0.017685	0.857688
0.018221	0.855146
0.018757	0.852621
0.019293	0.850112
0.019829	0.847618
0.020364	0.845138
0.0209	0.842672
0.021436	0.84022
0.021972	0.837779
0.022508	0.835351
0.023044	0.832935
0.02358	0.830529
0.024116	0.828135
0.024652	0.825752
0.025188	0.823379
0.025723	0.821017
0.026259	0.818664
0.026795	0.816322
0.027331	0.81399
0.027867	0.811668



0.028403	0.809356
0.028939	0.807053
0.029475	0.804761
0.030011	0.802479
0.030547	0.800207
0.031083	0.797945
0.031618	0.795693
0.032154	0.793452
0.03269	0.791221
0.033226	0.789001
0.033762	0.786792
0.034298	0.784594
0.034834	0.782407
0.03537	0.780232
0.035906	0.778069
0.036442	0.775918
0.036977	0.773779
0.037513	0.771652
0.038049	0.769539
0.038585	0.767438
0.039121	0.765351
0.039657	0.763277
0.040193	0.761218
0.040729	0.759173
0.041265	0.757142
0.041801	0.755126
0.042337	0.753126
0.042872	0.751141
0.043408	0.749172
0.043944	0.74722
0.04448	0.745284
0.045016	0.743365
0.045552	0.741463
0.046088	0.739579
0.046624	0.737713
0.04716	0.735865
0.047696	0.734036
0.048232	0.732226



0.048767	0.730436
0.049303	0.728665
0.049839	0.726914
0.050375	0.725184
0.050911	0.723475
0.051447	0.721787
0.051983	0.72012
0.052519	0.718476
0.053055	0.716853
0.053591	0.715254
0.054126	0.713677
0.054662	0.712123
0.055198	0.710593
0.055734	0.709087
0.05627	0.707605
0.056806	0.706147
0.057342	0.704715
0.057878	0.703308
0.058414	0.701926
0.05895	0.70057
0.059486	0.69924
0.060021	0.697936
0.060557	0.696659
0.061093	0.695409
0.061629	0.694186
0.062165	0.692991
0.062701	0.691823
0.063237	0.690683
0.063773	0.689572
0.064309	0.688488
0.064845	0.687434
0.06538	0.686408
0.065916	0.685412
0.066452	0.684445
0.066988	0.683507
0.067524	0.682599
0.06806	0.681721
0.068596	0.680873





0.069132	0.680054
0.069668	0.679267
0.070204	0.67851
0.07074	0.677783
0.071275	0.677087
0.071811	0.676422
0.072347	0.675787
0.072883	0.675184
0.073419	0.674612
0.073955	0.674071
0.074491	0.673561
0.075027	0.673083
0.075563	0.672635
0.076099	0.672219
0.076635	0.671835
0.07717	0.671481
0.077706	0.671159
0.078242	0.670869
0.078778	0.670609
0.079314	0.670381
0.07985	0.670184
0.080386	0.670018
0.080922	0.669883
0.081458	0.669779
0.081994	0.669706
0.082529	0.669664
0.083065	0.669653
0.182744	0.666802
0.18328	0.663795
0.183816	0.660748
0.184352	0.657661
0.184887	0.654534
0.185423	0.651368
0.185959	0.648163
0.186495	0.64492
0.187031	0.64164
0.187567	0.638324
0.188103	0.634971



0.188639	0.631583
0.189175	0.628161
0.189711	0.624704
0.190247	0.621214
0.190782	0.617691
0.191318	0.614137
0.191854	0.610551
0.19239	0.606935
0.192926	0.603289
0.193462	0.599615
0.193998	0.595913
0.194534	0.592183
0.19507	0.588427
0.195606	0.584645
0.196141	0.580839
0.196677	0.577009
0.197213	0.573156
0.197749	0.569281
0.198285	0.565385
0.198821	0.561469
0.199357	0.557533
0.199893	0.553579
0.200429	0.549608
0.200965	0.54562
0.201501	0.541617
0.202036	0.537599
0.202572	0.533567
0.203108	0.529523
0.203644	0.525467
0.20418	0.521401
0.204716	0.517325
0.205252	0.513241
0.205788	0.509149
0.206324	0.505051
0.20686	0.500948
0.207395	0.49684
0.207931	0.492729
0.208467	0.488615



0.209003	0.484501
0.209539	0.480387
0.210075	0.476273
0.210611	0.472162
0.211147	0.468054
0.211683	0.46395
0.212219	0.459852
0.212755	0.45576
0.21329	0.451676
0.213826	0.4476
0.214362	0.443535
0.214898	0.43948
0.215434	0.435438
0.21597	0.431408
0.216506	0.427394
0.217042	0.423394
0.217578	0.419411
0.218114	0.415446
0.21865	0.4115
0.219185	0.407573
0.219721	0.403668
0.220257	0.399785
0.220793	0.395925
0.221329	0.392089
0.221865	0.388279
0.222401	0.384496
0.222937	0.38074
0.223473	0.377013
0.224009	0.373316
0.224544	0.36965
0.22508	0.366016
0.225616	0.362416
0.226152	0.358849
0.226688	0.355318
0.227224	0.351823
0.22776	0.348366
0.228296	0.344947
0.228832	0.341568



