

國立台灣大學電資學院光電工程學研究所

碩士論文

Graduate Institute of Photonics and Optoelectronics

College of Electrical Engineering and Computer Science

National Taiwan University

Master Thesis



應用於可見光波段高效率偏振器之設計

Design of High Efficient Polarizers for Visible Light

陳致豪

Chih-Hao Chen

指導教授：吳靜雄 博士

Advisor: Jing-Shown Wu, Ph.D.

中華民國 102 年七月

July, 2013





國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書

應用於可見光波段高效率偏振器之設計
Design of High Efficient Polarizers for
Visible Light

本論文係陳致豪君（學號 R00941063）在國立臺灣大學
光電工程學研究所完成之碩士學位論文，於民國 102 年 7 月
22 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

吳靜雄 (指導教授)
吳靜雄 曹恆偉
王倫

所長 林清富



誌謝



首先，謝謝讀者願意花時間閱讀這篇論文。

時間過得很快，兩年的時間轉瞬就過去了。從一開始對研究方向不知所措，到現在能夠完成一篇論文，別有一番滋味！在這之中，首先便要向指導教授吳靜雄教授致上誠摯的謝意。因為老師的協助，指引了大略的研究方向。老師一些充滿創意卻又不失穩健的想法也讓我受益良多。同時，也相當感謝老師花了一些時間與我討論，幫我澄清錯誤的觀念。當然，也謝謝口試委員們寶貴的意見。

謝謝這些日子的大家，孟輯、仲瑋還有彥儒學長，以及 532 的林婕和亞欣助理，彼此間偶爾的插科打諢是分散壓力的良藥。一齊協助吳老師的星光實驗更讓人印象深刻。在深晚找尋光纖斷點的經驗，或是熬夜到天明的體驗，大概都很難忘懷吧。雖然彼此的建議不一定在研究上用的到，但是和你們的討論也讓我有所收穫。在這邊要特別謝謝黃彥儒學長，花了一些時間讓我請教製程方面的問題。謝謝林婕和亞欣助理，如果沒有妳們處理行政事務，我們應該很難能全心專注在研究上，當然，也謝謝妳們別有一番滋味的 B 群維他命。

同時，也謝謝我的家人，如果沒有你們，就不會有現在的我。你們的期待或許會帶來壓力，但也不可否認，被期待著是一件幸福的事。謝謝你們一直以來的支持。

最後，謝謝曾經向我噓寒問暖的人們。謹以此論文獻給你們。





傳統的偏振器是吸收特定極化的偏振光，因此光的使用效率最高只有百分之五十。為了提高光使用效率，本論文利用極化分光器實現了一種應用於可見光的高光使用效率(light utilization efficiency, LUE)的偏振器。我們設計的極化分光器，在特定情況下，能使用百分之八十的光，最多則有百分之九十的光可利用。

本論文設計的極化分光器是使用繞射光柵(Diffraction grating)。並利用利特羅裝置(Littrow mounting)的現象來分析其特性。數值方法是採用嚴格耦合波法(Rigorous Coupled Wave Analysis, RCWA)。我們利用一些物理理論和公式在論文中調整各個參數來達到優化的目的。

傳統的極化分光器有的是利用雙折射效應或多層結構，雖然不會有過多的損耗，卻因為入射角度的允許範圍不大或是體積龐大而受限。另有一種極化分光器是利用金屬的線柵結構，這種結構雖然能夠達到很好的消光比，而且也能夠應用在整個可見光波段，卻很難避免損耗，其中又以藍光波段為甚，論文的例子中至少都有百分之十的損耗，最多則約有百分之二十的損耗。也因此，和我們的設計相比，能夠利用的光最多相差約百分之十，最少也有百分之三到四的差距。

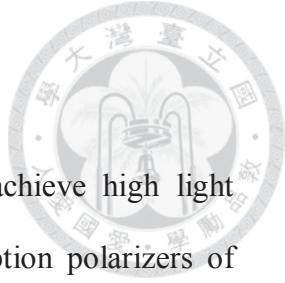
雖然我們的設計未能涵蓋整個可見光波段，但這個問題亦能分化成紅綠藍三個波段個別解決。此外，藉由光源頻譜的高斯函數近似，適當地對波段取捨，能進一步提高允許的入射角度範圍。同時，在論文的最後，我們針對光源的出光角度，介紹了幾種能夠縮小出光角度的方法。

極化分光器的一個應用是液晶顯示器的背光模組。一旦提高了光使用率，就能進一步達到節能的效果。

關鍵字：偏振器、高效率偏振器、極化分光器、可見光、繞射光柵、利特羅裝置、嚴格耦合波法



Abstract



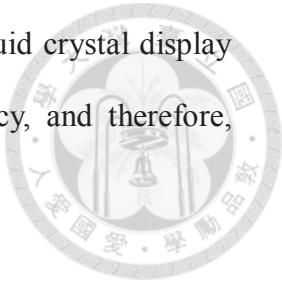
This thesis designs a polarization beam splitter (PBS) to achieve high light utilization efficiency (LUE). Compared with conventional absorption polarizers of which the LUE is at most 50%, the LUE of our design is about 80% under certain conditions. And, the 90% maximum light utilization efficiency was also achievable.

We use dielectric diffraction grating to design the PBS and employ the so-called Littrow mounting phenomenon to analyze its characteristics. We use the "Rigorous Coupled Wave Analysis"(RCWA) to perform the numerical simulation. And we also describe the optimization process by using the physical theorems and equations.

Some conventional PBSs employ birefringent crystals, multilayer structure, and birefringent multilayer structure. However, these attempts suffer either the relatively small acceptance angle or very bulky. The wire-grid polarizer/PBS which utilizes metal is also commercially available; nevertheless, the attenuation due to metals is inevitable. Compared with a wire-grid polarizer/PBS example in this thesis, our design would lead nearly 10% higher LUE in blue-violet band.

However, there are some issues we need to concern about. First, we cannot apply whole visible band with one PBS. Second, the field of view (acceptance angle) of our PBSs is relatively too small to collect all light emitted from light sources with large divergence angle. To deal with the first issue, we may use red, green and blue light-emitting diodes (LED) for three separated band. The field of view could be improved by ignoring low-energy wavelengths in a Gaussian approximated LED spectrum. At the end of this thesis, we introduced some possible methods to reduce the divergence angle of LED light sources.

An application of the PBS is backlight units (BLU) in the liquid crystal display (LCD). The usage of PBS can increase light utilization efficiency, and therefore, achieve high efficient energy utilization.



Index terms : Polarizer, High efficient polarizer, Polarization beam splitter, visible light, Diffraction grating , Littrow mounting , Rigorous Coupled Wave Analysis

目錄



口試委員審定書.....	ii
誌謝.....	iii
中文摘要.....	v
Abstract.....	vii
目錄.....	ix
圖目錄.....	xiii
表目錄.....	xix
第一章、緒論	1
第一節、文獻中的極化分光器	1
一、雙折射晶體(Birefringence Crystal)	1
1. Nicol 極化器/極化分光器	1
2. Glan–Foucault 極化器/極化分光器	2
二、多層結構(multilayer)	5
1. MacNeille 極化分光器	5
2. 多層雙折射界面(Birefringent Multilayer)	6
三、光柵結構(grating)	7
1. 線柵結構(wire-grid).....	8
2. 繞射光柵(diffraction grating).....	12
第二節、極化分光器的應用	14
一、液晶顯示器(Liquid Crystal Display, LCD).....	14
1. 提高濾色片效率	15
2. 提高極化光使用率	16
二、立體顯示(3D display).....	18
第三節、論文大綱與編排	20
第二章、理論與數值分析	21
第一節、利特羅裝置的物理機制	21
一、光柵中的模態(mode)解	21

1. TE 模態	22
2. TM 模態	23
二、利特羅裝置的物理機制	25
1. 低反射率	25
2. 模態分析	25
第二節、數值方法	28
一、平面波展開法	28
二、特徵值問題(eigenvalue problem)	29
三、邊界條件	30
四、收斂性	31
五、能量守恆	31
六、後話	32
第三節、極化分光器的設計	33
一、相同 n_{eff} 的進一步探討	33
二、設計的方向與參數	35
三、RGB 三色的頻段	37
四、一階繞射角和波長的關係	37
五、各個變數的影響	39
1. 光柵深度 d	39
2. 光柵介質 n_1	42
3. 光柵週期 Λ	45
4. 穿透介質 n_t 與入射介質 n_i	48
六、RGB 極化分光器	49
七、立體角度	53
第三章、寬頻極化分光器	59
第一節、物理機制	59
第二節、寬頻極化分光器	61
一、設計的方向與參數	61
二、各個變數的影響	63

1. 光柵深度 d	63
2. 光柵週期 Λ	66
3. 填充因子 f	66
4. 穿透介質 n_t	67
三、立體角度	68
四、棱鏡(prism)	68
五、總結	70
第四章、光源出光角度與極化分光器集光角度研究	71
第一節、調整出光角度的可能方式	71
一、一般 LED 的出光角度	71
二、可能的方式	72
第二節、高斯近似的發光頻譜	76
一、高斯近似	76
二、立體角度的轉換	78
三、各個波段的取捨	78
第三節、光使用效率	83
第五章、結論	85
附錄一、Glan–Thomson 極化分光器的允許角度範圍	87
附錄二、第二章公式推導與探討	91
附錄三、三維嚴格耦合波法	103
參考文獻	115



圖目錄



圖 1.1 利用方解石製作的 Nicol 極化分光器	1
圖 1.2 Glan-Foucault 極化分光器	2
圖 1.3 計算容許角度範圍	3
圖 1.4 Glan-Taylor 極化器/極化分光器	4
圖 1.5 MacNeille 極化分光器	5
圖 1.6 運用多層雙折射介面的極化分光器	6
圖 1.7 多層雙折射介面	7
圖 1.8 光柵結構	7
圖 1.9 線柵結構一例	8
圖 1.10 圖 1.9 中不同結構對 S 極化反射光的影響	8
圖 1.11 S 極化和 P 極化的反射率	9
圖 1.12 銀和鋁在不同波長下的折射率	9
圖 1.13	10
圖 1.14 鋁線柵結構的反射及穿透	10
圖 1.15 圖 1.9 結構的穿透率	11
圖 1.16 繞射公式	12
圖 1.17 TN 液晶的工作原理	14
圖 1.18 半透射式液晶顯示器的光使用效率	15
圖 1.19 增加光使用率	16
圖 1.20 Vikuiti™ BEF II of 3M	17
圖 1.21 立體觀測(stereoscopy)原理	18
圖 1.22 使用線性極化光來實現 3D 影像	19
圖 2.1 光柵模型	21



圖 2.2 圖解法求 n_{eff}	24
圖 2.3 正規化場形分布	24
圖 2.4 利特羅裝置下不同光柵深度下各階的繞射效率	26
圖 2.5 利用利特羅裝置實現的極化分光器	27
圖 2.6 光柵結構	28
圖 2.7 繞射效率與使用平面波數目的關係(RCWA 的收斂性)	31
圖 2.8	31
圖 2.9 不同入射角下同一波長 TM 極化的零階效率以及等效折射率近似 ..	33
圖 2.10 不同波長下同入射角 TM 極化的零階效率以及等效折射率近似 ..	34
圖 2.11 浸潤式光微影技術的發展	36
圖 2.12 RGB LED 頻譜	37
圖 2.13 使用圖解法找繞射角差	38
圖 2.14 利特羅裝置下不同光柵深度下各階的繞射效率	39
圖 2.15 TE 極化的繞射效率 1	40
圖 2.16 TM 極化的繞射效率 1	40
圖 2.17 TE 極化的繞射效率 2	41
圖 2.18 TM 極化的繞射效率 2	42
圖 2.19 薄膜製程	42
圖 2.20 TE 極化的繞射效率 3	43
圖 2.21 TM 極化的繞射效率 3	43
圖 2.22 圖 2.19&圖 2.20 的一階消光比	44
圖 2.23 圖 2.19&圖 2.20 的零階消光比	44
圖 2.24 TE 極化的繞射效率 4	45
圖 2.25 TM 極化的繞射效率 4	45
圖 2.26 圖 2.24&圖 2.25 的一階消光比	46



