

國立臺灣大學工學院應用力學研究所

碩士論文

Graduate Institute of Applied Mechanics

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis

Timoshenko 和 Euler 懸臂梁本身及帶額外微小質量

在流體環境中共振頻及頻率飄移之比較

Comparisons of Resonant Frequency and Resonant

Frequency Shift due to the Added Mass between

Timoshenko and Euler Cantilever Beam Immersed in the

Fluid Environments

謝瀚逸

Han-Yi Hsieh

指導教授：張正憲 博士

Advisor: Jeng-Shian Chang, Ph. D.

中華民國 102 年 3 月

March , 2013

國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書

Timoshenko 和 Euler 懸臂梁本身及帶額外微小質量
在流體環境中共振頻及頻率飄移之比較

Comparisons of Resonant Frequency and Resonant
Frequency Shift due to the Added Mass between
Timoshenko and Euler Cantilever Beam Immersed
in the Fluid Environments

本論文係謝瀚逸君（學號：R99543058）在國立臺灣大
學應用力學研究所完成之碩士學位論文，於民國 102 年 3 月
22 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

張正憲 張正憲

(指導教授)

吳光鐘 吳光鐘

趙聖德 趙聖德

黃冠榮 黃冠榮

所 長

張家歐 張家歐

誌謝

終於可以寫這個，我已經等很久了。

此篇論文可以順利完成，首要感謝我的指導教授 張正憲教授，在研究期間內，老師的細心指導，使我學到了做研究應有的方法跟觀念，同時也令我在專業知識領域上有了新的體認與心得；除了研究，在待人處世方面，也讓我們更知道如何與各式各樣的人應對進退，激鍊我們的說話技巧。於此種種，銘感於心。

另外，感謝 吳光鐘教授， 趙聖德教授， 黃冠榮博士在口試期間給予許多寶貴的意見和指正，使得本論文更趨完善。各口試委員於口試期間的各種犀利的問題，雖然只是短短的兩個小時，但卻給了我專業領域上不同的視界，激發出許多有別於往的想法，這樣的經驗非常寶貴。

尤其要感謝的就是黃冠榮大學長。我只能說，沒有你就沒有我。從一開始的循循善誘，到後面毫無保留的全力協助，並在各種關鍵時刻拉我一把，沒有你這樣拉著我，我早就不知道要掉到第幾年去了，寫著寫著，我覺得我的眼角有點濕。誠心地祝福你未來之路一帆風順。

再來就是實驗室的夥伴們了，多待了一段時間，要寫的人就多了一些。同窗好友柏維、裕升、瓊姿，雖然同年同月同日進來，不能同年同月同日離開是我的一大遺憾，但我現在也終於趕上，無論是修課時期或是研究期間，若沒有你們的陪伴及砥礪，相信我也不會這麼的順利度過。學弟妹怡亭、士瑋、尚洋、柏融、翊栩、宗緯、南輝、鳴珊、培需，實驗室因為有了你們而增添了許多色彩。特別感謝尚洋在最後關頭幫我處理了許多數據，否則我現在在電腦前寫的應該就不是誌謝了，我會特別懷念跟你在二樓中庭的小小時光。研究過程一路艱辛，你們要好好保重。

一路走來，非常感謝身邊所有好朋友們的陪伴以及鼓勵，在我研究之路苦悶的時候得以暫時抽離，豐富我的人生。無論是哪一階段的朋友，或是以何種形式

出現在我身邊的朋友，如果沒有你們的出現、你們的一字一句、一舉一動，就沒有今天的我，感謝任何一位在任何時刻出現在我生命中的人，要謝的人太多了，那就謝天吧。無論是在就業中或是服役中，甚至於還有一些依然在研究的過程中奮鬥的好朋友們，希望你們未來的路都可以順順利利地達成自己的目標，於此呈上最真誠的祝福。

最後要感謝我的家人，非常感謝你們在背後默默地給予我許多關懷與鼓勵，在我最困頓跟無助的時候，成為我最堅固的後盾與支柱，讓不思生產的我可以無後顧之憂的在研究上專心與努力，使我能夠順利的完成學業。



謝瀚逸 2013/03/26 于台大應力所

摘要

本文主要建立 Timoshenko 梁於黏滯流體中的振動模型。並將之與 Euler 梁於黏滯流體中振動行為以尺寸、流體介質種類、模態階數分類比較，最後將額外質量對於兩理論頻率偏移之影響做比較。

本文首先介紹相關文獻，利用格林函數解析任意截面不可壓縮黏滯流體理論，得出流體施加在扁平梁的水力負載，再將水力函數分別耦合進 Euler 梁理論與 Timoshenko 梁理論中，取得流固耦合後的頻率響應函數及受額外質量影響的頻率響應函數。

藉由物理行為、兩理論之間的關係以及與文獻中數值結果相互驗證。以數值結果分別比較兩理論於不同尺寸、不同流體介質、不同模態階數之關係。最後同樣以數值結果得知額外質量對兩理論於流體環境中振動之共振頻率的影響。感測器常於流體環境中做量測，由於其頻率於高模態時流體對結構的影響較小，且 Timoshenko 梁理論與 Euler 梁理論於高模態時差異越趨明顯，本文中之數值結果呈現當 $L/h=5$ 時，於第八模態時其差異可達 65%，此時使用 Timoshenko 梁理論較為妥當。

關鍵字：微懸臂梁感測器、原子力顯微鏡、Timoshenko 梁理論、Euler 梁理論、黏滯流體、振動、頻率響應

Abstract

This thesis is primarily based vibration model of Timoshenko beam in viscous fluid. To compare the vibration model with the vibration behavior of Euler beam in viscous fluid by the size, fluid type and modal order. In the end of the comparison, the added mass effect of two theoretical frequency shifts is compared.

This thesis firstly introduces the relevant reference. Using the Green's function to solve incompressible viscous fluid theorem of any cross-section, and to conclude hydrodynamic loading that fluid applied to the flat beam. After that, have the hydrodynamic functions coupled with the Euler beam theory and Timoshenko beam theory to obtain the frequency response function and the frequency response function which affected by the added mass after fluid-structure interaction.

Ultimately, the Timoshenko beam numerical results are verified with the physical behavior, the relationship between the two theories and the numerical results of the reference. The numerical results of the frequency response functions were compared the relationship to two theories in different sizes, different fluids, and the different modal orders. Finally, we can find out the added mass effect of resonant frequency which vibrates in the fluid environment of the two theories by the numerical results.

Sensors often do measurements in the fluid environment. Because the effect of the frequency is smaller when the fluid acting on the structure, and the differences of Timoshenko beam theory and Euler beam theory become more obvious in high mode. The numerical results in this paper present that the difference in 8th mode is up to 65% when $L/h = 5$. Using the Timoshenko beam theory is more appropriate.

Keywords: microcantilever beam sensor, atomic force microscope, Timoshenko beam theory, Euler beam theory, viscous fluid, vibration, frequency response

目錄

摘要.....	I
Abstract.....	II
目錄.....	III
圖目錄.....	V
表目錄.....	XIV
符號表.....	XVIII
第一章 緒論.....	1
1-1 研究動機與目的.....	1
1-2 文獻回顧.....	2
1-3 論文架構.....	4
第二章 黏滯流體水力函數.....	5
2-1 黏滯流體下任意截面流固耦合.....	5
2-2 黏滯流體下扁平梁的水力負載.....	10
第三章 流固耦合系統振動分析.....	14
3-1 Euler 梁.....	14
3-1-1 結構統御方程式.....	15
3-1-2 模態形狀之求得.....	17
3-1-3 流體中頻率響應及額外質量的影響.....	20
3-2 Timoshenko 梁.....	23
3-2-1 結構統御方程式.....	23
3-2-2 流體中頻率響應與額外質量的影響.....	26
第四章 理論驗證與數值結果.....	30
4-1 理論驗證.....	30

4-1-1 靜態分析	30
4-1-2 Timoshenko 梁與 Euler 梁相互比較	33
4-1-3 與直接求解法比較	36
4-1-4 與文獻比較	38
4-2 數值結果	49
4-2-1 剪切模數與流體對結構的影響	49
4-2-2 結構長度與厚度之比值與流體的影響	57
4-2-3 兩理論差異與流體影響於高模態時之關係	67
4-2-4 額外質量對兩理論頻率偏移之影響	113
第五章 結論及未來展望	166
參考文獻	169
附錄	172



圖目錄

圖 2-1 梁任意截面及其邊界條件示意圖一[21].....	7
圖 2-2 梁任意截面及其邊界條件示意圖二[9].....	9
圖 2-3 扁平梁上下邊界條件[22].....	10
圖 3-1 Euler 梁元素自由體圖.....	15
圖 3-2 Timoshenko 梁元素自由體圖.....	23
圖 4-1 $L=300\mu m, b=36\mu m$ 真空環境頻率比較(第一模態).....	35
圖 4-2 理論驗證圖[13].....	39
圖 4-3 頻率偏移驗證圖[19].....	42
圖 4-4 頻率偏移結果驗證圖($h=1.1\mu m$).....	44
圖 4-5 頻率偏移結果驗證圖($h=4\mu m$).....	44
圖 4-6 頻率偏移結果驗證圖($h=6.5\mu m$).....	45
圖 4-7 剪切模數 G 與頻率於真空環境之關係(第一模態).....	51
圖 4-8 剪切模數 G 與頻率於空氣環境之關係(第一模態).....	51
圖 4-9 剪切模數 G 與頻率於水環境之關係(第一模態).....	52
圖 4-10 剪切模數 G 與頻率於甘油環境之關係(第一模態).....	52
圖 4-11 剪切模數與流體環境對頻率之影響(空氣、真空)(第一模態).....	53
圖 4-12 剪切模數與流體環境對頻率之影響(水、真空)(第一模態).....	53
圖 4-13 剪切模數與流體環境對頻率之影響(甘油、真空)(第一模態).....	54
圖 4-14 L/h 於真空介質中對 f_T/f_E 之影響(第一模態).....	59
圖 4-15 L/h 於空氣介質中對 f_T/f_E 之影響(第一模態).....	59
圖 4-16 L/h 於水介質中對 f_T/f_E 之影響(第一模態).....	60
圖 4-17 L/h 於甘油介質中對 f_T/f_E 之影響(第一模態).....	60

圖 4-18	L/h 與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(空氣、真空)(第一模態).....	63
圖 4-19	L/h 與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(水、真空)(第一模態).....	63
圖 4-20	L/h 與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(甘油、真空)(第一模態).....	64
圖 4-21	L/h 與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(空氣、真空)(第一模態).....	64
圖 4-22	L/h 與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(水、真空)(第一模態).....	65
圖 4-23	L/h 與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(甘油、真空)(第一模態).....	65
圖 4-24	$L/h = 30$ 模態階數與 f_T/f_E 於真空介質中之關係.....	69
圖 4-25	$L/h = 30$ 模態階數與 f_T/f_E 於空氣介質中之關係.....	69
圖 4-26	$L/h = 30$ 模態階數與 f_T/f_E 於水介質中之關係.....	70
圖 4-27	$L/h = 30$ 模態階數與 f_T/f_E 於甘油介質中之關係.....	70
圖 4-28	$L/h = 30$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(空氣、真空).....	72
圖 4-29	$L/h = 30$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(水、真空).....	73
圖 4-30	$L/h = 30$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(甘油、真空).....	73
圖 4-31	$L/h = 30$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(空氣、真空).....	74

圖 4-32	$L/h = 30$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(水、真空)	74
圖 4-33	$L/h = 30$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(甘油、真空)	75
圖 4-34	$L/h = 16.67$ 模態階數與 f_T/f_E 於真空介質中之關係	79
圖 4-35	$L/h = 16.67$ 模態階數與 f_T/f_E 於空氣介質中之關係	79
圖 4-36	$L/h = 16.67$ 模態階數與 f_T/f_E 於水介質中之關係	80
圖 4-37	$L/h = 16.67$ 模態階數與 f_T/f_E 於甘油介質中之關係	80
圖 4-38	$L/h = 16.67$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(空氣、真空)	82
圖 4-39	$L/h = 16.67$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(水、真空)	83
圖 4-40	$L/h = 16.67$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(甘油、真空)	83
圖 4-41	$L/h = 16.67$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(空氣、真空)	84
圖 4-42	$L/h = 16.67$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(水、真空)	84
圖 4-43	$L/h = 16.67$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(甘油、真空)	85
圖 4-44	$L/h = 10$ 模態階數與 f_T/f_E 於真空介質中之關係	89
圖 4-45	$L/h = 10$ 模態階數與 f_T/f_E 於空氣介質中之關係	89
圖 4-46	$L/h = 10$ 模態階數與 f_T/f_E 於水介質中之關係	90

圖 4-47	$L/h=10$ 模態階數與 f_T/f_E 於甘油介質中之關係	90
圖 4-48	$L/h=10$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(空氣、真空)	92
圖 4-49	$L/h=10$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(水、真空)	93
圖 4-50	$L/h=10$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(甘油、真空)	93
圖 4-51	$L/h=10$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(空氣、真空)	94
圖 4-52	$L/h=10$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(水、真空)	94
圖 4-53	$L/h=10$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(甘油、真空)	95
圖 4-54	$L/h=5$ 模態階數與 f_T/f_E 於真空介質中之關係	99
圖 4-55	$L/h=5$ 模態階數與 f_T/f_E 於空氣介質中之關係	99
圖 4-56	$L/h=5$ 模態階數與 f_T/f_E 於水介質中之關係	100
圖 4-57	$L/h=5$ 模態階數與 f_T/f_E 於甘油介質中之關係	100
圖 4-58	$L/h=5$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(空氣、真空)	102
圖 4-59	$L/h=5$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(水、真空)	103
圖 4-60	$L/h=5$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(甘油、真空)	103
圖 4-61	$L/h=5$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(空氣、真空)	

.....	104
圖 4-62 $L/h=5$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(水、真空)	104
.....	104
圖 4-63 $L/h=5$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(甘油、真空)	105
.....	105
圖 4-64 各尺寸模態階數與 f_T/f_E 於真空介質中之關係.....	108
圖 4-65 各尺寸模態階數與 f_T/f_E 於空氣介質中之關係.....	108
圖 4-66 各尺寸模態階數與 f_T/f_E 於水介質中之關係.....	109
圖 4-67 各尺寸模態階數與 f_T/f_E 於甘油介質中之關係.....	109
圖 4-68 各尺寸模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(空氣、 真空).....	110
圖 4-69 各尺寸模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(水、 真空).....	110
圖 4-70 各尺寸模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(甘油、 真空).....	111
圖 4-71 各尺寸模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(空氣、真空)	111
.....	111
圖 4-72 各尺寸模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(水、真空)	112
.....	112
圖 4-73 各尺寸模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(甘油、真空)	112
.....	112
圖 4-74 $L/h=10 \Delta m/m=10^{-4}$ 於空氣介質中之頻率偏移.....	116
圖 4-75 $L/h=10 \Delta m/m=10^{-4}$ 於水介質中之頻率偏移.....	116

圖 4-76	$L/h=10 \Delta m/m=10^{-4}$ 於甘油介質中之頻率偏移	117
圖 4-77	$L/h=16.67 \Delta m/m=10^{-4}$ 於空氣介質中之頻率偏移	117
圖 4-78	$L/h=16.67 \Delta m/m=10^{-4}$ 於水介質中之頻率偏移	118
圖 4-79	$L/h=16.67 \Delta m/m=10^{-4}$ 於甘油介質中之頻率偏移	118
圖 4-80	$L/h=30 \Delta m/m=10^{-4}$ 於空氣介質中之頻率偏移	119
圖 4-81	$L/h=30 \Delta m/m=10^{-4}$ 於水介質中之頻率偏移	119
圖 4-82	$L/h=30 \Delta m/m=10^{-4}$ 於甘油介質中之頻率偏移	120
圖 4-83	$L/h=10 \Delta m/m=10^{-2}$ 於空氣介質中之頻率偏移	120
圖 4-84	$L/h=10 \Delta m/m=10^{-2}$ 於水介質中之頻率偏移	121
圖 4-85	$L/h=10 \Delta m/m=10^{-2}$ 於甘油介質中之頻率偏移	121
圖 4-86	$L/h=16.67 \Delta m/m=10^{-2}$ 於空氣介質中之頻率偏移	122
圖 4-87	$L/h=16.67 \Delta m/m=10^{-2}$ 於水介質中之頻率偏移	122
圖 4-88	$L/h=16.67 \Delta m/m=10^{-2}$ 於甘油介質中之頻率偏移	123
圖 4-89	$L/h=30 \Delta m/m=10^{-2}$ 於空氣介質中之頻率偏移	123
圖 4-90	$L/h=30 \Delta m/m=10^{-2}$ 於水介質中之頻率偏移	124
圖 4-91	$L/h=30 \Delta m/m=10^{-2}$ 於甘油介質中之頻率偏移	124
圖 4-92	額外質量與頻率偏移於 Timoshenko 梁理論之關係	125
圖 4-93	額外質量與頻率偏移於 Euler 梁理論之關係	125
圖 4-94	$L/h=10 \Delta m/m=10^{-4}$ 模態階數與兩理論頻率偏移差值比例之關係	126
圖 4-95	$L/h=10 \Delta m/m=10^{-2}$ 模態階數與兩理論頻率偏移差值比例之關係	126

圖 4-96 $L/h=16.67 \Delta m/m=10^{-4}$ 模態階數與兩理論頻率偏移差值比例之關係	127
圖 4-97 $L/h=16.67 \Delta m/m=10^{-2}$ 模態階數與兩理論頻率偏移差值比例之關係	127
圖 4-98 $L/h=30 \Delta m/m=10^{-4}$ 模態階數與兩理論頻率偏移差值比例之關係....	128
圖 4-99 $L/h=30 \Delta m/m=10^{-2}$ 模態階數與兩理論頻率偏移差值比例之關係....	128
圖 4-100 $L/h=10 \Delta m/m=10^{-4}$ 於 Timoshenko 梁理論之頻率偏移	140
圖 4-101 $L/h=10 \Delta m/m=10^{-2}$ 於 Timoshenko 梁理論之頻率偏移	141
圖 4-102 $L/h=10 \Delta m/m=10^{-4}$ 於 Euler 梁理論之頻率偏移	141
圖 4-103 $L/h=10 \Delta m/m=10^{-2}$ 於 Euler 梁理論之頻率偏移	142
圖 4-104 $L/h=16.67 \Delta m/m=10^{-4}$ 於 Timoshenko 梁理論之頻率偏移	142
圖 4-105 $L/h=16.67 \Delta m/m=10^{-2}$ 於 Timoshenko 梁理論之頻率偏移	143
圖 4-106 $L/h=16.67 \Delta m/m=10^{-4}$ 於 Euler 梁理論之頻率偏移	143
圖 4-107 $L/h=16.67 \Delta m/m=10^{-2}$ 於 Euler 梁理論之頻率偏移	144
圖 4-108 $L/h=30 \Delta m/m=10^{-4}$ 於 Timoshenko 梁理論之頻率偏移.....	144
圖 4-109 $L/h=30 \Delta m/m=10^{-2}$ 於 Timoshenko 梁理論之頻率偏移.....	145
圖 4-110 $L/h=30 \Delta m/m=10^{-4}$ 於 Euler 梁理論之頻率偏移	145
圖 4-111 $L/h=30 \Delta m/m=10^{-2}$ 於 Euler 梁理論之頻率偏移	146
圖 4-112 $L/h=10 \Delta m/m=10^{-2}$ 與 $\Delta m/m=10^{-4}$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率偏移之影響(水、空氣).....	146

圖 4-113	$L/h=10$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 與 $\Delta m/m=10^{-4}$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率偏移之影響(甘油、空氣).....	147
圖 4-114	$L/h=10$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 與 $\Delta m/m=10^{-4}$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率偏移之影響(水、空氣).....	147
圖 4-115	$L/h=10$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 與 $\Delta m/m=10^{-4}$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率偏移之影響(甘油、空氣).....	148
圖 4-116	$L/h=16.67$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 與 $\Delta m/m=10^{-4}$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率偏移之影響(水、空氣).....	148
圖 4-117	$L/h=16.67$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 與 $\Delta m/m=10^{-4}$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率偏移之影響(甘油、空氣).....	149
圖 4-118	$L/h=16.67$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 與 $\Delta m/m=10^{-4}$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率偏移之影響(水、空氣).....	149
圖 4-119	$L/h=16.67$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 與 $\Delta m/m=10^{-4}$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率偏移之影響(甘油、空氣).....	150
圖 4-120	$L/h=30$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 與 $\Delta m/m=10^{-4}$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率偏移之影響(水、空氣).....	150
圖 4-121	$L/h=30$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 與 $\Delta m/m=10^{-4}$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率偏移之影響(甘油、空氣).....	151
圖 4-122	$L/h=30$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 與 $\Delta m/m=10^{-4}$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率偏移之影響(水、空氣).....	151
圖 4-123	$L/h=30$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 與 $\Delta m/m=10^{-4}$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率偏移之影響(甘油、空氣).....	152

圖 4-124 $L/h = 10 \Delta m/m = 10^{-6}$ 於 Timoshenko 梁理論之頻率偏移 159

圖 4-125 $L/h = 10 \Delta m/m = 10^{-6}$ 於 Euler 梁理論之頻率偏移 160

圖 4-126 $L/h = 16.67 \Delta m/m = 10^{-6}$ 於 Timoshenko 梁理論之頻率偏移 160

圖 4-127 $L/h = 16.67 \Delta m/m = 10^{-6}$ 於 Euler 梁理論之頻率偏移 161

圖 4-128 $L/h = 30 \Delta m/m = 10^{-6}$ 於 Timoshenko 梁理論之頻率偏移 161

圖 4-129 $L/h = 30 \Delta m/m = 10^{-6}$ 於 Euler 梁理論之頻率偏移 162



表目錄

表 3-1 多自由度梁邊界條件	18
表 3-2 梁邊界條件之模態形狀及其特徵值[23].....	19
表 4-1 梁靜態分析幾何材料參數表	32
表 4-2 梁靜態分析撓度結果	32
表 4-3 4-1-2 幾何材料參數表.....	34
表 4-4 $L=300\mu m, b=36\mu m$ 真空環境頻率比較(第一模態)	34
表 4-5 [24]直接求解數值結果(第一模態).....	36
表 4-6 4-1-3 幾何材料參數表.....	37
表 4-7 與[24]比較結果.....	37
表 4-8 理論驗證結構參數	39
表 4-9 與[13]理論驗證結果(空氣).....	40
表 4-10 與[13]理論驗證結果(水).....	41
表 4-11 頻率偏移驗證結構參數	43
表 4-12 頻率偏移驗證結果($h=1.1\mu m$).....	45
表 4-13 續表 4-12 頻率偏移驗證結果($h=1.1\mu m$)	46
表 4-14 頻率偏移驗證結果($h=4\mu m$).....	47
表 4-15 頻率偏移驗證結果($h=6.5\mu m$).....	48
表 4-16 剪切模數與頻率關係之結構流體參數	50
表 4-17 剪切模數 G 於各流體環境中之頻率(第一模態).....	55
表 4-18 剪切模數與流體環境對頻率之影響(第一模態).....	56
表 4-19 結構長度與厚度之比值與流體影響結構參數	58
表 4-20 L/h 於各流體環境中之頻率與 f_T/f_E 之比值(第一模態).....	61
表 4-21 續表 4-20 L/h 於各流體環境中之頻率與 f_T/f_E 之比值(第一模態).....	62

表 4-22	L/h 與流體環境於兩理論對頻率之影響	66
表 4-23	$L/h = 30$ 模態階數與流體環境對頻率影響之結構參數	68
表 4-24	$L/h = 30$ 各模態階數於各流體環境中之頻率與 f_T/f_E 之比值	71
表 4-25	續表 4-24 $L/h = 30$ 各模態階數於各流體環境中之頻率與 f_T/f_E 之比值	72
表 4-26	$L/h = 30$ 流體環境對各模態中頻率之影響	76
表 4-27	$L/h = 16.67$ 模態階數與流體環境對頻率影響之結構參數	78
表 4-28	$L/h = 16.67$ 各模態階數於各流體環境中之頻率與 f_T/f_E 之比值	81
表 4-29	續表 4-28 $L/h = 16.67$ 各模態階數於各流體環境中之頻率與 f_T/f_E 之比值	82
表 4-30	$L/h = 16.67$ 流體環境對各模態中頻率之影響	86
表 4-31	$L/h = 10$ 模態階數與流體環境對頻率影響之結構參數	88
表 4-32	$L/h = 10$ 各模態階數於各流體環境中之頻率與 f_T/f_E 之比值	91
表 4-33	續表 4-32 $L/h = 10$ 各模態階數於各流體環境中之頻率與 f_T/f_E 之比值	92
表 4-34	$L/h = 10$ 流體環境對各模態中頻率之影響	96
表 4-35	$L/h = 5$ 模態階數與流體環境對頻率影響之結構參數	98
表 4-36	$L/h = 5$ 各模態階數於各流體環境中之頻率與 f_T/f_E 之比值	101
表 4-37	續表 4-36 $L/h = 5$ 各模態階數於各流體環境中之頻率與 f_T/f_E 之比值	102
表 4-38	$L/h = 5$ 流體環境對各模態中頻率之影響	106
表 4-39	額外質量對頻率偏移影響之結構參數	115
表 4-40	$L/h = 10$ $\Delta m/m = 10^{-4}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏移與兩理論 差值比例 $\frac{\Delta f_E - \Delta f_T}{\Delta f_T}$	129
表 4-41	續表 4-40 $L/h = 10$ $\Delta m/m = 10^{-4}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏移	

與兩理論差值比例	$\frac{\Delta f_E - \Delta f_T}{\Delta f_T}$	130
表 4-42	$L/h=10 \Delta m/m=10^{-2}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏移與兩理論		
差值比例	$\frac{\Delta f_E - \Delta f_T}{\Delta f_T}$	131
表 4-43	續表 4-42 $L/h=10 \Delta m/m=10^{-2}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏移		
與兩理論差值比例	$\frac{\Delta f_E - \Delta f_T}{\Delta f_T}$	132
表 4-44	$L/h=16.67 \Delta m/m=10^{-4}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏移與兩理		
論差值比例	$\frac{\Delta f_E - \Delta f_T}{\Delta f_T}$	133
表 4-45	續表 4-44 $L/h=16.67 \Delta m/m=10^{-4}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏		
移與兩理論差值比例	$\frac{\Delta f_E - \Delta f_T}{\Delta f_T}$	134
表 4-46	$L/h=16.67 \Delta m/m=10^{-2}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏移與兩理		
論差值比例	$\frac{\Delta f_E - \Delta f_T}{\Delta f_T}$	135
表 4-47	續表 4-46 $L/h=16.67 \Delta m/m=10^{-2}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏		
移與兩理論差值比例	$\frac{\Delta f_E - \Delta f_T}{\Delta f_T}$	136
表 4-48	$L/h=30 \Delta m/m=10^{-4}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏移與兩理論		
差值比例	$\frac{\Delta f_E - \Delta f_T}{\Delta f_T}$	137
表 4-49	續表 4-48 $L/h=30 \Delta m/m=10^{-4}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏移		
與兩理論差值比例	$\frac{\Delta f_E - \Delta f_T}{\Delta f_T}$	138
表 4-50	$L/h=30 \Delta m/m=10^{-2}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏移與兩理論		
差值比例	$\frac{\Delta f_E - \Delta f_T}{\Delta f_T}$	139

表 4-51 續表 4-50 $L/h=30 \Delta m/m=10^{-2}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏移 與兩理論差值比例 $\frac{\Delta f_E - \Delta f_T}{\Delta f_T}$	140
表 4-52 $L/h=10 \Delta m/m=10^{-4}$ 流體環境對各模態中頻率偏移之影響	153
表 4-53 $L/h=10 \Delta m/m=10^{-2}$ 流體環境對各模態中頻率偏移之影響	154
表 4-54 $L/h=16.67 \Delta m/m=10^{-4}$ 流體環境對各模態中頻率偏移之影響	155
表 4-55 $L/h=16.67 \Delta m/m=10^{-2}$ 流體環境對各模態中頻率偏移之影響	156
表 4-56 $L/h=30 \Delta m/m=10^{-4}$ 流體環境對各模態中頻率偏移之影響	157
表 4-57 $L/h=30 \Delta m/m=10^{-2}$ 流體環境對各模態中頻率偏移之影響	158
表 4-58 $L/h=10 \Delta m/m=10^{-6}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏移	163
表 4-59 $L/h=16.67 \Delta m/m=10^{-6}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏移	164
表 4-60 $L/h=30 \Delta m/m=10^{-6}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏移	165

符號表

符號	名稱
$\Delta(\bullet)$	某物理量之變化量
$(\hat{\circ})$	某物理量之傅立葉轉換
\mathbf{u}	流體流速向量
u	x 方向流速
v	y 方向流速
$x、y、z$	直角座標系
t	時間
p	流體壓力
μ	流體黏滯係數
ω	渦度向量
w	渦度
ψ	流線函數
ω	頻率
q	共軛諧和壓力
C_b	流體內部(截面邊界)
C_{inf}	流體外部(無限遠邊界)
$\Omega、G、\Psi$	格林函數符號
K	修正第二階貝索函數
V	結構鉛直速度
P	正規化後流體壓力降

F_{hydro}	水力負載
Γ	水力函數
W	撓度
η	梁的長度中正規化後的位置
M	彎矩
S	剪力
f	梁受總外力
m	梁結構單位長度質量
ρ_s	梁結構密度
A	梁截面面積
E	楊氏係數
I	面積慣性矩
f_{drive}	驅動力
L	梁結構長度
ϕ_n	模態形狀
T	時間函數
λ_n	特徵值
H_n	頻率響應函數
Δm	額外質量
β	剪切角
φ	轉角
G	剪切模數
κ	面積修正因子



J	轉動慣量
$W_{timoshenko}$	Timoshenko 梁理論靜態撓度
W_{euler}	Euler 梁理論靜態撓度
b	梁結構寬度
h	梁結構厚度
f_T	Timoshenko 梁理論之頻率
f_E	Euler 梁理論之頻率
f_{vacuum}	梁結構於真空中的頻率
f_{air}	梁結構於空氣中的頻率
f_{water}	梁結構於水中的頻率
$f_{glycerin}$	梁結構於甘油中的頻率
Δf	頻率偏移



第一章 緒論

1-1 研究動機與目的

近年來，生物醫學感測器的發展已相當完善，並運用在各種環境下做檢測。其中微懸臂梁感測器(micro-cantilever sensor)是一重要的生醫感測元件。除了真空運作外，其餘情況運作環境皆為在流體之中，如空氣、水以及各種溶液等。但在流體環境下結構的振動易受到流體的影響，使得共振頻的量測品質(Q-factor)隨流體黏滯性及密度大量下降，即儀器敏銳度降低。

本文將以微懸臂梁感測器做為探討重點，一般使用微懸臂梁感測器量測時，皆是使用忽略剪切變形及轉動慣量影響的 Euler 梁理論做為其量測結果之估計值，但由於時常會在微懸臂梁上鍍金膜，使其自我組裝(self-assembly)結合分子而造成微懸臂梁撓曲，或是鍍上壓阻材料(piezo-resistive materials)，當微懸臂梁產生撓曲時，會造成壓阻材料電阻的變化，藉由電阻改變可得知微懸臂梁的撓曲量。這些都會使得微懸臂梁之截面厚度增加；或是因需求而必須以高模態量測時，這些情況都會使得 Euler 梁理論與實際情況產生一些差異。此時若以將剪切變形與轉動慣量皆有考慮的 Timoshenko 梁理論來做為數據分析的理論基礎，其估計值將會更符合實際情況。由於結構於流體中的振動易受流體的影響使得量測品質降低，文獻上已發現此影響在低模態下較為嚴重，高模態下則變得較不明顯。Timoshenko 梁於流體中振動受流體影響較少文獻提到，故本文目的為將 Euler 梁在流體中的振動，延伸至 Timoshenko 梁，建立 Timoshenko 梁於流體環境中振動理論，比較在不同流體中，低階至高階振頻的差異。另外亦比較兩種梁在額外附加微小質量時所產生的頻率偏移的差異。

1-2 文獻回顧

微懸臂梁感測器之應用的構想源自於原子力顯微鏡(atomic force microscope,AFM)。原子力顯微鏡探針是由微懸臂梁所構成，其原理是利用微小探針與樣本表面間的交互作用造成微懸臂梁彎曲，再將雷射光投射在微懸臂梁末端，量測雷射反射角度可得彎曲量，藉此描繪出樣本的表面輪廓。而微懸臂梁感測器便是利用此偵測撓曲的作用機制。

微懸臂梁感測器可分為兩個不同型態的檢測方法：靜態與動態[1]。將探測分子(receptor)結合於微懸臂梁上，當探測分子與另一待測的目標分子(analyte)結合後，使得懸臂梁表面應力改變，造成懸臂梁的撓曲。Berger et al.[2]在微懸臂梁上鍍金膜，金會與自我組裝(self-assembly)分子結合而造成微懸臂梁撓曲，從撓曲量可以判別分子結合的量，此為靜態的量測方法。於動態量測則是量測其共振頻率[3]，由於分子結合在微懸臂梁之數目會影響其共振頻率，所以可由共振頻率判別分子結合與否。此方法亦可做為質量感測器，將待測分子附著於微懸臂梁表面上，藉由共振頻率的變化，量測待測分子的微小質量[4][5]。

為了能夠有效計算各種流體下流固耦合的理論分析，使用了黏滯流體分析水力函數，再將水力函數耦合進結構的振動分析[6][7][8]。黏滯流體模型在 1969 年 Tuck[9]提出任意截面結構浸入黏滯流體，再將任意截面轉換為扁平梁邊界取得水力負載。1998 年 Sader[10]提出耦合進入結構的水力函數。

近年來，對於短梁的研究也越來越多。1996 年 D. A. Walters 等人[11]於原子力顯微鏡上以短梁做實驗，發現了以短梁做量測有其優點：對於熱效應產生的雜訊較少、由於結構尺寸較短，共振頻率較高的原因，靈敏度較高，對樣本表面也可施以較高的掃描速度。也有許多文獻是以 Timoshenko 模型對於微懸臂梁於原子力顯微鏡中在真空情況下振盪之理論分析。

在理論(含數值模擬)方面，2007 年，J. C. Hsu 等人[12]即以 Timoshenko 梁理論做為模型探討結構長度與厚度之比值對於梁自由端處有彈簧勁度作用之結構

的影響，以及彈簧勁度大小與 Timoshenko 梁頻率跟 Euler 梁頻率比值於第一至第五模態的關係。2009 年，H. L. Lee 等人[13]同樣以 Timoshenko 梁理論做為探討的模型，欲模擬原子力顯微鏡於流體中之行為，其中將流體黏滯性簡化為一阻尼係數於梁結構自由端，以代表流體行為，但將流體的質量忽略不計，最後比較第一至第四模態於有黏滯性環境下之 Timoshenko 梁頻率跟 Euler 梁頻率比值與不同彈簧勁度的關係。2010 年，Ali Sadeghi 等人[14]以 Timoshenko 梁理論探討兩段式錐形結構梁的振動行為，並比較彈簧勁度與非線性振動頻率跟線性振動頻率比值之關係。2010 年，Hassan Zohoor 等人[15]以 Timoshenko 梁理論探討三段式七首狀結構梁的振動行為，並表明增加結構厚度與提高模態數會使得結構較為靈敏。2012 年，Ali Sadeghi[16] 以 Timoshenko 梁理論探討 V 形梁結構梁的振動行為。

在實驗方面，2005 年，Søren Dohn 等人[17]以實驗量測一小金球於結構長度方向上不同位置於第一至第四模態共振頻，並輔以軟體模擬，最後指出用於質量感測器時，較高的模態可給予較高的靈敏度。同年(2005)，Frederic Lochon 等人[18]指出最為影響質量感測器中靈敏度的就是結構共振頻的大小，其數值(即頻率)越高則靈敏度就越高。提高量測時的運作頻率之方法有改變結構的勁度或讓量測處於高模態之下。但若將其結構長度縮短來提高運作頻率，則塗附在結構表面上的感測層相對困難，故提高頻率最為單純的方法就是提高模態。2007 年，Murali Krishna Ghatkesar 等人[19]量測微懸臂梁上塗附不同厚度的金屬之頻率，同樣也指出其靈敏度隨著模態階數的增加而增加。2008 年，Murali Krishna Ghatkesar 等人[20]將微懸臂梁置於流體環境中量測第一至第十六模態之共振頻。

本文與 2009 年[13]此篇的不同在於本文並無將流體質量忽略並且將流場行為實際以 Stokes 方程考慮與結構之耦合。即實際將流場行為考慮過後並與 Timoshenko 梁結構耦合。將之浸於空氣、水、甘油三種不同的流體介質中，分析其流固耦合系統於不同流體介質中各個模態之共振頻，並比較與 Euler 梁理論之差異；及額外質量對頻率偏移的影響。

1-3 論文架構

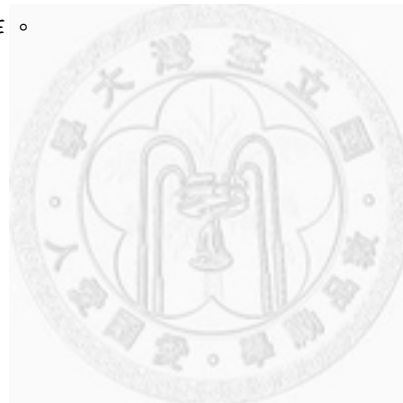
第一章：緒論，說明研究動機及目的，介紹目前研究背景及重要文獻。

第二章：黏滯流體水力函數的推導。

第三章：流固耦合的振動分析。將結構分為 Euler 梁及 Timoshenko 梁，分別介紹其結構振動模型，將水力函數耦合進結構內建立流固耦合系統，及額外質量對頻率偏移量的影響。

第四章：藉由物理行為及文獻中的數值數據與本文理論數值結果進行驗證。數值結果的呈現，以尺寸做為分類，分別探討於各尺寸之間兩理論的差異與流體對結構自然頻率的影響。

第五章：結論與未來工作。



第二章 黏滯流體水力函數

本章節探討結構浸入黏滯流體時，結構的固體力學會使得流速、壓力、密度、黏滯力等物理性質出現變化，而這些流場行為同樣會導致固體出現變形、慣性或消散等效應，對於這些行為可視為結構額外增加的一個負載，此負載稱做水力負載(hydrodynamic loading)。

一般在分析流固耦合的振動問題時，重點在於尋求流場統御方程式與固體統御方程式之間的相依關係，本文中首先會將結構的振動行為納入流場統御方程式中求解水力負載，待決定水力負載形式後在與結構振動統御方程式結合，描述流固耦合的振動行為。因此本文在分析過程中，決定流體控制方程，求解水力負載乃首要工作。

分為兩個部分，首先推導在黏滯流體下任意截面振動的勢流函數。其統御方程式主要由 Navier-Stokes' 方程開始，藉由格林函數(Green's function)求解，中間引入共軛諧和壓力(conjugate harmonic pressure)，增加額外所需的格林方程及轉換未知數，進而得到勢流函數。第二部分，將單梁任意截面轉為扁平梁，藉由邊界條件來獲得梁上的壓力分佈，最後得到水力函數。

2-1 黏滯流體下任意截面流固耦合

在此章節中，首先介紹無限長任意截面梁，在不可壓縮史托克流體(Stokes flow)中進行微小振動下流固耦合的情況。主要引用自 1969 年 Tuck[9]的理論，此理論使用格林函數處理線性化後的 Navier-Stokes' 方程，過程中使用柯西萊曼方程(Cauchy-Riemann function)將諧和函數壓力轉換成共軛諧和壓力，並藉此將四階流線方程拆解後，與物理性質做結合，即可求得任意等截面梁在史托克流體中的勢流方程。

在二維卡氏直角座標下，假設流體速度 $\mathbf{u} = u(x, y, t)\bar{i} + v(x, y, t)\bar{j}$ ，以及壓力 $p(x, y, t)$ ，並假設結構在黏滯流體中振動的振幅極小，則 Navier-Stokes 方程則可線性化後簡化為史托克方程(Stokes equation)

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.1.1)$$

其中 ρ 為流體密度， μ 為流體黏滯係數。

以及由質量守恆推導而出的流體連續方程，在不可壓縮流中可寫為

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1.2)$$

對(2.1.1)式中等號兩邊同取旋度， $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ ，可寫為

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \mu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (2.1.3)$$

藉由柯西萊曼方程，在不可壓縮流下的連續方程，可將流速以勢流方程改寫

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.1.4)$$

由於 $\boldsymbol{\omega}$ 為卡氏直角座標中 z 方向之渦度，由(2.1.4)之關係可寫為

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{z} = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \mathbf{z} = (-\nabla^2 \psi) \mathbf{z} = w \mathbf{z} \quad (2.1.5)$$

將之與(2.1.3)合併

$$\rho \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} = \mu \nabla^2 w(x, y, t) \quad (2.1.6)$$

再經由傅立葉轉換(Fourier transform)後，由時域轉換成頻率域

$$\nabla^2 w(x, y | \omega) = \alpha^2 w(x, y | \omega) \quad (2.1.7)$$

其中 $\alpha^2 = \frac{i\omega\rho}{\mu}$, $i = \sqrt{-1}$ ， ω 為角頻率。把(2.1.5)代入(2.1.7)，則可以得到在流

體中流線的統御方程式

$$\nabla^4 \psi(x, y | \omega) = \alpha^2 \nabla^2 \psi(x, y | \omega) \quad (2.1.8)$$

另一方面，對線性化後的史托克方程(2.1.1)等號兩邊同取散度，配合連續方程式(2.1.2)，並經由傅立葉轉換可得到壓力 p 為諧和函數(harmonic function)並滿

足拉普拉斯方程(Laplace equation)

$$\nabla^2 p(x, y | \omega) = 0 \quad (2.1.9)$$

如此一來，可將共軛諧和壓力 $q(x, y | \omega)$ 引入，且滿足拉普拉斯方程(2.1.10)，且同時必滿足柯西萊曼方程(2.1.11)。

$$\nabla^2 q(x, y | \omega) = 0 \quad (2.1.10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x} \quad (2.1.11)$$

由頻率域的史托克方程(2.1.1)，並配合柯西萊曼方程(2.1.11)，經由整理可將 q 以渦度 w 及勢流函數 ψ 表示，可得

$$q(x, y | \omega) = -\mu [w(x, y | \omega) + \alpha^2 \psi(x, y | \omega)] \quad (2.1.12)$$

如圖 2-1 所示，標示任意截面浸入流體的邊界條件。假設在無窮域外的流體速度趨近於零 $\mathbf{u} \rightarrow 0$ ，並假設其梁表面的流體流速與梁本身振動速度相同。其中 C_b 與 C_{inf} 分別表示流體內部(截面邊界)與外部(無限遠)的邊界，座標原點位於整個截面的中心。

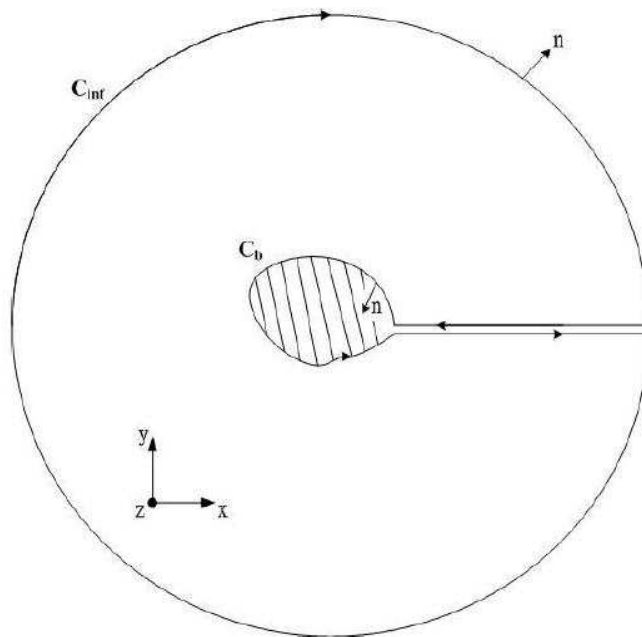


圖 2-1 梁任意截面及其邊界條件示意圖一[21]

接著利用格林函數(Green's function method)來求解(2.1.7)與(2.1.10)，分別令 $\Omega(x, y|x', y')$ 及 $G(x, y|x', y')$ 為(2.1.13)及(2.1.14)的解

$$\nabla^2 \Omega - \alpha^2 \Omega = \delta(x-x') \delta(y-y') \quad (2.1.13)$$

$$\nabla^2 G = \delta(x-x') \delta(y-y') \quad (2.1.14)$$

則可將 $w(x, y|\omega)$ 及 $q(x, y|\omega)$ 表示為

$$w(x, y|\omega) = \int_C \left[w(x', y'|\omega) \Omega_n(x, y|x', y') - w_n(x', y'|\omega) \Omega(x, y|x', y') \right] dl \quad (2.1.15)$$

$$q(x, y|\omega) = \int_C \left[q(x', y'|\omega) G_n(x, y|x', y') - q_n(x', y'|\omega) G(x, y|x', y') \right] dl \quad (2.1.16)$$

其中 (x, y) 表示流場中的位置， (x', y') 為梁截面邊界的位置，下標 n 表示對邊界 C 的法向量做偏微分，方向朝外， $\Omega(x, y|x', y')$ 與 $G(x, y|x', y')$ 皆為格林函數，並可分別求得為

$$\Omega(x, y|x', y') = -\frac{1}{2\pi} K_0(\alpha R) \quad (2.1.17)$$

$$G(x, y|x', y') = \frac{1}{2\pi} \ln R \quad (2.1.18)$$

其中 $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ ， K_0 為修正第二階貝索函數(modified Bessel function of the second kind)。將(2.1.12)代入(2.1.16)並配合(2.1.15)可得到完整的勢流方程

$$\begin{aligned} \psi(x, y|\omega) = & \int_C \left[\psi(x', y'|\omega) G_n(x, y|x', y') - \psi_n(x', y'|\omega) G(x, y|x', y') \right] dl \\ & - \int_C \left[w(x', y'|\omega) \Psi_n(x, y|x', y') - w_n(x', y'|\omega) \Psi(x, y|x', y') \right] dl \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

其中

$$\begin{aligned} \Psi(x, y|x', y') &= \frac{1}{\alpha^2} \left[\Omega(x, y|x', y') - G(x, y|x', y') \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha^2} \left[\ln R + K_0(\alpha R) \right] \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

(2.1.20)恰為吻合(2.1.8)之格林函數。配合圖 2-2，可知(2.1.19)中 ψ 及 ψ_n 為已知，但 w 與 w_n 於截面邊界上為未知。為了將未知數以有效的物理量表示，配合(2.1.11)及(2.1.12)把 w_n 以壓力代換

$$\begin{aligned} w_n &= -\alpha^2 \psi_n - \frac{1}{\mu} q_n \\ &= -\alpha^2 \psi_n - \frac{1}{\mu} p_l \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

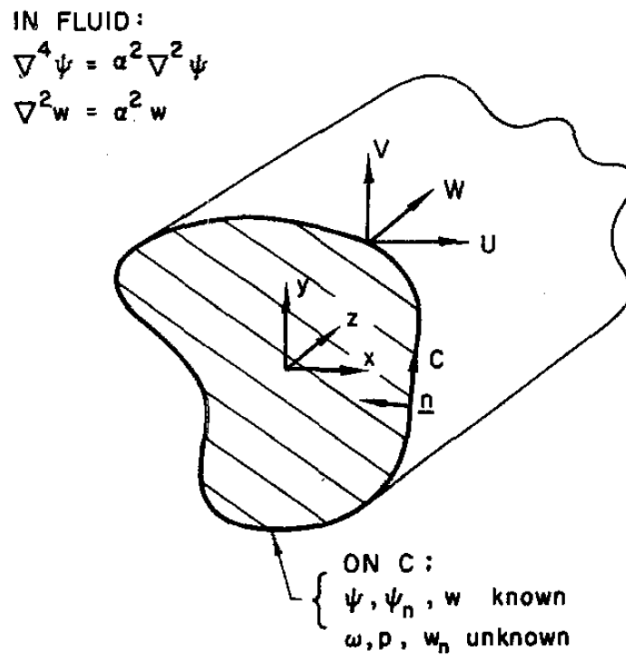


圖 2-2 梁任意截面及其邊界條件示意圖二[9]

其中 $p_l = \frac{\partial p}{\partial l} = \frac{\partial q}{\partial n}$ 為壓力在邊界 C 上對切線方向的微分，將(2.1.21)代入(2.1.19)，由分部積分，及假設邊界上之壓力為連續，可將(2.1.19)改寫成

$$\begin{aligned} \psi(x, y | \omega) &= \int_C \left[\psi(x', y' | \omega) G_n(x, y | x', y') - \psi_n(x', y' | \omega) \Omega(x, y | x', y') \right] dl \\ &\quad - \int_C \left[w(x', y' | \omega) \Psi_n(x, y | x', y') - \frac{1}{\mu} p(x', y' | \omega) \Psi_l(x, y | x', y') \right] dl \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

此為在黏滯流體下之任意等截面梁振動完整勢流函數。

2-2 黏滯流體下扁平梁的水力負載

在此節，將上一節所得到的任意截面梁振動之勢流函數由任意截面梁邊界轉換為扁平梁邊界，並假設此梁極薄，如圖 2-3 所示。

由(2.1.22)觀察可以得知勢流函數 $\psi(x, y | \omega)$ 僅僅只受封閉曲線 C 上之渦度 w 及壓力 p 影響，由於在流體無限遠處之區段 C_{inf} 的流速為零，並因壓力亦為連續，對本文所要探討的梁截面邊界無影響，故後續的推導皆僅考慮截面邊界線段 C_b 。

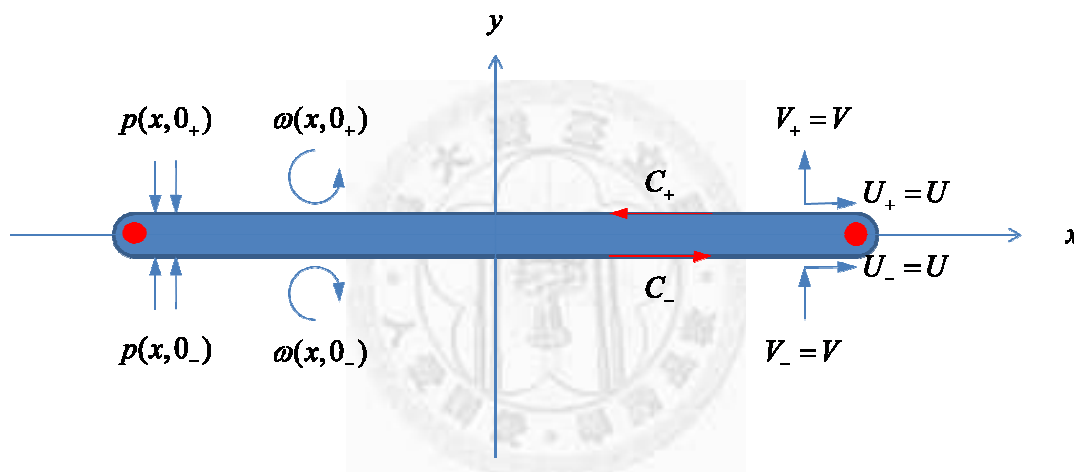


圖 2-3 扁平梁上下邊界條件[22]

考慮扁平梁為剛體，上下邊界無相對移動，在微小振動下，假設流速與結構振動速度相同。由於壓力 p 與渦度 w 在梁的上下不連續，則對流線函數的線積分方程(2.1.22)可簡化為

$$\begin{aligned} \psi(x, y | \omega) = & \int_{C_-} [\Delta w(x', y' | \omega) \Psi_n(x, y | x', y')] dl \\ & - \int_{C_+} \left[\frac{1}{\mu} \Delta p(x', y' | \omega) \Psi_l(x, y | x', y') \right] dl \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

其中 $\Delta w = w|_{C_+} - w|_{C_-}$ ， $\Delta p = p|_{C_+} - p|_{C_-}$ 分別為梁上下的渦度差與壓力差。將

邊界 C 的法向量與切線向量與直角座標做轉換， $dl = dx$ ， $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial y}$ 。且假設薄梁

寬度為 $(-b, 0) \rightarrow (b, 0)$ ，可將(2.2.1)式改寫為

$$\begin{aligned} \psi(x, y | \omega) = & \int_{-b}^b [\Delta w(x' | \omega) \Psi_{y'}(x, y | x', 0)] dx' \\ & - \int_{-b}^b \left[\frac{1}{\mu} \Delta p(x' | \omega) \Psi_{x'}(x, y | x', 0) \right] dx' \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

由(2.1.20)式可以得知，在 $y=0$ 的位置時 $\Psi_{y'}(x, 0 | x', 0) = 0$ ，即可將(2.2.2)

化簡為

$$\psi(x, 0 | \omega) = - \int_{-b}^b \left[\frac{1}{\mu} \Delta p(x' | \omega) \Psi_{x'}(x, 0 | x', 0) \right] dx' \quad (2.2.3)$$

本文所探討的振動是指沿著 y 軸方向的垂直上下振動，因此只著重於 y 方向的流速，不考慮 x 方向的水平流速。由(2.1.4)可以得知 y 方向的流速為

$$V(x) = -\psi_x(x, 0 | \omega) = \int_{-b}^b \left[\frac{1}{\mu} \Delta p(x' | \omega) \Psi_{x'x}(x, 0 | x', 0) \right] dx' \quad (2.2.4)$$

整理後可改寫為

$$\mu V(x) = \int_{-b}^b [\Delta p(x' | \omega) L(\alpha|x'-x|)] dx' \quad (2.2.5)$$

其中 $L(\alpha|x'-x|) = \Psi_{x'x}$ 為核心函數(kernel function)，其形式為

$$L(z) = \frac{1}{2\pi} \frac{d^2}{dz^2} [\ln z + K_0(z)] \quad (2.2.6)$$

為了之後做數值計算的方便性，令一個無因次化參數 $\xi = \frac{x}{b}$ 及 y 方向垂直振

動速度 $V(x) = V_0 = \text{const.}$ 。經由整理後可得

$$\int_{-1}^1 \left[P(\xi' | \omega) L\left(\sqrt{\frac{i\rho\omega b^2}{\mu}} |\xi' - \xi|\right) \right] d\xi' = 1 \quad (2.2.7)$$

其中正規化後的壓力降 $P(\xi' | \omega) = \frac{b\Delta p(x' | \omega)}{\mu V_0}$ ，可將上式視為兩函數相乘，

離散化後，一半為可解析部分，壓力降部分則為未知，將可解析部分做反矩陣運算即可求得流體在各個區間施加在扁平梁上的壓力。

$$\sum_{j=0}^{N-1} P_j(\xi' | \omega) \int_{\xi'_j}^{\xi'_{j+1}} L \left(\sqrt{\frac{i\rho\omega b^2}{\mu}} |\xi' - \xi| \right) d\xi' = 1 \quad (2.2.8)$$

由於在數值計算上會出現三個奇異點，分別為

1. $\xi = \xi'$ 時。
2. 位於梁寬度兩端 $\xi = \pm 1$ 的壓力值。
3. 當 $\frac{\rho\omega b^2}{\mu}$ 值太高時，整個積分式會連帶未知壓力一起快速衰退至 0。

其中解決方式分別為

1. 令 $\xi_k = \frac{1}{2}(\xi'_k + \xi'_{k+1})$ 。
2. 使得區間不均等，可設為 $\xi'_j = -\cos \frac{\pi j}{N}$, $j=1, 2, \dots, N$ 。
3. 藉由增加區間來達到需要的數值解，即為加大 N 值。

如此就可以將(2.2.8)寫成矩陣形式。

$$\sum_{j=0}^{N-1} P_j A_{kj} = 1, \quad k=0, 1, \dots, N-1 \quad (2.2.9)$$

其中

$$\begin{aligned} A_{kj} &= \int_{\xi'_j}^{\xi'_{j+1}} L \left(\sqrt{\frac{i\rho\omega b^2}{\mu}} |\xi' - \xi_k| \right) d\xi' \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[F(\mu, \rho, \omega, b, \xi'_{j+1}, \xi_k) - F(\mu, \rho, \omega, b, \xi'_j, \xi_k) \right] \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

以及

$$\begin{aligned} &F(\mu, \rho, \omega, b, \xi'_j, \xi_k) \\ &= \frac{i\mu}{\rho\omega b^2} \left[\frac{1}{\xi'_j - \xi_k} + \operatorname{sgn}(\xi'_j - \xi_k) i \sqrt{i \frac{\rho\omega b^2}{\mu}} K_1 \left(-i |\xi'_j - \xi_k| \sqrt{i \frac{\rho\omega b^2}{\mu}} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

如此一來壓力降 $P(\xi' | \omega)$ 就可以藉由將 $[A]$ 進行反矩陣得到

$$\begin{aligned} [\mathbf{V}]_{1 \times N}^T &= [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]_{1 \times N}^T \\ &= [\mathbf{A}]_{N \times N} [\mathbf{P}]_{1 \times N}^T \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

$$[\mathbf{P}]^T = [\mathbf{A}]^{-1} [\mathbf{V}]^T \quad (2.2.13)$$

同時也意味著，當梁浸入黏滯流振動時，流體對梁振動造成影響的水力負載 (hydrodynamic loading) F_{hydro} 也可以藉著將施加在梁上的壓力沿著 x 方向與梁接觸的範圍做積分而得到。

$$\hat{f}_{hydro}(\eta | \omega) = \mu V_0 \int_{-1}^1 P(\xi' | \omega) d\xi' = \rho \pi b^2 \omega^2 \Gamma(\mu, \rho, \omega, b, \xi'_j, \xi_k) \hat{W}(\eta | \omega) \quad (2.2.14)$$