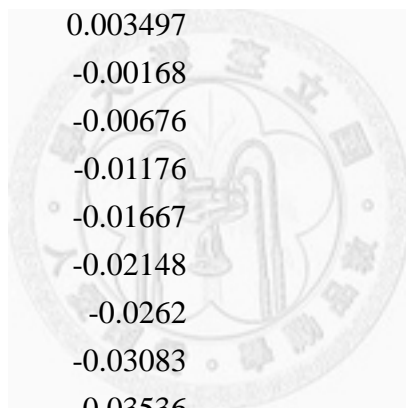
0.229368	0.338229
0.229904	0.334932
0.230439	0.331677
0.230975	0.328466
0.231511	0.3253
0.232047	0.322179
0.232583	0.319105
0.233119	0.316079
0.233655	0.313101
0.234191	0.310172
0.234727	0.307294
0.235263	0.304467
0.235798	0.301692
0.236334	0.298971
0.23687	0.296303
0.237406	0.29369
0.237942	0.291134
0.238478	0.288633
0.239014	0.28619
0.23955	0.283806
0.240086	0.28148
0.240622	0.279215
0.241158	0.27701
0.241693	0.274866
0.242229	0.272785
0.242765	0.270766
0.243301	0.268811
0.243837	0.26692
0.244373	0.265094
0.244909	0.263334
0.245445	0.26164
0.245981	0.260013
0.246517	0.258454
0.247053	0.256962
0.247588	0.255539
0.248124	0.254186
0.24866	0.252902
0.249196	0.251688



0.249732	0.250545
0.250268	0.249473
0.250804	0.248473
0.25134	0.247545
0.251876	0.246689
0.252412	0.245907
0.252947	0.245197
0.253483	0.244562
0.254019	0.244
0.254555	0.243512
0.255091	0.243099
0.255627	0.242761
0.256163	0.242498
0.256699	0.24231
0.257235	0.242198
0.257771	0.242161
0.409432	0.240579
0.409968	0.23342
0.410504	0.226279
0.41104	0.21916
0.411576	0.212063
0.412111	0.204992
0.412647	0.197947
0.413183	0.190931
0.413719	0.183946
0.414255	0.176994
0.414791	0.170077
0.415327	0.163196
0.415863	0.156355
0.416399	0.149554
0.416935	0.142796
0.417471	0.136082
0.418006	0.129415
0.418542	0.122797
0.419078	0.116229
0.419614	0.109714
0.42015	0.103253
0.420686	0.096848



0.421222	0.090501
0.421758	0.084213
0.422294	0.077988
0.42283	0.071826
0.423365	0.06573
0.423901	0.059701
0.424437	0.053741
0.424973	0.047852
0.425509	0.042035
0.426045	0.036293
0.426581	0.030627
0.427117	0.025039
0.427653	0.01953
0.428189	0.014102
0.428725	0.008757
0.42926	0.003497
0.429796	-0.00168
0.430332	-0.00676
0.430868	-0.01176
0.431404	-0.01667
0.43194	-0.02148
0.432476	-0.0262
0.433012	-0.03083
0.433548	-0.03536
0.434084	-0.03979
0.43462	-0.04412
0.435155	-0.04835
0.435691	-0.05248
0.436227	-0.0565
0.436763	-0.06042
0.437299	-0.06423
0.437835	-0.06794
0.438371	-0.07154
0.438907	-0.07502
0.439443	-0.0784
0.439979	-0.08166
0.440514	-0.08481
0.44105	-0.08785



0.441586	-0.09077
0.442122	-0.09357
0.442658	-0.09626
0.443194	-0.09883
0.44373	-0.10128
0.444266	-0.10361
0.444802	-0.10582
0.445338	-0.10791
0.445874	-0.10987
0.446409	-0.11171
0.446945	-0.11343
0.447481	-0.11502
0.448017	-0.11649
0.448553	-0.11783
0.449089	-0.11905
0.449625	-0.12013
0.450161	-0.1211
0.450697	-0.12193
0.451233	-0.12263
0.451768	-0.12321
0.452304	-0.12366
0.45284	-0.12397
0.453376	-0.12416
0.453912	-0.12422
0.618435	-0.12489
0.618971	-0.13419
0.619507	-0.14342
0.620043	-0.15256
0.620579	-0.1616
0.621115	-0.17056
0.621651	-0.17942
0.622186	-0.18819
0.622722	-0.19685
0.623258	-0.20542
0.623794	-0.21387
0.62433	-0.22223
0.624866	-0.23047
0.625402	-0.2386



0.625938	-0.24661
0.626474	-0.25451
0.62701	-0.26229
0.627546	-0.26995
0.628081	-0.27748
0.628617	-0.28489
0.629153	-0.29217
0.629689	-0.29932
0.630225	-0.30634
0.630761	-0.31322
0.631297	-0.31996
0.631833	-0.32657
0.632369	-0.33303
0.632905	-0.33935
0.633441	-0.34553
0.633976	-0.35156
0.634512	-0.35744
0.635048	-0.36317
0.635584	-0.36874
0.63612	-0.37417
0.636656	-0.37943
0.637192	-0.38454
0.637728	-0.38949
0.638264	-0.39428
0.6388	-0.39891
0.639335	-0.40337
0.639871	-0.40767
0.640407	-0.4118
0.640943	-0.41576
0.641479	-0.41956
0.642015	-0.42318
0.642551	-0.42663
0.643087	-0.42991
0.643623	-0.43301
0.644159	-0.43594
0.644695	-0.43869
0.64523	-0.44126
0.645766	-0.44366





