

國立臺灣大學工學院應用力學研究所



碩士論文

Institute of Applied Mechanics

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis

利用沉浸邊界法於三維多球體沉降的數值模擬

Development of an immersed boundary method to the numerical
simulation of settling of multiple spheres

簡鈺霖

Yu-Lin Chien

指導教授：周逸儒 博士

Advisor: Yi-Ju Chou, Ph.D.

中華民國 108 年 7 月

July, 2019

國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書

利用沉浸邊界法於三維多球體沉降的數值模擬

Development of an immersed boundary method to
the numerical simulation of settling of multiple
spheres

本論文係簡鈺霖君（學號：R06543014）在國立臺灣大學應用力學研究所完成之碩士學位論文，於民國 108 年 7 月 31 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

周逸儒 周逸儒
(指導教授)

牛仰堯 牛仰堯

楊馥菱 楊馥菱

所 長

沈弘俊 沈弘俊

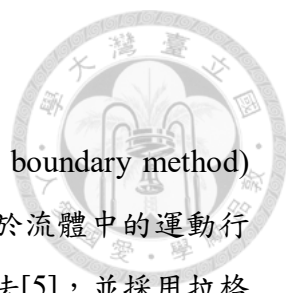
致謝

在碩士這兩年中，感謝周逸儒老師的細心指導，讓我在研究的這過程中不斷的成長，老師除了在研究上問題給予良好的建議，也在我研究犯錯的時候給予及時的改正和引導，並增進我面對問題時解決問題的能力，而最後讓我順利完成了碩士論文，並感謝在碩士論文口試時，口試委員牛仰堯教授和楊馥菱教授給予很好的意見且提出了不同的方法讓我參考並且改進。

在碩士研究的期間，在程式和研究上的問題，除了老師的指導，也感謝學長晨晏、佑任、哲榮和德耀的幫助及建議，且彼此相互討論而可以得到較好的解決辦法或結果，而在修課的期間，感謝同學國任、渙承、汶峰、良昇、忻融、裕愷、威廷、宥羽、彥慶、德欣、毅倫和宗穎的陪伴，一起討論課業及互相幫忙彼此的不足，順利的完成修課階段。

感謝這兩年來一路陪伴我的師長和同學們，同時也感謝父母的支持，讓我能有這個機會來台大應力所完成碩士學位。

中文摘要



本研究以拉格朗日-尤拉法的方式使用沉浸邊界法(immersed boundary method)於直接數值模擬(direct numerical simulation)中，模擬多顆球體於流體中的運動行為。其目的主要是驗證並改善直接施力(direct forcing)沉浸邊界法[5]，並採用拉格朗日點向內收縮方法[8]，且同時考慮軟球及硬球碰撞模型，來模擬單球體和多顆球體於流場中的複雜運動行為。驗證和改善可區分為兩部分，第一部分是模擬穩態條件下靜止球體於均勻流場所受阻力並與前人模擬數據結果做比較。其中直接施力沉浸邊界法的力回授採用狄拉克正規化脈衝函數，此方法會增加阻力係數值，由本研究結果顯示球體直徑與網格大小的比值為 8、雷諾數 $Re = 50$ 時，模擬出來的阻力係數為 1.805，比較文獻[24]模擬出來的阻力數值 1.574 來的大，故採用於拉格朗日點向內收縮的方法，此方法在不同流場網格解析度下，可以得到一 Re 、內縮值和網格解析度的修正式，本研究結果指出在同樣解析度下， $Re = 50$ 時可以得到的阻力係數為 1.582，此值趨近於上述文獻模擬結果。而第二部分則是模擬多顆球體於流場中的運動行為，首先模擬和驗證單一球體自然沉降行為，而後模擬多顆球體於不同高度進行自由沉降，讓多個球體產生碰撞，最後參考前人文獻[8]評估此不同條件下的運動行為。

關鍵字：直接數值模擬、沉浸邊界法、球體運動

ABSTRACT

This study presents the direct numerical simulation with an immersed boundary method (IBM) to simulate the motion of multiple spheres in flow field. The purpose of this study is to verify and improve the direct forcing immersed boundary method [5] and to adopt the inward contraction of Lagrangian points [8]; Simultaneously, we also consider the soft-sphere and hard-sphere collision model to simulate the collision behavior between sphere to sphere and sphere to wall respectively. The verification and improvement process consists of two parts. The first is to simulate the stationary sphere of steady state in the uniform flow and compare with the results of the simulation data of previous literature. The forced calculation of direct forcing immersed boundary method uses the regularized Dirac delta function which increases the drag coefficient value. When the results of this study show that the ratio of the sphere diameter to the grid size is 8 and Reynolds number (Re) is 50, the simulation is performed that the drag coefficient (C_d) is 1.805 which is larger than the literature [24]. Therefore, this study uses inward contraction of Lagrangian points. It can obtain a correction formula in form of Re , the contraction value and the grid resolution in different flow field. The simulating results of using this method indicate that the C_d can be obtained with $Re = 50$ is 1.582 at the same grid resolution. This value approaches the result of the literature [24]. The second part is to simulate the motion of multiple spheres in the flow field. This study is to simulate and verify the natural settlement behavior of a single sphere firstly, and then it simulates the settling of multiple spheres at different heights. The process of settling generates collision of spheres by variation of the flow field and the spherical velocity.

Keywords: Direct numerical simulation, Immersed boundary method, the motion of spheres

目錄



致謝.....	i
中文摘要.....	ii
ABSTRACT	iii
目錄.....	iv
圖目錄.....	vi
表目錄.....	ix
Chapter 1 緒論	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 文獻回顧.....	3
1.3 研究動機.....	6
1.4 論文內容概述	6
Chapter 2 理論和數值方法	7
2.1 統御方程式.....	7
2.2 直接施力沉浸邊界法.....	9
2.2.1 流固耦合方法	9
2.2.2 球體均勻分佈點	10
2.2.3 正規化狄拉克脈衝函數.....	11
2.3 牛頓—尤拉方程式(Newton-Euler equations)	13
2.4 顆粒間、顆粒與牆壁的碰撞模型	15
2.4.1 潤滑模型(lubrication model).....	15
2.4.2 硬球模型(hard-sphere model):顆粒與牆壁碰撞	17
2.4.3 軟球模型(soft-sphere model):顆粒間碰撞	18
Chapter 3 沉浸邊界法驗證和改善.....	21
3.1 固體邊界速度驗證及改善:迭代法	21
3.1.1 模擬設置.....	22
3.1.2 模擬結果.....	23
3.1.3 改善方法.....	24

3.2	邊界範圍.....	26
3.2.1	模擬設置.....	28
3.3	模擬結果.....	28
3.3.1	固體邊界不同解析度和不同向內收縮值模擬結果.....	28
3.3.2	不同雷諾數 Re_D 下阻力係數驗證.....	35
3.3.3	不同雷諾數下的拉格朗日向內收縮值 r_L	35
3.3.4	顆粒修正函數—向內收縮值、雷諾數和網格解析度.....	40
Chapter 4	模擬結果.....	41
4.1	單顆球體自由沉降.....	41
4.2	模擬兩顆球體在流場中的不同擺放方式所受阻力影響.....	43
4.2.1	靜止球體在流場中前後放置.....	43
4.2.2	靜止球體在流場中並排放置.....	45
4.3	兩顆球體沉降—Drafting-kissing-tumbling phenomenon.....	47
Chapter 5	結論及未來工作.....	52
5.1	結論.....	52
5.2	未來工作.....	53
	參考文獻.....	I

圖目錄



圖 1.1 (a) 貼體法:結構性網格和非結構性網格結合應用 (b) 沉浸邊界法:流場網格(藍色區塊)、結構體(橘色區塊)及其內插邊界點(黑色圓點).....	2
圖 1.2 1000 顆球體沉降瞬時位置圖[5].....	5
圖 1.3 (a) 圓柱與流場設置示意圖 (b) 在圓柱不同角度下的速度誤差[6].....	5
圖 1.4 Drafting-kissing-tumbling 現象由左到右不同時間位置圖[8].....	5
圖 2.1 三維卡式座標方向示意圖.....	7
圖 2.2 拉格朗日點各佔體積示意圖.....	10
圖 2.3 球體上拉格朗日點散佈圖($N_L = 200$) (a)拉格朗日點初始位置 (b)拉格朗日點經由庫倫力平衡後的最終位置.....	11
圖 2.4 連續函數 $\phi(r)$, 橘色虛線即為拉格朗日點位置.....	12
圖 2.5 正規化狄拉克脈衝函數運作範圍示意圖, 紅點、橘點和綠點為拉格朗日點, 黑點表示流場網格 (a)表示單個拉格朗日點的內外插範圍, 如橘點對應到橘框、綠點對應到綠框 (b)橘黃色區塊為固體於流場網格中內外插的整體運算範圍.....	13
圖 2.6 碰撞模型示意圖.....	15
圖 2.7 硬球碰撞模型示意圖.....	18
圖 2.8 同時多顆顆粒碰撞示意圖.....	19
圖 2.9 軟球碰撞模型示意圖[22, 23].....	20
圖 3.1 靜止球體在流場中的位置示意圖.....	23
圖 3.2 入流方向與球型顆粒 $x y$ 平面角度示意圖.....	23
圖 3.3 在 $Re_D = 50$ 且不同迭代次數之拉格朗日點速度誤差點圖.....	24
圖 3.4 不同雷諾數經由不同迭代次數最大速度誤差圖.....	24
圖 3.5 不同權重對應其迭代次數.....	26
圖 3.6 $Re_D = 50$ 不同解析度下的阻力係數值 C_d , 而應用 Clift et al(1978)[24]經由實驗所得公式計算 $Re_D = 50$ 阻力係數實驗值為 1.539 , 顯示模擬結果皆大於實驗值。.....	27
圖 3.7 球體厚度及拉格朗日點向內收縮值 r_l 示意圖, 黑線為顆粒真實半徑, 深藍	



色虛線為因厚度向外延伸的球殼，紅色虛線為經由收縮後的球體半徑，黑點為初始設定之拉格朗日點位置，綠點為向球體內收縮後的拉格朗日點位置..... 27

圖 3.8 $Re_D = 50$ 且 $r_L/h = 0$ 之流線圖

(a) $h = D/8$ (b) $h = D/12$ (c) $h = D/16$ 29

圖 3.9 $Re_D = 100$ 且 $r_L/h = 0$ 之流線圖

(a) $h = D/8$ (b) $h = D/12$ (c) $h = D/16$ 30

圖 3.10 $Re_D = 50$ 不同向內收縮值之流線圖($h = D/16$) (a) $r_L/h = 0$

(b) $r_L/h = 0.25$ (c) $r_L/h = 0.35$ (d) $r_L/h = 0.4$ (e) $r_L/h = 0.5$

(f) $r_L/h = 0.75$ 32

圖 3.11 $Re_D = 100$ 不同向內收縮值之不同向內收縮值流線圖($h = D/16$)

(a) $r_L/h = 0$ (b) $r_L/h = 0.25$ (c) $r_L/h = 0.35$ (d) $r_L/h = 0.4$ (e) $r_L/h = 0.5$

(f) $r_L/h = 0.75$ 34

圖 3.12 應用線性擬合在不同解析度大小的阻力係數值(藍點)，得到 $h \sim D/\infty$ 的阻力係數(紅點) (a) $Re_D = 50$ (b) $Re_D = 100$ 36

圖 3.13 雷諾數和阻力係數值的模擬結果與實驗結果[24]比對圖..... 37

圖 3.14 (a) $Re_D = 50$ (b) $Re_D = 100$ 在不同解析度下及不同向內收縮值與相應的阻力係數值圖(實線)，而向內收縮值 $r_L/h = 0$ 且 $h \sim D/\infty$ 所得到的阻力係數值(紅色點)且紅色虛線為此值的延伸於不同向內收縮值以利於觀察。..... 38

圖 3.15 (a) $Re_D = 50$ (b) $Re_D = 100$ 不同解析度及固定直徑不同向內收縮值下與相應阻力係數圖，不同解析度對應 $h \sim D/\infty$ 時的阻力係數值即可得到該解析度下該使用的向內收縮值。..... 39

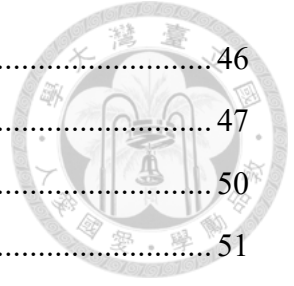
圖 3.16 雷諾數 Re_D 、向內收縮值 r_L 和網格解析度 h 之擬合曲面圖..... 40

圖 4.1 球體沉降速度與時間關係圖，沒有使用拉格朗日向內收縮方法為虛線，而有使用該方法的為實線..... 42

圖 4.2 靜止球體於均勻入流流場前後擺放示意圖..... 44

圖 4.3 阻力係數值對應球體間擺放之距離圖[8,25,27]， C_{do} 為單顆球體於均勻流場中且網格解析度極高 $h \sim D/\infty$ 的阻力係數值。..... 45

圖 4.4 靜止球體於均勻入流流場並排擺放示意圖.....	46
圖 4.5 阻力係數值對應球體間擺放之距離圖[8,26].....	47
圖 4.6 不同時間點的兩顆球體沉降位置圖	50
圖 4.7 兩顆球體隨時間變化的沉降速度圖	51
圖 4.8 隨時間變化的兩顆球體間之距離圖	51



表目錄



表 3.1 驗證邊界條件之模擬參數	22
表 3.2 模擬參數	28
表 3.3 模擬參數—雷諾數、入流出流速度和時間步長	35
表 4.1 模擬球體沉降速度之模擬參數	41
表 4.2 球體終端速度與文獻比較	43
表 4.3 模擬兩個靜止球體前後擺放於均勻入流流場之模擬參數	44
表 4.4 模擬兩個靜止球體並排擺放於均勻入流流場之模擬參數	46
表 4.5 模擬兩個球體上下擺放於流場中自然沉降之模擬參數	48

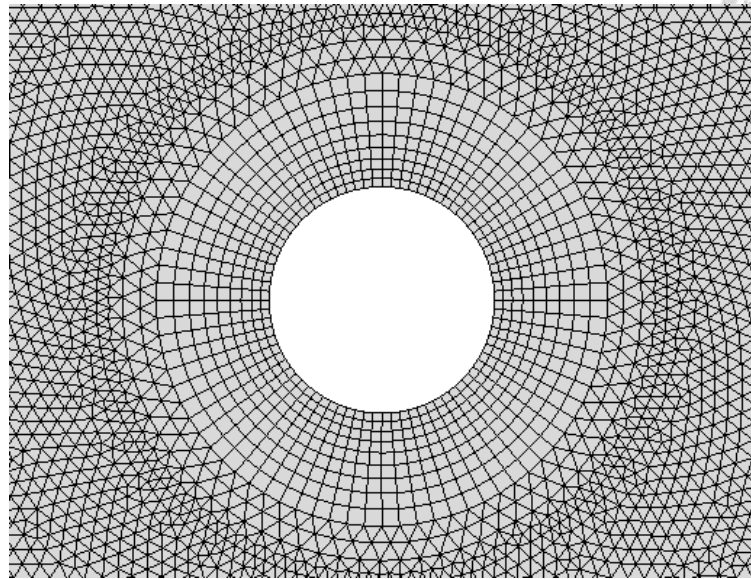
Chapter 1 緒論



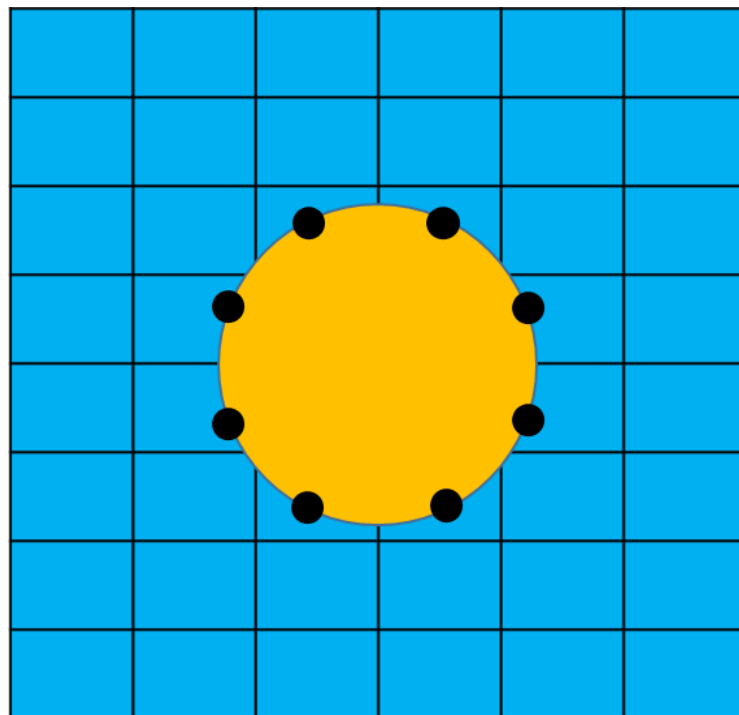
1.1 研究背景

在自然界中，固體大多存在於流體中，並兩者相互作用，如下雨天空氣中落下的水滴、沙塵暴中沙粒隨著風飄移和經由河流沖刷岸堤所產生的沙粒被流體帶往出海口而沉降等自然現象；在工程和生醫應用上，如風力發電機的發電效率、離岸水下洋流發電機、化學沉降法分離水與廢水和人體血液中血球的運動方式等問題，皆是人們想要研究和了解的問題及現象，因此對固體和液體交互作用的行為進行有效且準確的數值模擬，可對於基礎研究、了解複雜流動問題是有很大的幫助。

目前模擬固體於流場中的方式主要可以分為兩種，分別為貼體法(Body-fitted)和沉浸邊界法(Immersed boundary method)。貼體法的流場網格主要由結構體邊界來進行繪製，流場網格可分為結構性網格和非結構性網格，並且為了模擬更好的邊界層流動現象，會在結構體周圍網格進行加密的動作(如圖 1.1(a))，並求解流場；沉浸邊界法則不需要依照結構體來繪製網格，可直接使用求解流場的結構性網格，並將結構體放置於流場網格中(如圖 1.1(b))，而後計算其中受力，藉以模擬出結構體於流場中的運動行為及結構體對流場作用所產生的變化。若結構體為複雜幾何形狀，則應用貼體法結構性網格會難以繪製，而使用非結構性網格，倘若結構體是會隨流場進行移動，如同顆粒沉降或懸浮於水中，網格必須不斷地重新更新，會造成計算量的增加，而沉浸邊界法與貼體法相比會較容易模擬結構體的運動行為。

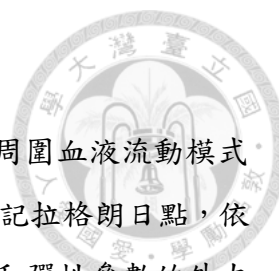


(a)



(b)

圖 1.1 (a) 貼體法:結構性網格和非結構性網格結合應用 (b) 沉浸邊界法:流場網格(藍色區塊)、結構體(橘色區塊)及其內插邊界點(黑色圓點)



1.2 文獻回顧

沉浸邊界法由 Peskin (1977) 為了研究人類心臟中彈性瓣膜周圍血液流動模式而提出的方法，基本的方法設計是在確定邊界(瓣膜)的位置上標記拉格朗日點，依據瓣膜隨血液流動變化，給予瓣膜邊界(拉格朗日點)一具有變形和彈性參數的外力函數，並使用正規化狄拉克脈衝函數(regularized Dirac delta function) 沉浸邊界周圍 2 個網格進行速度和受力內插，將結構體邊界的分佈外力應用於納維爾史托克方程式(Navier-Stokes equations)上進行計算，用以模擬出瓣膜邊界對於血液流動的影響 [1]，且 Peskin (2002)對沉浸邊界法的進行整理及撰寫完整的推導[2]，其上述過程將結構固體和流體分別應用尤拉(Eulerian)和拉格朗日(Lagrangian)描述法進行推導。

Roma et al. (1999)延續 Peskin(1978)的沉浸邊界法應用，且採用適應網格加密的方式，在固體沉浸邊界周圍局部加密流場網格，進而增加固體邊界條件的計算精度，並應用二維基本模型模擬問題成功驗證了此方法的可行性，另外提出一沉浸邊界周圍 1.5 個網格正規化狄拉克脈衝函數進行內插速度和受力[3]。

Fadlun et al. (2000)提出直接施力(direct-forcing)沉浸邊界法，將其用以模擬三維具有複雜結構的流體上，其使用方法為在每個時間步長於邊界點上得到期望速度(desired velocity)且計算其受力，而固體邊界的速度為利用流場網格速度進行內插計算藉以描繪出固體邊界[4]。

Uhlmann (2005)應用 Fadlun(2000)直接施力沉浸邊界法模擬二維的圓柱運動和加入碰撞模型用以三維多顆球體於流場中的沉降行為(如圖 1.2)，其中應用尤拉和拉格朗日法將固體與流體分開描述，並使用 Roma et al. (1999)的正規化狄拉克脈衝函數進行內插結構體拉格朗日點與流場網格的速度和受力，並且將受力回授於流場的更新流場網格速度，且應用牛頓-尤拉方程式(Newton - Euler equations)將其受力用以計算結構體的速度及角速度，藉以模擬結構體於流場中的運動行為[5]。

由於 Uhlmann (2005)的直接施力沉浸邊界方法在固體邊界上無法滿足無滑移(no-slip)、無穿透(no-penetration)條件，Kempe & Fröhlich (2012) 發現時間步長會影響其邊界計算受力的結果，因此其應用一簡易步驟改善其方法，其為沉浸邊界受力的進行迭代計算，使結構體邊界會被描述的更準確，並對此也運用二維圓柱問題進行了驗證(如圖 1.3)，並改善 Uhlmann (2005)牛頓-尤拉方程式的數值計算方