其中 $W(\eta | \omega)$ 為在頻率域中，正規化後之梁的撓度， η 為沿著梁的長度中正規化的位置。 $\Gamma(\mu, \rho, \omega, b, \xi'_j, \xi_k)$ 為水力函數(hydrodynamic function)。

$$\Gamma(\mu, \rho, \omega, b, \xi'_j, \xi_k) = \frac{i\mu}{\omega \rho \pi b^2} \int_{-1}^1 P(\xi' | \omega) d\xi' \approx \frac{i\mu}{\omega \rho \pi b^2} \sum_{j=0}^{N-1} P_j(\xi' | \omega) (\xi_{j+1} - \xi_j) \quad (2.2.15)$$

第三章 流固耦合系統振動分析

前一章主要介紹流體效應所造成的水力負載，本章節將結合水力負載與固體結構振動行為，分析流固耦合系統的振動行為。梁理論主要可藉由考慮轉動慣量及剪切變形與否分為三大類：Euler 梁理論(Euler-Bernoulli Beam Theory)、Rayleigh 梁理論(Rayleigh Beam Theory)、Timoshenko 梁理論(Timoshenko Beam Theory)。其中 Euler 梁理論是最為單純也被廣為使用的簡單梁理論，不考慮轉動慣量與剪切變形，適用於梁的長度與截面高度比 10 以上。Timoshenko 梁理論則是將轉動慣量與剪切變形的影響皆考慮進去，與簡單梁理論相比較為精確。Rayleigh 梁理論只考慮轉動慣量，不在本文的探討範圍內。

本章節內容分為兩大部分：Euler 梁理論與 Timoshenko 梁理論。分別確立梁結構的振動控制方程式，引入水力負載藉由模態形狀推導而得頻率響應函數，再延伸至額外質量附加在梁上之影響。

3-1 Euler 梁

結構長度遠大於截面高度的細長梁，稱之為 Euler 梁理論。此幾何形狀廣泛出現在各種微電子元件中，如微懸臂梁感測器，原子力顯微鏡(Atomic force microscopy)的懸臂探針等機構。但因使用情況的不同，如：在梁面上鍍上一層鈦、金等材質，使厚度變厚、高模態測量時等情況，使得剪切變形影響愈大，Euler 梁理論將不再適用，為了能夠有效的比較 Euler 梁理論與 Timoshenko 梁理論之差異，首先將先介紹 Euler 梁理論 在水中的振動分析。

3-1-1 結構統御方程式

以細長梁幾何進行探討，由於其剪切變形及轉動慣量影響較小，故皆可將其忽略。其理論假設必須為小變形、斷面變形前後保持平面、忽略由剪力所造成的影響。

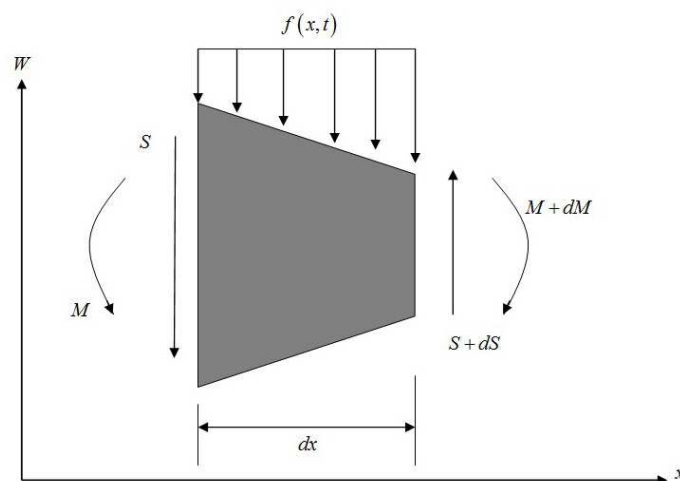


圖 3-1 Euler 梁元素自由體圖

考慮梁上長度為 dx 的自由體圖，如圖 3-1 所示。

其中 W 為梁撓度(deflection)

M 為彎矩(bending moment)

S 為剪力(shearing force)

$f(x,t)$ 則表示每單位長度上梁所受的外力

於動態情況下，梁元素慣性力為 $m(x)dx \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ ，由垂直方向靜力平衡可得

$$S - \left(S + \frac{\partial S}{\partial x} dx \right) + f(x,t) dx = m(x) dx \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.1.1)$$

由於忽略轉動慣量的影響，對右截面上任一點取力矩平衡可得

$$\left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) - M - S dx - f(x,t) dx \frac{dx}{2} = 0 \quad (3.1.2)$$

其中 $m(x) = \rho_s(x)A(x)$ 為梁結構單位長度質量

$\rho_s(x)$ 為梁密度

$A(x)$ 為梁截面面積

當所取元素相當微小，故 dx 二次方項可予以忽略，因此將(3.1.1)與(3.1.2)整理為

$$-\frac{\partial S}{\partial x} + f(x,t) = m(x) \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.1.3)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = S \quad (3.1.4)$$

將(3.1.4)剪力、彎矩關係代入(3.1.3)中

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + f(x,t) = m(x) \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.1.5)$$

根據材料力學中，Euler-Bernoulli 梁理論，可知彎矩與撓度關係為

$$M = EI(x) \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \quad (3.1.6)$$

其中 E 為楊氏係數(Young's modulus)

I 為梁截面的面積慣性矩(moment of inertia)

藉由將(3.1.6)代回(3.1.5)中，可得動態非均勻截面梁受外力之運動方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \quad (3.1.7)$$

由於本文考慮的是均勻梁，故面積 A 、面積慣性矩 I 與梁密度 ρ_s 皆為常數，單位長度質量 m 亦為常數，而梁結構上所受到的外力作用 f 包含了均勻施加在梁結構上驅使系統產生振動行為的驅動力 f_{drive} ，以及流體環境對於結構產生的水力負載 f_{hydro} 。因此可將(3.1.7)改寫成為

$$EI \frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} = f_{drive}(x,t) + f_{hydro}(x,t) \quad (3.1.8)$$

(3.1.8)即為梁結構受驅動力與流體負載作用的振動統御方程式。

3-1-2 模態形狀之求得

在模態分析中，通常使用結構自由振動下的自然模態，而自然模態的求得可從振動統御方程式中計算找出，首先考慮無外力作用的梁振動統御方程式

$$EI \frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1.9)$$

取 $\eta = \frac{x}{L}$ ，將軸向位移正規化

$$\frac{EI}{L^4} \frac{\partial^4 W(\eta,t)}{\partial \eta^4} + m \frac{\partial^2 W(\eta,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1.10)$$

此為一個四階偏微分方程，利用分離變數法來拆解撓度 W ，以位置函數及時間函數拆解。假設(3.1.10)的解為

$$W(\eta,t) = \phi(\eta)T(t) \quad (3.1.11)$$

其中 $\phi(\eta)$ 為模態形狀、 $T(t)$ 為時間函數，將(3.1.11)代回(3.1.10)整理可得

$$\frac{EI}{mL^4} \frac{1}{\phi(\eta)} \frac{d^4 \phi(\eta)}{d\eta^4} = -\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \omega^2 \quad (3.1.12)$$

(3.1.12)可整理為兩條常微分方程式

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (3.1.13)$$

$$\frac{d^4 \phi(\eta)}{d\eta^4} - \lambda^4 \phi(\eta) = 0 \quad (3.1.14)$$

其中特徵值 λ 定義為

$$\lambda^4 = \frac{\omega^2 mL}{EI} \quad (3.1.15)$$

(3.1.13)的通解為

$$T(t) = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t \quad (3.1.16)$$

(3.1.14)為一四階常係數線性微分方程，其特徵值問題解為

$$\phi(\eta) = c_3 \cos \lambda \eta + c_4 \sin \lambda \eta + c_5 \cosh \lambda \eta + c_6 \sinh \lambda \eta \quad (3.1.17)$$

其中 c_3 、 c_4 、 c_5 、 c_6 為待求解的未知數。根據梁的邊界拘束可決定邊界條件，如自由端(free)、簡支端(pinned)、固定端(clamped)、滑動端(sliding)等各種不同情況，而梁的兩端各有兩個邊界條件可以求解這四個未知數，為了求出非零解(nontrivial solution)，因此可整理成一條決定無限多組離散化特徵值 λ_n 的特徵方程式，每一個特徵值(eigenvalue)會對應一個特徵向量(eigenvector)，此特徵向量即為各個模態的模態形狀(mode shape) $\phi_n(\eta)$ ，而此特徵值也對應一個自然頻率，可寫為

$$\omega_n = \frac{\lambda_n^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (3.1.18)$$

關於梁的邊界，主要條件有梁的撓度(deflection)、扭轉角(bending angle)、彎矩(bending moment)及剪力(shearing force)，以上物理量皆可用撓度來表示， $W(\eta)$ 、 $W'(\eta)$ 、 $EIW''(\eta)$ 、 $EIW'''(\eta)$ ，主要邊界條件如表 3-1 所示。

表 3-1 多自由度梁邊界條件

自由端(free end)	$EI \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = 0$	$EI \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} = 0$
簡支端(pinned)	$W = 0$	$EI \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = 0$
固定端(clamped)	$W = 0$	$\frac{\partial W}{\partial \eta} = 0$
滑動端(sliding)	$\frac{\partial W}{\partial \eta} = 0$	$EI \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} = 0$

由各種不同的邊界條件而得到不同的特徵方程式，進而可以得到不同的特徵值及特徵向量，即為在不同邊界下的模態形狀。表 3-2 列出幾種邊界條件下之特徵方程式和模態形狀。

表 3-2 梁邊界條件之模態形狀及其特徵值[23]

Boundary condition	Characteristic equation	Mode shape	Eigenvalue
Free-Free	$\cos \lambda_n \cosh \lambda_n = 1$	$\cosh(\lambda_n \eta) + \cos(\lambda_n \eta) - \sigma_n [\sinh(\lambda_n \eta) + \sin(\lambda_n \eta)]$ $\sigma_n = \frac{\cosh \lambda_n - \cos \lambda_n}{\sinh \lambda_n - \sin \lambda_n}$	$\lambda_1 = 4.73004074$ $\lambda_2 = 7.85320462$ $\lambda_3 = 10.9956078$ $\lambda_4 = 14.1371655$
Clamped-Free	$\cos \lambda_n \cosh \lambda_n + 1 = 0$	$\cosh(\lambda_n \eta) - \cos(\lambda_n \eta) - \sigma_n [\sinh(\lambda_n \eta) - \sin(\lambda_n \eta)]$ $\sigma_n = \frac{\sinh \lambda_n - \sin \lambda_n}{\cosh \lambda_n + \cos \lambda_n}$	$\lambda_1 = 1.87510407$ $\lambda_2 = 4.69409113$ $\lambda_3 = 7.85475744$ $\lambda_4 = 10.99554073$
Free-Pinned	$\tan \lambda_n = \tanh \lambda_n$	$\cosh(\lambda_n \eta) + \cos(\lambda_n \eta) - \sigma_n [\sinh(\lambda_n \eta) + \sin(\lambda_n \eta)]$ $\sigma_n = \frac{\cosh \lambda_n - \cos \lambda_n}{\sinh \lambda_n - \sin \lambda_n}$	$\lambda_1 = 3.92660231$ $\lambda_2 = 7.06858275$ $\lambda_3 = 10.21017612$ $\lambda_4 = 13.35176878$
Pinned-Pinned	$\sin \lambda_n = 0$	$\sin(\lambda_n \eta)$	$\lambda_1 = \pi$ $\lambda_2 = 2\pi$ $\lambda_3 = 3\pi$ $\lambda_4 = 4\pi$
Clamped-Sliding	$\tan \lambda_n + \tanh \lambda_n = 0$	$\cosh(\lambda_n \eta) - \cos(\lambda_n \eta) - \sigma_n [\sinh(\lambda_n \eta) - \sin(\lambda_n \eta)]$ $\sigma_n = \frac{\sinh \lambda_n - \sin \lambda_n}{\cosh \lambda_n + \cos \lambda_n}$	$\lambda_1 = 2.36502037$ $\lambda_2 = 5.49780392$ $\lambda_3 = 8.63937983$ $\lambda_4 = 11.78097245$

於本文所探討的感測器及 AFM 中皆是使用微懸臂梁，因此在此僅討論懸臂梁的邊界條件及其模態形狀

$$W(0,t)=0, \quad \frac{\partial W(0,t)}{\partial \eta}=0, \quad \frac{\partial^2 W(1,t)}{\partial \eta^2}=0, \quad \frac{\partial^3 W(1,t)}{\partial \eta^3}=0 \quad (3.1.19)$$

(3.1.19)為懸臂梁之邊界條件，首兩項為在固定端時撓度及轉角等於零 $\eta=0$ ，後兩項為彎矩及剪力在自由端時等於零 $\eta=1$ 。其振型為

$$\phi_n(\eta) = \left[\cosh(\lambda_n \eta) - \cos(\lambda_n \eta) \right] - \frac{\sinh \lambda_n - \sin \lambda_n}{\cosh \lambda_n + \cos \lambda_n} \left[\sinh(\lambda_n \eta) - \sin(\lambda_n \eta) \right] \quad (3.1.20)$$

$$\lambda_1 = 1.8751, \quad \lambda_2 = 4.6941, \quad \lambda_3 = 7.8548, \quad \lambda_4 = 10.996 \dots\dots$$

此邊界條件與振型為之後討論所用。

3-1-3 流體中頻率響應及額外質量的影響

由(3.1.8)，時域的 Euler 梁振動統御方程

$$EI \frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} = f_{drive}(x,t) + f_{hydro}(x,t) \quad (3.1.8)$$

將(3.1.8)取 $\eta = \frac{x}{L}$ ，並由傅立葉轉換將時域轉換為頻率域，可得

$$\frac{EI}{L^4} \frac{d^4 \hat{W}(\eta|\omega)}{d\eta^4} - \omega^2 m \hat{W}(\eta|\omega) = \hat{f}_{drive}(\eta|\omega) + \hat{f}_{hydro}(\eta|\omega) \quad (3.1.21)$$

其邊界條件為

$$\hat{W}(0|\omega) = 0, \quad \frac{d\hat{W}(0|\omega)}{d\eta} = 0, \quad \frac{d^2 \hat{W}(1|\omega)}{d\eta^2} = 0, \quad \frac{d^3 \hat{W}(1|\omega)}{d\eta^3} = 0 \quad (3.1.22)$$

由第二章所推導而出的水力負載 $\hat{f}_{hydro}(\eta|\omega)$

$$\hat{f}_{hydro}(\eta|\omega) = \rho \pi b^2 \omega^2 \Gamma(\mu, \rho, \omega, b, \xi_j, \xi_k) \hat{W}(\eta|\omega) \quad (2.2.14)$$

代入(3.1.21)整理後可得

$$\frac{EI}{L^4} \frac{d^4 \hat{W}(\eta | \omega)}{d\eta^4} - \omega^2 [m + \rho\pi b^2 \Gamma] \hat{W}(\eta | \omega) = \hat{f}_{drive}(\eta | \omega) \quad (3.1.23)$$

由模態疊加原理可知，撓度可視為模態振型及模態座標向量的疊加。由懸臂梁邊界條件(3.1.22)可知其模態振型為(3.1.20)，並以此正交函數做為基底

$$\hat{W}(\eta | \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(\eta) H_n(\omega) \quad (3.1.24)$$

將(3.1.24)代入(3.1.23)，並利用模態正交性

$$\begin{aligned} & \frac{EI}{L^4} \frac{d^4 \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(\eta)}{d\eta^4} H_n(\omega) - \omega^2 [m + \rho\pi b^2 \Gamma] \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(\eta) H_n(\omega) = \hat{f}_{drive}(\eta | \omega) \\ & \left[\frac{EI}{L^4} \frac{d^4 \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(\eta)}{d\eta^4} \phi_m(\eta) - \omega^2 [m + \rho\pi b^2 \Gamma] \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(\eta) \phi_m(\eta) \right] H_n(\omega) = \hat{f}_{drive}(\eta | \omega) \phi_m(\eta) \\ & \left[\frac{EI}{L^4} \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^4 \phi_n(\eta)}{d\eta^4} \phi_m(\eta) d\eta - \omega^2 [m + \rho\pi b^2 \Gamma] \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(\eta) \phi_m(\eta) d\eta \right] H_n(\omega) \\ & \qquad \qquad \qquad = \int_0^1 \hat{f}_{drive}(\eta | \omega) \phi_m(\eta) d\eta \\ & \left[\frac{EI}{L^4} \lambda_n^4 - \omega^2 [m + \rho\pi b^2 \Gamma] \right] H_n(\omega) = \hat{f}_{drive,n}(\eta | \omega) \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

其中，當 $n = m$ [23]

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{d^4 \phi_n(\eta)}{d\eta^4} \phi_n(\eta) d\eta &= \lambda_n^4 \\ \int_0^1 [\phi_n(\eta)]^2 d\eta &= 1 \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

$n \neq m$ 時

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{d^4 \phi_n(\eta)}{d\eta^4} \phi_m(\eta) d\eta &= 0 \\ \int_0^1 \phi_n(\eta) \phi_m(\eta) d\eta &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

將(3.1.25)移項整理後可得到頻率響應函數

$$H_n(\omega) = \frac{\hat{f}_{drive,n}(\eta | \omega)}{\frac{EI}{L^4} \lambda_n^4 - \omega^2 [m + \rho\pi b^2 \Gamma]} \quad (3.1.28)$$

(3.1.28)式即為懸臂梁在不可壓縮黏滯流體中振動的頻率響應函數，用掃頻的方式，即將頻率一個個代入水力函數及(3.1.28)式中，可以找到相對於各個頻率的分子最小值，亦為 $H_n(\omega)$ 的相對最大值。此時的頻率即為結構浸入流體中的自然共振頻。

在感測器量測中，常常將負載物置於梁面上端，藉由頻率的改變進而得知載重物的質量。因此在本文中也做了相關的討論。

本文探討為質量均勻分佈在梁面上，於自由體圖中，可視為在一小段單位長度質量上附加額外質量 Δm ，其統御方程式為

$$EI \frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^4} + (m + \Delta m) \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} = f_{drive}(x,t) + f_{hydro}(x,t) \quad (3.1.29)$$

由 $\eta = \frac{x}{L}$ 將軸向位移正規化、傅立葉轉換及代入水力負載後可得

$$\frac{EI}{L^4} \frac{d^4 \hat{W}(\eta|\omega)}{d\eta^4} - \omega^2 [(m + \Delta m) + \rho\pi b^2 \Gamma] \hat{W}(\eta|\omega) = \hat{f}_{drive}(\eta|\omega) \quad (3.1.30)$$

由模態正交性推導整理可得受額外質量影響的頻率響應函數

$$H_n(\omega) = \frac{\hat{f}_{drive,n}(\eta|\omega)}{\frac{EI}{L^4} \lambda_n^4 - \omega^2 [(m + \Delta m) + \rho\pi b^2 \Gamma]} \quad (3.1.31)$$

3-2 Timoshenko 梁

由於 Euler 梁理論只適用於結構細長的情況下，當梁截面高度越厚導致結構長度與厚度的比值越小，或是於高模態量測時，剪切變形的效應將會慢慢出現，Euler 梁理論將不再適用，此時量測的預期值將由 Timoshenko 梁理論來估算。此節將介紹 Timoshenko 在流體中的振動分析。

3-2-1 結構統御方程式

考慮一小段長 dx 微元素之自由體圖，如圖 3-2 所示。

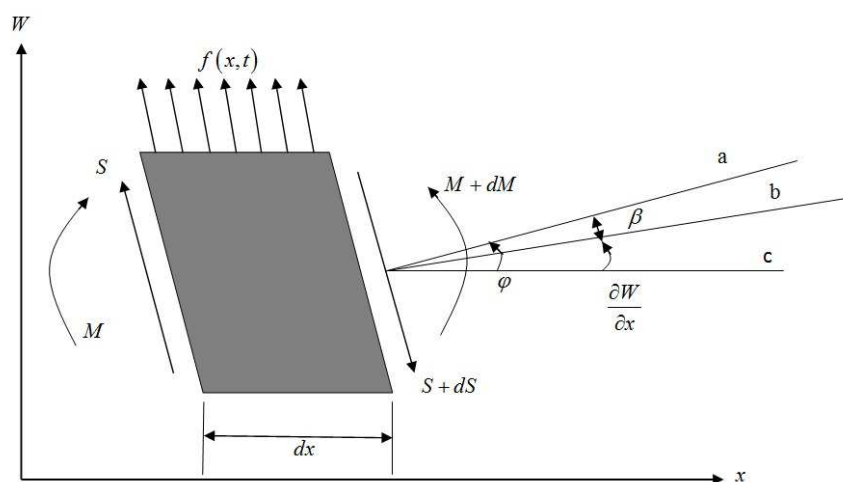


圖 3-2 Timoshenko 梁元素自由體圖

其中 W 為梁撓度(deflection)

M 為彎矩(bending moment)

S 為剪力(shearing force)

$f(x, t)$ 則表示每單位長度上梁所受的外力

線 a 為截面法線

線 b 為梁軸線之切線

線 c 為水平線

圖上已經考慮了微元素的轉動與剪切變形，當忽略剪切變形時，截面法線將會與梁軸線的切線重合。由彎矩 M 引起的截面轉角為 φ ，由於剪力 S 的作用，微元素變成平行四邊形單元，其剪切角 (shear angle) 為 β ， $\frac{\partial W}{\partial x}$ 為彎矩 M 及剪力 S 共同作用引起的梁軸線的實際轉角。

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \varphi - \beta \quad (3.2.1)$$

β 為剪切角 (shear angle)，由材料力學可知

$$\beta = \frac{S}{\kappa A(x)G} \quad (3.2.2)$$

其中， $A(x)$ 為梁截面面積

G 為剪切模數 (shear modulus)

由於在變形的過程中，截面將不會再維持平面，而會以二次曲面的方式呈現，因而需要有一截面修正因子 κ 來做修正。

截面為矩形與圓形的 κ ，分別為 $\frac{2}{3}$ 與 $\frac{3}{4}$ 。[7]

於動態情況下，梁元素慣性力為 $m(x)dx \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ ，考慮垂直方向靜力平衡可得

$$S - \left(S + \frac{\partial S}{\partial x} dx \right) + f(x,t) dx = m(x) dx \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.2.3)$$

由於 Timoshenko 理論中將轉動慣量也考慮進去，對微元素取力矩平衡可得

$$\left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) - M - S dx - f(x,t) dx \frac{dx}{2} = J(x) dx \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.2.4)$$

其中 $m(x) = \rho_s(x) A(x)$ 為梁結構單位長度質量

$\rho_s(x)$ 為梁密度

$A(x)$ 為梁截面面積

$J(x) = \rho_s(x)I(x)$ 為單位長度的梁對截面中性軸的轉動慣量

$I(x)$ 為梁截面的面積慣性矩(moment of inertia)

同 Euler 梁理論，由於所取元素相當微小，故 dx 二次方項可予以忽略，因此可將(3.2.3)與(3.2.4)整理為

$$-\frac{\partial S}{\partial x} + f(x,t) = m(x) \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.2.5)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - S = J(x) \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.2.6)$$

將(3.2.1)及(3.2.2)代入(3.2.5)與(3.2.6)中，可得

$$m(x) \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\kappa A(x) G \left(\varphi(x,t) - \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \right) \right] - f(x,t) = 0 \quad (3.2.7)$$

$$J(x) \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} + \kappa A(x) G \left(\varphi(x,t) - \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \right) - \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \quad (3.2.8)$$

又由材料力學中可知

$$EI \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} = M \quad (3.2.9)$$

代入(3.2.8)整理可得

$$\begin{cases} EI(x) \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} + \kappa A(x) G \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} - \kappa A(x) G \varphi(x,t) - J(x) \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \\ m(x) \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} - \kappa A(x) G \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} + \kappa A(x) G \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} - f(x,t) = 0 \end{cases} \quad (3.2.10)$$

此為 Timoshenko 梁受外力之運動統御方程式。

由於本文考慮的是均勻梁，故面積 A 、面積慣性矩 I 與梁密度 ρ_s 皆為常數，單位長度質量 m 與轉動慣量 J 亦為常數，而梁結構上所受到的外力作用 f 包含了均勻施加在梁結構上驅使系統產生振動行為的驅動力 f_{drive} ，以及流體環境對於結構產生的水力負載 f_{hydro} 。因此可將(3.2.10)改寫成為

$$\begin{cases} EI \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} + \kappa AG \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} - \kappa AG \varphi(x,t) - J \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \\ m \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} - \kappa AG \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} + \kappa AG \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} - f_{hydro}(x,t) = f_{drive}(x,t) \end{cases} \quad (3.2.11)$$

(3.2.11)即為 Timoshenko 梁結構受驅動力與流體負載作用的振動統御方程式。

3-2-2 流體中頻率響應與額外質量的影響

將(3.2.11)取 $\eta = \frac{x}{L}$ ，並由傅立葉轉換將時域轉換為頻率域，可得

$$\begin{cases} \frac{EI}{L^2} \frac{d^2 \hat{\varphi}(\eta|\omega)}{d\eta^2} + \frac{\kappa AG}{L} \frac{d\hat{W}(\eta|\omega)}{d\eta} - \kappa AG \hat{\varphi}(\eta|\omega) + \omega^2 J \hat{\varphi}(\eta|\omega) = 0 \\ -\omega^2 m \hat{W}(\eta|\omega) - \frac{\kappa AG}{L^2} \frac{d^2 \hat{W}(\eta|\omega)}{d\eta^2} + \frac{\kappa AG}{L} \frac{d\hat{\varphi}(\eta|\omega)}{d\eta} - \hat{f}_{hydro}(\eta|\omega) = \hat{f}_{drive}(\eta|\omega) \end{cases} \quad (3.2.12)$$

並將第二章所推導而出的水力負載 $\hat{f}_{hydro}(\eta|\omega)$

$$\hat{f}_{hydro}(\eta|\omega) = \rho \pi b^2 \omega^2 \Gamma(\mu, \rho, \omega, b, \xi'_j, \xi_k) \hat{W}(\eta|\omega) \quad (2.2.14)$$

代入(3.2.12)後可得

$$\begin{cases} \frac{EI}{L^2} \frac{d^2 \hat{\varphi}(\eta|\omega)}{d\eta^2} + \frac{\kappa AG}{L} \frac{d\hat{W}(\eta|\omega)}{d\eta} - \kappa AG \hat{\varphi}(\eta|\omega) + \omega^2 J \hat{\varphi}(\eta|\omega) = 0 \\ -\omega^2 m \hat{W}(\eta|\omega) - \frac{\kappa AG}{L^2} \frac{d^2 \hat{W}(\eta|\omega)}{d\eta^2} + \frac{\kappa AG}{L} \frac{d\hat{\varphi}(\eta|\omega)}{d\eta} - \rho \pi b^2 \omega^2 \Gamma \hat{W}(\eta|\omega) = \hat{f}_{drive}(\eta|\omega) \end{cases} \quad (3.2.13)$$

由於本文所探討的為均勻梁，故可將(3.2.13)以消去 φ 為目的，將兩式合併整理後可得

$$\frac{EI}{L^4} \frac{d^4 \hat{W}}{d\eta^4} + \left(\frac{\omega^2 J}{L^2} + \frac{\omega^2 m EI}{L^2 \kappa AG} + \frac{\rho \pi b^2 \omega^2 \Gamma EI}{L^2 \kappa AG} \right) \frac{d^2 \hat{W}}{d\eta^2} + \left(\frac{\omega^4 m J}{\kappa AG} - \omega^2 m - \rho \pi b^2 \omega^2 \Gamma + \frac{\rho \pi b^2 \omega^4 \Gamma J}{\kappa AG} \right) \hat{W} = \hat{f}_{drive} - \frac{\omega^2 J}{\kappa AG} \hat{f}_{drive} - \frac{EI}{L^2 \kappa AG} \frac{d^2 \hat{f}_{drive}}{d\eta^2} \quad (3.2.14)$$

此為考慮了剪切變形與轉動慣量影響時，等截面均勻 Timoshenko 梁在黏滯流體中之振動方程。

此時，將解的形式假設為

$$\hat{W}(\eta | \omega) = H_n(\omega) e^{ik_n \eta} \quad (3.2.15)$$

其中 k_n 為 Euler 梁理論之懸臂梁特徵值

$$\begin{aligned} k_1 &= 1.87510407 \\ k_2 &= 4.69409113 \\ k_3 &= 7.85475744 \\ k_4 &= 10.99554073 \\ k_5 &= 14.13716839 \\ k_6 &= 17.27875959 \\ k_7 &= 20.42035225 \\ k_8 &= 23.5619449 \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

將(3.2.15)代入(3.2.14)整理後可得

$$\begin{aligned} \left[\frac{EI}{L^4} k_n^4 - \frac{\omega^2}{L^2} \left(J + \frac{mEI}{\kappa AG} + \frac{\rho \pi b^2 \Gamma EI}{\kappa AG} \right) k_n^2 + \left(-\omega^2 m - \rho \pi b^2 \omega^2 \Gamma + \frac{\omega^4 m J}{\kappa AG} + \frac{\rho \pi b^2 \omega^4 \Gamma J}{\kappa AG} \right) \right] H_n(\omega) \\ = \hat{f}_{drive} - \frac{\omega^2 J}{\kappa AG} \hat{f}_{drive} - \frac{EI}{L^2 \kappa AG} \frac{d^2 \hat{f}_{drive}}{d\eta^2} \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

將(3.2.17)移項整理後可寫為

$$H_n(\omega) = \frac{\hat{f}_{drive} - \frac{\omega^2 J}{\kappa AG} \hat{f}_{drive} - \frac{EI}{L^2 \kappa AG} \frac{d^2 \hat{f}_{drive}}{d\eta^2}}{\left[\frac{EI}{L^4} k_n^4 - \frac{\omega^2}{L^2} \left(J + \frac{mEI}{\kappa AG} + \frac{\rho \pi b^2 \Gamma EI}{\kappa AG} \right) k_n^2 + \left(-\omega^2 m - \rho \pi b^2 \omega^2 \Gamma + \frac{\omega^4 m J}{\kappa AG} + \frac{\rho \pi b^2 \omega^4 \Gamma J}{\kappa AG} \right) \right]} \quad (3.2.18)$$

(3.2.18)即為 Timoshenko 梁在黏滯流體中振動之頻率響應，由於考慮了剪切變形及轉動慣量，於結構長度與厚度比值較小時，意即結構較短較粗時，或是在高模態時，將會比 Euler 梁理論更為精準也更為適用。與前節方式相同，用掃頻的方式，將頻率分別代入(3.2.18)中，找出分母的相對最小值，即為 $H_n(\omega)$ 的相對最大值，就是頻率響應最大值，此時的頻率就是結構浸入黏滯流體中之自然共振頻。

與前節介紹相同，在感測器中將載重物置於梁面上，藉由頻率的改變來得知載重物的質量。由於前節已有 Euler 梁在黏滯流體中額外質量影響之頻率響應關係式(3.1.31)，為了比較 Timoshenko 梁與 Euler 梁之差異，於此同樣的也介紹 Timoshenko 梁於黏滯流體中額外質量的影響。

由於探討為質量均勻分佈在梁面上，於自由體圖中，可視為在一小段單位長度質量上附加額外質量 Δm ，其統御方程式為

$$\begin{cases} EI \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} + \kappa AG \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} - \kappa AG \varphi(x,t) - J \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \\ (m + \Delta m) \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} - \kappa AG \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} + \kappa AG \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} - f_{hydro}(x,t) = f_{drive}(x,t) \end{cases} \quad (3.2.19)$$

由 $\eta = \frac{x}{L}$ 將軸向位移正規化、傅立葉轉換及代入水力負載後可得

$$\begin{cases} \frac{EI}{L^2} \frac{d^2 \hat{\varphi}(\eta|\omega)}{d\eta^2} + \frac{\kappa AG}{L} \frac{d\hat{W}(\eta|\omega)}{d\eta} - \kappa AG \hat{\varphi}(\eta|\omega) + \omega^2 J \hat{\varphi}(\eta|\omega) = 0 \\ -\omega^2 (m + \Delta m) \hat{W}(\eta|\omega) - \frac{\kappa AG}{L^2} \frac{d^2 \hat{W}(\eta|\omega)}{d\eta^2} + \frac{\kappa AG}{L} \frac{d\hat{\varphi}(\eta|\omega)}{d\eta} - \rho \pi b^2 \omega^2 \Gamma \hat{W}(\eta|\omega) = \hat{f}_{drive}(\eta|\omega) \end{cases} \quad (3.2.20)$$

同樣地，以消去 φ 為目的，將兩式合併整理後可得

$$\frac{EI}{L^4} \frac{d^4 \hat{W}}{d\eta^4} + \left(\frac{\omega^2 J}{L^2} + \frac{\omega^2 (m + \Delta m) EI}{L^2 \kappa AG} + \frac{\rho \pi b^2 \omega^2 \Gamma EI}{L^2 \kappa AG} \right) \frac{d^2 \hat{W}}{d\eta^2} + \left(\frac{\omega^4 (m + \Delta m) J}{\kappa AG} - \omega^2 (m + \Delta m) - \rho \pi b^2 \omega^2 \Gamma + \frac{\rho \pi b^2 \omega^4 \Gamma J}{\kappa AG} \right) \hat{W} = \hat{f}_{drive} - \frac{\omega^2 J}{\kappa AG} \hat{f}_{drive} - \frac{EI}{L^2 \kappa AG} \frac{d^2 \hat{f}_{drive}}{d\eta^2} \quad (3.2.21)$$

將解的型式代入(3.2.21)整理移項後可得

$$H_n(\omega) = \frac{\hat{f}_{drive} - \frac{\omega^2 J}{\kappa AG} \hat{f}_{drive} - \frac{EI}{L^2 \kappa AG} \frac{d^2 \hat{f}_{drive}}{d\eta^2}}{\left[\frac{EI}{L^4} k_n^4 - \frac{\omega^2}{L^2} \left(J + \frac{(m + \Delta m) EI}{\kappa AG} + \frac{\rho \pi b^2 \Gamma EI}{\kappa AG} \right) k_n^2 + \left(-\omega^2 (m + \Delta m) - \rho \pi b^2 \omega^2 \Gamma + \frac{\omega^4 (m + \Delta m) J}{\kappa AG} + \frac{\rho \pi b^2 \omega^4 \Gamma J}{\kappa AG} \right) \right]} \quad (3.2.22)$$

此為 Timoshenko 梁受額外質量影響之頻率響應函數。



第四章 理論驗證與數值結果

前文中詳細推導了流固耦合振動系統的分析理論，本章節粗略分為兩大部分，由多方比較驗證 Timoshenko 梁之頻率響應正確與否，接著為數值結果分析呈現。

首先將由 Euler 梁與 Timoshenko 梁之勁度比較其大小關係；由於 Euler 梁可視為 Timoshenko 梁中的一個特例，故在某些情況 Euler 梁與 Timoshenko 梁的結果將會是吻合的；最後再藉由[24]之數值結果跟文獻與本文的數值結果相對比較。

後半部分為數值結果的呈現與分析，將會比較 Timoshenko 梁與 Euler 梁在各個模態及流體環境中的差異；以及結構長度與厚度之比值對兩理論之間的影響；最後再分別於梁面上額外附加質量來探討額外質量對兩理論在流體環境中自由振動之共振頻的影響。

4-1 理論驗證

4-1-1 靜態分析

於物理觀念上直觀思考，由於 Timoshenko 梁中多考慮剪切變形的影響，會使得整體結構的勁度相較於 Euler 梁較小。除了由物理觀念上來看，從結構靜態時受力後的撓度變形去觀察是最為直接的。

由 Timoshenko 梁(4.1.1)與 Euler 梁(4.1.3)的靜態變形統御方程式，及各別的邊界條件(4.1.2)(4.1.4)

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[\kappa AG \left(\frac{dW_{timoshenko}}{dx} + \varphi \right) \right] + f = 0 \\ \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d\varphi}{dx} \right) - \kappa AG \left(\frac{dW_{timoshenko}}{dx} + \varphi \right) = 0 \end{cases} \quad (4.1.1)$$

$$\begin{aligned} W_{timoshenko}(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0 \\ \varphi'(L) = 0, \quad W'_{timoshenko}(L) - \varphi(L) = 0 \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

$$EI \frac{d^4 W_{euler}}{dx^4} = f \quad (4.1.3)$$

$$\begin{aligned} W_{euler}(0) = 0, \quad W'_{euler}(0) = 0 \\ W''_{euler}(L) = 0, \quad W'''_{euler}(L) = 0 \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

分別計算後可得

$$\begin{cases} W_{timoshenko} = \frac{1}{24EI} fx^4 - \frac{1}{6EI} fLx^3 + \frac{1}{4EI} fL^2x^2 - \frac{1}{2\kappa AG} fx^2 + \frac{1}{\kappa AG} fLx \\ \varphi = -\frac{1}{6EI} fx^3 + \frac{1}{2EI} fLx^2 - \frac{1}{2EI} fL^2x \end{cases} \quad (4.1.5)$$

$$W_{euler} = \frac{1}{24EI} fx^4 - \frac{1}{6EI} fLx^3 + \frac{1}{4EI} fL^2x^2 \quad (4.1.6)$$

分別代入參數，如表 4-1 所示。可以得到 Timoshenko 梁受均勻分佈力 $f = -10 \text{ N/m}$ 在 $x = 360 \mu\text{m}$ 的位置時，梁的撓度為 $7.524 \mu\text{m}$ 方向向下；Euler 梁受均勻分佈力 $f = -10 \text{ N/m}$ 在 $x = 360 \mu\text{m}$ 的位置時，梁的撓度為 $7.5 \mu\text{m}$ 方向向下，如表 4-2 所示。由此可見，在受同樣的外力作用時，Timoshenko 梁的確比 Euler 梁變形的多。在此稱 Timoshenko 梁比 Euler 梁還要軟，意即 Timoshenko 梁之勁度比 Euler 梁還要小，所以以同尺寸同材料參數代入這兩種不同的梁理論中，得出的共振頻也絕對是 Timoshenko 梁小於 Euler 梁。

表 4-1 梁靜態分析幾何材料參數表

參數	數值
懸臂梁長度 L	$360 \mu m$
懸臂梁寬度 b	$36 \mu m$
懸臂梁厚度 h	$18 \mu m$
楊氏係數 E	$160 GPa$
剪切模數 G	$62.5 GPa$
面積修正因子 κ	$\frac{2}{3}$
外力 f	$-10 N/m$

表 4-2 梁靜態分析撓度結果

	$x = 100 \mu m$	$x = 200 \mu m$	$x = 300 \mu m$	$x = 360 \mu m$
$W_{timoshenko} (\mu m)$	-0.96944	-3.1724	-5.8586	-7.524
$W_{euler} (\mu m)$	-0.95769	-3.1531	-5.8353	-7.5

4-1-2 Timoshenko 梁與 Euler 梁相互比較

由前小節可得知，Timoshenko 梁比 Euler 梁還要軟。在此小節將以在真空介質中振動之第一模態共振頻，比較 Timoshenko 梁與 Euler 梁的差異，由第三章推導而出可知 Euler 梁在真空中的自然共振頻為(3.1.18)

$$\omega_n = \frac{\lambda_n^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (3.1.18)$$

由(3.2.18)可知 Timoshenko 梁在流體中之頻率響應

$$H_n(\omega) = \frac{\hat{f}_{drive} - \frac{\omega^2 J}{\kappa AG} \hat{f}_{drive} - \frac{EI}{L^2 \kappa AG} \frac{d^2 \hat{f}_{drive}}{d\eta^2}}{\left[\frac{EI}{L^4} k_n^4 - \frac{\omega^2}{L^2} \left(J + \frac{mEI}{\kappa AG} + \frac{\rho \pi b^2 \Gamma EI}{\kappa AG} \right) k_n^2 + \left(-\omega^2 m - \rho \pi b^2 \omega^2 \Gamma + \frac{\omega^4 m J}{\kappa AG} + \frac{\rho \pi b^2 \omega^4 \Gamma J}{\kappa AG} \right) \right]} \quad (3.2.18)$$

若把有水力函數項拿掉，即為 Timoshenko 梁在真空中之頻率響應

$$H_n(\omega) = \frac{\hat{f}_{drive} - \frac{\omega^2 J}{\kappa AG} \hat{f}_{drive} - \frac{EI}{L^2 \kappa AG} \frac{d^2 \hat{f}_{drive}}{d\eta^2}}{\left[\frac{EI}{L^4} k_n^4 - \frac{\omega^2}{L^2} \left(J + \frac{mEI}{\kappa AG} \right) k_n^2 + \left(-\omega^2 m + \frac{\omega^4 m J}{\kappa AG} \right) \right]} \quad (4.1.7)$$

由(3.1.18)與(4.1.7)兩式之數值結果比較 Timoshenko 梁與 Euler 梁之差異，以固定結構長度 $L = 300\mu m$ 結構寬度 $b = 36\mu m$ ，參數如表 4-3 所示。藉由改變結構厚度 h 以調整 $\frac{L}{h}$ ，進而觀察兩理論是否於結構細長至一定程度時，結果將會重合。

結果顯示，Timoshenko 梁在結構長度 $L = 300\mu m$ 結構厚度 $h = 1\mu m$ 時，第一模態共振頻會與 Euler 梁完全吻合，如表 4-4 所示。由圖 4-1 可看出兩理論之間關係趨勢，於此將以 $\frac{f_T}{f_E}$ 表示， f_T 為 Timoshenko 梁理論之頻率， f_E 為 Euler 梁理論之頻率，兩者之比值即為兩理論之間頻率的差異。 $\frac{L}{h}$ 越小時差異越大， $\frac{L}{h}$ 越大，意即結構尺寸越為細長時 Timoshenko 梁理論與 Euler 梁理論之頻率越為接近，甚至重合。由結果也可以看出，於同樣尺寸同樣材料之前提下 Timoshenko

梁理論的共振頻皆比 Euler 梁理論還要小，符合 Timoshenko 梁勁度小於 Euler 梁，於這點上的物理現象是符合的。

表 4-3 4-1-2 幾何材料參數表

結構參數	數值
懸臂梁長度 L	$300 \mu m$
懸臂梁寬度 b	$36 \mu m$
結構密度 ρ_s	$2330 \frac{kg}{m^3}$
楊氏係數 E	$160 GPa$
剪切模數 G	$62.5 GPa$
面積修正因子 κ	$\frac{2}{3}$

表 4-4 $L=300\mu m, b=36\mu m$ 真空環境頻率比較(第一模態)

$h (\mu m)$	18	12	6	1	0.5	0.1	0.01
L/h	16.67	25	50	300	600	3000	30000
$f_T (Hz)$	267050	178280	89217	14874	7436.8	1487.3	148.8
$f_E (Hz)$	267730	178480	89242	14874	7436.8	1487.3	148.8
f_T/f_E	0.99746	0.99888	0.99972	1	1	1	1

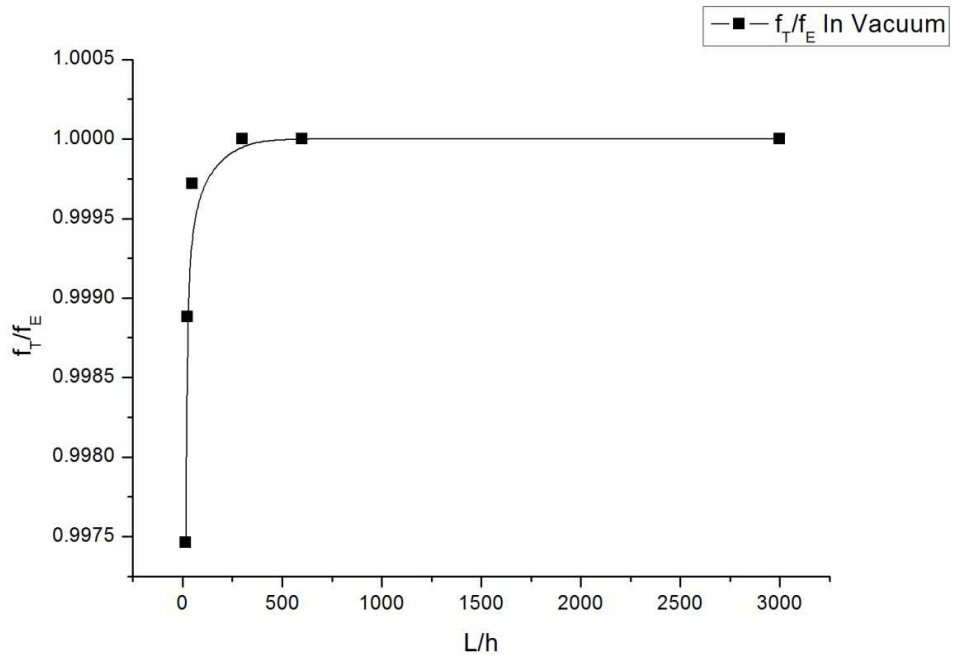


圖 4-1 $L = 300\mu m, b = 36\mu m$ 真空環境頻率比較(第一模態)



4-1-3 與直接求解法比較

此小節將以本文中的 Timoshenko 梁理論之頻率響應結果與[24]之數值解做比較，[24]之解法將於附錄中呈現。由於[24]之數值結果只提供固定尺寸比例及數種材料係數的結果，於此將配合[24]以同樣的尺寸材料比例做為比較。

[24]之數值結果於表 4-5 所示。此處提供之尺寸參數為 $\bar{r}_G = 0.1$ ，其中 $\bar{r}_G = r_G/L$ ， $r_G^2 = I/A$ 將此整理後可得尺寸參數比例為 $(L/h)^2 = 25/3$ ， $\bar{E} = E/\kappa G$ 分別提供了四種不同的材料係數比例，其中 $\omega_0 = \sqrt{EI/mL^4}$ 。於此在尺寸對照上選出兩組尺寸參數相互對照以確定其結果準確性，其尺寸與材料參數於表 4-6 所示。詳細比較結果於表 4-7 所示。由結果可以看出無論是哪一套尺寸結果皆相同。於尺寸 A 在 $\bar{E} = 0.1$ 時誤差僅僅只有 0.588%， $\bar{E} = 1.0$ 時誤差 1.02%， $\bar{E} = 5.0$ 時誤差 2.755%，於 $\bar{E} = 10.0$ 時誤差 4.58%，尺寸 B 之誤差也相去不遠。在剪切模數越小時，誤差稍趨明顯，其原因可能是因為數值方法不同所致。

表 4-5 [24]直接求解數值結果(第一模態)

$\bar{E} = E/\kappa G$	ω_1/ω_0
0.1	3.430
1.0	3.366
5.0	3.116
10.0	2.864

表 4-6 4-1-3 幾何材料參數表

尺寸 A			
懸臂梁長度 L	51.9615 μm	結構密度 ρ_s	2330 $\frac{kg}{m^3}$
懸臂梁寬度 b	36 μm	面積修正因子 κ	$\frac{2}{3}$
懸臂梁厚度 h	18 μm	$\bar{E} = 0.1$	
		$E = 10 \text{ GPa}$	$G = 150 \text{ GPa}$
		$\bar{E} = 1.0$	
		$E = 100 \text{ GPa}$	$G = 150 \text{ GPa}$
		$\bar{E} = 5.0$	
		$E = 10 \text{ GPa}$	$G = 30 \text{ GPa}$
		$\bar{E} = 10.0$	
		$E = 10 \text{ GPa}$	$G = 15 \text{ GPa}$
尺寸 B			
懸臂梁長度 L	86.60254 μm	結構密度 ρ_s	2330 $\frac{kg}{m^3}$
懸臂梁寬度 b	70 μm	面積修正因子 κ	$\frac{2}{3}$
懸臂梁厚度 h	30 μm	$\bar{E} = 0.1$	
		$E = 2 \text{ GPa}$	$G = 30 \text{ GPa}$
		$\bar{E} = 1.0$	
		$E = 2 \text{ GPa}$	$G = 3 \text{ GPa}$
		$\bar{E} = 5.0$	
		$E = 300 \text{ GPa}$	$G = 90 \text{ GPa}$
		$\bar{E} = 10.0$	
		$E = 2 \text{ GPa}$	$G = 0.3 \text{ GPa}$

表 4-7 與[24]比較結果

(Hz)	$\bar{E} = 0.1$	誤差 (%)	$\bar{E} = 1.0$	誤差 (%)	$\bar{E} = 5.0$	誤差 (%)	$\bar{E} = 10.0$	誤差 (%)
尺寸 A	2189300	0.588	6823200	1.02	6424900	2.755	6010600	4.58
[24]	2176500		6754300		6252600		5747000	
尺寸 B	587440	0.589	578970	1.02	6677000	2.761	510020	4.59
[24]	584000		573100		6497600		487600	

4-1-4 與文獻比較

為了更有效的驗證本文，此小節選用了兩篇文獻與本文佐證。可分為兩個部分：第一部份為與文獻中以 Timoshenko 梁理論為模型，模擬原子力顯微鏡於流體中的振動行為之結果做比較；第二部分則為與實驗量測的額外質量造成頻率偏移的影響做比較。

Euler 梁和 Timoshenko 梁在流體中共振頻的比較

在這個部分選用 2009 年，H. L. Lee 等人的結果[13]。以 Timoshenko 梁理論做為探討的模型，欲模擬原子力顯微鏡於流體中之行為，其中將流體黏滯性簡化為一阻尼係數於梁結構自由端，以代表流體行為，但將流體的質量忽略不計，最後比較第一至第四模態於有黏滯性環境下之 Timoshenko 梁頻率跟 Euler 梁頻率比值與不同彈簧勁度的關係。其結果如圖 4-2 所示，其中 $Q=5$ 代表液體，由於最常見的液體為水，於此將以水做為計算； $Q=100$ 代表氣體，空氣為最常見的氣體，故將以空氣做為計算。圖中縱軸為 Timoshenko 梁頻率與 Euler 梁頻率之比值，橫軸為自由端彈簧勁度，由於本文結構自由端並無彈簧作用，圖中讀數將只看橫軸最左邊彈簧勁度極小時，視為無彈簧作用，如紅點所示。其讀數於第一模態為 0.995，第二模態為 0.9875，第三模態為 0.97，第四模態為 0.94。

由於此篇將流體之質量忽略，其水中振動結果之參考性不大。其原因為，當振動行為於空氣介質時，空氣的密度相當小，此時將空氣密度忽略其影響不大；但若其振動行為是在水中時，由於水的密度相當高，其影響不容忽視。其水中的比較結果如表 4-10 所示，與文獻有些差距。

尺寸與材料參數於表 4-8，驗證結果如表 4-9 所示。可以看到 Timoshenko 梁理論與 Euler 梁理論於空氣中的共振頻之關係在第一至第四模態的結果接相當吻合。

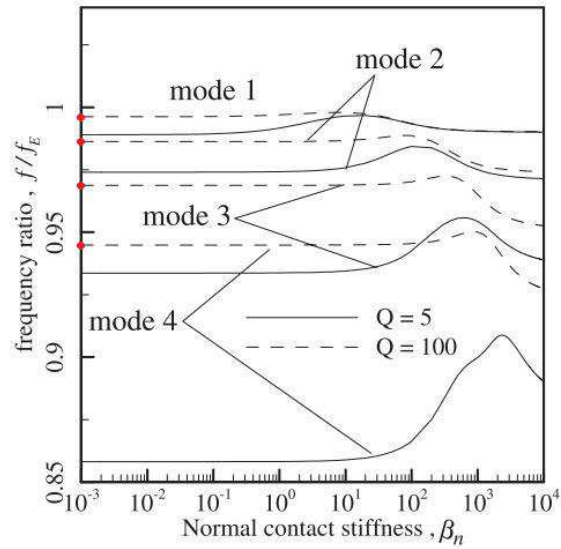


圖 4-2 理論驗證圖[13]

表 4-8 理論驗證結構參數

結構參數	數值	
懸臂梁長度 L	100 μm	
懸臂梁寬度 b	25 μm	
懸臂梁厚度 h	5 μm	
楊氏係數 E	170 GPa	
剪切模數 G	66.4 GPa	
結構密度 ρ_s	2300 kg/m^3	
面積修正因子 κ	$\frac{2}{3}$	
流體參數	空氣	水
流體密度 ρ	1.18 kg/m^3	997 kg/m^3
流體黏滯係數 μ	$1.86 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$	$8.59 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$

表 4-9 與[13]理論驗證結果(空氣)

			f_T/f_E	[13]
1st mode	$f_{T,air} (Hz)$	692071	0.9982	0.995
	$f_{E,air} (Hz)$	693296		
2nd mode	$f_{T,air} (Hz)$	4298970	0.9891	0.9875
	$f_{E,air} (Hz)$	4346280		
3rd mode	$f_{T,air} (Hz)$	11810547	0.9706	0.97
	$f_{E,air} (Hz)$	12168776		
4th mode	$f_{T,air} (Hz)$	22557794	0.945	0.94
	$f_{E,air} (Hz)$	23870717		

表 4-10 與[13]理論驗證結果(水)

			f_T / f_E	[13]
1st mode	$f_{T,water} (Hz)$	400183	0.9984	0.99
	$f_{E,water} (Hz)$	400808		
2nd mode	$f_{T,water} (Hz)$	2562618	0.9904	0.975
	$f_{E,water} (Hz)$	2587384		
3rd mode	$f_{T,water} (Hz)$	7115752	0.974	0.93
	$f_{E,water} (Hz)$	7305766		
4th mode	$f_{T,water} (Hz)$	13681732	0.951	0.86
	$f_{E,water} (Hz)$	14386682		

額外質量所產生的頻率偏移

這個部分選用 2007 年，Murali Krishna Ghatkesar 等人的結果[19]。文中以實驗量測微懸臂梁上塗附不同厚度的金屬之頻率，同樣也指出其靈敏度隨著模態階數的增加而增加。

實驗中分別在懸臂梁上鍍上不同厚度的金屬：40nm、80nm、120nm，量測受到額外質量影響的頻率偏移。其結果如圖 4-3，為三個不同結構的尺寸，差異為厚度，分別為 $7\mu m$ 、 $4\mu m$ 、 $1\mu m$ ，橫軸為鍍上金屬的厚度，縱軸為量測後之頻率偏移量。將圖中讀數取出並與本文驗證之數值結果放在一起做圖比較，詳細結構參數於表 4-11。驗證結果如圖 4-4 至圖 4-6 所示。由於此篇文中敘述結構上實際量到的厚度為 $6.5\mu m$ 、 $4\mu m$ 、 $1.1\mu m$ ，於此皆以上述數字來做計算。其紅色圖示為文獻中的實驗值，黑色曲線為本文之數值結果。由圖中可以看到，厚度

1.1 μm 及4 μm 之結果皆相當吻合，唯獨6.5 μm 有些差距。其原因為，文獻中明白指出由於製程的差異導致所使用之梁本身結構有所缺陷，且厚度越厚及模態越高其影響越大， $h=6.5\mu\text{m}$ 於第四模態時誤差高達30%，厚度為4 μm 、1.1 μm 時誤差較小較具參考性，但厚度為6.5 μm 時之結構其結果參考性不大。其數值結果與比值如表 4-12 至表 4-15 所示。

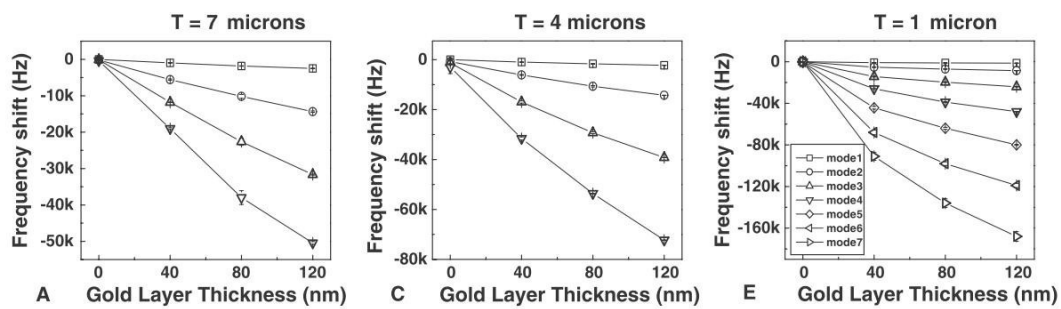


圖 4-3 頻率偏移驗證圖[19]

表 4-11 頻率偏移驗證結構參數

結構參數	數值
懸臂梁長度 L	500 μm
懸臂梁寬度 b	100 μm
懸臂梁厚度 h	6.5、4、1.1 μm
楊氏係數 E	169 GPa
剪切模數 G	66 GPa
結構密度 ρ_s	2330 $\frac{kg}{m^3}$
面積修正因子 κ	$\frac{2}{3}$
流體參數	空氣
流體密度 ρ	1.18 $\frac{kg}{m^3}$
流體黏滯係數 μ	$1.86 \times 10^{-5} \frac{N \cdot s}{m^2}$

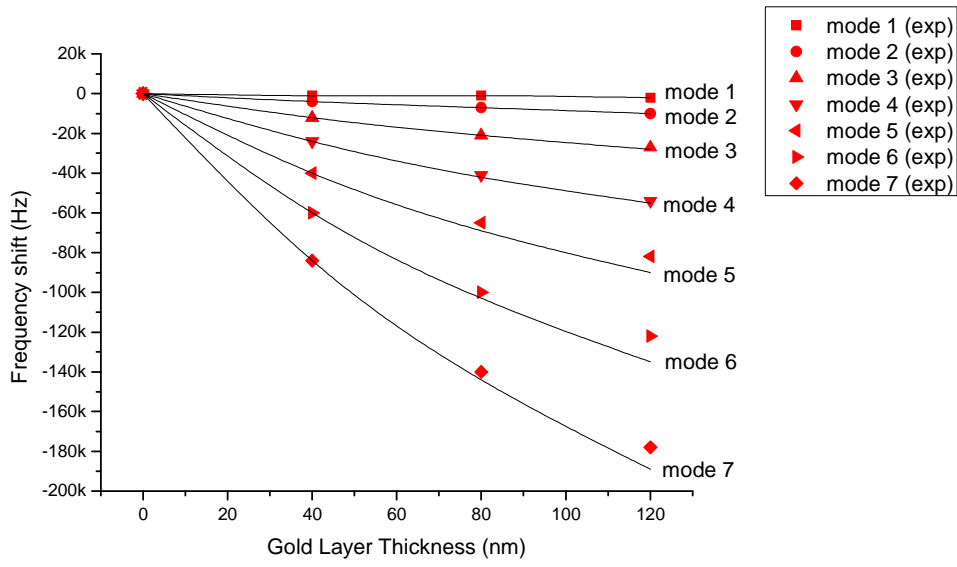


圖 4-4 頻率偏移結果驗證圖($h=1.1 \mu m$)