0.646302	-0.44588
0.646838	-0.44791
0.647374	-0.44977
0.64791	-0.45144
0.648446	-0.45293
0.648982	-0.45424
0.649518	-0.45537
0.650054	-0.45631
0.650589	-0.45707
0.651125	-0.45764
0.651661	-0.45803
0.652197	-0.45823
0.652733	-0.45825
0.823687	-0.46549
0.824223	-0.47628
0.824759	-0.48692
0.825295	-0.49741
0.825831	-0.50774
0.826367	-0.51792
0.826902	-0.52793
0.827438	-0.53778
0.827974	-0.54747
0.82851	-0.55699
0.829046	-0.56633
0.829582	-0.5755
0.830118	-0.58449
0.830654	-0.5933
0.83119	-0.60193
0.831726	-0.61037
0.832262	-0.61863
0.832797	-0.62669
0.833333	-0.63456
0.833869	-0.64223
0.834405	-0.64971
0.834941	-0.65699
0.835477	-0.66406
0.836013	-0.67093
0.836549	-0.67759



0.837085	-0.68404
0.837621	-0.69029
0.838156	-0.69631
0.838692	-0.70213
0.839228	-0.70773
0.839764	-0.71311
0.8403	-0.71826
0.840836	-0.7232
0.841372	-0.72791
0.841908	-0.7324
0.842444	-0.73667
0.84298	-0.7407
0.843516	-0.7445
0.844051	-0.74808
0.844587	-0.75142
0.845123	-0.75453
0.845659	-0.75741
0.846195	-0.76005
0.846731	-0.76245
0.847267	-0.76462
0.847803	-0.76655
0.848339	-0.76824
0.848875	-0.76969
0.849411	-0.7709
0.849946	-0.77187
0.850482	-0.7726
0.851018	-0.77309
0.851554	-0.77334
0.85209	-0.77334

---



---

ZDT4

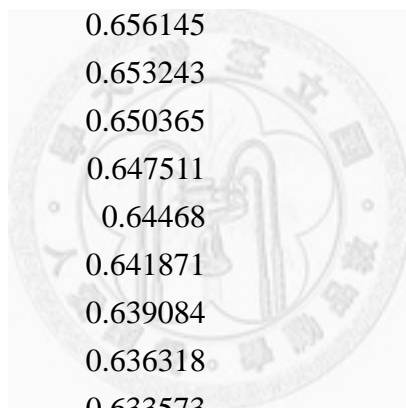
---

$f_1$	$f_2$
0	1
0.002004	0.955234
0.004008	0.936691
0.006012	0.922463
0.008016	0.910468
0.01002	0.8999

0.012024	0.890346
0.014028	0.88156
0.016032	0.873382
0.018036	0.865702
0.02004	0.858437
0.022044	0.851527
0.024048	0.844926
0.026052	0.838593
0.028056	0.8325
0.03006	0.826621
0.032064	0.820935
0.034068	0.815424
0.036072	0.810073
0.038076	0.804869
0.04008	0.7998
0.042084	0.794856
0.044088	0.790028
0.046092	0.785309
0.048096	0.780692
0.0501	0.776169
0.052104	0.771737
0.054108	0.767388
0.056112	0.76312
0.058116	0.758927
0.06012	0.754806
0.062124	0.750753
0.064128	0.746764
0.066132	0.742838
0.068136	0.738971
0.07014	0.73516
0.072144	0.731403
0.074148	0.727698
0.076152	0.724043
0.078156	0.720435
0.08016	0.716874
0.082164	0.713357
0.084168	0.709882
0.086172	0.706449



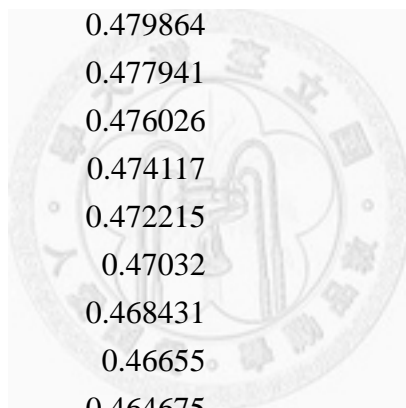
0.088176	0.703055
0.09018	0.6997
0.092184	0.696381
0.094188	0.693099
0.096192	0.689851
0.098196	0.686637
0.1002	0.683456
0.102204	0.680306
0.104208	0.677187
0.106212	0.674098
0.108216	0.671037
0.11022	0.668005
0.112224	0.665001
0.114228	0.662023
0.116232	0.659071
0.118236	0.656145
0.12024	0.653243
0.122244	0.650365
0.124248	0.647511
0.126253	0.64468
0.128257	0.641871
0.130261	0.639084
0.132265	0.636318
0.134269	0.633573
0.136273	0.630849
0.138277	0.628144
0.140281	0.62546
0.142285	0.622794
0.144289	0.620147
0.146293	0.617518
0.148297	0.614907
0.150301	0.612314
0.152305	0.609738
0.154309	0.607179
0.156313	0.604636
0.158317	0.60211
0.160321	0.599599
0.162325	0.597105