法，應用體積分率的方式將結構體中的流體內能計算出來，讓顆粒質量密度比所產生數值穩定限制 $\rho_p / \rho_f \geq 1.2$ [5] 的降低為 $\rho_p / \rho_f \geq 0.3$ ，使模擬問題的固體密度 ρ_p 可小於流體密度 ρ_f [6]，其後加入了碰撞模型，模擬兩顆球體的碰撞行為。

Breugem (2012) 同樣提出 Uhlmann (2005) 的數值方法所產生的邊界問題，並認為應用正規化狄拉克脈衝函數會使得球體邊界的擴大，所以用向內收縮和受力迭代的方式去計算，且應用數值模擬測試，測試出收縮值為 0.3 個流場網格時，此數值方法會達到二階精度 [7]，同時也採用 Kempe & Fröhlich (2009) [13] 的牛頓-尤拉方程式的計算方法，可使質量密度比降低並對其進行了驗證。

Luo et al. (2019) 延續直接施力沉浸邊界法進行解析度測試，並應用 Breugem (2012) 的固體邊界向內縮方法，但不同的是其應用不同解析度進行模擬測試，經由外插可得到該雷諾數下的阻力係數值，並與向內縮值構成一函數用以模擬在不同雷諾數和不同解析度下滿足阻力係數值的向內縮值，並用於模擬球體沉降問題，成功模擬驗證單顆顆粒沉降達終端速度，且模擬兩顆顆粒上下不同位置自然沉降，模擬出 Drafting-kissing-tumbling 現象(如圖 1.4)並與他人進行比對[8]。

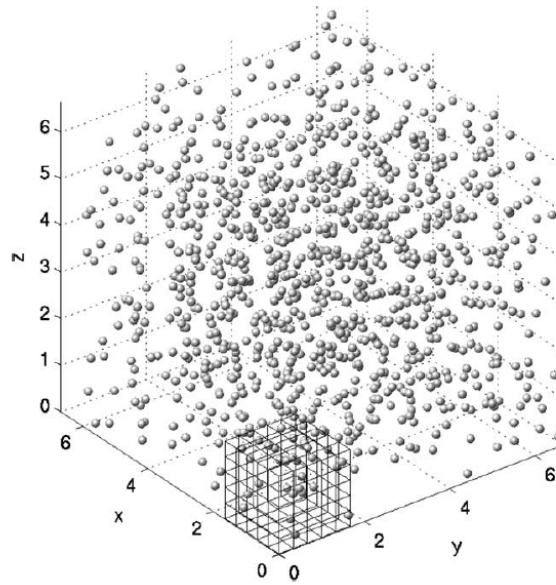


圖 1.2 1000 顆球體沉降瞬時位置圖[5]

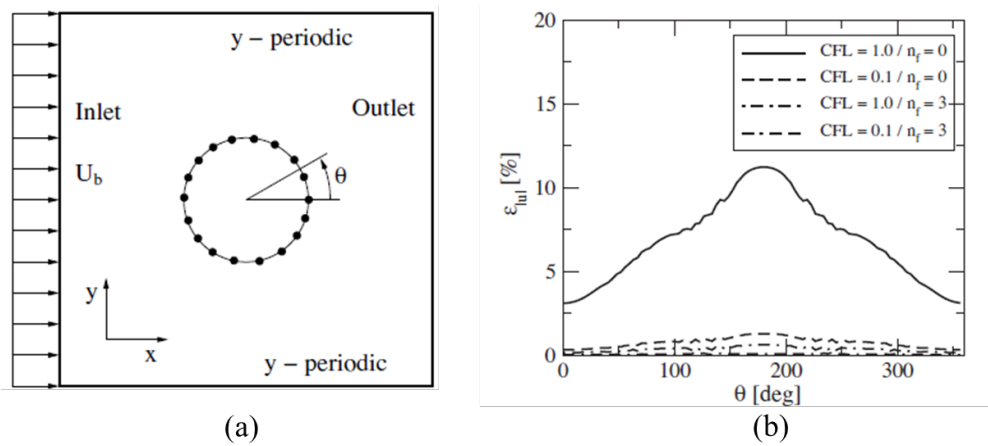


圖 1.3 (a) 圓柱與流場設置示意圖 (b) 在圓柱不同角度下的速度誤差[6]

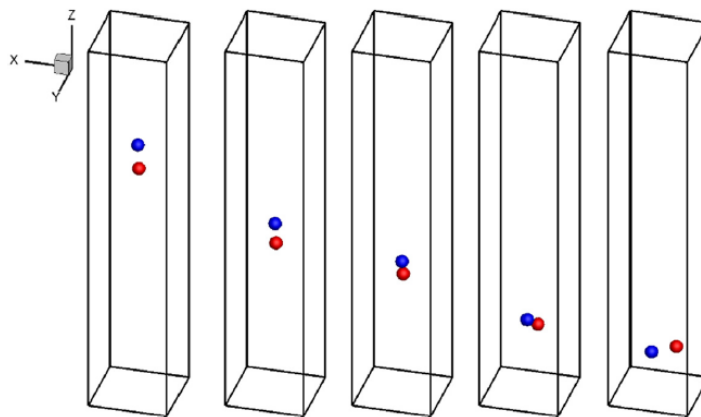


圖 1.4 Drafting-kissing-tumbling 現象由左到右不同時間位置圖[8]



1.3 研究動機

沉浸邊界法的應用越來越廣泛，除了基本球體的驗證，近年來對於複雜幾何的應用也非常多，可幫助人們了解在流體中泥沙沉降或動物的行為、也可幫助人們發展科技，如機翼或螺槳的翼型[9,10]、動物(如蜻蜓和魚等)運動於水中或空氣的造成的流場[11,12]等。在科技的應用上，像是近年來綠能產業的蓬勃發展，如同沿岸的風力發電機和離岸發電機，其依靠大自然現象產生的電力供人們使用，而在發電機中重要的是它的發電效率會隨著位置方向和結構外型而有所不同，為了提升其效率，則必須測試不同結構外形才能達成，若以實驗來測試則會耗費大量資金和資源，而只要得到實地流場流向及速度數據，應用模擬可不必於實地中做太多的實驗，就可得到發電效率，在其他方面的應用也是如此，模擬能節省成本並且加快產業發展的速度。

沉浸邊界法不斷被改進和發展，目前大多使用迭代方法或是在結構體邊界網格加密，藉以達成近似無滑移、無穿透邊界條件，但是應用迭代方法雖然可以讓邊界的誤差降低，但不能界定其所造成的誤差量;而網格加密方法對於移動的結構體，則需要在每個時間重新進行網格加密的動作，此動作會增加程式的運算量。為此本研究希望發展一在固定流場網格中有效描述結構邊界，並且能精確模擬出結構體在流體中隨流場移動或是讓結構體在流體中運動的數值方法，且藉由此方法來應用顆粒沉降問題來進行模擬驗證。

1.4 論文內容概述

本研究包含本章節分為五章，在第二章節論述基本理論、數值方法及相關模型應用，主要提及求解流場及沉浸邊界法的結合應用，並加入碰撞模型模擬多顆球體及球體與牆壁的碰撞行為，而第三章節為改善沉浸邊界法並與其他文獻進行驗證，利用迭代法降低沉浸邊界法求解時所產生的邊界誤差，且應用拉格朗日點向內收縮方法使球體阻力計算更貼近前人文獻之實驗值[24]，第四章節為應用前述理論、改善方法及模型進行模擬單顆球體沉降和兩顆球體於流場中的相互作用，而第五章為本研究數值模擬驗證及模擬結果的總結，並針對本研究在某些情況下的不足之處，提出未來工作及發展方向。

Chapter 2 理論和數值方法



本研究為了模擬顆粒沉降問題，必須了解描述流體與固體的耦合方式，而在模擬上要知道其在數值方法上運作模式，並假設模擬之顆粒形狀為球體，以利於與其他相關文獻模擬或實驗作驗證和比對，本章節會先提到流體統御方程式及沉浸邊界法，並以數值離散化和向量的形式來呈現，而後為了模擬多顆於流場中運動的顆粒，顆粒間會彼此碰撞，所以會加入碰撞模型以模擬此現象。

2.1 統御方程式

描述流體動力的方程式為質量守恆方程式和納維爾斯托克方程式 (Navier-Stokes equation)，在三維卡式座標系統 (Cartesian coordinate system) 和不可壓縮流體 (incompressible flow) 的假設下，並用索引表示法 (index notation) 的形式可表示為：

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \quad (2.2)$$

其中 $i = 1, 2, 3$ 分別代表 x 、 y 、 z 三個不同方向， u_i 為流體速度， p 為壓力除以流體密度， t 為時間， ν 為運動黏滯係數和 f_i 為單位流體密度受力。方程式 (2.2) 左式依序分別為加速度項和對流項，右式依序分別為壓力項、黏滯項和外力項，而外力項也是加入沉浸邊界法模擬結構物體重要的一項。

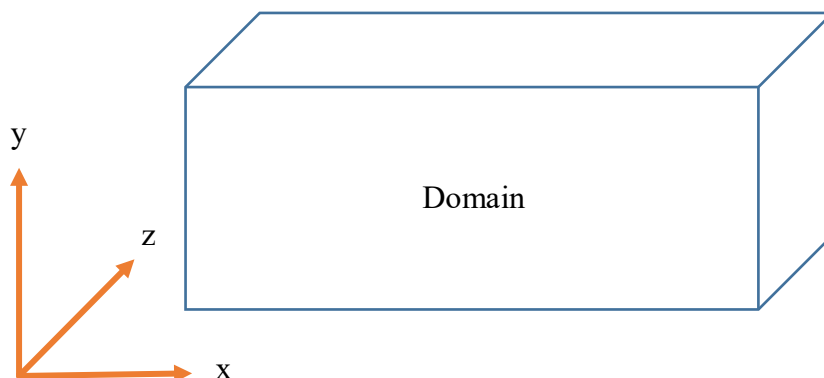


圖 2.1 三維卡式座標方向示意圖

為了求解流場，先將前述方程式其進行數值離散化，在動量方程式上採用 Chorin (1967)[14]提出的求解方法—投影法(Projection method)，也稱為分步法(fractional step method)，並由 Zang et al (1994)[15]將其方法改為使用有限體積法並應用於曲線座標的計算，最後由 Cui (1999)[16]使其程式能以平行化運算，由於本研究不會使用到曲線座標，以下方程式都以卡式座標呈現。

分步法將動量方程分成兩部分求解，第一部分先解對流項和黏滯項，為預測式(predictor)，第二部分應用壓力項並計算出下一步流場流速，為修正式(corrector)，其過程如下：

第一步：對時間上採取半隱式求解的方式使用 Adams-Bashforth method 於對流項，應用 Crank-Nicolson method 於黏滯項，而在空間上使用 QUICK 求解對流項，應用二階中央差分(central difference)計算黏滯項，而後將速度更新為預測速度 u_i^* ，其方程式如下列所示：

$$\frac{u_i^* - u_i^n}{\Delta t} = \frac{3}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i)^n \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i)^{n-1} \right) + \frac{1}{2} \left(\nu \frac{\partial^2 (u)}{\partial x_j \partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 (u)^n}{\partial x_j \partial x_j} \right) \quad (2.3)$$

第二步：利用壓力項和 u_i^* 來更新下步速度 u_i^{n+1} ，如下式(2.4)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^*}{\Delta t} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (2.4)$$

但由於壓力項尚未被計算，所以應用質量守恆方程式(2.1)求解壓力，所以對(2.4)式取散度，可以得到

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_i^{n+1} - u_i^*}{\Delta t} \right) = - \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \right) = - \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} \quad (2.6)$$

由連續方程式(2.1) $\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} = 0$ 可將(2.6)式化簡為

$$\frac{1}{\Delta t} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} \quad (2.7)$$

方程式(2.7)為波松方程式(Poisson equation)，並應用 multigrid method 對(2.7)式的壓力進行求解，得到壓力項後代入(2.4)式即可計算出下一步的流場速度。



2.2 直接施力沉浸邊界法

本研究採用 Uhlmann (2005)[5]的直接施力沉浸邊界法(direct-forcing immersed boundary method)處理流場中固體邊界，可應用於分步法中，並使用流場和固體間的速度差異來進行計算，從而改變固體周圍流場用以描述在流場中固體邊界，但這方法會無法完全滿足固體邊界條件(無滑移、無穿透)，其改進辦法與相關驗證會在第三章提到。

2.2.1 流固耦合方法

直接施力沉浸邊界法主要是利用拉格朗日(固體)和尤拉(流體)描述法來運作，以下符號小寫代表尤拉(流體)描述法、大寫代表拉格朗日(固體)描述法，運作方式如下列方程式(2.8)~(2.11)，首先將流場預測步方程式(2.3)求解出的預測速度 \mathbf{u}^* 應用正規化狄拉克脈衝函數內插於顆粒上各個拉格朗日點上得到 \mathbf{U}^Γ ，此過程即是先判斷在拉格朗日點周圍的流場網格，並使用流場網格上的速度內插於拉格朗日點上，且與固體邊界上的速度 \mathbf{U}^d 進行受力 \mathbf{F} 運算，同樣地在將計算完的受力 \mathbf{F} 應用正規化狄拉克脈衝函數外插於拉格朗日點周圍流場網格上得到 \mathbf{f} ，隨後在用 \mathbf{f} 以更新速度 \mathbf{u}^{**} ，在方程式(2.7)以 \mathbf{u}^{**} 取代 \mathbf{u}^* 計算求解壓力，並最後運算方程式(2.4)得出 \mathbf{u}^{n+1} ，其流固耦合運作方程式如下所示

$$\mathbf{U}^\Gamma(\mathbf{X}_l) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{z=1}^{N_z} \mathbf{u}^*(\mathbf{x}_{i,j,k}) \delta_h(\mathbf{x}_{i,j,k} - \mathbf{X}_l) h^3 \quad (2.8)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_l) = \frac{\mathbf{U}^d(\mathbf{X}_l) - \mathbf{U}^\Gamma(\mathbf{X}_l)}{\Delta t} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i,j,k}) = \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{l=1}^{N_L} \mathbf{F}(\mathbf{X}_l) \delta_h(\mathbf{x}_{i,j,k} - \mathbf{X}_l) \Delta V \quad (2.10)$$

$$\mathbf{u}^{**} = \mathbf{u}^* + \mathbf{f} \Delta t \quad (2.11)$$

其中拉格朗日點上的速度 \mathbf{U} 上標 Γ 和 d 分別表示為流場和球體本身， \mathbf{x} 為流場網格的位置， \mathbf{X} 為拉格朗日點的位置， h 為網格寬度， ΔV 為拉格朗日點所代表體積， N_x 、 N_y 、 N_z 分別為流體三個方向的網格數量， N_p 為顆粒的數量， N_L 為拉格朗日點的數量，而 δ_h 為正規化狄拉克脈衝函數，其運作方式在後續小節會詳細提到。



2.2.2 球體均勻分佈點

應用直接施力沉浸邊界法於球體上，此方法假設球體表面有一層外殼，給予條件為一個拉格朗日點代表的體積 ΔV 約略等於一個流場網格的體積大小 h^3 ，利用這個假設和條件，可以使用球體半徑 r 計算拉格朗日點數量的推導如下方程式 (2.12)~(2.16) [5]:

應用球體半徑 r 和假設球殼厚度為固定寬度 h ，也等同於網格寬度，以定義出外圈半徑 r_2 、內圈半徑 r_1 、(如圖 2.2)，外圈體積減去內圈體積即為外殼體積，利用顆粒所代表的體積 ΔV 就可以計算出顆粒的數量 N_L

$$r_2 = r + \frac{h}{2} \tag{2.12}$$

$$r_1 = r - \frac{h}{2} \tag{2.13}$$

$$N_L \Delta V = \frac{4}{3} \pi r_2^3 - \frac{4}{3} \pi r_1^3 \tag{2.14}$$

將(2.12)和(2.13)式代入(2.14)式

$$N_L = \frac{\pi h}{3 \Delta V} (12r^2 + h^2) \tag{2.15}$$

並利用 $\Delta V \approx h^3$ 可得到

$$N_L = \frac{\pi}{3} \left(\frac{12r^2}{h^2} + 1 \right) \tag{2.16}$$

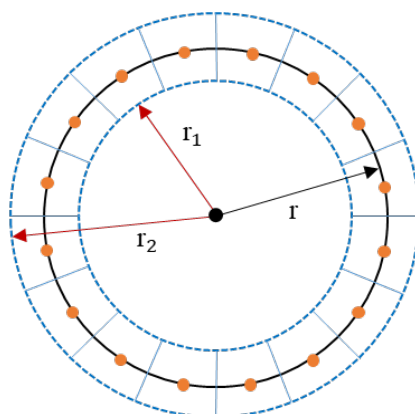


圖 2.2 拉格朗日點各佔體積示意圖

為了代表整個球體，必須先將拉格朗日點均勻分配於球體表面上，才能在流場中模擬出結構體邊界，在本研究採用庫倫斥力均勻分散方法[5]。先在球體表面上隨意散佈給定數量的拉格朗日點，並給予每個拉格朗日點一同號庫倫電荷 q ，讓在球體表面上各個相近拉格朗日點進行同號電荷產生相互排斥力如下式(2.17)，而後受到排斥力的作用，讓拉格朗日點產生加速度，並更新拉格朗日點位置，最終達到力平衡的狀態，此結果(如圖 2.3)即為球體表面均勻分布的拉格朗日點。

$$\mathbf{F}_E = k_e \frac{qq'(\mathbf{d}-\mathbf{d}')}{|\mathbf{d}-\mathbf{d}'|^3} \quad (2.17)$$

其中 \mathbf{F}_E 為電荷互斥力， q 、 q' 為拉格朗日點帶有的電荷， \mathbf{d} 、 \mathbf{d}' 為拉格朗日點位置， k_e 為庫倫常數。

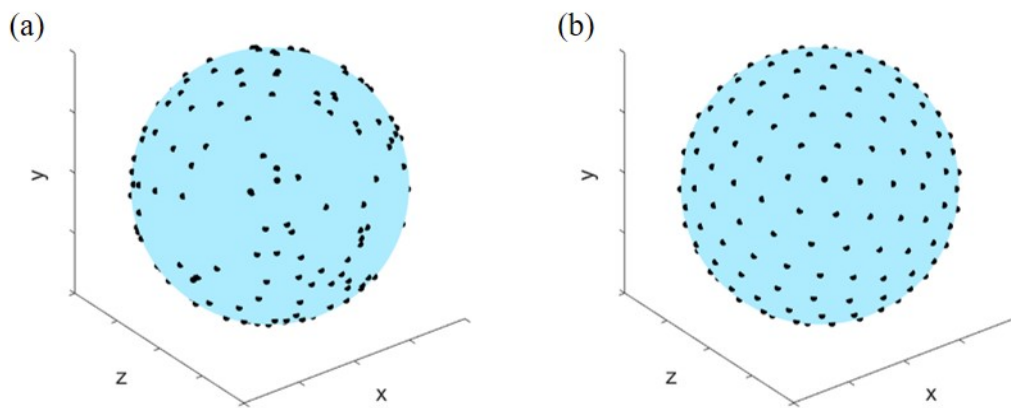


圖 2.3 球體上拉格朗日點散佈圖($N_L = 200$) (a)拉格朗日點初始位置 (b)拉格朗日點經由庫倫力平衡後的最終位置

2.2.3 正規化狄拉克脈衝函數

在應用沉浸邊界法模擬固體於流體中，若不使用正規化狄拉克脈衝函數，而將拉格朗日點受力回授於該點所在的流體網格中，會因為受力使得該網格所更新的流體速度和周圍網格的速度差異太大，在數值計算上會有非物理現象的震盪產生，因此如 2.2.1 小節所示，將受力應用正規化狄拉克脈衝函數傳遞於周圍網格中，用以消除震盪現象[2]。在本文應用 Roma (1999)[3]發展的脈衝函數方程式，運作方式為利用拉格朗日點周圍 1.5 個流場網格來內外插速度和受力，其運作寬度為 $3h$ ，也被稱作使用 3 點脈衝函數，Uhlmann (2005)[5]比較使用 3 點脈衝函數[3]和使用 4

點脈衝函數[2]，在相同條件下利用阻力係數來證明使用 4 點脈衝函數會使固體於流場中的平均阻力上升，故本研究使用 3 點脈衝函數，其脈衝函數方程式如 (2.18)~(2.20)式所示，此方法亦可應用於一維至三維問題上。

$$\delta_h(\mathbf{x} - \mathbf{X}) = \delta_h^{1D}(x - X) \delta_h^{1D}(y - Y) \delta_h^{1D}(z - Z) \quad (2.18)$$

$$\delta_h^{1D}(x - X) = \frac{1}{h} \phi(\alpha) \quad (2.19)$$

正規化狄拉克脈衝函數由 ϕ 這一連續函數所組成如下式：

$$\phi(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{6} \left(5 - 3\alpha - \sqrt{-3(1 - |\alpha|)^2 + 1} \right), & 0.5 \leq |\alpha| \leq 1.5 \\ \frac{1}{3} \left(1 + \sqrt{-3|\alpha|^2 + 1} \right), & |\alpha| \leq 0.5 \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (2.20)$$