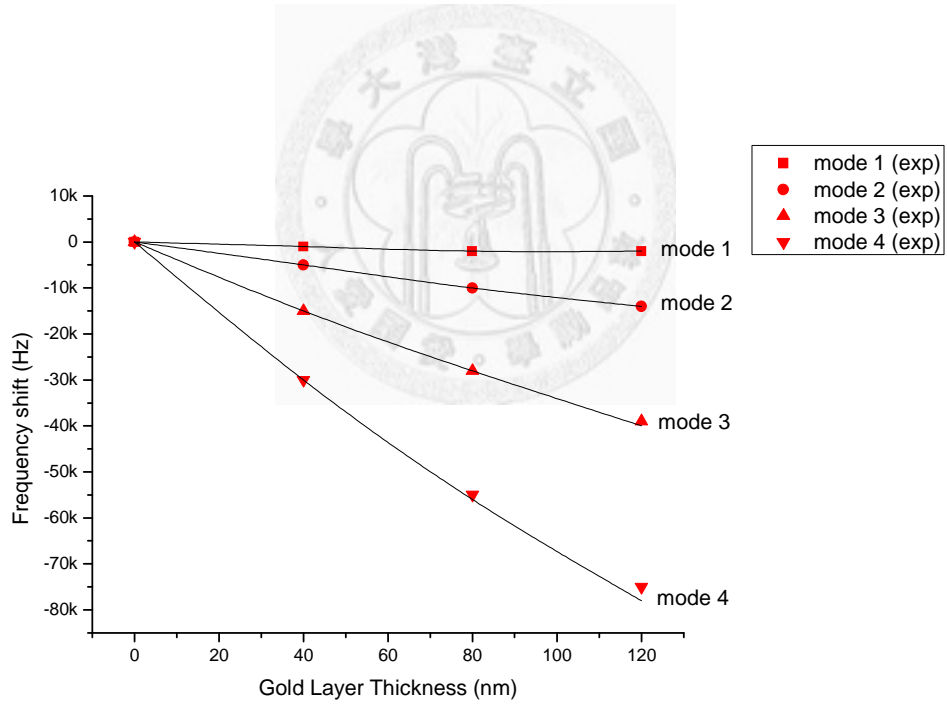


圖 4-5 頻率偏移結果驗證圖($h=4 \mu m$)

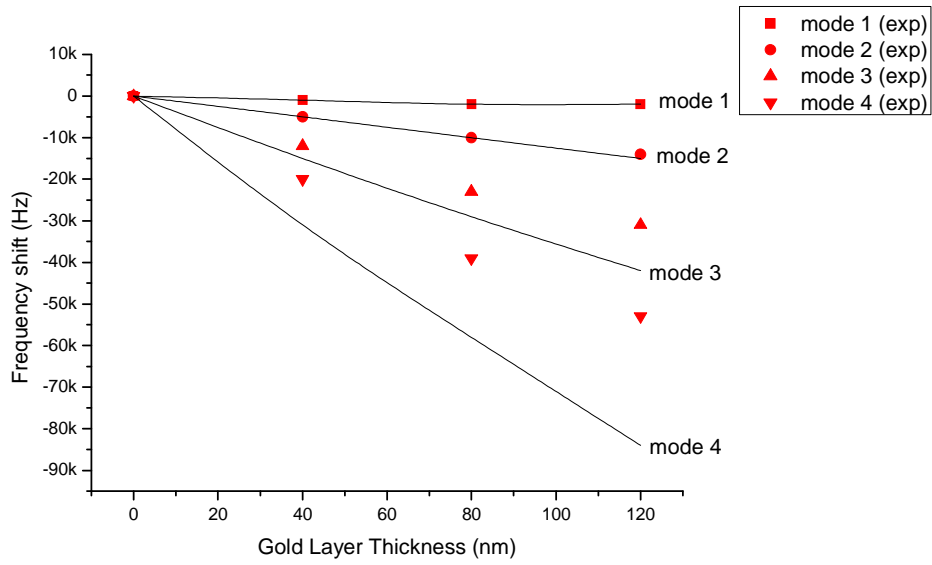


圖 4-6 頻率偏移結果驗證圖($h=6.5 \mu m$)

表 4-12 頻率偏移驗證結果($h=1.1 \mu m$)

	1st mode	比值	2nd mode	比值	3rd mode	比值	4th mode	比值
[19] 40nm	-1k	1	-4k	1	-12k	1	-24k	1
Timoshenko 40nm	-678 (1k)		-4374 (4k)		-12327 (12k)		-24441 (24k)	
Euler 40nm	-678 (1k)		-4375 (4k)		-12328 (12k)		-24445 (24k)	
[19] 80nm	-1k	1	-7k	1	-21k	1	-41k	0.976
Timoshenko 80nm	-1163 (1k)		-7490 (7k)		-21105 (21k)		-41692 (42k)	
Euler 80nm	-1163 (1k)		-7490 (7k)		-21108 (21k)		-41698 (42k)	
[19] 120nm	-2k	1	-10k	1	-27k	0.964	-54k	0.982
Timoshenko 120nm	-1533 (2k)		-9853 (10k)		-27759 (28k)		-54761 (55k)	
Euler 120nm	-1533 (2k)		-9853 (10k)		-27762 (28k)		-54769 (55k)	

表 4-13 續表 4-12 頻率偏移驗證結果($h=1.1 \mu m$)

	5th mode	比值	6th mode	比值	7th mode	比值
[19] 40nm	-40k	1	-60k	1	-84k	1
Timoshenko 40nm	-40196 (40k)		-60128 (60k)		-84038 (84k)	
Euler 40nm	-40206 (40k)		-60152 (60k)		-84083 (84k)	
[19] 80nm	-65k	0.942	-100k	0.971	-140k	0.972
Timoshenko 80nm	-68756 (69k)		-102833 (103k)		-143715 (144k)	
Euler 80nm	-68773 (69k)		-102871 (103k)		-143790 (144k)	
[19] 120nm	-82k	0.911	-122k	0.904	-178k	0.942
Timoshenko 120nm	-90388 (90k)		-135174 (135k)		-188907 (189k)	
Euler 120nm	-90410 (90k)		-135224 (135k)		-189003 (189k)	

表 4-14 頻率偏移驗證結果($h=4\ \mu m$)

	1st mode	比值	2nd mode	比值	3rd mode	比值	4th mode	比值
[19] 40nm	-1k	1	-5k	1	-15k	1	-30k	1
Timoshenko 40nm	-838 (1k)		-5285 (5k)		-14746 (15k)		-29635 (30k)	
Euler 40nm	-839 (1k)		-5287 (5k)		-14761 (15k)		-29700 (30k)	
[19] 80nm	-2k	1	-10k	1	-28k	1	-55k	0.982
Timoshenko 80nm	-1589 (2k)		-10005 (10k)		-27971 (28k)		-55539 (56k)	
Euler 80nm	-1589 (2k)		-10009 (10k)		-28001 (28k)		-55657 (56k)	
[19] 120nm	-2k	1	-14k	1	-39k	0.975	-75k	0.962
Timoshenko 120nm	-2264 (2k)		-14252 (14k)		-39868 (40k)		-77845 (78k)	
Euler 120nm	-2264 (2k)		-14258 (14k)		-39911 (40k)		-77983 (78k)	

表 4-15 頻率偏移驗證結果($h=6.5 \mu m$)

	1st mode	比值	2nd mode	比值	3rd mode	比值	4th mode	比值
[19] 40nm	-1k	1	-5k	1	-12k	0.8	-20k	0.645
Timoshenko 40nm	-864 (1k)		-5437 (5k)		-15108 (15k)		-30752 (31k)	
Euler 40nm	-864 (1k)		-5442 (5k)		-15152 (15k)		-30930 (31k)	
[19] 80nm	-2k	1	-10k	1	-23k	0.793	-39k	0.672
Timoshenko 80nm	-1671 (2k)		-10502 (10k)		-29273 (29k)		-58442 (58k)	
Euler 80nm	-1671 (2k)		-10512 (11k)		-29357 (29k)		-58775 (59k)	
[19] 120nm	-2k	1	-14k	0.933	-31k	0.738	-53k	0.631
Timoshenko 120nm	-2425 (2k)		-15229 (15k)		-42493 (42k)		-84286 (84k)	
Euler 120nm	-2425 (2k)		-15244 (15k)		-42614 (43k)		-84761 (85k)	

4-2 數值結果

由前節可得本文之 Timoshenko 梁頻率響應於物理行為中是正確的，可明確的比較出與 Euler 梁理論之間的差異。在此節將先討論 Timoshenko 梁中，剪切模數 G 與頻率之關係；再探討 L/h 與兩梁理論及流體環境影響之關係；接著藉由分類不同的 L/h ，分別探討兩梁理論差異及高模態時與流體影響的關係；最後為額外質量造成頻率偏移的影響。

4-2-1 剪切模數與流體對結構的影響

於此小節將會呈現剪切模數 G 與 Timoshenko 梁之頻率的關係，以探討第一模態共振頻為主。由於變數為剪切模數，於此固定結構尺寸與材料參數，再分別浸入不同的流體環境中，比較與流體之間的關係。使用的流體有：空氣、水、甘油，在往後的分析討論中也皆是以這三種流體介質做為參考。其結構尺寸材料參數與流體參數詳細數據列於表 4-16 中。

圖 4-7 至圖 4-10 分別為結構浸入不同的流體介質中，各別改變剪切模數 G 後對頻率的影響。由圖 4-7 至圖 4-10 中可看出，無論在何種流體介質中，剪切模數越大會使得頻率越高，但不會超過同尺寸同材料下之 Euler 梁的頻率；剪切模數越小使其頻率越低，換言之，剪切模數越小，對結構之勁度影響越大，使得其同尺寸同材料之 Timoshenko 梁理論頻率與 Euler 梁理論頻率差異越大，詳細數據如表 4-17 所示。

圖 4-11 至圖 4-13 為剪切模數與流體環境對頻率的影響，於此將以兩流體環境下頻率之比值來表示， f_{air}/f_{vacuum} 為空氣中的頻率與真空中頻率之比值，

f_{water}/f_{vacuum} 為水中的頻率與真空中頻率之比值， $f_{glycerin}/f_{vacuum}$ 為甘油中的頻率

與真空中的頻率之比值；若比值越接近 1，即表示分子的頻率與分母的頻率越為接近，意即該分子之流體對其整體結構之影響越小。由此將可得知變數與流體對頻率影響的關係。往後也都將以此方式探討流體對結構的影響。

由圖 4-11 至圖 4-13 可以得知，無論是空氣介質與真空比、水介質與真空介質比、甘油介質與真空介質比，皆有剪切模數越大，兩頻率比值越大之現象，詳細數據如表 4-18 所示，其現象在剪切模數較小時較為明顯，於剪切模數 30 至 160 的區間，由於頻率較為接近，故其現象就沒這麼明顯，甚至會有一些誤差出現。若取剪切模數於 0.6、80、16000(GPa)時之甘油介質中的頻率與真空環境下的頻率之比值 $\frac{f_{glycerin}}{f_{vacuum}}$ ，其數值分別為 4.695664×10^{-3} 、0.0868365、0.0869265，可看到剪切模數越大時，比值就越大；就整體而言，可得到一結論，剪切模數 G 越大，流體對整體結構的頻率影響就越小。

表 4-16 剪切模數與頻率關係之結構流體參數

結構參數	數值		
懸臂梁長度 L	360 μm		
懸臂梁寬度 b	36 μm		
懸臂梁厚度 h	18 μm		
楊氏係數 E	160 GPa		
結構密度 ρ_s	2330 $\frac{kg}{m^3}$		
面積修正因子 κ	$\frac{2}{3}$		
流體參數	空氣	水	甘油
流體密度 ρ	1.18 $\frac{kg}{m^3}$	997 $\frac{kg}{m^3}$	1257.6 $\frac{kg}{m^3}$
流體黏滯係數 μ	$1.86 \times 10^{-5} \frac{N \cdot s}{m^2}$	$8.59 \times 10^{-4} \frac{N \cdot s}{m^2}$	$14939 \times 10^{-4} \frac{N \cdot s}{m^2}$

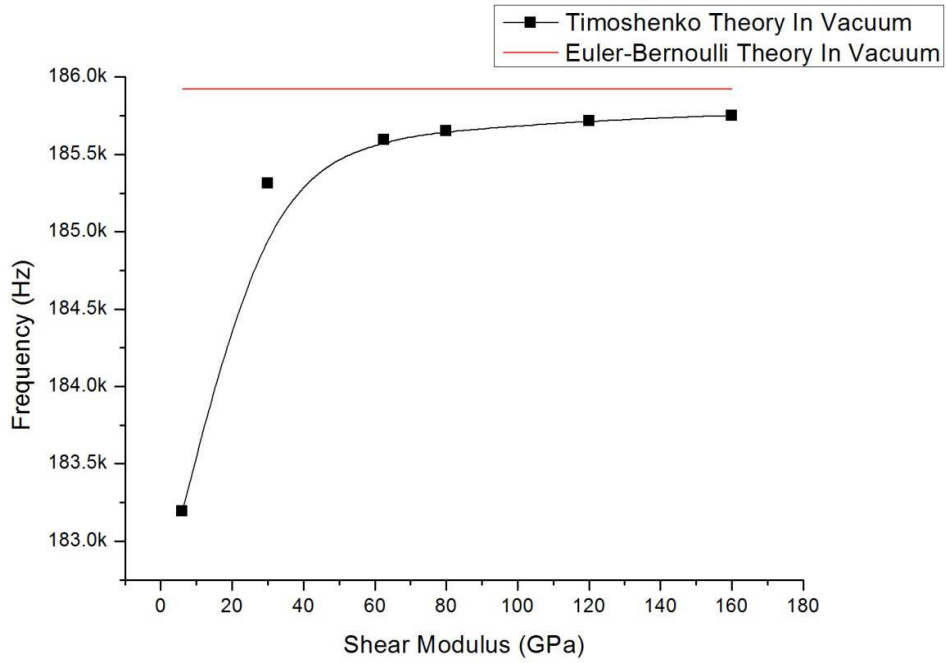


圖 4-7 剪切模數 G 與頻率於真空環境之關係(第一模態)

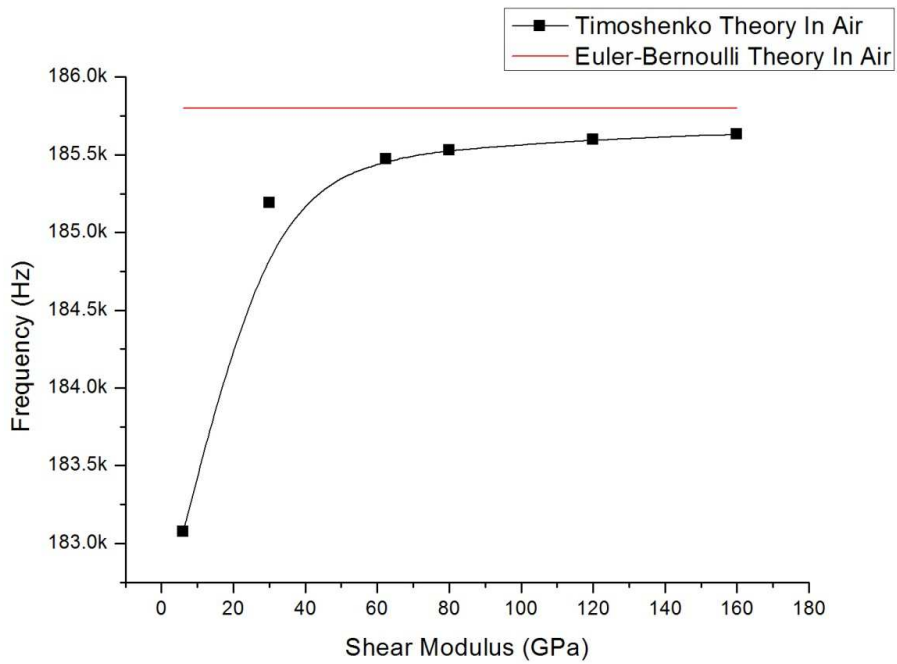


圖 4-8 剪切模數 G 與頻率於空氣環境之關係(第一模態)

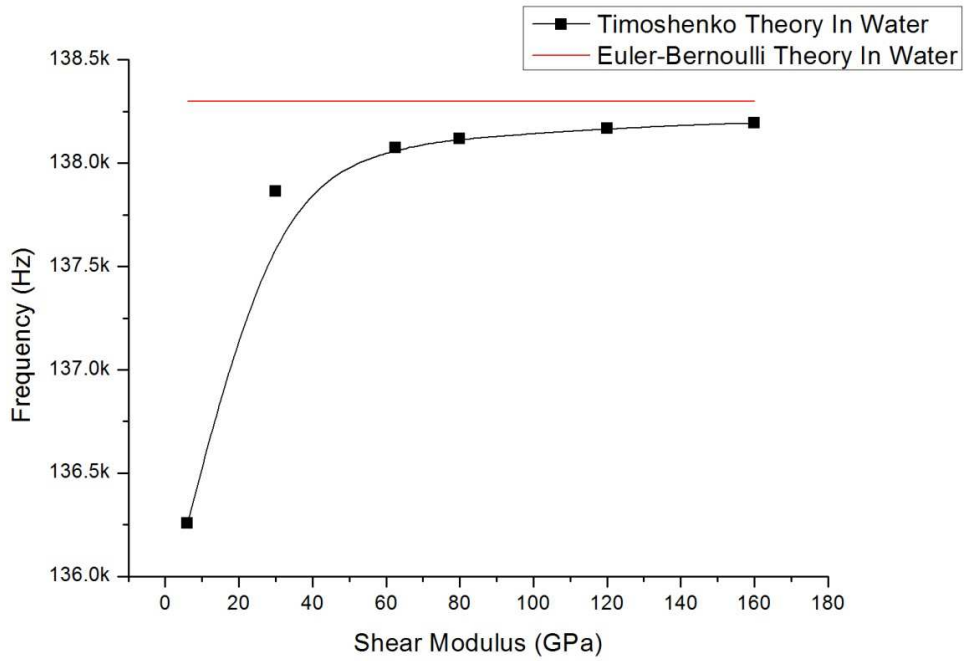


圖 4-9 剪切模數 G 與頻率於水環境之關係(第一模態)

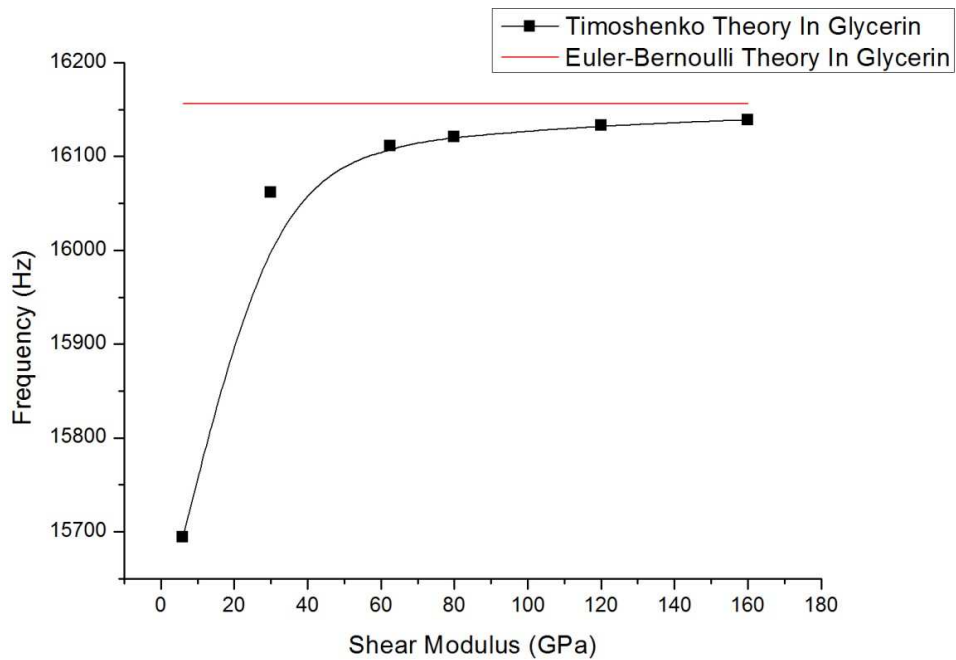


圖 4-10 剪切模數 G 與頻率於甘油環境之關係(第一模態)

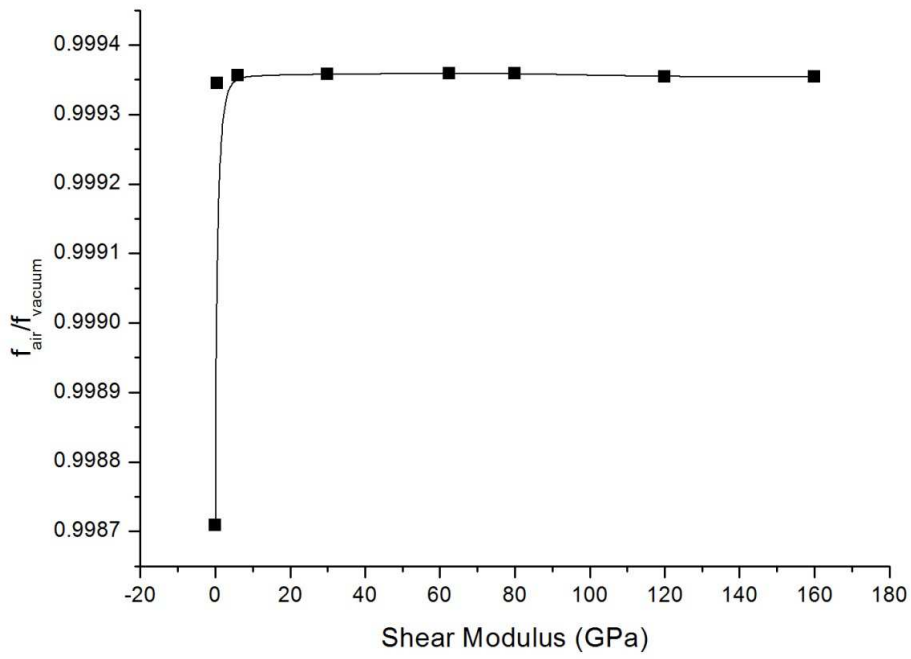


圖 4-11 剪切模數與流體環境對頻率之影響(空氣、真空)(第一模態)

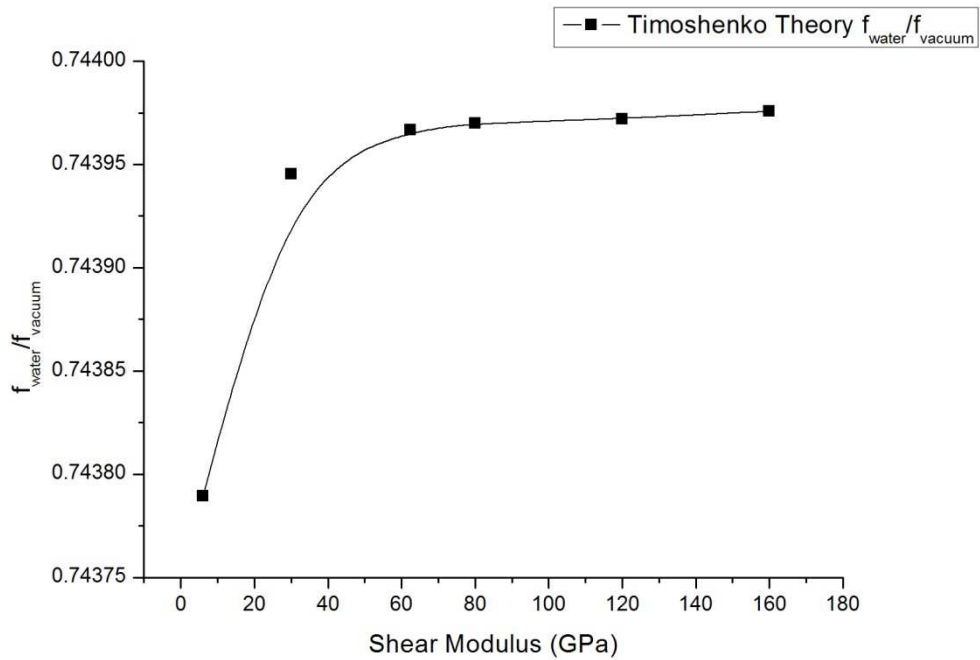


圖 4-12 剪切模數與流體環境對頻率之影響(水、真空)(第一模態)

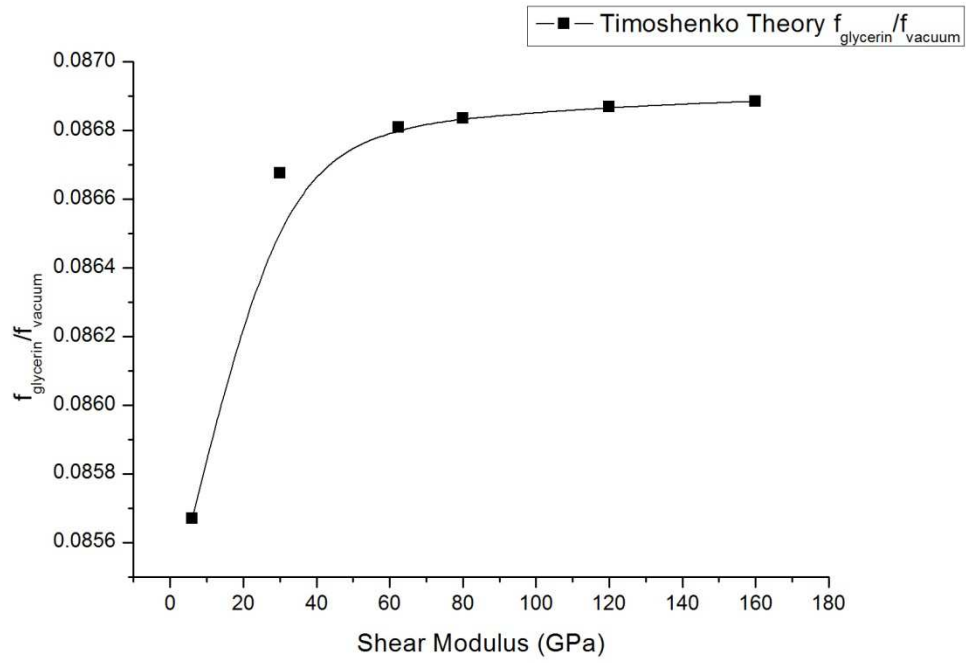


圖 4-13 剪切模數與流體環境對頻率之影響(甘油、真空)(第一模態)

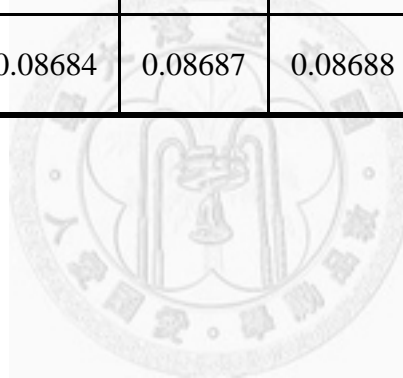


表 4-17 剪切模數 G 於各流體環境中之頻率(第一模態)

剪切模數 (GPa)	0.0006	0.6	6	30	62.5
f_{vacuum} (Hz)	10843	163469	183193	185312	185593
f_{air} (Hz)	10829	163362	183075	185193	185474
f_{water} (Hz)	7242.5	121328	136257	137862	138075
$f_{glycerin}$ (Hz)	50.9296	12471	15694	16062	16111
剪切模數 (GPa)	80	120	160	16000	Euler
f_{vacuum} (Hz)	185650	185718	185752	185853	185922
f_{air} (Hz)	185531	185598	185632	185733	185801
f_{water} (Hz)	138118	138169	138195	138271	138300
$f_{glycerin}$ (Hz)	16121	16133	16139	16156	16156

表 4-18 剪切模數與流體環境對頻率之影響(第一模態)

剪切模數 (GPa)	0.0006	0.6	6	30	62.5
f_{air}/f_{vacuum}	0.998709	0.999345	0.999356	0.999358	0.999359
f_{water}/f_{vacuum}	0.66794	0.74221	0.74379	0.74395	0.74397
$f_{glycerin}/f_{vacuum}$	0.00470	0.07629	0.08567	0.08668	0.08681
剪切模數 (GPa)	80	120	160	16000	Euler
f_{air}/f_{vacuum}	0.999359	0.999354	0.999354	0.999354	0.999349
f_{water}/f_{vacuum}	0.74397	0.74397	0.74398	0.74398	0.74386
$f_{glycerin}/f_{vacuum}$	0.08684	0.08687	0.08688	0.08693	0.08690



4-2-2 結構長度與厚度之比值與流體的影響

此小節將以改變結構之長度與厚度的比例將結構浸於真空、空氣、水、甘油四種不同的介質環境下，觀察 Timoshenko 梁理論與 Euler 梁理論之第一模態共振頻的差異與流體對整體結構的影響。於此將固定結構之寬度 b 與厚度 h 分別為 $36\mu m$ 及 $18\mu m$ ，藉由改變結構長度控制 L/h 的值，以觀察 f_T/f_E 之關係。詳細結構與材料參數列於表 4-19。

由 4-1-2 提過，以 f_T/f_E 表示 Timoshenko 梁理論與 Euler 梁理論之頻率差異。從圖 4-14 至圖 4-17 可看出，無論在真空、空氣、水、甘油何種介質下，皆是 L/h 越小時， f_T/f_E 越小，表示兩理論之間差距越大，於第一模態， L/h 等於 5 時，比值皆為 0.97，高模態的情況於稍後將會介紹；當 L/h 越大，表示結構越為細長時，兩理論之間比值趨近於 1，幾乎沒有差距。表示結構在極細長時，無論是以 Timoshenko Theory 或是 Euler-Bernoulli Theory 來做為參考依據皆沒有太大的差異，但當結構長度越短或是厚度越厚時，其剪切變形與轉動慣量之效應將會越趨明顯，此時應當使用 Timoshenko Theory 做為理論計算之參考依據。詳細頻率與兩理論頻率之比值 f_T/f_E 如表 4-20、表 4-21 所示。

圖 4-18 至圖 4-20 為 L/h 與各流體環境對於 Timoshenko 梁理論中之頻率的影響；圖 4-21 至圖 4-23 則為 L/h 與各流體環境對於 Euler 梁理論中之頻率的影響，以兩不同流體環境下頻率的比值表示之。由圖中可看出，無論是 Timoshenko 梁理論或 Euler 梁理論，皆有 L/h 越小，兩流體環境之頻率比值越大之現象。取

$L=540\mu m$ 時之甘油環境與真空環境中之頻率比值 $f_{T, glycerin}/f_{T, vacuum}$ 、 $f_{E, glycerin}/f_{E, vacuum}$ 其數值分別為 0.037675、0.037694；當 $L=90\mu m$ 時 $f_{T, glycerin}/f_{T, vacuum}$ 、

$f_{E, glycerin} / f_{E, vacuum}$ 分別為 0.489816、0.490279。可知無論在何種理論前提之下， L/h 越小，流體對整體結構的頻率影響就越小； L/h 越大，流體對整體結構的頻率影響就越大。由於 Timoshenko 梁理論與 Euler 梁理論於各流體介質中之頻率比值太過接近，且無明顯現象，故於此將不對於 Timoshenko 梁理論與 Euler 梁理論之間做比較。詳細比值數據如表 4-22 所示。

表 4-19 結構長度與厚度之比值與流體影響結構參數

結構參數	數值		
懸臂梁寬度 b	36 μm		
懸臂梁厚度 h	18 μm		
楊氏係數 E	160 GPa		
剪切模數 G	62.5 GPa		
結構密度 ρ_s	2330 kg/m^3		
面積修正因子 κ	$2/3$		
流體參數	空氣	水	甘油
流體密度 ρ	1.18 kg/m^3	997 kg/m^3	1257.6 kg/m^3
流體黏滯係數 μ	$1.86 \times 10^{-5} N \cdot s/m^2$	$8.59 \times 10^{-4} N \cdot s/m^2$	$14939 \times 10^{-4} N \cdot s/m^2$

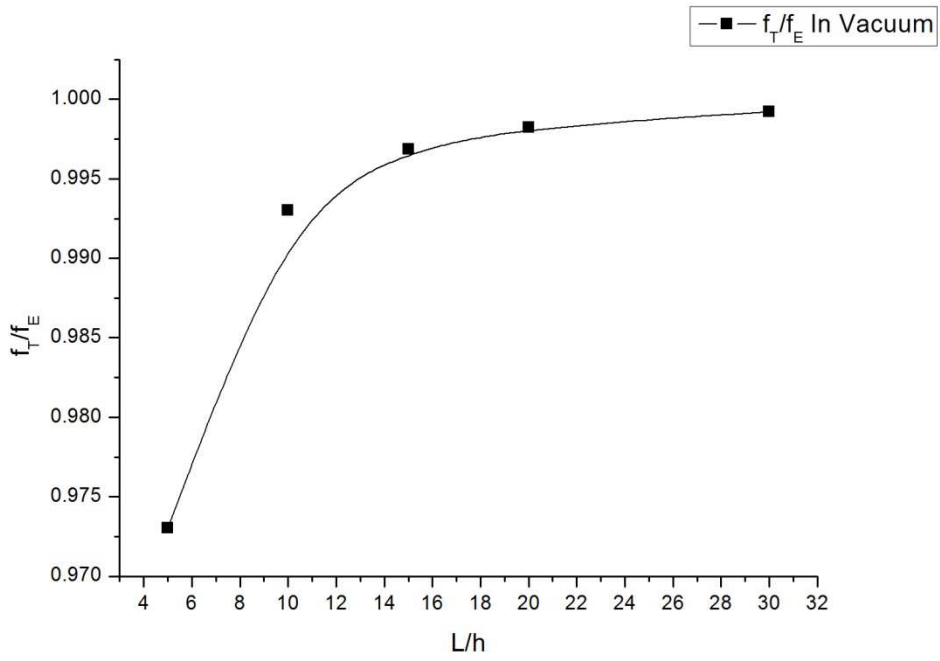


圖 4-14 L/h 於真空介質中對 f_T/f_E 之影響(第一模態)

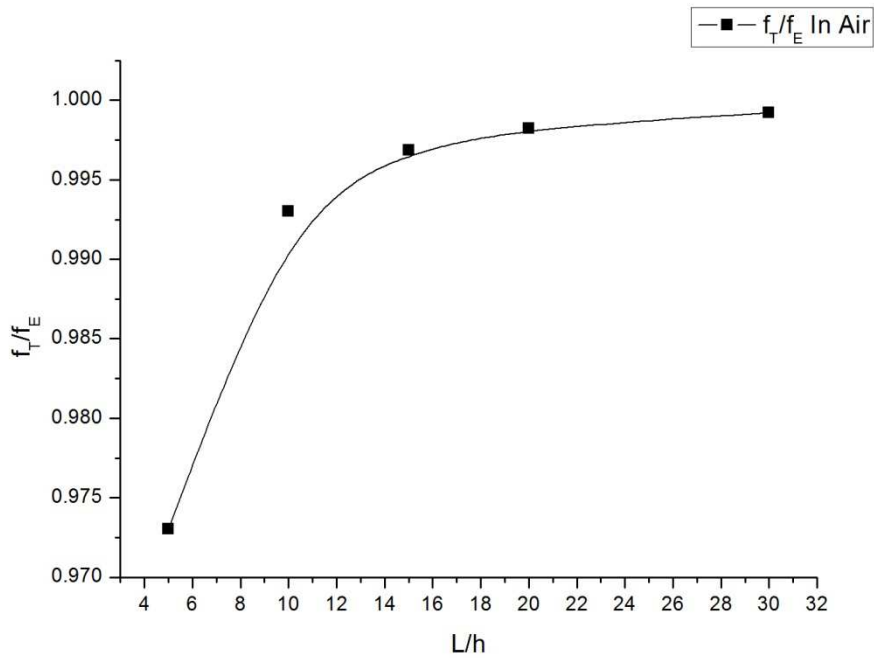


圖 4-15 L/h 於空氣介質中對 f_T/f_E 之影響(第一模態)

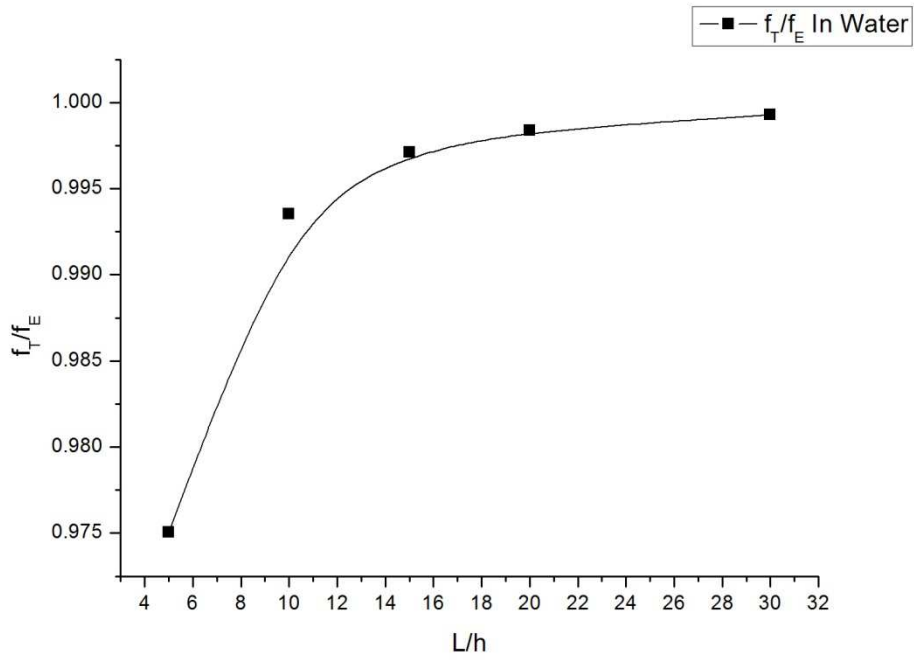


圖 4-16 L/h 於水介質中對 f_T/f_E 之影響(第一模態)

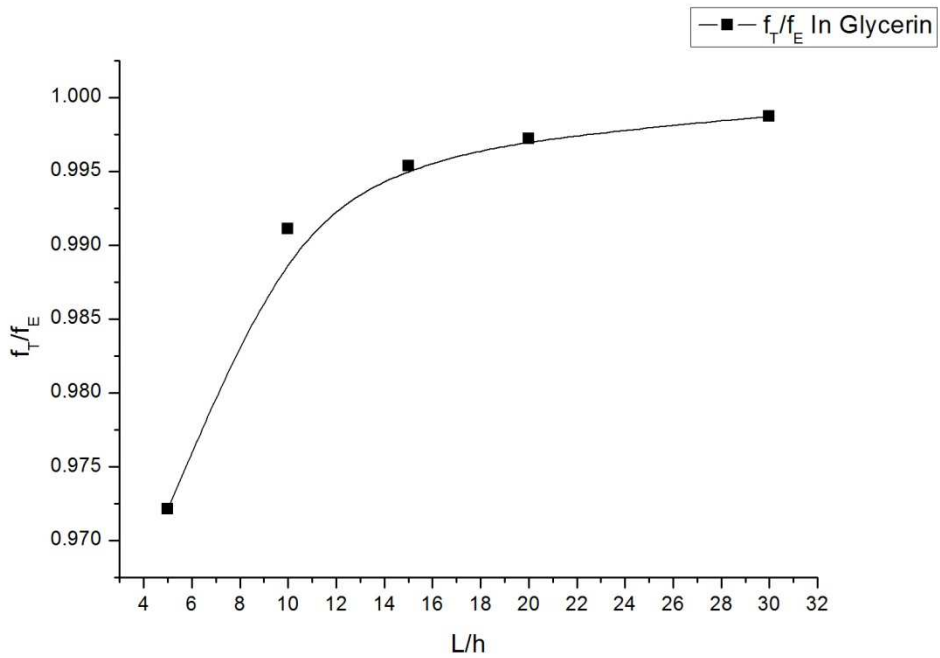


圖 4-17 L/h 於甘油介質中對 f_T/f_E 之影響(第一模態)

表 4-20 L/h 於各流體環境中之頻率與 f_T/f_E 之比值(第一模態)

L	540		360		270	
L/h	30		20		15	
$f_{T,vacuum} (Hz)$	82567	0.9992	185593	0.9982	329492	0.9969
$f_{E,vacuum} (Hz)$	82632		185922		330527	
$f_{T,air} (Hz)$	82505	0.9992	185474	0.9982	329298	0.9969
$f_{E,air} (Hz)$	82569		185801		330332	
$f_{T,water} (Hz)$	60366	0.9993	138075	0.9984	247347	0.9971
$f_{E,water} (Hz)$	60410		138300		248063	
$f_{T,glycerin} (Hz)$	3111	0.9987	16111	0.9972	49823	0.9954
$f_{E,glycerin} (Hz)$	3115		16156		50055	

表 4-21 續表 4-20 L/h 於各流體環境中之頻率與 f_T/f_E 之比值(第一模態)

L	180		90	
L/h	10		5	
$f_{T,vacuum} (Hz)$	738480	0.9930	2894486	0.9730
$f_{E,vacuum} (Hz)$	743686		2974745	
$f_{T,air} (Hz)$	738090	0.9930	2893141	0.9730
$f_{E,air} (Hz)$	743289		2973338	
$f_{T,water} (Hz)$	559646	0.9936	2218239	0.9751
$f_{E,water} (Hz)$	563279		2274989	
$f_{T,glycerin} (Hz)$	208303	0.9911	1417772	0.9721
$f_{E,glycerin} (Hz)$	210178		1458440	

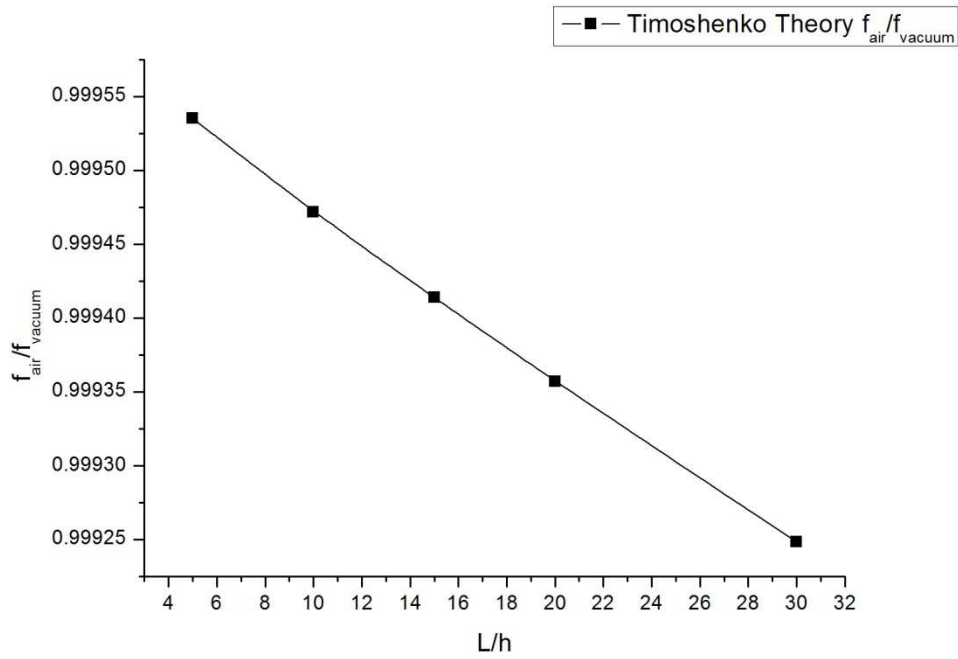


圖 4-18 L/h 與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(空氣、真空)(第一模態)

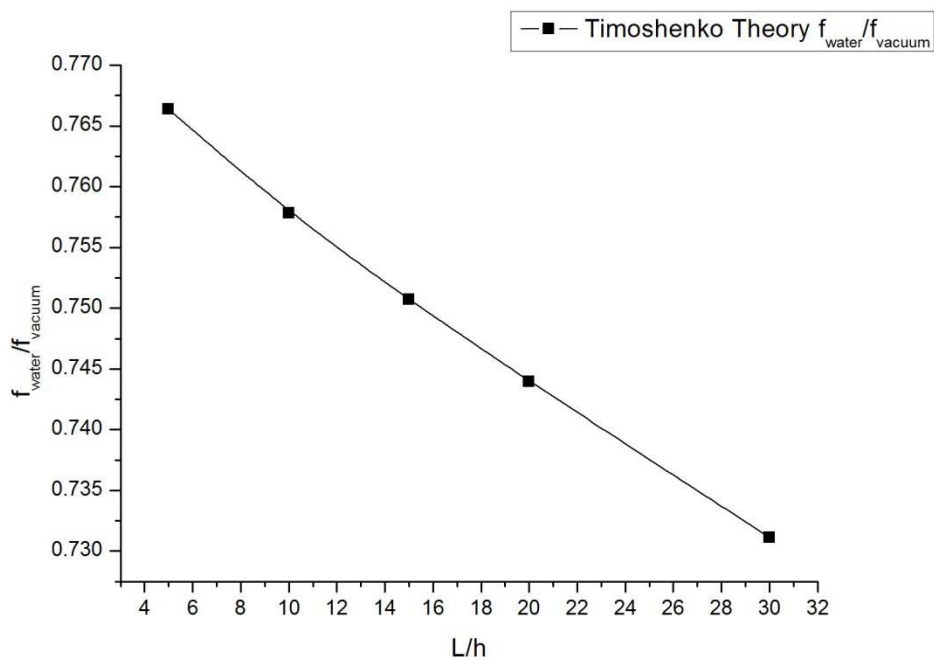


圖 4-19 L/h 與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(水、真空)(第一模態)

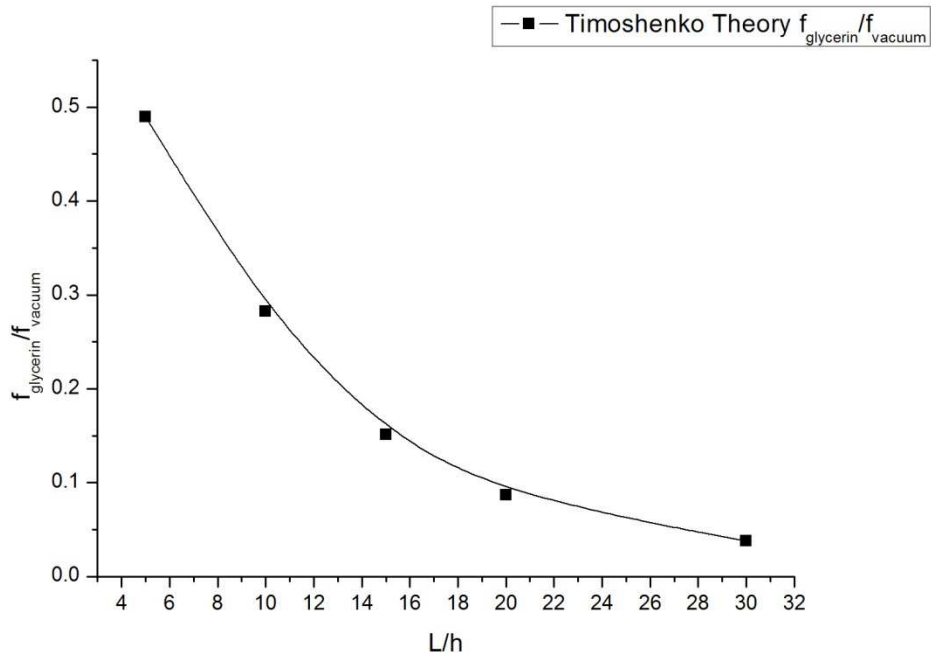


圖 4-20 L/h 與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(甘油、真空)(第一模態)

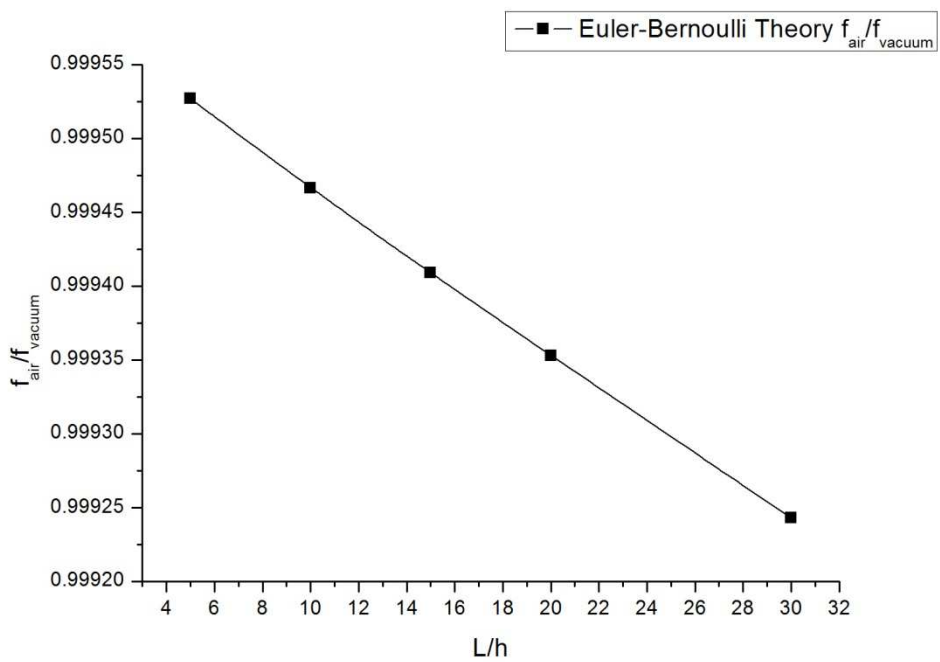


圖 4-21 L/h 與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(空氣、真空)(第一模態)

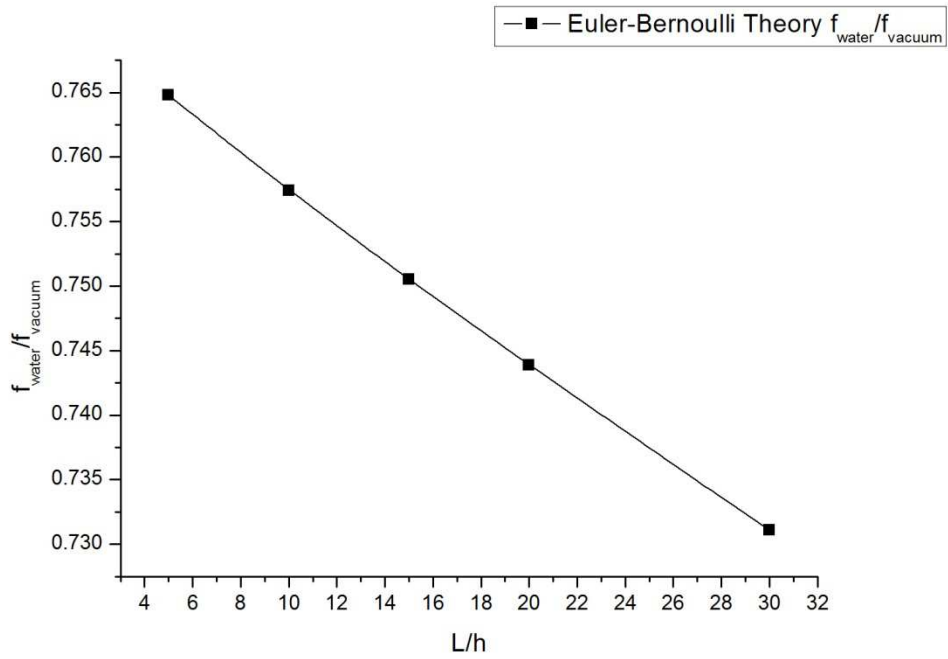


圖 4-22 L/h 與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(水、真空)(第一模態)

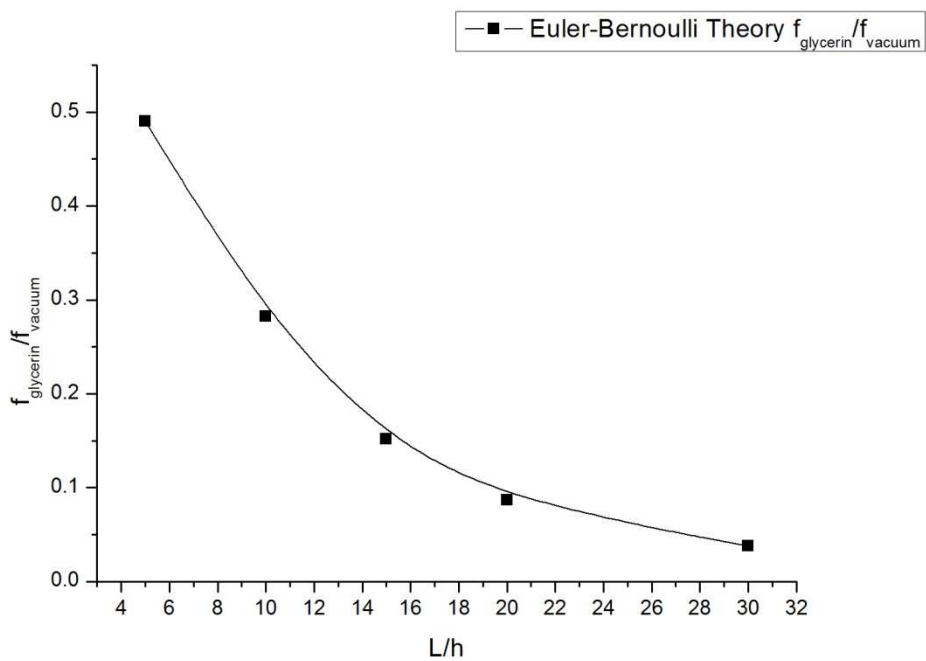


圖 4-23 L/h 與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(甘油、真空)(第一模態)

表 4-22 L/h 與流體環境於兩理論對頻率之影響

L	540	360	270	180	90
L/h	30	20	15	10	5
$f_{T,air}/f_{T,vacuum}$	0.99925	0.99936	0.99941	0.99947	0.99954
$f_{T,water}/f_{T,vacuum}$	0.73112	0.74396	0.75069	0.75784	0.76637
$f_{T,glycerin}/f_{T,vacuum}$	0.03767	0.08681	0.15121	0.28207	0.48982
$f_{E,air}/f_{E,vacuum}$	0.99924	0.99935	0.99941	0.99947	0.99953
$f_{E,water}/f_{E,vacuum}$	0.73107	0.74386	0.75051	0.75741	0.76477
$f_{E,glycerin}/f_{E,vacuum}$	0.03769	0.08690	0.15144	0.28262	0.49027



4-2-3 兩理論差異與流體影響於高模態時之關係

由前一小節可得兩結論： L/h 越小， f_T/f_E 越小； L/h 越大，受流體影響越大。由於前節皆以第一模態共振頻做為討論，因此本小節將分析於高模態時 Timoshenko 梁理論與 Euler 梁理論於各流體介質中之頻率關係。將藉由尺寸 L/h 分類，共將 L/h 分為 30、16.67、10、5 四種尺寸各別討論兩理論於各流體介質中的振動行為。

L/h=30

由調整結構長度 $L=540\mu m$ 、結構截面厚度 $h=18\mu m$ ，使得 $L/h=30$ ，分別探討將結構浸入真空、空氣、水、甘油四種不同的介質中於第一模態至第八模態頻率間的關係，其詳細尺寸如表 4-23 所示。

圖 4-24 至圖 4-27 分別為尺寸 $L/h=30$ 之結構在真空、空氣、水、甘油四種不同介質中，第一模態至第八模態之 Timoshenko 梁理論與 Euler 梁理論的差異。由圖中可以看到，無論是在哪一種介質中，皆有模態階數越高，兩理論差異越大之現象，因為結構較為細長的關係，於第一模態時，無論在哪一個流體介質中， f_T/f_E 皆非常接近 1，幾乎沒有差異；在第八模態時兩理論之頻率差異已有 10%。可見在高模態時，會使得 Euler 梁理論與實際情況差距偏離得更大，故若有需要以高模態情況量測時，使用 Timoshenko 梁理論做為參考依據較為恰當。各模態詳細頻率與 f_T/f_E 比值如表 4-24、表 4-25 所示。

圖 4-28 至圖 4-30 為模態階數與各流體環境於 Timoshenko 梁理論中頻率的影響；圖 4-31 至圖 4-33 為模態階數與各流體環境於 Euler 梁理論中頻率的影響，以兩不同流體環境中頻率之比值表示之。由圖中可看到，無論是哪一理論，皆為

模態階數越高，兩不同流體環境頻率之比值越大。分別以 Timoshenko 梁理論與 Euler 梁理論取第一模態、第四模態、第八模態之甘油中頻率與真空中頻率之比值 $f_{T, glycerin} / f_{T, vacuum}$ 、 $f_{E, glycerin} / f_{E, vacuum}$ ，其數值於第一模態為 0.037675、0.037694，第四模態為 0.484486、0.48498，第八模態為 0.613297、0.6117。可知無論是何種理論前提下模態階數越高，流體對結構頻率的影響就越小。詳細比值數據如表 4-26 所示。

表 4-23 $L/h = 30$ 模態階數與流體環境對頻率影響之結構參數

結構參數	數值		
懸臂梁長度 L	540 μm		
懸臂梁寬度 b	36 μm		
懸臂梁厚度 h	18 μm		
楊氏係數 E	160 GPa		
剪切模數 G	62.5 GPa		
結構密度 ρ_s	2330 kg/m^3		
面積修正因子 κ	$\frac{2}{3}$		
流體參數	空氣	水	甘油
流體密度 ρ	1.18 kg/m^3	997 kg/m^3	1257.6 kg/m^3
流體黏滯係數 μ	$1.86 \times 10^{-5} N \cdot s/m^2$	$8.59 \times 10^{-4} N \cdot s/m^2$	$14939 \times 10^{-4} N \cdot s/m^2$