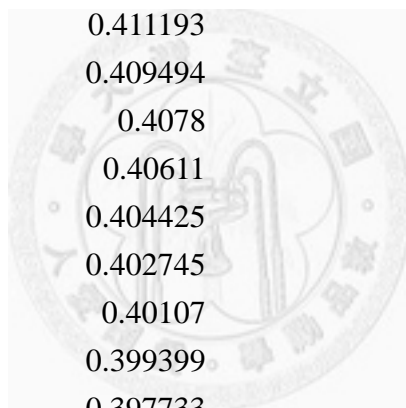
0.164329	0.594625
0.166333	0.592161
0.168337	0.589711
0.170341	0.587277
0.172345	0.584856
0.174349	0.582449
0.176353	0.580056
0.178357	0.577677
0.180361	0.575311
0.182365	0.572958
0.184369	0.570618
0.186373	0.568291
0.188377	0.565976
0.190381	0.563674
0.192385	0.561383
0.194389	0.559105
0.196393	0.556838
0.198397	0.554582
0.200401	0.552339
0.202405	0.550106
0.204409	0.547884
0.206413	0.545673
0.208417	0.543473
0.210421	0.541283
0.212425	0.539104
0.214429	0.536935
0.216433	0.534777
0.218437	0.532628
0.220441	0.530489
0.222445	0.528359
0.224449	0.52624
0.226453	0.524129
0.228457	0.522028
0.230461	0.519937
0.232465	0.517854
0.234469	0.51578
0.236473	0.513715
0.238477	0.511659



0.240481	0.509611
0.242485	0.507572
0.244489	0.505542
0.246493	0.503519
0.248497	0.501505
0.250501	0.499499
0.252505	0.497501
0.254509	0.495511
0.256513	0.493529
0.258517	0.491554
0.260521	0.489587
0.262525	0.487628
0.264529	0.485676
0.266533	0.483732
0.268537	0.481794
0.270541	0.479864
0.272545	0.477941
0.274549	0.476026
0.276553	0.474117
0.278557	0.472215
0.280561	0.47032
0.282565	0.468431
0.284569	0.46655
0.286573	0.464675
0.288577	0.462806
0.290581	0.460944
0.292585	0.459089
0.294589	0.457239
0.296593	0.455396
0.298597	0.45356
0.300601	0.451729
0.302605	0.449904
0.304609	0.448086
0.306613	0.446273
0.308617	0.444467
0.310621	0.442666
0.312625	0.440871
0.314629	0.439082



0.316633	0.437298
0.318637	0.43552
0.320641	0.433748
0.322645	0.431981
0.324649	0.43022
0.326653	0.428464
0.328657	0.426714
0.330661	0.424968
0.332665	0.423229
0.334669	0.421494
0.336673	0.419764
0.338677	0.41804
0.340681	0.416321
0.342685	0.414607
0.344689	0.412897
0.346693	0.411193
0.348697	0.409494
0.350701	0.4078
0.352705	0.40611
0.354709	0.404425
0.356713	0.402745
0.358717	0.40107
0.360721	0.399399
0.362725	0.397733
0.364729	0.396072
0.366733	0.394415
0.368737	0.392762
0.370741	0.391115
0.372745	0.389471
0.374749	0.387832
0.376754	0.386198
0.378758	0.384567
0.380762	0.382941
0.382766	0.38132
0.38477	0.379702
0.386774	0.378089
0.388778	0.37648
0.390782	0.374875



0.392786	0.373274
0.39479	0.371677
0.396794	0.370084
0.398798	0.368496
0.400802	0.366911
0.402806	0.36533
0.40481	0.363753
0.406814	0.362181
0.408818	0.360612
0.410822	0.359046
0.412826	0.357485
0.41483	0.355927
0.416834	0.354373
0.418838	0.352823
0.420842	0.351277
0.422846	0.349734
0.42485	0.348195
0.426854	0.34666
0.428858	0.345128
0.430862	0.343599
0.432866	0.342075
0.43487	0.340553
0.436874	0.339036
0.438878	0.337522
0.440882	0.336011
0.442886	0.334503
0.44489	0.332999
0.446894	0.331499
0.448898	0.330002
0.450902	0.328508
0.452906	0.327017
0.45491	0.32553
0.456914	0.324046
0.458918	0.322565
0.460922	0.321088
0.462926	0.319613
0.46493	0.318142
0.466934	0.316674





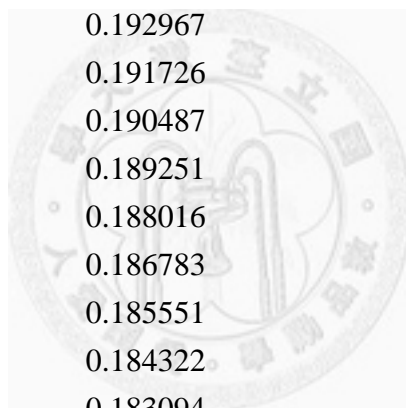
0.468938	0.31521
0.470942	0.313748
0.472946	0.312289
0.47495	0.310834
0.476954	0.309382
0.478958	0.307932
0.480962	0.306486
0.482966	0.305042
0.48497	0.303602
0.486974	0.302165
0.488978	0.30073
0.490982	0.299299
0.492986	0.29787
0.49499	0.296445
0.496994	0.295022
0.498998	0.293602
0.501002	0.292185
0.503006	0.290771
0.50501	0.289359
0.507014	0.287951
0.509018	0.286545
0.511022	0.285142
0.513026	0.283742
0.51503	0.282344
0.517034	0.280949
0.519038	0.279557
0.521042	0.278168
0.523046	0.276781
0.52505	0.275397
0.527054	0.274015
0.529058	0.272636
0.531062	0.27126
0.533066	0.269886
0.53507	0.268515
0.537074	0.267147
0.539078	0.265781
0.541082	0.264417
0.543086	0.263056