圖 2.27 圖 2.24&圖 2.25 的零階消光比	46
圖 2.28 TE 極化的繞射效率 5	47
圖 2.29 TM 極化的繞射效率 5	47
圖 2.30 圖 2.28&圖 2.29 的一階消光比	48
圖 2.31 圖 2.28&圖 2.29 的零階消光比	48
圖 2.32 不同 n_t 下 TE 和 TM 極化的反射率	49
圖 2.33 TE 極化在 G 波段的繞射效率	50
圖 2.34 TM 極化在 G 波段的繞射效率	50
圖 2.35 圖 2.33&圖 2.34 的一階消光比	50
圖 2.36 圖 2.33&圖 2.34 的零階消光比	51
圖 2.37 TE 極化在 R 波段的繞射效率	51
圖 2.38 TM 極化在 R 波段的繞射效率	51
圖 2.39 圖 2.37&圖 2.38 的一階消光比	52
圖 2.40 圖 2.37&圖 2.38 的零階消光比	52
圖 2.41 定義立體角度與極化	53
圖 2.42 不同 δ 與不同入射角下 TE 和 TM 極化在零階及一階的穿透率	53
圖 2.43 不同 δ 與不同入射角下 B 波段($0.42\sim0.53\mu\text{m}$)中若干波長的消光比	54
圖 2.44 不同 δ 與不同入射角下 G 波段($0.48\sim0.6\mu\text{m}$)中若干波長的消光比	55
圖 2.45 不同 δ 與不同入射角下 R 波段($0.58\sim0.7\mu\text{m}$)中若干波長的消光比	56
圖 3.1 錯開 TE 和 TM 的 n_{eff} 讓特定極化全反射	59
圖 3.2 比較謝米爾方程和折射率測量值	62
圖 3.3 由圖解法找 TE 的全反射角	63
圖 3.4 不同光柵深度下入射角對反射率穿透率的影響	64
圖 3.5 不同入射角與不同波長下 TE 極化和 TM 極化的反射率與穿透率	64
圖 3.6 圖 3.5 反射光的消光比(TE_R/TM_R)	65



圖 3.7 圖 3.5 穿透光的消光比(TE_T/TM_T)	65
圖 3.8 不同光柵週期下各個波長允許的角度範圍	66
圖 3.9 不同填充因子下由圖解法求出 TE 和 TM 的 n_{eff}^2	67
圖 3.10 不同穿透介質下入射角對反射率作圖	67
圖 3.11 不同 δ 與不同入射角(θ_i)下可見光波段若干波長的消光比	68
圖 3.12 積鏡傾斜角 θ 與入射光線的關係	69
圖 3.13 以幾何光學分析入射光的允許範圍	69
圖 3.14 寬頻極化分光器架構	70
圖 4.1 不同出光面下 LED 的輻射場形	71
圖 4.2 利用微共振腔的例子	72
圖 4.3 SLED 可能結構	73
圖 4.4 幾種發光二極體的典型 L-I 圖	74
圖 4.5 超螢光發光二極體	74
圖 4.6 藉由封裝改變出光場形例一	75
圖 4.7 藉由封裝改變出光場形例二	75
圖 4.8 以高斯函數擬合 RGB 的 LED 光譜	76
圖 4.9 高斯函數與標準差	77
圖 4.10 立體角度示意	78
圖 4.11 B 波段若干波長之消光比與角度的關係	79
圖 4.12 G 波段若干波長之消光比與角度的關係	80
圖 4.13 $\lambda = 0.55\mu m$ 時消光比與角度的關係	81
圖 4.14 R 波段若干波長之消光比與角度的關係	82
圖 4.15 提高光使用率的背光模組	83
圖 4.16 各波段光使用率的上限	84
圖 A1 Glan-Thomson 極化器的尋常光(O-ray)路徑	87

圖 A2	89
圖 B1 傳輸線理論的 ABCD 矩陣與週期性結構	92
圖 B2	96
圖 B3 $\beta h_1 + \gamma h_2 = 3\pi$ 時， $F(n_{\text{eff}}^2) = -1$ 對應的 n_{eff}^2 解	99
圖 B4 繞射光柵的穿透率與波長還有入射角的關係	101
圖 C1 定義立體角度與極化	103
圖 C2 S 分量的電磁場向量	103
圖 C3 P 分量的電磁場向量	105
圖 C4 以 S_x 和 S_y 組合出 \vec{E}_s 與 $(\vec{E}_p) _{xy}$	109
圖 C5 繞射效率與使用平面波數的關係(RCWA 的收斂性)	113
圖 C6 RSoft(Diffract mod 3.0)的模擬結果(上)與 Matlab 程式碼比較(下)	114



表目錄



表 1.1 統整入射角度範圍	3
表 1.2 傳統偏振器的效率	14
表 2.1 設計參數	36
表 2.2 由圖 2.12 決定 RGB 頻段	38
表 2.3 TM 極化光在一階穿透的極值	42
表 2.4 RGB 極化分光器的設計參數	57
表 3.1 圖 3.13 中各點與法線的夾角	70
表 4.1 不同波段的峰值與波長半高寬及標準差	77
表 4.2 結果統整	81
表 A1 判斷入射光範圍所需的條件	88
表 A2 不同 S' 與 n_2 下的不同入射角度範圍	89
表 B1 奇函數和偶函數的定義	96
表 B2 對光柵週期的限制	100
表 B3 以(2-10)式推估不同光柵週期下 B 波段若干波長的一階穿透率	101
表 C1 用特徵值的線性組合表示 U_x 、 U_y 、 S_x 、 S_y	108





傳統吸光的偏振器雖能達到很好的消光比，卻因為將近一半的光被吸收，使得光使用效率最多只有 50%。為了提高高光使用效率，我們能夠利用極化分光器 (Polarization Beam Splitter, PBS) 分開兩個極化光，再使用半波片 (Half-wave Plate) 將光都轉成同一個極化。因此，在這一章中，筆者會先簡單回顧幾種文獻中的極化分光器，然後再探討幾種可能的應用。

第一節、文獻中的極化分光器

一、雙折射晶體 (Birefringence Crystal)

1. Nicol 極化器/極化分光器

這是在 1828 年，由 William Nicol 所發明的[1][2]。其原理是利用物質的雙折射。首先將方解石 (calcite, CaCO_3 , $n_e=1.4864$ $n_o=1.6584$ @ $\lambda=589.3\text{nm}$ [1]) 分成兩小塊，然後讓兩小塊夾上一個折射率 $n_{cb}=1.54$ 的材料 (加拿大香脂 Canadian balsam[1][2])，使得只有 o-ray 產生全反射，達到極化分光的效果。架構如下[1]：

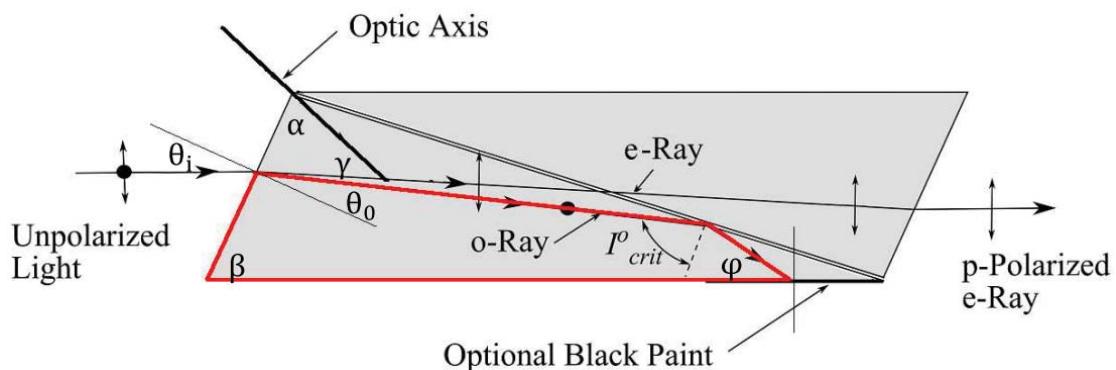


圖 1.1 利用方解石製作的 Nicol 極化分光器

我們能夠由簡單的幾何光學來分析上述的架構。首先，要能在介面上產生全反射，表示 $I^0_{crit} = \sin^{-1} 1.54 / 1.6584 \approx 68^\circ$ ，而 o-ray 更不能在第二個介面產生全反射¹。這表示 o-ray 在第二個介面的入射角不能超過其臨界角 (critical angle)，

¹ 即圖中所示的 Optional Black Paint。若是要有 Splitter 的功能，我們必須要把 o-ray 也萃取出來，

即 $\sin^{-1} 1/1.6584 \approx 37^\circ$ 。接著，如圖 1.1 所示的四邊形，我們很容易可以推出 $\beta + \theta_0 < 81^\circ$ 。²若考慮方解石的晶體結構， β 為 71° ^{[2][3]}，所以 $\theta_0 < 10^\circ$ ，由司乃耳定律(Snell's law)，即 $\sin \theta_i = n_o \sin \theta_o$ 。對應到入射角的範圍就是 $\theta_i < 16^\circ$ 。

這看起來好像還不錯，不過還有一個重點是：當 o-ray 產生全反射時，e-ray 不能有全反射。因為我們現在處理的是雙折射晶體，對 e-ray 來說，其折射率會與光線和光軸的夾角(上圖 γ)有關，其計算的式子如下：

$$\frac{1}{n_e^2(\gamma)} = \frac{\cos^2 \gamma}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \gamma}{n_e^2} \quad (1-1)$$

由 $n_e(\gamma) \leq 1.54$ 可以推得 $\gamma \geq 54^\circ$ ，而如中的例子， $\alpha = 45^\circ$ ，如此能推出 e-ray 的光的穿透角必須在 9° 到 44° 之間，最後就能反推出入射角 $\theta_i > 13^\circ$ 。由以上的討論，不難看出入射角容許的範圍並不是很大。

接下來的極化分光器，運用的原理和 Nicol polarizer 相差不大，都是運用物質的雙折射，使其中一個極化全反射，另一個則能穿透。

2. Glan–Foucault 極化器/極化分光器

其架構如下[2]：

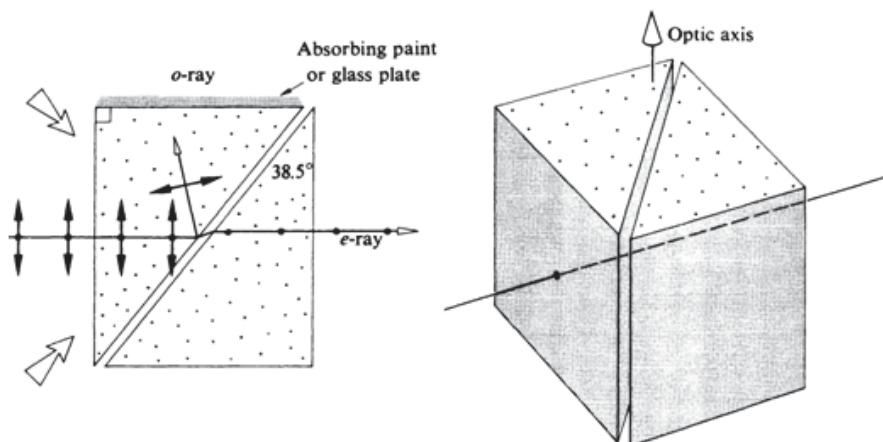


圖 1.2 Glan–Foucault 極化分光器

這表示 o-ray 不能在那個介面產生全反射。

² 由圖 1.1 不難看出 $2I^0_{crit} + \varphi + 90^\circ + \theta_0 + \beta = 360^\circ$ ，且 $I^0_{crit} \geq 68^\circ$ ， $\varphi \geq 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$ 。

³ 當然也可以做研磨拋光到其他的角度，像[2]之中的例子是 68 度。

與 Nicol polarizer 不同，兩塊之間單純由空氣隔開。一樣由幾何光學出發，如下：

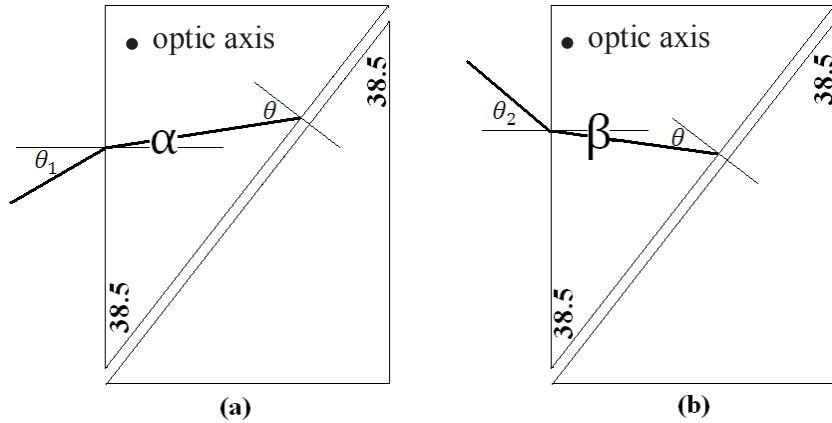


圖 1.3 計算容許角度範圍

(a) 光由下方入射 (b) 光由上方入射

由簡單的幾何數學，我們可以得到 $\alpha = \theta - 38.5^\circ$ 以及 $\beta = 38.5^\circ - \theta$ 。同時，因為只能讓 o-ray 全反射，(a) 中的 θ 就必須滿足 $\theta < \sin^{-1} 1/1.4864 = 42.28^\circ$ ，如此一來， $\alpha < 3.78^\circ$ ，所以 θ_1 的最大值不能超過 5.62° 。同理，(b) 中的 o-ray 要在介面上全反射，(b) 中的 θ 就必須滿足 $\theta > 37^\circ$ ，所以， $\beta < 1.5^\circ$ ，最後就得到， θ_2 的最大值不能超過 2.49° 。整理如下表：