其中 $\alpha = (x - X)/h$ 。而連續函數 $\phi(\alpha)$ 分布圖如下圖 2.4 所示

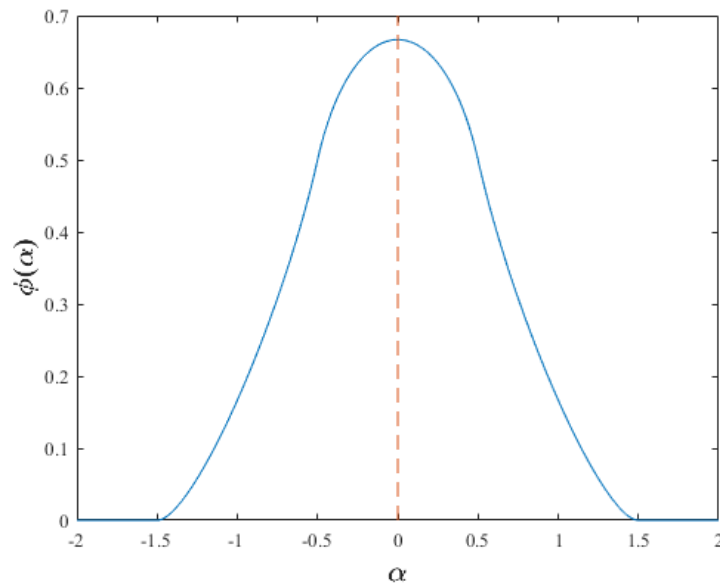


圖 2.4 連續函數 $\phi(\alpha)$ ，橘色虛線即為拉格朗日點位置

將其運用於球體模擬上可得到運作的範圍如下圖 2.5 所示(以二維的方式呈現)

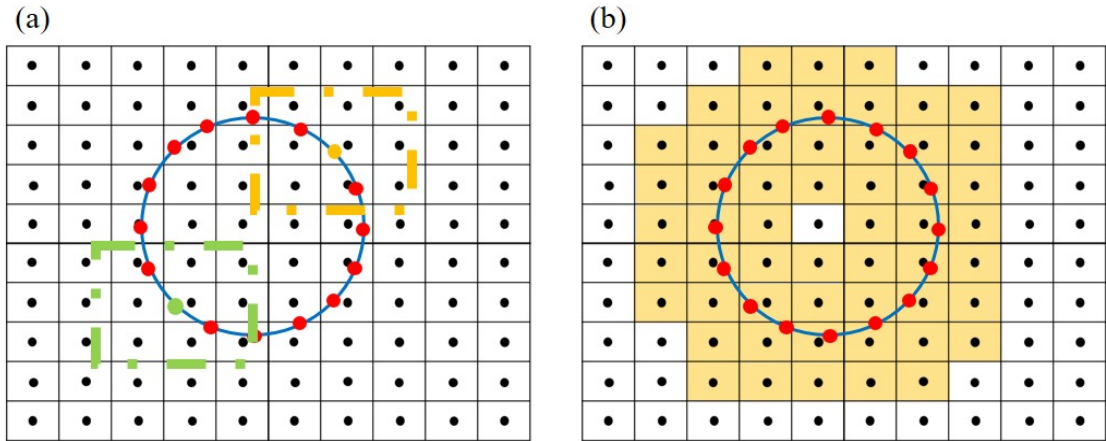


圖 2.5 正規化狄拉克脈衝函數運作範圍示意圖，紅點、橘點和綠點為拉格朗日點，黑點表示流場網格 (a)表示單個拉格朗日點的內外插範圍，如橘點對應到橘框、綠點對應到綠框 (b)橘黃色區塊為固體於流場網格中內外插的整體運算範圍

2.3 牛頓—尤拉方程式(Newton-Euler equations)

描述顆粒運動行為的統御方程式為牛頓-尤拉方程式[5,31,32]，並透過相應於固體周圍流體域的動量守恆來計算顆粒於流體裡的運動，方程式分別為動量及角動量方程式如下式(2.21)和(2.22)。

$$m_p \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = \rho_f \oint_{\Gamma_p} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \, ds + V_p (\rho_p - \rho_f) \mathbf{g} \quad (2.21)$$

$$I_p \frac{d\boldsymbol{\omega}_p}{dt} = \rho_f \oint_{\Gamma_p} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \, ds \quad (2.22)$$

其中 Γ_p 為顆粒的表面， m_p 、 ρ_p 、 V_p 分別為顆粒的質量、密度和體積，而其關係為 $m_p = \rho_p V_p$ ， I_p 、 \mathbf{u}_p 、 $\boldsymbol{\omega}_p$ 為顆粒的慣性舉、質心速度和質心角速度， $\mathbf{r} = \mathbf{X}_i - \mathbf{x}_p$ 為表面拉格朗日點位置 \mathbf{X}_i 和顆粒質心位置 \mathbf{x}_p 的位置向量，而 $\boldsymbol{\tau}$ 為流體剪應力張量， \mathbf{g} 為重力加速度。方程式(2.21)等號右式第一項和方程式(2.22)右式可經由柯西定理 (Cauchy's principle)[30]進而應用動量守恆和角動量守恆描述顆粒內部受力(internal force)和顆粒內部扭矩(internal torque)，如(2.23)和(2.24)式將此兩項拆解為外力項(external force)、外扭矩項(external torque)、動量變化率項和角動量變化率項來計算。

$$\rho_f \oint_{\Gamma_p} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \, ds = -\rho_f \int_{\Omega} \mathbf{f} \, dV + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_f \mathbf{u} \, dV \quad (2.23)$$

$$\rho_f \oint_{\Gamma_p} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \, ds = -\rho_f \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{f} \, dV + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_f \mathbf{r} \times \mathbf{u} \, dV \quad (2.24)$$

其中 Ω 為顆粒的體積， \mathbf{f} 為實體力(body force)。在此 Uhlmann (2005)[5]將方程式(2.23)和(2.24)右式的第一項—外力項、外部扭矩，可用(2.9)式算出的總受力來計算。

$$\int_{\Omega} \mathbf{f} \, dV = \sum_{l=1}^{N_L} \mathbf{F}(\mathbf{X}_l) \Delta V \quad (2.25)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{f} \, dV = \sum_{l=1}^{N_L} \mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{X}_l) \Delta V \quad (2.26)$$

而(2.25)及(2.26)右式的第二項—動量及角動量變化率項，基於不可壓縮流體並應用沉浸邊界法，可視顆粒內部為一封閉體積，動量和角動量變化率等同於剛體運動的方程式，如(2.27)和(2.28)式。

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{u} \, dV = V_p \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} \quad (2.27)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{u} \, dV = \frac{I_p}{\rho_p} \frac{d\boldsymbol{\omega}_p}{dt} \quad (2.28)$$

最後整理(2.21)~(2.28)式可得到計算顆粒速度及角速度的方程式

$$\frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = -\frac{\rho_f}{V_p(\rho_p - \rho_f)} \sum_{l=1}^{N_L} \mathbf{F}(\mathbf{X}_l) \Delta V + \mathbf{g} \quad (2.29)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_p}{dt} = -\frac{\rho_p \rho_f}{I_p(\rho_p - \rho_f)} \sum_{l=1}^{N_L} \mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{X}_l) \Delta V \quad (2.30)$$

將(2.29)和(2.30)式速度與角速度的微分式應用前向尤拉法(forward Euler method)離散，如下所示

$$\frac{\mathbf{u}_p^{n+1} - \mathbf{u}_p^n}{\Delta t} = -\frac{\rho_f}{V_p(\rho_p - \rho_f)} \sum_{l=1}^{N_L} \mathbf{F}(\mathbf{X}_l) \Delta V + \mathbf{g} \quad (2.31)$$

$$\frac{\boldsymbol{\omega}_p^{n+1} - \boldsymbol{\omega}_p^n}{\Delta t} = -\frac{\rho_p \rho_f}{I_p(\rho_p - \rho_f)} \sum_{l=1}^{N_L} \mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{X}_l) \Delta V \quad (2.32)$$

得到顆粒的質心速度 \mathbf{u}_p 可以進行顆粒的位置計算

$$\frac{\mathbf{x}_p^{n+1} - \mathbf{x}_p^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_p^{n+1} + \mathbf{u}_p^n) \quad (2.33)$$

最後運用剛體運動方程式將顆粒表面上拉格朗日點的速度進行更新

$$\mathbf{U}^d(\mathbf{X}_i) = \mathbf{u}_p + \boldsymbol{\omega}_p \times (\mathbf{X}_i - \mathbf{x}_p) \quad (2.34)$$



2.4 顆粒間、顆粒與牆壁的碰撞模型

在模擬多顆顆粒沉降的問題時，由於會受到邊界和流場的影響，會產生顆粒間彼此相當靠近甚至產生碰撞行為，且球體向邊壁移動與邊壁進行碰撞，而顆粒沉降於底部時會產生的堆積現象，此時除了顆粒間的碰撞同時也要考慮顆粒與牆壁間也會產生的碰撞行為，本研究應用三種模型去模擬碰撞問題，分別為潤滑模型(lubrication model)、軟球模型(soft-sphere model)和硬球模型(hard-sphere model)，運作範圍如圖 2.6 所示。

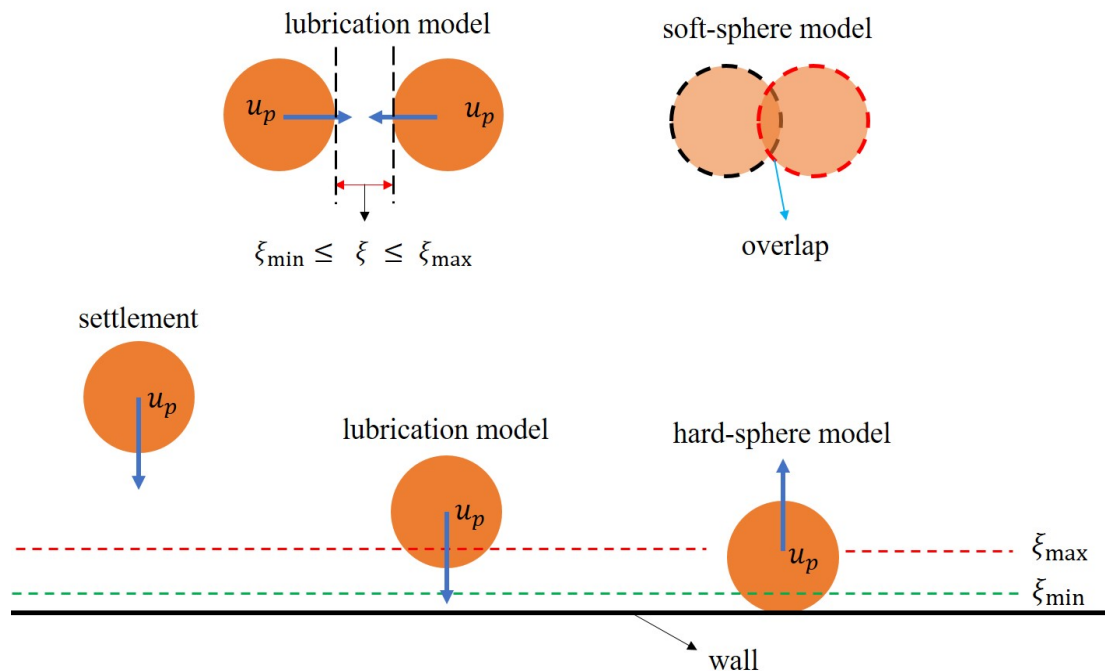


圖 2.6 碰撞模型示意圖

2.4.1 潤滑模型(lubrication model)

當顆粒彼此間相當靠近時，其兩顆粒間の間距 ξ 非常的細小，因顆粒間相對速度靠近會擠壓間隙中的流體，使其向外被擠出，而在顆粒因碰撞而分開時，流體又會被推回間隙中，在此時主要的受行為由黏滯力所主導，即為潤滑效應。但由於顆粒間の間隙相當狹小，流場網格大小不夠細小並不足以涵蓋此範圍中的黏滯力運算，所以必須應用潤滑模型來計算，而本文參考 Kempe & Fröhlich (2012)[19] 的潤滑模型，其模型可以分成兩部分：



2.4.1.1 顆粒間的潤滑模型

顆粒間的潤滑受力(lubrication force)為

$$\mathbf{F}_{ij}^{\text{lub}} = -\frac{6\pi\nu\rho c_{ij}}{\xi_{ij}} \left(\frac{r_i r_j}{r_i + r_j} \right)^2 \mathbf{n}_{ij}, \quad \xi_{\min} \leq \xi_{ij} \leq \xi_{\max} \quad (2.35)$$

其中 ξ_{\min} 和 ξ_{\max} 分別為進入潤滑模型的最小和最大距離， ξ_{\min} 假設為自然表面粗糙度 $\xi_{\min} \approx 10^{-4} D$ ，而 $\xi_{\max} \approx 10^3 \xi_{\min}$ ， \mathbf{n}_{ij} 為兩個顆粒間的單位向量， c_{ij} 為兩個顆粒的法向相對速度(純量)， ξ_{ij} 為兩個顆粒之間的距離，各計算方程式如下

$$\mathbf{n}_{ij} = \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|} \quad (2.36)$$

$$c_{ij} = (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{n}_{ij} \quad (2.37)$$

$$\xi_{ij} = |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i| - (r_i + r_j) \quad (2.38)$$

2.4.1.2 顆粒與牆壁間的潤滑模型

顆粒與牆壁間的潤滑受力為

$$\mathbf{F}_w^{\text{lub}} = -\frac{6\pi\nu\rho c_w}{\xi_w} r^2 \mathbf{n}_w, \quad \xi_{\min} \leq \xi_w \leq \xi_{\max} \quad (2.39)$$

其中 ξ_{\min} 和 ξ_{\max} 為顆粒與牆壁進入潤滑模型的最小和最大距離，其計算範圍同顆粒間的潤滑模型為 $\xi_{\min} \approx 10^{-4} D$ 和 $\xi_{\max} \approx 10^3 \xi_{\min}$ ， \mathbf{n}_w 為顆粒與牆壁間的單位向量， c_w 為顆粒與牆壁的相對速度， ξ_w 為顆粒與牆壁之間的距離，各計算方程式如下

$$\mathbf{n}_w = \frac{\mathbf{x}_w - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_w - \mathbf{x}_i|} \quad (2.40)$$

$$c_w = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_w \quad (2.41)$$

$$\xi_w = |\mathbf{x}_w - \mathbf{x}_i| - r_i \quad (2.42)$$

其中(2.40)和(2.42)式的 \mathbf{x}_w 為牆壁的位置。



2.4.2 硬球模型(hard-sphere model):顆粒與牆壁碰撞

本研究將硬球模型應用於顆粒與牆壁的碰撞行為，其方法優點為計算的快速，可應用於較少的碰撞行為，如較稀濃度的顆粒問題，而在模擬的設定上，由於邊界並不會移動，顆粒與牆壁的碰撞基本上是一對一碰撞問題，符合硬球碰撞模型的計算方式，計算方法如下所示

應用顆粒原始速度即可判定顆粒是否會撞到牆壁，而顆粒若是被判定為會進入硬球碰撞模式，則會將其過程分成兩個階段，第一階段為顆粒經由原始速度移動到牆面的過程，利用這個過程可以得到第一階段的歷程時間

$$\delta t = \frac{|\mathbf{x}_w - \mathbf{x}_p| - r}{\mathbf{u}_p} \quad (2.43)$$

第二階段則利用第一階段的時間可以得到反彈的時間，並且利用恢復係數(coefficient of restitution) e 進行反彈速度的計算

$$\mathbf{u}'_p = -e \mathbf{u}_p \quad (2.44)$$

並利用反彈速度可以計算出顆粒反彈後的位置

$$\mathbf{x}'_p = \mathbf{u}'_p (\Delta t - \delta t) + |\mathbf{x}_w - r| \quad (2.45)$$

而 e 為恢復係數(coefficient of restitution)，其值介於 $0 \sim 1$ 之間， $e = 0$ 為完全非彈性碰撞，顆粒碰觸到牆面即黏於牆面上，而 $e = 1$ 為完全彈性碰撞，顆粒與牆面進行碰撞後，反彈速度會與原始速度相等，同樣地應用在顆粒間， $e = 0$ 即顆粒間碰撞會黏在一起，而 $e = 1$ 顆粒間碰撞後，則動量會完全傳遞，若同樣質量和大小的顆粒彼此相撞，其兩者速度會進行互換。

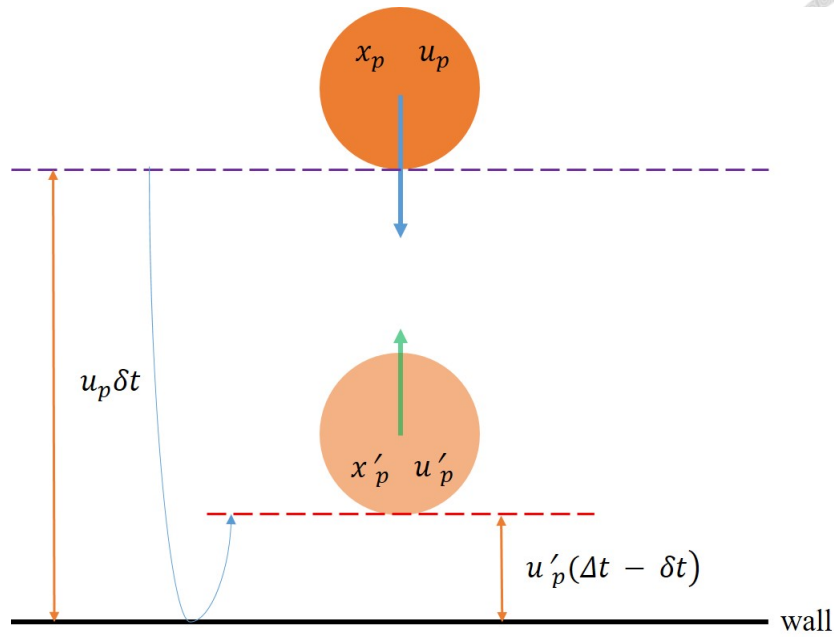


圖 2.7 硬球碰撞模型示意圖

2.4.3 軟球模型(soft-sphere model):顆粒間碰撞

模擬多顆顆粒沉降問題時，於在底部堆積的情況會使顆粒濃度上升，會在同一時間內多顆顆粒進行碰撞行為(如圖 2.8)，若使用硬球碰撞模型，由於此模型是顆粒一對一進行碰撞的計算，若要達到此時間內的平衡，必須使這過程不斷迭代計算，才能計算下一步，會需要大量的計算時間，而軟球模型則是同時計算多顆顆粒給予的總受力計算，進而更新速度和顆粒位置。本研究採用由 Cundall & Strack (1979)[20]發展的軟球碰撞模型，其使用質量—阻尼—彈簧系統(MCK system)，假設顆粒碰撞行為如受壓及回彈狀態的彈簧，並考慮在碰撞的過程中所產生的能量損失進而加入了阻尼項進行運算(如圖 2.9)，且由此系統可以計算出碰撞時的受力，其計算受力方式如下：

$$\mathbf{F}_{ij}^{\text{col}} = -k\xi_{ij}\mathbf{n}_{ij} - \eta\mathbf{c}_{ij}, \quad d_{ij} < r_i + r_j \quad (2.46)$$

其中 k 為彈性係數， η 為阻尼係數， d_{ij} 為兩顆顆粒的質心距離， \mathbf{c}_{ij} 為兩顆粒間的法向相對速度(向量)， ξ_{ij} 為兩顆球體重疊(overlap)距離，即壓縮量。

$$d_{ij} = |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i| \quad (2.47)$$

$$\mathbf{c}_{ij} = c_{ij} \mathbf{n}_{ij} \quad (2.48)$$



$$\xi_{ij} = (r_i + r_j) - |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i| \quad (2.49)$$

而後經由求解 MCK system 的二階常微分方程

$$m_{ij} \ddot{\xi} + \eta \dot{\xi} + k \xi = 0 \quad (2.50)$$

其中 m_{ij} 等於約化質量(reduced mass)

$$m_{ij} = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} \quad (2.51)$$

可以得到彈性係數 k 和阻尼係數 η

$$\eta = -2 \ln e \frac{\sqrt{m_{ij} k}}{\sqrt{\ln^2 e + \pi^2}} \quad (2.52)$$

$$k = \frac{m_{ij}}{(N \Delta t)^2} (\ln^2 e + \pi^2) \quad (2.53)$$

其中 N 為一固定常數，其數值可為 8[21]、10[19]和 15[23]，其存在目的於碰撞時間遠小於求解流體時間步長，為避免彈係係數過大而影響碰撞的準確性，在 Brändle de Motta, et al. (2013)[21]經由數值測試，在 $N < 8$ 時在高史托克斯數(Stokes number)無法很好地呈現碰撞行為，而且較高的 N 並不會有更好的碰撞結果產生只會增加運算時間，而本文研究應用 van der Hoef, et al (2006)[22]測試出來的範圍，設定 $N = 15$ 去進行計算。