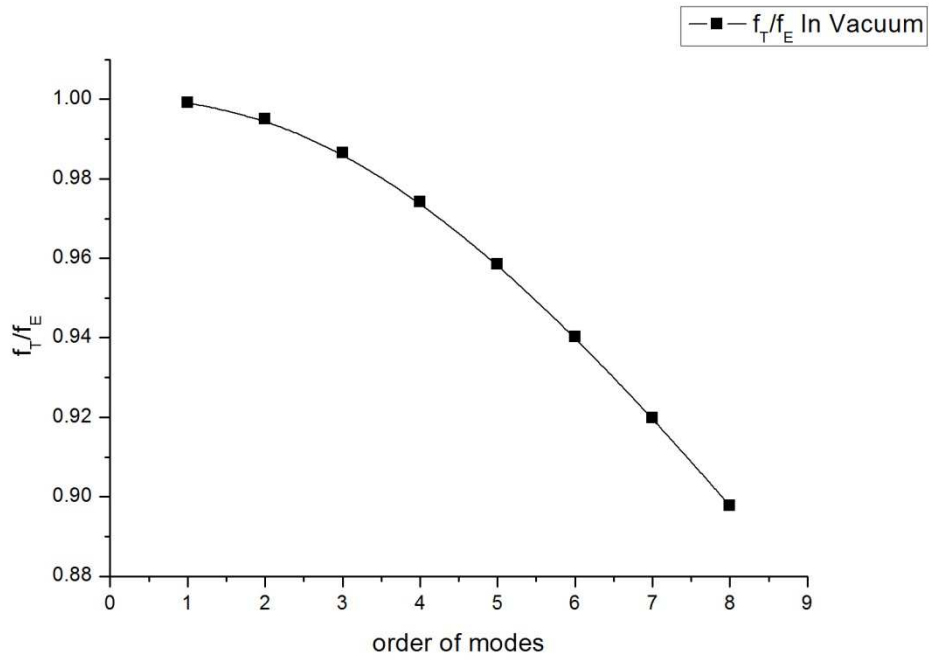


圖 4-24 $L/h = 30$ 模態階數與 f_T/f_E 於真空介質中之關係

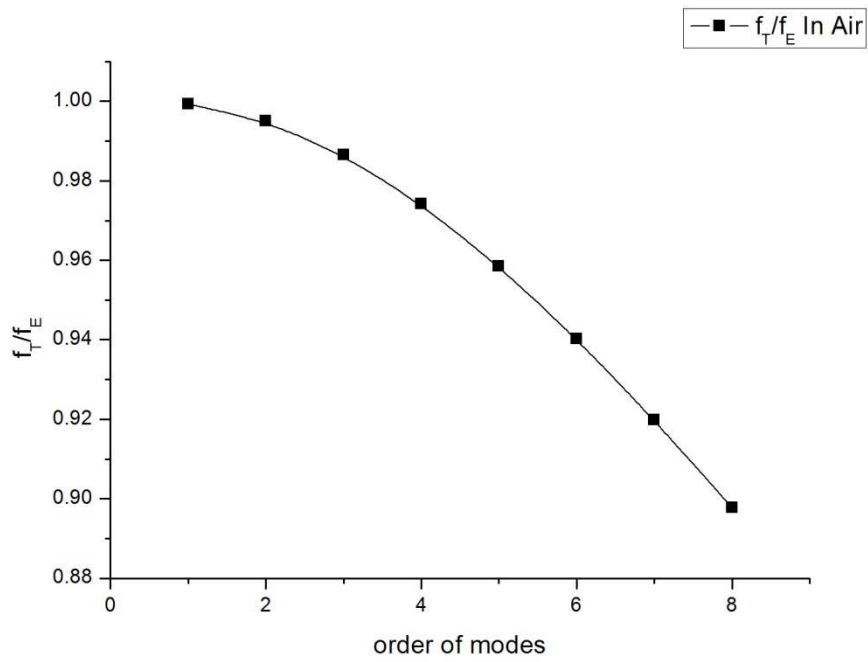


圖 4-25 $L/h = 30$ 模態階數與 f_T/f_E 於空氣介質中之關係

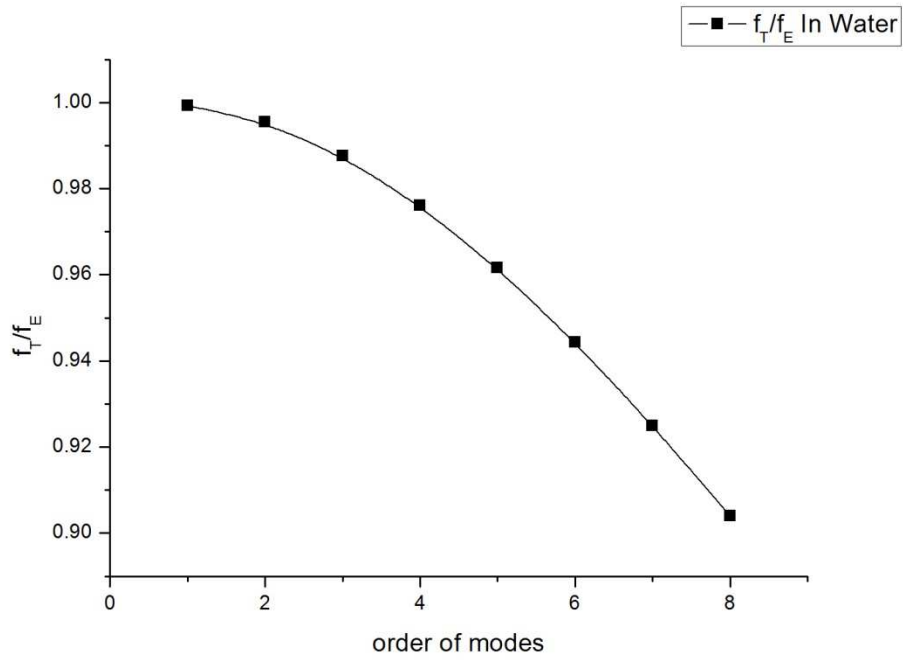


圖 4-26 $L/h = 30$ 模態階數與 f_T/f_E 於水介質中之關係

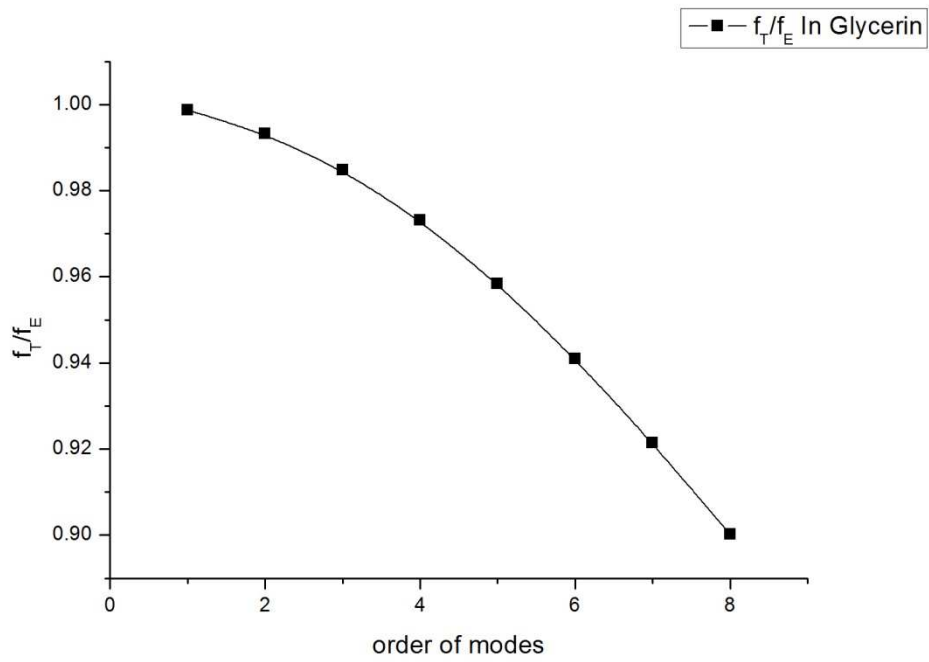


圖 4-27 $L/h = 30$ 模態階數與 f_T/f_E 於甘油介質中之關係

表 4-24 $L/h=30$ 各模態階數於各流體環境中之頻率與 f_T/f_E 之比值

模態階數	1		2		3	
$f_{T,vacuum} (Hz)$	82567	0.99921	515311	0.99511	1430426	0.98651
$f_{E,vacuum} (Hz)$	82632		517845		1449980	
$f_{T,air} (Hz)$	82505	0.99922	515027	0.99511	1429720	0.98652
$f_{E,air} (Hz)$	82569		517559		1449262	
$f_{T,water} (Hz)$	60366	0.99928	389022	0.99549	1090447	0.98756
$f_{E,water} (Hz)$	60410		390785		1104183	
$f_{T,glycerin} (Hz)$	3111	0.99872	113341	0.99327	562611	0.98481
$f_{E,glycerin} (Hz)$	3115		114108		571287	
模態階數	4		5		6	
$f_{T,vacuum} (Hz)$	2768000	0.97417	4502310	0.95855	6597248	0.94022
$f_{E,vacuum} (Hz)$	2841383		4697009		7016713	
$f_{T,air} (Hz)$	2766709	0.97418	4500286	0.95855	6594360	0.94023
$f_{E,air} (Hz)$	2840046		4694869		7013582	
$f_{T,water} (Hz)$	2120626	0.97612	3461272	0.96155	5085955	0.94434
$f_{E,water} (Hz)$	2172499		3599663		5385713	
$f_{T,glycerin} (Hz)$	1341073	0.97320	2418699	0.95844	3769575	0.94099
$f_{E,glycerin} (Hz)$	1378009		2523591		4005959	

表 4-25 續表 4-24 $L/h = 30$ 各模態階數於各流體環境中之頻率與 f_T/f_E 之比值

模態階數	7		8	
$f_{T,vacuum} (Hz)$	9013527	0.91979	11713905	0.89780
$f_{E,vacuum} (Hz)$	9799592		13047305	
$f_{T,air} (Hz)$	9009665	0.91980	11708973	0.89781
$f_{E,air} (Hz)$	9795286		13041637	
$f_{T,water} (Hz)$	6965380	0.92500	9071281	0.90403
$f_{E,water} (Hz)$	7530113		10034251	
$f_{T,glycerin} (Hz)$	5366789	0.92140	7184129	0.90015
$f_{E,glycerin} (Hz)$	5824632		7981077	

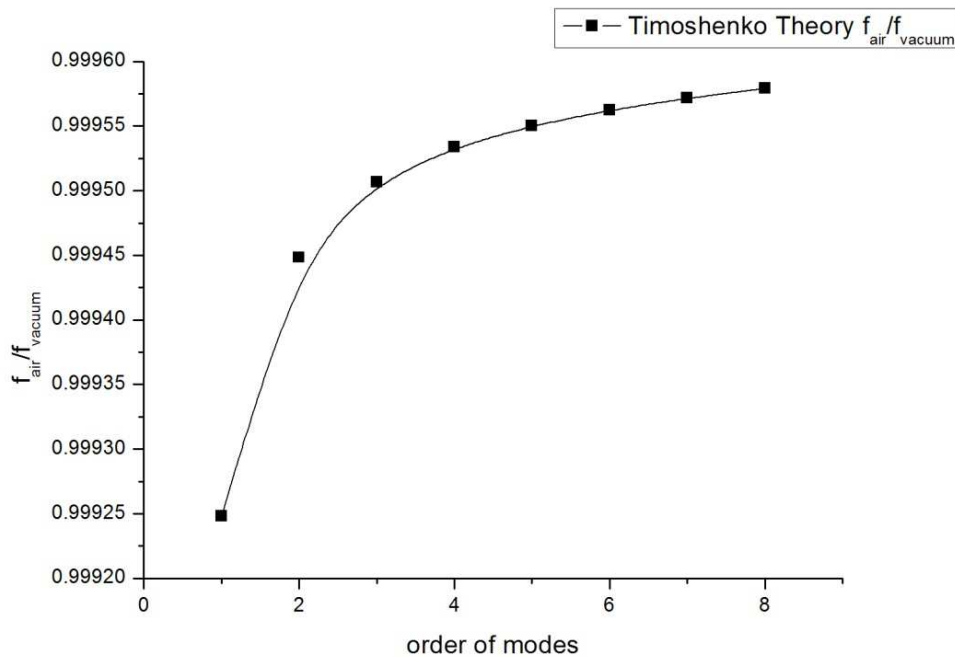


圖 4-28 $L/h = 30$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(空氣、真空)

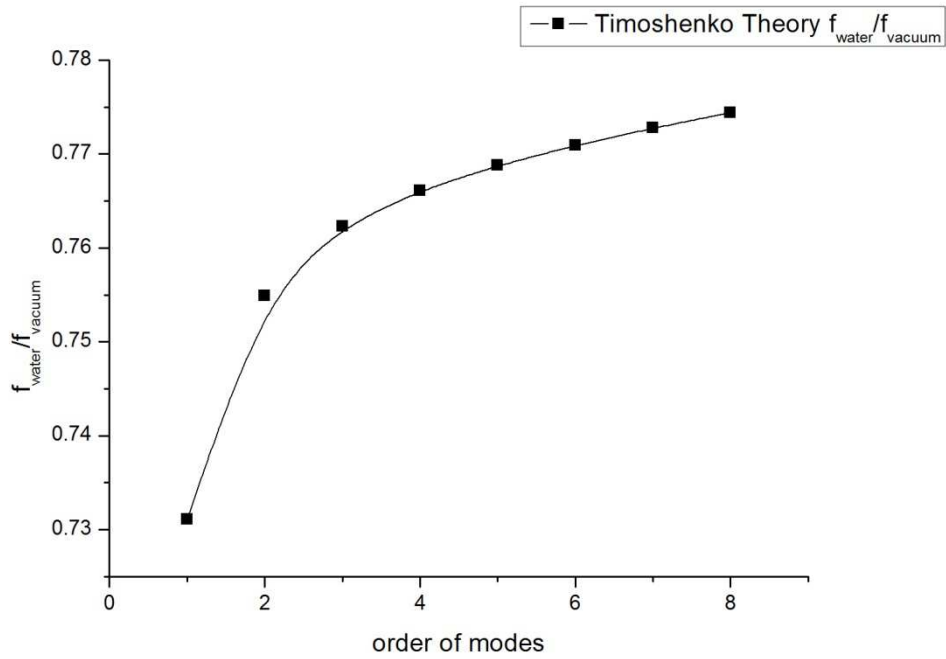


圖 4-29 $L/h=30$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(水、真空)

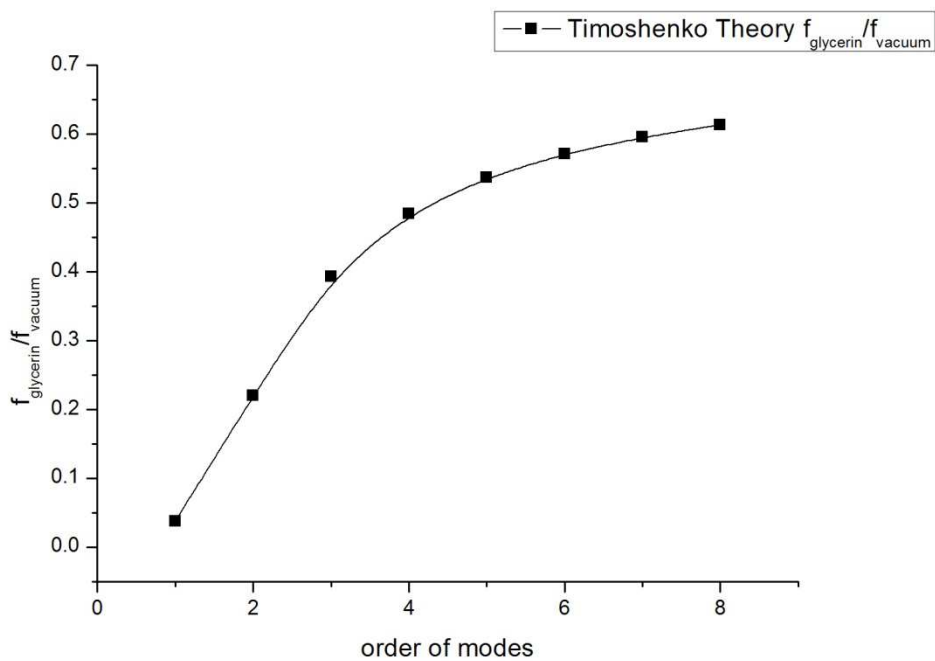


圖 4-30 $L/h=30$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(甘油、真空)

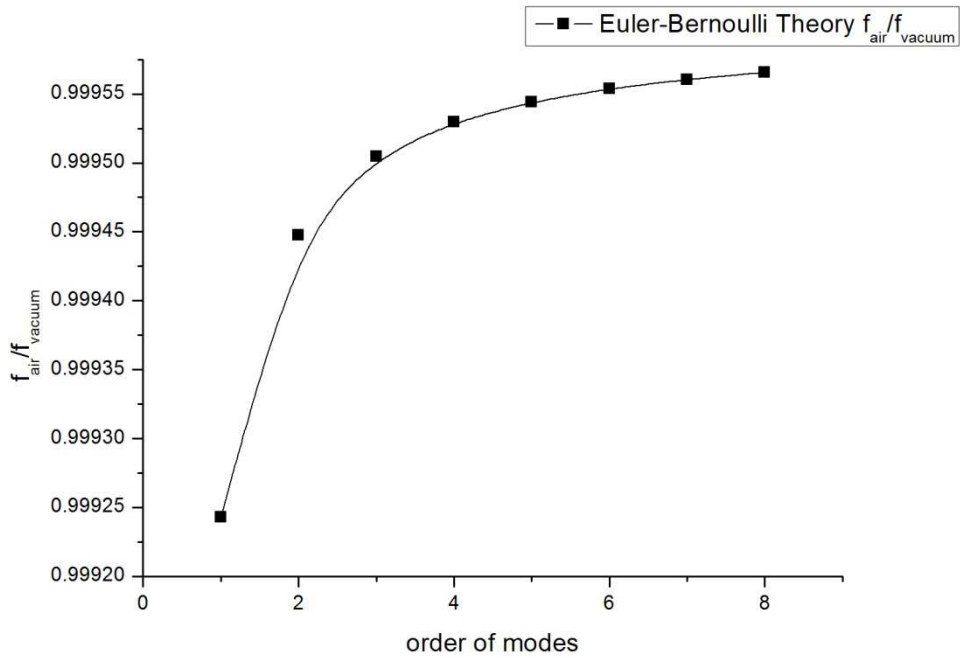


圖 4-31 $L/h = 30$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(空氣、真空)

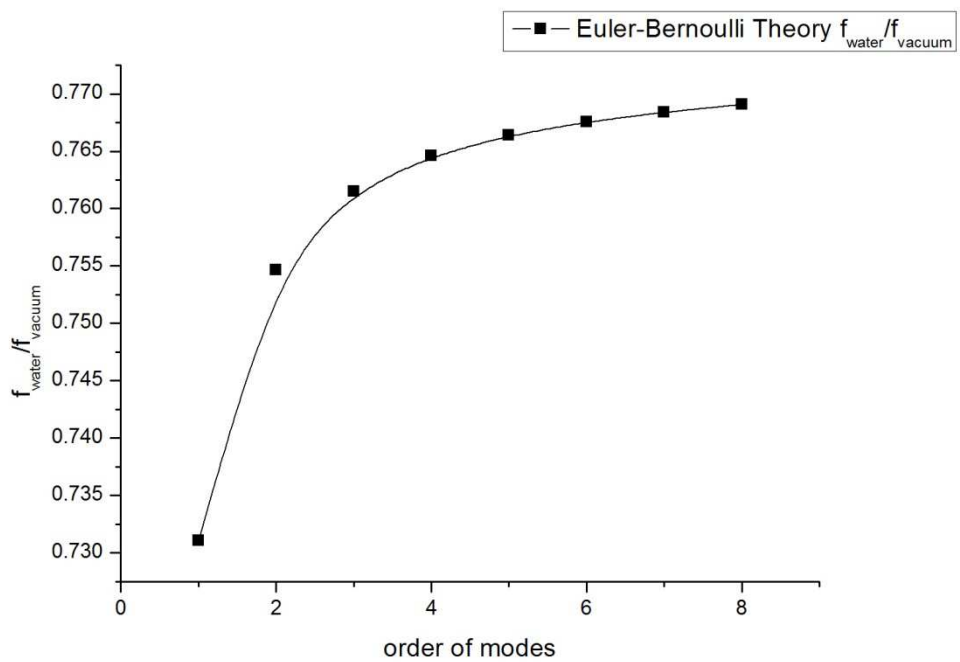


圖 4-32 $L/h = 30$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(水、真空)

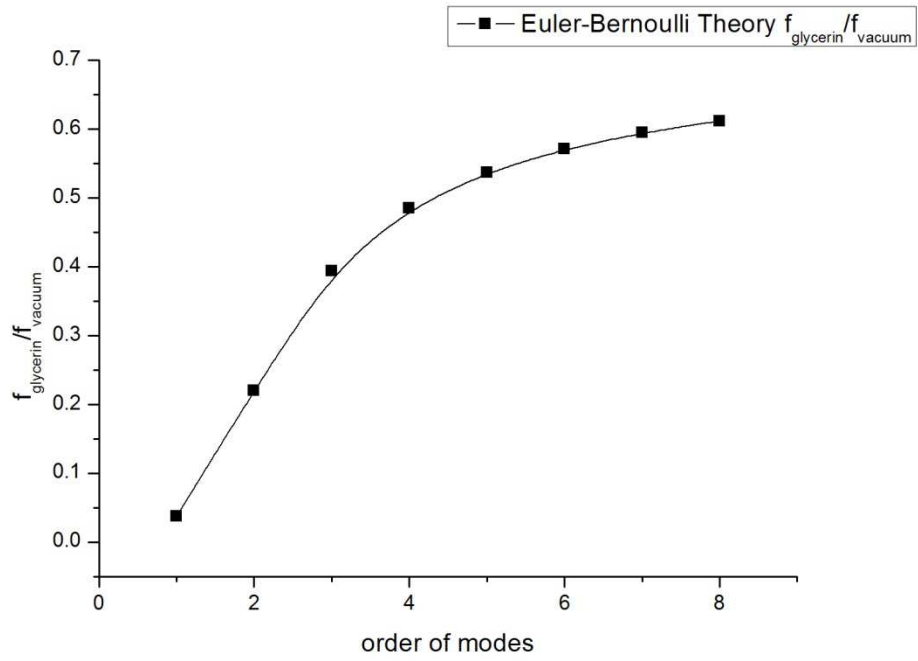


圖 4-33 $L/h=30$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(甘油、真空)



表 4-26 $L/h = 30$ 流體環境對各模態中頻率之影響

模態階數	1	2	3	4
$f_{T,air}/f_{T,vacuum}$	0.99925	0.99945	0.99951	0.99953
$f_{T,water}/f_{T,vacuum}$	0.73112	0.75493	0.76232	0.76612
$f_{T,glycerin}/f_{T,vacuum}$	0.03767	0.21995	0.39332	0.48449
$f_{E,air}/f_{E,vacuum}$	0.99924	0.99945	0.99950	0.99953
$f_{E,water}/f_{E,vacuum}$	0.73107	0.75464	0.76152	0.76459
$f_{E,glycerin}/f_{E,vacuum}$	0.03769	0.22035	0.39400	0.48498
模態階數	5	6	7	8
$f_{T,air}/f_{T,vacuum}$	0.99955	0.99956	0.99957	0.99958
$f_{T,water}/f_{T,vacuum}$	0.76878	0.77092	0.77277	0.77440
$f_{T,glycerin}/f_{T,vacuum}$	0.53721	0.57139	0.59541	0.61330
$f_{E,air}/f_{E,vacuum}$	0.99954	0.99955	0.99956	0.99957
$f_{E,water}/f_{E,vacuum}$	0.76637	0.76755	0.76841	0.76907
$f_{E,glycerin}/f_{E,vacuum}$	0.53728	0.57092	0.59437	0.61170

L/h=16.67

調整結構長度 $L=300\mu\text{m}$ 、結構截面厚度 $h=18\mu\text{m}$ ，使得 $L/h=16.67$ ，分別探討將結構浸入真空、空氣、水、甘油四種不同的介質中於第一模態至第八模態頻率間的關係，其詳細尺寸如表 4-27 所示。

圖 4-34 至圖 4-37 分別為尺寸 $L/h=16.67$ 之結構在真空、空氣、水、甘油四種不同介質中，第一模態至第八模態之 Timoshenko 梁理論與 Euler 梁理論的差異。由圖中可以看到，與尺寸 $L/h=30$ 一樣，無論是在哪一種介質中，皆有模態階數越高，兩理論差異越大之現象。由於結構之長度與厚度比值已較前一部分小，於第一模態時，兩理論之頻率差異也較 $L/h=30$ 稍大， f_T/f_E 約為 0.997；在第八模態時兩理論之頻率差異 f_T/f_E 也有 0.76。各模態詳細頻率與 f_T/f_E 比值如表 4-28、表 4-29 所示。

圖 4-38 至圖 4-40 為模態階數與各流體環境於 Timoshenko 梁理論中頻率的影響；圖 4-41 至圖 4-43 為模態階數與各流體環境於 Euler 梁理論中頻率的影響，以兩不同流體環境中頻率之比值表示之。由圖中可看到，無論是哪一理論，皆為模態階數越高，兩不同流體環境頻率之比值越大。分別以 Timoshenko 梁理論與 Euler 梁理論取第一模態、第四模態、第八模態之甘油中頻率與真空中頻率之比值 $f_{T, \text{glycerin}}/f_{T, \text{vacuum}}$ 、 $f_{E, \text{glycerin}}/f_{E, \text{vacuum}}$ ，其數值於第一模態為 0.124289、0.12446，第四模態為 0.591193、0.590285，第八模態為 0.665957、0.662742。可知無論是何種理論前提下模態階數越高，流體對結構頻率的影響就越小。詳細比值數據如表 4-30 所示。

表 4-27 $L/h=16.67$ 模態階數與流體環境對頻率影響之結構參數

結構參數		數值		
懸臂梁長度 L		300 μm		
懸臂梁寬度 b		36 μm		
懸臂梁厚度 h		18 μm		
楊氏係數 E		160 GPa		
剪切模數 G		62.5 GPa		
結構密度 ρ_s		2330 $\frac{kg}{m^3}$		
面積修正因子 κ		$\frac{2}{3}$		
流體參數	空氣	水	甘油	
流體密度 ρ	1.18 $\frac{kg}{m^3}$	997 $\frac{kg}{m^3}$	1257.6 $\frac{kg}{m^3}$	
流體黏滯係數 μ	$1.86 \times 10^{-5} \frac{N \cdot s}{m^2}$	$8.59 \times 10^{-4} \frac{N \cdot s}{m^2}$	$14939 \times 10^{-4} \frac{N \cdot s}{m^2}$	

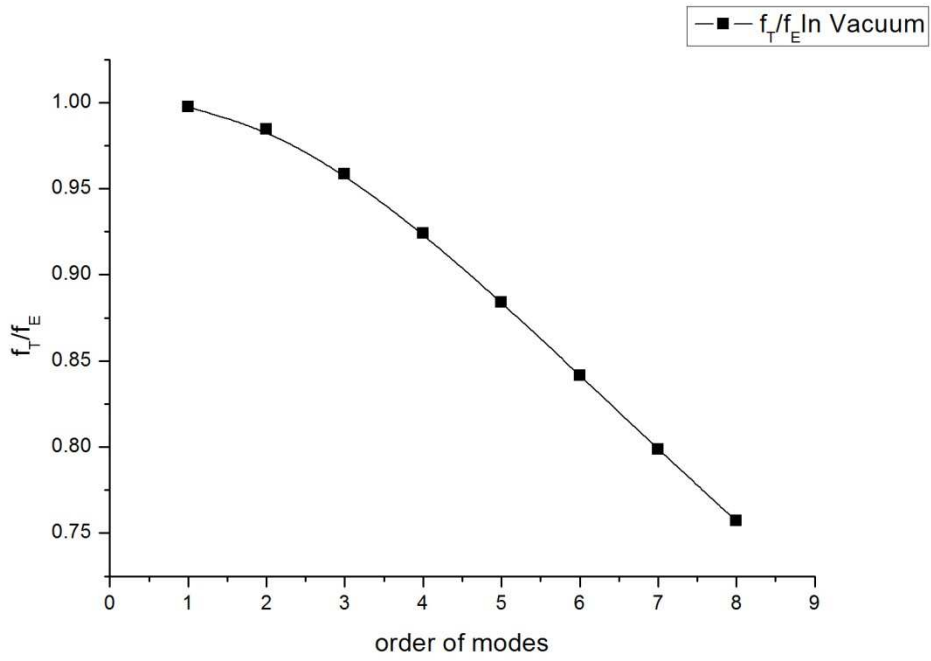


圖 4-34 $L/h=16.67$ 模態階數與 f_T/f_E 於真空介質中之關係

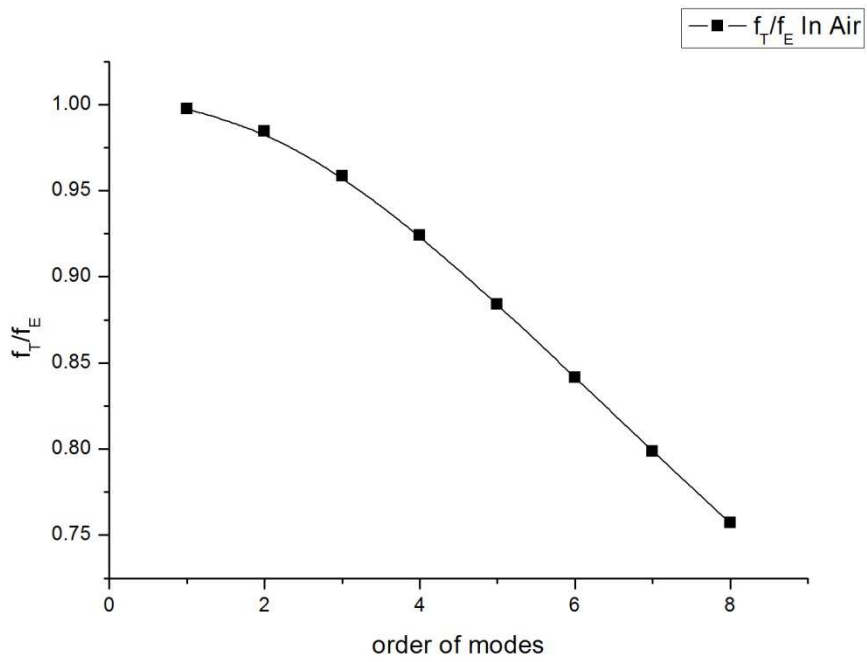


圖 4-35 $L/h=16.67$ 模態階數與 f_T/f_E 於空氣介質中之關係

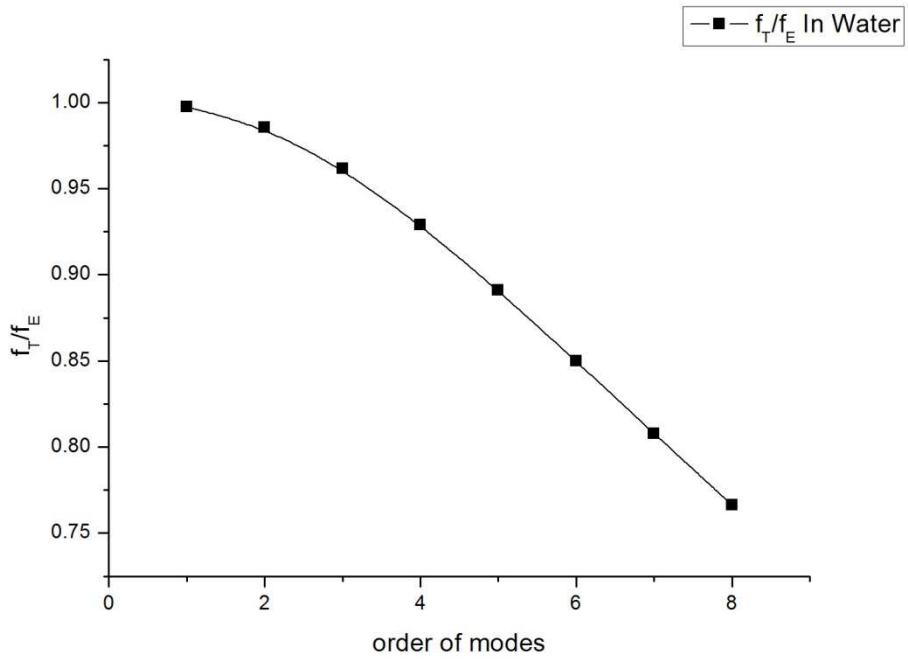


圖 4-36 $L/h=16.67$ 模態階數與 f_T/f_E 於水介質中之關係

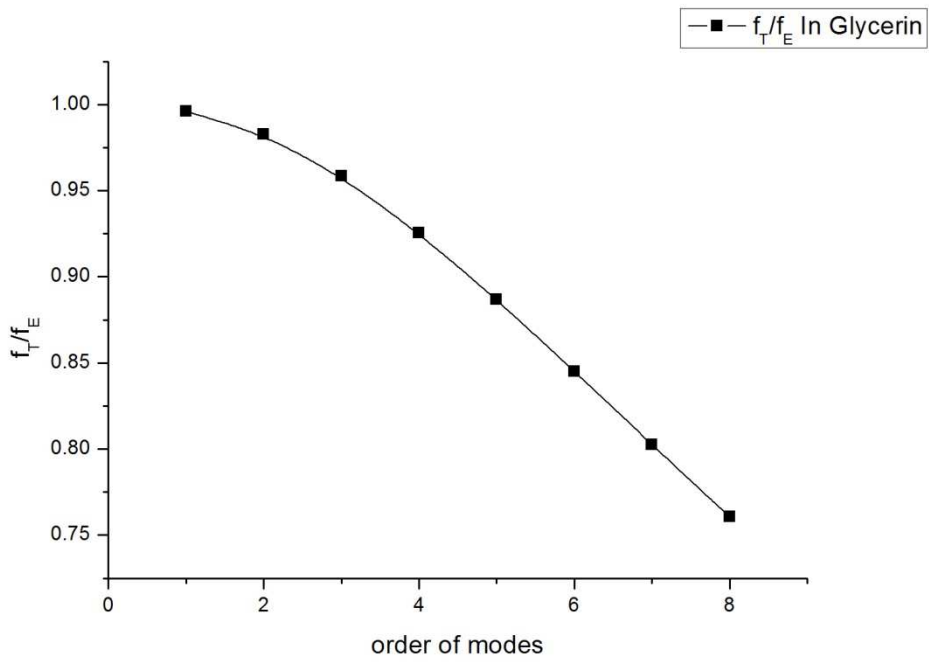


圖 4-37 $L/h=16.67$ 模態階數與 f_T/f_E 於甘油介質中之關係

表 4-28 $L/h=16.67$ 各模態階數於各流體環境中之頻率與 f_T/f_E 之比值

模態階數	1		2		3	
$f_{T,vacuum} (Hz)$	267047	0.99746	1651734	0.98445	4503163	0.95854
$f_{E,vacuum} (Hz)$	267727		1677817		4697936	
$f_{T,air} (Hz)$	266885	0.99756	1650930	0.98445	4501139	0.95854
$f_{E,air} (Hz)$	267539		1677002		4695846	
$f_{T,water} (Hz)$	199862	0.99743	1260590	0.98565	3461933	0.96154
$f_{E,water} (Hz)$	200376		1278942		3600416	
$f_{T,glycerin} (Hz)$	33191	0.99613	685772	0.98287	2419240	0.95842
$f_{E,glycerin} (Hz)$	33320		697727		2524207	
模態階數	4		5		6	
$f_{T,vacuum} (Hz)$	8506530	0.92394	13454333	0.88411	19134132	0.84165
$f_{E,vacuum} (Hz)$	9206779		15217909		22734151	
$f_{T,air} (Hz)$	8502871	0.92394	13448721	0.88412	19126330	0.84166
$f_{E,air} (Hz)$	9202791		15211372		22724459	
$f_{T,water} (Hz)$	6570603	0.92894	10431017	0.89089	14877934	0.84977
$f_{E,water} (Hz)$	7073241		11708550		17508143	
$f_{T,glycerin} (Hz)$	5029005	0.92537	8368552	0.88683	12283430	0.84515
$f_{E,glycerin} (Hz)$	5434559		9436491		14533977	

表 4-29 續表 4-28 $L/h=16.67$ 各模態階數於各流體環境中之頻率與 f_T/f_E 之比值

模態階數	7		8	
$f_{T,vacuum} (Hz)$	25363190	0.79882	32000748	0.75700
$f_{E,vacuum} (Hz)$	31750679		42273270	
$f_{T,air} (Hz)$	25353023	0.79884	31988082	0.75702
$f_{E,air} (Hz)$	31737269		42255543	
$f_{T,water} (Hz)$	19764597	0.80782	24975230	0.76644
$f_{E,water} (Hz)$	24466453		32585871	
$f_{T,glycerin} (Hz)$	16634635	0.80262	21310992	0.76067
$f_{E,glycerin} (Hz)$	20725453		28016210	

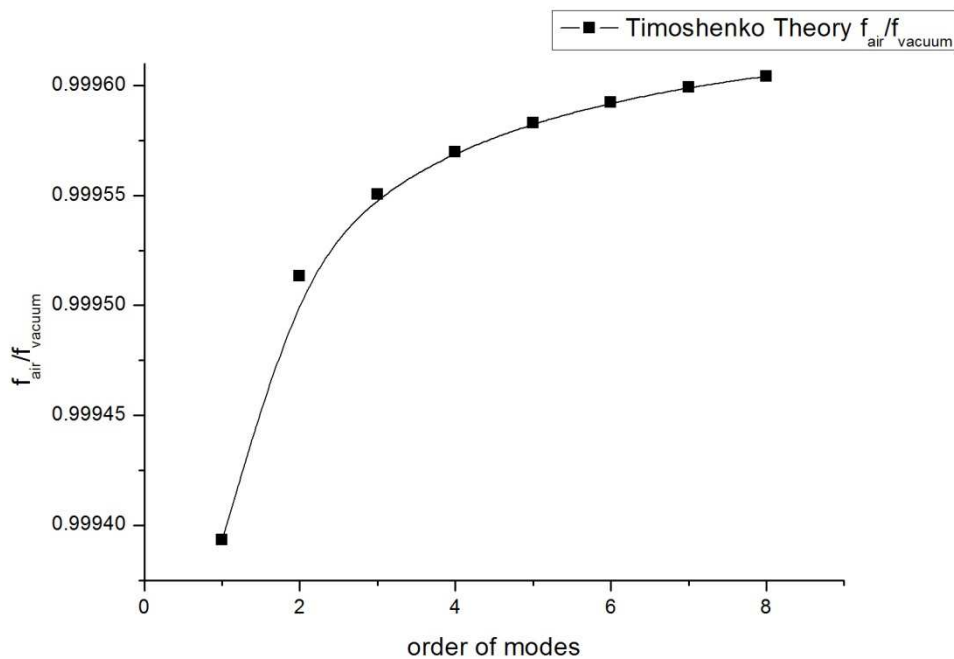


圖 4-38 $L/h=16.67$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響

(空氣、真空)

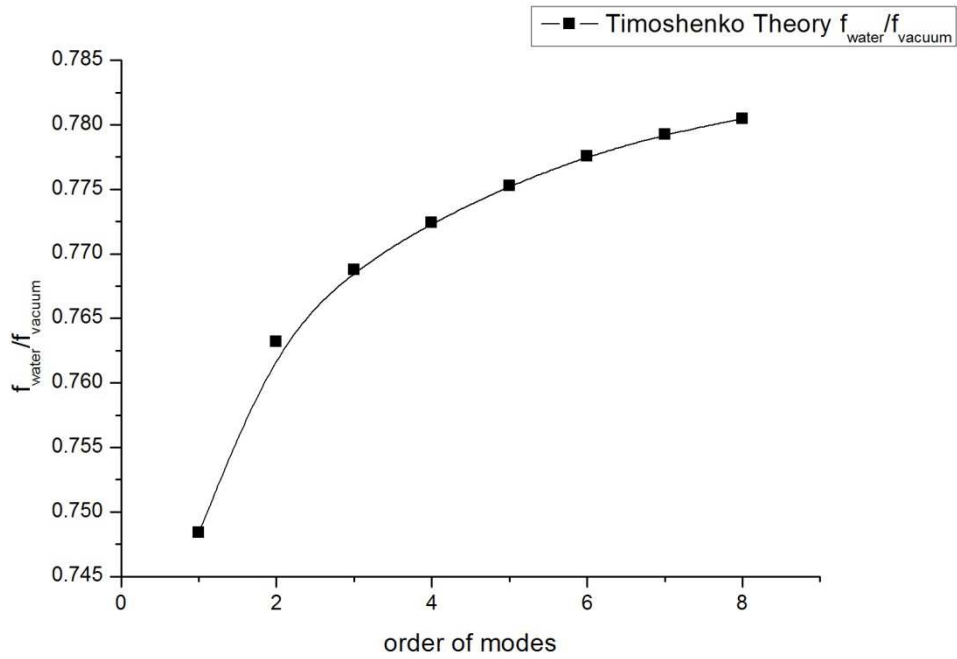


圖 4-39 $L/h=16.67$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響

(水、真空)

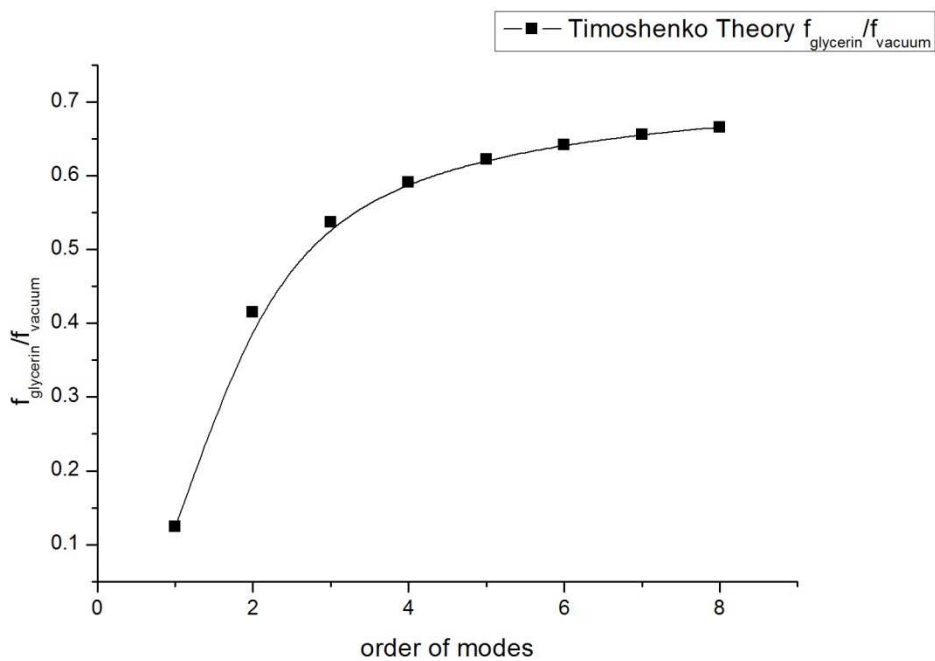


圖 4-40 $L/h=16.67$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響

(甘油、真空)

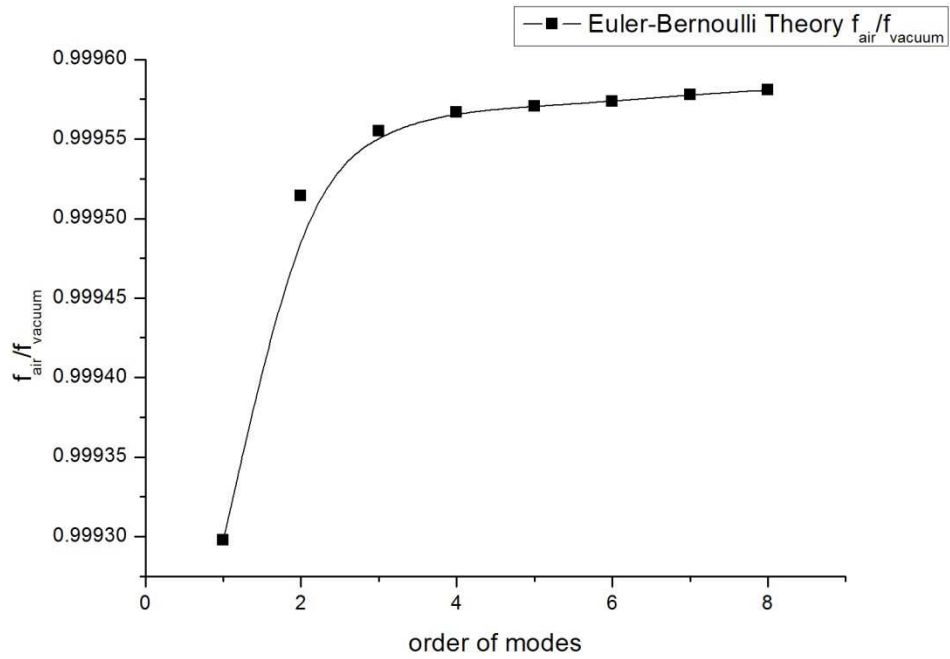


圖 4-41 $L/h=16.67$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(空氣、真空)

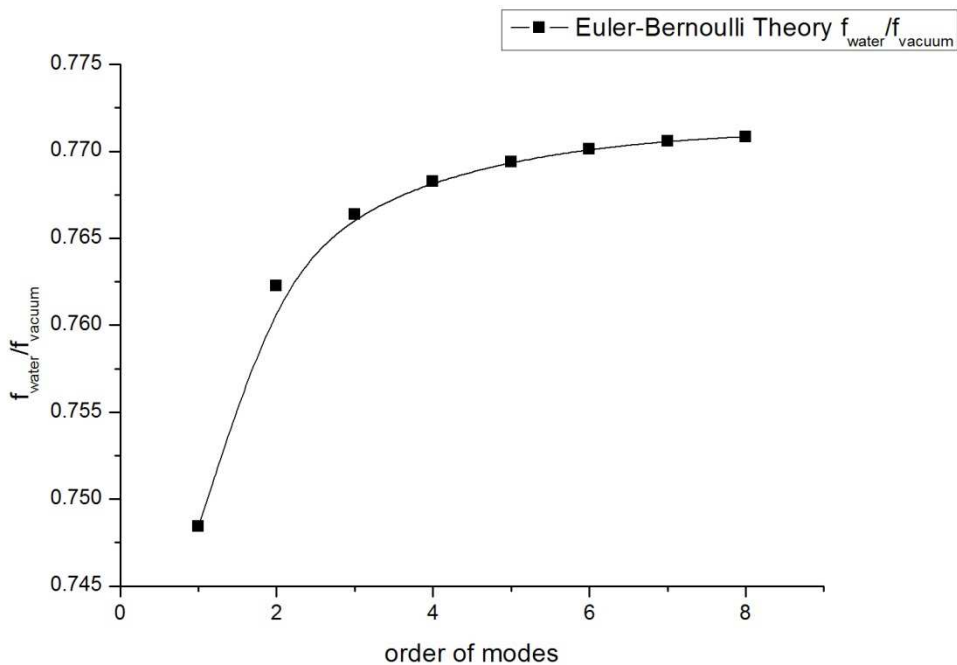


圖 4-42 $L/h=16.67$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(水、真空)

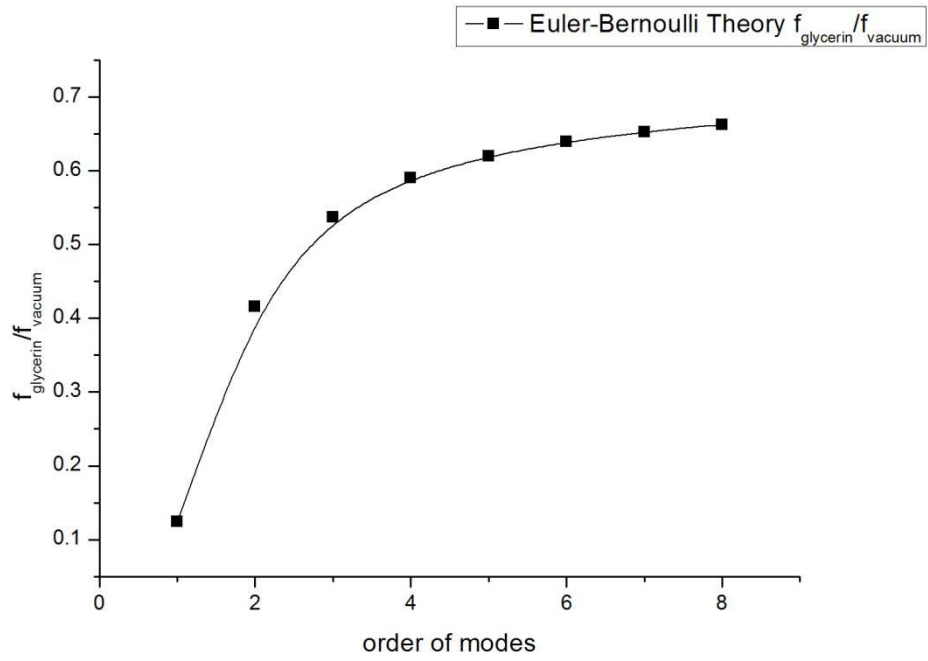


圖 4-43 $L/h=16.67$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(甘油、



表 4-30 $L/h=16.67$ 流體環境對各模態中頻率之影響

模態階數	1	2	3	4
$f_{T,air}/f_{T,vacuum}$	0.99939	0.99951	0.99955	0.99957
$f_{T,water}/f_{T,vacuum}$	0.74842	0.76319	0.76878	0.77242
$f_{T,glycerin}/f_{T,vacuum}$	0.12429	0.41518	0.53723	0.59119
$f_{E,air}/f_{E,vacuum}$	0.99930	0.99951	0.99956	0.99957
$f_{E,water}/f_{E,vacuum}$	0.74843	0.76227	0.76638	0.76826
$f_{E,glycerin}/f_{E,vacuum}$	0.12446	0.41585	0.53730	0.59028
模態階數	5	6	7	8
$f_{T,air}/f_{T,vacuum}$	0.99958	0.99959	0.99960	0.99960
$f_{T,water}/f_{T,vacuum}$	0.77529	0.77756	0.77926	0.78046
$f_{T,glycerin}/f_{T,water}$	0.62200	0.64196	0.65586	0.66595
$f_{E,air}/f_{E,vacuum}$	0.99957	0.99957	0.99958	0.99958
$f_{E,water}/f_{E,vacuum}$	0.76939	0.77013	0.77058	0.77084
$f_{E,glycerin}/f_{E,vacuum}$	0.62009	0.63930	0.65276	0.66274

L/h=10

調整結構長度 $L=180\mu m$ 、結構截面厚度 $h=18\mu m$ ，使得 $L/h=10$ ，分別探討將結構浸入真空、空氣、水、甘油四種不同的介質中於第一模態至第八模態頻率間的關係，其詳細尺寸如表 4-31 所示。

圖 4-44 至圖 4-47 分別為尺寸 $L/h=10$ 之結構在真空、空氣、水、甘油四種不同介質中，第一模態至第八模態之 Timoshenko 梁理論與 Euler 梁理論的差異。由圖中可以看到，與前兩個尺寸一樣，無論是在哪一種介質中，皆有模態階數越高，兩理論差異越大之現象。由於結構之長度與厚度比值已較前一部分更小，於第一模態時，兩理論之頻率差異也較大， f_T/f_E 約為 0.993；在第八模態時兩理論之頻率差異 f_T/f_E 也有 0.58，已有相當明顯的差距。各模態詳細頻率與 f_T/f_E 比值如表 4-32、表 4-33 所示。

圖 4-48 至圖 4-50 為模態階數與各流體環境於 Timoshenko 梁理論中頻率的影響；圖 4-51 至圖 4-53 為模態階數與各流體環境於 Euler 梁理論中頻率的影響，以兩不同流體環境中頻率之比值表示之。由圖中可看到，無論是哪一理論，皆為模態階數越高，兩不同流體環境頻率之比值越大。分別以 Timoshenko 梁理論與 Euler 梁理論取第一模態、第四模態、第八模態之甘油中頻率與真空中頻率之比值 $f_{T, glycerin}/f_{T, vacuum}$ 、 $f_{E, glycerin}/f_{E, vacuum}$ ，其數值於第一模態為 0.282067、0.282616，第四模態為 0.64712、0.644284，第八模態為 0.689994、0.689411。可知無論是何種理論前提下模態階數越高，流體對結構頻率的影響就越小。詳細比值數據如表 4-34 所示。

表 4-31 $L/h=10$ 模態階數與流體環境對頻率影響之結構參數

結構參數	數值		
懸臂梁長度 L	180 μm		
懸臂梁寬度 b	36 μm		
懸臂梁厚度 h	18 μm		
楊氏係數 E	160 GPa		
剪切模數 G	62.5 GPa		
結構密度 ρ_s	2330 $\frac{kg}{m^3}$		
面積修正因子 κ	$\frac{2}{3}$		
流體參數	空氣	水	甘油
流體密度 ρ	1.18 $\frac{kg}{m^3}$	997 $\frac{kg}{m^3}$	1257.6 $\frac{kg}{m^3}$
流體黏滯係數 μ	$1.86 \times 10^{-5} \frac{N \cdot s}{m^2}$	$8.59 \times 10^{-4} \frac{N \cdot s}{m^2}$	$14939 \times 10^{-4} \frac{N \cdot s}{m^2}$