(a) $\alpha = \theta - 38.5^\circ$		
$\theta_1 < 5.62^\circ$	$\alpha_e < 3.78^\circ$	$38.5^\circ \leq \theta < 42.28^\circ$
	$\alpha_o < 3.39^\circ$	$38.5^\circ \leq \theta < 41.89^\circ$
(b) $\beta = 38.5^\circ - \theta$		
$\theta_2 < 2.49^\circ$	$\beta_e < 1.67^\circ$	$36.83^\circ < \theta \leq 38.5^\circ$
	$\beta_o < 1.5^\circ$	$37^\circ < \theta \leq 38.5^\circ$

表 1.1 統整入射角度範圍

這種形式的極化分光器還有幾種變形，像是 Glan–Taylor 極化器/極化分光器、Glan–Thomson 極化器/極化分光器[1][3]。後者和 Glan–Foucault 的設計相仿，差別是中間的空氣層又換成加拿大香脂($n_{cb}=1.54$)。在[4]之中，對入射角的角度有詳細的探討，在某些情況下甚至能達到 40 度左右。但[4]之中的運算並沒有考慮到要把 o-ray 取出。將之考慮進去之後⁴，入射角的角度範圍約有二十度，但所占體積龐大。

而 Glan–Taylor 的設計，與 Glan–Foucault 設計的差別在於，圖 1.3 中的光軸(optic-axis)被旋轉 90 度。這是為了逼近布魯斯特角(Brewster's angle)[1][3]⁵，降低平行極化光在空氣介面的反射，如下圖[1]。至於入射角的容許範圍，由光學元件製造商 eo-edmund 的產品規格顯示⁶，大概只有 7 度多。

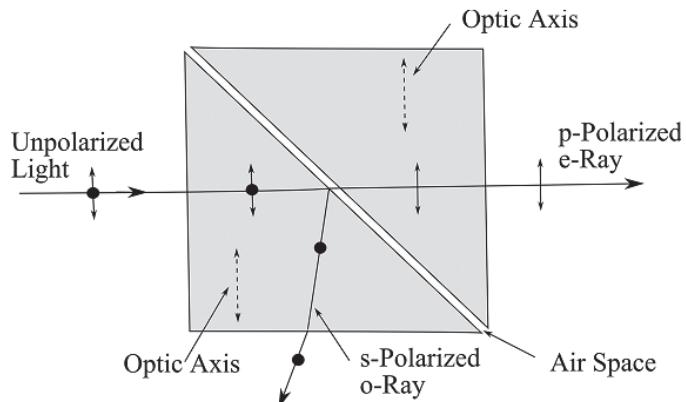


圖 1.4 Glan–Taylor 極化器/極化分光器

其他還有像 Wollaston、Rochon 等極化分光器。同樣由 eo-edmund 的產品規格顯示⁷，允許的角度偏差不能太大。

⁴ 請參看附錄一。

⁵ 布魯斯特角的公式為 $\theta_B = \tan^{-1} n_2/n_1$ ，以原先 Glan–Foucault 的設計來看， $\theta_B = \tan^{-1} 1/1.4864 = 33.9^\circ$ ，從以上的討論知道這是不可能達到的(表 1.1， $36.83^\circ < \theta$)，為了加大布魯斯特角，一個方法就是加大 n_1 。這可以運用雙折射晶體的特性，就像前面提及的，藉由改變和光軸的夾角來改變折射率。

⁶

<http://www.edmundoptics.com/optics/beamsplitters/polarizing-beamsplitters/glan-taylor-polarizers/2434>

⁷ <http://www.edmundoptics.com/optics/polarizers/linear-polarizers/wollaston-polarizers/3331>
<http://www.edmundoptics.com/optics/polarizers/linear-polarizers/rochon-polarizers/3332>



二、多層結構(multilayer)

1. MacNeille 極化分光器

在固態物理學中，因為晶格點(lattice point)週期性的排列，攜帶某些能量的電子，在色散方程式(dispersion relation，即 ω 和 k 的關係式)中，會找不到吻合的解，此即能隙(bandgap)的概念。對應到我們的多層結構也有類似的現象，只要經多重界面反射後能夠形成建設性干涉(constructive interference)，穿透的部分形成破壞性干涉(destructive interference)，就表示這道光無法穿透我們的多層結構。在光子晶體(photon crystal)中，這代表的就是一維的光子晶體。

MacNeille 所設計的極化分光器，一般的架構如下[5]。

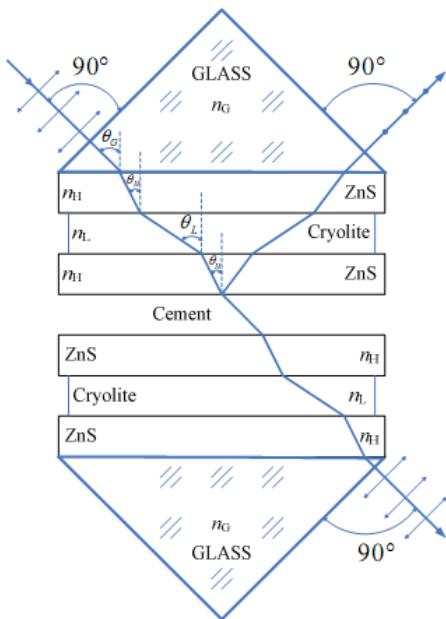


圖 1.5 MacNeille 極化分光器

其設計的原則有幾點，首先是折射率和入射的角度，這點可由[5][6][7]中的 Banning's relation 決定，其原理是為了讓入射角度在多層介面滿足布魯斯特角，式子如下⁸：

$$\sin^2 \theta_G = \frac{n_H^2 n_L^2}{n_G^2 (n_H^2 + n_L^2)} \quad (1-2)$$

⁸ 詳細的推導可參看文獻[5]。

其中，下標的 G 表示玻璃稜鏡(prism)， θ_G 為稜鏡到多層結構的入射角， n_G 為稜鏡的折射率。另一個設計的要點是各層的寬度。其原理是本於干涉的效應[1][7]，即讓反射光行建設性干涉。最後，容許的角度範圍可參考[6]⁹，大概有 20 度左右。此外，文獻中還有不單使用兩種材料堆疊，同樣利用干涉的原理來達到效果[8]。不過，這種做法往往需要額外的稜鏡(prism)，使得體積相對龐大。

還有一種是利用受抑全反射(Frustrated TIR, FTIR or FTR)[9]。其原理有點類似於量子物理中的穿隧效應(tunneling)¹⁰，這要求光在介面的入射角要大於臨界角(由[9]大概都 60 度以上)，這表示光幾乎是從側邊打入的，這對大面積的入射光源來說相當不利。

2. 多層雙折射介面(Birefringent Multilayer)

這種極化分光器揉合了雙折射晶體和多重介面的特點。雙折射的效應可以讓某一極化產生全反射而另一極化直接透射，多重介面則有光子晶體的效果，讓某些頻段的光無法通過。

然而，實際上要湊到合適的折射率並非易事，在文獻上[10]，就以固定方向的應力(uniaxial stretching)來改變所用聚合物(polymer)的折射率[1][10][11]，只要另一方向的折射率差異不大，就能使這方向的極化光幾乎都能穿透。

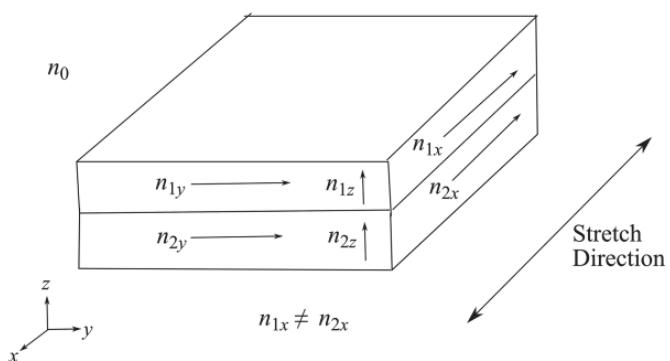


圖 1.6 運用多層雙折射介面的極化分光器 [1]

⁹ 第六章 Figure 6.46 & Figure 6.47

¹⁰ 全反射對應到馬克斯威爾方程，就是消逝波(evanescent wave)的解。即沿著法線方向，光為指數衰減的。若是衰減的距離不大，光就有可能穿過中間的介質。

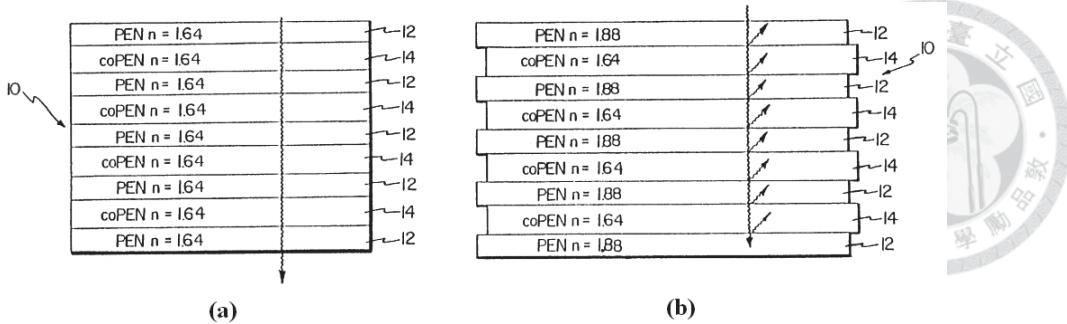


圖 1.7 多層雙折射介面[10] (a) y 方向折射率變化 (b) x 方向折射率變化

這種極化分光器能運作的角度範圍相當的大。在[13]的例子裡有 ± 14 度($f/2$)¹¹。

但這些設計大多是 3M 公司¹²的專利[10][11][12]。

三、光柵結構(grating)

如圖 1.8，對光柵結構來說，S 和 P 兩種極化光，感受到的折射率應該會是不同的，此即所謂的形狀雙折射(form birefringence)[14]。

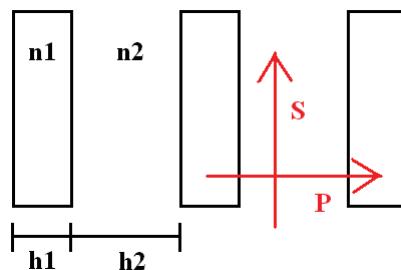


圖 1.8 光柵結構

當光的波長遠大於光柵週期時，我們能推估光柵的等效折射率(effective refractive index)[14]。S 極化的等效折射率 $n_{||}$ 及 P 極化的等效折射率 n_{\perp} 為¹³：

$$n_{||}^2 = f \cdot n_1^2 + (1 - f)n_2^2$$

$$n_{\perp}^2 = \left(\frac{f}{n_1^2} + \frac{1 - f}{n_2^2} \right)^{-1} \quad (1-3)$$

¹¹ f 的定義是焦距除上直徑，因此角度就為 $\tan^{-1} 0.5/2 \approx 14^0$

¹² Minnesota Mining and Manufacturing Company, 3M Co., Ltd

¹³ f 定義為 $h_1/(h_1 + h_2)$ ，即所謂的填充因子(filling factor)。

1. 線柵結構(wire-grid)

這種作法使用金屬當光柵介質。以下以一例來計算。假設 $f=0.5$, $n_2=1$, $n_1=0.974 + 6.73i$ 。代入(1-3)式可得 $n_{||} = 0.696 + 4.71i$ 、 $n_{\perp} = 1.43 + 0.0045i$ 。這表示 P 極化光的衰減小，能穿越線柵結構，與之對比的是，S 極化光會反射¹⁴。

對應到製程的容易度¹⁵，線柵結構有運用在紅外光波段(IR)[15]。不過，也有文獻嘗試運用在可見光波段(400nm-700nm)[16][17][18]。

線柵光柵因為使用金屬，是以損耗無法避免。文獻[17]的 Fig 10.a，在金屬光柵上方再加上一個介電材料(dielectric)光柵來加大 S 極化的反射量，如下圖。