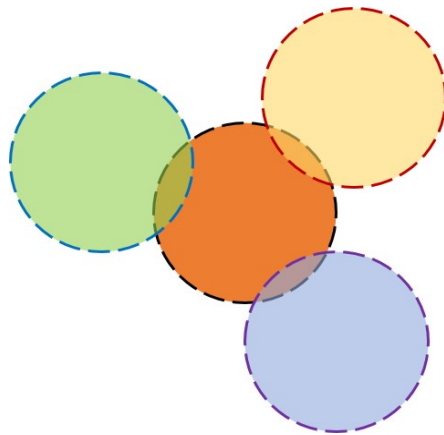


圖 2.8 同時多顆顆粒碰撞示意圖

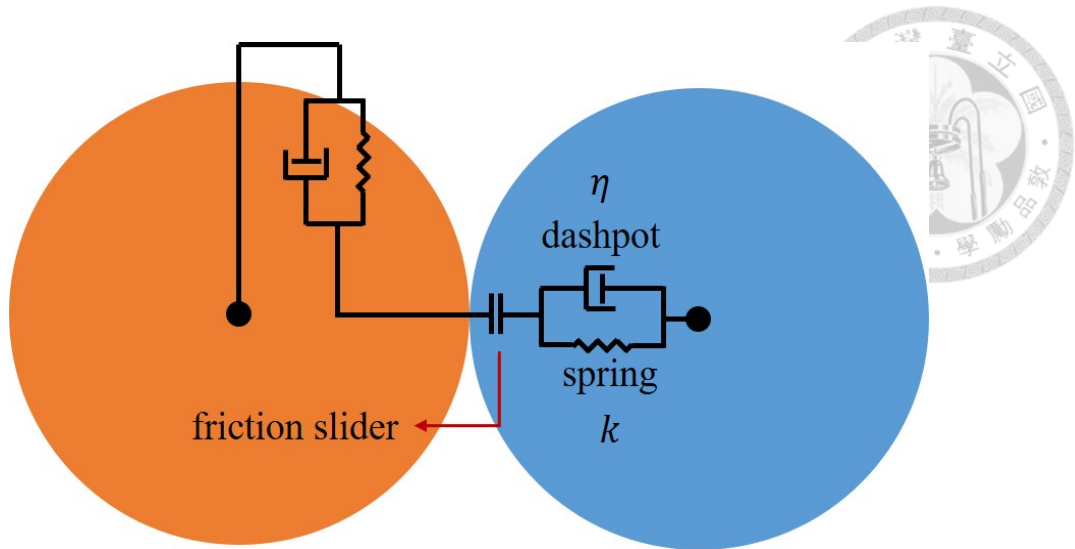


圖 2.9 軟球碰撞模型示意圖[22, 23]

Chapter 3 沉浸邊界法驗證和改善



為了模擬顆粒沉降問題，本章節使用第二章節所提到的直接施力沉浸邊界法[5]應用於三維流場中單顆靜止的球型顆粒，參考 Uhlmann (2005)[5]和 Kempe & Fröhlich (2012)[6]的數值方法，並應用固體邊界上的流場速度以驗證其方法準確性，而後驗證顆粒所受阻力，且使用 Breugem (2012)[7]的拉格朗日點向內收縮方法(inward retraction of Lagrangian points)，並且利用 Luo et al. (2019)[8]的建立修正函數的方式加以改進沉浸邊界法。

3.1 固體邊界速度驗證及改善:迭代法

在流場中滿足固體的邊界條件即為(2.10)式中 $\mathbf{U}^\Gamma(\mathbf{X}_l) = \mathbf{U}^d(\mathbf{X}_l)$ ，流場網格速度內插在固體邊界上的速度要等同於固體拉格朗日點上速度，對於靜止固體 $\mathbf{U}^\Gamma(\mathbf{X}_l) = 0$ ，但是直接施力沉浸邊界法並無法一次準確計算出此條件，而後 Kempe & Fröhlich (2012)[6]進行迭代的方法來使固體邊界的速度更趨近於無滑移及無穿透條件，應用第二章的方程式(2.8)至(2.11)可得到基本的直接施力沉浸邊界法運算方式[5]，而在這運算方式加入迭代的過程，本文使用靜止球體在均勻入流流場中進行模擬，並運用迭代方法對球體邊界誤差進行驗證。

其運作方法為重複計算在方程式(2.8)至(2.11)，重複計算次數為 n_f ，利用重複地計算流場網格內插於拉格朗日點上的速度 $\mathbf{U}^\Gamma(\mathbf{X}_l)$ 與拉格朗日點本身的速度 $\mathbf{U}^d(\mathbf{X}_l)$ 差值並除以時間步長，從而再次計算球體受力，且讓受力外插於流場網格中進行速度更新，此舉能讓流場網格內插於拉格朗日點的速度更趨近於拉格朗日點本身的速度，即為 $\mathbf{U}^\Gamma(\mathbf{X}_l) = \mathbf{U}^d(\mathbf{X}_l)$ ，而達穩態後利用(2.9)式計算出來的 x 方向受力進行加總即為球體所受阻力。



3.1.1 模擬設置

模擬實驗的流場大小參考 Luo et al. (2019)[8]的模擬設置，如表 3.1 和圖 3.1 所示，在流場邊界條件上， x 方向的邊界條件為給定入流速度和出流速度，並使其相等以確保在計算上的進出流量相等，其餘的邊界條件皆設為無應力(stress free)邊界條件。

$$\text{條件。} \left(\text{Re}_D = \frac{U_b D}{\nu} \right)$$

表 3.1 驗證邊界條件之模擬參數

流場大小 ($X \times Y \times Z$)	$1.92 \times 10^{-2} \text{ m} \times 0.96 \times 10^{-2} \text{ m} \times 0.96 \times 10^{-2} \text{ m}$
網格解析度 ($N_x \times N_y \times N_z$)	$192 \times 96 \times 96$
入流速度 U_b (inflow)	$1.25 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$ ($\text{Re}_D = 10$)
	$6.25 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$ ($\text{Re}_D = 50$)
	$1.25 \times 10^{-1} \text{ m s}^{-1}$ ($\text{Re}_D = 100$)
出流速度 (outflow)	$1.25 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$ ($\text{Re}_D = 10$)
	$6.25 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$ ($\text{Re}_D = 50$)
	$1.25 \times 10^{-1} \text{ m s}^{-1}$ ($\text{Re}_D = 100$)
流體密度 ρ_f	1000 kg m^{-3}
流體運動黏滯係數 ν	$10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
顆粒直徑 D	$0.8 \times 10^{-3} \text{ m}$
顆粒質心位置 (x, y, z)	$(0.64 \times 10^{-2} \text{ m}, 0.48 \times 10^{-2} \text{ m}, 0.48 \times 10^{-2} \text{ m})$
時間步長 Δt	$5 \times 10^{-4} \text{ s}$ ($\text{Re}_D = 10$)
	$1 \times 10^{-4} \text{ s}$ ($\text{Re}_D = 50$)
	$5 \times 10^{-5} \text{ s}$ ($\text{Re}_D = 100$)
拉格朗日點數目 N_l	202
迭代次數 n_f	1, 3, 5, 7, 10, 12, 15, 20

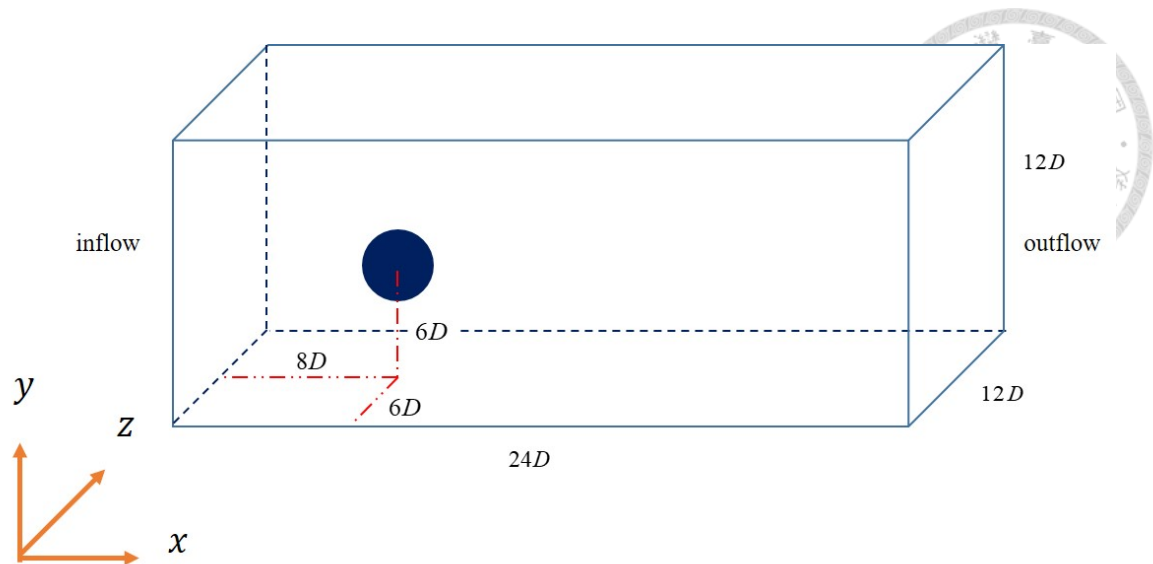


圖 3.1 靜止球體在流場中的位置示意圖

3.1.2 模擬結果

經由模擬測試，應用將流場內插於拉格朗日點的速度誤差投影在經過球體中心 $x y$ 平面，並使用角度 θ 為 x 軸，即為顆粒指向出流方向的角度為 0 度，速度誤差為 y 軸進行繪製(如圖 3.3)，且將同個迭代值得的所有誤差點運用多項式曲線擬合，比較紅、黑和藍線，迭代次數的增加讓在顆粒邊界上的速度誤差降低。而後利用最大速度誤差與迭代次數來繪製圖 3.4，同樣可以得到迭代次數高而顆粒邊界速度誤差降低的結論，但也隨著迭代次數的增加，誤差與迭代次數的斜率逐漸趨緩，不過在顆粒邊界上的速度誤差仍然會降低。

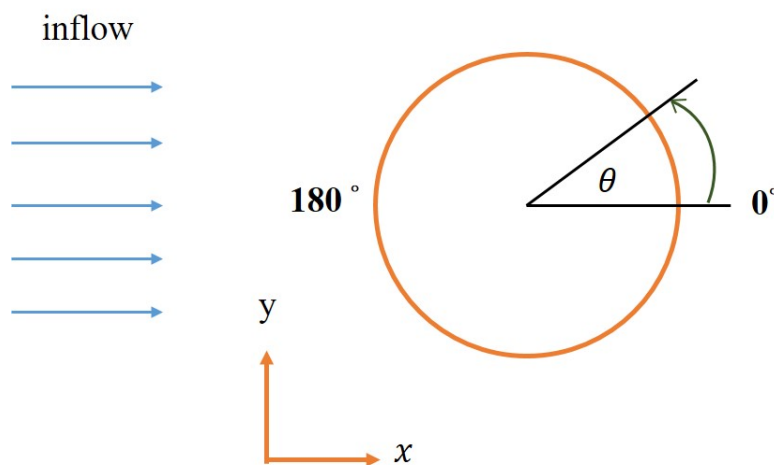


圖 3.2 入流方向與球型顆粒 $x y$ 平面角度示意圖

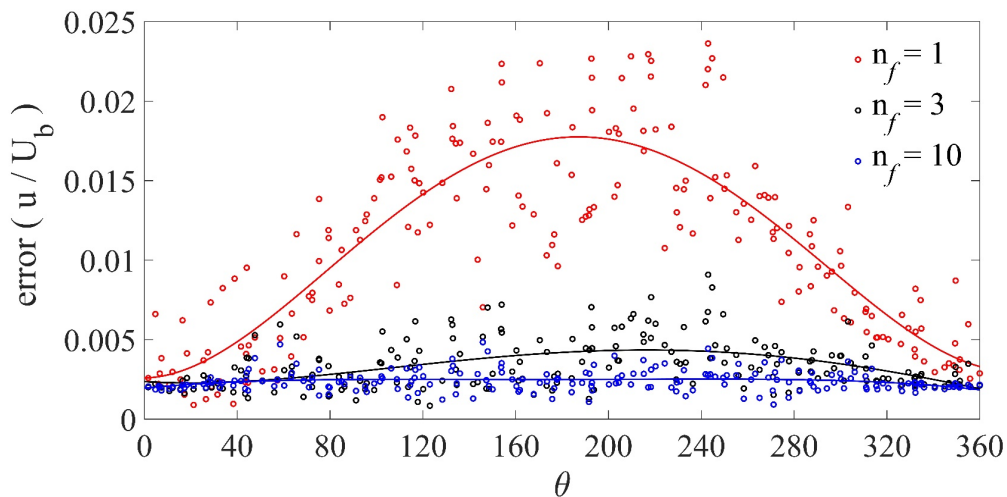


圖 3.3 在 $Re_D = 50$ 且不同迭代次數之拉格朗日點速度誤差點圖

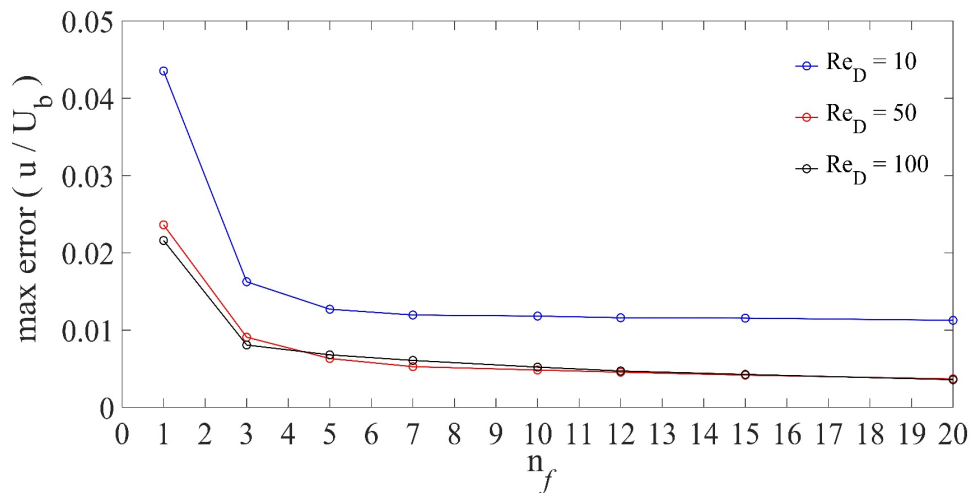


圖 3.4 不同雷諾數經由不同迭代次數最大速度誤差圖

3.1.3 改善方法

經由模擬測試，可得到迭代次數多誤差越低的結果，而 Kempe & Fröhlich (2012)[6]基本使用的迭代次數為 3，但由圖 3.4 顯示在不同雷諾數且相同迭代數的情況所造成的誤差不同，並且隨著迭代數的上升能得到更趨近於顆粒表面邊界條件的結果，因此本研究利用設定誤差的方式，讓此計算受力的過程不斷的重複運算，直到低於設定誤差值才計算下一步，並在更新速度的方程式裡，以增加一權重(weight)的方式加速迭代過程，計算過程的虛擬碼(pseudo code)如下所示：

<p>1 while $\mathbf{U}^d(\mathbf{X}_l) - \mathbf{U}^\Gamma(\mathbf{X}_l) > \text{Error}$</p>	<p>判定拉格朗日點本身的速度與流場網格內插在拉格朗日點上的速度差值，若大於給定誤差時則需重複執行下列運算。</p>
<p>2 if $\mathbf{U}^d(\mathbf{X}_l) - \mathbf{U}^\Gamma(\mathbf{X}_l) > \text{Error}$ $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{**}$</p>	<p>若上述條件滿足則更新的速度會在計算一次。</p>
<p>3 $\mathbf{U}^\Gamma(\mathbf{X}_l) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{z=1}^{N_z} \mathbf{u}^*(\mathbf{x}_{i,j,k}) \delta_h(\mathbf{x}_{i,j,k} - \mathbf{X}_l) h^3$</p>	<p>將流場網格速度內插在拉格朗日點上 $\mathbf{U}^\Gamma(\mathbf{X}_l)$。</p>
<p>4 $\mathbf{F}(\mathbf{X}_l) = \frac{\mathbf{U}^d(\mathbf{X}_l) - \mathbf{U}^\Gamma(\mathbf{X}_l)}{\Delta t}$</p>	<p>計算拉格朗日點上的受力。</p>
<p>5 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i,j,k}) = \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{l=1}^{N_l} \mathbf{F}(\mathbf{X}_l) \delta_h(\mathbf{x}_{i,j,k} - \mathbf{X}_l) \Delta V$</p>	<p>將受力外插於流場網格上。</p>
<p>6 $\mathbf{u}_{\text{temp}} = \mathbf{u}^* + \mathbf{f} \Delta t$ $\mathbf{u}^{**} = \mathbf{u}^* + \text{weight} \times (\mathbf{u}_{\text{temp}} - \mathbf{u}^*)$</p>	<p>利用權重(weight)加速收斂方法，進行流場網格上的速度更新。</p>

其中權重(weight)經由模擬實驗測試，給定一均勻流場，並放置一靜止球體於流場中，測量其迭代次數。模擬結果如圖 3.5 所示，x 軸為權重，y 軸為迭代次數，圖中藍色點為不同權重值時運算達穩態時的迭代次數，顯示當權重值為 2.5 時會使模擬運算達到穩態時有最低迭代次數 8，所以使用此權重能使每步運算有最低迭代次數，能讓計算速度提升使整體使用時間下降。

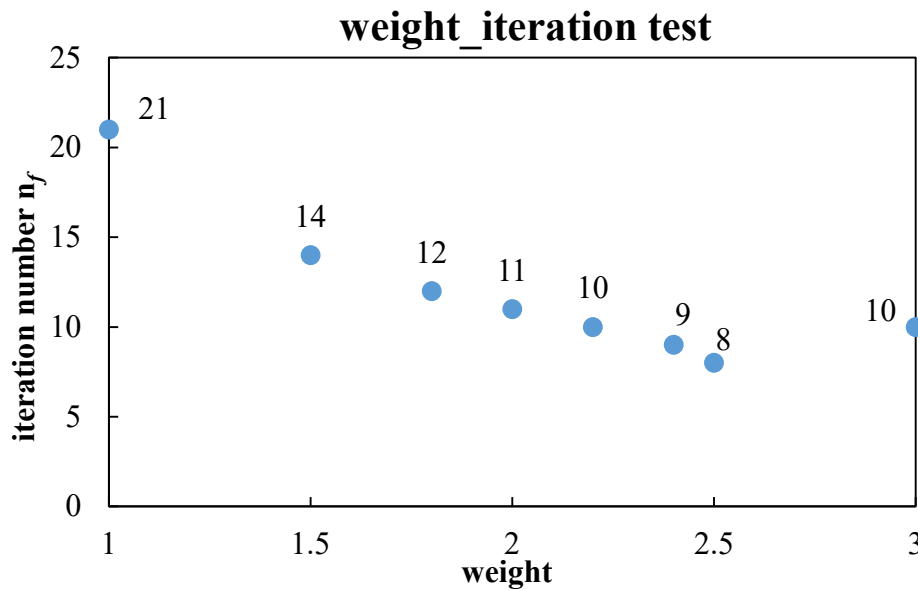


圖 3.5 不同權重對應其迭代次數

3.2 邊界範圍

應用 3.1.3 節改善的方式，可將顆粒邊界速度誤差降至設定的範圍內，然而在進行阻力計算時，如圖 3.6 所示，x 軸為解析度，y 軸為阻力係數值，圖上各藍色的點表示不同解析度下所模擬出球體的阻力係數值，可以發現測量出的阻力係數值比實驗值 1.539[24]高，此問題在 Breugem (2012)[7]和 Luo et al. (2019)[8]的期刊論文裡被討論及以其他的方式進行改善，原因由於使用第二章所論述的正規化狄拉克脈衝函數，會使得在球型顆粒表面上增加了一層多孔性的厚度進而增加了顆粒實際大小，造成顆粒於流場中所受阻力上升，其改善方法為使用拉格朗日點向顆粒內部收縮(inward retraction of Lagrangian points, IRL)[7]的方式(如圖 3.7)，Breugem (2012)[7]應用此方法達成數值方法上的二階精度，而 Luo et al. (2019)[8]參考 Breugem (2012)的方法利用不同解析度計算的阻力係數值外插得到的解析度極高時的阻力係數值，且利用拉格朗日向內收縮法去對應該解析度收縮值應為多少可達到正確的阻力係數值，而最後可以得到一收縮值、解析度和雷諾數的函數來進行模擬應用，本文對此方法進行了驗證且將其實際應用於模擬上。

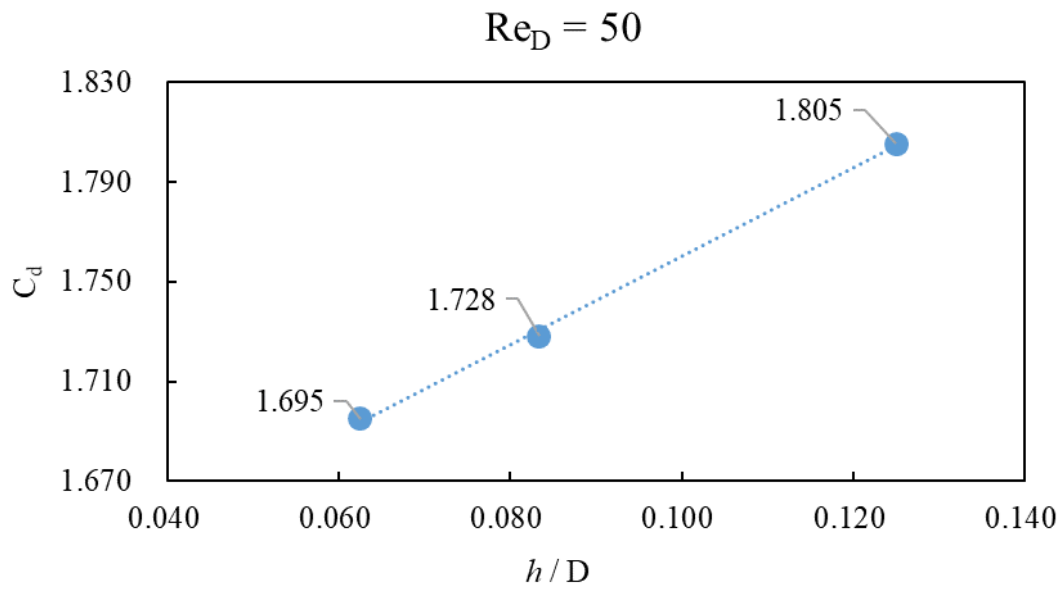


圖 3.6 $Re_D = 50$ 不同解析度下的阻力係數值 C_d ，而應用 Clift et al. (1978)[24]經由實驗所得公式計算 $Re_D = 50$ 阻力係數實驗值為 1.539，顯示模擬結果皆大於實驗值。