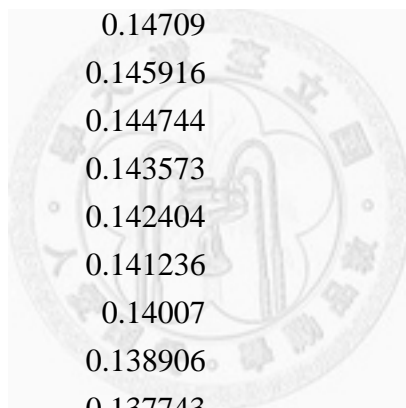
0.54509	0.261698
0.547094	0.260342
0.549098	0.258988
0.551102	0.257637
0.553106	0.256289
0.55511	0.254943
0.557114	0.253599
0.559118	0.252258
0.561122	0.250919
0.563126	0.249583
0.56513	0.248249
0.567134	0.246917
0.569138	0.245587
0.571142	0.24426
0.573146	0.242936
0.57515	0.241613
0.577154	0.240293
0.579158	0.238975
0.581162	0.23766
0.583166	0.236347
0.58517	0.235036
0.587174	0.233727
0.589178	0.23242
0.591182	0.231116
0.593186	0.229814
0.59519	0.228514
0.597194	0.227216
0.599198	0.225921
0.601202	0.224628
0.603206	0.223336
0.60521	0.222047
0.607214	0.22076
0.609218	0.219476
0.611222	0.218193
0.613226	0.216912
0.61523	0.215634
0.617234	0.214357
0.619238	0.213083



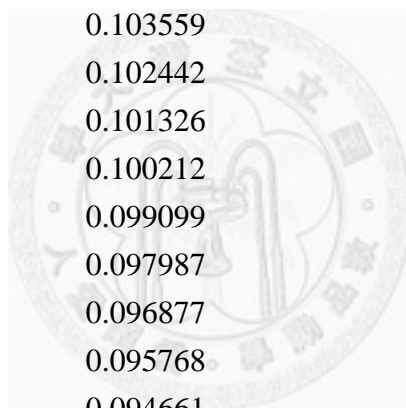
0.621242	0.211811
0.623246	0.21054
0.625251	0.209272
0.627255	0.208006
0.629259	0.206742
0.631263	0.20548
0.633267	0.20422
0.635271	0.202961
0.637275	0.201705
0.639279	0.200451
0.641283	0.199199
0.643287	0.197949
0.645291	0.1967
0.647295	0.195454
0.649299	0.194209
0.651303	0.192967
0.653307	0.191726
0.655311	0.190487
0.657315	0.189251
0.659319	0.188016
0.661323	0.186783
0.663327	0.185551
0.665331	0.184322
0.667335	0.183094
0.669339	0.181869
0.671343	0.180645
0.673347	0.179423
0.675351	0.178203
0.677355	0.176984
0.679359	0.175768
0.681363	0.174553
0.683367	0.17334
0.685371	0.172129
0.687375	0.170919
0.689379	0.169712
0.691383	0.168506
0.693387	0.167302
0.695391	0.166099



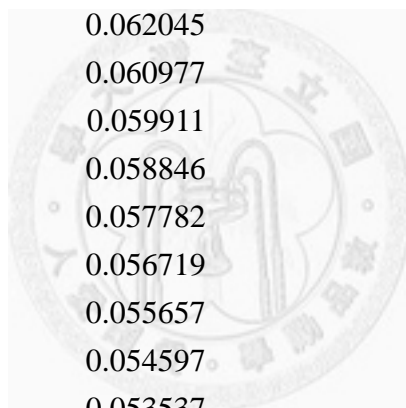
0.697395	0.164898
0.699399	0.163699
0.701403	0.162502
0.703407	0.161306
0.705411	0.160113
0.707415	0.15892
0.709419	0.15773
0.711423	0.156541
0.713427	0.155354
0.715431	0.154169
0.717435	0.152985
0.719439	0.151803
0.721443	0.150622
0.723447	0.149443
0.725451	0.148266
0.727455	0.14709
0.729459	0.145916
0.731463	0.144744
0.733467	0.143573
0.735471	0.142404
0.737475	0.141236
0.739479	0.14007
0.741483	0.138906
0.743487	0.137743
0.745491	0.136582
0.747495	0.135422
0.749499	0.134264
0.751503	0.133107
0.753507	0.131952
0.755511	0.130799
0.757515	0.129647
0.759519	0.128496
0.761523	0.127347
0.763527	0.1262
0.765531	0.125054
0.767535	0.123909
0.769539	0.122766
0.771543	0.121625



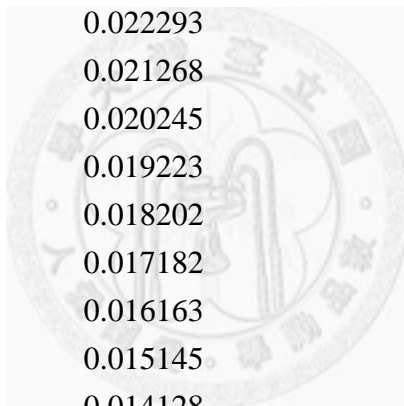
0.773547	0.120485
0.775551	0.119346
0.777555	0.118209
0.779559	0.117074
0.781563	0.115939
0.783567	0.114807
0.785571	0.113675
0.787575	0.112546
0.789579	0.111417
0.791583	0.11029
0.793587	0.109165
0.795591	0.108041
0.797595	0.106918
0.799599	0.105797
0.801603	0.104677
0.803607	0.103559
0.805611	0.102442
0.807615	0.101326
0.809619	0.100212
0.811623	0.099099
0.813627	0.097987
0.815631	0.096877
0.817635	0.095768
0.819639	0.094661
0.821643	0.093555
0.823647	0.09245
0.825651	0.091346
0.827655	0.090244
0.829659	0.089144
0.831663	0.088044
0.833667	0.086946
0.835671	0.085849
0.837675	0.084754
0.839679	0.08366
0.841683	0.082567
0.843687	0.081475
0.845691	0.080385
0.847695	0.079296