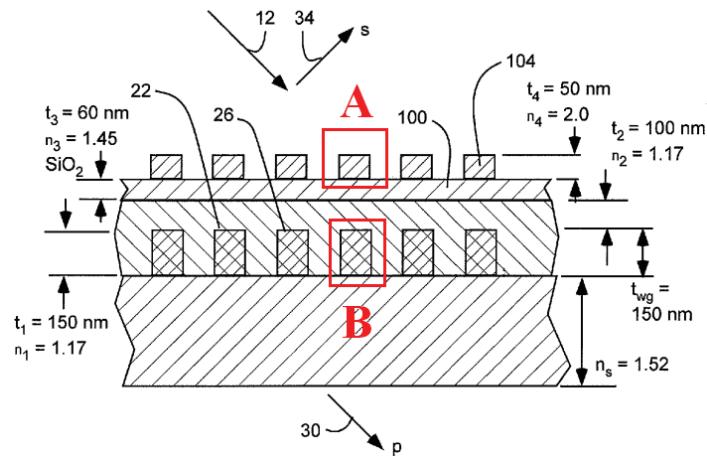


圖 1.9 線柵結構一例(A：介電光柵，B：鋁金屬光柵)

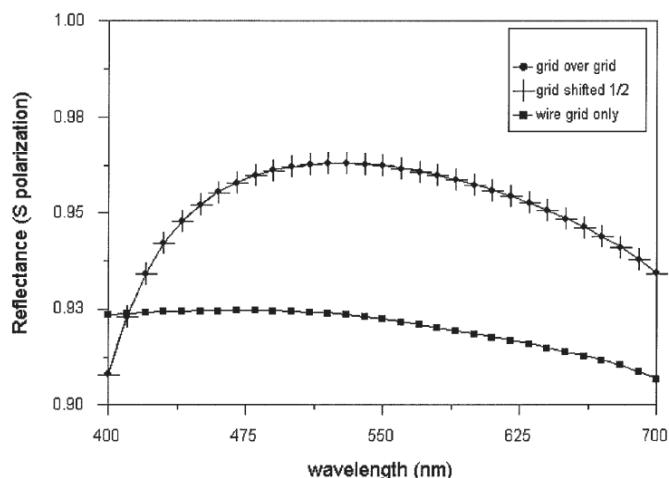


圖 1.10 圖 1.9 中不同結構對 S 極化反射光的影響[17]

¹⁴ 我們可以用夫瑞奈公式(Fresnel's equation)來看這個現象。假設光從空氣垂直入射到金屬內。

$R = \left| \frac{1-(n+ki)}{1+(n+ki)} \right|^2 = \frac{(1-n)^2+k^2}{(1+n)^2+k^2}$ ，當金屬的折射率為純虛數時，反射率就等於 1。

¹⁵ 通常這種設計會希望光柵週期遠小於波長，是以波長較長的紅外光波段，所需的光柵週期和可見光波段比起來可以大一點。

圖 1.10 是文獻[17]中不同光柵結構的結果，分別為未使用介電光柵、以及介電光柵和金屬光柵間的錯位(對準&差半周期)。從圖中可以發現，多了介電光柵，正如預期地提高了 S 極化的反射率。下面是我以商業軟體 RSoft¹⁶(Diffract mod 3.0)模擬，目的是要找出允許的入射角範圍。

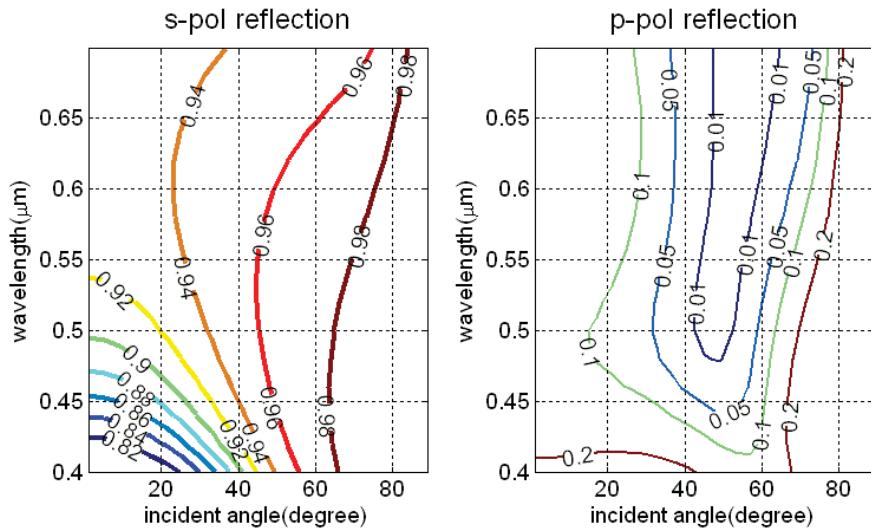


圖 1.11 S 極化和 P 極化的反射率

由上圖可以看出，只有在大約 42 度到 60 度左右，P 極化光在整個可見光波段的反射率才小於 20%。因此，允許的角度範圍大概為 18 度左右。

我們在註解 14 提過，當折射率的虛數部分越大實數部分越小，就能提高反射率。下圖是銀和鋁在不同波長的折射率。

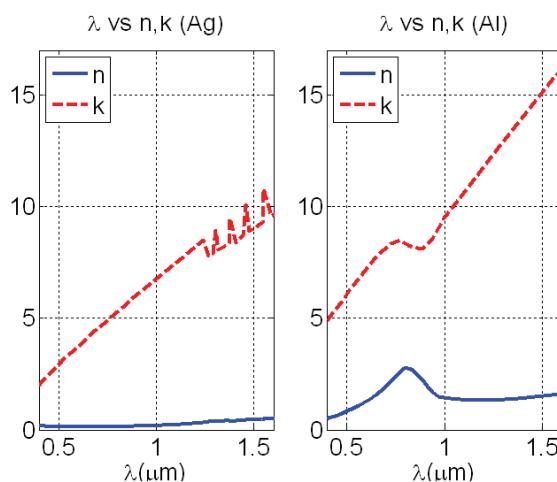


圖 1.12 銀和鋁在不同波長下的折射率[19][20]

¹⁶ RSoft Design Group, Synopsys Co., Ltd

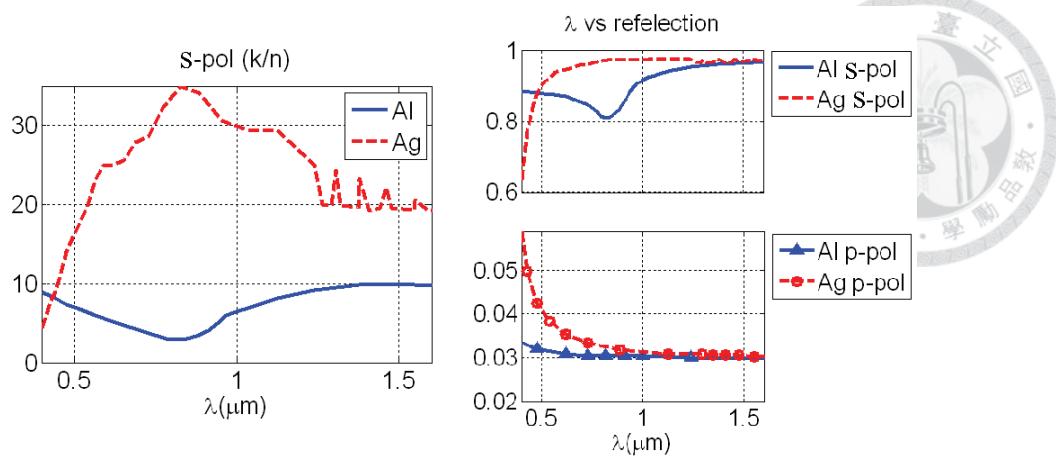


圖 1.13 (左) $n_{||}$ 的 n 和 k 比值(以下稱 r)與波長($0.4\sim1.6\mu\text{m}$)的關係

$$(右) s\text{ 極化和 }p\text{ 極化的反射率}(R = \frac{(1-n)^2+k^2}{(1+n)^2+k^2})$$

由圖 1.12 可以看出，銀和鋁的折射率隨著波長藍移逐漸遞減。反應在圖 1.13¹⁷，在藍光之外，銀的 r 值都大於鋁的 r 值，因此對銀來說， S 極化的反射率都大於鋁。不過波長偏向藍光時，銀的虛部折射率的越來越接近其實部，也因此 S 極化的反射率開始下降。

以上是由材料的角度進行分析。而另一個影響線柵結構的因素是所謂的瑞利共振(Rayleigh Resonance)[18]。下圖是使用鋁的線柵結構[18]，可以看出， P 極化的反射光在藍光附近有一個峰值。

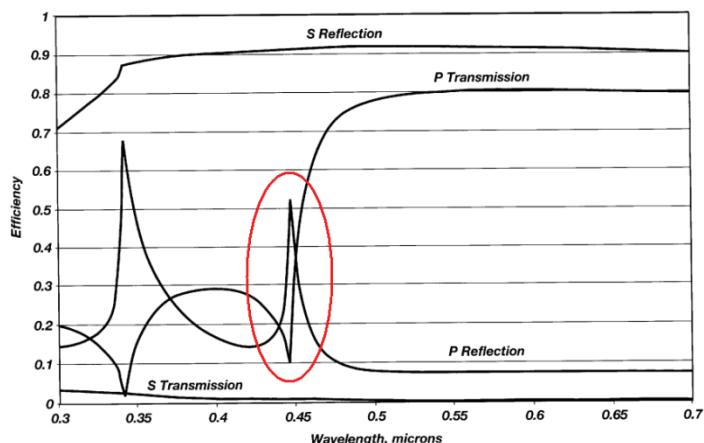


圖 1.14 鋁線柵結構的反射及穿透[18]

(基板折射率 1.525，週期 $0.2\mu\text{m}$ ，入射角 45°)

¹⁷ 為了清楚看出材料的特性，筆者使用單層介面的夫瑞奈反射公式，其折射率由(1-3)式算出。

這些峰值的波長可由 $\lambda = \Lambda(n_s \pm \sin\theta_i)$ 一式決定，其中 n_s 是基板的折射率， Λ 是光柵週期， θ_i 是入射角[18]。由此式可以看出，為了將這些峰值移到紫外光區域，我們就必須使用小光柵週期，對可見光來說，週期大概是 $0.15\mu\text{m}$ 左右[16][17][18]。除此之外，[18]還提供了一些方式，像是在金屬層下長一層介電材料，此舉相當於降低 n_s 。

即使[17][18]是偏振器的設計，而且可運作在較大的頻寬，但我們也能從中了解線柵結構的特性。總結下來，線柵結構為了降低瑞利共振，會在金屬層下加上介電材料或是將光柵週期調小，而為了加大 S 極化的反射量，也會在金屬層上加上介電光柵。不過，由於光是由空氣入射，P 極化或多或少都會有反射，這點可由圖 1.11 看出。

最後，讓我們檢視圖 1.9 結構的穿透率，如下圖。

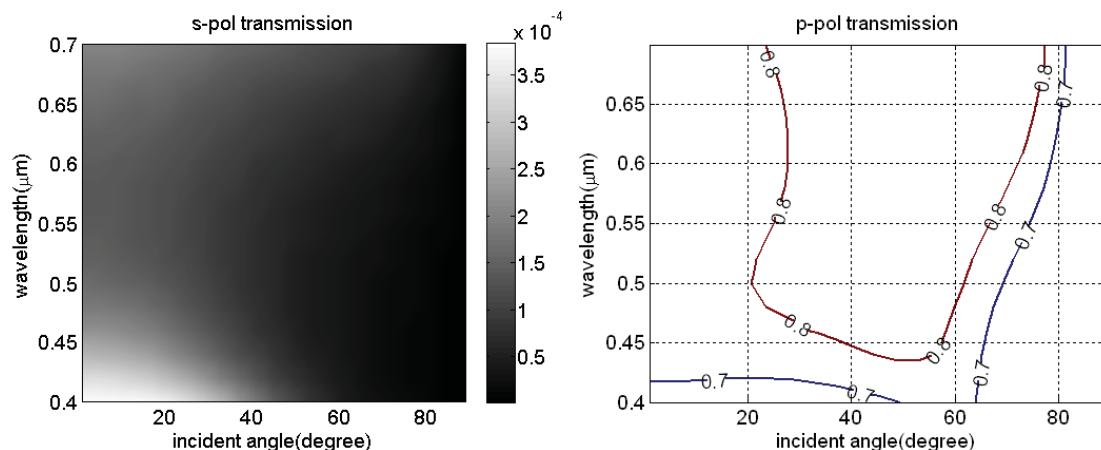


圖 1.15 圖 1.9 結構的穿透率

首先，為了清楚看出 P 極化在不同角度和波長的實際值，筆者將圖 1.15 右繪成等高線的形式。由上圖可以看出，S 極化的穿透率相當低，但 P 極化都為 90% 以下。特別是藍紫光區域的表現並不如其他波段，最多有約 30% 的能量損耗。

2. 繞射光柵(difraction grating)