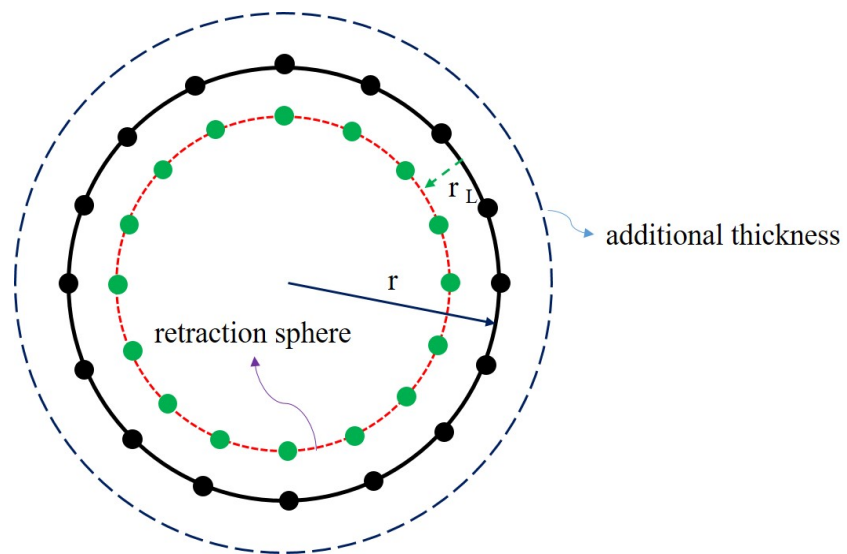
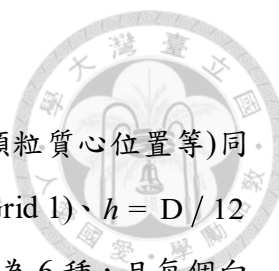


圖 3.7 球體厚度及拉格朗日點向內收縮值 r_L 示意圖，黑線為顆粒真實半徑，深藍色虛線為因厚度向外延伸的球殼，紅色虛線為經由收縮後的球體半徑，黑點為初始設定之拉格朗日點位置，綠點為向球體內收縮後的拉格朗日點位置



3.2.1 模擬設置

基本的模擬參數(流場大小、流體密度 ρ 、顆粒直徑 D 、顆粒質心位置等)同樣參考表 3.1，而網格解析度分為三種，分別為 $h = D / 8$ (case Grid 1)、 $h = D / 12$ (case Grid 2)和 $h = D / 16$ (case Grid 3)，而向內收縮值的部分分為 6 種，且每個向內收縮值對應不同解析度皆有不同的拉格朗日點數量，參數如表 3.2 所示。

表 3.2 模擬參數

網格解析度 ($N_x \times N_y \times N_z$)		Grid 1 192 × 96 × 96					
		Grid 2 288 × 144 × 144					
		Grid 3 384 × 192 × 192					
拉格朗日點向內收縮值 r_L / h		0	0.25	0.35	0.4	0.5	0.75
拉格朗日點數量 N_l	Grid 1	202	177	168	164	155	134
	Grid 2	453	416	402	395	381	347
	Grid 3	805	755	734	726	700	661

3.3 模擬結果

3.3.1 固體邊界不同解析度和不同向內收縮值模擬結果

對流場中靜止顆粒周圍繪製流線圖，由圖 3.8 和圖 3.9 顯示在 $Re_D = 50, 100$ 的球體周圍之流線圖，可以觀察隨著解析度的增加，在靜止顆粒周圍的流線會靠向顆粒表面，代表著應用解析度低的流場網格會使得顆粒邊界厚度較大，此即為應用正規化狄拉克脈衝函數對邊界的影響。其後利用向內收縮的方式[7,8]，在不同雷諾數下($Re_D = 50, 100$)讓顆粒表面拉格朗日點位置隨著向內收縮值進行改變(如圖 3.10 和圖 3.11 的(a)~(f))，同樣可以達到與增加解析度的效果，而利用此方法可進行後續修正函數的建立。

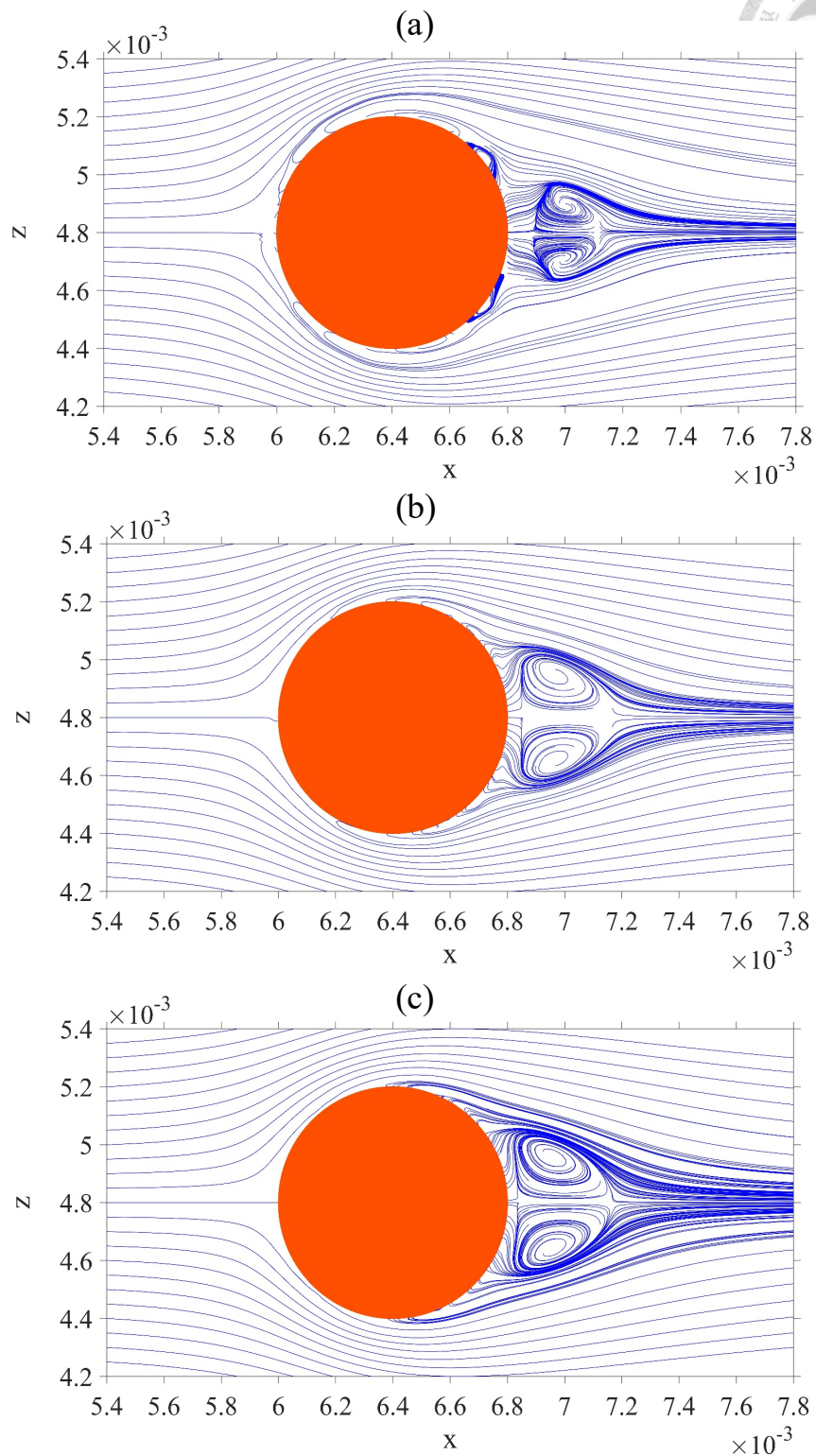
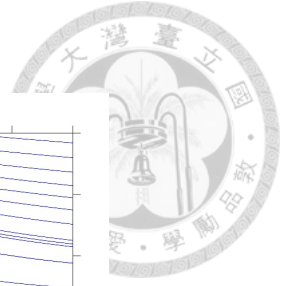


圖 3.8 $Re_D = 50$ 且 $r_L / h = 0$ 之流線圖

(a) $h = D / 8$ (b) $h = D / 12$ (c) $h = D / 16$

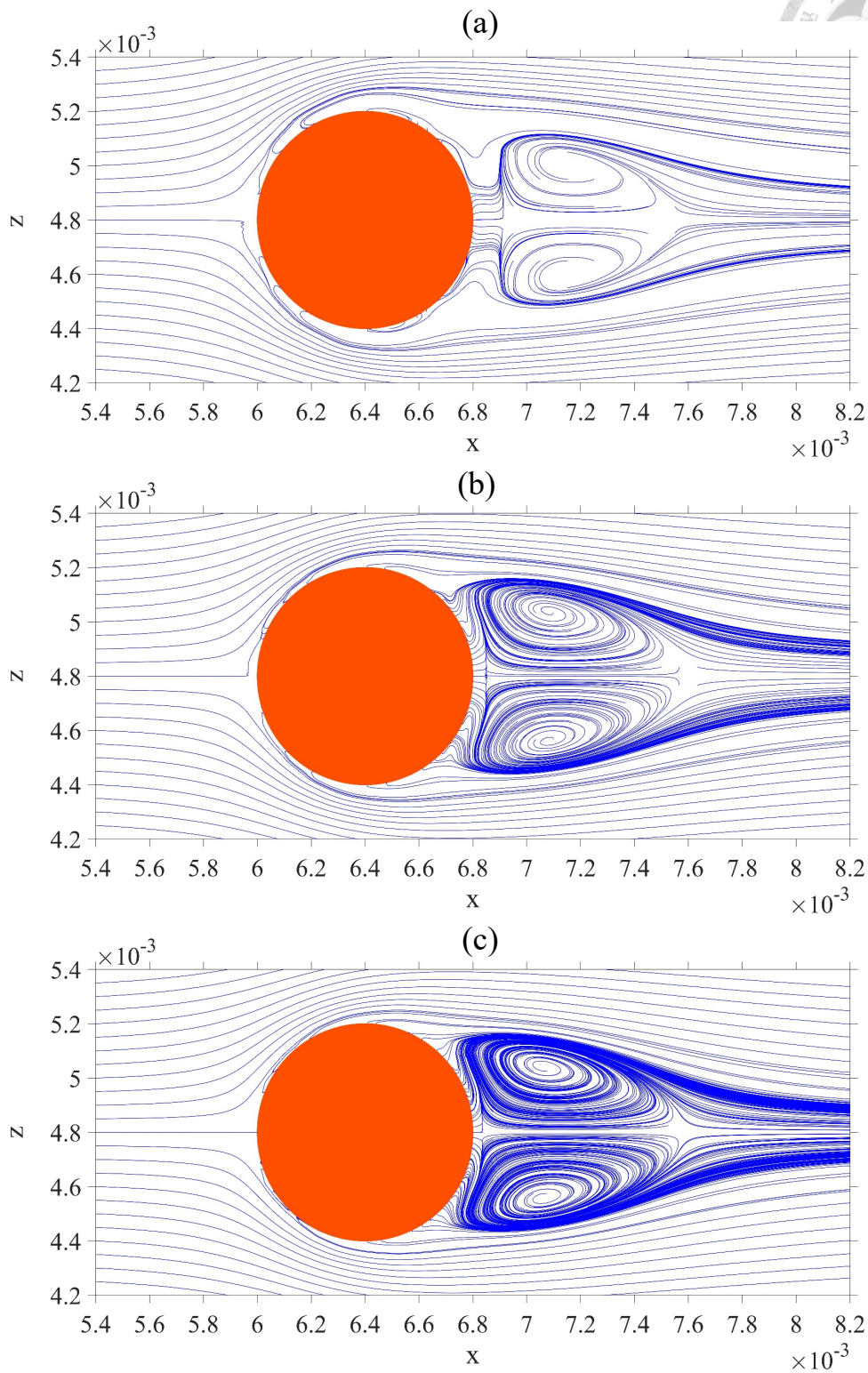
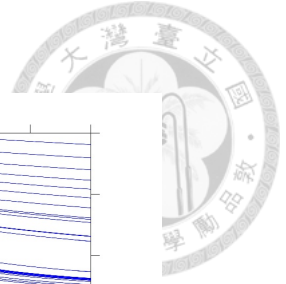
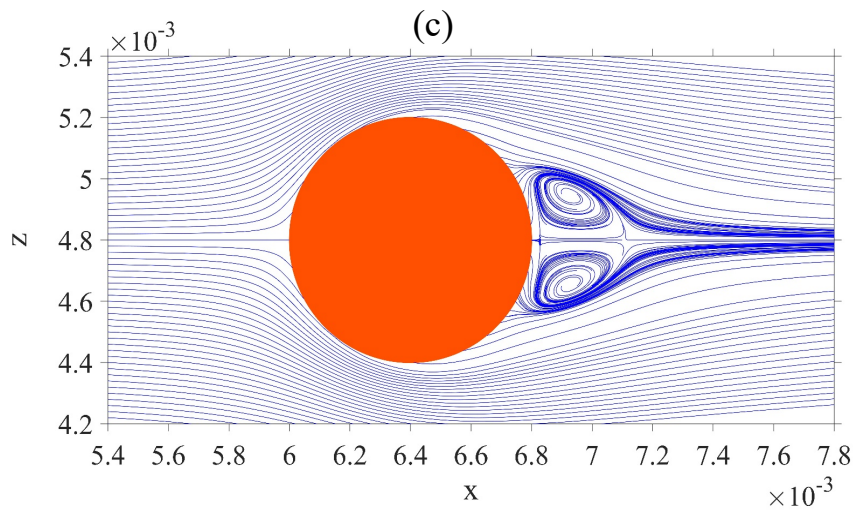
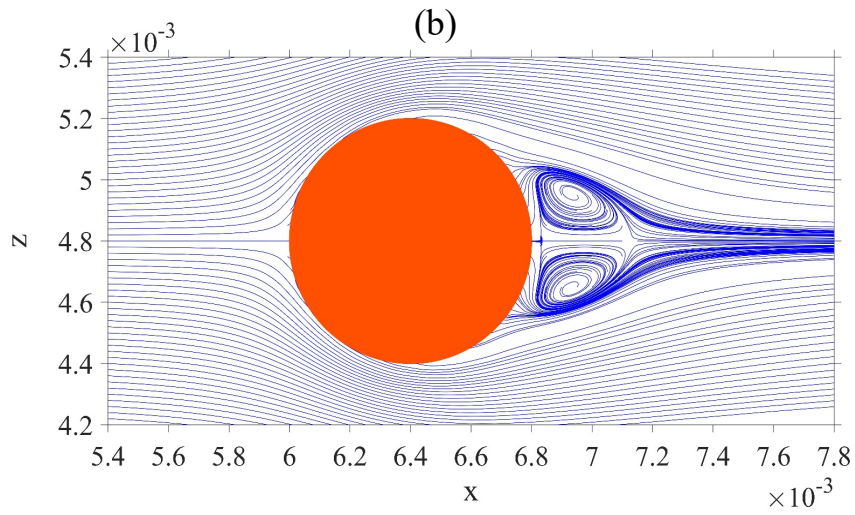
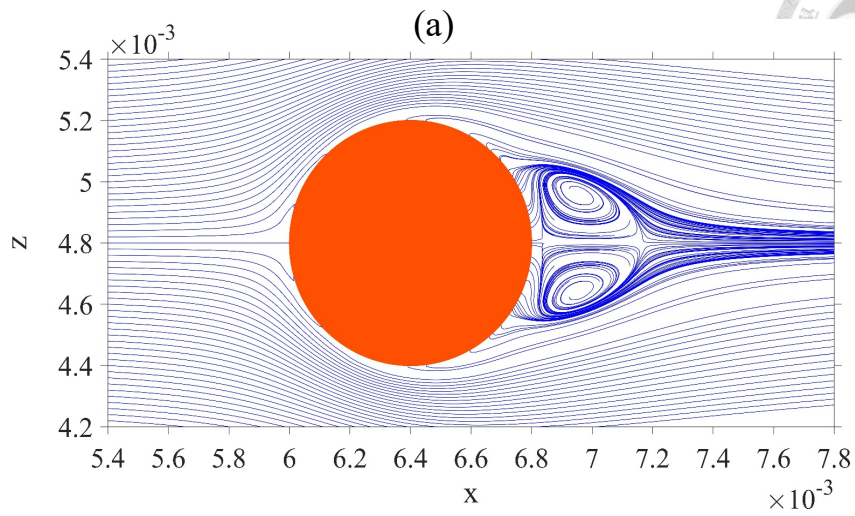
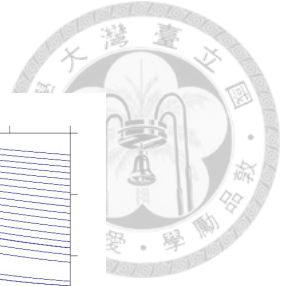
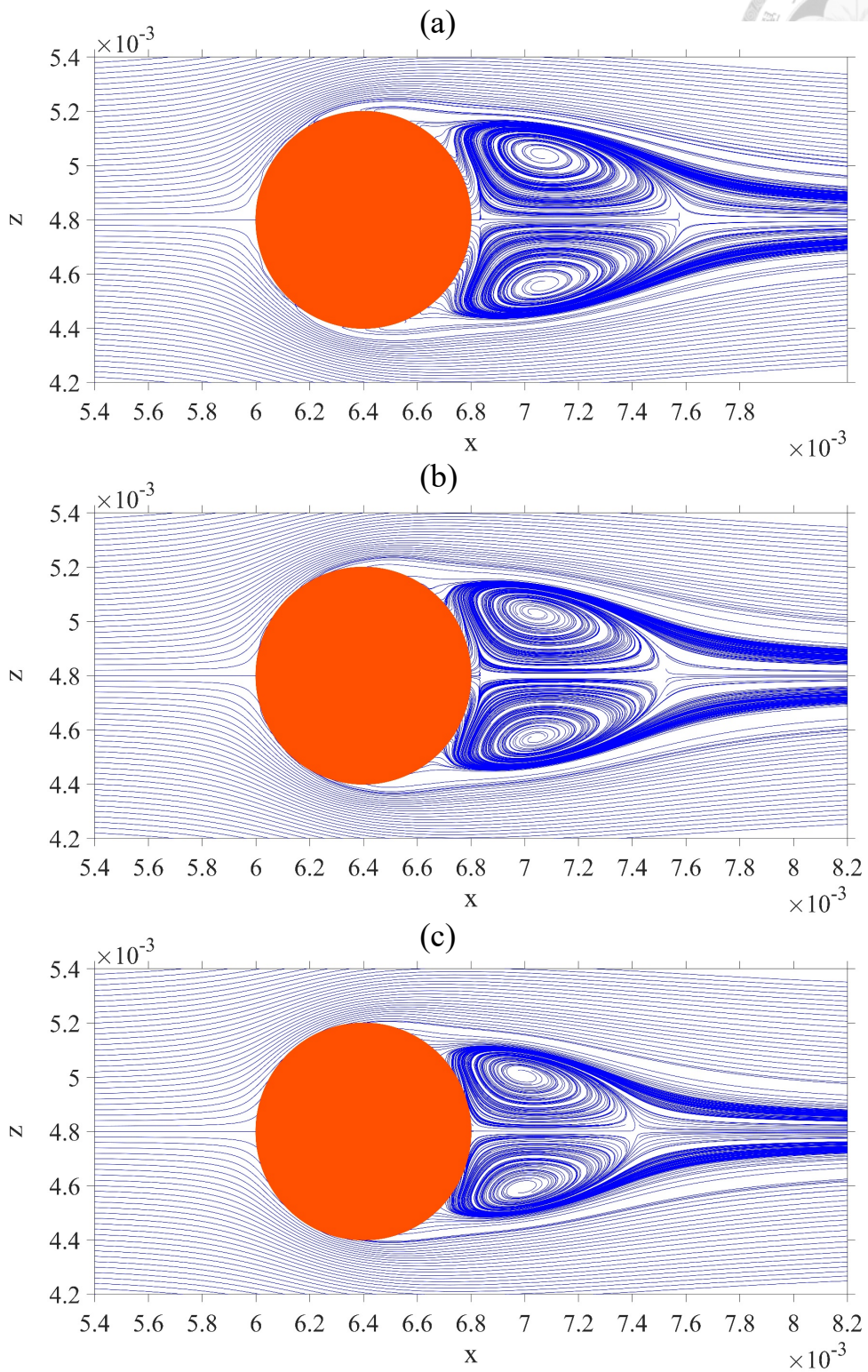
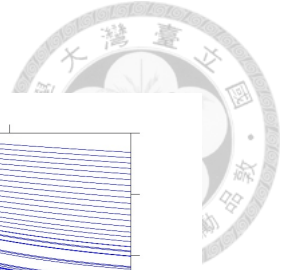