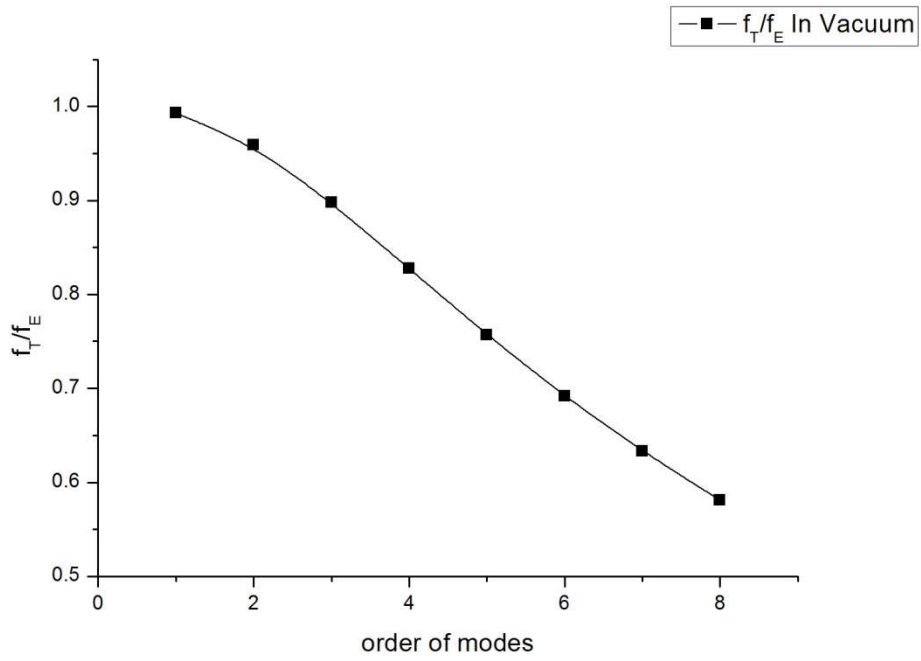


圖 4-44 $L/h=10$ 模態階數與 f_T/f_E 於真空介質中之關係

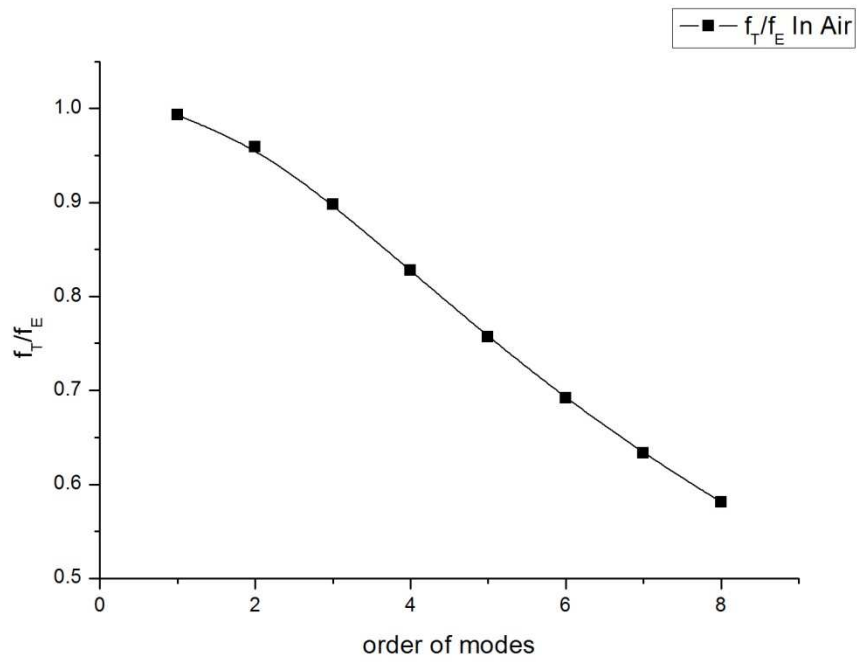


圖 4-45 $L/h=10$ 模態階數與 f_T/f_E 於空氣介質中之關係

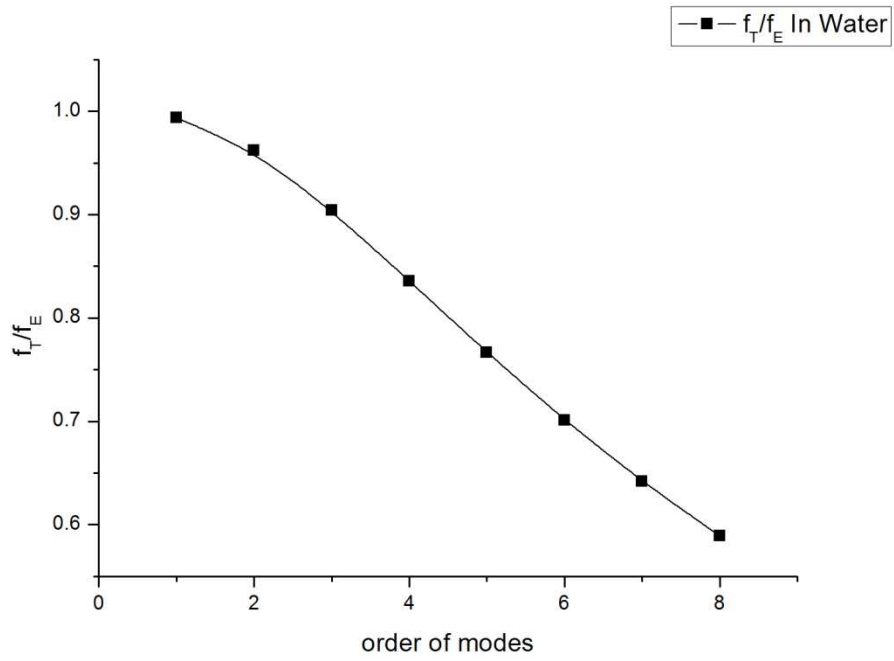


圖 4-46 $L/h=10$ 模態階數與 f_T/f_E 於水介質中之關係

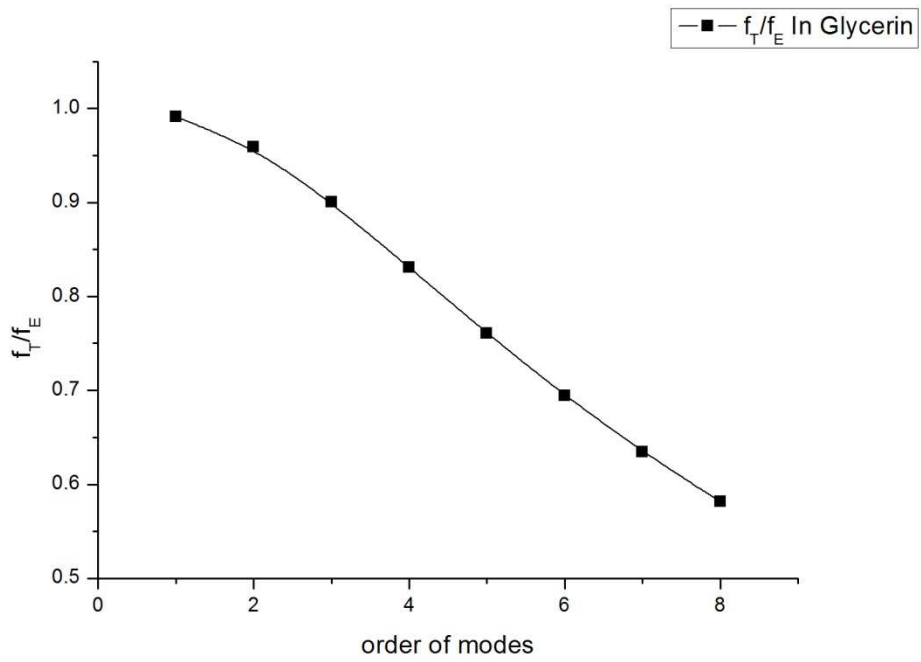


圖 4-47 $L/h=10$ 模態階數與 f_T/f_E 於甘油介質中之關係

表 4-32 $L/h=10$ 各模態階數於各流體環境中之頻率與 f_T/f_E 之比值

模態階數	1		2		3	
$f_{T,vacuum} (Hz)$	738480	0.99300	4468802	0.95885	11715951	0.89779
$f_{E,vacuum} (Hz)$	743686		4660602		13049822	
$f_{T,air} (Hz)$	738090	0.99301	4466792	0.95885	11711019	0.89779
$f_{E,air} (Hz)$	743289		4658495		13044294	
$f_{T,water} (Hz)$	559646	0.99355	3435328	0.96183	9072879	0.90401
$f_{E,water} (Hz)$	563279		3571660		10036301	
$f_{T,glycerin} (Hz)$	208303	0.99108	2397450	0.95871	7185516	0.90012
$f_{E,glycerin} (Hz)$	210178		2500694		7982854	
模態階數	4		5		6	
$f_{T,vacuum} (Hz)$	21156971	0.82727	32000634	0.75702	43676846	0.69163
$f_{E,vacuum} (Hz)$	25574353		42271871		63150309	
$f_{T,air} (Hz)$	21148398	0.82728	31987968	0.75703	43659795	0.69165
$f_{E,air} (Hz)$	25563713		42254347		63124168	
$f_{T,water} (Hz)$	16464108	0.83573	24975141	0.76646	34135256	0.70107
$f_{E,water} (Hz)$	19700196		32584948		48690010	
$f_{T,glycerin} (Hz)$	13691238	0.83092	21310912	0.76069	29590762	0.69449
$f_{E,glycerin} (Hz)$	16477289		28015378		42608077	

表 4-33 續表 4-32 $L/h=10$ 各模態階數於各流體環境中之頻率與 f_T/f_E 之比值

模態階數	7		8	
$f_{T,vacuum} (Hz)$	55824366	0.63296	68233140	0.58107
$f_{E,vacuum} (Hz)$	88196329		117425749	
$f_{T,air} (Hz)$	55802729	0.63297	68206770	0.58109
$f_{E,air} (Hz)$	88159895		117377471	
$f_{T,water} (Hz)$	43644783	0.64179	53331969	0.58901
$f_{E,water} (Hz)$	68004803		90544658	
$f_{T,glycerin} (Hz)$	38237504	0.63465	47080531	0.58157
$f_{E,glycerin} (Hz)$	60249751		80954218	

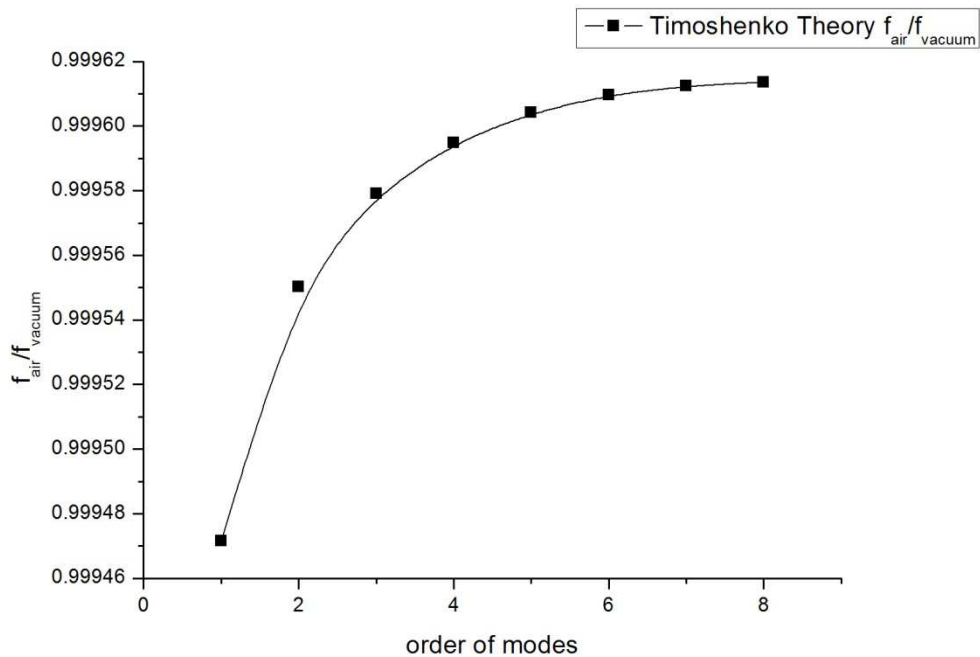


圖 4-48 $L/h=10$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(空氣、真空)

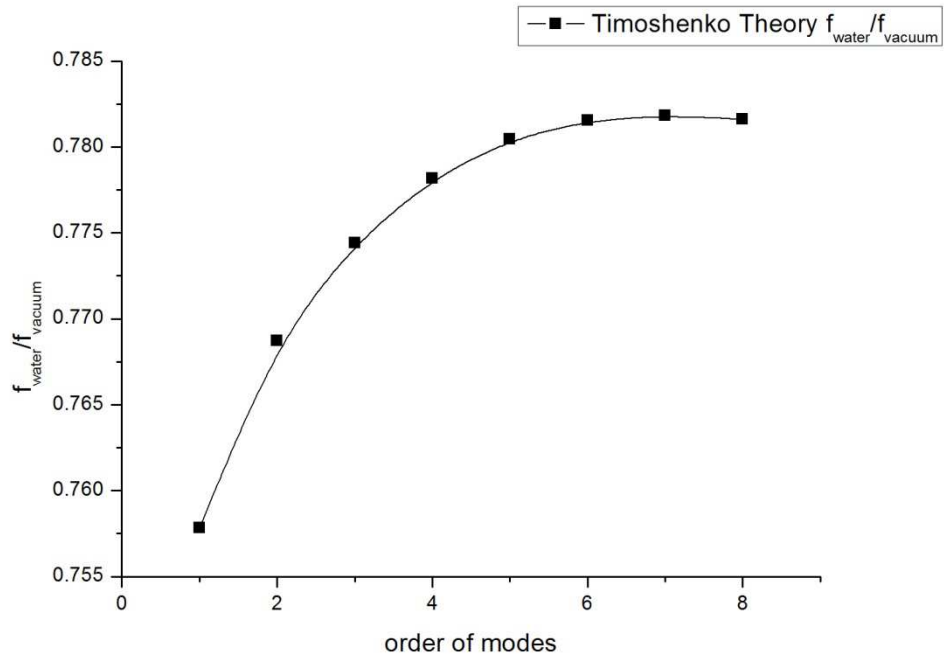


圖 4-49 $L/h=10$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(水、真空)

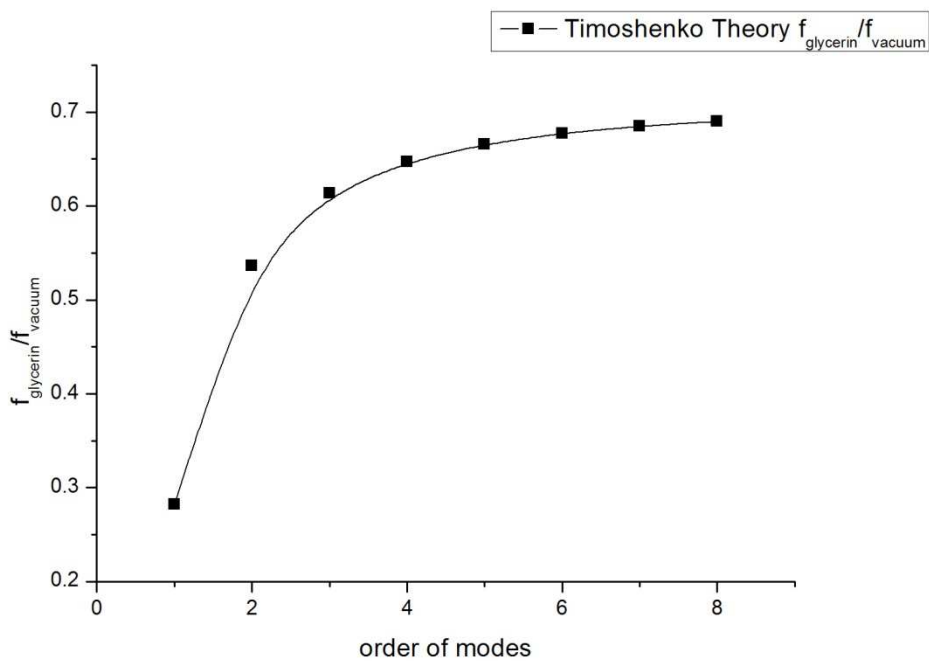


圖 4-50 $L/h=10$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(甘油、真空)

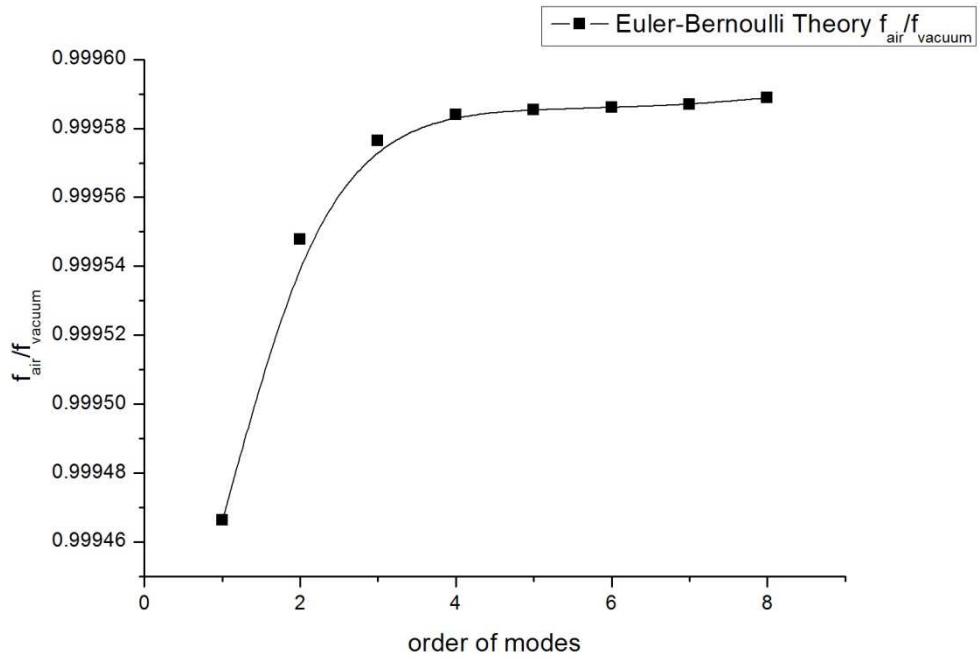


圖 4-51 $L/h=10$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(空氣、真空)

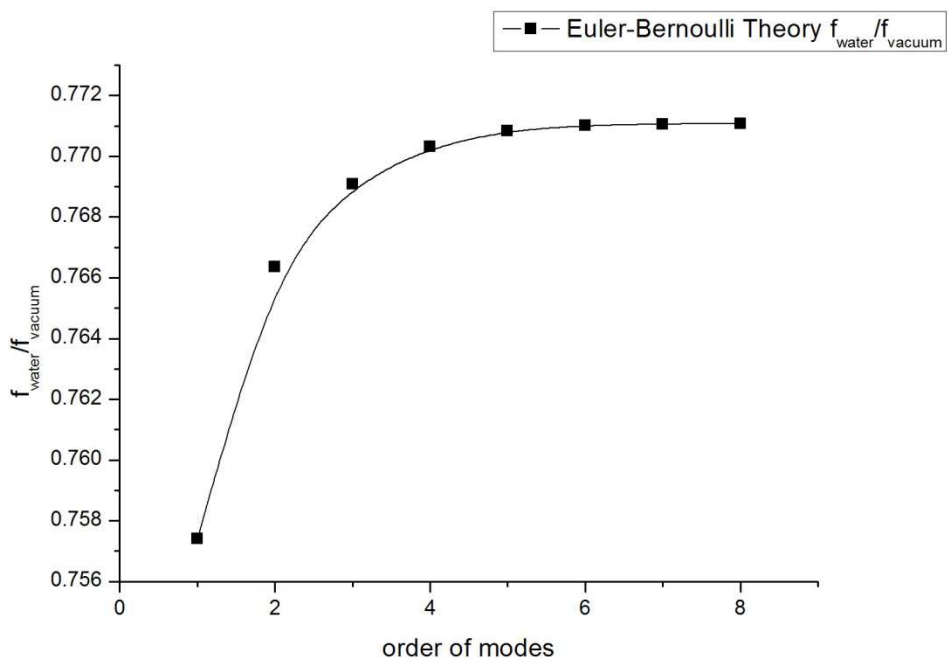


圖 4-52 $L/h=10$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(水、真空)

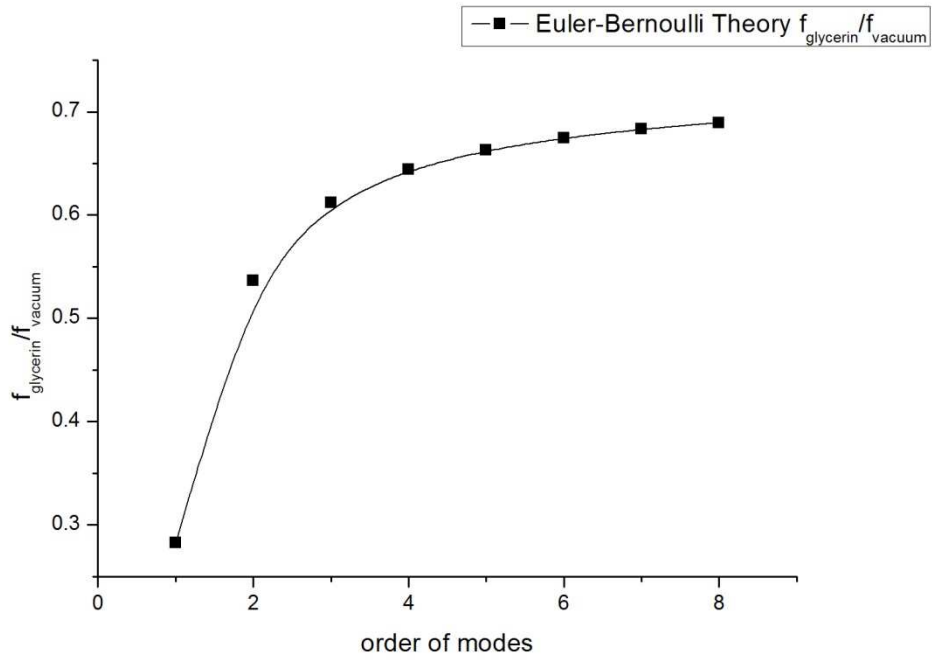


圖 4-53 $L/h=10$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(甘油、真空)



表 4-34 $L/h=10$ 流體環境對各模態中頻率之影響

模態階數	1	2	3	4
$f_{T,air}/f_{T,vacuum}$	0.99947	0.99955	0.99958	0.99959
$f_{T,water}/f_{T,vacuum}$	0.75784	0.76874	0.77440	0.77819
$f_{T,glycerin}/f_{T,vacuum}$	0.28207	0.53649	0.61331	0.64713
$f_{E,air}/f_{E,vacuum}$	0.99947	0.99955	0.99958	0.99958
$f_{E,water}/f_{E,vacuum}$	0.75741	0.76635	0.76908	0.77031
$f_{E,glycerin}/f_{E,vacuum}$	0.28262	0.53656	0.61172	0.64429
模態階數	5	6	7	8
$f_{T,air}/f_{T,vacuum}$	0.99960	0.99961	0.99961	0.99961
$f_{T,water}/f_{T,vacuum}$	0.78046	0.78154	0.78182	0.78161
$f_{T,glycerin}/f_{T,vacuum}$	0.66595	0.67749	0.68496	0.69000
$f_{E,air}/f_{E,vacuum}$	0.99959	0.99959	0.99959	0.99959
$f_{E,water}/f_{E,vacuum}$	0.77084	0.77102	0.77106	0.77108
$f_{E,glycerin}/f_{E,vacuum}$	0.66274	0.67471	0.68313	0.68941

L/h=5

調整結構長度 $L=90\mu m$ 、結構截面厚度 $h=18\mu m$ ，使得 $L/h=5$ ，此為對照組中結構最為厚短的一組。分別探討將結構浸入真空、空氣、水、甘油四種不同的介質中於第一模態至第八模態頻率間的關係，其詳細尺寸如表 4-35 所示。

圖 4-54 至圖 4-57 分別為尺寸 $L/h=5$ 之結構在真空、空氣、水、甘油四種不同介質中，第一模態至第八模態之 Timoshenko 梁理論與 Euler 梁理論的差異。由圖中可以看到，與前幾組尺寸一樣，無論是在哪一種介質中，皆有模態階數越高，兩理論差異越大之現象。由於結構之長度與厚度比值也為全對照組中最小，於第一模態時，兩理論之頻率差異也是對照組中最大， f_T/f_E 約為 0.97；在第八模態時兩理論之頻率差異 f_T/f_E 為 0.35，其數值也為所有對照組中最小。各模態詳細頻率與 f_T/f_E 比值如表 4-36、表 4-37 所示。

圖 4-58 至圖 4-60 為模態階數與各流體環境於 Timoshenko 梁理論中頻率的影響；圖 4-61 至圖 4-63 為模態階數與各流體環境於 Euler 梁理論中頻率的影響，以兩不同流體環境中頻率之比值表示之。由圖中可看到，無論是哪一理論，皆為模態階數越高，兩不同流體環境頻率之比值越大。分別以 Timoshenko 梁理論與 Euler 梁理論取第一模態、第四模態、第八模態之甘油中頻率與真空中頻率之比值 $f_{T, \text{glycerin}}/f_{T, \text{vacuum}}$ 、 $f_{E, \text{glycerin}}/f_{E, \text{vacuum}}$ ，其數值於第一模態為 0.489816、0.490279，第四模態為 0.687711、0.686487，第八模態為 0.702856、0.710657。可看到其數值雖然還是有隨著模態階數增加而成長，但相較於前幾組尺寸對照組，其變化幅度已沒有前幾組的高，可知儘管以尺寸 L/h 與模態階數控制流體對結構頻率的影響，但終究會趨近一個定值。詳細比值數據如表 4-38 所示。

表 4-35 $L/h=5$ 模態階數與流體環境對頻率影響之結構參數

結構參數	數值		
懸臂梁長度 L	90 μm		
懸臂梁寬度 b	36 μm		
懸臂梁厚度 h	18 μm		
楊氏係數 E	160 GPa		
剪切模數 G	62.5 GPa		
結構密度 ρ_s	2330 $\frac{kg}{m^3}$		
面積修正因子 κ	$\frac{2}{3}$		
流體參數	空氣	水	甘油
流體密度 ρ	1.18 $\frac{kg}{m^3}$	997 $\frac{kg}{m^3}$	1257.6 $\frac{kg}{m^3}$
流體黏滯係數 μ	$1.86 \times 10^{-5} \frac{N \cdot s}{m^2}$	$8.59 \times 10^{-4} \frac{N \cdot s}{m^2}$	$14939 \times 10^{-4} \frac{N \cdot s}{m^2}$

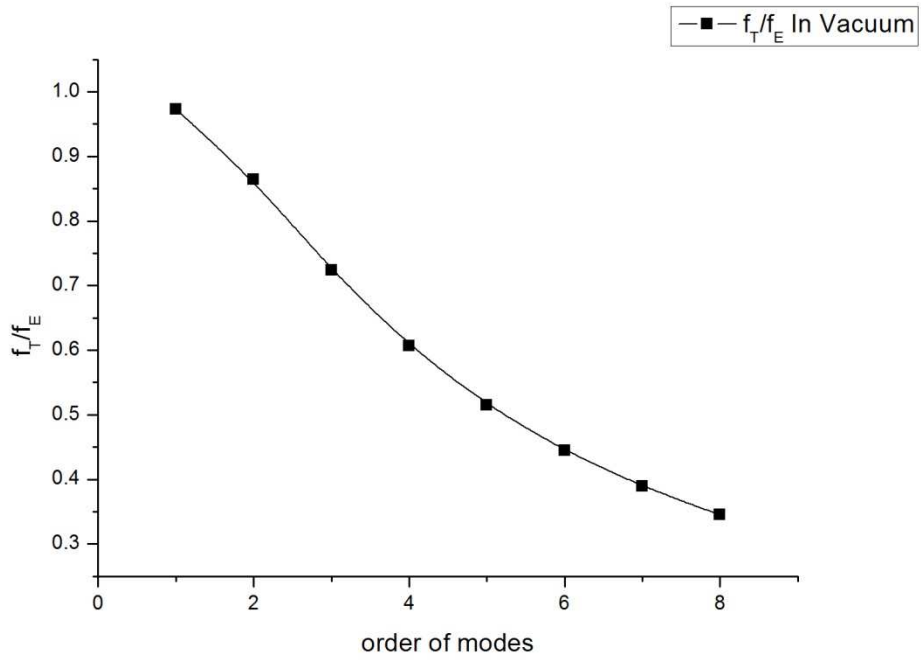


圖 4-54 $L/h=5$ 模態階數與 f_T/f_E 於真空介質中之關係

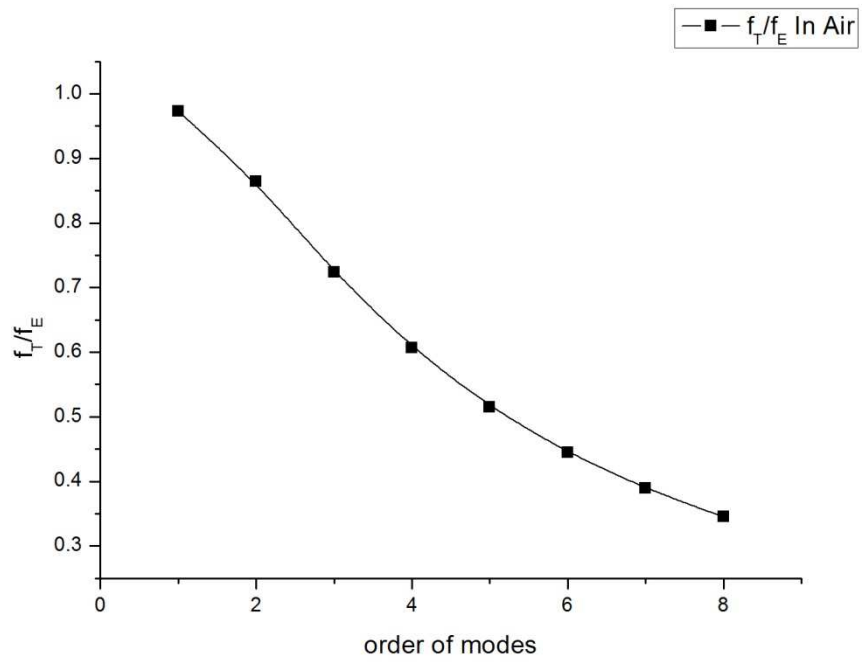


圖 4-55 $L/h=5$ 模態階數與 f_T/f_E 於空氣介質中之關係

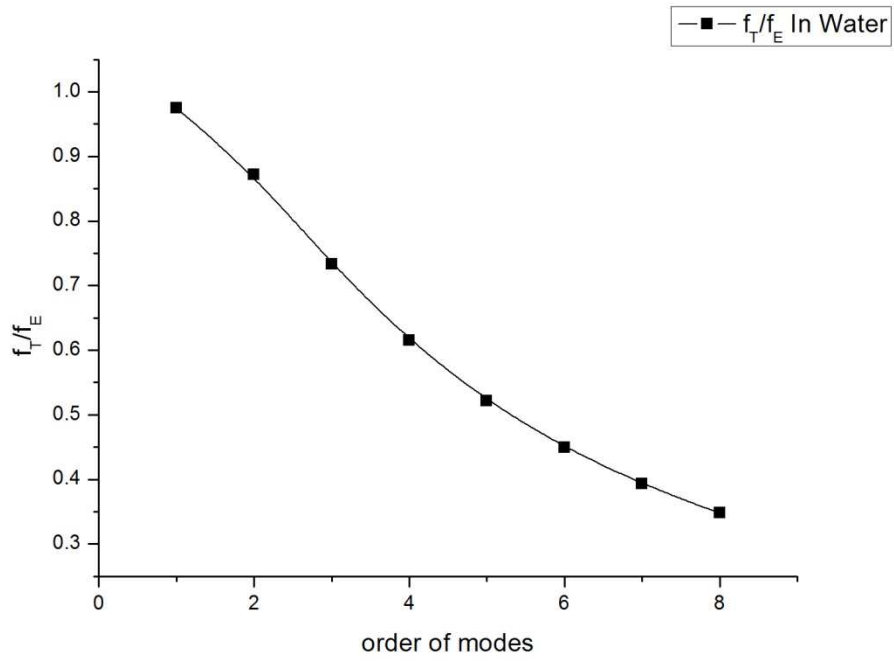


圖 4-56 $L/h=5$ 模態階數與 f_T/f_E 於水介質中之關係

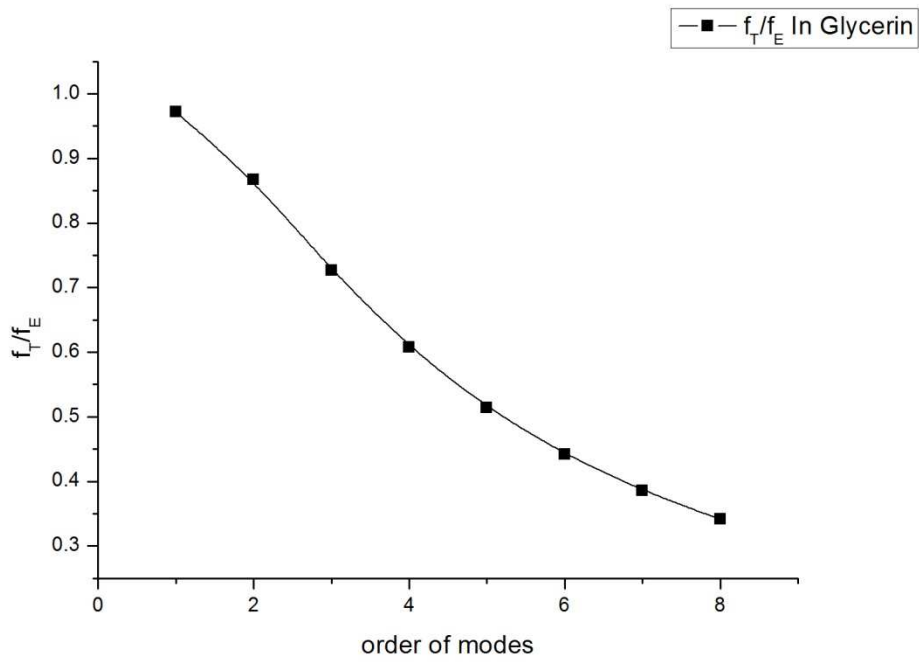


圖 4-57 $L/h=5$ 模態階數與 f_T/f_E 於甘油介質中之關係

表 4-36 $L/h=5$ 各模態階數於各流體環境中之頻率與 f_T/f_E 之比值

模態階數	1		2		3	
$f_{T,vacuum} (Hz)$	2894486	0.97302	16104404	0.86386	37766469	0.72351
$f_{E,vacuum} (Hz)$	2974745		18642410		52199288	
$f_{T,air} (Hz)$	2893141	0.97302	16097765	0.86387	37751638	0.72352
$f_{E,air} (Hz)$	2973351		18634412		52177503	
$f_{T,water} (Hz)$	2218239	0.97505	12504328	0.87134	29500266	0.73305
$f_{E,water} (Hz)$	2274999		14350635		40243304	
$f_{T,glycerin} (Hz)$	1417772	0.97211	10187049	0.86702	25393580	0.72684
$f_{E,glycerin} (Hz)$	1458448		11749509		34937077	
模態階數	4		5		6	
$f_{T,vacuum} (Hz)$	62006599	0.60619	87056295	0.51484	112227644	0.44429
$f_{E,vacuum} (Hz)$	102289772		169092322		252601680	
$f_{T,air} (Hz)$	61982610	0.60620	87022965	0.51486	112184872	0.44430
$f_{E,air} (Hz)$	102247622		169023180		252498927	
$f_{T,water} (Hz)$	48474550	0.61459	68062631	0.52199	87749135	0.45045
$f_{E,water} (Hz)$	78872675		130390522		194802850	
$f_{T,glycerin} (Hz)$	42642784	0.60727	60493861	0.51378	78419531	0.44177
$f_{E,glycerin} (Hz)$	70220182		117742451		177512554	

表 4-37 續表 4-36 $L/h=5$ 各模態階數於各流體環境中之頻率與 f_T/f_E 之比值

模態階數	7		8	
$f_{T,vacuum} (Hz)$	137281202	0.38914	162167516	0.34526
$f_{E,vacuum} (Hz)$	352785317		469702995	
$f_{T,air} (Hz)$	137229023	0.38915	162105900	0.34526
$f_{E,air} (Hz)$	352642316		469513033	
$f_{T,water} (Hz)$	107339041	0.39451	126803903	0.35003
$f_{E,water} (Hz)$	272080797		362268049	
$f_{T,glycerin} (Hz)$	96256064	0.38577	113980136	0.34146
$f_{E,glycerin} (Hz)$	249514887		333797807	

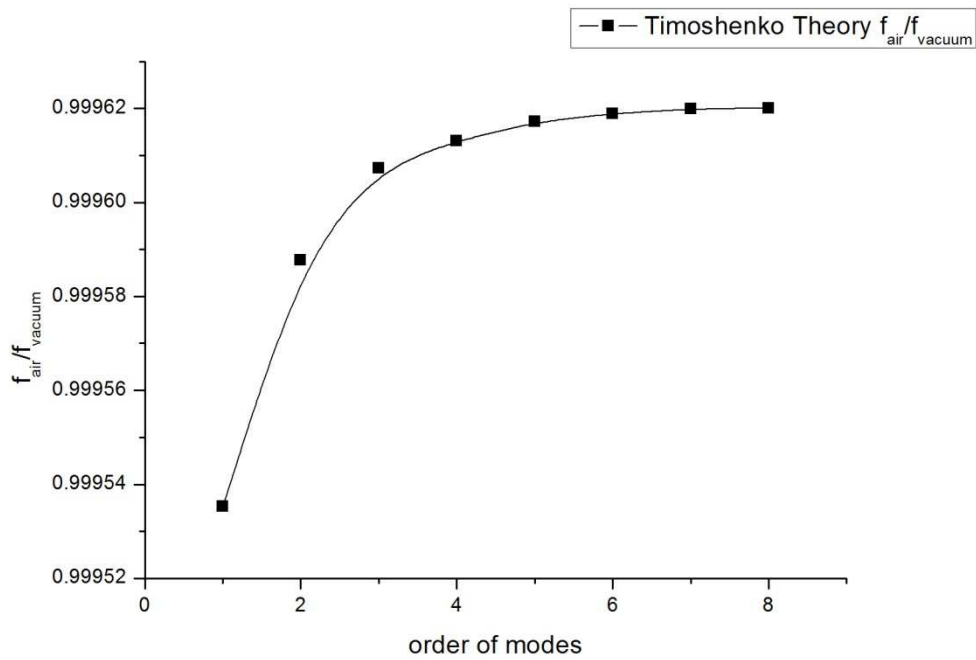


圖 4-58 $L/h=5$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(空氣、真空)

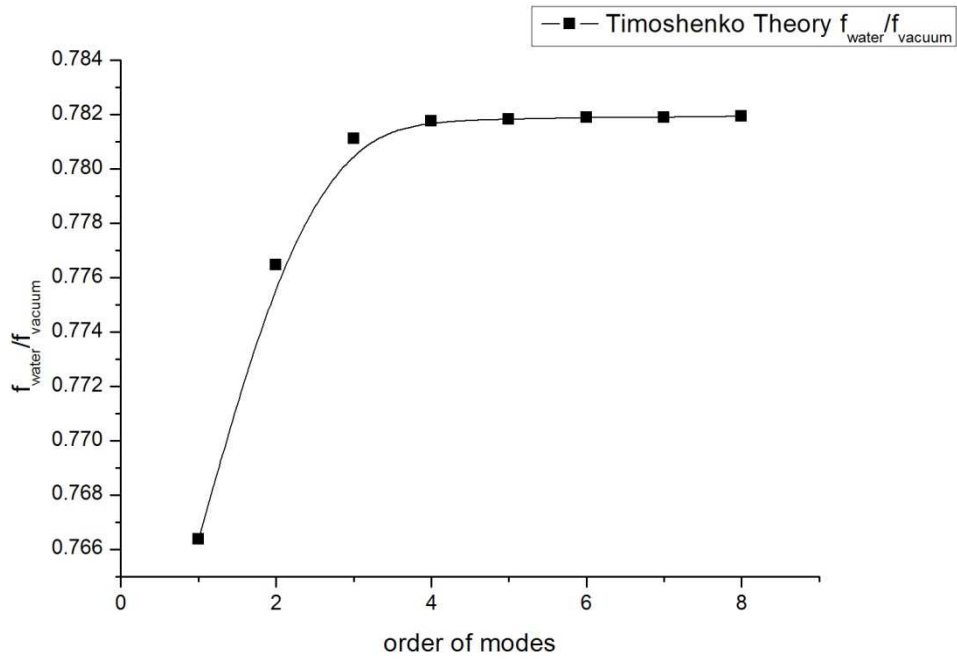


圖 4-59 $L/h=5$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(水、真空)

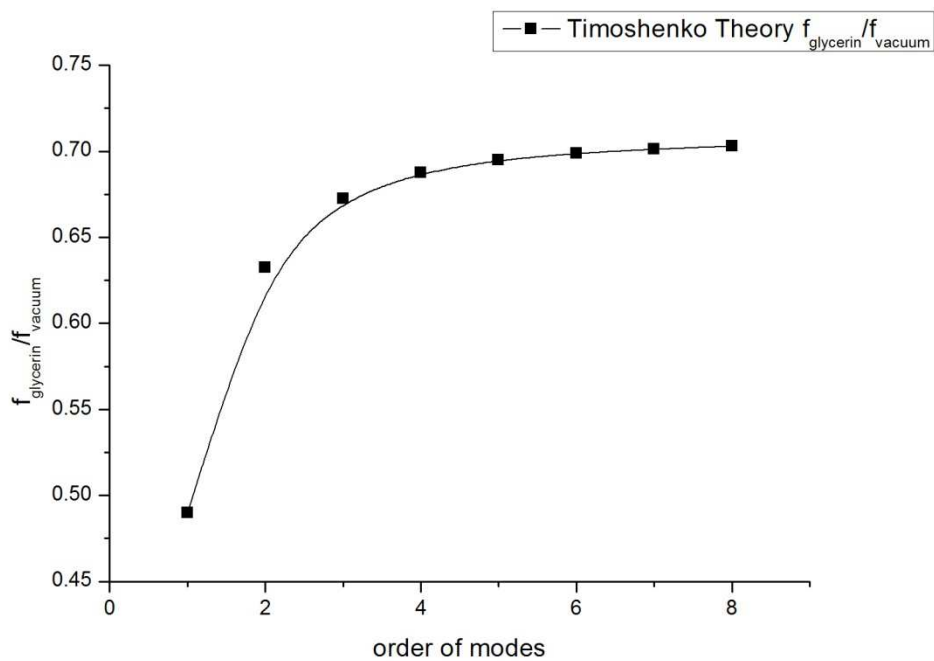


圖 4-60 $L/h=5$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(甘油、真空)

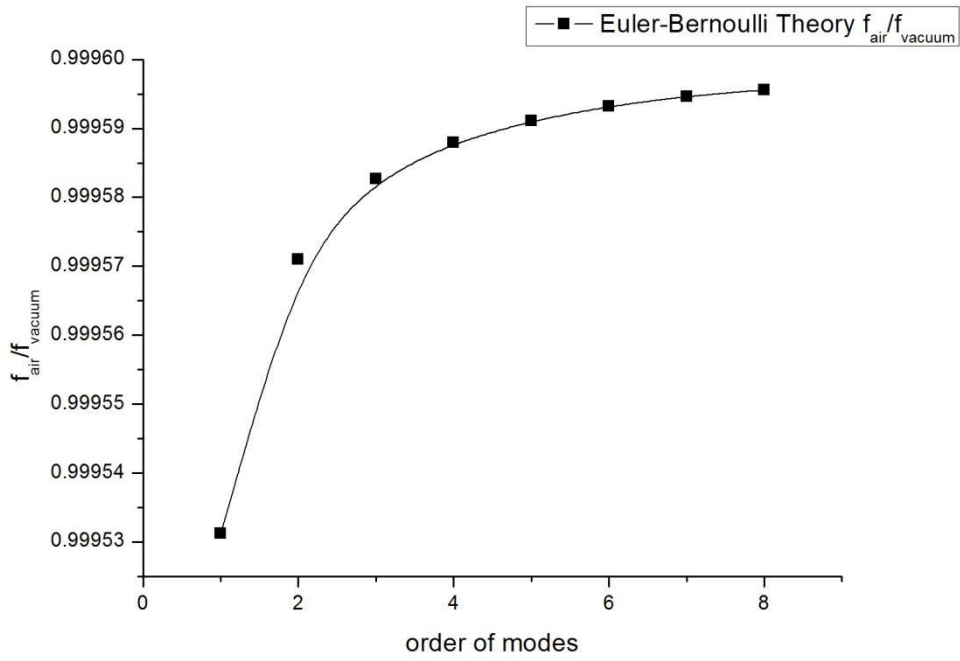


圖 4-61 $L/h=5$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(空氣、真空)

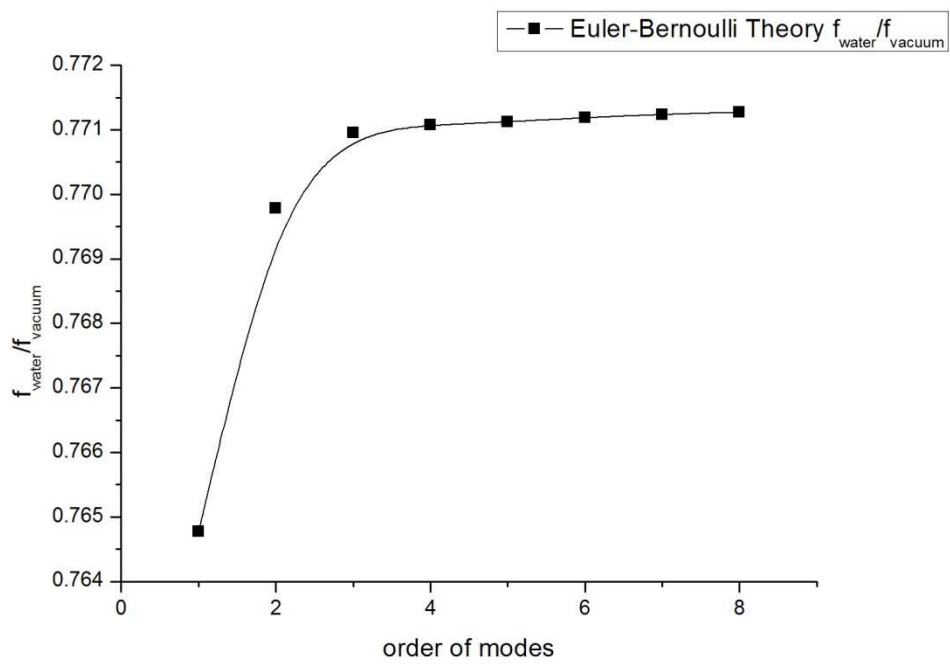


圖 4-62 $L/h=5$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(水、真空)

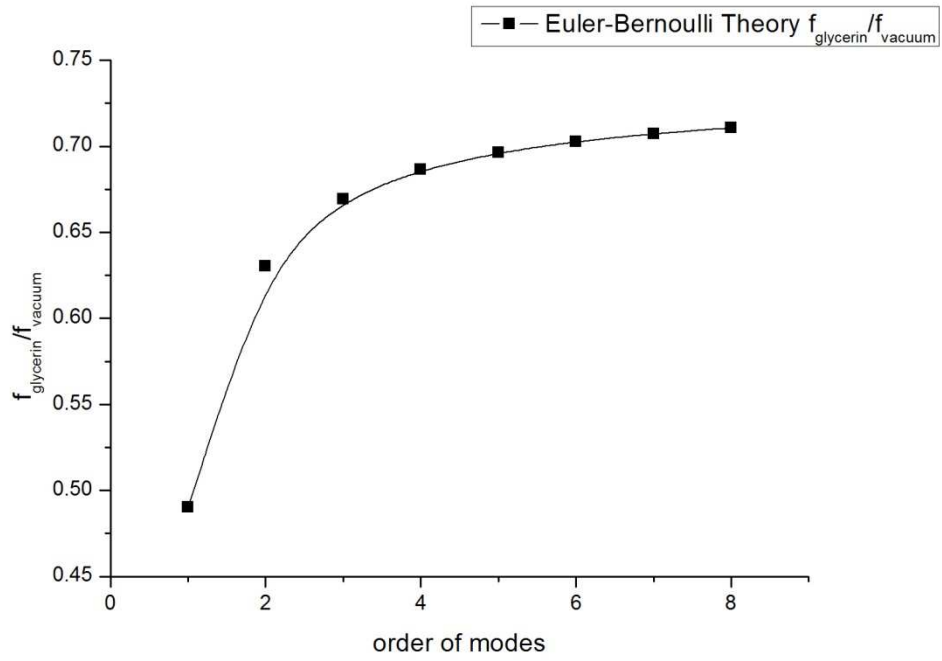


圖 4-63 $L/h=5$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(甘油、真空)



表 4-38 $L/h=5$ 流體環境對各模態中頻率之影響

模態階數	1	2	3	4
$f_{T,air}/f_{T,vacuum}$	0.99954	0.99959	0.99961	0.99961
$f_{T,water}/f_{T,vacuum}$	0.76637	0.77645	0.78112	0.78176
$f_{T,glycerin}/f_{T,vacuum}$	0.48982	0.63256	0.67238	0.68771
$f_{E,air}/f_{E,vacuum}$	0.99953	0.99957	0.99958	0.99959
$f_{E,water}/f_{E,vacuum}$	0.76477	0.76978	0.77096	0.77107
$f_{E,glycerin}/f_{E,vacuum}$	0.49028	0.63026	0.66930	0.68648
模態階數	5	6	7	8
$f_{T,air}/f_{T,vacuum}$	0.99962	0.99962	0.99962	0.99962
$f_{T,water}/f_{T,vacuum}$	0.78182	0.78189	0.78189	0.78193
$f_{T,glycerin}/f_{T,vacuum}$	0.69488	0.69875	0.70116	0.70285
$f_{E,air}/f_{E,vacuum}$	0.99959	0.99959	0.99959	0.99960
$f_{E,water}/f_{E,vacuum}$	0.77112	0.77119	0.77124	0.77127
$f_{E,glycerin}/f_{E,vacuum}$	0.69632	0.70274	0.70727	0.71066

比較與討論

由這小節分別得知 $L/h = 30, 16.67, 10, 5$ 四個尺寸之各模態於 Timoshenko 梁理論及 Euler 梁理論下頻率與流體之關係。若將其 Timoshenko 梁理論頻率與 Euler 梁理論頻率差異 f_T/f_E 以流體介質環境做為區分，將各尺寸放在一起比較，如圖 4-64 至圖 4-67 所示。圖 4-64 至圖 4-67 分別為四種尺寸之懸臂梁於真空、空氣、水、甘油四種流體介質環境中第一模態至第八模態之兩理論頻率差異，由圖中可看出兩理論頻率差異不僅僅隨著模態階數增加而變大，且也隨著結構之長度與厚度比值 L/h 變小而變大，並從其曲線之漸張關係可看出，隨著模態階數的增加， L/h 越小，對兩理論頻率之差異影響越大。呼應了 4-2-2 小節中 L/h 越小，其 f_T/f_E 越小之結論，並將其結論推廣至高模態中。

圖 4-68 至圖 4-70 為模態階數與各流體環境於 Timoshenko 梁理論中頻率的影響，並將各尺寸放在一起比較；圖 4-71 至圖 4-73 為模態階數與各流體環境於 Euler 梁理論中頻率的影響，亦將各尺寸同時比較，以兩不同流體環境中頻率比值表示之。由圖中可看出，無論是哪一理論，皆有模態階數越高，兩不同流體環境頻率之比值越大之現象，且可看出 L/h 越小，其兩不同流體環境頻率比值也越大，表示兩不同流體環境頻率越為接近，意即其比值的分子流體對於整體結構頻率影響較小。同時也可藉由曲線間漸縮的關係看出，隨著模態階數增加與 L/h 變小，其兩不同流體環境頻率之比值雖會逐漸增大但會趨近於一個定值。同樣地也呼應了 4-2-2 小節中 L/h 越小，流體對整體結構的頻率影響就越小； L/h 越大，流體對整體結構的頻率影響就越大之結論，並將其推廣至高模態中。

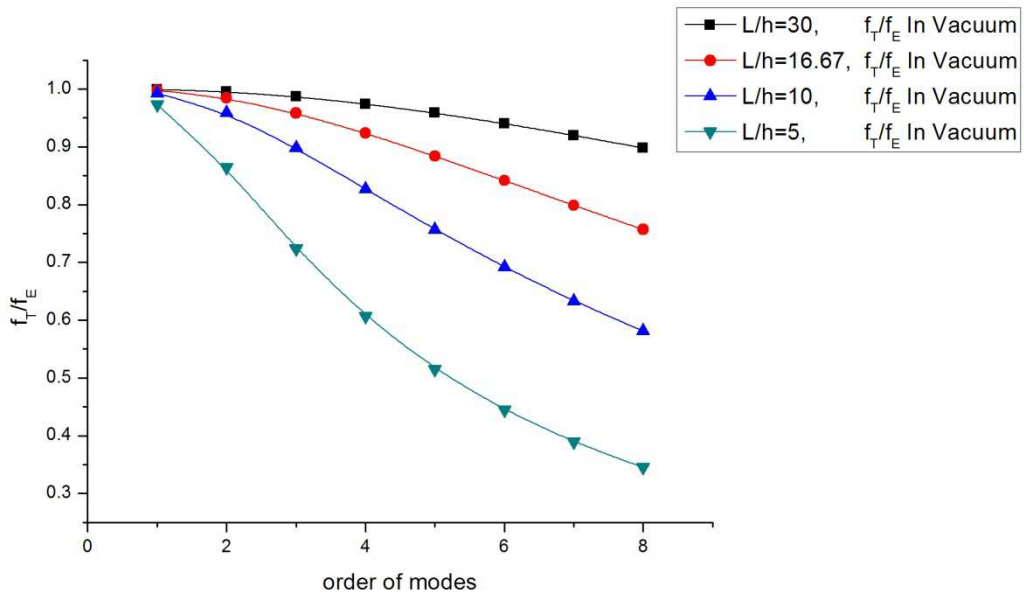


圖 4-64 各尺寸模態階數與 f_T/f_E 於真空介質中之關係

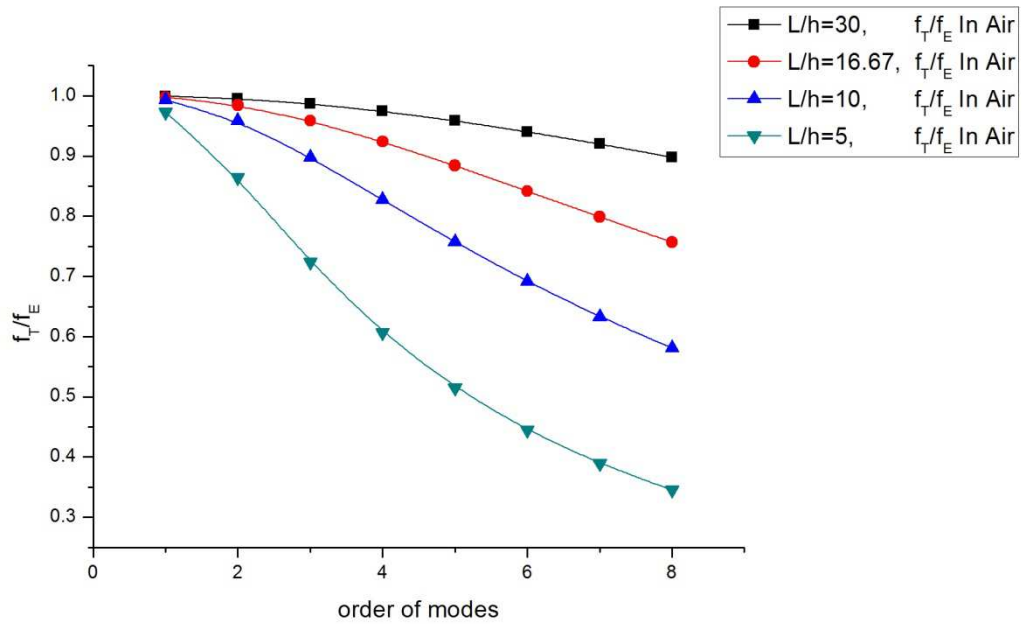


圖 4-65 各尺寸模態階數與 f_T/f_E 於空氣介質中之關係

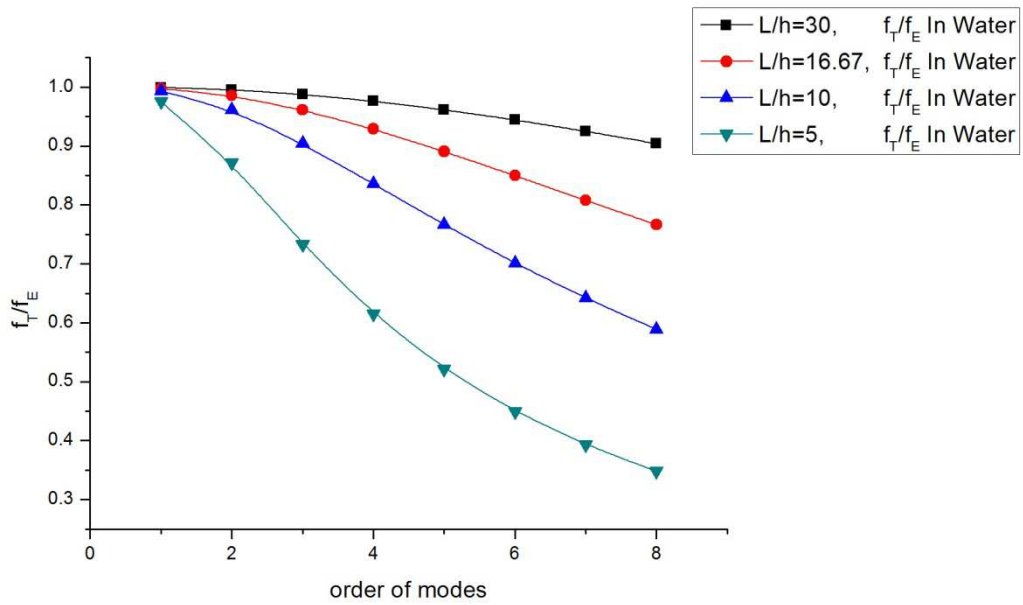


圖 4-66 各尺寸模態階數與 f_T/f_E 於水介質中之關係

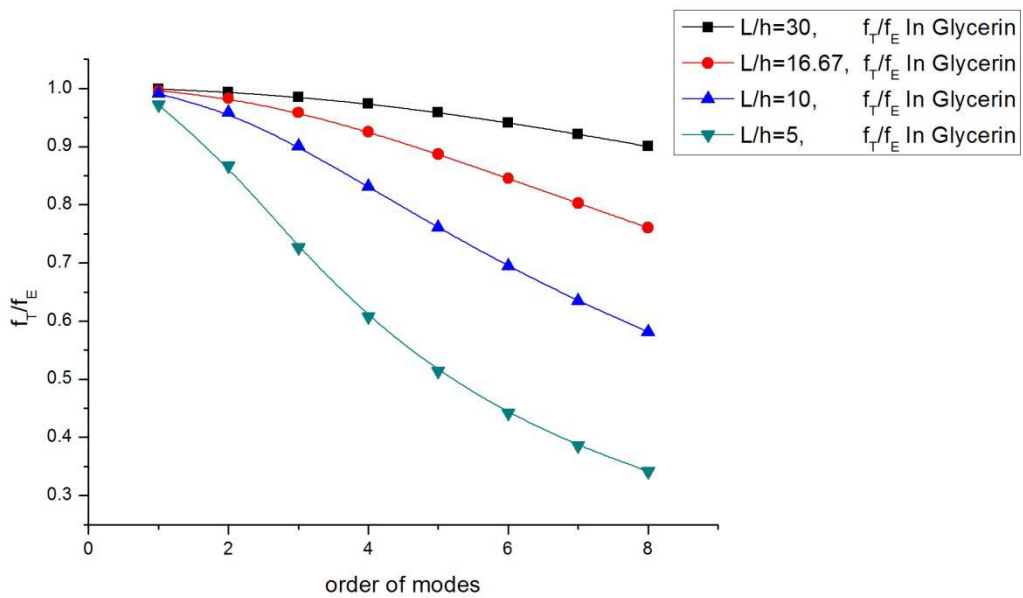


圖 4-67 各尺寸模態階數與 f_T/f_E 於甘油介質中之關係

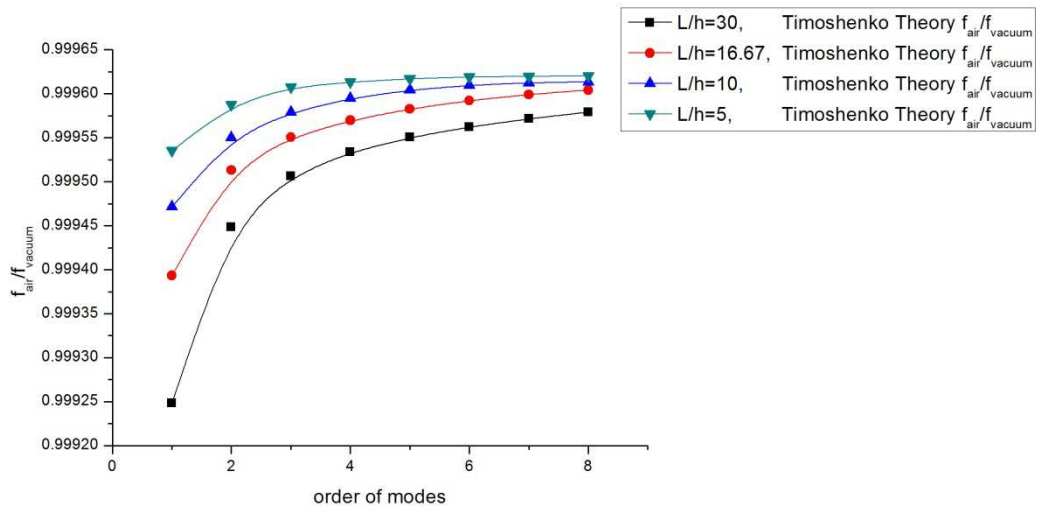


圖 4-68 各尺寸模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(空氣、真空)