上述的線柵結構通常會設計光柵週期，避免高階的繞射光出現，只有原先零階的繞射光出現。繞射光柵則與之不同。利用光的繞射(difraction)現象，適當設計結構上的參數，就能達到極化分光的效果。

一個例子是利特羅裝置(Littrow mounting)[21][22][23][24]。和線柵結構類似，繞射光柵有應用在紅外光波段[23]，也有為可見光波段內若干波長設計的繞射光柵[21][22]。在說明利特羅裝置之前，我們有必要先回顧一下光柵繞射的機制。

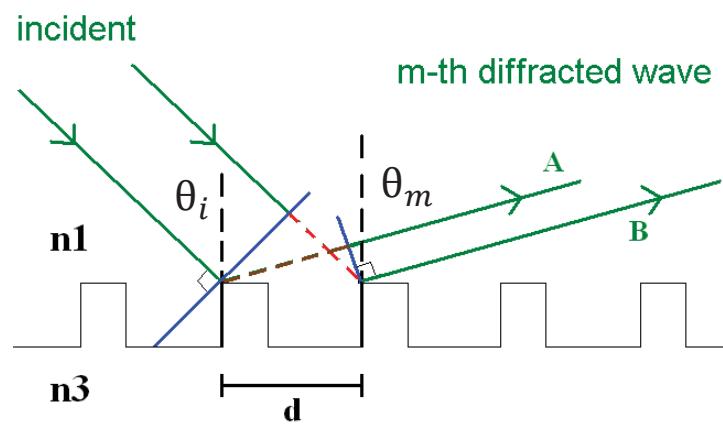


圖 1.16 繞射公式

由上圖，要能看到反射光，A 和 B 之間的相位差，必定要是 2π 的整數倍。即圖中兩條虛線的相位差為 2π 的整數倍。

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} n_1 (d \sin \theta_i - d \sin \theta_m) = 2\pi m \quad (1-4)$$

最後就可得繞射公式(difraction equation)：

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} n_1 \sin \theta_m = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_1 \sin \theta_i - m \frac{2\pi}{d} \quad (1-5)$$

由上式不難看出，因為 $|\sin \theta_m| \leq 1$ ，所以，能夠允許的繞射階數 m 是有限制的。光柵週期越大越容易產生高階繞射光。

利特羅裝置通常限定繞射光只有零階和一階。此外，必須讓入射角滿足 $\sin \theta_i = \lambda_0 / 2n_1 d$ 。只要適當調整參數，像是折射率、週期、填充因子，就能讓穿透光的特定繞射階數只包含一種極化方向，進而達到分光的效果，筆者在第二章會有進一步的討論。

繞射光柵除了極化分光的用途，還有其他的應用[25]，像是光纖使用光柵作為耦合器(grating coupling)，一分三的分光器(beam splitter)。

總結下來，文獻中所載極化分光器的做法包括雙折射晶體，多層介面，多層雙折射介面到光柵結構。光柵結構又包含線柵結構和繞射光柵。在這之中，有的是允許的角度範圍相對較小，有的因為額外的稜鏡造成體積相對較大，有的則是專利上的問題。

和線柵結構相比，線柵結構限制只有零階繞射光存在，繞射光柵在利特羅裝置下，尚容許一階繞射光存在，這表示和線柵結構相比，繞射光柵的週期限制範圍較寬鬆。而在上述的例子中 P 極化的反射以及瑞利共振(會降低藍紫光穿透量)都是要考量的重點，這暗示我們需要更複雜的架構來處理這些問題。

此外，在以上提到的方法內，只有繞射光柵是讓分開的極化光在同一側，其餘的都會讓極化光反射回入射光那一側，若我們想要利用反射的極化光，就需要額外的光學元件讓反射光再回到穿透光這一側。進一步來說，對直下式的背光模組而言，我們更需要注意極化分光器的大小與擺放位置，才能不阻擋到反射回來的光。

綜合以上理由，即便繞射光柵也有製程上的難度，但考慮到日漸進步的製程技術，以及和多層結構動輒數十層或者近百層材料[8][9]比起來，繞射光柵的結構顯得簡單一些，是以在這篇論文中，筆者將研究的方向定在繞射光柵上。



第二節、極化分光器的應用

一、液晶顯示器(Liquid Crystal Display, LCD)

液晶顧名思義，本身帶有晶體的性質，卻又不是固定不動的晶體結構。而其對電磁場的特性，例如外加電場能改變液晶分子的排列，影響整體折射率，進而造成雙折射的效應，下面提到的液晶顯示器就是這一方面的應用。

在顯示器中，如何呈現明暗是一個相當重要的課題。液晶扮演的就是這樣的角色。下圖以 TN(twist nematic) LC 為例，未外加電場時，光能通過上下兩個偏振器(polarizer)(亮)，外加電場後，液晶分子的排列被改變，光反而無法通過第二個偏振器了(暗)。

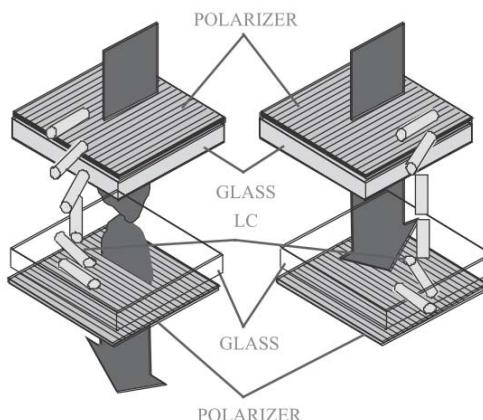


圖 1.17 TN 液晶的工作原理 [26]

一般傳統偏振器的材料是聚乙烯醇(polyvinyl alcohol, PVA)，使用應力拉長某一軸，再以碘浸泡[6][27]。這使得固定方向的極化光能穿透，另外一個方向卻會被吸收。下表是這種偏振器的效率[27]。

Thickness [μm]	Transmission			
	Single	Parallel	Crossed	
Nitto Denko				
G1220DU	205	41.5	34	0.018
EG1224DU	205	43	37.1	0.01
EG1425DU	210	43.5	38.5	0.02
QE 10-39	215	39	30.5	0.05
Sanritz				
H-C2-1218	215	42.7	32.65	4.22
H-C2-1112S	215	38	28.39	2.2
LL-C2-8212	154	44.27	38.07	1.409
LL-98	215	46.52	39.63	3.9266
LL-8312	154	48	40.5	10.25

表 1.2 傳統偏振器的效率 (%) [27]

由以上不難看出，通過兩次偏振器後，最高只剩下約 40%的能量。下圖是文獻[28]中，半透射式液晶顯示器(transflective LCD)在各個組件的能量損耗。

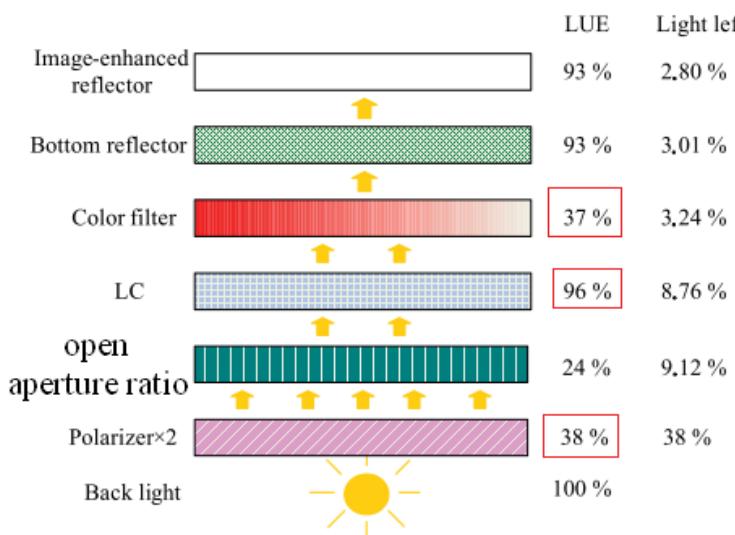


圖 1.18 半透射式液晶顯示器的光使用效率(Light utilization efficiency) [28]

從上圖可以看出，對白光的背光光源來說，濾色片(filter)和偏振器(polarizer)是兩個效率相對較低的元件¹⁸。為了提升光的使用效率，我們若不是提高濾色片效率，就必須提高偏振器的效率。以下簡略討論之。

1. 提高濾色片效率

文獻中有一種方法是使用分色光柵(color-separating grating)[29]，將白光分成 RGB 三波段，各自對應不同階的繞射光。另一種方法是使用 RGB 三色 LED 作為光源，混成其他顏色。一個例子是 FSC-LCD (Field Sequential Color LCD)，它把一個畫格(frame)的時間分成 RGB 三部分，利用視覺暫留(visual persistence)，達到彩色的效果。不過，這種作法雖然能夠提高光的使用效率，也可能會因為人位置的移動，離開視覺暫留的區域，造成色分離現象(color breakup)。

¹⁸ 一般穿透式液晶顯示器在環境光源相對較強的情況下，顯示器看來較不清楚。而反射式液晶顯示器則是在環境光源相對較弱下看來較不清楚。半透射式顯示器混合了這兩種顯示器的特點，將兩種顯示器放在一起，但對背光光源來說也降低了開口率(open aperture ratio)。

使用 RGB 三色 LED 當作背光光源有幾個好處。首先是藉由適當的設計，可以不使用濾色片。再者，我們也可以針對 RGB 三色分別設計符合各自波段的極化分光器，降低設計的難度。不過，使用 LED 也有一些缺點。首先，我們需要適當的白光混光機制，像是導光板(light guide plate)[30]，此外，周遭溫度變化也會影響 LED 的發光機制，需要額外的元件來做補償，最後還有一些色彩學(chromatics)上的問題，這類的問題常包括 RGB 三色應各占多少比例才能最切合人眼接收頻率的響應[26]。

2. 提高極化光使用率

傳統的偏振器會吸收其中一個極化，導致光的使用率最高也只能到 50%，是以我們希望 TE 和 TM 極化光都能被使用到。這邊我們能使用極化分光器，先將光分成 TE 和 TM 兩種極化，再讓其中一個極化通過半波片(half-wave plate)，最終就可得到全部同極化的光了[31]。

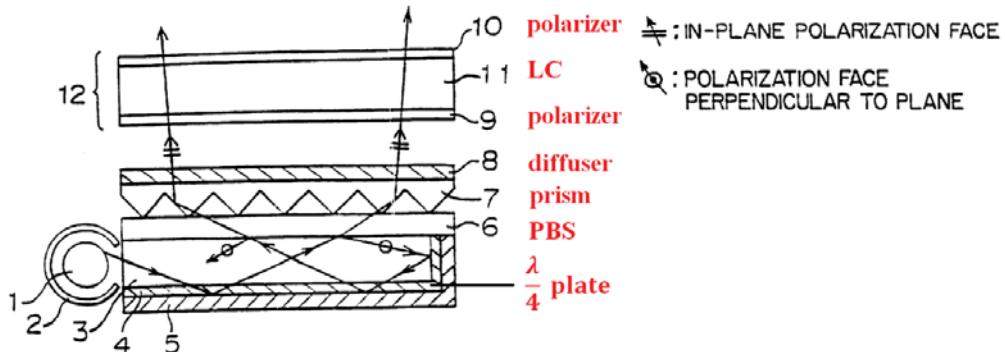


圖 1.19 增加光使用率[32]

上圖是文獻[32]中的例子，其使用的極化分光器是利用布魯斯特角特性設計的多層結構。值得注意的是四分之一波片(quarter-wave plate)，光線從側光源出來經極化分光器後，被反射的 S 極化光，在經過兩次四分之一波片，就相當經過一次半波片變為 P 極化光，第二次碰到極化分光器就能順利通過。

在設計的過程中，有幾點是必須要考慮的。首先是角度的問題，為了讓所有光源出來的光線都能被運用到，我們必須讓光源的散射角度都落在極化分光器容許的角度範圍內¹⁹。對此，我們有必要檢視一下液晶顯示器的背光模組(backlight)，一般背光光源可能會使用 CCFL(cold cathode fluorescent lamp, 冷陰極螢光燈)作為線光源，或是 LED(light emitting diode, 發光二極體)作為點光源。為了使光能均勻地進入液晶內，不集中在特定區域，散光器(diffuser)也會使用。

為了調整光線的入射角度，進而增強亮度，文獻中有利用增亮膜(Brightness Enhancement Film)²⁰。如下圖，利用稜鏡陣列(prism array)來調整角度。