圖 3.9 $Re_D = 100$ 且 $r_L/h = 0$ 之流線圖

(a) $h = D/8$ (b) $h = D/12$ (c) $h = D/16$





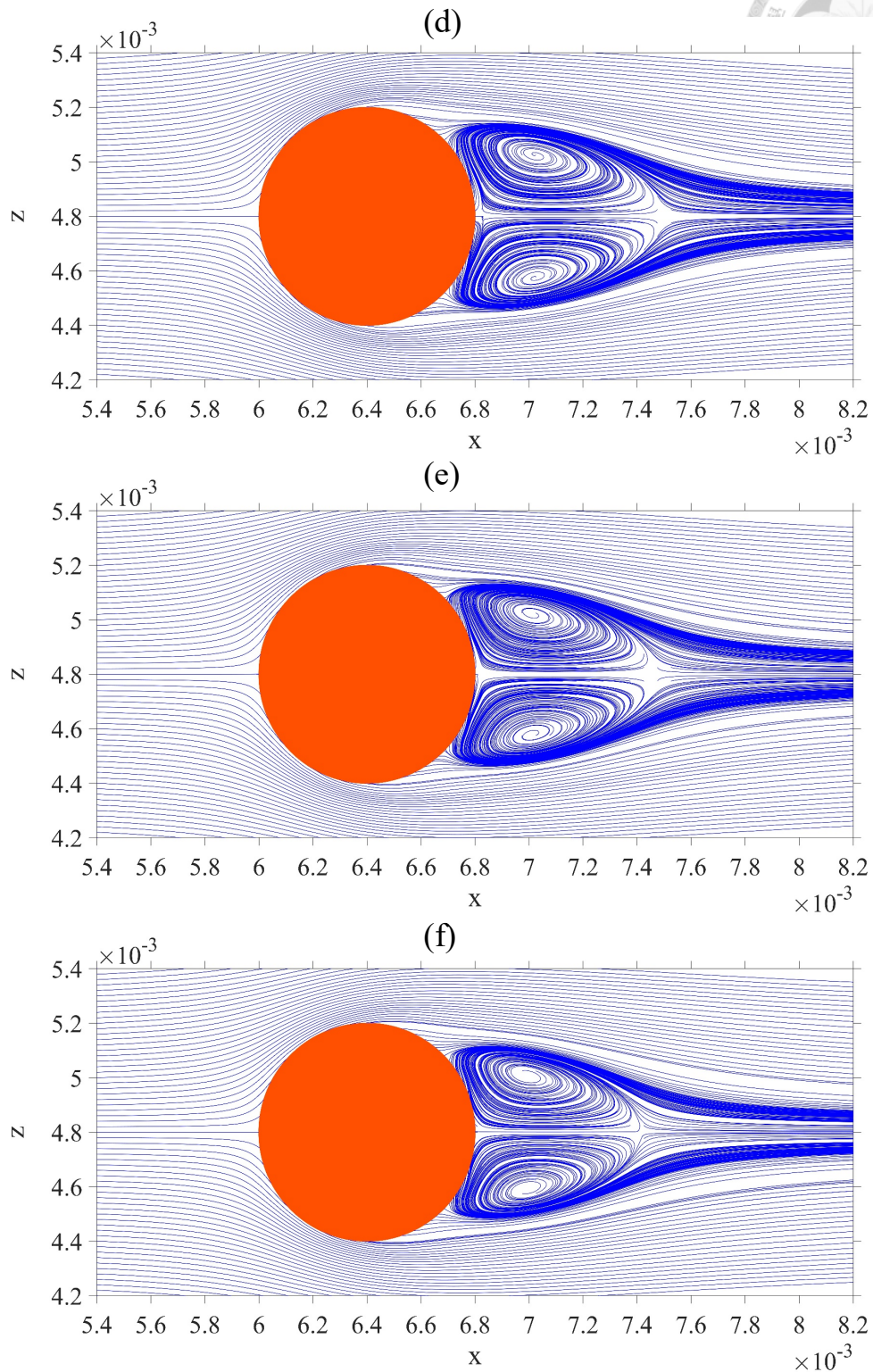
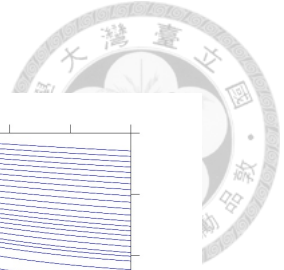


圖 3.11 $Re_D = 100$ 不同向內收縮值之不同向內收縮值流線圖($h = D / 16$)

(a) $r_l / h = 0$ (b) $r_l / h = 0.25$ (c) $r_l / h = 0.35$ (d) $r_l / h = 0.4$ (e) $r_l / h = 0.5$

(f) $r_l / h = 0.75$



3.3.2 不同雷諾數 Re_D 下阻力係數驗證

在得到修正函數前，必須要先知道準確的阻力係數值，由於知道在解析度變高時，球體因正規化脈衝函數所擴大邊界會趨近於顆粒初始設定之邊界，在此應用三種不同的解析度於不同雷諾數下，對均勻入流流場中的靜止顆粒進行阻力係數運算，並應用線性擬合的方式找出解析度趨近於無限大(即 $h \sim D/\infty$)的情況下阻力係數值(如圖 3.12)，並同樣利用表 3.1 之基本模擬參數和表 3.2 的三種不同網格解析度及拉格朗日點數目應用於其他雷諾數 $Re_D = 5 \sim 250$ ，其雷諾數、入流速度和時間步長參考表 3.3，其所得到的阻力係數值與實驗值進行比對(如圖 3.13)，由結果可以觀察出直接施力沉浸邊界法應用於解析度高的時候是相當準確的。

表 3.3 模擬參數—雷諾數、入流及出流速度和時間步長

雷諾數	入流、出流速度 U_b ($m s^{-1}$)	時間步長 Δt (s)
5	6.25×10^{-3}	1×10^{-3}
10	1.25×10^{-2}	5×10^{-4}
25	3.125×10^{-2}	2×10^{-4}
40	5×10^{-2}	1.25×10^{-4}
50	6.25×10^{-2}	1×10^{-4}
75	9.375×10^{-2}	6.67×10^{-5}
100	0.125	5×10^{-5}
125	0.15625	4×10^{-5}
150	0.1875	3.33×10^{-5}
175	0.21875	2.86×10^{-5}
200	0.25	2.5×10^{-5}
225	0.28125	2.22×10^{-5}
250	0.3215	2×10^{-5}

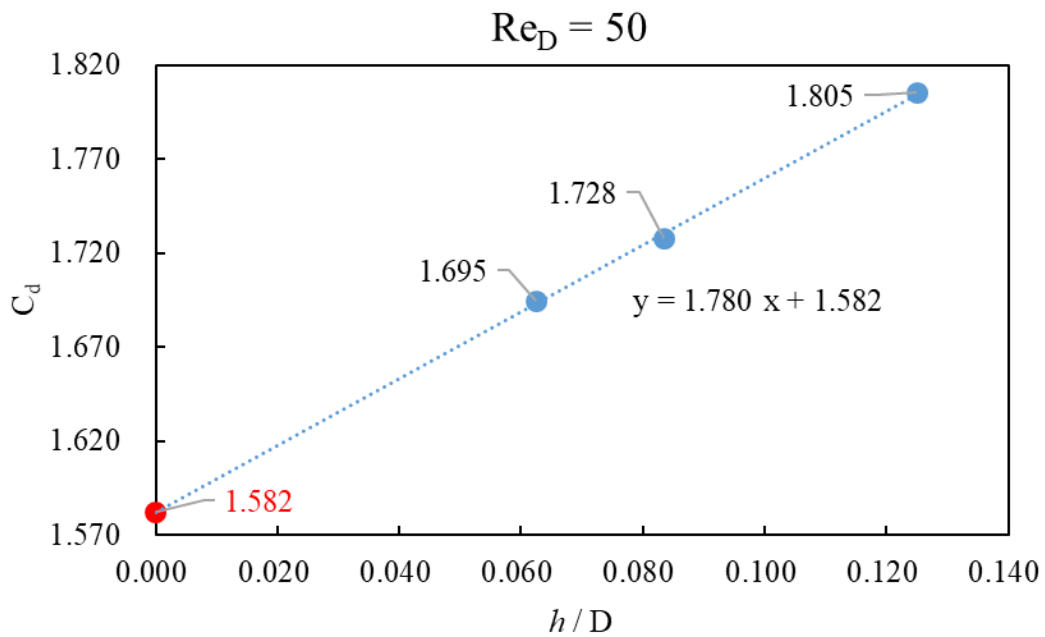
3.3.3 不同雷諾數下的拉格朗日向內收縮值 r_L

繪製不同雷諾數下擬合曲線得到的阻力係數值和各解析度下不同向內收縮值的阻力係數值(如圖 3.14 和圖 3.15)，其可表示出在該雷諾數其對應準確的阻力係數值下向內收縮值的大小，經由阻力係數值代入求解可以知道各解析度下的確切的

向內收縮值。



(a)



(b)

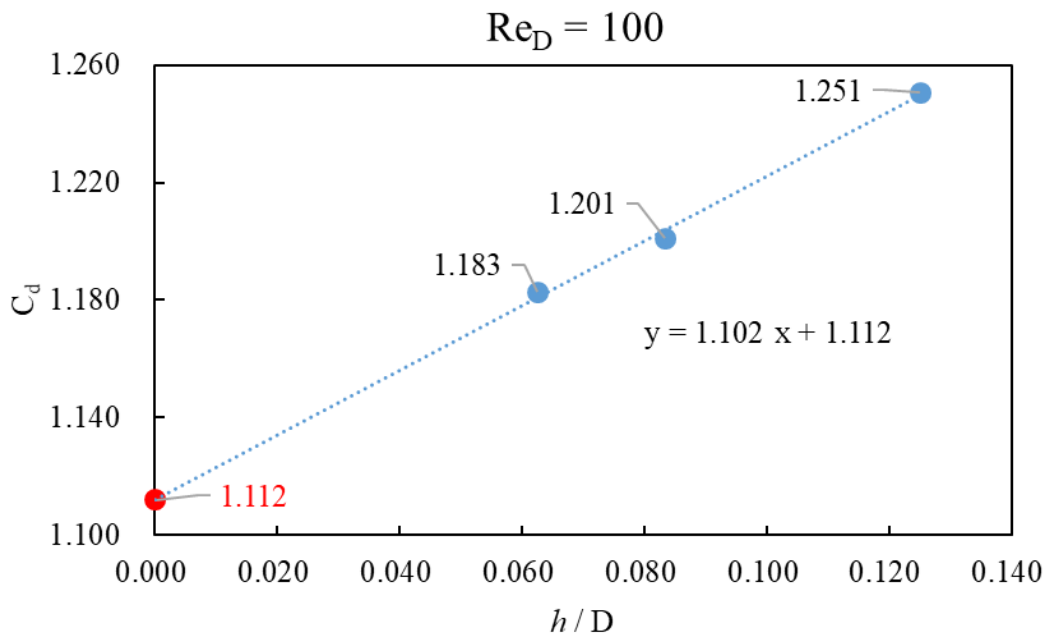


圖 3.12 應用線性擬合在不同解析度大小的阻力係數值(藍點)，得到 $h \sim D/\infty$ 的阻力係數(紅點) (a) $Re_D = 50$ (b) $Re_D = 100$

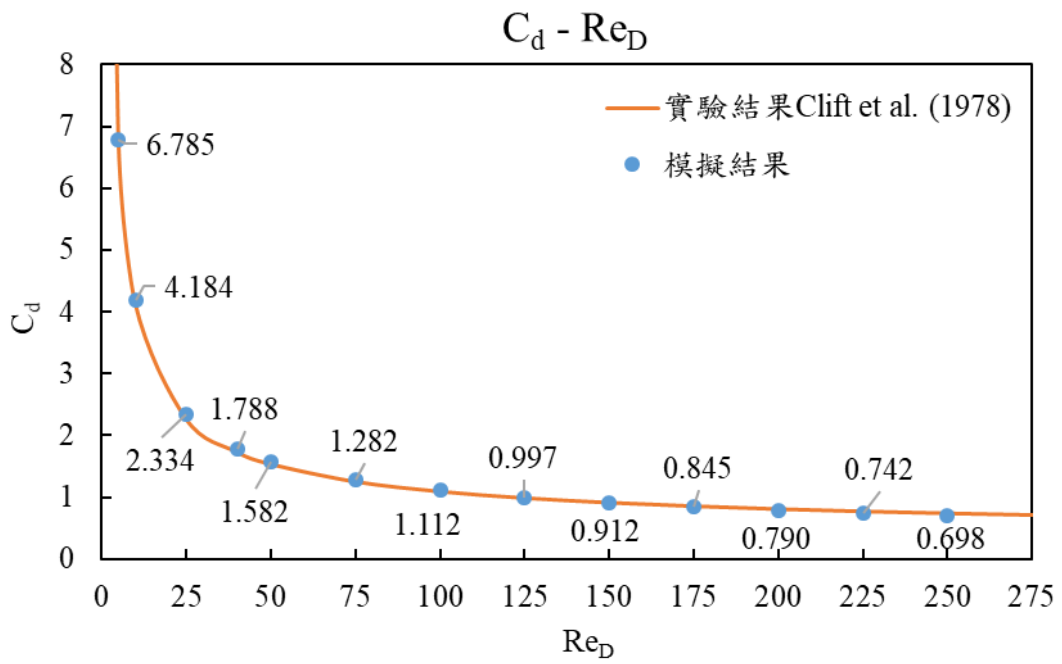
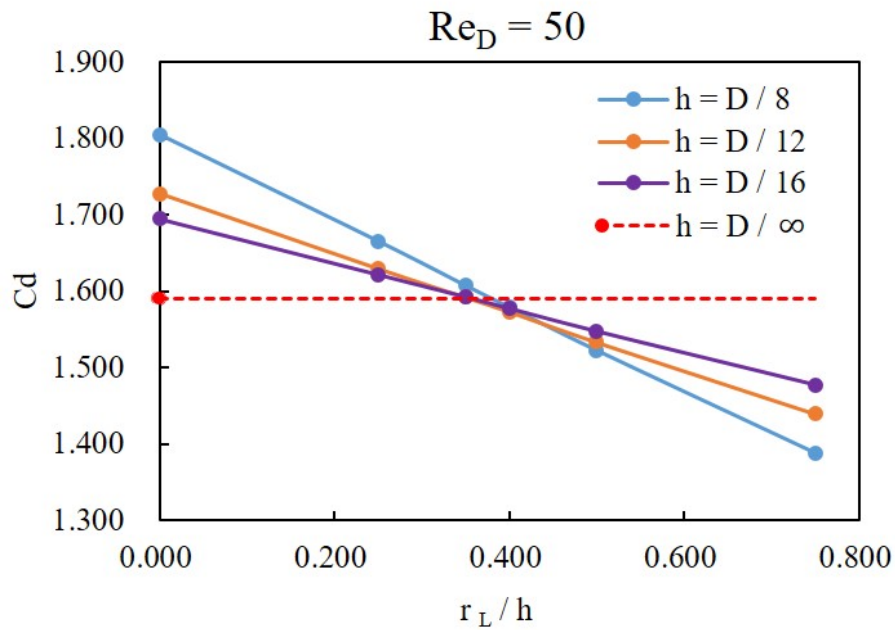


圖 3.13 雷諾數和阻力係數值的模擬結果與實驗結果[24]比對圖



(a)



(b)

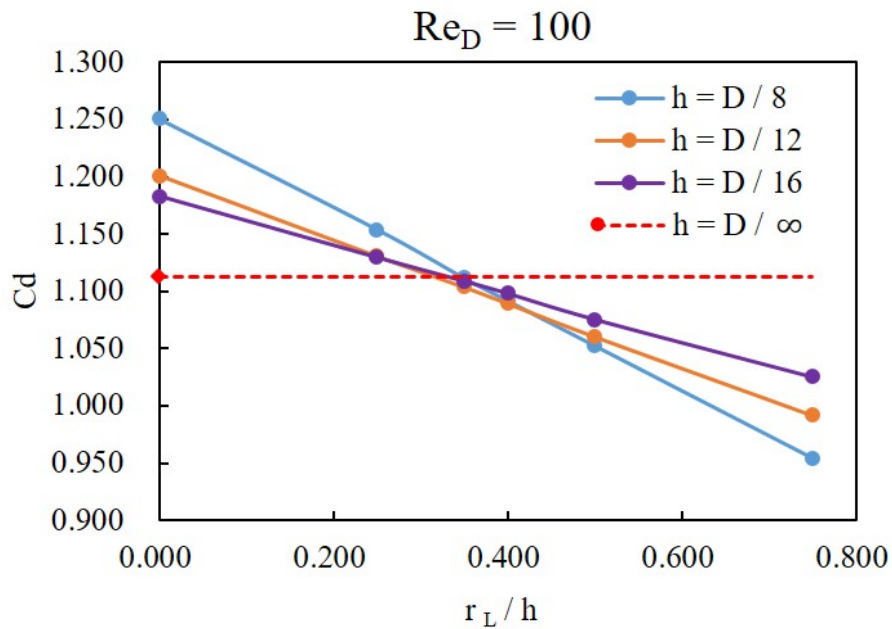
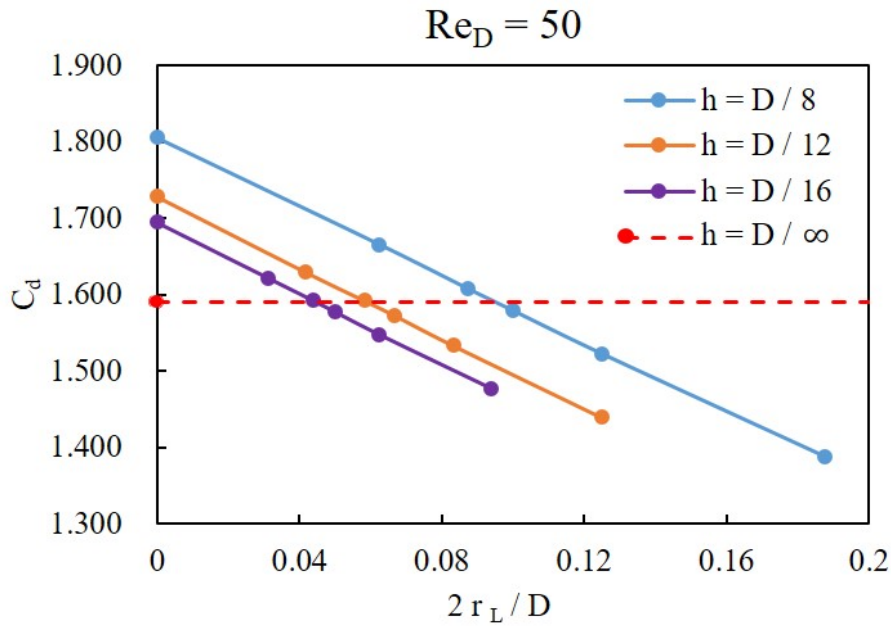


圖 3.14 (a) $Re_D = 50$ (b) $Re_D = 100$ 在不同解析度下及不同向內收縮值與相應的阻力係數值圖(實線), 而向內收縮值 $r_L/h = 0$ 且 $h \sim D/\infty$ 所得到的阻力係數值(紅色點)且紅色虛線為此值的延伸於不同向內收縮值以利於觀察。



(a)



(b)

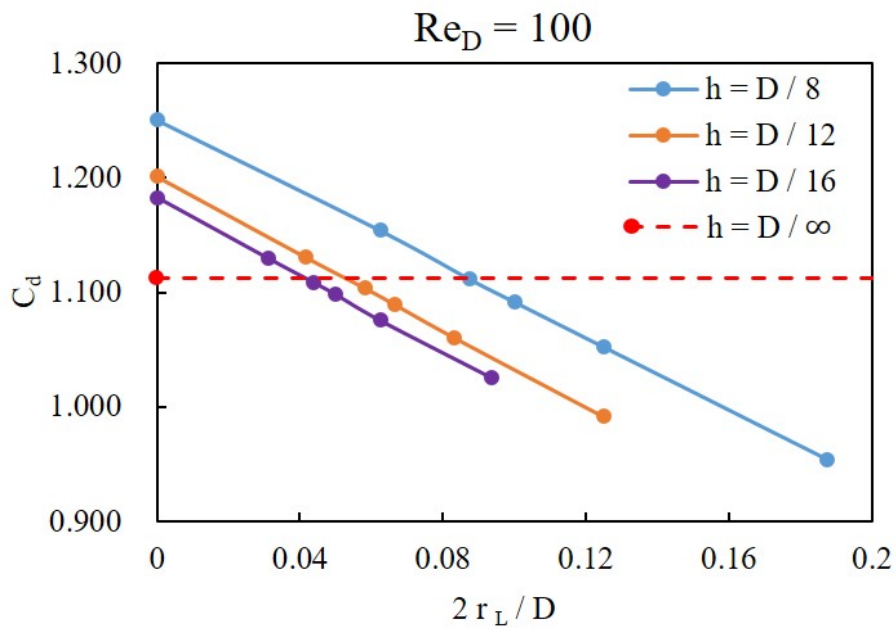


圖 3.15 (a) $Re_D = 50$ (b) $Re_D = 100$ 不同解析度及固定直徑不同向內收縮值下與相應阻力係數圖，不同解析度對應 $h \sim D/\infty$ 時的阻力係數值即可得到該解析度下該使用的向內收縮值。