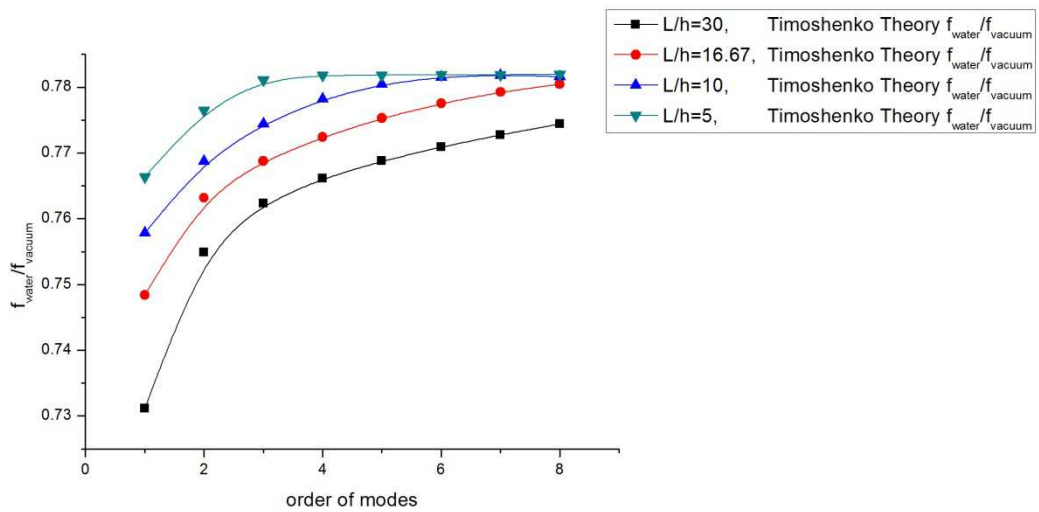


圖 4-69 各尺寸模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(水、真空)

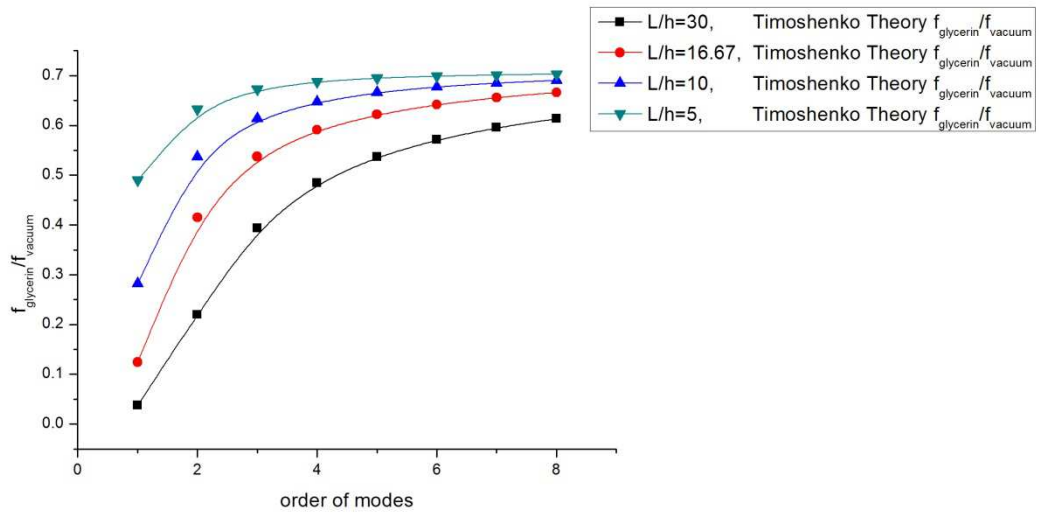


圖 4-70 各尺寸模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率之影響(甘油、真空)

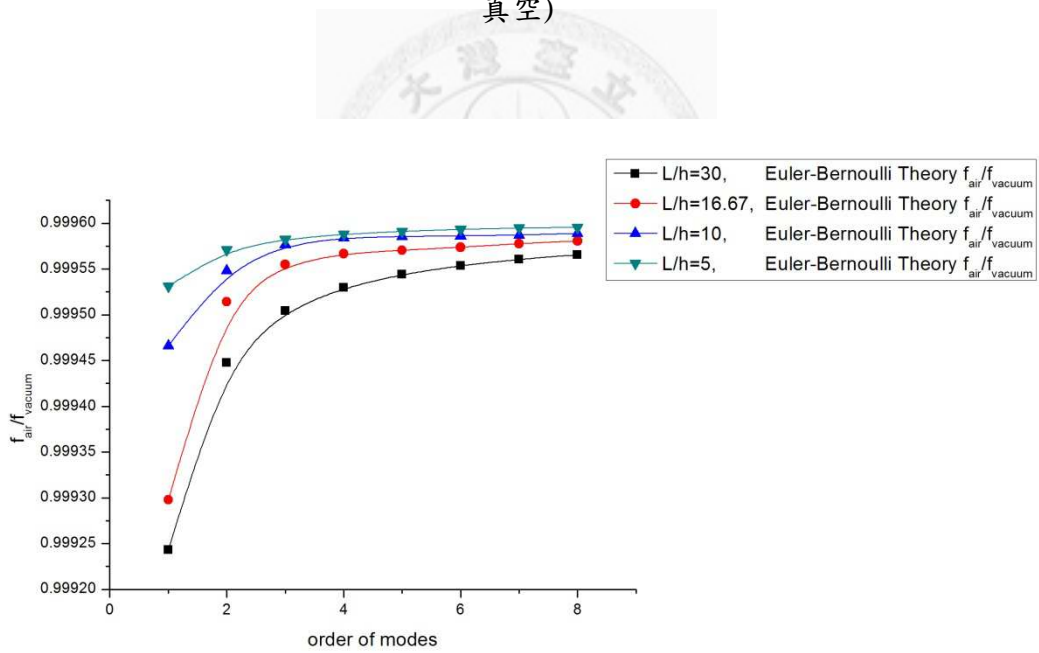


圖 4-71 各尺寸模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(空氣、真空)

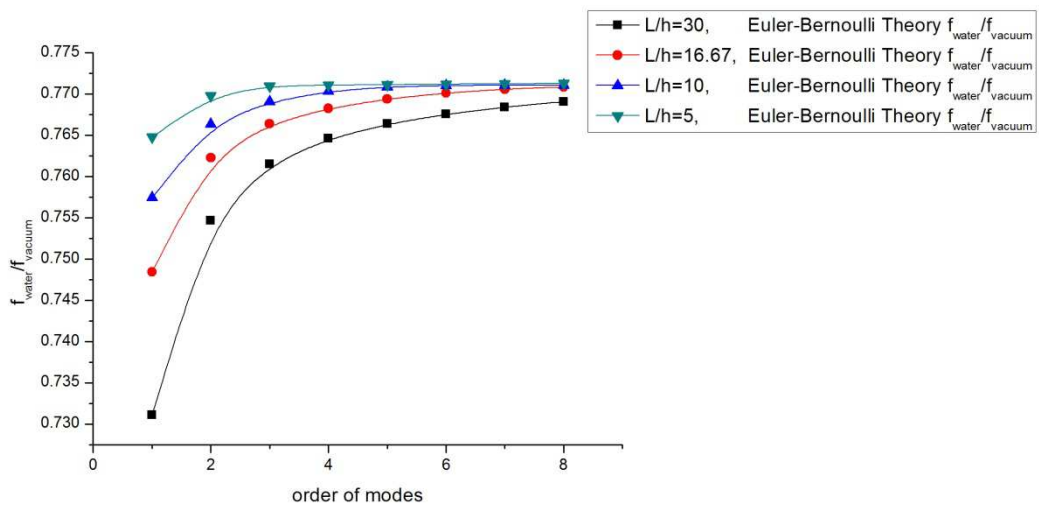


圖 4-72 各尺寸模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(水、真空)

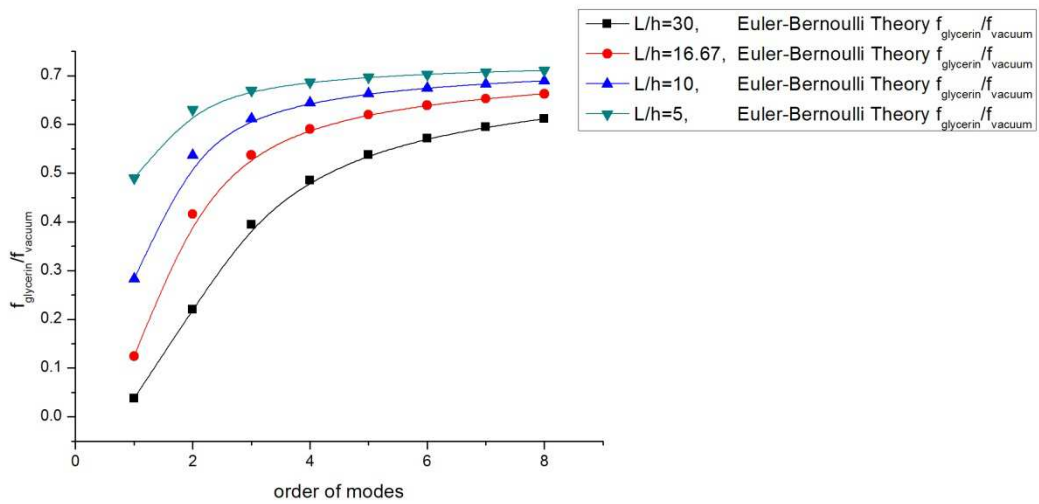


圖 4-73 各尺寸模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率之影響(甘油、真空)

4-2-4 額外質量對兩理論頻率偏移之影響

由於在感測器量測中，常常將負載物置於梁面上端，藉由頻率的改變進而得知載重物的質量，故本小節將以 3-1-3 所推導而出的 Euler 梁理論中之受額外質量影響頻率響應函數(3.1.31)及 3-2-2 中的 Timoshenko 梁理論中之受額外質量影響頻率響應函數(3.2.22)來計算各模態受到額外質量後對頻率的影響。上述兩式所得之結果皆為受到質量影響後的頻率，故只要將所得結果之頻率與無額外質量時之頻率($\Delta m = 0$)相減即為受額外質量影響之頻率偏移 Δf 。

此節將以 $L/h = 10$ 、16.67、30 之結構尺寸做為討論，並於梁面上分別附加 $\Delta m = 10^{-4}m$ 、 $10^{-2}m$ 做為額外質量，其中 m 為梁結構之單位長度質量 $m = \rho A$ ， ρ 為結構密度， A 為結構之截面積 $A = bh$ ，詳細尺寸材料參數如表 4-39 所示。

圖 4-74 至圖 4-82 為將額外質量 $\Delta m = 10^{-4}m$ 附加於 Timoshenko 梁理論及 Euler 梁理論於三個不同尺寸之結構，其結構分別於空氣、水、甘油三個不同流體環境介質中振動後之頻率偏移 Δf ；圖 4-83 至圖 4-91 為額外質量 $\Delta m = 10^{-2}m$ 附加於兩理論及三個不同尺寸之結構後於三個不同流體介質中振動之頻率偏移 Δf 。由圖中可看出，隨著模態階數的增加，頻率偏移 Δf 也隨之增加，及無論在何種流體介質下之頻率偏移皆為 Timoshenko 梁理論小於 Euler 梁理論。並且可以看出受到越大的額外質量影響，其頻率偏移就越多，頻率偏移的增加幅度約與額外質量的增加幅度一樣，額外質量變成 100 倍時，其頻率偏移也約為 100 倍，此結果可由圖 4-92 及圖 4-93 看出。若將 Δf_T 與 Δf_E 相互比較，如圖 4-94 至圖 4-99 所示，分別為兩個不同的額外質量負載於三個不同尺寸結構之模態階數與 $(\Delta f_E - \Delta f_T) / \Delta f_T$ 關係圖，由圖中可看到與前一小節相似的結果，無論額外質量負載大小，皆為模態階數越高， Δf_T 與 Δf_E 的差異就越大。詳細頻率偏移數據及兩

理論差異比值如表 4-40 至表 4-51 所示。

若以流體影響的角度來看，圖 4-100 至圖 4-103 為 $L/h=10$ 分別於 Timoshenko 梁理論及 Euler 梁理論中負載額外質量 $\Delta m=10^{-4}m$ 、 $10^{-2}m$ 於各流體介質中之頻率偏移；圖 4-104 至圖 4-107 為 $L/h=16.67$ 於兩理論中負載額外質量 $\Delta m=10^{-4}m$ 、 $10^{-2}m$ 於各流體介質中之頻率偏移；圖 4-108 至圖 4-111 則為 $L/h=30$ 於兩理論中負載額外質量 $\Delta m=10^{-4}m$ 、 $10^{-2}m$ 於各流體介質中之頻率偏移。由圖中曲線之間的關係可看出，頻率偏移量隨著流體之密度與黏滯性增加而減小。至於流體對頻率偏移量的影響可從圖 4-112 至圖 4-123 看出，分別以結構尺寸 $L/h=10$ 、16.67、30 與 Timoshenko 梁理論及 Euler 梁理論做分類。此處與前一節相同，均以兩不同流體環境中頻率偏移量之比值表示之。由圖中可看出隨著模態階數的增加，其兩不同流體環境中頻率偏移量之比值也隨之增加，但可看到其曲線趨勢皆愈趨平緩，即表示雖然隨著模態階數的增加，比值隨之增加但會趨近於一定值。其詳細比值數據如表 4-52 至表 4-57 所示。

表 4-39 額外質量對頻率偏移影響之結構參數

結構參數	數值		
懸臂梁長度 L	180、300、540 μm		
懸臂梁寬度 b	36 μm		
懸臂梁厚度 h	18 μm		
楊氏係數 E	160 GPa		
剪切模數 G	62.5 GPa		
結構密度 ρ_s	2330 $\frac{kg}{m^3}$		
面積修正因子 κ	$\frac{2}{3}$		
流體參數	空氣	水	甘油
流體密度 ρ	1.18 $\frac{kg}{m^3}$	997 $\frac{kg}{m^3}$	1257.6 $\frac{kg}{m^3}$
流體黏滯係數 μ	$1.86 \times 10^{-5} \frac{N \cdot s}{m^2}$	$8.59 \times 10^{-4} \frac{N \cdot s}{m^2}$	$14939 \times 10^{-4} \frac{N \cdot s}{m^2}$

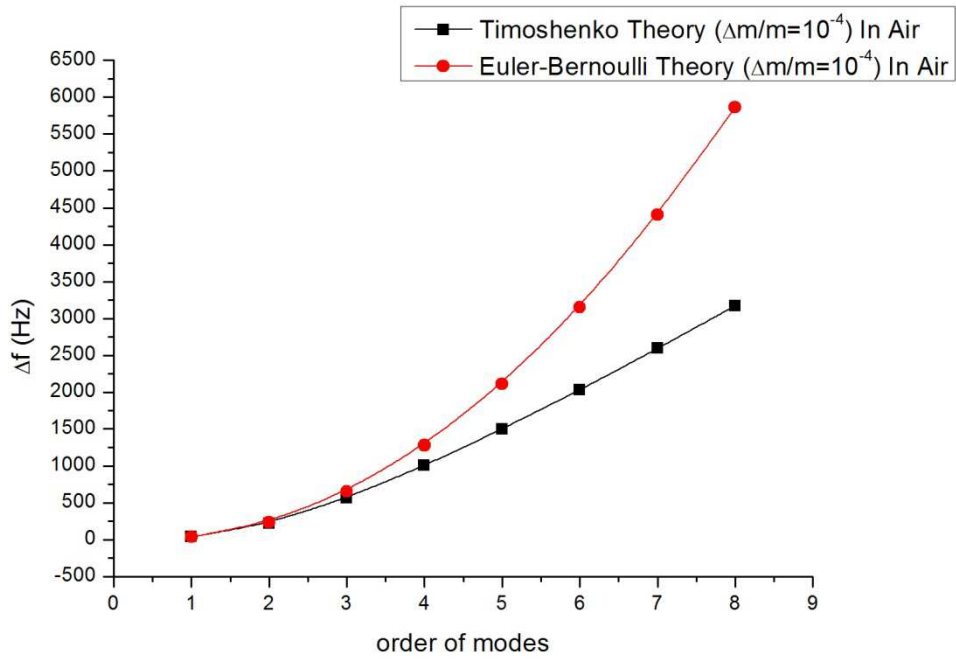


圖 4-74 $L/h=10$ $\Delta m/m=10^{-4}$ 於空氣介質中之頻率偏移

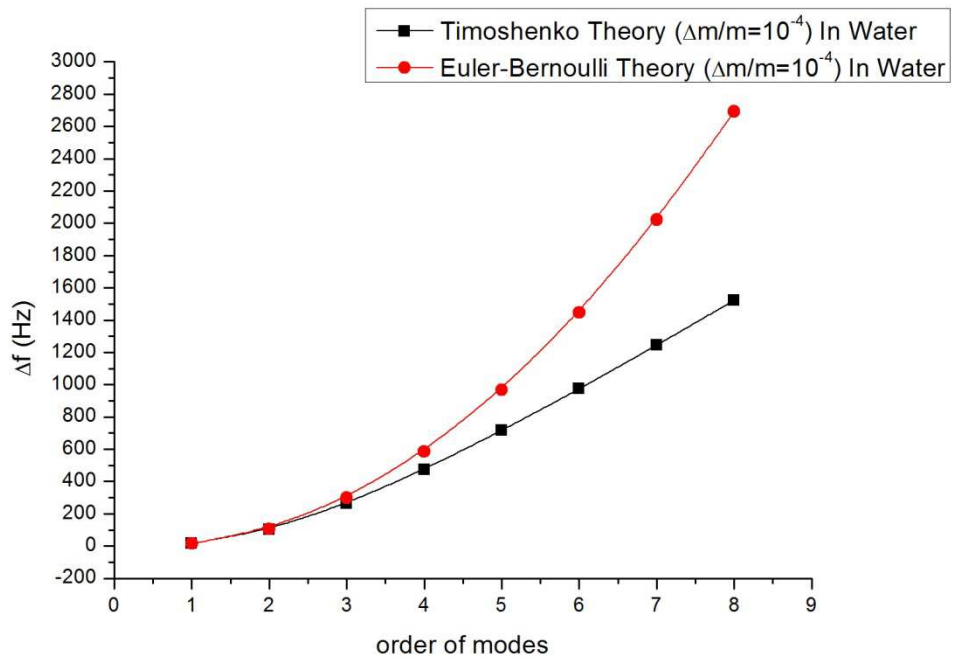


圖 4-75 $L/h=10$ $\Delta m/m=10^{-4}$ 於水介質中之頻率偏移

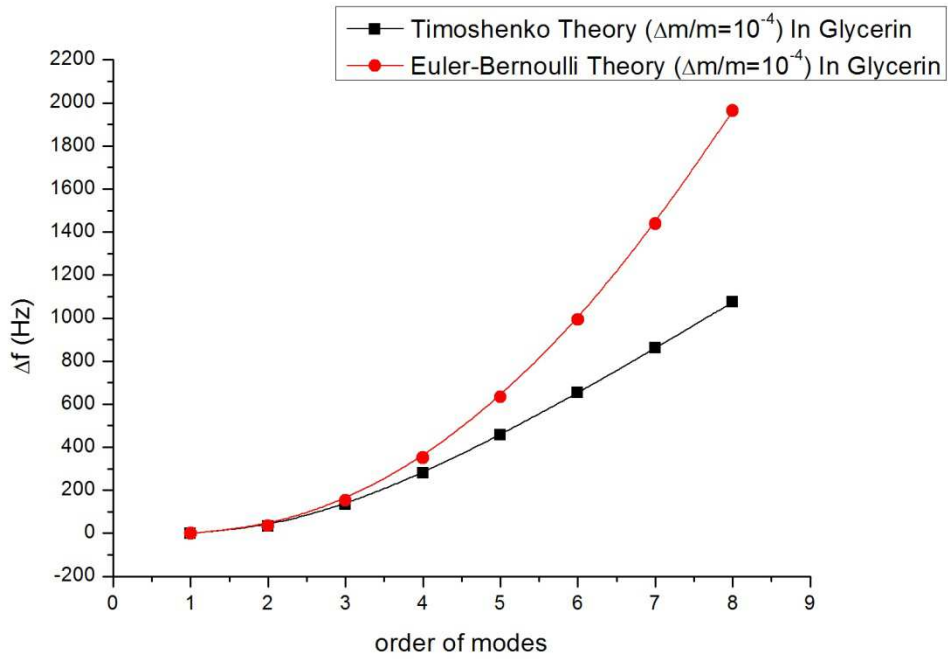


圖 4-76 $L/h=10$ $\Delta m/m=10^{-4}$ 於甘油介質中之頻率偏移

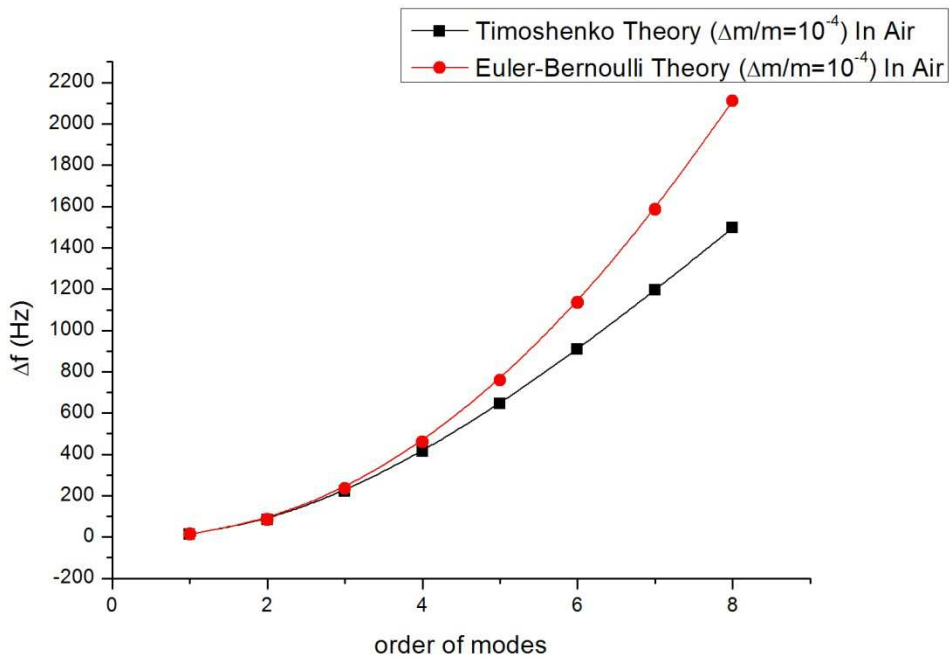


圖 4-77 $L/h=16.67$ $\Delta m/m=10^{-4}$ 於空氣介質中之頻率偏移

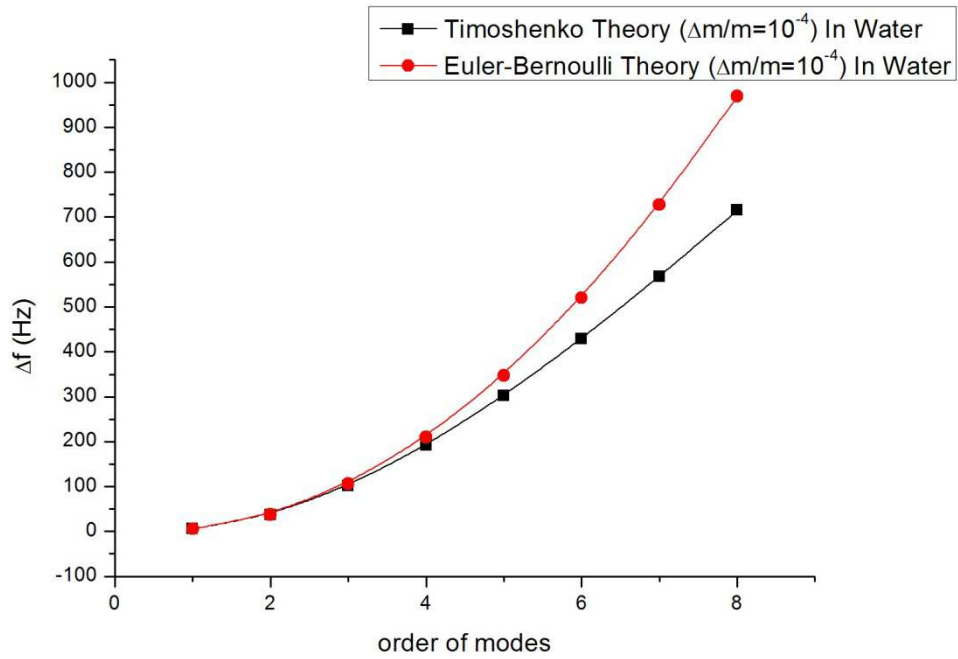


圖 4-78 $L/h=16.67$ $\Delta m/m=10^{-4}$ 於水介質中之頻率偏移

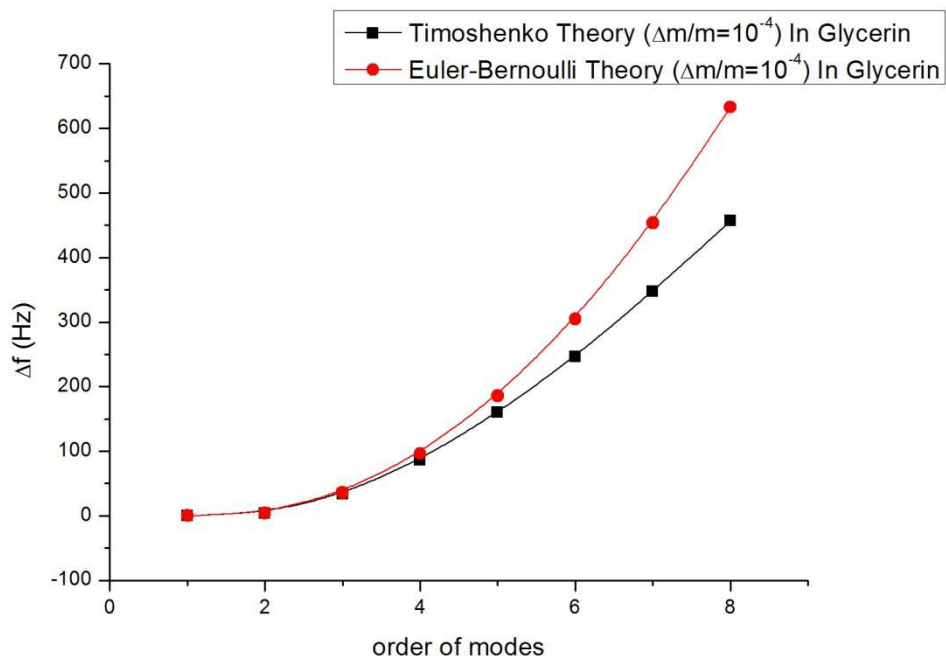


圖 4-79 $L/h=16.67$ $\Delta m/m=10^{-4}$ 於甘油介質中之頻率偏移

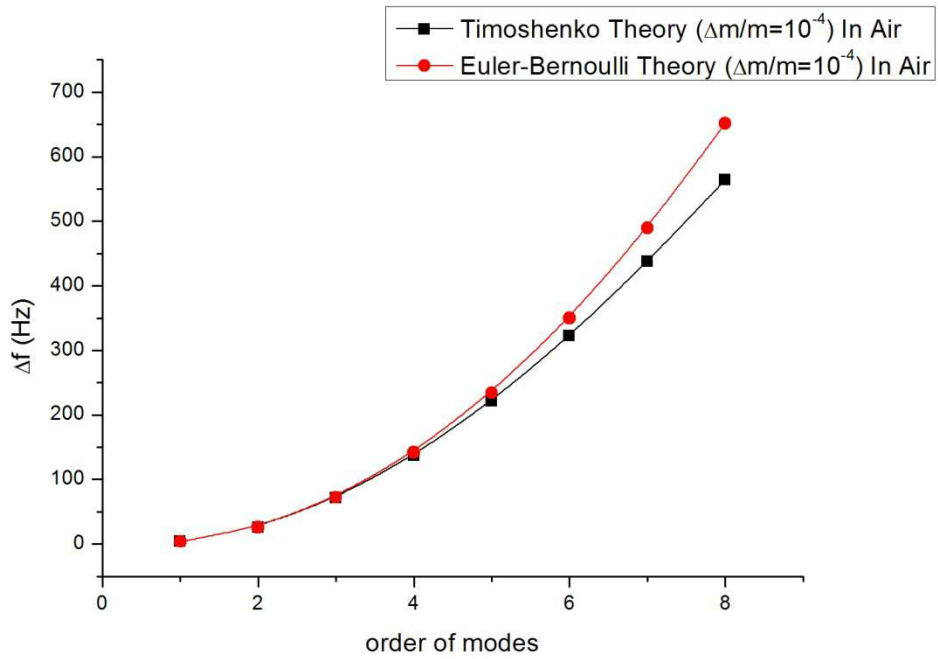


圖 4-80 $L/h = 30$ $\Delta m/m = 10^{-4}$ 於空氣介質中之頻率偏移

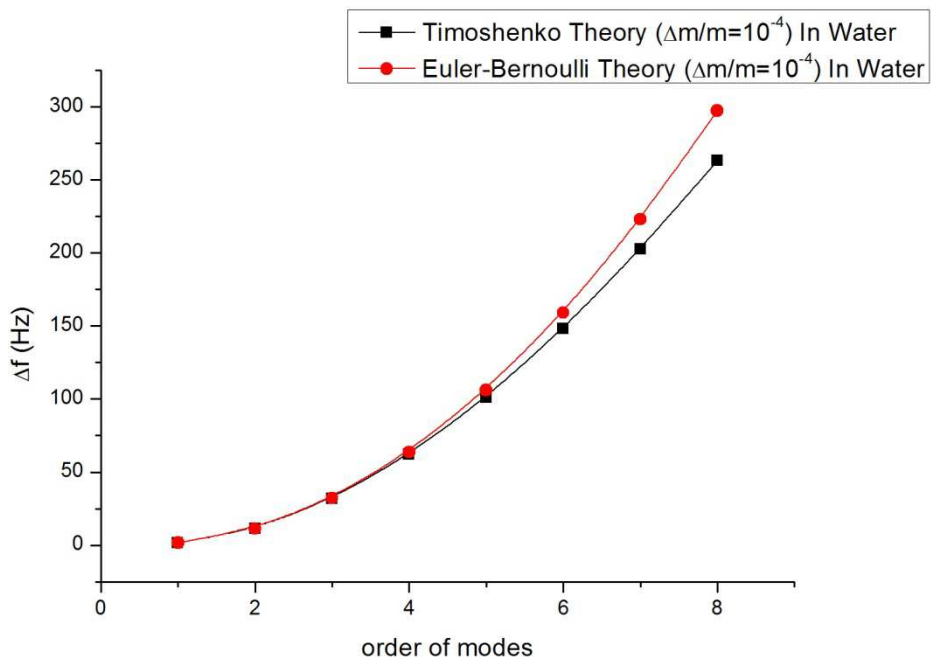


圖 4-81 $L/h = 30$ $\Delta m/m = 10^{-4}$ 於水介質中之頻率偏移

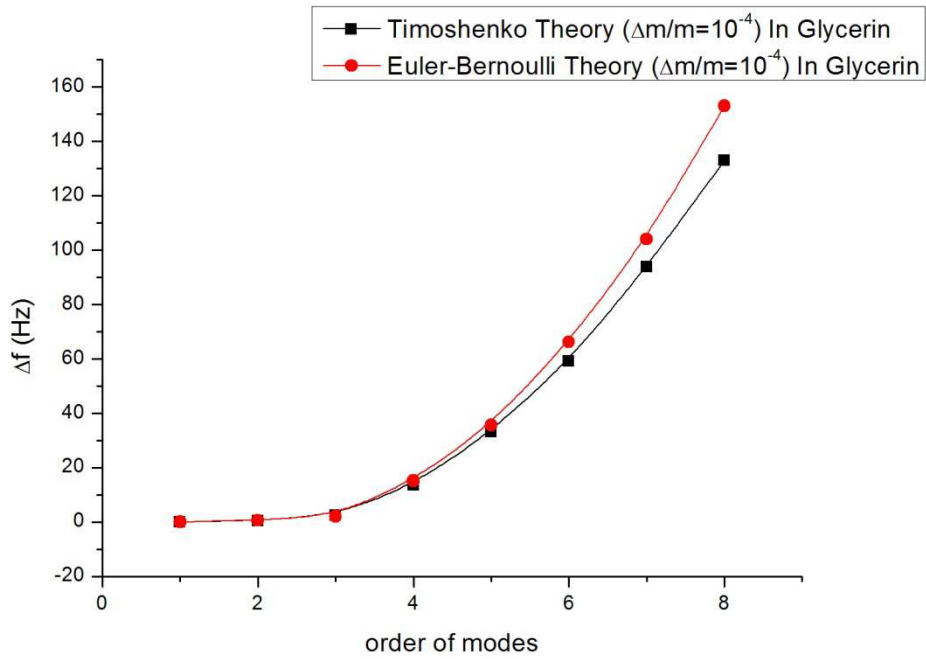


圖 4-82 $L/h = 30$ $\Delta m/m = 10^{-4}$ 於甘油介質中之頻率偏移

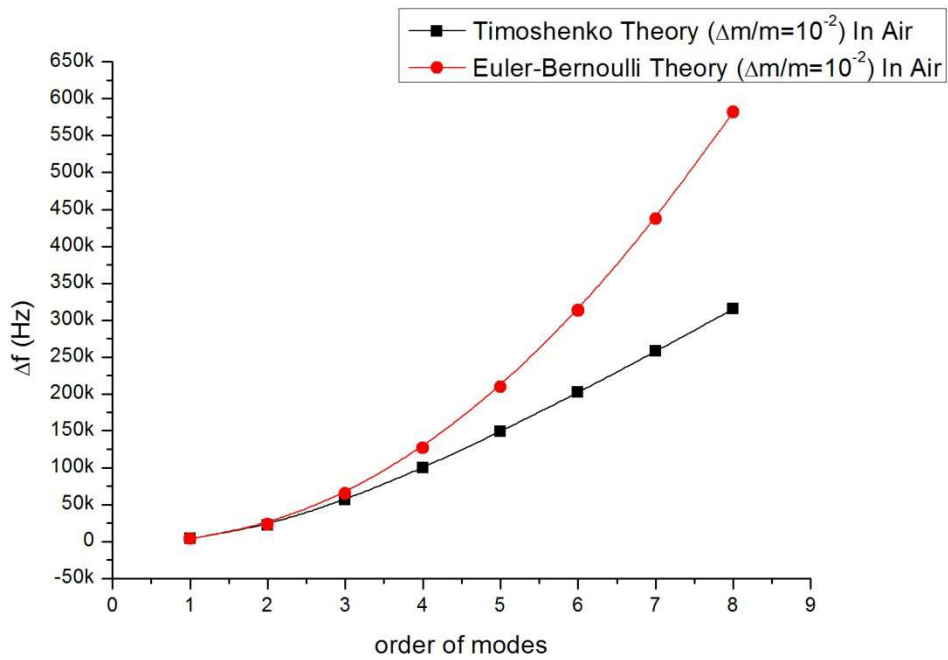


圖 4-83 $L/h = 10$ $\Delta m/m = 10^{-2}$ 於空氣介質中之頻率偏移

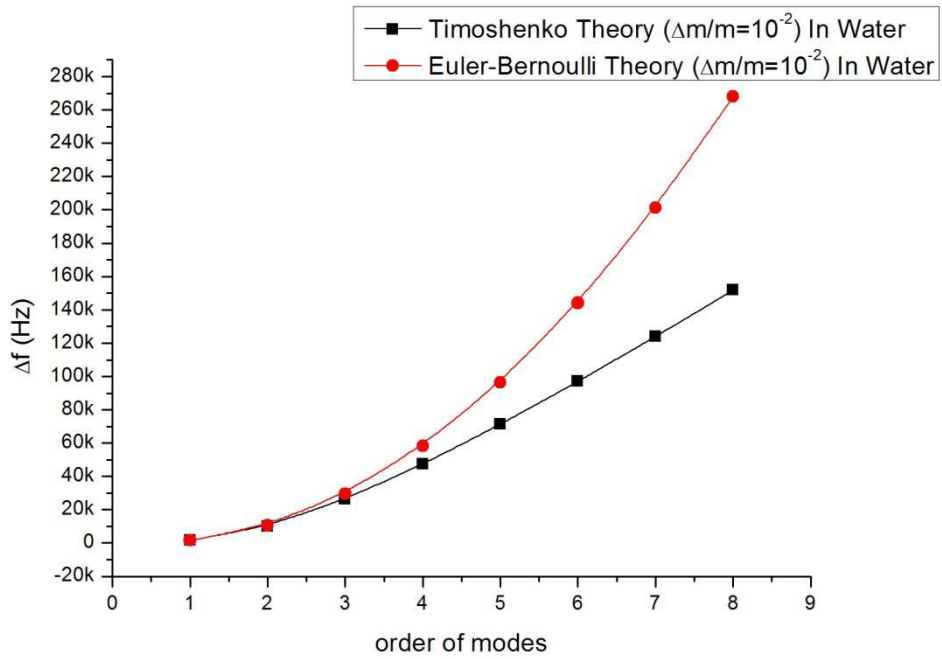


圖 4-84 $L/h=10$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 於水介質中之頻率偏移

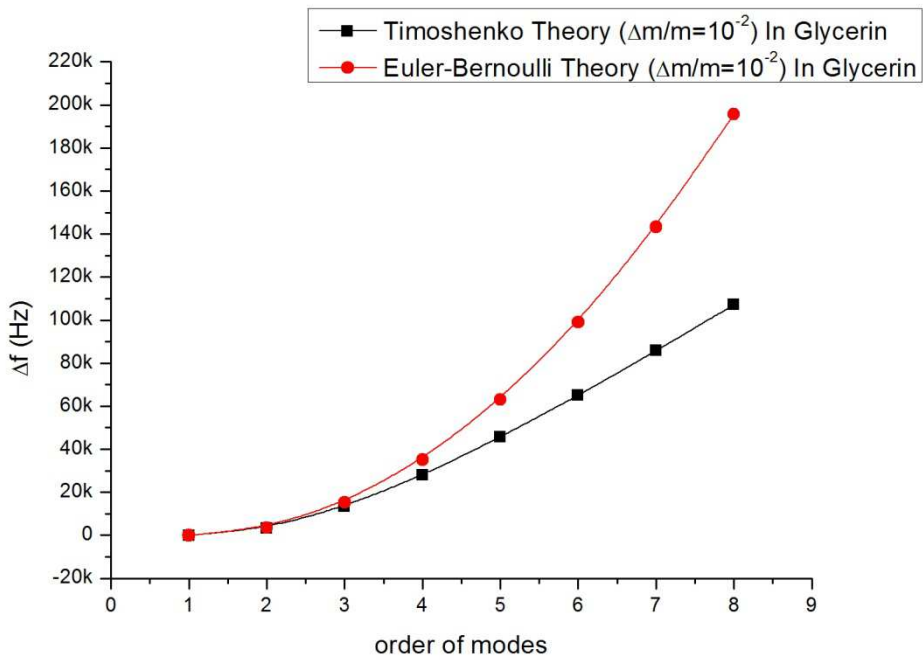


圖 4-85 $L/h=10$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 於甘油介質中之頻率偏移

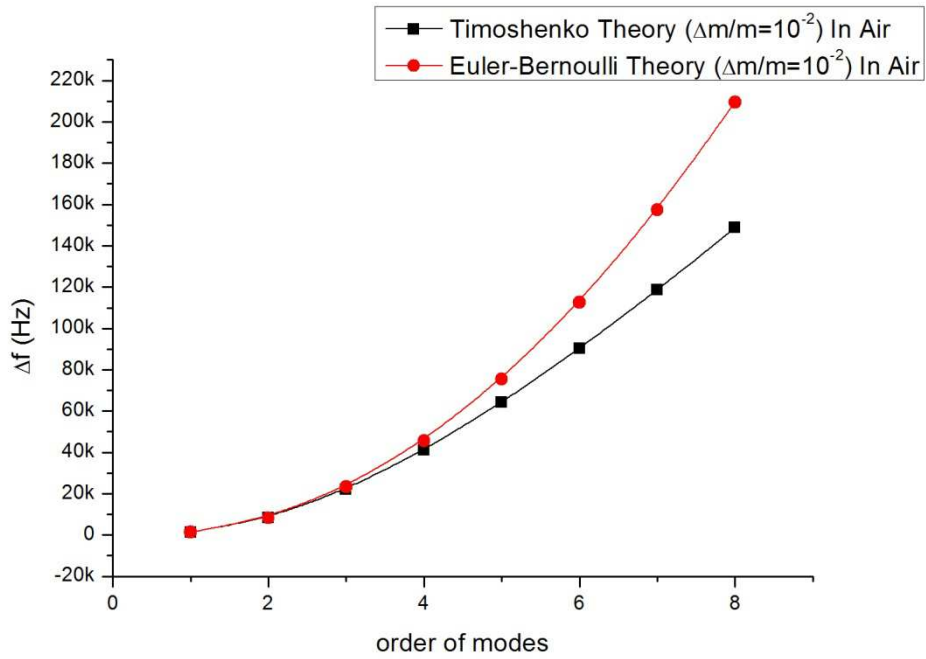


圖 4-86 $L/h = 16.67$ $\Delta m/m = 10^{-2}$ 於空氣介質中之頻率偏移

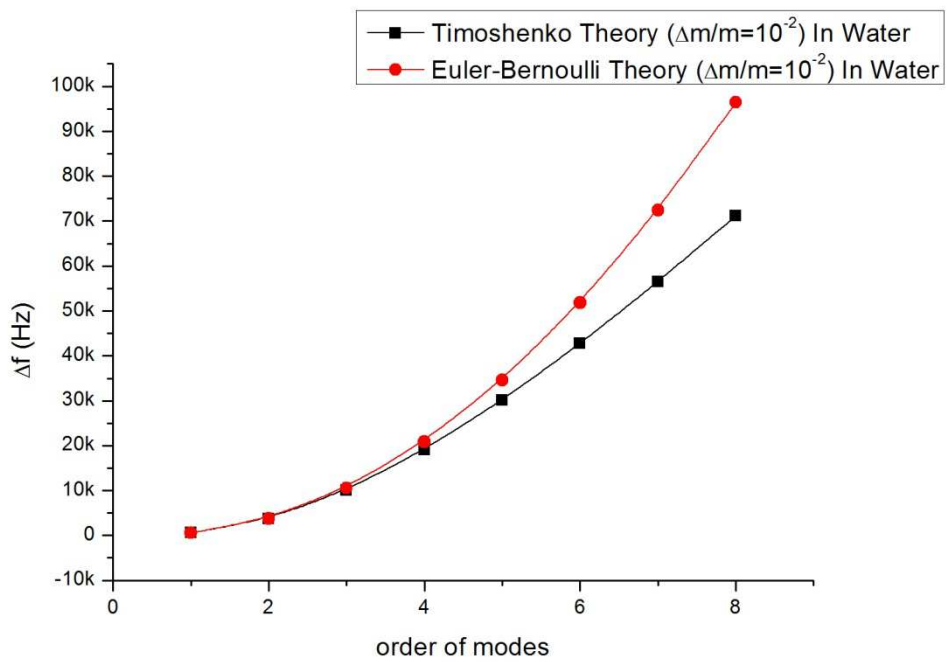


圖 4-87 $L/h = 16.67$ $\Delta m/m = 10^{-2}$ 於水介質中之頻率偏移

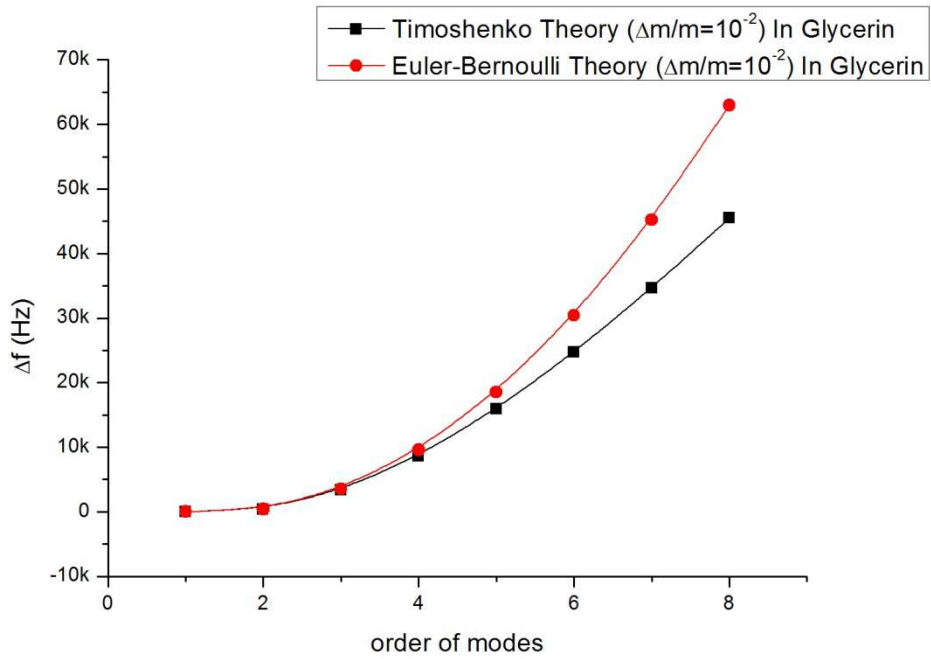


圖 4-88 $L/h=16.67$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 於甘油介質中之頻率偏移

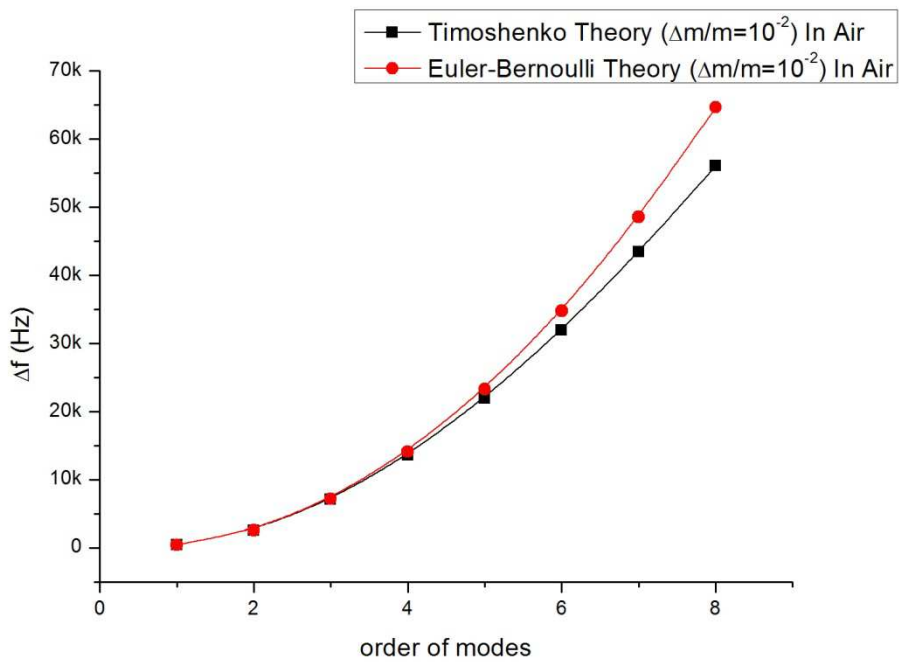


圖 4-89 $L/h=30$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 於空氣介質中之頻率偏移

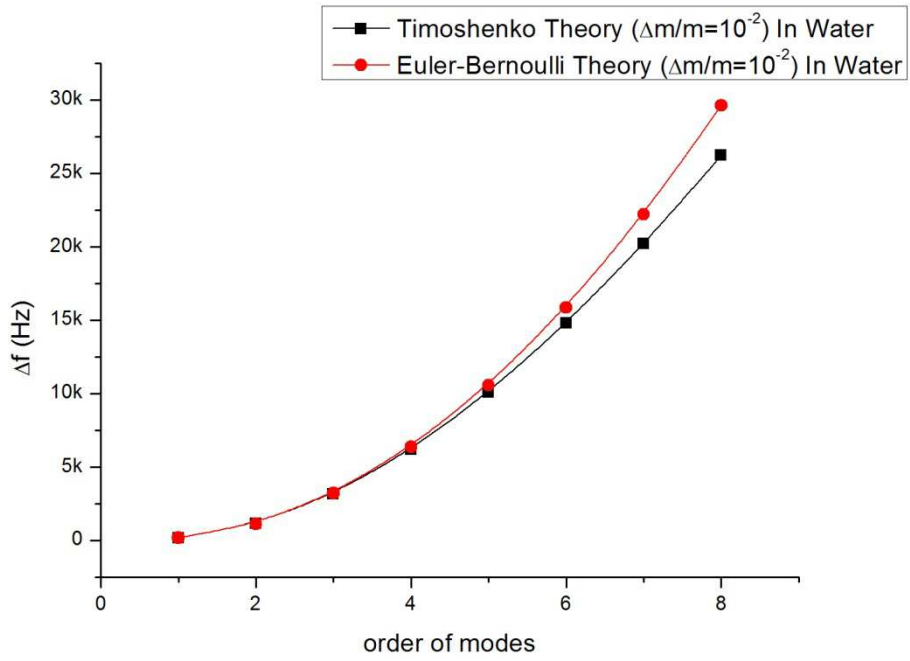


圖 4-90 $L/h = 30$ $\Delta m/m = 10^{-2}$ 於水介質中之頻率偏移

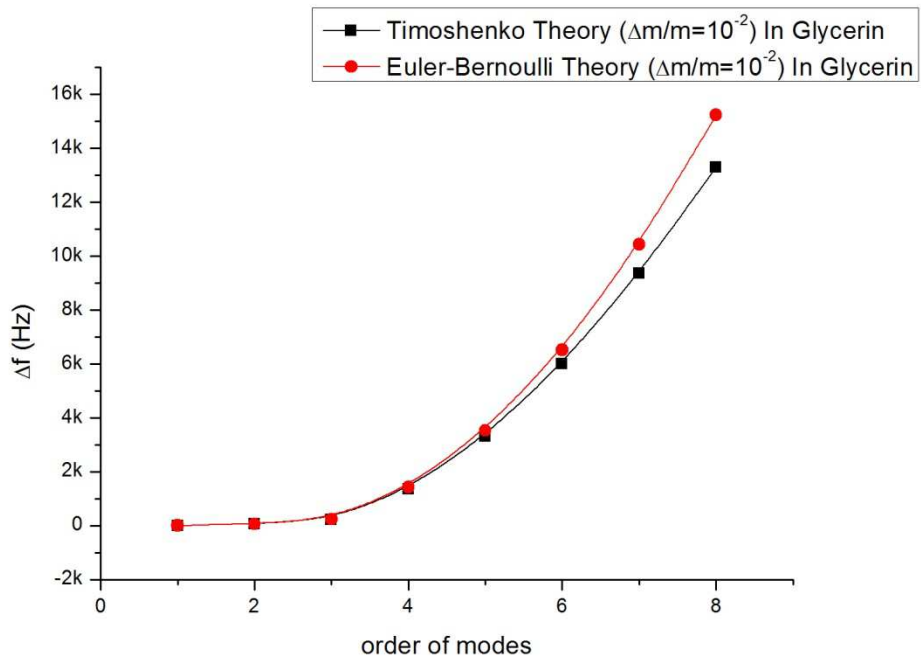


圖 4-91 $L/h = 30$ $\Delta m/m = 10^{-2}$ 於甘油介質中之頻率偏移

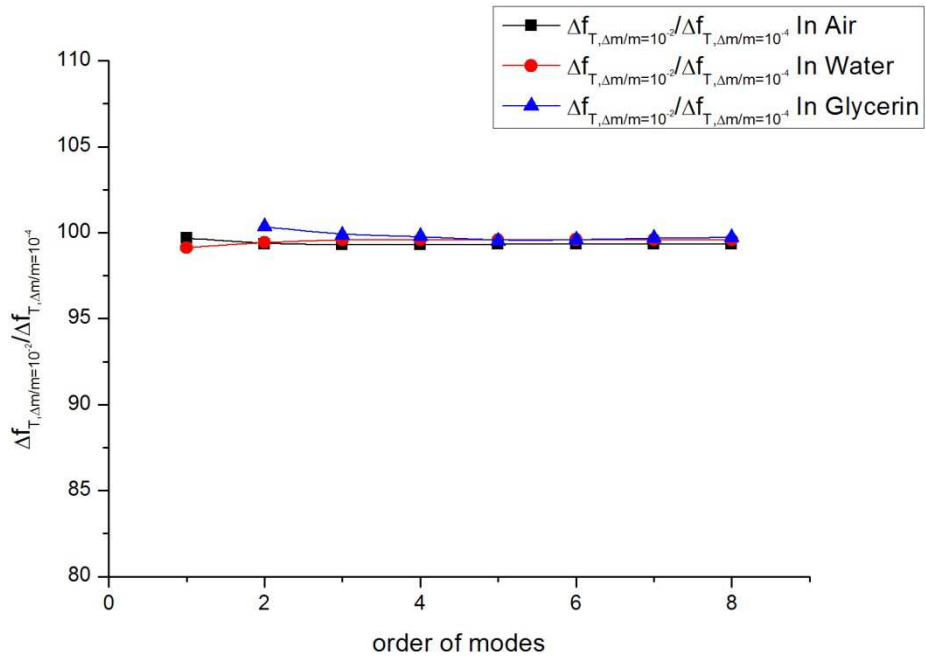


圖 4-92 額外質量與頻率偏移於 Timoshenko 梁理論之關係

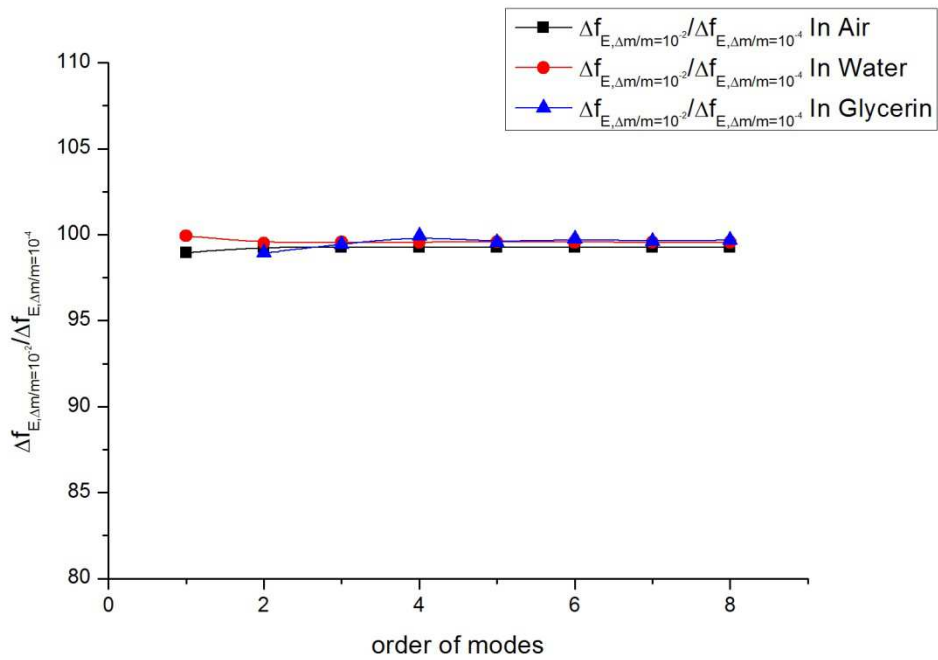


圖 4-93 額外質量與頻率偏移於 Euler 梁理論之關係

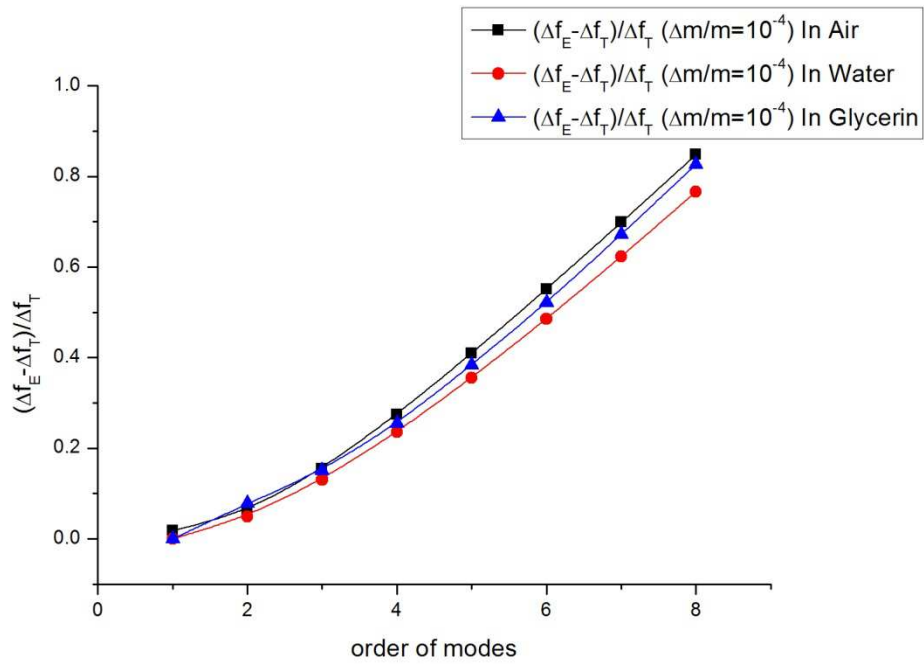


圖 4-94 $L/h=10$ $\Delta m/m=10^{-4}$ 模態階數與兩理論頻率偏移差值比例之關係

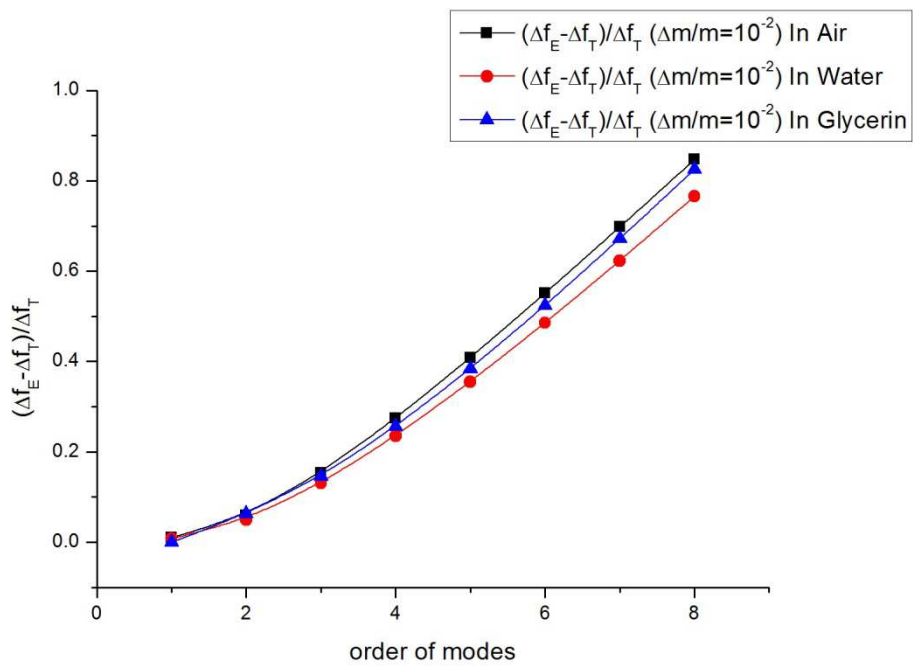


圖 4-95 $L/h=10$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 模態階數與兩理論頻率偏移差值比例之關係