0.849699	0.078209
0.851703	0.077122
0.853707	0.076037
0.855711	0.074953
0.857715	0.073871
0.859719	0.072789
0.861723	0.071709
0.863727	0.070631
0.865731	0.069553
0.867735	0.068477
0.869739	0.067402
0.871743	0.066328
0.873747	0.065255
0.875752	0.064184
0.877756	0.063114
0.87976	0.062045
0.881764	0.060977
0.883768	0.059911
0.885772	0.058846
0.887776	0.057782
0.88978	0.056719
0.891784	0.055657
0.893788	0.054597
0.895792	0.053537
0.897796	0.052479
0.8998	0.051422
0.901804	0.050367
0.903808	0.049312
0.905812	0.048259
0.907816	0.047206
0.90982	0.046155
0.911824	0.045105
0.913828	0.044057
0.915832	0.043009
0.917836	0.041963
0.91984	0.040917
0.921844	0.039873
0.923848	0.03883



0.925852	0.037788
0.927856	0.036747
0.92986	0.035708
0.931864	0.034669
0.933868	0.033632
0.935872	0.032595
0.937876	0.03156
0.93988	0.030526
0.941884	0.029493
0.943888	0.028461
0.945892	0.02743
0.947896	0.026401
0.9499	0.025372
0.951904	0.024344
0.953908	0.023318
0.955912	0.022293
0.957916	0.021268
0.95992	0.020245
0.961924	0.019223
0.963928	0.018202
0.965932	0.017182
0.967936	0.016163
0.96994	0.015145
0.971944	0.014128
0.973948	0.013112
0.975952	0.012097
0.977956	0.011083
0.97996	0.010071
0.981964	0.009059
0.983968	0.008048
0.985972	0.007039
0.987976	0.00603
0.98998	0.005023
0.991984	0.004016
0.993988	0.003011
0.995992	0.002006
0.997996	0.001003
1	1.11E-16



---

---

ZDT6

---

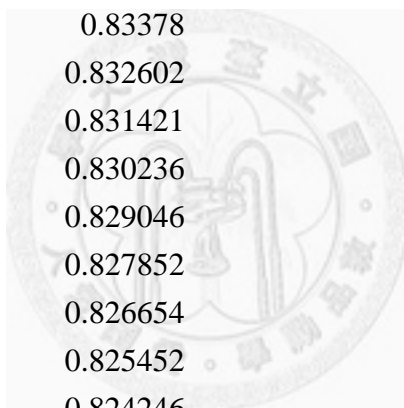
$f_1$	$f_2$
0.280883	0.921105
0.282324	0.920293
0.283765	0.919477
0.285206	0.918657
0.286648	0.917833
0.288089	0.917005
0.28953	0.916172
0.290971	0.915336
0.292412	0.914495
0.293853	0.91365
0.295294	0.912801
0.296735	0.911948
0.298176	0.911091
0.299618	0.910229
0.301059	0.909364
0.3025	0.908494
0.303941	0.90762
0.305382	0.906742
0.306823	0.90586
0.308264	0.904973
0.309705	0.904083
0.311147	0.903188
0.312588	0.902289
0.314029	0.901386
0.31547	0.900479
0.316911	0.899567
0.318352	0.898652
0.319793	0.897732
0.321234	0.896808
0.322675	0.895881
0.324117	0.894948
0.325558	0.894012
0.326999	0.893072
0.32844	0.892127
0.329881	0.891178



0.331322	0.890226
0.332763	0.889269
0.334204	0.888307
0.335646	0.887342
0.337087	0.886373
0.338528	0.885399
0.339969	0.884421
0.34141	0.883439
0.342851	0.882453
0.344292	0.881463
0.345733	0.880468
0.347174	0.87947
0.348616	0.878467
0.350057	0.87746
0.351498	0.876449
0.352939	0.875434
0.35438	0.874415
0.355821	0.873391
0.357262	0.872364
0.358703	0.871332
0.360144	0.870296
0.361586	0.869256
0.363027	0.868212
0.364468	0.867163
0.365909	0.866111
0.36735	0.865054
0.368791	0.863993
0.370232	0.862928
0.371673	0.861859
0.373115	0.860786
0.374556	0.859708
0.375997	0.858626
0.377438	0.857541
0.378879	0.856451
0.38032	0.855357
0.381761	0.854258
0.383202	0.853156
0.384643	0.852049