3.3.4 顆粒修正函數—向內收縮值、雷諾數和網格解析度

前三點得到的結果，可得到在不同雷諾數及不同解析度下的拉格朗日向內收縮值，利用這個結果可將所有得到不同條件下的向內收縮值與雷諾數和網格解析度繪製成三維擬合曲面圖(圖 3.16)，並得到此擬合曲面關係式如(3.1)式，應用此關係式可以在不同解析度流場中得到顆粒運動時不同速度下的向內收縮值，用以達到準確的顆粒所受阻阻力計算。

$$\begin{aligned}
 p = & 0.53 - 3.75 \times 10^{-3} \text{Re}_D + 0.385 q + 7.681 \times 10^{-5} \text{Re}_D^2 \\
 & - 6.261 \times 10^{-2} \text{Re}_D q - 1.723 q^2 - 5.571 \times 10^{-7} \text{Re}_D^3 \\
 & + 1.033 \times 10^{-4} \text{Re}_D^2 q + 0.365 \text{Re}_D q^2 + 1.972 \times 10^{-9} \text{Re}_D^4 \\
 & + 2.176 \times 10^{-8} \text{Re}_D^3 q - 1.007 \times 10^{-3} \text{Re}_D^2 q^2 - 2.444 \times 10^{-12} \text{Re}_D^5 \\
 & - 1.175 \times 10^{-9} \text{Re}_D^4 q + 2.845 \times 10^{-6} \text{Re}_D^3 q^2
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $p = \frac{r_L}{h}$ 為向內收縮值與網格寬度的比值， Re_D 為雷諾數， $q = \frac{h}{D}$ 為網格大小與顆粒直徑的比值。

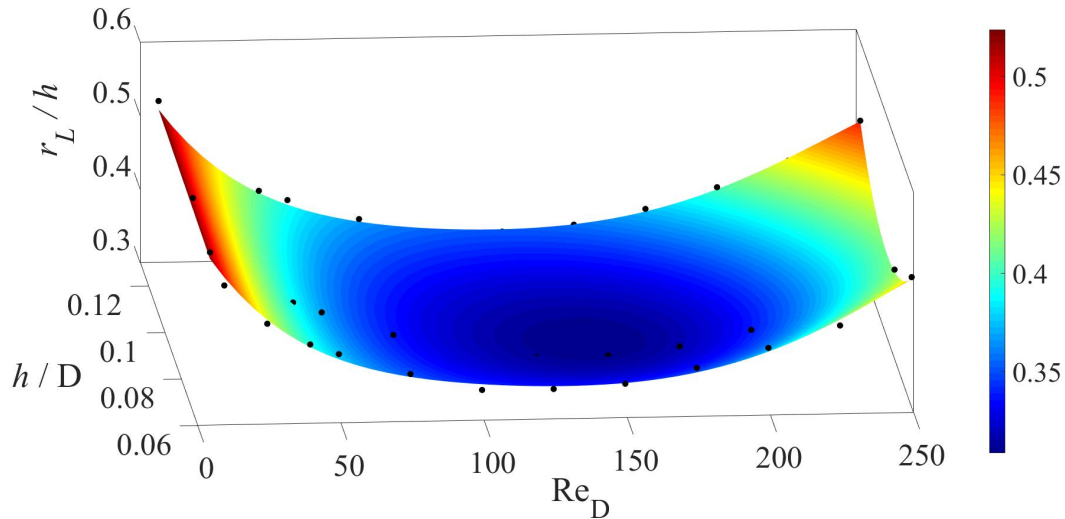


圖 3.16 雷諾數 Re_D 、向內收縮值 r_L 和網格解析度 h 之擬合曲面圖



Chapter 4 模擬結果

應用前章節改善了直接施力沉浸邊界法在固體邊界上的速度誤差，並進行阻力係數的驗證，及建立一個於不同網格解析度和球體速度得到拉格朗日向內收縮值的修正函數，因此可以應用此方法於球體的沉降模擬上。

4.1 單顆球體自由沉降

在模擬多顆球體運動前，要先驗證單顆球體的終端速度是否正確，參考 Luo et al. (2019)[8]的模擬設置，邊界條件皆為無應力邊界條件，本研究模擬參數如表 4.1，分別模擬三種不同解析度下的單顆球體沉降速度，且兩種不同條件下，是否使用拉格朗日向內收縮方法(IRL)，用以驗證使用此方法是否能達到準確計算受力。

表 4.1 模擬球體沉降速度之模擬參數

流場大小 ($X \times Y \times Z$)	$0.4 \times 10^{-2} \text{ m} \times -4.8 \times 10^{-2} \text{ m} \times 0.4 \times 10^{-2} \text{ m}$
網格解析度 ($N_x \times N_y \times N_z$)	$64 \times 768 \times 64$ ($h = D / 8$)
	$96 \times 1152 \times 96$ ($h = D / 12$)
	$128 \times 1536 \times 128$ ($h = D / 16$)
流體密度 ρ_f	1000 kg m^{-3}
流體運動黏滯係數 ν	$8.9 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
顆粒直徑 D	$5 \times 10^{-4} \text{ m}$
顆粒密度 ρ_p	2560 kg m^{-3}
時間步長 Δt	$2 \times 10^{-4} \text{ s}$ ($h = D / 8$)
	$1 \times 10^{-4} \text{ s}$ ($h = D / 12$)
	$5 \times 10^{-5} \text{ s}$ ($h = D / 16$)
顆粒質心位置 (x, y, z)	$(0.2 \times 10^{-2} \text{ m}, -1 \times 10^{-2} \text{ m}, 0.2 \times 10^{-2} \text{ m})$

拉格朗日點數目 N_l

202 ($h = D / 8$)

453 ($h = D / 12$)

805 ($h = D / 16$)

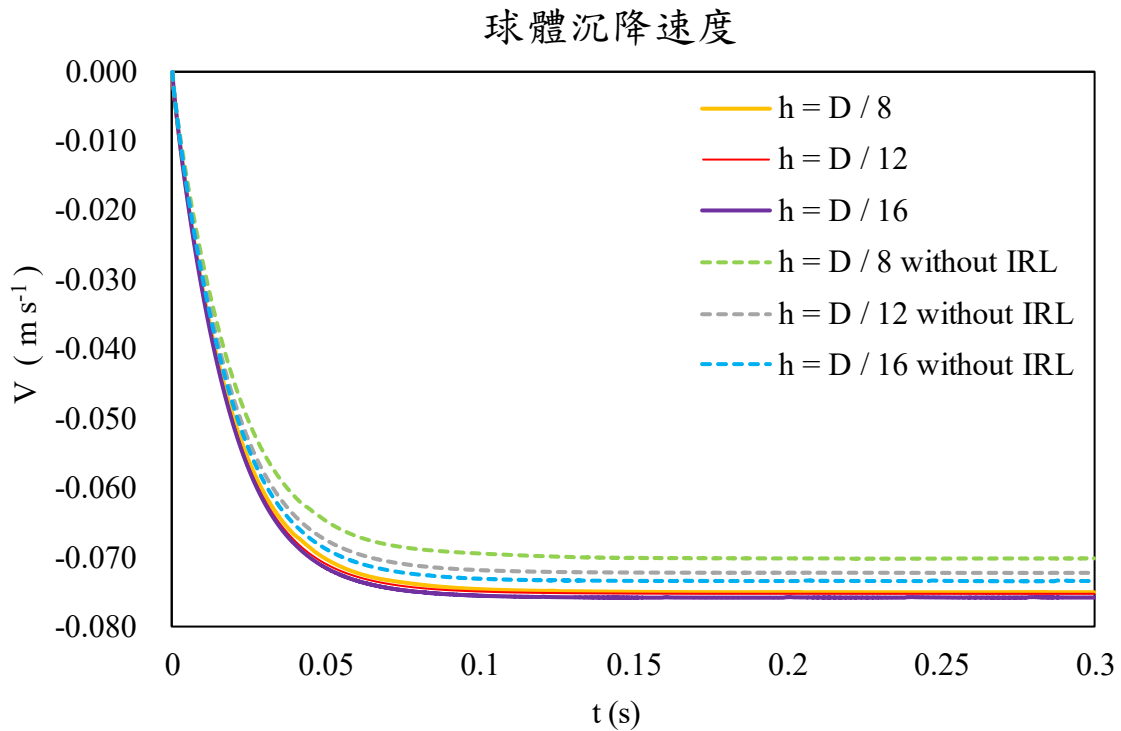


圖 4.1 球體沉降速度與時間關係圖，沒有使用拉格朗日向內收縮方法為虛線，而有使用該方法的為實線

經由模擬後可得結果圖 4.1，x 軸為時間，y 軸為球體的沉降速度，在不同網格解析度下，實線顯示使用拉格朗日點向內收縮方法的球體隨時間沉降速度變化，而虛線則表示沒有使用拉格朗日點向內收縮方法的球體隨時間沉降速度變化，可以觀察出球體沒有使用拉格朗日向內收縮方法的沉降速度，其沉降速度達終端速度時，虛線的終端速度由慢到快分別為解析度低到高，應證第三章所論述的，應用狄拉克脈衝函數會使得邊界擴大且造成球體所受阻力上升，因而使球體終端速度因阻力較大而較慢，尤其在網格解析度低的情況下此現象更顯著；而使用拉格朗日向內收縮方法(實線)可以觀察出由於球體邊界經由修正函數的改善，進而

使所阻力不受解析度的影響，仍然可以計算準確的阻力，達到不同解析度下能可達到趨近相同的終端速度。而後將此終端速度比較於其他文獻，如表 4.2 包含本研究模擬出的終端速度和對應之雷諾數，及參考文獻實驗[28]和模擬數據[5,8,29]，本研究的模擬結果接近於實驗值和其他文獻模擬值。

表 4.2 球體終端速度與文獻比較

	V (m s ⁻¹)	Re
模擬結果	0.0751	42.19
Mordant & Printon[28]	0.0741	41.62
Uhlmann [5]	0.0740	41
Li et al.[29]	0.0724	40.67
Luo et al [8]	0.0767	43.09

4.2 模擬兩顆球體在流場中的不同擺放方式所受阻力影響

由於要模擬多顆球體於流場中的現象，可先進行模擬在雷諾數大於一定值的時候，因球體運動所產生的流場(如尾流(wake))對其他顆球體所造成的影響，在此可以分成兩個物理問題進行模擬及討論，一是於流場中球體一前一後放置的情況，二是球體採並排時後的情況，而在此可球體運動問題改由應用兩個靜止球體於均勻入流流場中進行模擬，觀察其阻力係數隨之間距離的變化，而與其他文獻進比較。

4.2.1 靜止球體在流場中前後放置

將兩顆球體以前後的方式靜止放置於流場中(如圖 4.2)，給予一均勻入流流場，並讓其餘邊界條件為無應力邊界條件，並讓其模擬達到穩態時，計算前後球體所受阻力，模擬參數如表 4.3 所示。

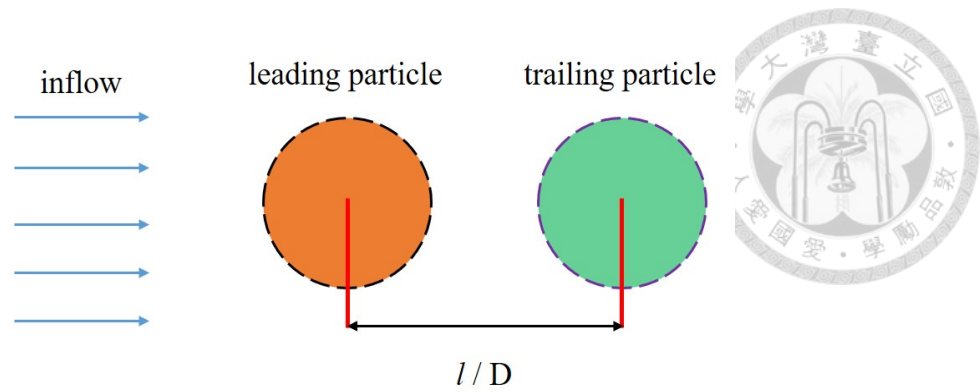


圖 4.2 靜止球體於均勻入流流場前後擺放示意圖

表 4.3 模擬兩個靜止球體前後擺放於均勻入流流場之模擬參數

流場大小 ($X \times Y \times Z$)	$3.2 \times 10^{-2} \text{ m} \times -0.96 \times 10^{-2} \text{ m} \times 0.96 \times 10^{-2} \text{ m}$
網格解析度 ($N_x \times N_y \times N_z$)	$320 \times 96 \times 96$
流體密度 ρ_f	1000 kg m^{-3}
流體運動黏滯係數 ν	$10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
顆粒直徑 D	$0.8 \times 10^{-3} \text{ m}$
時間步長 Δt	$1 \times 10^{-4} \text{ s}$
兩個顆粒質心位置 (x, y, z)	leading particle $(0.96 \times 10^{-2} \text{ m}, -0.48 \times 10^{-2} \text{ m}, 0.48 \times 10^{-2} \text{ m})$
	trailing particle $(0.96 \times 10^{-2} + c \times (l / D) \text{ m}, -0.48 \times 10^{-2} \text{ m}, 0.48 \times 10^{-2} \text{ m})$
拉格朗日點數目 N_l	202

★ c 為常數

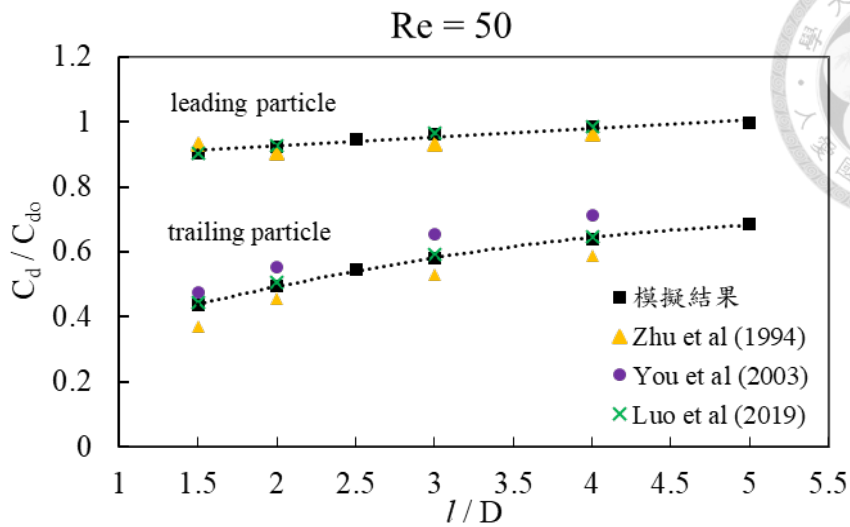


圖 4.3 阻力係數值對應球體間擺放之距離圖[8,25,27]， C_{d0} 為單顆球體於均勻流場中且網格解析度極高 $h \sim D/\infty$ 的阻力係數值。

由模擬結果如圖 4.3 所示，x 軸為球體間固定距離與球體直徑的比值，y 軸為所量測阻力係數與單顆球體於均勻流場中且網格解析度極高 $h \sim D/\infty$ 時之阻力係數值的比值，本研究模擬結果為黑色方形點，其他點則為參考文獻之數據 [8,25,27]，此圖可以觀察出球體放置於一前一後時，球體間距離越近，前後球體所受阻力值會下降，而後方球體則因為前方球體的尾流影響，其所受阻力甚至為單顆球體在均勻入流流場中所受阻力的一半以下，而球體間距離越遠則前方球體所受阻力值趨近於在均勻入流流場單顆球體所受阻力，而後方球體仍然受前方球體所產生的尾流影響，此結果比對於其他文獻[8,25,27]，模擬結果皆接近在實驗結果[25]及模擬結果[8,27]的範圍。

4.2.2 靜止球體在流場中並排放置

將球體靜止並排擺放於均勻入流流場中(如圖 4.4)，其餘邊界條件為無應力邊界條件，等達到穩態時量測其所阻力值，由於兩顆球體為面對均勻入流並排放置，所以兩顆球體所受阻力會是相等的，所以量測其中一顆球體所受阻力值即可，而另一顆球體所受阻力可用於驗證使用，其模擬相關參數如表 4.4 所示。

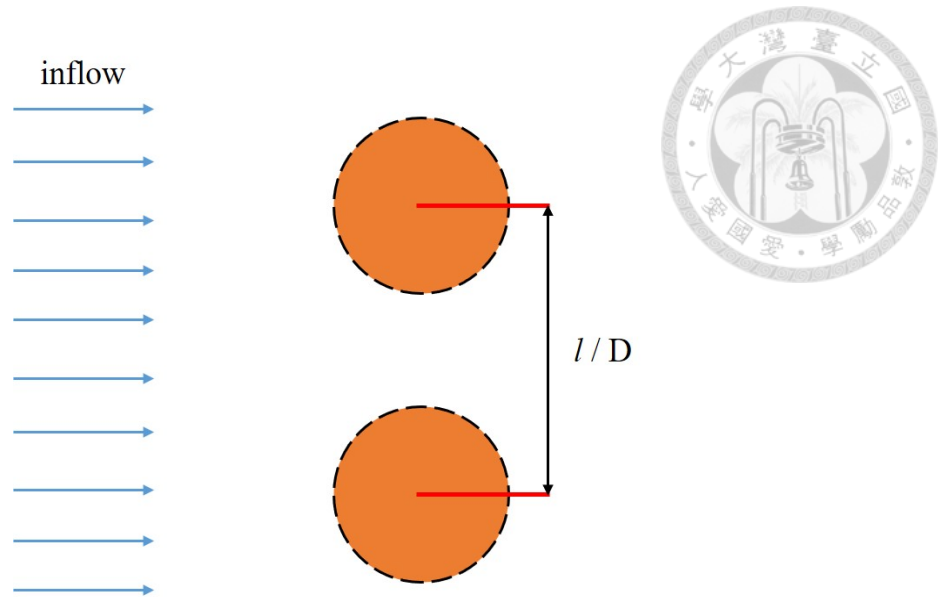


圖 4.4 靜止球體於均勻入流流場並排擺放示意圖

表 4.4 模擬兩個靜止球體並排擺放於均勻入流流場之模擬參數

流場大小 ($X \times Y \times Z$)	$2.56 \times 10^{-2} \text{ m} \times -0.96 \times 10^{-2} \text{ m} \times 1.6 \times 10^{-2} \text{ m}$
網格解析度 ($N_x \times N_y \times N_z$)	$256 \times 96 \times 160$
流體密度 ρ_f	1000 kg m^{-3}
流體運動黏滯係數 ν	$10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
顆粒直徑 D	$0.8 \times 10^{-3} \text{ m}$
時間步長 Δt	$1 \times 10^{-4} \text{ s}$
兩個顆粒質心位置 (x, y, z)	sphere 01
	$(0.96 \times 10^{-2} \text{ m}, -0.48 \times 10^{-2} \text{ m}, 0.8 \times 10^{-2} + c \times (2 l / D) \text{ m})$
	sphere 02
	$(0.96 \times 10^{-2} \text{ m}, -0.48 \times 10^{-2} \text{ m}, 0.8 \times 10^{-2} - c \times (2 l / D) \text{ m})$
拉格朗日點數目 N_l	202

★ c 為常數

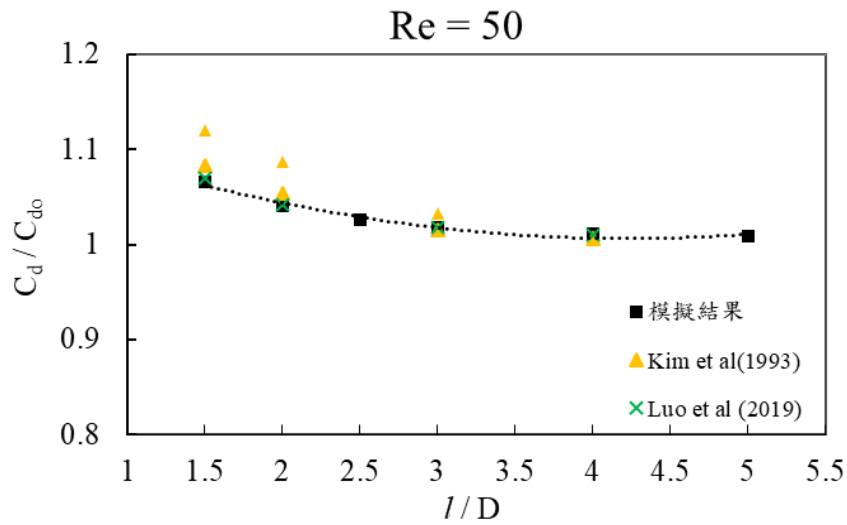


圖 4.5 阻力係數值對應球體間擺放之距離圖[8,26]

經由模擬結果圖 4.5，x 軸為球體固定距離與球體直徑的比值，y 軸為所量測阻力係數與單顆球體於均勻流場中且網格解析度極高 $h \sim D/\infty$ 時之阻力係數值的比值，圖上黑色方形點為本研究模擬結果，而其他點為參考文獻之模擬結果 [8,26]，可以知道在球體間並排距離接近時，所受到的阻力會比單顆球體在均勻入流流場所受阻力還大，而球體間距離變大，由於球體周圍流場互不受彼此影響，則會形成單顆球體在均勻入流流場的問題，阻力係數會因球體間距離越大而趨近於單顆球體在均勻入流流場的阻力係數值，模擬結果趨近於參考文獻之模擬數據 [8,26]。

4.3 兩顆球體沉降—Drafting-kissing-tumbling phenomenon

經由 4.2 小節模擬兩個靜止球體間擺放方式及距離產生的球體所受阻力值差異，利用這現象可以模擬兩球體於上下擺放時自然沉降行為，此現象可以分為三個過程，依序分別為 Drafting、kissing、tumbling，由於球體擺放位置為上下擺放對於球體運動方向相當等於前述所模擬的前後放置，在沉降時，上方球體所受阻力會受下方球體產生的尾流影響而下降，使得上方球體沉降速度會快於下方球體，而兩者間的距離會逐漸靠近此時即為 drafting 過程，而當球體碰觸到時為 kissing，並持續接觸一段時間，此過程為 tumbling，隨後兩球體因相撞而分開，最後達到沉降的終端速度。