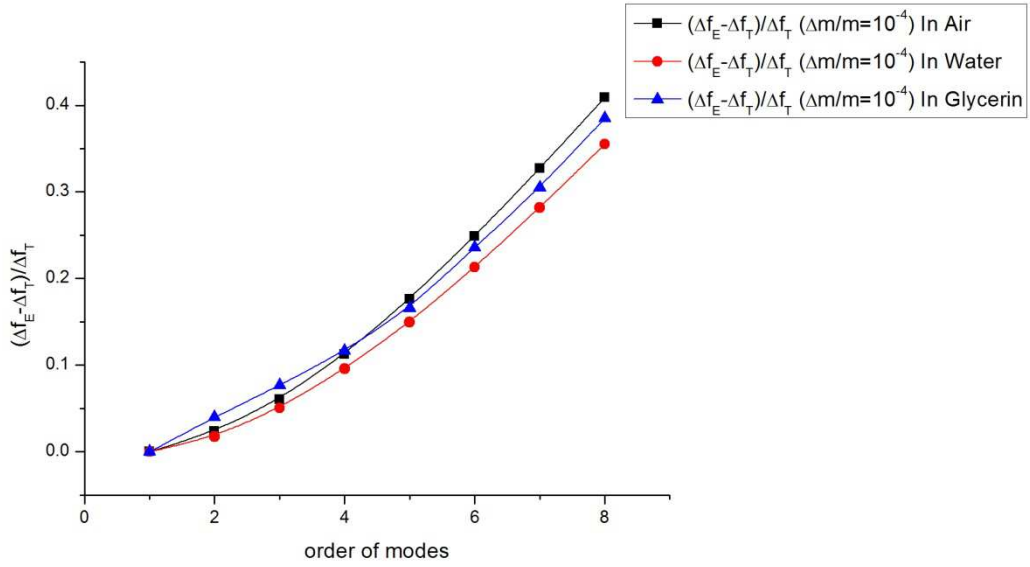


圖 4-96 $L/h=16.67$ $\Delta m/m=10^{-4}$ 模態階數與兩理論頻率偏移差值比例之關係

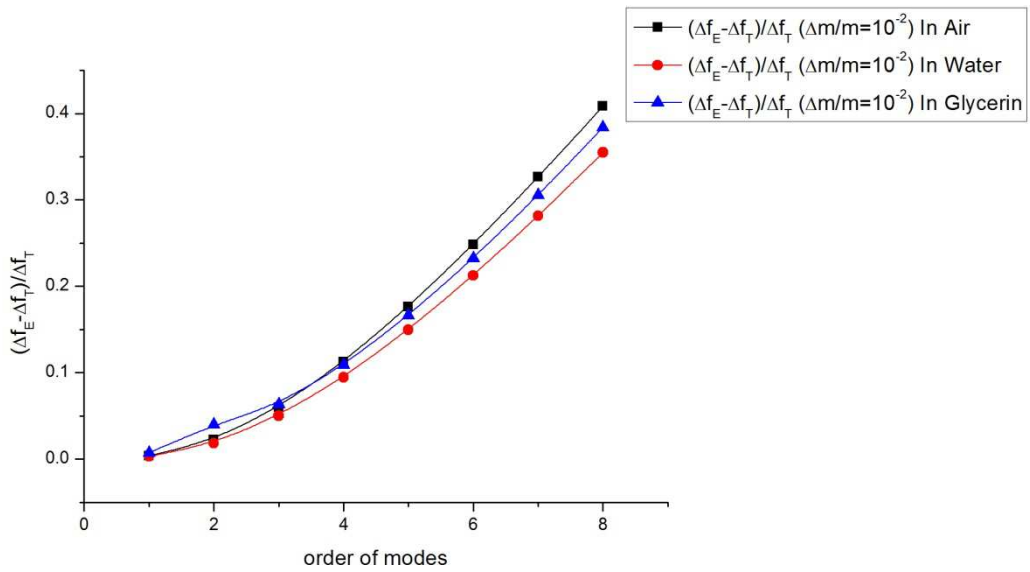


圖 4-97 $L/h=16.67$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 模態階數與兩理論頻率偏移差值比例之關係

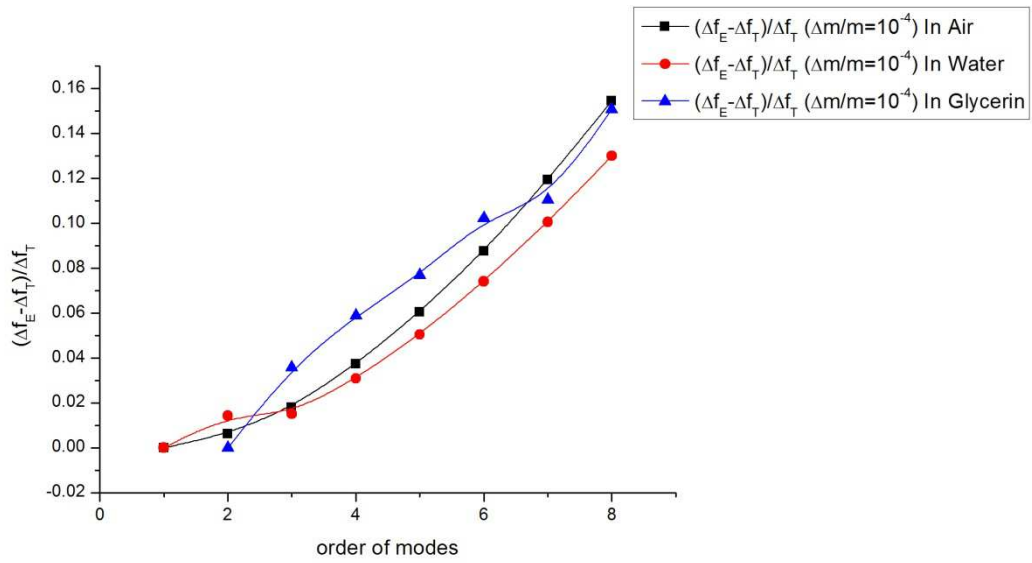


圖 4-98 $L/h = 30$ $\Delta m/m = 10^{-4}$ 模態階數與兩理論頻率偏移差值比例之關係

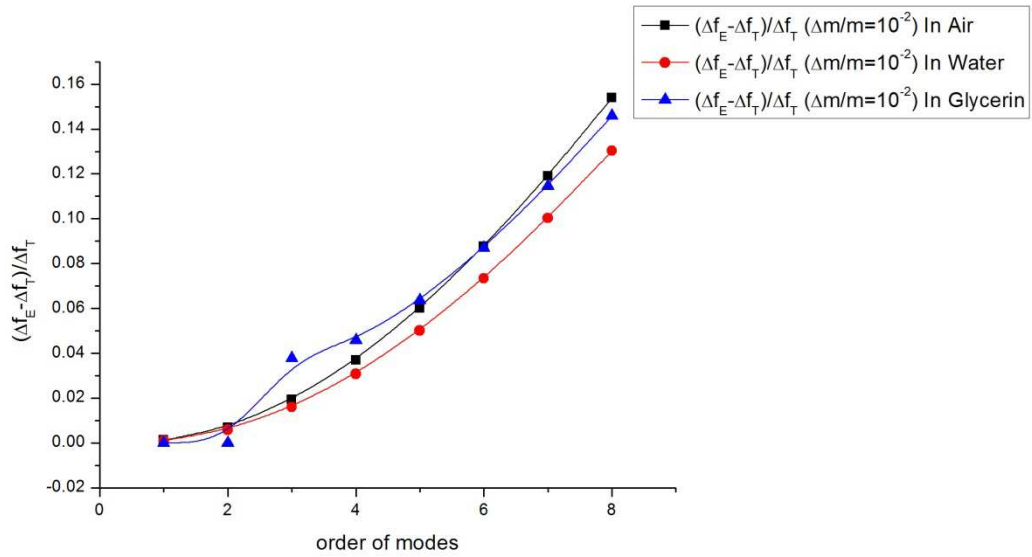


圖 4-99 $L/h = 30$ $\Delta m/m = 10^{-2}$ 模態階數與兩理論頻率偏移差值比例之關係

表 4-40 $L/h=10$ $\Delta m/m=10^{-4}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏移與兩理論

$$\text{差值比例} \frac{\Delta f_E - \Delta f_T}{\Delta f_T}$$

模態階數	1	差值比例	2	差值比例	3	差值比例
$\Delta f_{T,air} (Hz)$	36.61	0.0174	219.47	0.0602	564.52	0.1542
$\Delta f_{E,air} (Hz)$	37.24		232.68		651.58	
$\Delta f_{T,water} (Hz)$	16.23	0	100.43	0.0491	263.24	0.1306
$\Delta f_{E,water} (Hz)$	16.23		105.36		297.62	
$\Delta f_{T,glycerin} (Hz)$	0.48	0	32.63	0.0780	133.21	0.1505
$\Delta f_{E,glycerin} (Hz)$	0.48		35.17		153.27	
模態階數	4	差值比例	5	差值比例	6	差值比例
$\Delta f_{T,air} (Hz)$	1002.04	0.2745	1497.81	0.4092	2032.09	0.5518
$\Delta f_{E,air} (Hz)$	1277.06		2110.71		3153.34	
$\Delta f_{T,water} (Hz)$	473.96	0.2354	714.92	0.3551	974.35	0.4856
$\Delta f_{E,water} (Hz)$	585.53		968.78		1447.51	
$\Delta f_{T,glycerin} (Hz)$	279.64	0.2544	457.25	0.3836	652.85	0.5212
$\Delta f_{E,glycerin} (Hz)$	350.78		632.64		993.13	

表 4-41 續表 4-40 $L/h=10$ $\Delta m/m=10^{-4}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏移

與兩理論差值比例 $\frac{\Delta f_E - \Delta f_T}{\Delta f_T}$

模態階數	7	差值比例	8	差值比例
$\Delta f_{T,air} (Hz)$	2592.63	0.6986	3172.59	0.8482
$\Delta f_{E,air} (Hz)$	4403.98		5863.59	
$\Delta f_{T,water} (Hz)$	1245.39	0.6234	1523.91	0.7665
$\Delta f_{E,water} (Hz)$	2021.75		2691.95	
$\Delta f_{T,glycerin} (Hz)$	860.07	0.6726	1075.25	0.8262
$\Delta f_{E,glycerin} (Hz)$	1438.60		1963.65	

表 4-42 $L/h=10$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏移與兩理論

$$\text{差值比例} \frac{\Delta f_E - \Delta f_T}{\Delta f_T}$$

模態階數	1	差值比例	2	差值比例	3	差值比例
$\Delta f_{T,air} (Hz)$	3648.95	0.0099	21801.04	0.0595	56049.60	0.1540
$\Delta f_{E,air} (Hz)$	3685.23		23098.79		64681.52	
$\Delta f_{T,water} (Hz)$	1609.06	0.0082	9986.65	0.0497	26214.09	0.1303
$\Delta f_{E,water} (Hz)$	1622.27		10483.38		29630.35	
$\Delta f_{T,glycerin} (Hz)$	57.77	0	3273.82	0.0630	13301.22	0.1458
$\Delta f_{E,glycerin} (Hz)$	57.77		3479.92		15241.15	
模態階數	4	差值比例	5	差值比例	6	差值比例
$\Delta f_{T,air} (Hz)$	99495.71	0.2740	148761.49	0.4085	201824.54	0.5509
$\Delta f_{E,air} (Hz)$	126762.46		209527.80		313017.35	
$\Delta f_{T,water} (Hz)$	47201.06	0.2350	71194.94	0.3549	97035.81	0.4853
$\Delta f_{E,water} (Hz)$	58294.80		96464.45		144123.87	
$\Delta f_{T,glycerin} (Hz)$	27903.52	0.2560	45504.31	0.3839	65008.11	0.5237
$\Delta f_{E,glycerin} (Hz)$	35048.15		62973.31		99054.22	

表 4-43 續表 4-42 $L/h=10$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏移

與兩理論差值比例 $\frac{\Delta f_E - \Delta f_T}{\Delta f_T}$

模態階數	7	差值比例	8	差值比例
$\Delta f_{T,air} (Hz)$	257506.49	0.6977	315098.62	0.8472
$\Delta f_{E,air} (Hz)$	437165.21		582050.48	
$\Delta f_{T,water} (Hz)$	124024.20	0.6229	151745.80	0.7661
$\Delta f_{E,water} (Hz)$	201277.53		268003.87	
$\Delta f_{T,glycerin} (Hz)$	85719.26	0.6716	107213.93	0.8256
$\Delta f_{E,glycerin} (Hz)$	143291.17		195725.25	

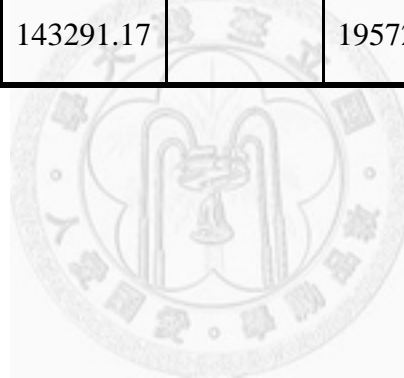


表 4-44 $L/h=16.67$ $\Delta m/m=10^{-4}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏移與兩理論差值比例 $\frac{\Delta f_E - \Delta f_T}{\Delta f_T}$

模態階數	1	差值比例	2	差值比例	3	差值比例
$\Delta f_{T,air} (Hz)$	13.37	0	81.81	0.0233	221.23	0.0604
$\Delta f_{E,air} (Hz)$	13.37		83.72		234.59	
$\Delta f_{T,water} (Hz)$	5.57	0	36.76	0.0173	101.06	0.0504
$\Delta f_{E,water} (Hz)$	5.57		37.40		106.16	
$\Delta f_{T,glycerin} (Hz)$	0.16	0	3.98	0.0400	33.26	0.0766
$\Delta f_{E,glycerin} (Hz)$	0.16		4.14		35.81	
模態階數	4	差值比例	5	差值比例	6	差值比例
$\Delta f_{T,air} (Hz)$	413.17	0.1125	645.85	0.1764	908.93	0.2490
$\Delta f_{E,air} (Hz)$	459.64		759.81		1135.25	
$\Delta f_{T,water} (Hz)$	191.15	0.0958	302.24	0.1496	428.92	0.2130
$\Delta f_{E,water} (Hz)$	209.45		347.44		520.28	
$\Delta f_{T,glycerin} (Hz)$	86.10	0.1165	159.47	0.1657	246.69	0.2361
$\Delta f_{E,glycerin} (Hz)$	96.13		185.89		304.94	

表 4-45 續表 4-44 $L/h=16.67$ $\Delta m/m=10^{-4}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏

移與兩理論差值比例 $\frac{\Delta f_E - \Delta f_T}{\Delta f_T}$

模態階數	7	差值比例	8	差值比例
$\Delta f_{T,air} (Hz)$	1194.78	0.3270	1497.97	0.4092
$\Delta f_{E,air} (Hz)$	1585.50		2110.87	
$\Delta f_{T,water} (Hz)$	567.55	0.2818	714.92	0.3553
$\Delta f_{E,water} (Hz)$	727.50		968.94	
$\Delta f_{T,glycerin} (Hz)$	347.75	0.3048	456.77	0.3854
$\Delta f_{E,glycerin} (Hz)$	453.75		632.80	



表 4-46 $L/h=16.67$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏移與兩理論差值比例 $\frac{\Delta f_E - \Delta f_T}{\Delta f_T}$

模態階數	1	差值比例	2	差值比例	3	差值比例
$\Delta f_{T,air} (Hz)$	1321.62	0.0036	8134.89	0.0221	21966.25	0.0600
$\Delta f_{E,air} (Hz)$	1326.40		8314.89		23283.89	
$\Delta f_{T,water} (Hz)$	563.73	0.0031	3654.52	0.0184	10063.69	0.0501
$\Delta f_{E,water} (Hz)$	565.48		3721.68		10568.21	
$\Delta f_{T,glycerin} (Hz)$	21.49	0.0074	372.26	0.0398	3315.52	0.0633
$\Delta f_{E,glycerin} (Hz)$	21.65		387.06		3525.28	
模態階數	4	差值比例	5	差值比例	6	差值比例
$\Delta f_{T,air} (Hz)$	41016.62	0.1124	64123.21	0.1763	90255.34	0.2485
$\Delta f_{E,air} (Hz)$	45628.93		75429.26		112683.13	
$\Delta f_{T,water} (Hz)$	19042.09	0.0946	30089.83	0.1496	42715.60	0.2125
$\Delta f_{E,water} (Hz)$	20844.36		34591.53		51794.75	
$\Delta f_{T,glycerin} (Hz)$	8640.68	0.1089	15908.49	0.1660	24698.78	0.2323
$\Delta f_{E,glycerin} (Hz)$	9581.45		18549.83		30435.84	

表 4-47 續表 4-46 $L/h=16.67$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏

移與兩理論差值比例 $\frac{\Delta f_E - \Delta f_T}{\Delta f_T}$

模態階數	7	差值比例	8	差值比例
$\Delta f_{T,air} (Hz)$	118641.42	0.3265	148762.13	0.4085
$\Delta f_{E,air} (Hz)$	157375.75		209533.85	
$\Delta f_{T,water} (Hz)$	56515.28	0.2814	71195.10	0.3550
$\Delta f_{E,water} (Hz)$	72421.39		96467.31	
$\Delta f_{T,glycerin} (Hz)$	34654.87	0.3054	45503.99	0.3840
$\Delta f_{E,glycerin} (Hz)$	45239.79		62975.38	



表 4-48 $L/h = 30$ $\Delta m/m = 10^{-4}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏移與兩理論

$$\text{差值比例} \frac{\Delta f_E - \Delta f_T}{\Delta f_T}$$

模態階數	1	差值比例	2	差值比例	3	差值比例
$\Delta f_{T,air} (Hz)$	4.14	0	25.78	0.0062	71.14	0.0179
$\Delta f_{E,air} (Hz)$	4.14		25.94		72.42	
$\Delta f_{T,water} (Hz)$	1.59	0	11.14	0.0143	31.67	0.0151
$\Delta f_{E,water} (Hz)$	1.59		11.30		32.15	
$\Delta f_{T,glycerin} (Hz)$	0	--	0.48	0	2.23	0.0357
$\Delta f_{E,glycerin} (Hz)$	0		0.48		2.31	
模態階數	4	差值比例	5	差值比例	6	差值比例
$\Delta f_{T,air} (Hz)$	136.87	0.0372	221.23	0.0604	322.13	0.0875
$\Delta f_{E,air} (Hz)$	141.97		234.59		350.30	
$\Delta f_{T,water} (Hz)$	61.91	0.0308	101.06	0.0504	148.17	0.0741
$\Delta f_{E,water} (Hz)$	63.82		106.16		159.15	
$\Delta f_{T,glycerin} (Hz)$	13.53	0.0588	33.10	0.0769	59.21	0.1022
$\Delta f_{E,glycerin} (Hz)$	14.32		35.65		65.25	

表 4-49 續表 4-48 $L/h = 30$ $\Delta m/m = 10^{-4}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏移

與兩理論差值比例 $\frac{\Delta f_E - \Delta f_T}{\Delta f_T}$

模態階數	7	差值比例	8	差值比例
$\Delta f_{T,air} (Hz)$	437.20	0.1194	564.36	0.1545
$\Delta f_{E,air} (Hz)$	489.40		651.58	
$\Delta f_{T,water} (Hz)$	202.60	0.1005	263.24	0.1300
$\Delta f_{E,water} (Hz)$	222.98		297.46	
$\Delta f_{T,glycerin} (Hz)$	93.74	0.1104	133.05	0.1507
$\Delta f_{E,glycerin} (Hz)$	104.09		153.11	



表 4-50 $L/h=30 \Delta m/m=10^{-2}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏移與兩理論

$$\text{差值比例} \frac{\Delta f_E - \Delta f_T}{\Delta f_T}$$

模態階數	1	差值比例	2	差值比例	3	差值比例
$\Delta f_{T,air} (Hz)$	408.87	0.0012	2548.39	0.0069	7050.56	0.0192
$\Delta f_{E,air} (Hz)$	409.35		2565.90		7185.69	
$\Delta f_{T,water} (Hz)$	163.77	0.0010	1112.17	0.0059	3157.79	0.0159
$\Delta f_{E,water} (Hz)$	163.93		1118.70		3208.09	
$\Delta f_{T,glycerin} (Hz)$	0.8	0	62.23	0	223.77	0.0377
$\Delta f_{E,glycerin} (Hz)$	0.8		62.23		232.21	
模態階數	4	差值比例	5	差值比例	6	差值比例
$\Delta f_{T,air} (Hz)$	13579.58	0.0370	21962.27	0.0600	31978.37	0.0875
$\Delta f_{E,air} (Hz)$	14082.03		23279.28		34776.95	
$\Delta f_{T,water} (Hz)$	6163.12	0.0308	10061.78	0.0501	14764.64	0.0734
$\Delta f_{E,water} (Hz)$	6353.15		10566.14		15848.49	
$\Delta f_{T,glycerin} (Hz)$	1360.14	0.0459	3314.56	0.0635	6007.30	0.0870
$\Delta f_{E,glycerin} (Hz)$	1422.53		3524.96		6529.81	

表 4-51 續表 4-50 $L/h=30 \Delta m/m=10^{-2}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏移

與兩理論差值比例 $\frac{\Delta f_E - \Delta f_T}{\Delta f_T}$

模態階數	7	差值比例	8	差值比例
$\Delta f_{T,air} (Hz)$	43403.94	0.1190	56040.05	0.1540
$\Delta f_{E,air} (Hz)$	48570.75		64668.47	
$\Delta f_{T,water} (Hz)$	20176.55	0.1003	26209.48	0.1303
$\Delta f_{E,water} (Hz)$	22200.05		29624.31	
$\Delta f_{T,glycerin} (Hz)$	9360.22	0.1146	13296.60	0.1459
$\Delta f_{E,glycerin} (Hz)$	10432.92		15236.54	

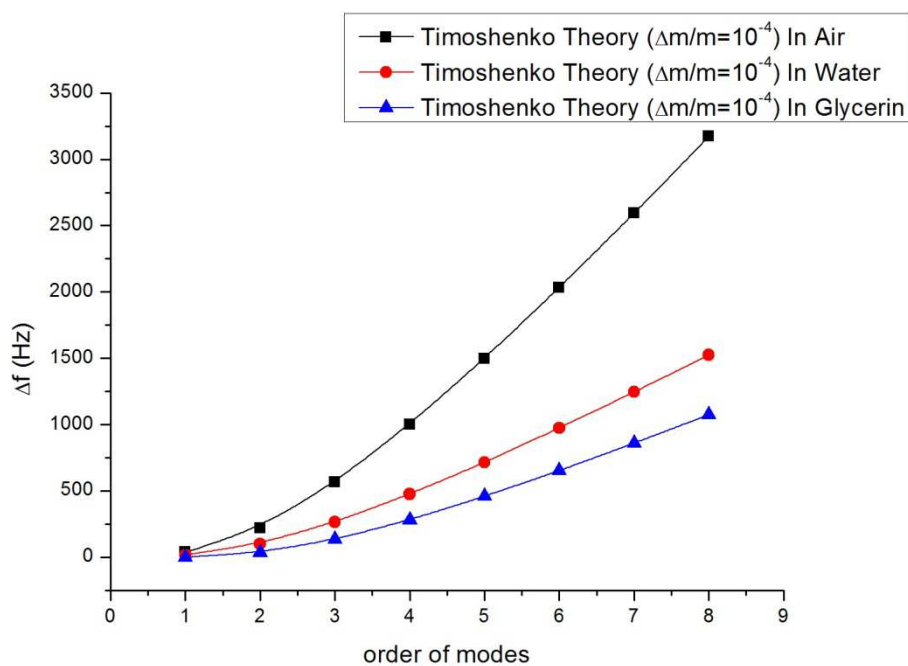


圖 4-100 $L/h=10 \Delta m/m=10^{-4}$ 於 Timoshenko 梁理論之頻率偏移

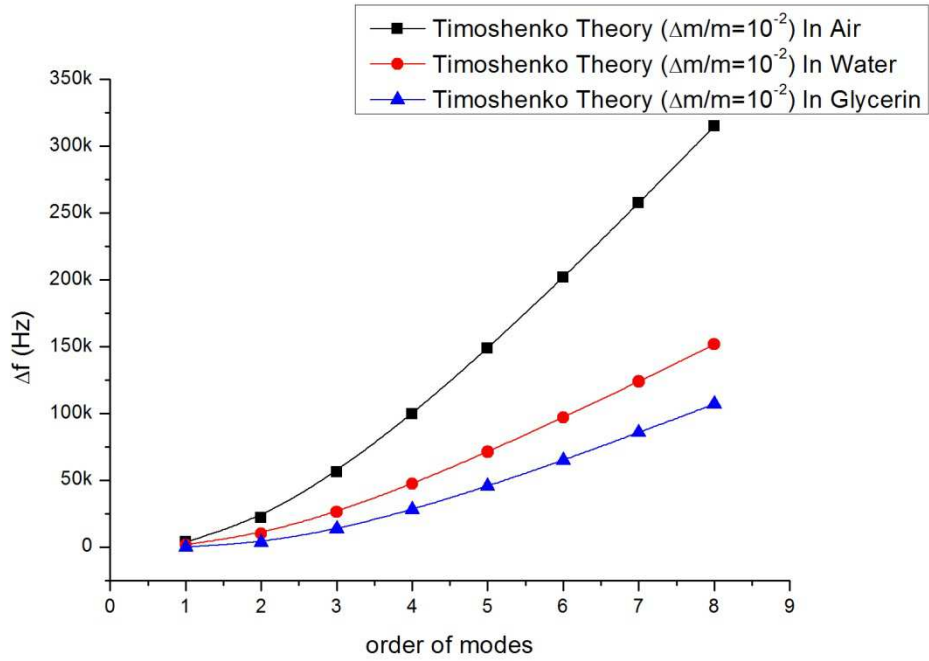


圖 4-101 $L/h=10$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 於 Timoshenko 梁理論之頻率偏移

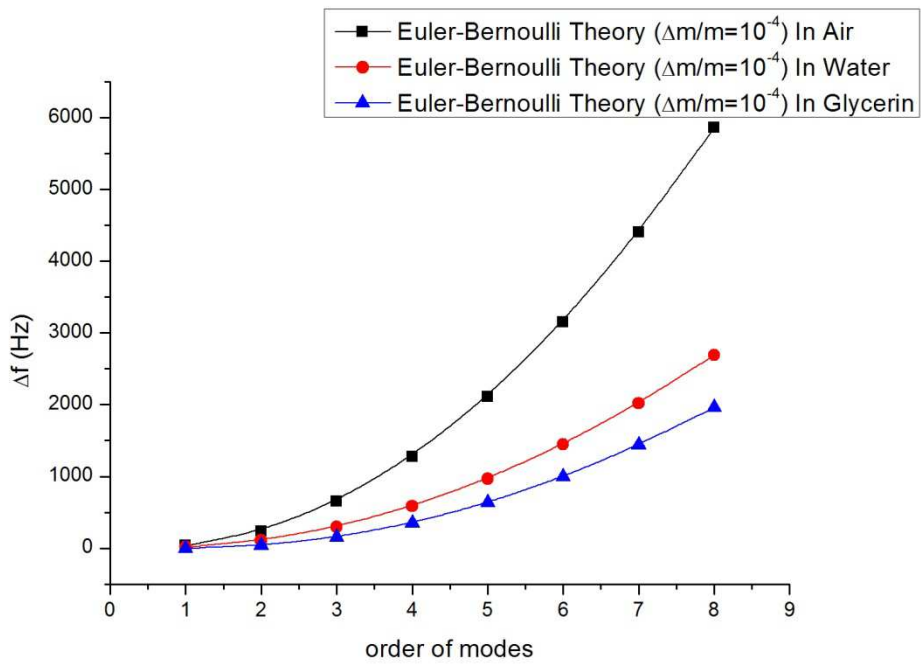


圖 4-102 $L/h=10$ $\Delta m/m=10^{-4}$ 於 Euler 梁理論之頻率偏移

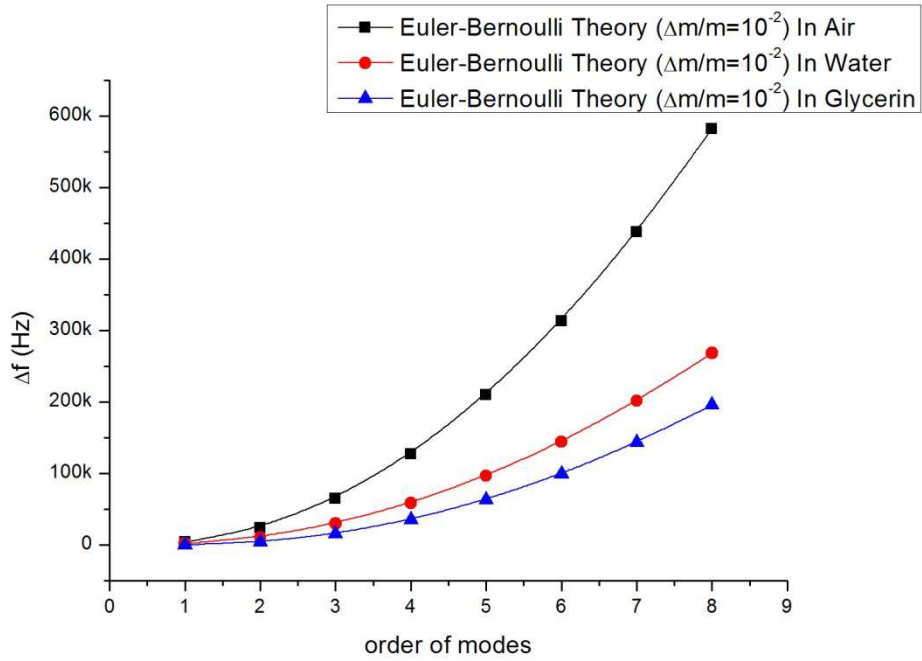


圖 4-103 $L/h = 10$ $\Delta m/m = 10^{-2}$ 於 Euler 梁理論之頻率偏移

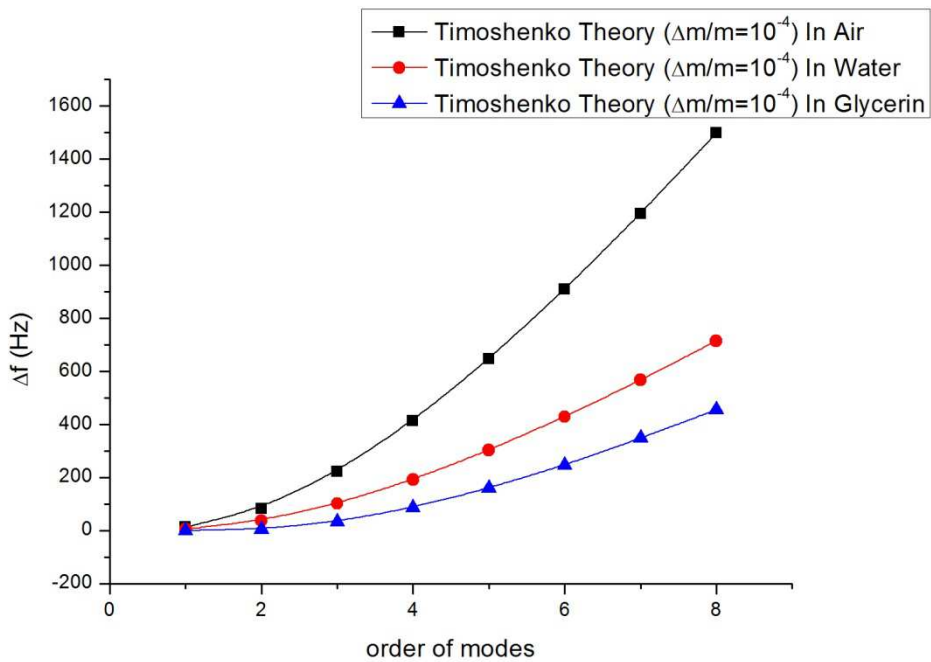


圖 4-104 $L/h = 16.67$ $\Delta m/m = 10^{-4}$ 於 Timoshenko 梁理論之頻率偏移

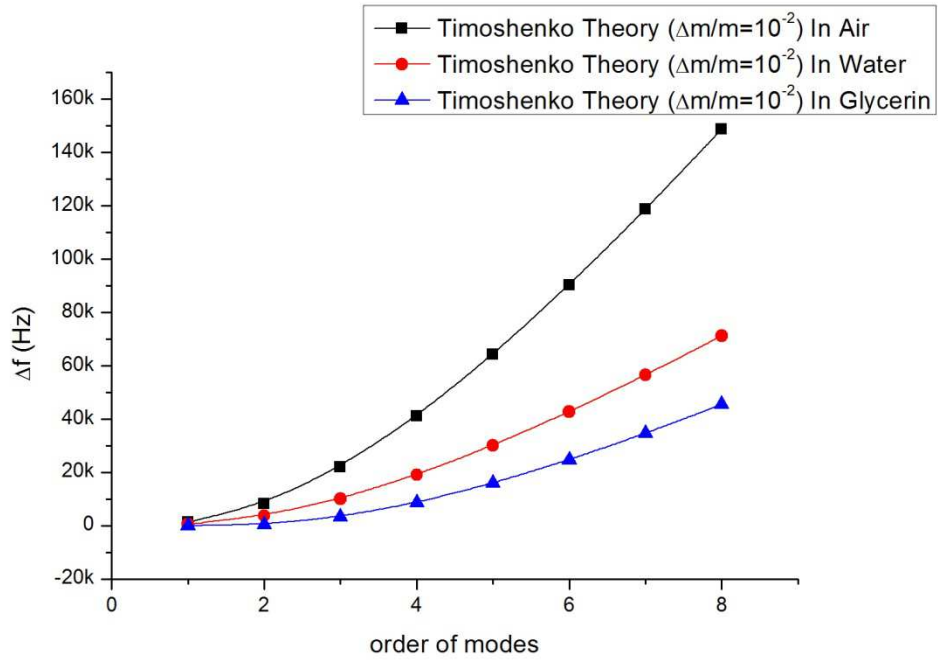


圖 4-105 $L/h = 16.67$ $\Delta m/m = 10^{-2}$ 於 Timoshenko 梁理論之頻率偏移

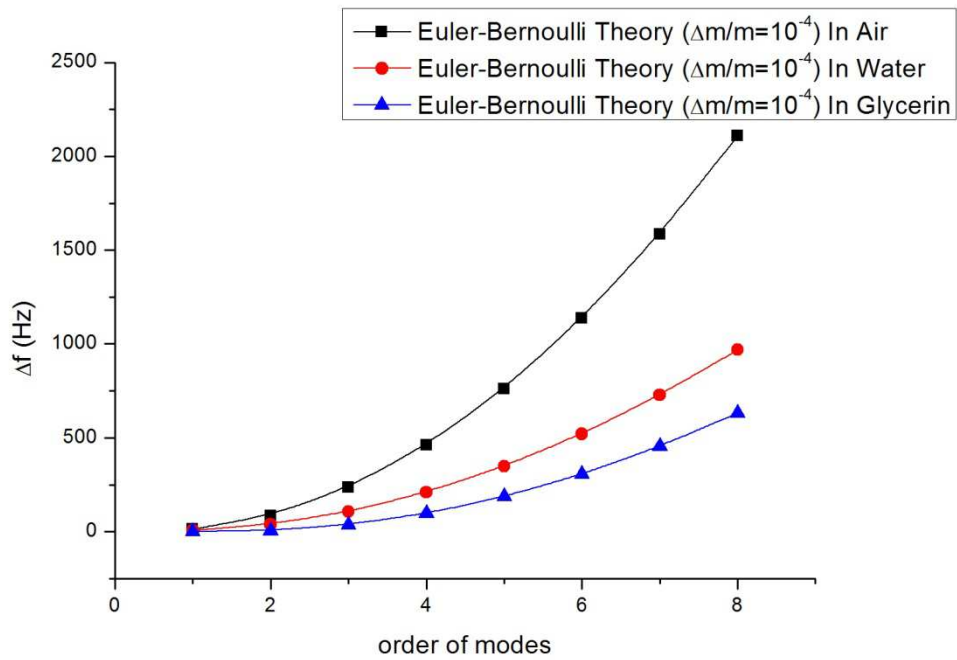


圖 4-106 $L/h = 16.67$ $\Delta m/m = 10^{-4}$ 於 Euler 梁理論之頻率偏移

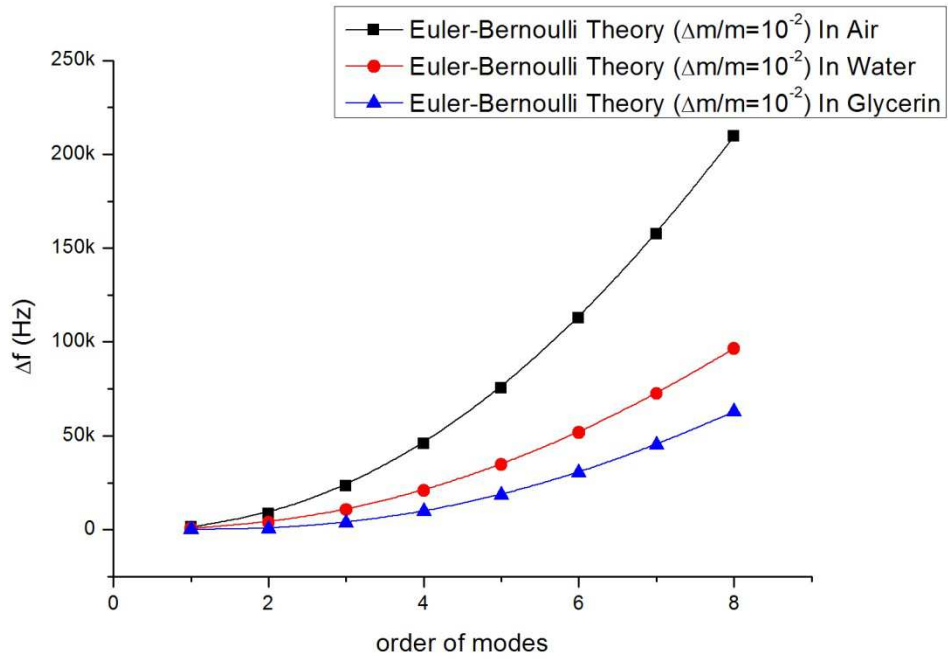


圖 4-107 $L/h = 16.67$ $\Delta m/m = 10^{-2}$ 於 Euler 梁理論之頻率偏移

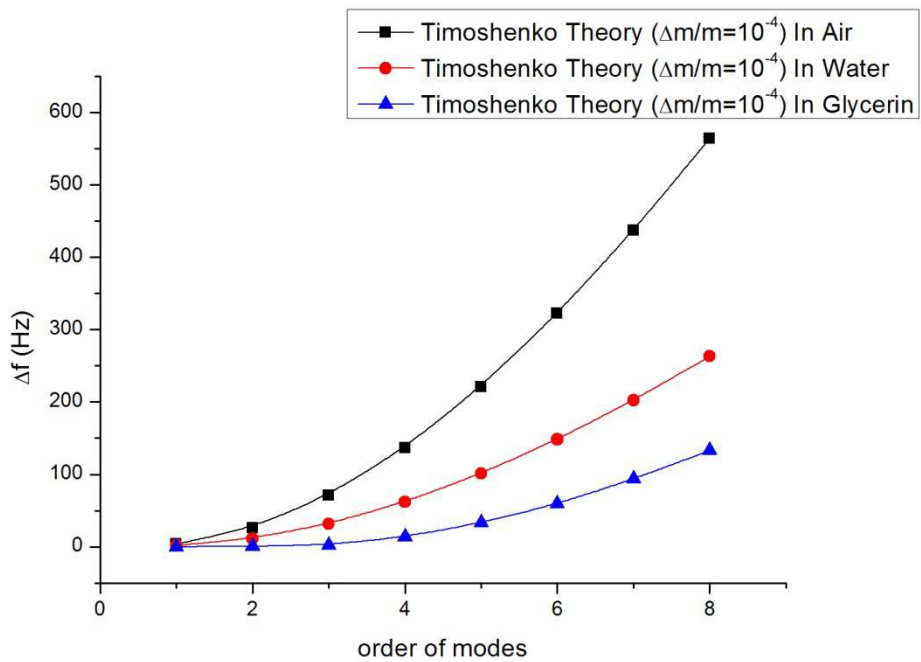


圖 4-108 $L/h = 30$ $\Delta m/m = 10^{-4}$ 於 Timoshenko 梁理論之頻率偏移

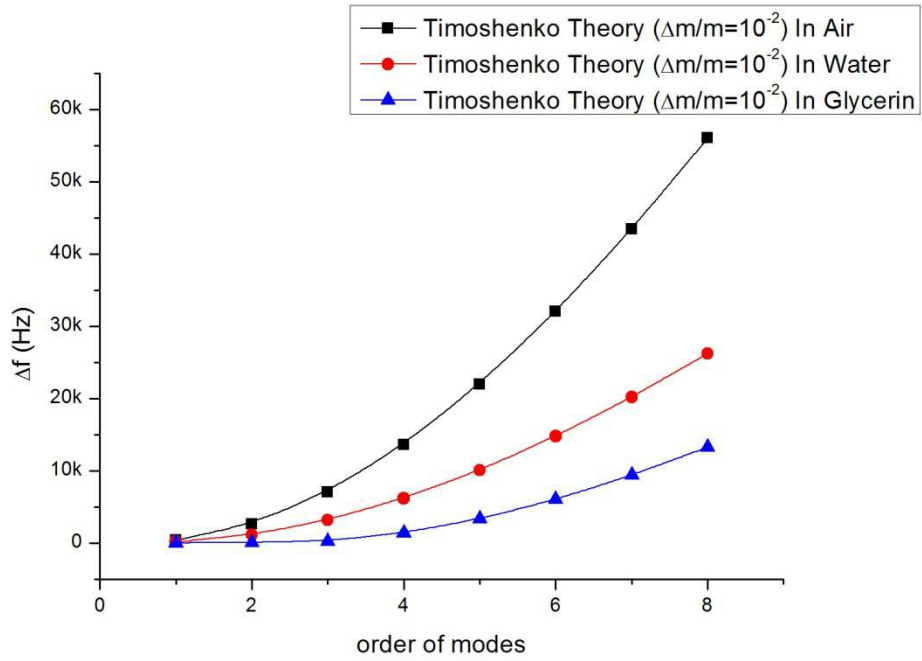


圖 4-109 $L/h = 30$ $\Delta m/m = 10^{-2}$ 於 Timoshenko 梁理論之頻率偏移

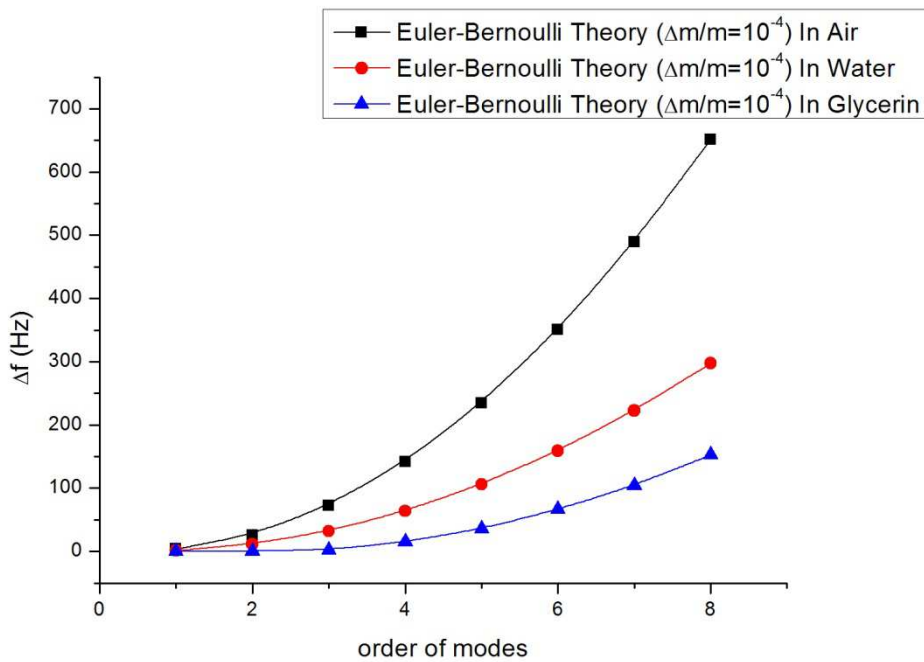


圖 4-110 $L/h = 30$ $\Delta m/m = 10^{-4}$ 於 Euler 梁理論之頻率偏移

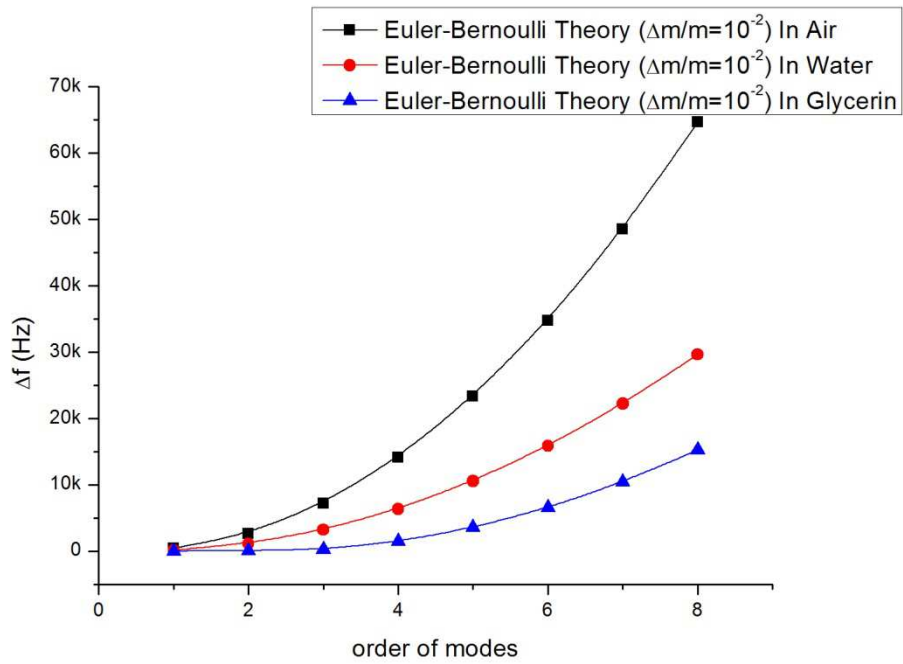


圖 4-111 $L/h=30$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 於 Euler 梁理論之頻率偏移

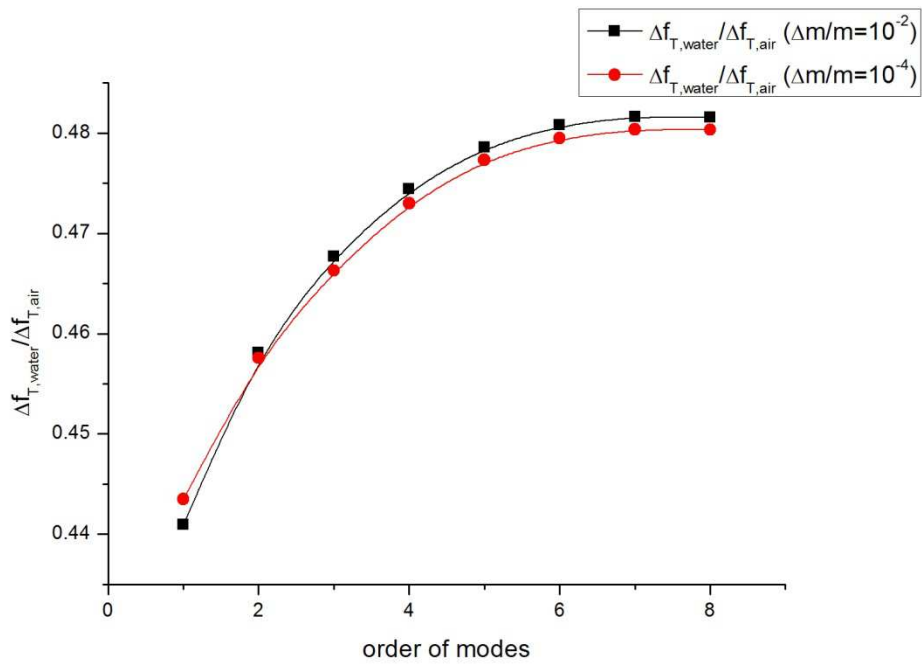


圖 4-112 $L/h=10$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 與 $\Delta m/m=10^{-4}$ 模態階數與流體環境於

Timoshenko 梁理論中對頻率偏移之影響(水、空氣)

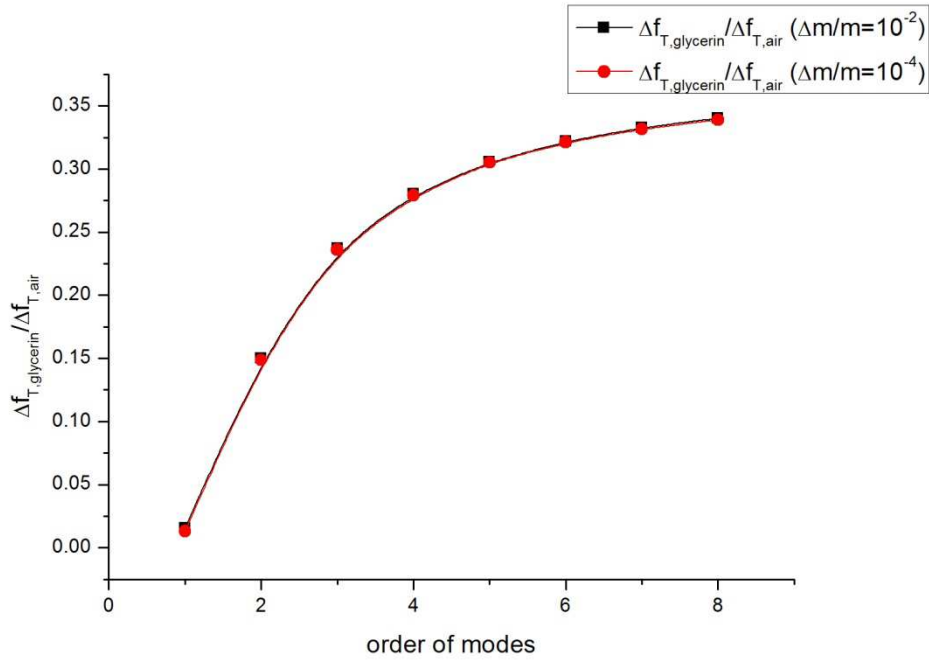


圖 4-113 $L/h = 10$ $\Delta m/m = 10^{-2}$ 與 $\Delta m/m = 10^{-4}$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率偏移之影響(甘油、空氣)

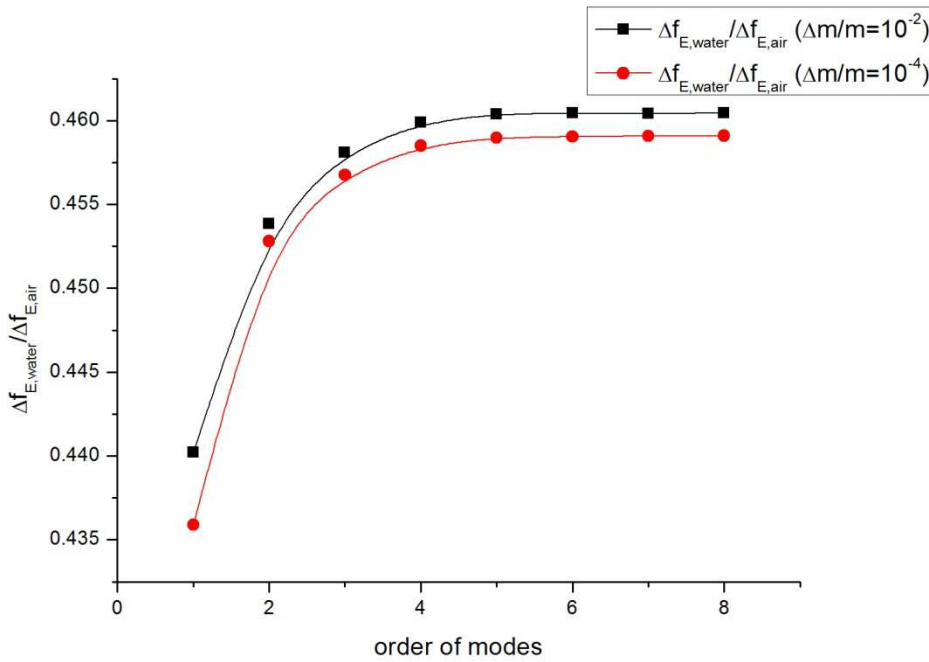


圖 4-114 $L/h = 10$ $\Delta m/m = 10^{-2}$ 與 $\Delta m/m = 10^{-4}$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率偏移之影響(水、空氣)

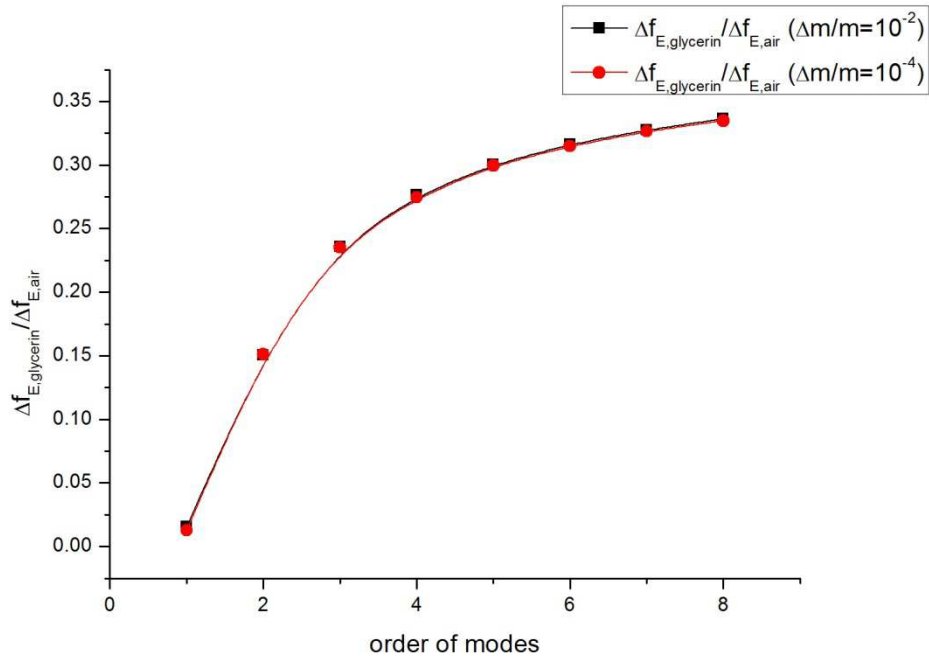


圖 4-115 $L/h = 10$ $\Delta m/m = 10^{-2}$ 與 $\Delta m/m = 10^{-4}$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理

論中對頻率偏移之影響(甘油、空氣)