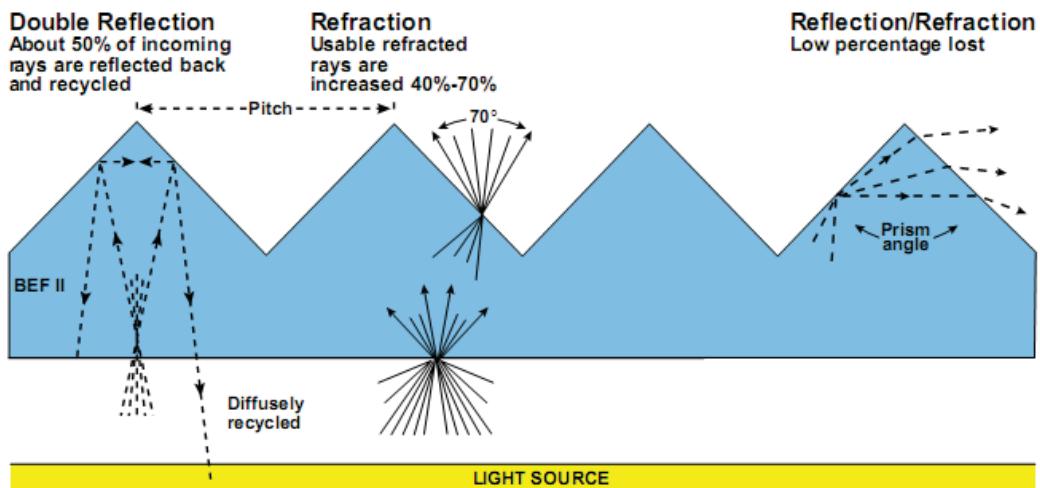


圖 1.20 Vikuiti™ BEF II of 3M

更甚者，還有所謂的 DBEF(Dual BEF)，它結合了前面提到過的雙折射多重介面極化分光器的特點，因此除了能夠集中角度，同時也可以提高極化光的使用率。但同樣是 3M 公司的專利。

除此之外，傳統光學的透鏡(lens)也能派上用場，像是微透鏡陣列(micro lens array)以及夫瑞奈透鏡(Fresnel lens)。

¹⁹ 讀者可以回頭檢視，在圖 1.19 中，仍加上一個偏振片 9，這是因為 PBS 容許的角度範圍不大，有些角度會得到較低的消光比，因此需要額外的偏振片。

²⁰ Vikuiti™ BEF II of 3M

第二個常會考慮到的要件是對比度。一般說來，我們會希望顯示器有高的對比度。這表示當液晶在"暗"的狀態時，能通過第二片偏振器的極化光要越小越好。換句話說，就是希望極化分光器有高的消光比(extinction ratio)。這個部分和極化分光器息息相關。

此外，對比度也會限制觀賞的角度。關於這一點，有幾項是必須考慮的，首先第一點是，我們希望極化分光器在不同角度的消光比都要高才行。第二點則是，最後通過偏振器的光強度(intensity)和 TE、TM 之間的相位差有關係[33]，而這個相位差又會因為光角度不同而改變²¹。為了加大觀測角度的範圍，有時會使用相位補償(phase compensation)的方法[26][33]。

二、立體顯示(3D display)

立體顯像技術的原理是模仿人眼觀測物體的過程。

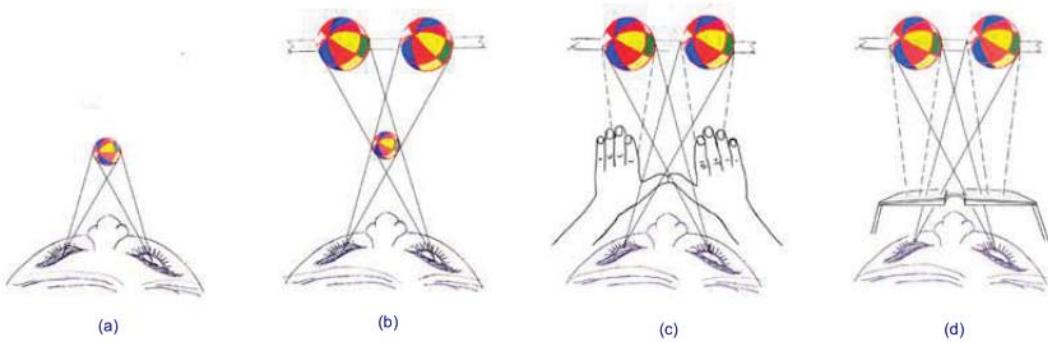


圖 1.21 立體觀測(stereoscopy)原理

正常情況觀察物體如上圖(a)，光線延長到平面上如圖(b)，這表示我們可以在平面上放兩個影像。只要得到和(b)一樣的光路，就能得到立體影像了。因此，我們必須讓左眼只看到右邊來的影像，右眼只收到左邊來的影像，如圖(c)。

對此，我們或許就可以應用極化光的特性，讓觀眾戴上特製的眼鏡，其中，左和右是互相正交的偏振片。

²¹ 對雙折射晶體來說，入射角有可能會改變折射率，最後造成相位差的變化。

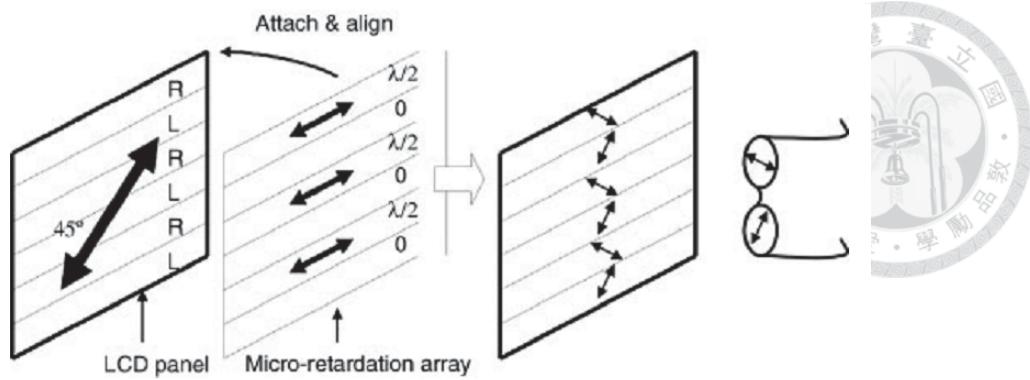


圖 1.22 使用線性極化光來實現 3D 影像

上圖是一個例子[34]，從 LCD 面板出來的極化光再通過半波片陣列後就可以變成兩種互相正交的極化光，分別對應到左眼和右眼的偏振片。

若我們使用前面提及的利特羅裝置配上半波片，我們就能將原本任意極化的入射光全部轉成同一方向的光。之後就可以像上圖般得到左右的影像，經過 3D 眼鏡之後，進而達到立體的效果。

然而，上述的方式有幾點是可以討論的，首先，原先的畫素(pixel)分兩半給左影像和右影像，最直接的影響就是左眼和右眼看到的解析度只有原先的一半。關於這點，一種解決方式是運用兩塊 LCD 面板[34]。第二點和觀賞角度有關，若是觀眾在觀賞時，頭稍微旋轉一個角度，原本無法穿過偏振片的光，就有機會同時都穿越兩眼的偏振片，如此就沒有立體影像的效果了。對於這點，一個解決方式是利用圓形極化而不是使用線性極化。

第三節、論文大綱與編排

本論文的目標是利用極化分光器(Polarization Beam Splitter, PBS)設計出高光使用效率的偏振器，以期能應用在液晶顯示器或是立體顯像技術上，筆者將本論文分成五章。

第一章為緒論，主要回顧文獻上的極化分光器，比較彼此的特性。同時討論可能的應用。

第二章為理論分析，一開始本於一些文獻，簡略的解釋利特羅裝置的物理機制，接著介紹本論文的數值方法，並討論極化分光器的設計方向，最後以此對RGB三個波段進行設計。

第三章為寬頻偏振器。本於利特羅裝置的物理機制，但筆者作了些微修正，試圖以此設計一個寬頻的極化分光器。

第四章為出光角度與集光角度。因為極化分光器的角度是受限的，所以在這一章中，會從兩個面向來探討角度的問題，其一是如何縮小 LED 的出光角度，其二是藉由波段的取捨來加大極化分光器容許的角度範圍。

第五章則為結論，總結第一章到第四章的內容。



接續著上一章，本章一開始會先花一些篇幅解釋利特羅裝置(Littrow mounting)的物理機制，接著敘述論文中使用的分析方法。前者本於一些文獻，後者則為數值方法——嚴格耦合波法(Rigorous Coupled Wave Analysis, RCWA)，利用商業軟體 RSoft²²(Diffract mod 3.0)以及 MATLAB²³進行數值分析。

第一節、利特羅裝置的物理機制

一、光柵中的模態(mode)解

若介電常數 ϵ 是隨空間變化的函數。由馬克斯威爾方程(Maxwell's eqs)可推得波方程如下²⁴：

$$\nabla^2 \vec{E} + \nabla \left(\vec{E} \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \right) + \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} = 0 \quad (2-1a)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \times \nabla \times \vec{H} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{H} = 0 \quad (2-1b)$$

同[35]中的式子。若我們定義光柵結構如下圖[36]，接著定義橫向電場(TE)為電場沿著 y 方向，橫向磁場(TM)指的是磁場沿著 y 方向。

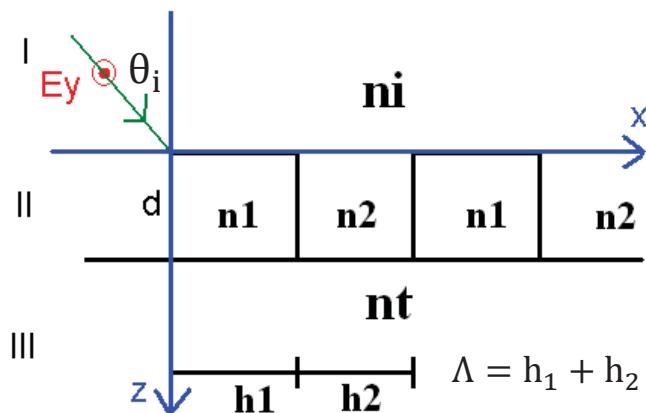


圖 2.1 光柵模型

²² RSoft Design Group, Synopsys Co., Ltd

²³ The MathWorks, Inc.

²⁴ 參看附錄二之一。

如此一來(2-1a)和(2-1b)式便能再作化簡。TE 模態時， $\nabla\varepsilon = (\partial\varepsilon/\partial x, 0, 0)$ 以及 $\vec{E} = (0, E_y, 0)$ ，兩者做完內積(inner product)就會為零。因此最後可得²⁵：

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu \varepsilon \vec{E} = 0$$

TE (2-2a)

$$\nabla^2 \vec{H} - \left(\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \nabla\right) \vec{H} + \omega^2 \mu \varepsilon \vec{H} = 0 \quad \text{TM (2-2b)}$$

1. TE 模態

我們由(2-2a)式出發，因為 $\omega^2 \mu \varepsilon = \omega^2 \mu \varepsilon_0 \varepsilon_r = \omega^2 / c_0^2 \cdot \varepsilon_r$ ，且 E_y 不隨著 y 改變而改變 ($\frac{\partial}{\partial y} E_y = 0$)，由分離變數法(separation of variables)，假設 $E_y(x, z) = u(x) e^{-jk_z z}$ ，當中 $k_z = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_{\text{eff}} = k_0 n_{\text{eff}}$ ，(2-2a)式變為：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k_0^2 (n^2 - n_{\text{eff}}^2) u$$

$$n(x) = \begin{cases} n_1 & 0 \leq x \leq h_1 \\ n_2 & h_1 \leq x \leq \Lambda \end{cases} \quad (2-3)$$

(2-3)式有兩種可能的解[35] ($\beta = k_0 \sqrt{n_1^2 - n_{\text{eff}}^2}$, $\gamma = k_0 \sqrt{n_2^2 - n_{\text{eff}}^2}$)：

$$p(x) = \begin{cases} \cos \beta x & 0 \leq x \leq h_1 \\ \cos(\beta h_1) \cos[\gamma(x - h_1)] - \frac{\beta}{\gamma} \sin(\beta h_1) \sin[\gamma(x - h_1)] & h_1 \leq x \leq \Lambda \end{cases} \quad (2-4a)$$

$$q(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \sin \beta x & 0 \leq x \leq h_1 \\ \frac{1}{\beta} \sin(\beta h_1) \cos[\gamma(x - h_1)] + \frac{1}{\gamma} \cos(\beta h_1) \sin[\gamma(x - h_1)] & h_1 \leq x \leq \Lambda \end{cases} \quad (2-4b)$$

值得注意的是，兩組解及兩組解的一次微分在 n_1 及 n_2 邊界必定要連續。

²⁵ 參看附錄二之二。

因此，最後的解就為此兩解的線性組合(linear combination)：

$$u(x) = A[B \cdot p(x) + q(x)], B = \frac{q(\Lambda)}{e^{jk_i \sin \theta_i \Lambda} - p(\Lambda)} \quad (2-5)$$