本研究模擬參考 Luo et al. (2019)[8]的模擬設置，邊界條件皆為無應力邊界條件，但由於本研究使用之方法的密度限制 $\rho_p / \rho_f \geq 2$ ，所以以定性分析為主，模擬參數如下表 4.5 所示

表 4.5 模擬兩個球體上下擺放於流場中自然沉降之模擬參數

流場大小 ($X \times Y \times Z$)	$1.333 \times 10^{-2} \text{ m} \times -7.111 \times 10^{-2} \text{ m} \times 1.333 \times 10^{-2} \text{ m}$
網格解析度 ($N_x \times N_y \times N_z$)	$96 \times 512 \times 96$
流體密度 ρ_f	1000 kg m^{-3}
球體密度 ρ_p	2560 kg m^{-3}
流體運動黏滯係數 ν	$10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
顆粒直徑 D	$1.09 \times 10^{-3} \text{ m}$
時間步長 Δt	$1 \times 10^{-4} \text{ s}$
兩個顆粒質心位置 (x, y, z)	下方球體 $(6.63396 \times 10^{-3} \text{ m}, -1.05569 \times 10^{-2} \text{ m}, 6.63396 \times 10^{-3} \text{ m})$
	上方球體 $(6.69936 \times 10^{-3} \text{ m}, -0.83333 \times 10^{-2} \text{ m}, 6.69936 \times 10^{-3} \text{ m})$
拉格朗日點數目 N_l	194

由模擬結果圖 4.6，紅色球體為下方球體(leading particle)，藍色球體為上方球體(trailing particle)，其隨時間排列方式為由左而右，由上而下來顯示，可觀測出藍色球體的沉降速度較紅色球體快，而後產生碰撞而後分開，針對其速度和時間進行繪製如圖 4.7 所示，x 軸為時間，y 軸為沉降速度，紅線為下方球體隨時間變化的沉降速度，藍線為上方球體隨時間變化的沉降速度，可觀察出藍色球體約在 0.05 秒時沉降速度快於紅色球體，此過程顯示了紅色球體所產生的尾流對藍色球體造成影響，讓其所受阻力減少，使得速度變快直到球體間接近時，且在兩顆球體接

近時沉降速度會快速達到於一點，此點代表產生了碰撞，而後兩球體分開，紅色球體被藍色球體推開，且藍色球體由於慣性力使得沉降速度於碰撞後仍快於紅色球體，使其會超過紅色球體，最後達到各自的終端速度，由於兩球體的大小是一致的，所以終端速度最後會重合在一起。

而利用兩顆球體間的距離進行分析，如圖 4.8 所示，x 軸為時間，y 軸為兩顆球體彼此間的距離，藍色曲線為隨時間變化的兩顆球體間之距離，曲線顯示兩顆球體距離開始縮短時，即為 drafting 的過程(綠色和黃色虛線間)，而距離為 0 時為 kissing 的點，即為碰撞點，而後維持一段時間的狀態為 tumbling 過程(黃色及紫色虛線間)，而後球體距離拉大到各球體達到終端速度，球體彼此間的距離才會維持一定值。

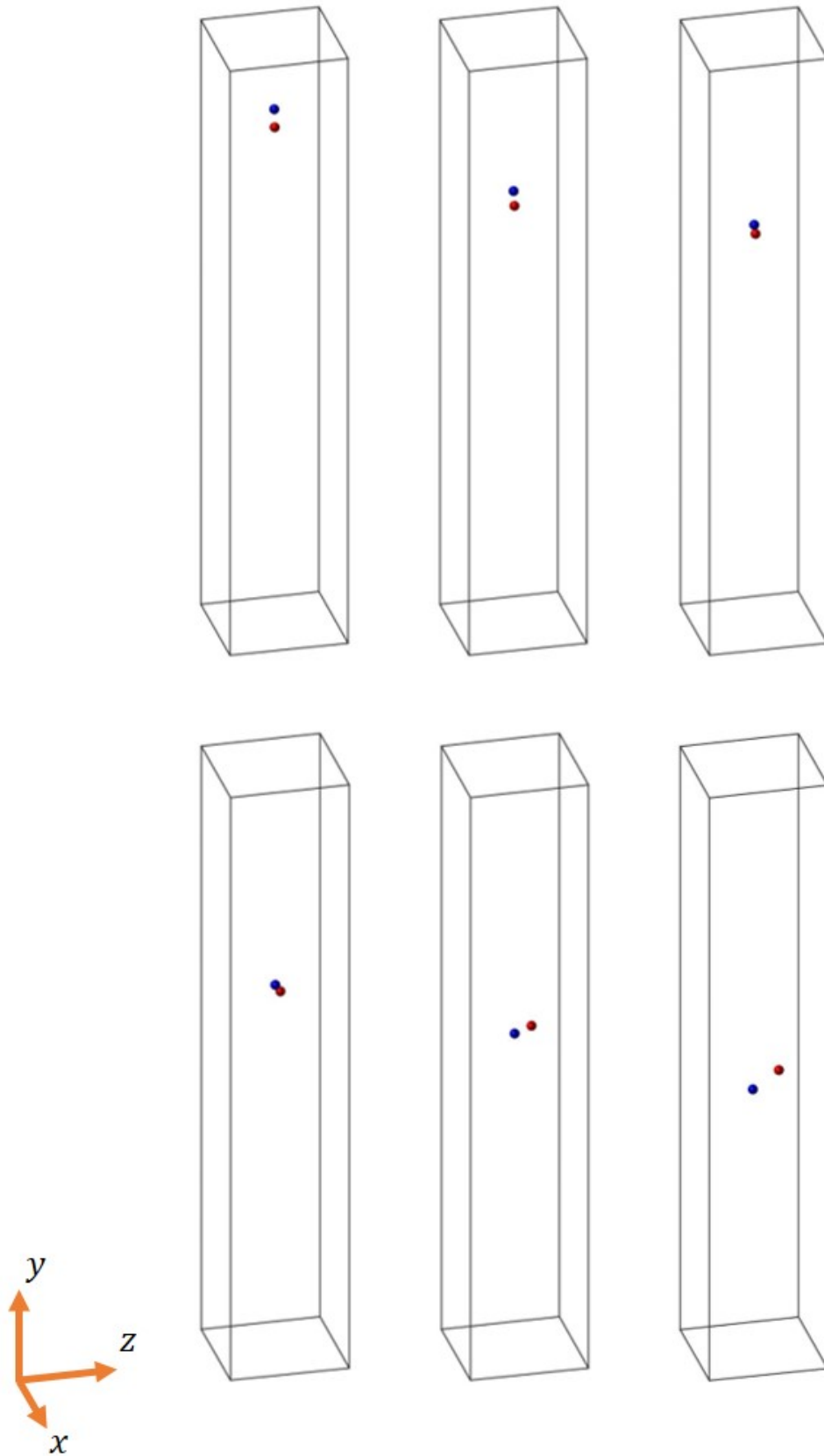
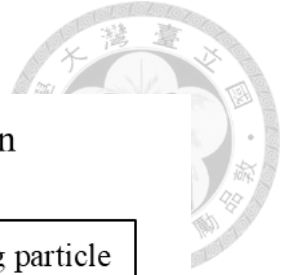


圖 4.6 不同時間點的兩顆球體沉降位置圖



drafting-kissing-tumbling phenomenon
球體沉降速度

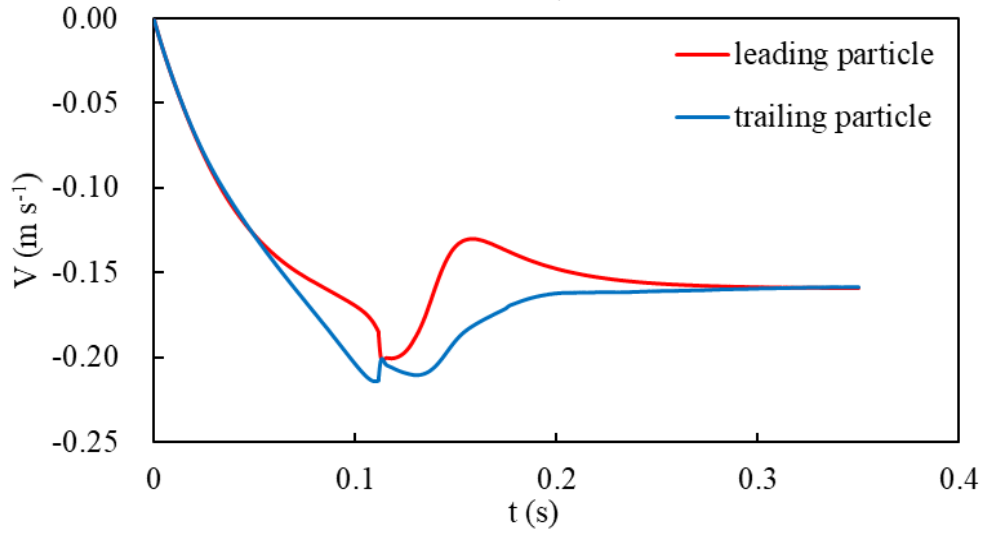


圖 4.7 兩顆球體隨時間變化的沉降速度圖

隨時間變化的兩顆球體間之距離圖

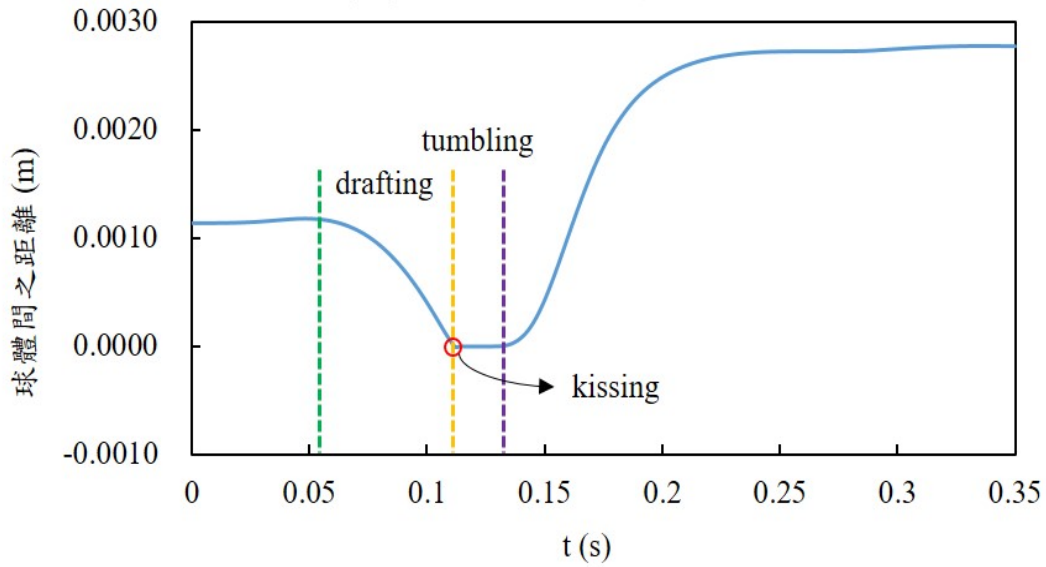


圖 4.8 隨時間變化的兩顆球體間之距離圖

Chapter 5 結論及未來工作



模擬固體於流場中的行為對於科技的發展和了解及研究自然環境的過程有很大的幫助，模擬的數值方法也不斷地在被改進，使計算結果更準確，而本研究以此為目標改善模擬固體的數值方法並應用於球體沉降的問題上。本研究所使用的方法原型為直接施力沉浸邊界法[4,5]，此方法為了更準確的模擬出固體邊界，需要較高解析度的流場網格[5]或計算受力過程運用迭代方式進行[6]，才能使固體邊界上的速度更趨近於無滑移及無穿透條件，本研究以上述方法為基底，對直接施力沉浸邊界法進行改善，讓模擬出來的固體邊界更加準確，而後模擬出球體的沉降行為。

5.1 結論

1. 使用直接施力沉浸邊界法模擬固體在流場中時，為了改善固體邊界上的速度誤差問題，在計算固體邊界受力並更新流場速度的過程加入迭代的方法，經由模擬驗證可以發現迭代的次數越高則固體邊界速度誤差越低(如圖 3.3 和圖 3.4)，符合 Kempe, T., & Fröhlich, J. (2012)的論述及模擬測試[6]，因此本研究於固體邊界誤差問題上，應用在此迭代的方法，並設定容許誤差範圍，可將誤差定量且有更準確的固體邊界。
2. 在應用直接施力沉浸邊界法中，由於所使用的正規化狄拉克脈衝函數進行速度內插和邊界受力外插，而造成固體邊界的厚度增大，從而造成在計算上的阻力上升(如圖 3.12)，但經由使用拉格朗日點向內收縮方法，為雷諾數及網格解析度和拉格朗日點向內收縮值得到一修正函數，即可於不同解析度下模擬球體時有準確的阻力計算。
3. 模擬球體在靜止流場以靜止的初始狀態進行自由沉降，可以發現在不同網格解析度下，球體達終端速度值時趨近於定值，並比較實驗和其他期刊論文模擬結果(如表 4.2)，本研究模擬結果介於其範圍之間，可顯示阻力的準確計算及模擬的正確性。
4. 模擬兩個靜止球體於流場中的擺放方式不同，所計算可得的阻力係數會隨之改變，如對應於入流流場，球體採前後放置可以發現球體間距離越近，兩顆

所受阻力越小，而當球體採並排擺放則球體間距離越接近阻力越大，同時球體前後擺放的阻力係數證明後方球體會受到前方球體的尾流影響，而使阻力下降，而後將兩顆球體應用上下擺放的方式放置流場中讓其自然沉降，並成功模擬出 Drafting-kissing-tumbling 的現象，由以上模擬結果可確定本研究所使用之方法可應用於模擬多球體在流場中的運動行為。

5.2 未來工作

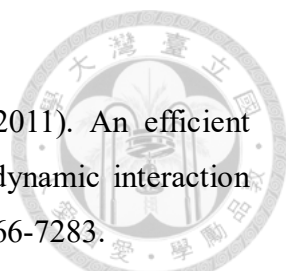
1. 拉格朗日點在固體表面的佈點方法目前是由庫倫力平衡的方式進行處理，目前只能應用於球體的均勻佈點上，若應於其他非對稱結構物體上，則需要思考其他佈點方法，可利用不同的均勻網格切割，如映射切割網格(mapping mesh)等方法取得該結構物體的拉格朗日點，而再由沉浸邊界法進行運算。
2. 在模擬球體運動方法上，由於所使用 Uhlmann (2005)[5]的假設，球體內部的慣性力等同於球體本身的體積與速度乘積，此在模擬球體的密度上會有所限制，經由模擬測試 $\rho_p / \rho_f \geq 2$ 在數值運算上才會收斂，可以應用如 Kempe & Fröhlich (2012)[6]所使用體積分率的計算方法，可使限制降至於 $\rho_p / \rho_f \geq 0.3$ 的範圍裡。
3. 目前所使用的沉浸邊界方法，由於要滿足邊界速度上的條件，在受力計算上設置了一可容許誤差值而進行了迭代計算，雖然在邊界模擬上減少了誤差，且在迭代過程加上了一權重進行加速，但模擬球體運動的運算時間上，會因為迭代的次數多而要花費更多時間，於此希望能找到更有效率的方式進行處理。
4. 由於使用拉格朗日向內收縮的方法，修正函數是由不同雷諾數、網格解析度和拉格朗日點向內收縮值所構成的，由於目前所建立修正函數的雷諾數值只使用 0 至 250，所以應用其於模擬時，模擬範圍被雷諾數所限制住，模擬球體運動不得超過在 $Re = 250$ ，若要超過則需要在應用第三章所論述之方法往後建置下去。
5. 在球體沉降模擬上，由於調整時間步長(time step)會些微影響於球體的沉降速度計算，代表在同樣解析度下且不同時間步長上，會產生些許的誤差，且較少論文討論時間步長誤差對模擬造成的影響，此問題也成為後續研究目標。

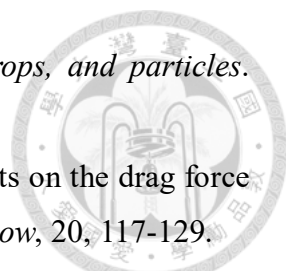
參考文獻



- [1] Peskin, C. S. (1977). Numerical analysis of blood flow in the heart. *Journal of computational physics*, 25, 220-252.
- [2] Peskin, C. S. (2002). The immersed boundary method. *Acta numerica*, 11, 479-517.
- [3] Roma, A. M., Peskin, C. S., & Berger, M. J. (1999). An adaptive version of the immersed boundary method. *Journal of computational physics*, 153, 509-534.
- [4] Fadlun, E. A., Verzicco, R., Orlandi, P., & Mohd-Yusof, J. (2000). Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations. *Journal of computational physics*, 161, 35-60.
- [5] Uhlmann, M. (2005). An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows. *Journal of Computational Physics*, 209, 448-476.
- [6] Kempe, T., & Fröhlich, J. (2012). An improved immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particle laden flows. *Journal of Computational Physics*, 231, 3663-3684.
- [7] Breugem, W. P. (2012). A second-order accurate immersed boundary method for fully resolved simulations of particle-laden flows. *Journal of Computational Physics*, 231, 4469-4498.
- [8] Luo, K., Wang, Z., Tan, J., & Fan, J. (2019). An improved direct-forcing immersed boundary method with inward retraction of Lagrangian points for simulation of particle-laden flows. *Journal of Computational Physics*, 376, 210-227.
- [9] Peng, Y., Shu, C., Chew, Y. T., Niu, X. D., & Lu, X. Y. (2006). Application of multi-block approach in the immersed boundary–lattice Boltzmann method for viscous fluid flows. *Journal of Computational Physics*, 218, 460-478.
- [10] Wu, J., & Shu, C. (2009). Implicit velocity correction-based immersed boundary-lattice Boltzmann method and its applications. *Journal of Computational Physics*, 228, 1963-1979.
- [11] Mittal, R., Dong, H., Bozkurtas, M., Najjar, F. M., Vargas, A., & Von Loebbecke, A. (2008). A versatile sharp interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries. *Journal of computational physics*,

227, 4825-4852.

- 
- [12] Tian, F. B., Luo, H., Zhu, L., Liao, J. C., & Lu, X. Y. (2011). An efficient immersed boundary-lattice Boltzmann method for the hydrodynamic interaction of elastic filaments. *Journal of computational physics*, 230, 7266-7283.
- [13] Kempe, T., Schwarz, S., & Fröhlich, J. (2009). Modelling of spheroidal particles in viscous flows. In Proceedings of the Academy Colloquium Immersed Boundary Methods: Current Status and Future Research Directions (KNAW, Amsterdam, The Netherlands, 15–17 June 2009) (Vol. 845).
- [14] Chorin, A. J. (1967). A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of computational physics*, 2, 12-26.
- [15] Zang, Y., Street, R. L., & Koseff, J. R. (1994). A non-staggered grid, fractional step method for time-dependent incompressible Navier-Stokes equations in curvilinear coordinates. *Journal of Computational Physics*, 114, 18-33.
- [16] Cui, A. (1999). On the parallel computation of turbulent rotating stratified flows, Stanford University
- [17] Brandt, A. (1977). Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Mathematics of computation*, 31, 333-390.
- [18] Brenner, H. (1961). The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface. *Chemical engineering science*, 16, 242-251.
- [19] Kempe, T., & Fröhlich, J. (2012). Collision modelling for the interface-resolved simulation of spherical particles in viscous fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 709, 445-489.
- [20] Cundall, P. A., & Strack, O. D. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. *geotechnique*, 29, 47-65.
- [21] Brändle de Motta, J. C., Breugem, W. P., Gazanion, B., Estivalezes, J. L., Vincent, S., & Climent, E. (2013). Numerical modelling of finite-size particle collisions in a viscous fluid. *Physics of Fluids*, 25, 083302.
- [22] van der Hoef, M. A., Ye, M., van Sint Annaland, M., Andrews, A. T., Sundaresan, S., & Kuipers, J. A. M. (2006). Multiscale modeling of gas-fluidized beds. *Advances in chemical engineering*, 31, 65-149
- [23] Costa, P., Boersma, B. J., Westerweel, J., & Breugem, W. P. (2015). Collision model for fully resolved simulations of flows laden with finite-size particles. *Physical Review E*, 92, 053012.

- 
- [24] Clift, R., Grace, J. R., & Weber, M. E. (2005). *Bubbles, drops, and particles*. Courier Corporation.
- [25] Zhu, C., Liang, S. C., & Fan, L. S. (1994). Particle wake effects on the drag force of an interactive particle. *International journal of multiphase flow*, 20, 117-129.
- [26] Kim, I., Elghobashi, S., & Sirignano, W. A. (1993). Three-dimensional flow over two spheres placed side by side. *Journal of Fluid Mechanics*, 246, 465-488.
- [27] Changfu, Y., Haiying, Q., & Xuchang, X. (2003). Drag force in dense gas-particle two-phase flow. *Acta Mechanica Sinica*, 19, 228-234.
- [28] Mordant, N., & Pinton, J. F. (2000). Velocity measurement of a settling sphere. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 18, 343-352.
- [29] Li, D., Wei, A., Luo, K., & Fan, J. (2015). An improved moving-least-squares reconstruction for immersed boundary method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 104, 789-804.
- [30] Aris, R. (2012). *Vectors, tensors and the basic equations of fluid mechanics*. Courier Corporation.
- [31] Slotine, J. J. E., Asada, H., Asada, H., & Slotine, J. J. E. (1986). *Robot analysis and control*.
- [32] Hahn, H. (2002). Dynamics of planar and spatial rigid-body systems. In *Rigid Body Dynamics of Mechanisms* (pp. 129-169). Springer, Berlin, Heidelberg.