0.386085	0.850939
0.387526	0.849824
0.388967	0.848705
0.390408	0.847582
0.391849	0.846454
0.39329	0.845323
0.394731	0.844187
0.396172	0.843047
0.397613	0.841904
0.399055	0.840755
0.400496	0.839603
0.401937	0.838447
0.403378	0.837286
0.404819	0.836122
0.40626	0.834953
0.407701	0.83378
0.409142	0.832602
0.410584	0.831421
0.412025	0.830236
0.413466	0.829046
0.414907	0.827852
0.416348	0.826654
0.417789	0.825452
0.41923	0.824246
0.420671	0.823036
0.422112	0.821821
0.423554	0.820602
0.424995	0.81938
0.426436	0.818152
0.427877	0.816921
0.429318	0.815686
0.430759	0.814447
0.4322	0.813203
0.433641	0.811955
0.435083	0.810703
0.436524	0.809447
0.437965	0.808187
0.439406	0.806922



0.440847	0.805654
0.442288	0.804381
0.443729	0.803104
0.44517	0.801823
0.446611	0.800538
0.448053	0.799249
0.449494	0.797955
0.450935	0.796658
0.452376	0.795356
0.453817	0.79405
0.455258	0.79274
0.456699	0.791426
0.45814	0.790107
0.459581	0.788785
0.461023	0.787458
0.462464	0.786127
0.463905	0.784792
0.465346	0.783453
0.466787	0.78211
0.468228	0.780762
0.469669	0.779411
0.47111	0.778055
0.472552	0.776695
0.473993	0.775331
0.475434	0.773963
0.476875	0.77259
0.478316	0.771214
0.479757	0.769833
0.481198	0.768448
0.482639	0.767059
0.48408	0.765666
0.485522	0.764269
0.486963	0.762867
0.488404	0.761462
0.489845	0.760052
0.491286	0.758638
0.492727	0.75722
0.494168	0.755798



0.495609	0.754371
0.497051	0.752941
0.498492	0.751506
0.499933	0.750067
0.501374	0.748624
0.502815	0.747177
0.504256	0.745726
0.505697	0.74427
0.507138	0.742811
0.508579	0.741347
0.510021	0.739879
0.511462	0.738407
0.512903	0.736931
0.514344	0.73545
0.515785	0.733966
0.517226	0.732477
0.518667	0.730984
0.520108	0.729487
0.521549	0.727986
0.522991	0.726481
0.524432	0.724971
0.525873	0.723458
0.527314	0.72194
0.528755	0.720418
0.530196	0.718892
0.531637	0.717362
0.533078	0.715827
0.53452	0.714289
0.535961	0.712746
0.537402	0.711199
0.538843	0.709648
0.540284	0.708093
0.541725	0.706534
0.543166	0.70497
0.544607	0.703403
0.546048	0.701831
0.54749	0.700255
0.548931	0.698675



0.550372	0.697091
0.551813	0.695503
0.553254	0.69391
0.554695	0.692313
0.556136	0.690712
0.557577	0.689107
0.559018	0.687498
0.56046	0.685885
0.561901	0.684268
0.563342	0.682646
0.564783	0.68102
0.566224	0.67939
0.567665	0.677756
0.569106	0.676118
0.570547	0.674476
0.571989	0.672829
0.57343	0.671178
0.574871	0.669524
0.576312	0.667865
0.577753	0.666201
0.579194	0.664534
0.580635	0.662863
0.582076	0.661187
0.583517	0.659507
0.584959	0.657823
0.5864	0.656135
0.587841	0.654443
0.589282	0.652747
0.590723	0.651046
0.592164	0.649342
0.593605	0.647633
0.595046	0.64592
0.596488	0.644203
0.597929	0.642481
0.59937	0.640756
0.600811	0.639026
0.602252	0.637293
0.603693	0.635555



0.605134	0.633813
0.606575	0.632066
0.608016	0.630316
0.609458	0.628561
0.610899	0.626803
0.61234	0.62504
0.613781	0.623273
0.615222	0.621502
0.616663	0.619727
0.618104	0.617947
0.619545	0.616164
0.620986	0.614376
0.622428	0.612584
0.623869	0.610788
0.62531	0.608988
0.626751	0.607183
0.628192	0.605375
0.629633	0.603562
0.631074	0.601745
0.632515	0.599924
0.633957	0.598099
0.635398	0.59627
0.636839	0.594436
0.63828	0.592599
0.639721	0.590757
0.641162	0.588911
0.642603	0.587061
0.644044	0.585207
0.645485	0.583349
0.646927	0.581486
0.648368	0.579619
0.649809	0.577749
0.65125	0.575874
0.652691	0.573994
0.654132	0.572111
0.655573	0.570224
0.657014	0.568332
0.658455	0.566436



0.659897	0.564536
0.661338	0.562632
0.662779	0.560724
0.66422	0.558812
0.665661	0.556895
0.667102	0.554975
0.668543	0.55305
0.669984	0.551121
0.671426	0.549188
0.672867	0.54725
0.674308	0.545309
0.675749	0.543363
0.67719	0.541414
0.678631	0.53946
0.680072	0.537502
0.681513	0.53554
0.682954	0.533573
0.684396	0.531603
0.685837	0.529628
0.687278	0.527649
0.688719	0.525666
0.69016	0.523679
0.691601	0.521688
0.693042	0.519692
0.694483	0.517693
0.695925	0.515689
0.697366	0.513681
0.698807	0.511669
0.700248	0.509653
0.701689	0.507633
0.70313	0.505608
0.704571	0.503579
0.706012	0.501547
0.707453	0.49951
0.708895	0.497469
0.710336	0.495423
0.711777	0.493374
0.713218	0.49132