其中 B 是由布洛赫定理(Bloch's theorem)求出的²⁶。

由此，只要求得 n_{eff} ，就能求 $p(x)$ 和 $q(x)$ ，接著由上述關係式，我們就可以知道電場的正規化場形分布(normalized mode profile)。

2. TM 模態

解 TM 模態的過程和上述的方式相仿，我們一樣分成兩個區域求解²⁷。

最後的解為[35]：

$$p(x) = \begin{cases} \cos \beta x & 0 \leq x \leq h_1 \\ \cos(\beta h_1) \cos[\gamma(x - h_1)] - \frac{n_2^2 \beta}{n_1^2 \gamma} \sin(\beta h_1) \sin[\gamma(x - h_1)] & h_1 \leq x \leq \Lambda \end{cases} \quad (2-6a)$$

$$q(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \sin \beta x & 0 \leq x \leq h_1 \\ \frac{1}{\beta} \sin(\beta h_1) \cos[\gamma(x - h_1)] + \frac{n_2^2}{n_1^2 \gamma} \cos(\beta h_1) \sin[\gamma(x - h_1)] & h_1 \leq x \leq \Lambda \end{cases} \quad (2-6b)$$

值得注意的是，兩組解在 n_1 及 n_2 邊界必定要連續(H_y 連續)，兩組解的一次微分除上各自的 ϵ_r 要連續(E_x 連續)。接下來的步驟和 TE 模態相仿，最後的模態解就是這兩解的線性組合。

接下來，未知數就只剩下 n_{eff} 了。由文獻[35]²⁸，對 TE 和 TM 兩個極化來說，其 n_{eff} 會滿足以下兩式：

²⁶ 參看附錄二之三。

²⁷ 這邊和 TE 模態有些微不同。在(2-2b)一式中， $\nabla \epsilon$ 一項並無法消去，而在我們的結構中， ϵ 在邊界是不連續的。不過，若分別在各個區域求解，就能避開這個問題，邊界的話只要引入邊界條件即可。

²⁸ 另外一種推導方式可參看附錄二之四。

$$\cos \beta h_1 \cos \gamma h_2 - \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta\gamma} \sin \beta h_1 \sin \gamma h_2 = \cos(k_i \sin \theta_i \Lambda)$$

$$\cos \beta h_1 \cos \gamma h_2 - \frac{n_2^4 \beta^2 + n_1^4 \gamma^2}{2n_1^2 n_2^2 \beta \gamma} \sin \beta h_1 \sin \gamma h_2 = \cos(k_i \sin \theta_i \Lambda)$$

我們能夠由(2-7)式的左式和右式各自畫圖(如圖 2.2)，如此就能求 n_{eff} 。一旦知道 n_{eff} 之後，我們就能把利特羅裝置下的正規化場形分布畫出來。

在利特羅裝置下，入射角必須滿足 $\sin \theta_i = \lambda_0 / 2n_i \Lambda$ 。代入(2-7)式後可以發現， $\cos(k_i \sin \theta_i \Lambda) = -1$ 。以下讓我們來考慮一個例子。週期為 $0.3\mu\text{m}$ ， h_1 和 h_2 各占一半， $n_1 = 1.45(\text{SiO}_2)$ 、 $n_2 = 1(\text{air})$ 、 $n_i = 1$ ，波長為 $0.55\mu\text{m}$ 。

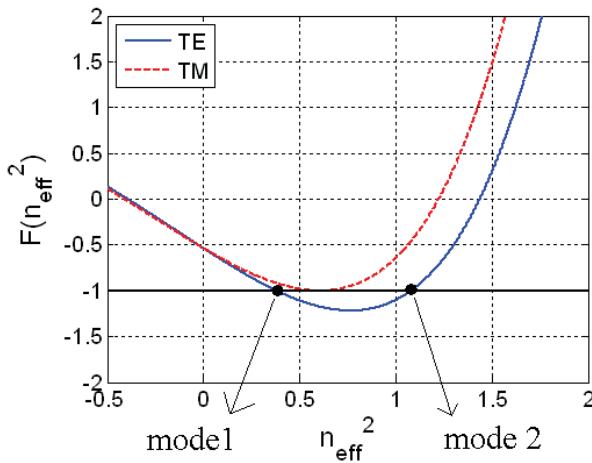


圖 2.2 圖解法求 n_{eff}

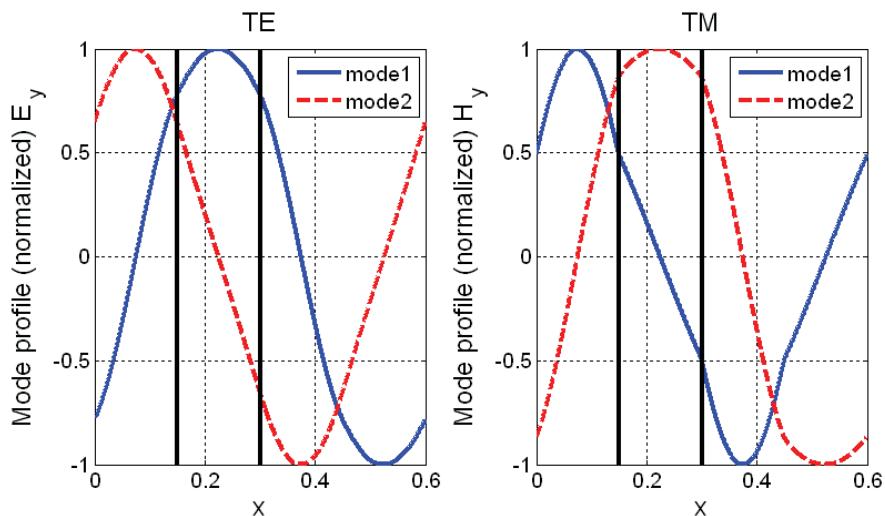


圖 2.3 正規化場形分布

這邊要提醒的是，圖 2.2 和 $\cos(k_i \sin \theta_i \Lambda) = -1$ 的交點理論上有無窮多個，但是 n_{eff} 代表的是沿 z 方向行進的等效折射率，因此那些 $n_{\text{eff}}^2 < 0$ 的部分，其實就對應到 z 方向的衰減，這邊為了簡化起見，只取頭兩個 $n_{\text{eff}}^2 > 0$ 的解。



二、利特羅裝置的物理機制

我們在上一小段成功地繪製出場形分布。接著，我們引用模態分析(modal analysis)的方式[37]，進行分析。

1. 低反射率

對 TE 模態來說，在邊界上($z=0$)， E_y 和 H_x 要連續。若我們考慮入射光為一平面波，而且只有一階繞射光²⁹，則：

$$(1 + R_0)e^{-j\frac{\pi}{\Lambda}x} + R_1e^{j\frac{\pi}{\Lambda}x} = a u_1(x) + b u_2(x) \quad (2-8a)$$

$$n_i \cos \theta_i (1 - R_0)e^{-j\frac{\pi}{\Lambda}x} - n_i \cos \theta_i R_1e^{j\frac{\pi}{\Lambda}x} = a \cdot n_{\text{eff}1} u_1(x) + b \cdot n_{\text{eff}2} u_2(x) \quad (2-8b)$$

其中，(2-8a)式代表的是 E_y 連續，(2-8b)則是 H_x 連續。

由前一小段的討論(圖 2.3)，這邊我們直接把 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 當成 $\cos \pi x / \Lambda$ 和 $\sin \pi x / \Lambda$ ，我們可以把這兩個三角函數寫成 $e^{j\frac{\pi}{\Lambda}x}$ 的形式。之後比對係數就能得到四個方程式(E_y 和 H_x 各兩個)，如此，我們就能求出 R_0 和 R_1 。以上面的例子為例，最後算出 $R_0 = 0.0272$ ， $R_1 = 0.0158$ 。而 TM 模態也使用同樣的方法計算後³⁰， $R_0 = 0.0328$ ， $R_1 = 0.0015$ 。

2. 模態分析

接著，假設反射量 R_0 和 R_1 可以忽略，類似[37]，將式子整理如下。

²⁹ 一階繞射光的波數(wave number)為 $k_i \sin \theta_i - 2\pi/\Lambda = -\pi/\Lambda$ 。

³⁰ 對 TM 模態來說， H_y 和 E_x 在 $z=0$ 時要連續， E_x 由法拉第定律 $\nabla \times \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E}$ 求，如此一來 E_x 並不會是連續的正弦函數，這暗示了入射區域像解 TE 模態時一樣只使用 $e^{-j\frac{\pi}{\Lambda}x}$ 和 $e^{j\frac{\pi}{\Lambda}x}$ 是不夠的。但這邊筆者只是想探討反射量不大的事實，因此就暫且像 TE 模態一樣計算。

$$e^{-j\frac{\pi}{\lambda}x} = au_1(x) + bu_2(x)$$

(2-9a)

$$a \cdot u_1(x) e^{-jk_0 n_{eff1} d} + b \cdot u_2(x) e^{-jk_0 n_{eff2} d} = E_0 e^{-j\frac{\pi}{\lambda}x} + E_1 e^{j\frac{\pi}{\lambda}x}$$

(2-9b)

其中，(2-9a)式代表 $z=0$ 的 E_y 連續，(2-9b)式則是 $z=d$ 的 E_y 連續。最後可得^[37]³¹：

$$|E_1|^2 = \sin^2 \left[\frac{\pi}{\lambda} (n_{eff1} - n_{eff2}) d \right] \quad (2-10)$$

TM 也有類似的式子。值得注意的是，由於 TE 和 TM 有不同的 n_{eff} ，從(2-10)式可以看出，我們有機會錯開 TE 和 TM 兩者的 $|E_1|^2$ ，此即代表，某一極化在一階繞射光有高繞射效率(difraction efficiency)，另一個極化光則因為反射量不大，就只能集中在零階繞射光[24]。

下圖是以下個小節將會談到的數值方法，使用圖 2.3 的數據進行模擬(加上 $n_t = 1.45$)。由前述的方法，兩個 n_{eff} 分別為 0.799 和 0.7597，在 TM 在一階繞射有高繞射效率時($d = 6.9 \mu m$)， $\frac{(n_{eff1} - n_{eff2})d}{\lambda}$ 正好接近 0.5。

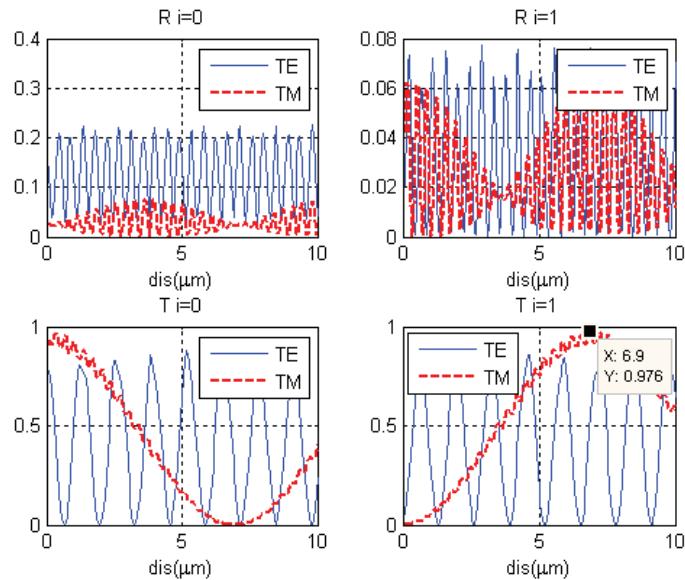


圖 2.4 利特羅裝置下不同光柵深度下各階的繞射效率(參數同圖 2.3)

$$TM \quad n_{eff1} = 0.799 \quad n_{eff2} = 0.7597 \quad \lambda = 0.55 \mu m$$

³¹ 雖然[37]是對三個繞射光推導，但二階的推導類似之，有興趣的讀者可參看附錄二之五。

文獻[38]把這種機制類比成馬赫-陳爾德干涉儀(Mach-Zehnder interferometer)，因此最後繞射光的繞射效率是兩個模態間的干涉結果，所以其效率和兩模態的相位差有關。[38]並進一步提出，經過適當的設計，可以讓 TM 極化有相同的 n_{eff} 。由(2-10)式可以看出，只要 TM 極化有相同的 n_{eff} ，TM 極化的 $|E_1|^2$ 就為零，與光柵深度 d 沒有關係。因為 TM 極化只集中在零階繞射，我們只需要設法讓 TE 極化有高 $|E_1|^2$ 即可。[23]就本著這樣的精神，利用多層介質組合成的光柵，在 TM 模態湊出相同的 n_{eff} 。