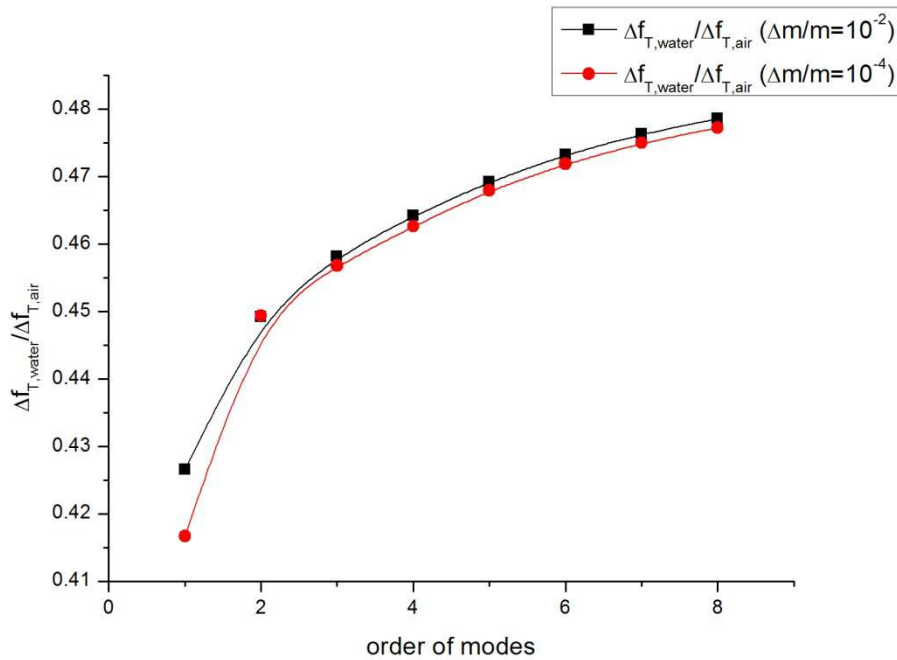


圖 4-116 $L/h = 16.67$ $\Delta m/m = 10^{-2}$ 與 $\Delta m/m = 10^{-4}$ 模態階數與流體環境於

Timoshenko 梁理論中對頻率偏移之影響(水、空氣)

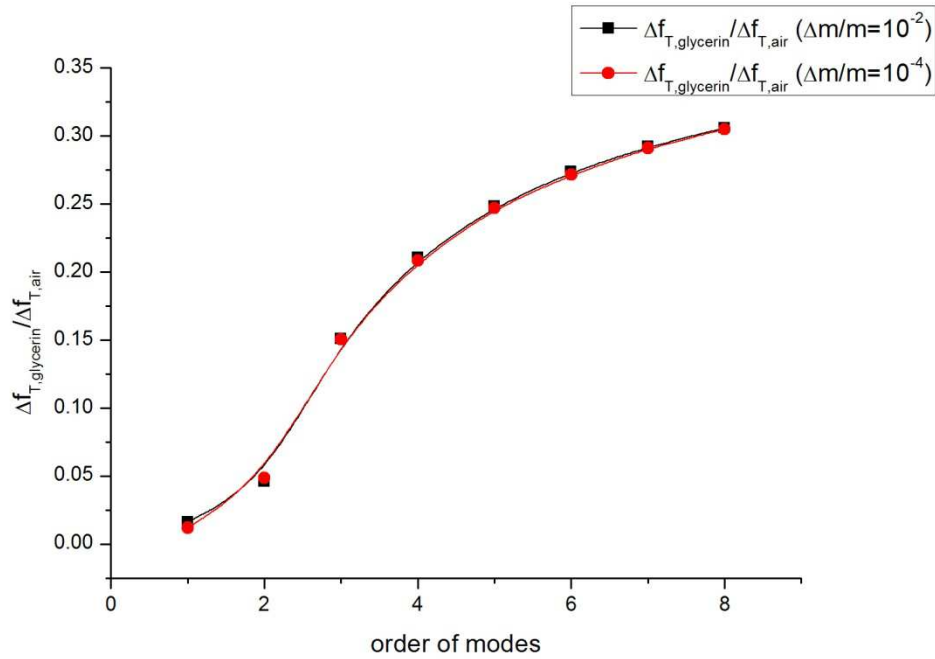


圖 4-117 $L/h = 16.67$ $\Delta m/m = 10^{-2}$ 與 $\Delta m/m = 10^{-4}$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率偏移之影響(甘油、空氣)

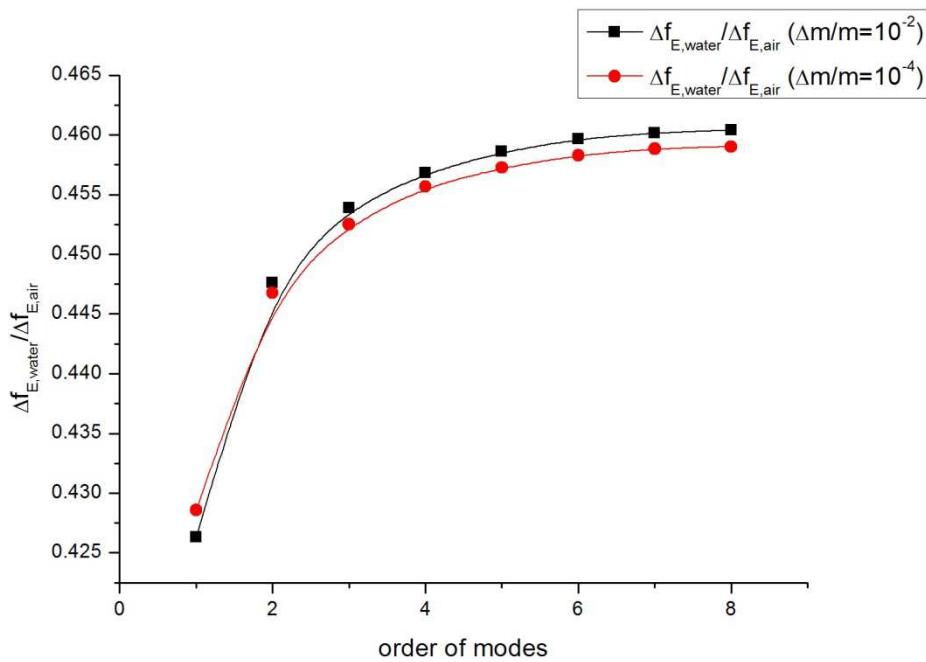


圖 4-118 $L/h = 16.67$ $\Delta m/m = 10^{-2}$ 與 $\Delta m/m = 10^{-4}$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率偏移之影響(水、空氣)

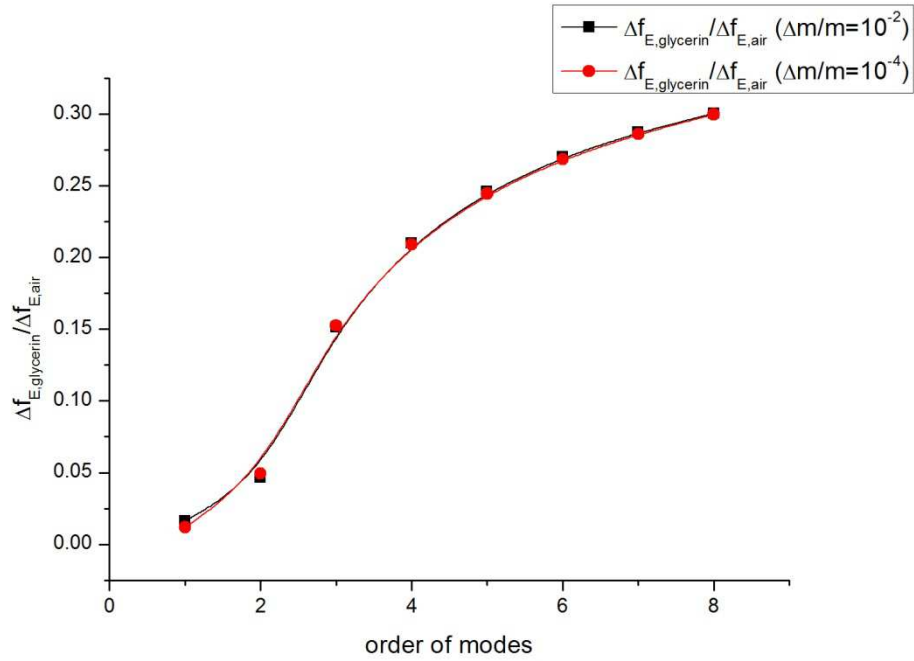


圖 4-119 $L/h = 16.67$ $\Delta m/m = 10^{-2}$ 與 $\Delta m/m = 10^{-4}$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率偏移之影響(甘油、空氣)

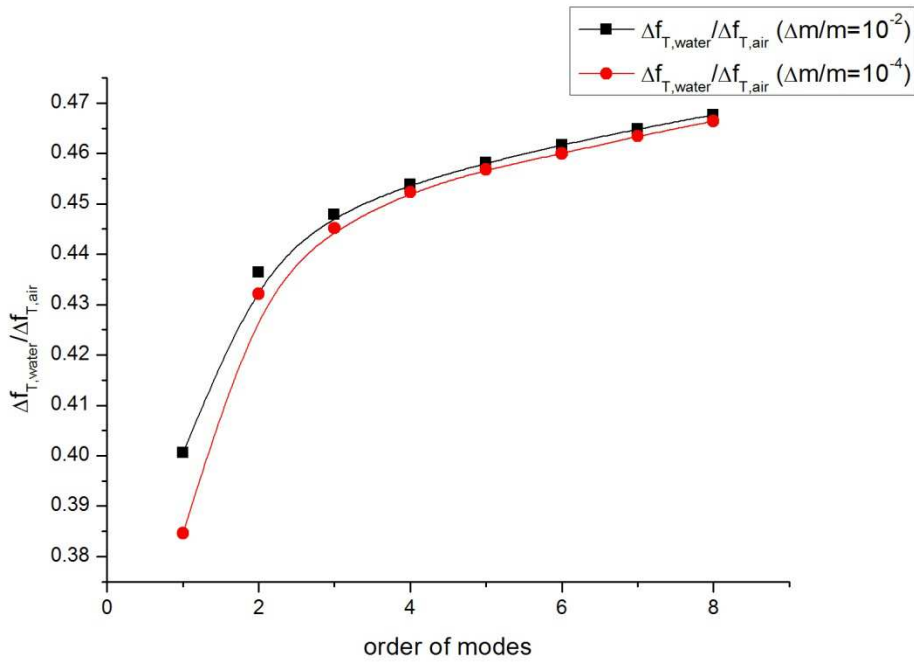


圖 4-120 $L/h = 30$ $\Delta m/m = 10^{-2}$ 與 $\Delta m/m = 10^{-4}$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率偏移之影響(水、空氣)

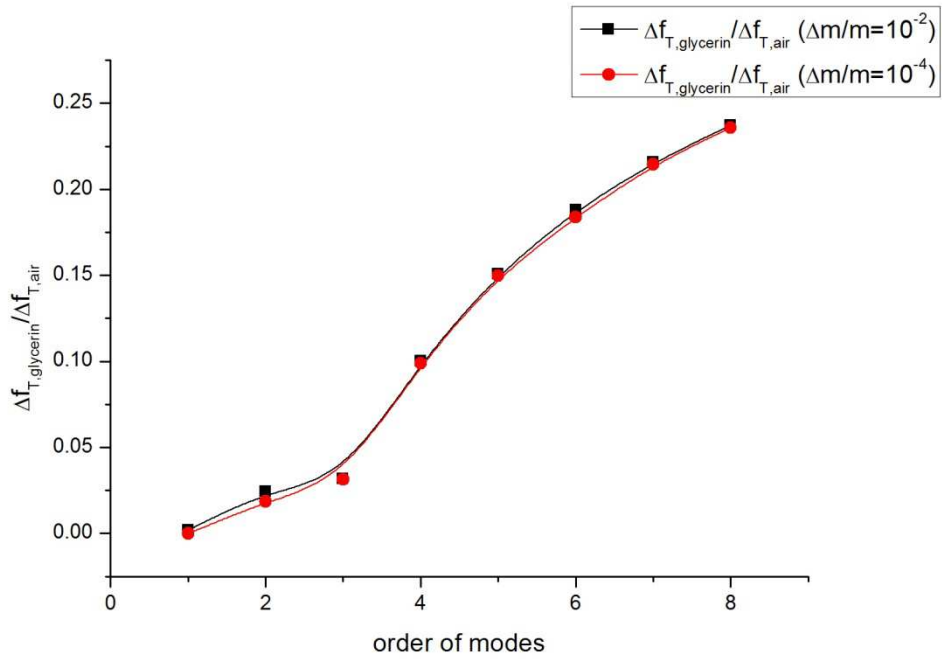


圖 4-121 $L/h = 30$ $\Delta m/m = 10^{-2}$ 與 $\Delta m/m = 10^{-4}$ 模態階數與流體環境於 Timoshenko 梁理論中對頻率偏移之影響(甘油、空氣)

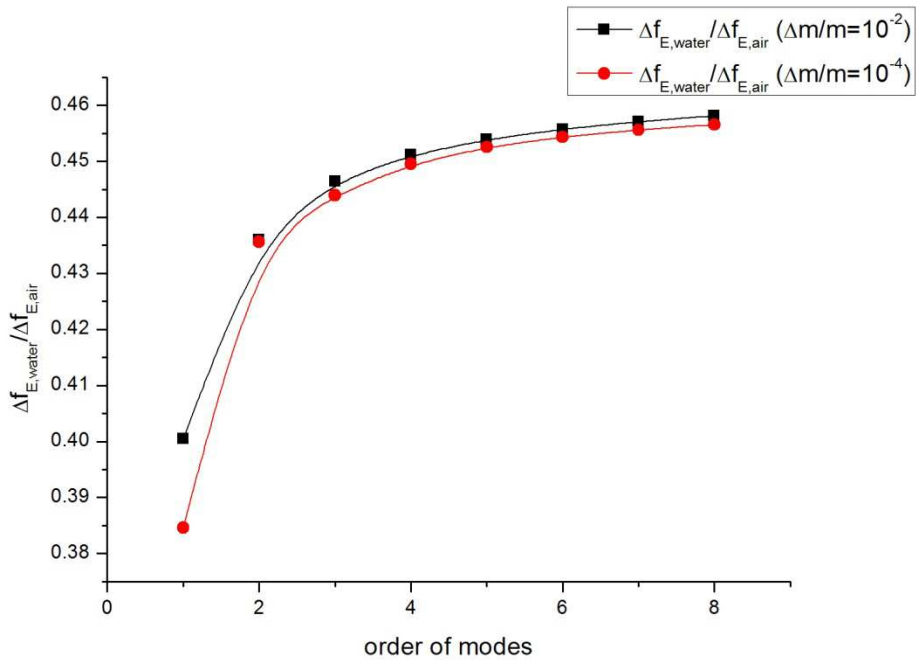


圖 4-122 $L/h = 30$ $\Delta m/m = 10^{-2}$ 與 $\Delta m/m = 10^{-4}$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理論中對頻率偏移之影響(水、空氣)

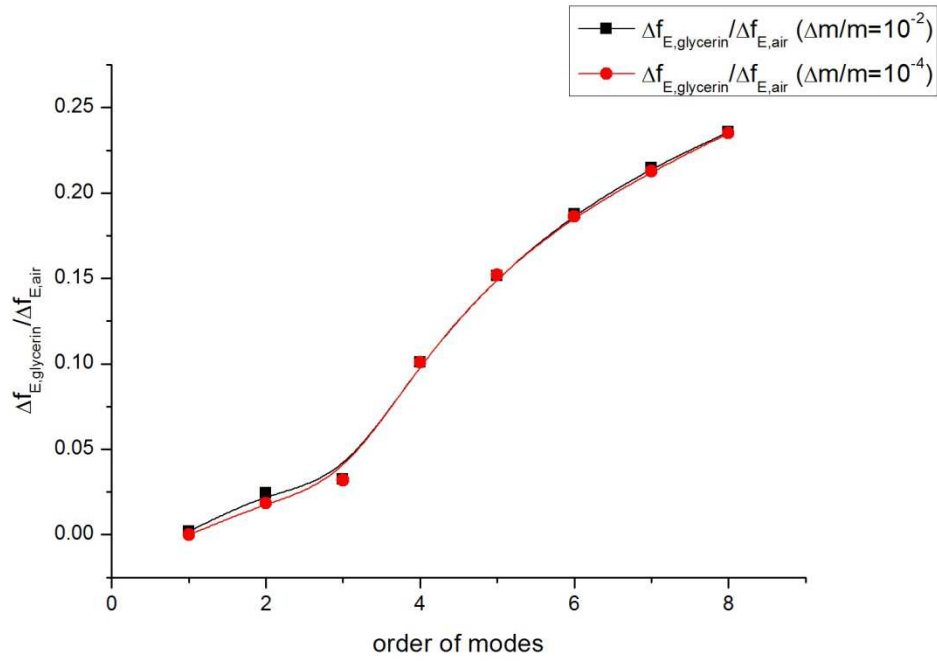


圖 4-123 $L/h = 30$ $\Delta m/m = 10^{-2}$ 與 $\Delta m/m = 10^{-4}$ 模態階數與流體環境於 Euler 梁理

論中對頻率偏移之影響(甘油、空氣)

表 4-52 $L/h=10$ $\Delta m/m=10^{-4}$ 流體環境對各模態中頻率偏移之影響

模態階數	1	2	3	4
$\Delta f_{T,water} / \Delta f_{T,air}$	0.44348	0.45758	0.46631	0.47300
$\Delta f_{T,glycerin} / \Delta f_{T,air}$	0.01304	0.14866	0.23597	0.27907
$\Delta f_{E,water} / \Delta f_{E,air}$	0.43590	0.45280	0.45677	0.45850
$\Delta f_{E,glycerin} / \Delta f_{E,air}$	0.01282	0.15116	0.23522	0.27468
模態階數	5	6	7	8
$\Delta f_{T,water} / \Delta f_{T,air}$	0.47731	0.47948	0.48036	0.48034
$\Delta f_{T,glycerin} / \Delta f_{T,air}$	0.30528	0.32127	0.33174	0.33892
$\Delta f_{E,water} / \Delta f_{E,air}$	0.45898	0.45904	0.45907	0.45910
$\Delta f_{E,glycerin} / \Delta f_{E,air}$	0.29973	0.31494	0.32666	0.33489

表 4-53 $L/h=10$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 流體環境對各模態中頻率偏移之影響

模態階數	1	2	3	4
$\Delta f_{T,water} / \Delta f_{T,air}$	0.44096	0.45808	0.46769	0.47440
$\Delta f_{T,glycerin} / \Delta f_{T,air}$	0.01583	0.15017	0.23731	0.28045
$\Delta f_{E,water} / \Delta f_{E,air}$	0.44021	0.45385	0.45810	0.45987
$\Delta f_{E,glycerin} / \Delta f_{E,air}$	0.01568	0.15065	0.23563	0.27649
模態階數	5	6	7	8
$\Delta f_{T,water} / \Delta f_{T,air}$	0.47858	0.48079	0.48164	0.48158
$\Delta f_{T,glycerin} / \Delta f_{T,air}$	0.30589	0.32210	0.33288	0.34026
$\Delta f_{E,water} / \Delta f_{E,air}$	0.46039	0.46043	0.46042	0.46045
$\Delta f_{E,glycerin} / \Delta f_{E,air}$	0.30055	0.31645	0.32777	0.33627

表 4-54 $L/h=16.67$ $\Delta m/m=10^{-4}$ 流體環境對各模態中頻率偏移之影響

模態階數	1	2	3	4
$\Delta f_{T,water} / \Delta f_{T,air}$	0.41667	0.44942	0.45683	0.46263
$\Delta f_{T,glycerin} / \Delta f_{T,air}$	0.01190	0.04864	0.15036	0.20840
$\Delta f_{E,water} / \Delta f_{E,air}$	0.41667	0.44677	0.45251	0.45568
$\Delta f_{E,glycerin} / \Delta f_{E,air}$	0.01190	0.04943	0.15265	0.20914
模態階數	5	6	7	8
$\Delta f_{T,water} / \Delta f_{T,air}$	0.46796	0.47190	0.47502	0.47726
$\Delta f_{T,glycerin} / \Delta f_{T,air}$	0.24692	0.27141	0.29106	0.30493
$\Delta f_{E,water} / \Delta f_{E,air}$	0.45727	0.45829	0.45884	0.45902
$\Delta f_{E,glycerin} / \Delta f_{E,air}$	0.24466	0.26861	0.28619	0.29978

表 4-55 $L/h=16.67$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 流體環境對各模態中頻率偏移之影響

模態階數	1	2	3	4
$\Delta f_{T,water} / \Delta f_{T,air}$	0.42654	0.44924	0.45814	0.46425
$\Delta f_{T,glycerin} / \Delta f_{T,air}$	0.01626	0.04576	0.15094	0.21066
$\Delta f_{E,water} / \Delta f_{E,air}$	0.42633	0.44759	0.45388	0.45682
$\Delta f_{E,glycerin} / \Delta f_{E,air}$	0.01632	0.04655	0.15140	0.20999
模態階數	5	6	7	8
$\Delta f_{T,water} / \Delta f_{T,air}$	0.46925	0.47328	0.47635	0.47858
$\Delta f_{T,glycerin} / \Delta f_{T,air}$	0.24809	0.27365	0.29210	0.30588
$\Delta f_{E,water} / \Delta f_{E,air}$	0.45860	0.45965	0.46018	0.46039
$\Delta f_{E,glycerin} / \Delta f_{E,air}$	0.24592	0.27010	0.28746	0.30055

表 4-56 $L/h = 30$ $\Delta m/m = 10^{-4}$ 流體環境對各模態中頻率偏移之影響

模態階數	1	2	3	4
$\Delta f_{T,water} / \Delta f_{T,air}$	0.38462	0.43210	0.44519	0.45233
$\Delta f_{T,glycerin} / \Delta f_{T,air}$	0	0.01852	0.03132	0.09884
$\Delta f_{E,water} / \Delta f_{E,air}$	0.38462	0.43558	0.44396	0.44955
$\Delta f_{E,glycerin} / \Delta f_{E,air}$	0	0.01840	0.03187	0.10090
模態階數	5	6	7	8
$\Delta f_{T,water} / \Delta f_{T,air}$	0.45683	0.45998	0.46341	0.46644
$\Delta f_{T,glycerin} / \Delta f_{T,air}$	0.14964	0.18379	0.21442	0.23576
$\Delta f_{E,water} / \Delta f_{E,air}$	0.45251	0.45434	0.45561	0.45652
$\Delta f_{E,glycerin} / \Delta f_{E,air}$	0.15197	0.18628	0.21268	0.23498

表 4-57 $L/h=30$ $\Delta m/m=10^{-2}$ 流體環境對各模態中頻率偏移之影響

模態階數	1	2	3	4
$\Delta f_{T,water} / \Delta f_{T,air}$	0.40054	0.43642	0.44788	0.45385
$\Delta f_{T,glycerin} / \Delta f_{T,air}$	0.00195	0.02442	0.03174	0.10016
$\Delta f_{E,water} / \Delta f_{E,air}$	0.40047	0.43599	0.44646	0.45115
$\Delta f_{E,glycerin} / \Delta f_{E,air}$	0.00194	0.02425	0.03232	0.10102
模態階數	5	6	7	8
$\Delta f_{T,water} / \Delta f_{T,air}$	0.45814	0.46171	0.46486	0.46769
$\Delta f_{T,glycerin} / \Delta f_{T,air}$	0.15092	0.18786	0.21565	0.23727
$\Delta f_{E,water} / \Delta f_{E,air}$	0.45389	0.45572	0.45707	0.45810
$\Delta f_{E,glycerin} / \Delta f_{E,air}$	0.15142	0.18776	0.21480	0.23561

$$\Delta m/m = 10^{-6}$$

由於實際上質量感測器所量測的質量皆非常小，於此亦呈現其額外質量與單位面積質量比值 $\Delta m/m = 10^{-6}$ 之頻率偏移數值結果。如圖 4-124 至圖 4-129 所示，圖 4-124、圖 4-125 為結構尺寸 $L/h = 10$ 分別以 Timoshenko 梁理論與 Euler 梁理論於各流體環境中第一至第八模態之頻率偏移；圖 4-126、圖 4-127 為結構尺寸 $L/h = 16.67$ 分別以 Timoshenko 梁理論與 Euler 梁理論於各流體環境中第一至第八模態之頻率偏移；圖 4-128、圖 4-129 為結構尺寸 $L/h = 30$ 分別以 Timoshenko 梁理論與 Euler 梁理論於各流體環境中第一至第八模態之頻率偏移。同樣可以從圖中曲線關係看出，頻率偏移量隨著流體之密度與黏滯性增加而減小。其詳細頻率偏移數值結果如表 4-58 至表 4-60 所示。

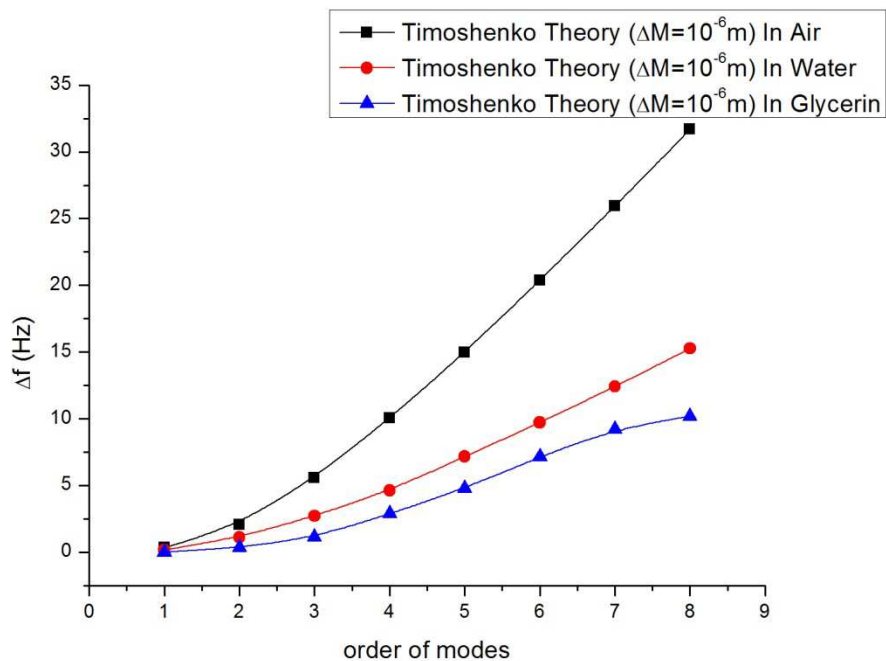


圖 4-124 $L/h = 10$ $\Delta m/m = 10^{-6}$ 於 Timoshenko 梁理論之頻率偏移

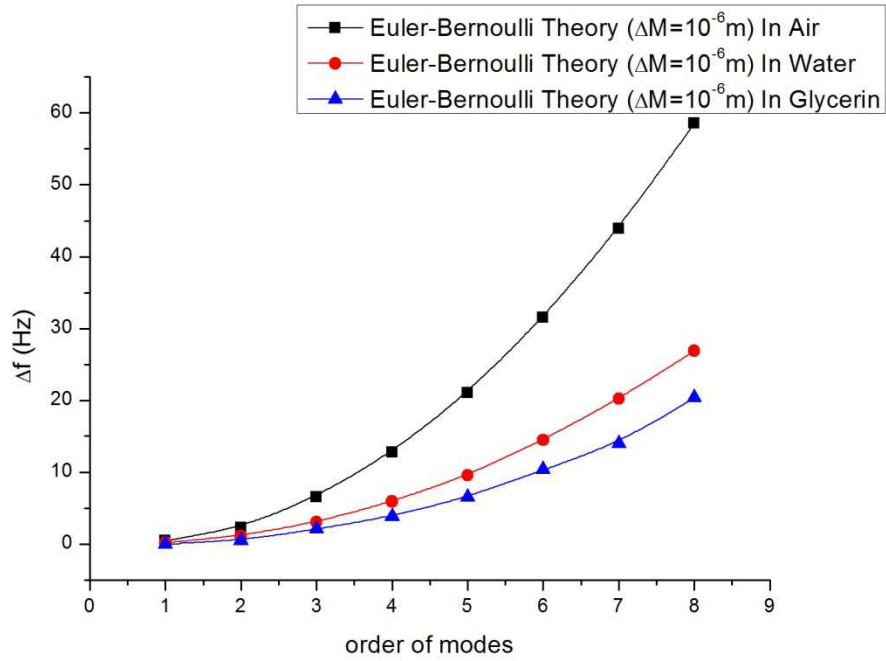


圖 4-125 $L/h = 10$ $\Delta m/m = 10^{-6}$ 於 Euler 梁理論之頻率偏移

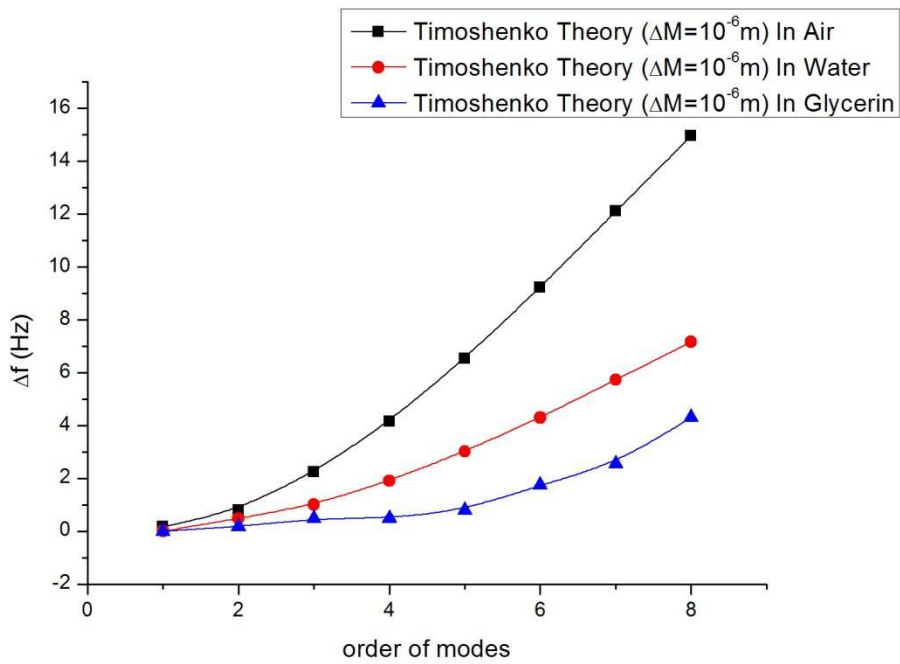


圖 4-126 $L/h = 16.67$ $\Delta m/m = 10^{-6}$ 於 Timoshenko 梁理論之頻率偏移

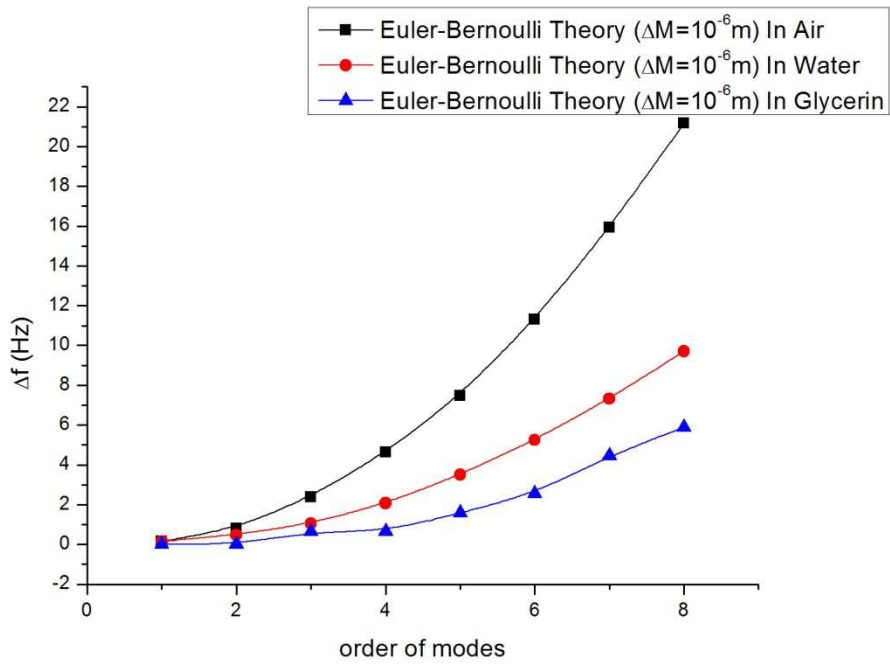


圖 4-127 $L/h = 16.67$ $\Delta m/m = 10^{-6}$ 於 Euler 梁理論之頻率偏移

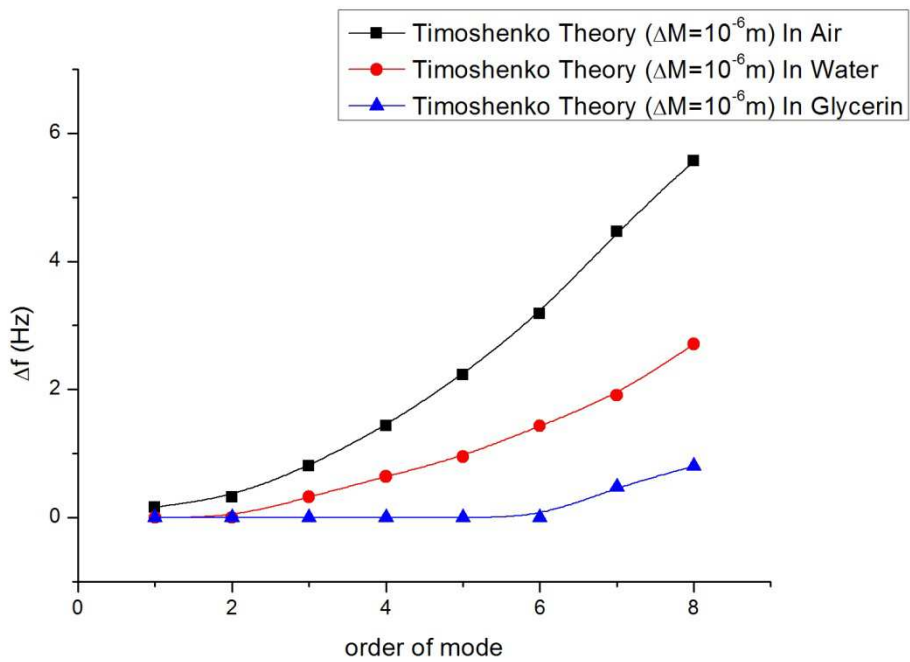


圖 4-128 $L/h = 30$ $\Delta m/m = 10^{-6}$ 於 Timoshenko 梁理論之頻率偏移

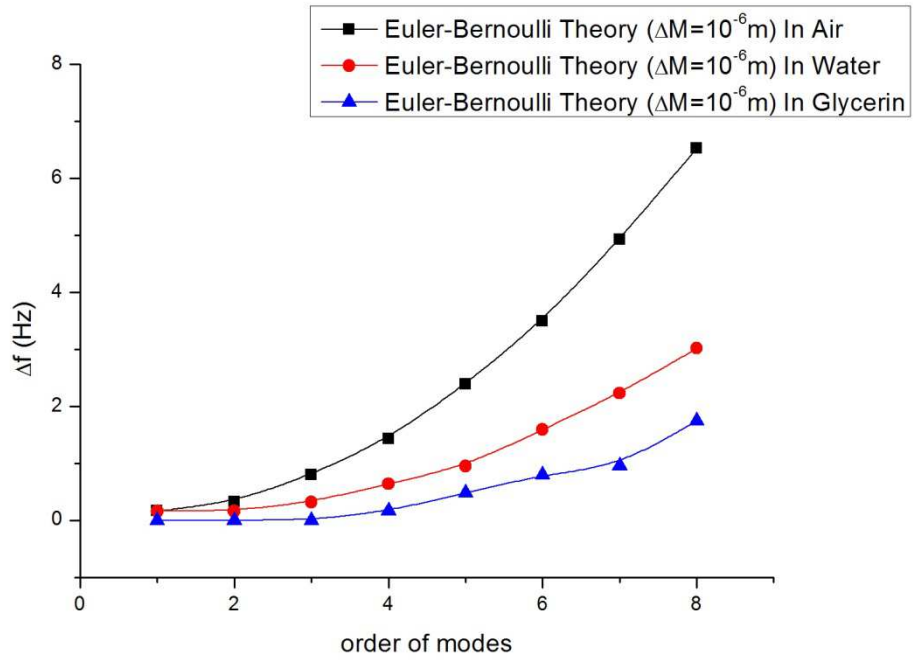


圖 4-129 $L/h=30$ $\Delta m/m=10^{-6}$ 於 Euler 梁理論之頻率偏移

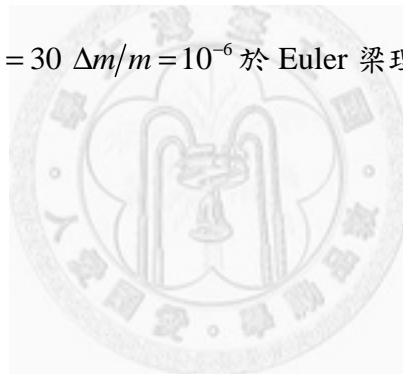


表 4-58 $L/h=10$ $\Delta m/m=10^{-6}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏移

模態階數	1	2	3	4
$\Delta f_{T,air}$ (Hz)	0.32	2.07	5.57	10.03
$\Delta f_{E,air}$ (Hz)	0.32	2.23	6.53	12.73
$\Delta f_{T,water}$ (Hz)	0.16	1.11	2.71	4.62
$\Delta f_{E,water}$ (Hz)	0.16	1.11	3.02	5.89
$\Delta f_{T,glycerin}$ (Hz)	0	0.39	1.26	2.86
$\Delta f_{E,glycerin}$ (Hz)	0	0.42	1.53	3.82
模態階數	5	6	7	8
$\Delta f_{T,air}$ (Hz)	14.96	20.37	25.94	31.67
$\Delta f_{E,air}$ (Hz)	21.01	31.51	43.93	58.57
$\Delta f_{T,water}$ (Hz)	7.16	9.71	12.41	15.28
$\Delta f_{E,water}$ (Hz)	9.55	14.48	20.21	26.90
$\Delta f_{T,glycerin}$ (Hz)	4.77	7.16	9.23	10.19
$\Delta f_{E,glycerin}$ (Hz)	6.53	10.35	14.01	20.37

表 4-59 $L/h=16.67$ $\Delta m/m=10^{-6}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏移

模態階數	1	2	3	4
$\Delta f_{T,air} (Hz)$	0.16	0.80	2.23	4.14
$\Delta f_{E,air} (Hz)$	0.16	0.80	2.39	4.62
$\Delta f_{T,water} (Hz)$	0	0.48	1.00	1.91
$\Delta f_{E,water} (Hz)$	0.16	0.48	1.05	2.07
$\Delta f_{T,glycerin} (Hz)$	0	0.16	0.48	0.48
$\Delta f_{E,glycerin} (Hz)$	0	0.16	0.64	0.64
模態階數	5	6	7	8
$\Delta f_{T,air} (Hz)$	6.53	9.23	12.10	14.96
$\Delta f_{E,air} (Hz)$	7.48	11.30	15.92	21.17
$\Delta f_{T,water} (Hz)$	3.02	4.30	5.73	7.16
$\Delta f_{E,water} (Hz)$	3.50	5.25	7.32	9.71
$\Delta f_{T,glycerin} (Hz)$	0.80	1.75	2.55	4.30
$\Delta f_{E,glycerin} (Hz)$	1.59	2.55	4.46	5.89

表 4-60 $L/h = 30$ $\Delta m/m = 10^{-6}$ 各模態階數於各流體環境中之頻率偏移

模態階數	1	2	3	4
$\Delta f_{T,air} (Hz)$	0.16	0.32	0.80	1.43
$\Delta f_{E,air} (Hz)$	0.16	0.32	0.80	1.43
$\Delta f_{T,water} (Hz)$	0	0	0.32	0.64
$\Delta f_{E,water} (Hz)$	0.16	0.16	0.32	0.64
$\Delta f_{T,glycerin} (Hz)$	0	0	0	0
$\Delta f_{E,glycerin} (Hz)$	0	0	0	0.16
模態階數	5	6	7	8
$\Delta f_{T,air} (Hz)$	2.23	3.18	4.46	5.57
$\Delta f_{E,air} (Hz)$	2.39	3.50	4.93	6.53
$\Delta f_{T,water} (Hz)$	0.95	1.43	1.91	2.71
$\Delta f_{E,water} (Hz)$	0.95	1.59	2.23	3.02
$\Delta f_{T,glycerin} (Hz)$	0	0	0.48	0.80
$\Delta f_{E,glycerin} (Hz)$	0.48	0.80	0.95	1.75

第五章 結論及未來展望

5-1 結論

本論文研究懸臂梁於黏滯流體中之振動行為，其中梁理論又可分為 Timoshenko 梁與 Euler 梁。以黏滯流體水力函數與梁結構振動耦合推導其頻率響應方程式。透過物理行為的分析與文獻中數值結果的比對驗證本文的 Timoshenko 梁之共振頻率符合實際現象。本文重點主要為比較 Timoshenko 梁與 Euler 梁於各模態與各流體之間頻率的差異，以及兩理論之間增加額外質量後頻率偏移的差異。主要結論如下：

- (1) 由於 Timoshenko 梁多考慮了剪切變形與轉動慣量，影響了整體結構勁度，相較於將剪切變形與轉動慣量皆忽略的 Euler 梁，無論在靜態或動態分析下，其勁度皆較小。靜態部分，以同材料同尺寸於兩理論中，施以相同的外力，Timoshenko 梁會比 Euler 梁有較大的變形；動態部分，同材料同尺寸於兩理論中且在同一模態，Timoshenko 梁之頻率皆小於 Euler 梁之頻率。
- (2) 於 Timoshenko 梁中，若固定其材料與尺寸，改變剪切模數的大小，剪切模數越小，頻率就越小；剪切模數越大，頻率就越大，但不超過同尺寸同材料下之 Euler 梁的頻率。流體影響部分則為，剪切模數越小，流體對其整體結構頻率的影響越大；剪切模數越大，流體對頻率的影響就越小。
- (3) 梁結構越為細長時，即梁結構之長度與截面厚度比值越大時，兩理論頻率差異越小甚至重合，故若結構尺寸較為細長，可使用忽略剪切變形與轉動慣量影響之 Euler 梁理論即可；反之，若結構越為粗厚，即梁結構之長度與截面厚度比值越小時，其剪切變形與轉動慣量之影響越趨明顯，兩理論頻率的差異也越大。流體影響部分為，梁結構之長度與截面厚度

比值越小時，流體對整體結構頻率的影響越小；比值越大，流體對頻率的影響就越大。此點結論也皆適用於高模態中。

(4) 於高模態及流體影響的部分，隨著模態階數的增加，兩理論頻率差異也隨之變大，且結構之長度與厚度比值越小時，其模態階數對兩理論頻率差異的影響力也就越大。流體影響部分為，無論是哪一理論，皆為模態階數越高，整體結構頻率受流體影響就越小，但會趨近一定值。

(5) 結構受到額外質量影響造成的頻率偏移，其結論也與以上幾點相似。

Timoshenko 梁之頻率偏移皆小於 Euler 梁之頻率偏移；隨著模態階數的增加，頻率偏移也隨之上升，且 Timoshenko 梁頻率偏移與 Euler 梁頻率偏移之差異也越大；流體影響部分，頻率偏移隨著流體之密度與黏滯性增加而減小；隨著模態階數的增加，流體對頻率偏移的影響也就越小，且會趨近一定值；額外質量與頻率偏移的關係則為同時以同倍率成長，即為額外質量變成 100 倍時，頻率偏移也約為 100 倍。

綜合以上，於微懸臂梁感測器使用時，若需要在流體環境中操作，為了降低流體對頻率的影響，保持其靈敏度，可調整至高模態操作，但由於高模態時 Timoshenko 梁與 Euler 梁的差異極大，最常被使用的 Euler 梁其預期值將不再適用，此時使用 Timoshenko 梁來做為量測結果的預期值較為妥當。

5-2 未來展望

- (1) 由於本文之理論驗證僅與物理行為做比較，未來將可使用數值模擬軟體對此流固耦合理論做數值模擬。
- (2) 以實驗的方式，使用 AFM 原子力顯微鏡，控制其探針之尺寸於各流體環境與高模態時做量測，將其實驗結果共振頻率與本文之數值結果做配合，多方驗證。
- (3) 考慮流體部分之非線性關係(對流項)，可使理論更趨完善。
- (4) 若材料是以塑膠複合材料層板，由於複合材料於平面上之抗拉很強，但於截面上之抗剪相當弱，故儘管結構較細長時，剪切變形的效應也會相對明顯。如此對於稍短的塑膠複材梁($L/h \approx 50$)，Timoshenko 梁可以適用；但對更短的塑膠複材梁($L/h \approx 20$)，此時應使用高階變形理論來做修正。



參考文獻

- [1] C. Ziegler, “Cantilever-based biosensors,” *Analytical and Bioanalytical Chemistry*, **vol. 379**, 946 (2004).
- [2] R. Berger, E. Delamarche, H. P. Lang, C. Gerber, J. K. Gimzewski, E. Meyer, and H. J. Guntherodt, “Surface Stress in the Self-Assembly of Alkanethiols on Gold,” *Science*, **vol. 276**, 2021 (1997).
- [3] T. M. Battiston, J. P. Ramseyar, H. P. Lang, M. K. Baller, Ch. Gerber, J. K. Gimzewski, E. Meyer, and H. J. Guntherodt, “A chemical sensor based on a microfabricated cantilever array with simultaneous resonance-frequency and bending readout,” *Sensors and Actuators B*, **vol. 77**, 122-131 (2001).
- [4] James W. M. Chon, P. Mulvaney, and J. E. Sader, “Experimental validation of theoretical models for the frequency response of atomic force microscope cantilever beams immersed in fluids,” *Journal of Applied Physics*, **vol. 87**, 3978 (2000).
- [5] X. Xu and A. Raman, “Comparative dynamics of magnetically, acoustically, and Brownian motion driven microcantilevers in liquids,” *Journal of Applied Physics*, **vol. 102**, 034303 (2007).
- [6] W. T. Thomson, *Theory of Vibration with Application* 4th edition (Prentice Hall A Simon & Schuster Company, New Jersey, 1993).
- [7] W. J. Bottega, *Engineering Vibrations* (Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2006).
- [8] 方同, 薛僕, 振動理論及應用 (西北工業大學出版社, 西安, 1998).
- [9] E. O. Tuck, “Calculation of unsteady flows due to small motions of cylinders in viscous fluid,” *Journal of Engineering Mathematics*, **vol. 3**, 29 (1969).

- [10] J. E. Sader, "Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope," *Journal of Applied Physics*, **vol. 84**, 64 (1998).
- [11] D. A. Walters, J. P. Cleveland, N. H. Thomson, P. K. Hansma, M. A. Wendman, G. Gurley, and V. Elings, "Short cantilevers for atomic force microscopy," *Review of Scientific Instruments*, **vol. 67**, 3583 (1996).
- [12] J. C. Hsu, H. L. Lee, and W. J. Chang, "Flexural vibration frequency of atomic force microscope cantilevers using the Timoshenko beam model," *Nanotechnology*, **vol. 18**, 285503 (2007).
- [13] H. L. Lee, and W. J. Chang, "Effects of Damping on the Vibration Frequency of Atomic Force Microscope Cantilevers Using the Timoshenko Beam Model," *Japanese Journal of Applied Physics*, **vol. 48**, 065005 (2009).
- [14] A. Sadeghi, and H. Zohoor, "Nonlinear vibration of double tapered atomic force microscope (a nano microscope) cantilevers by considering the Hertzian contact theory," (2010).
- [15] H. Zohoor, and A. Sadeghi, "The flexural vibration of dagger shaped atomic force microscope cantilevers by considering Timoshenko beam theory and using the Differential Quadrature Method," (2010).
- [16] A. Sadeghi, "The flexural vibration of V shaped atomic force microscope cantilevers by using the Timoshenko beam theory," *Z. Angew. Math. Mech.*, **vol. 92**, 782 (2012).
- [17] S. Dohn, R. Sandberg, W. Svendsen, and A. Boisen, "Enhanced functionality of cantilever based mass sensors using higher modes," *Applied Physics Letters*, **vol. 86**, 233501 (2005).
- [18] F. Lochon, I. Dufour, and D. Rebiere, "An alternative solution to improve sensitivity of resonant microcantilever chemical sensors: comparison between

- using high-order modes and reducing dimensions,” *Sensors and Actuators B*, **vol. 108**, 979 (2005).
- [19] M. K. Ghatkesar, V. Barwich, T. Braun, J. P. Ramseyer, C. Gerber, M. Hegner, H. P. Lang, U. Drechsler, and M. Despont, “Higher modes of vibration increase mass sensitivity in nanomechanical microcantilevers,” *Nanotechnology*, **vol. 18**, 445502 (2007).
- [20] M. K. Ghatkesar, T. Braun, V. Barwich, J. P. Ramseyer, C. Gerber, M. Hegner, and H. P. Lang, “Resonating modes of vibrating microcantilevers in liquid,” *Applied Physics Letters*, **vol. 92**, 043106 (2008).
- [21] 黃冠榮，微混合器與共振式微懸臂梁生物感測器的理論建立與數值模擬，博士論文，國立台灣大學應用力學研究所，台北市 (2011).
- [22] 林建豪，微懸臂梁陣列在不同介質下的頻響函數，碩士論文，國立台灣大學應用力學研究所，台北市 (2011).
- [23] R. D. Blevins, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape* (Van Nostrand Reinhold, New York, 1979).
- [24] W. J. Bottega, *Engineering Vibrations* (Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2006) p. 634.
- [25] 廖展誼，微系統機械元件於流體環境中動態特性研究與原子力顯微鏡上之應用，碩士論文，國立台灣大學應用力學研究所，台北市 (2010).
- [26] 黃俊維，微懸臂梁感測器之力學模型與最佳化設計，碩士論文，國立台灣大學應用力學研究所，台北市 (2004).

附錄

由 Timoshenko 梁之自由振動統御方程式

$$\begin{cases} EI \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} + \kappa AG \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} - \kappa AG \varphi(x,t) - J \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \\ m \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} - \kappa AG \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} + \kappa AG \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

將之以矩陣形式整理表示，可寫為

$$\mathbf{m} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{k} \mathbf{u} = 0 \quad (\text{A.2})$$

其中

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} k_s \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} k_s \\ -k_s \frac{\partial}{\partial x} & k_s - \frac{\partial}{\partial x} EI \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} W(x,t) \\ \varphi(x,t) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$k_s = \kappa AG \quad (\text{A.6})$$

可假設解的形式為

$$\mathbf{u}(x,t) = \mathbf{U}(x) e^{i\omega t} \quad (\text{A.7})$$

其中

$$\mathbf{U}(x) = \begin{Bmatrix} W(x) \\ \vartheta(x) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

將(A.7)代入(A.2)可得一特徵值問題

$$[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}] \mathbf{U} = 0 \quad (\text{A.9})$$

其詳細為

$$\begin{bmatrix} -\left(k_s \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 m\right) & k_s \frac{d}{dx} \\ -k_s \frac{d}{dx} & \left(k_s - EI \frac{d^2}{dx^2} - \omega^2 J\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W(x) \\ \vartheta(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

將(A.10)展開整理可得一聯立相依方程

$$\begin{aligned} -k_s W'' - \omega^2 m W + k_s \vartheta' &= 0 \\ -k_s W' - EI \vartheta'' + (k_s - \omega^2 J) \vartheta &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

其解的形式可寫為

$$\mathbf{U}(x) = \mathbf{A} e^{sx} = \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} e^{sx} \quad (\text{A.12})$$

將(A.12)代入(A.11)

$$\begin{bmatrix} -(k_s s^2 + \omega^2 m) & k_s s \\ -k_s s & (k_s - E I s^2 - \omega^2 J) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} e^{sx} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

為了使得其解為非零解，令左式矩陣之行列式等於零，可得一特徵方程

$$s^4 + \omega^2 (1 + \bar{E}) s^2 + \omega^2 (\omega^2 \bar{E} - r_G^{-2}) = 0 \quad (\text{A.14})$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{E}{\kappa G} \\ \omega^2 &= \frac{\omega^2}{c_a^2} \\ r_G^2 &= \frac{I}{A} \\ c_a^2 &= \frac{E}{\rho} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

計算(A.14)可得其解為

$$s = \pm \alpha, \pm i\beta \quad (\text{A.16})$$

其中

$$\alpha = \varpi \left[\frac{1}{2} \{ \bar{R} - (1 + \bar{E}) \} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.17})$$

$$\beta = \varpi \left[\frac{1}{2} \{ \bar{R} + (1 + \bar{E}) \} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.18})$$

$$\bar{R} = \sqrt{(\bar{E} - 1)^2 + \left(\frac{4}{\varpi^2 r_G^2} \right)} \quad (\text{A.19})$$

其(A.12)之解為

$$W(x) = A_1^* e^{\alpha x} + A_2^* e^{-\alpha x} + A_3^* e^{i\beta x} + A_4^* e^{-i\beta x} \quad (\text{A.20})$$

$$\vartheta(x) = B_1^* e^{\alpha x} + B_2^* e^{-\alpha x} + B_3^* e^{i\beta x} + B_4^* e^{-i\beta x} \quad (\text{A.21})$$

其係數之關係為

$$B_{1,2}^* = \pm \left(\alpha + \frac{\varpi^2 E}{\alpha} \right) A_{1,2}^* \quad (\text{A.22})$$

$$B_{3,4}^* = \pm i \left(\beta - \frac{\varpi^2 E}{\beta} \right) A_{3,4}^* = \left(\beta - \frac{\varpi^2 E}{\beta} \right) e^{\pm i\pi/2} A_{3,4}^* \quad (\text{A.23})$$

將(A.22)與(A.23)代回(A.21)可得

$$\vartheta(x) = \frac{1}{\alpha} (\alpha^2 + \varpi^2 \bar{E}) [A_1^* e^{\alpha x} - A_2^* e^{-\alpha x}] + \frac{1}{\beta} (\beta^2 - \varpi^2 \bar{E}) [A_3^* e^{i(\beta x + \pi/2)} + A_4^* e^{-i(\beta x + \pi/2)}] \quad (\text{A.24})$$

將之以 Euler's Formula 整理可得

$$W(x) = A_1 \cosh \alpha x + A_2 \sinh \alpha x + A_3 \cos \beta x + A_4 \sin \beta x \quad (\text{A.25})$$

$$\vartheta(x) = g_\alpha [A_1 \sinh \alpha x + A_2 \cosh \alpha x] - g_\beta [A_3 \sin \beta x - A_4 \cos \beta x] \quad (\text{A.26})$$

其中

$$g_\alpha = \frac{1}{\alpha} (\alpha^2 + \varpi^2 \bar{E}) \quad , \quad g_\beta = \frac{1}{\beta} (\beta^2 - \varpi^2 \bar{E}) \quad (\text{A.27})$$

$$A_1 = A_1^* + A_2^* \quad , \quad A_2 = A_1^* - A_2^* \quad , \quad A_3 = A_3^* + A_4^* \quad , \quad A_4 = i(A_3^* - A_4^*) \quad (\text{A.28})$$

由 Timoshenko 梁之懸臂梁邊界條件可求出四個未知數

$$W(0) = 0, \vartheta(0) = 0 \quad (\text{A.29,30})$$

$$\vartheta'(L) = 0, W'(L) - \vartheta(L) = 0 \quad (\text{A.31,32})$$

將(A.29)-(A.32)代入(A.25)與(A.26)可得四條關係式

$$A_1 + A_3 = 0 \quad (\text{A.33})$$

$$g_\alpha A_2 + g_\beta A_4 = 0 \quad (\text{A.34})$$

$$g_\alpha \alpha [A_1 \cosh \alpha L + A_2 \sinh \alpha L] - g_\beta \beta [A_3 \cos \beta L + A_4 \sin \beta L] = 0 \quad (\text{A.35})$$

$$(\alpha - g_\alpha) [A_1 \sinh \alpha L + A_2 \cosh \alpha L] - (\beta - g_\beta) [A_3 \sin \beta L - A_4 \cos \beta L] = 0 \quad (\text{A.36})$$

將(A.33)及(A.34)代入(A.35)與(A.36)中，整理可得僅只以 A_1 與 A_2 為未知數之聯立方程，以矩陣之形式表示為

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.37})$$

其中

$$H_{11} = g_\alpha \alpha \cosh \alpha L + g_\beta \beta \cos \beta L \quad (\text{A.38})$$

$$H_{12} = g_\alpha (\alpha \sinh \alpha L + \beta \sin \beta L) \quad (\text{A.39})$$

$$H_{21} = (\alpha - g_\alpha) \sinh \alpha L + (\beta - g_\beta) \sin \beta L \quad (\text{A.40})$$

$$H_{22} = (\alpha - g_\alpha) \cosh \alpha L - (\beta - g_\beta) \left(\frac{g_\alpha}{g_\beta} \right) \cos \beta L \quad (\text{A.41})$$

為了使其有非零解，令左式矩陣之行列式為零，可得一特徵方程為

$$\begin{aligned} & -(g_\alpha + g_\beta) \bar{\omega}^2 \bar{E} + \frac{1}{g_\beta} [\beta g_\beta^2 (\alpha - g_\alpha) - \alpha g_\alpha^2 (\beta - g_\beta)] \cosh \alpha L \cos \beta L \\ & - g_\alpha [2\alpha\beta - (\beta g_\alpha + \alpha g_\beta)] \sinh \alpha L \sin \beta L = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

解其特徵方程，可得特徵值 $\bar{\omega}_j$ ($j=1, 2, 3 \dots$)，由(A.15)可得其自然頻率為

$$\omega_j = \bar{\omega}_j c_a \quad (j=1, 2, 3 \dots) \quad (\text{A.43})$$

又

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \frac{\omega}{\omega_0} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