0.714659	0.489262
0.7161	0.487201
0.717541	0.485135
0.718982	0.483064
0.720423	0.48099
0.721865	0.478911
0.723306	0.476829
0.724747	0.474742
0.726188	0.472651
0.727629	0.470556
0.72907	0.468457
0.730511	0.466353
0.731952	0.464246
0.733394	0.462134
0.734835	0.460018
0.736276	0.457898
0.737717	0.455774
0.739158	0.453645
0.740599	0.451513
0.74204	0.449376
0.743481	0.447235
0.744922	0.445091
0.746364	0.442941
0.747805	0.440788
0.749246	0.438631
0.750687	0.436469
0.752128	0.434303
0.753569	0.432134
0.75501	0.429959
0.756451	0.427781
0.757893	0.425599
0.759334	0.423412
0.760775	0.421222
0.762216	0.419027
0.763657	0.416828
0.765098	0.414625
0.766539	0.412418
0.76798	0.410206





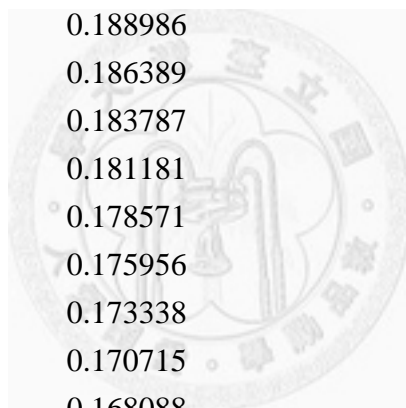
0.769421	0.407991
0.770863	0.405771
0.772304	0.403547
0.773745	0.401319
0.775186	0.399087
0.776627	0.39685
0.778068	0.39461
0.779509	0.392365
0.78095	0.390117
0.782391	0.387864
0.783833	0.385606
0.785274	0.383345
0.786715	0.38108
0.788156	0.37881
0.789597	0.376536
0.791038	0.374259
0.792479	0.371977
0.79392	0.36969
0.795362	0.3674
0.796803	0.365106
0.798244	0.362807
0.799685	0.360504
0.801126	0.358197
0.802567	0.355886
0.804008	0.353571
0.805449	0.351251
0.80689	0.348928
0.808332	0.3466
0.809773	0.344268
0.811214	0.341932
0.812655	0.339592
0.814096	0.337248
0.815537	0.334899
0.816978	0.332547
0.818419	0.33019
0.81986	0.327829
0.821302	0.325464
0.822743	0.323094



0.824184	0.320721
0.825625	0.318343
0.827066	0.315962
0.828507	0.313576
0.829948	0.311186
0.831389	0.308792
0.832831	0.306393
0.834272	0.303991
0.835713	0.301584
0.837154	0.299173
0.838595	0.296758
0.840036	0.294339
0.841477	0.291916
0.842918	0.289489
0.844359	0.287057
0.845801	0.284621
0.847242	0.282182
0.848683	0.279737
0.850124	0.277289
0.851565	0.274837
0.853006	0.27238
0.854447	0.26992
0.855888	0.267455
0.85733	0.264986
0.858771	0.262513
0.860212	0.260036
0.861653	0.257554
0.863094	0.255069
0.864535	0.252579
0.865976	0.250085
0.867417	0.247587
0.868858	0.245085
0.8703	0.242579
0.871741	0.240068
0.873182	0.237554
0.874623	0.235035
0.876064	0.232512
0.877505	0.229985



0.878946	0.227453
0.880387	0.224918
0.881828	0.222379
0.88327	0.219835
0.884711	0.217287
0.886152	0.214735
0.887593	0.212179
0.889034	0.209618
0.890475	0.207054
0.891916	0.204485
0.893357	0.201913
0.894799	0.199336
0.89624	0.196754
0.897681	0.194169
0.899122	0.19158
0.900563	0.188986
0.902004	0.186389
0.903445	0.183787
0.904886	0.181181
0.906327	0.178571
0.907769	0.175956
0.90921	0.173338
0.910651	0.170715
0.912092	0.168088
0.913533	0.165457
0.914974	0.162822
0.916415	0.160183
0.917856	0.15754
0.919298	0.154892
0.920739	0.15224
0.92218	0.149585
0.923621	0.146925
0.925062	0.14426
0.926503	0.141592
0.927944	0.13892
0.929385	0.136243
0.930826	0.133562
0.932268	0.130877



0.933709	0.128188
0.93515	0.125495
0.936591	0.122797
0.938032	0.120096
0.939473	0.11739
0.940914	0.11468
0.942355	0.111966
0.943796	0.109248
0.945238	0.106526
0.946679	0.103799
0.94812	0.101069
0.949561	0.098334
0.951002	0.095595
0.952443	0.092852
0.953884	0.090105
0.955325	0.087353
0.956767	0.084598
0.958208	0.081838
0.959649	0.079074
0.96109	0.076306
0.962531	0.073534
0.963972	0.070758
0.965413	0.067977
0.966854	0.065193
0.968295	0.062404
0.969737	0.059611
0.971178	0.056814
0.972619	0.054013
0.97406	0.051207
0.975501	0.048398
0.976942	0.045584
0.978383	0.042766
0.979824	0.039944
0.981265	0.037118
0.982707	0.034288
0.984148	0.031453
0.985589	0.028615
0.98703	0.025772



0.988471	0.022925
0.989912	0.020074
0.991353	0.017219
0.992794	0.014359
0.994236	0.011496
0.995677	0.008628
0.997118	0.005756
0.998559	0.00288
1	0

---