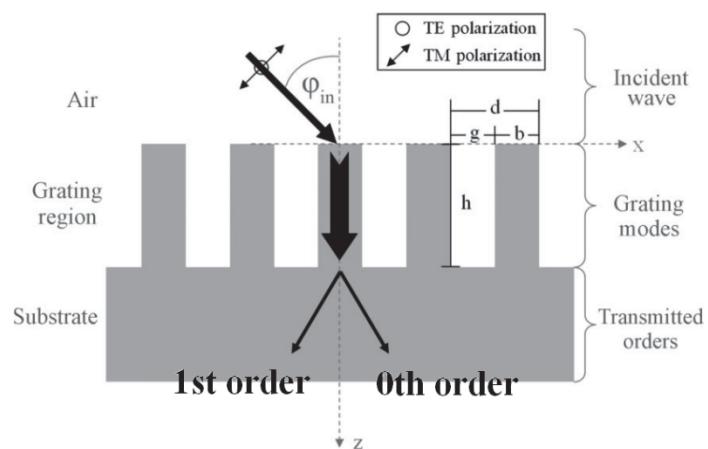


圖 2.5 利用利特羅裝置實現的極化分光器[38]

1st order : TE 0th order : TM

第二節、數值方法

由(1-3)式或是(2-7)式，我們能計算平行極化和垂直極化的零階和高階等效折射率近似。雖然十分方便，不過若要以此分析卻有問題，因為我們沒有辦法只用一個等效折射率計算出多個高階繞射光的繞射效率。

我使用的數值方法是嚴格耦合波法(Rigorous Coupled Wave Analysis, RCWA)，在 1980 年代左右發展出來[39]。為了簡單說明 RCWA 的精神，以下以 TE 極化為例，且讓入射平面平行光柵方向(如圖 2.1)，基本上本於[40][41]兩篇文獻。³²

因為應用上只需考慮反射率和穿透率，實際場形相對比較次要。而且相較於時域有限差分法(Finite difference time domain, FDTD)，RCWA 較節省時間，因此最後筆者使用 RCWA 進行數值分析。

一、平面波展開法

由於光柵結構有週期性，是以我們的解也有某種程度的週期性。像週期函數能以傅立葉級數展開，在 RCWA 中，每個區域的解都寫成平面波的線性組合。

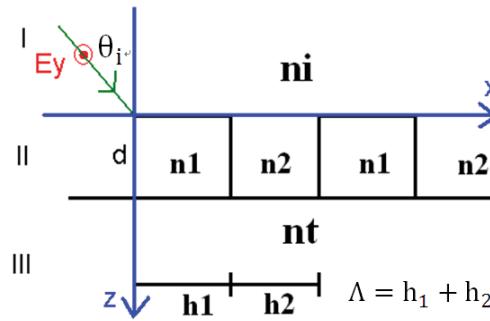


圖 2.6 光柵結構

$$E_y = e^{-j(k_1 \sin \theta_i \cdot x + k_1 \cos \theta_i \cdot z)} + \sum_{m \neq 0} \underline{R_m} \cdot e^{-j(\underline{k_{mx}} \cdot x - k_{mz1} \cdot z)} \quad (2-11a)$$

$$E_y = \sum \underline{S_m(z)} \cdot e^{-j\underline{k_{mx}} \cdot x} \quad (2-11b)$$

$$E_y = \sum \underline{T_m} \cdot e^{-j[\underline{k_{mx}} \cdot x + k_{mz3} \cdot (z-d)]} \quad (2-11c)$$

³² TE 部分請看[40]的第三小節，TM 則可參看[41]，[41]的作法主要是加快收斂的速度。

上式的(a)(b)(c)各代表了區域 I、II、III，此外， $k_{mx} = k_1 \cdot \sin \theta_i - m \frac{2\pi}{\Lambda}$ ，正如第一章提到(1-5)式繞射公式。而 $k_{mzi} = \sqrt{k_i^2 - k_{mx}^2}$ ($i = 1$ 或 3)。

細心的讀者或許可以發現，區域 II 解的寫法是滿足於布洛赫定理的³³。此外，波向量在介面上的投影也都連續(都是 k_{mx})，正如折射定律，此即滿足相位匹配 (phase matching)。

二、特徵值問題(eigenvalue problem)

由於上述三式都必須滿足馬克斯威爾方程，所以區域二的式子必須滿足 (2-2a)式，而因為折射率呈週期分布，我們將之展開成傅立葉級數。

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k_0^2 \left(\sum_L \varepsilon_L e^{jL\frac{2\pi}{\Lambda}x} \right) E_y = 0 \quad (2-12)$$

將區域 II 的解代入後可得(S_m'' 是 S_m 對 Z 作二次微分)³⁴：

$$S_m'' - k_{mx}^2 S_m + k_0^2 \sum_L \varepsilon_L S_{m-L} = 0 \quad (2-13)$$

令 $\mathbf{S} = [\dots \ S_{m-1} \ S_m \ S_{m+1} \ \dots]^T$ ，寫成矩陣的形式³⁵：

$$\mathbf{S}'' = (\mathbf{k}_x^2 - k_0^2 \mathbf{E}) \mathbf{S} \quad (2-14)$$

其中 \mathbf{k}_x 為對角線填上 $[\dots \ k_{-1x} \ k_{0x} \ k_{1x} \ \dots]$ 的對角矩陣 (diagonal matrix)， \mathbf{E} 以下以一個 3×3 矩陣為例。

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & \varepsilon_{-1} & \varepsilon_{-2} \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_0 & \varepsilon_{-1} \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_1 & \varepsilon_0 \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

若我們令 $\mathbf{S} = \mathbf{V} e^{\mathbf{D}z}$ ， \mathbf{D} 為一個對角矩陣。則(2-14)式變成：

³³ $\psi(x) = e^{jkx} \theta(x)$ ，其中 $\theta(x)$ 為一週期函數。

³⁴ 參看附錄二之六。

³⁵ 粗體字代表矩陣。



$$\mathbf{V}\mathbf{D}^2 = (\mathbf{k}_x^2 - k_0^2 \mathbf{E})\mathbf{V} \quad (2-16)$$

這是典型的特徵值問題(eigenvalue problem)， \mathbf{D}^2 是由特徵值組成的對角矩陣， \mathbf{V} 是由這些特徵值對應的特徵向量(eigenvector)組成的矩陣³⁶。值得注意的是，我們求出的特徵值為 \mathbf{D}^2 ，所以對 \mathbf{S} 來說 \mathbf{D} 和 $-\mathbf{D}$ 都是特徵值。因此最後 \mathbf{S} 的解就應寫為 $\mathbf{S} = \mathbf{V}e^{\mathbf{D}z}\mathbf{C}_1 + \mathbf{V}e^{-\mathbf{D}z}\mathbf{C}_2$ ，其中 \mathbf{C}_1 和 \mathbf{C}_2 為 $M \times 1$ 的陣列(array)，對應到每一對特徵向量和特徵值(V_i 、 λ_i)的係數。展開後的寫法如下：

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \vdots \\ S_{m-1} \\ S_m \\ S_{m+1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ V_{(m-1)1} \\ V_{m1} \\ V_{(m+1)1} \\ \vdots \end{bmatrix} (c_1 e^{\lambda_1 z} + c'_1 e^{-\lambda_1 z}) + \begin{bmatrix} \vdots \\ V_{(m-1)2} \\ V_{m2} \\ V_{(m+1)2} \\ \vdots \end{bmatrix} (c_2 e^{\lambda_2 z} + c'_2 e^{-\lambda_2 z}) + \dots \quad (2-17)$$

假設我們對每個區域使用了 M 個平面波疊加，反射係數 R 和穿透係數 T 就各有 M 個未知數，加上上方每一個特徵值的係數($2M$ 個特徵值)，總計就有 $4M$ 個未知數。接下來就要引用邊界條件解這些未知數。

三、邊界條件

這邊使用的邊界條件一樣是 E_y 和 H_x 在 $z=0$ 和 d 的地方要連續，對此，我們可以由三個區域的 E_y 把 H_x 解出來³⁷。藉由比對 $e^{-jk_{mx}x}$ 係數， $z=0$ 時一個 R_m 可以和 S_m 寫兩個方程式(E_y 和 H_x 各一)。若我們使用了 M 個平面波，一個邊界我們就可以列出 $2M$ 個方程式，兩個邊界就可以列出 $4M$ 個方程式。而我們有 $4M$ 個未知數，理論上是可以求解的。

不過，這邊卻存在一個可能的問題。若在上述的特徵值問題中，求出一個很大的正特徵值，解 $z=d$ 的邊界條件時， $S_m(z=d)$ 有可能會趨近於無限大。筆者使用[43]提供的解決方法，受限於篇幅，故略而不述，有興趣的讀者可以一讀。

³⁶ $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_3 \dots]$ ， $\mathbf{V}_1 = [\dots V_{(m-1)1} V_{m1} V_{(m+1)1} \dots]^T$ 。

³⁷ 求 H_x 之時，我們會讓 E_y 對 z 微分。值得注意的一點是，我們使用的平面波數 m 可能會造成 k_{mz} 變成虛數，因物理的考量，我們會取負的虛數，如此在區域 I 和 III 才不會有指數增加的情況出現。

四、收斂性

因為 RCWA 是使用平面波展開法，因此理論上我們使用的平面波數越多，算出來的答案就會越接近真實的答案。下圖以圖 2.3 的同一筆數據($d=6.9\mu\text{m}$)模擬，差別只是使用的平面波數。

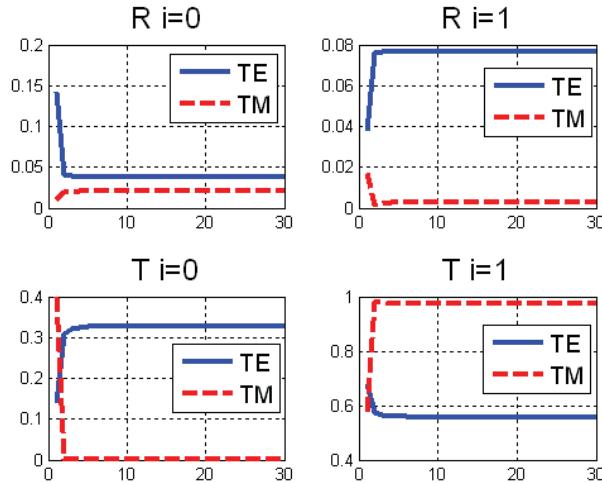


圖 2.7 繞射效率與使用平面波數目的關係(RCWA 的收斂性)

五、能量守恆

因為我們使用的是介電材料，理論上不會有能量損耗，這表示所有的反射和穿透相加要等於 1。以下是 MATLAB 程式碼和 RSoft(Diffract mod 3.0)模擬結果。

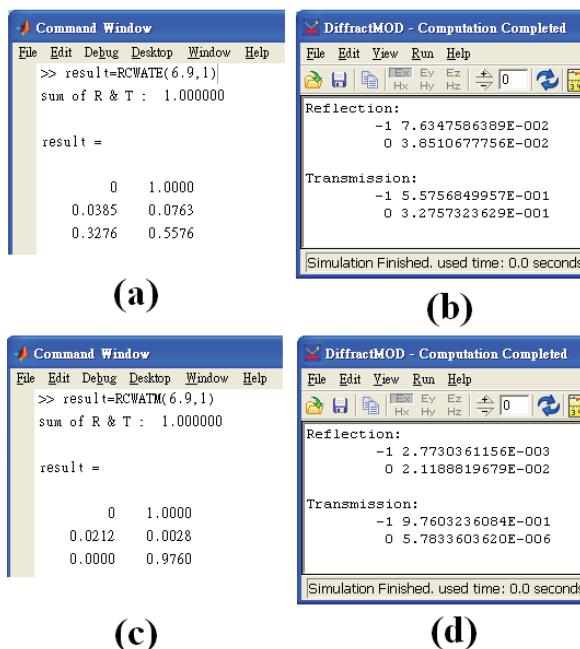


圖 2.8 (a)MATLAB TE (b) RSoft TE (c) MATLAB TM (d) RSoft TM

由圖 2.8 可以看到，我的 MATLAB 程式碼都遵守能量守恆。而且數據和 RSoft(Diffract mod 3.0)的數據相差不大。我的第一繞射則對應到 RSoft(Diffract mod 3.0)的-1階繞射，這是因為 RSoft(Diffract mod 3.0)使用的繞射公式是：

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} n_1 \sin \theta_m = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_1 \sin \theta_i + m \frac{2\pi}{d} \quad (2-18)$$

六、後話

為了簡單說明 RCWA 的精神，我們在這邊提到的只有入射平面和光柵方向平行的情況。當然實際上模擬時，我們也希望能夠模擬不平行的情況。其差別只是在邊界條件時，我們必須同時考慮 E_x 、 E_y 、 H_x 、 H_y 。這邊筆者使用的平面波展開法本於[42]的(8)和(9)式。而由(2-1)式，我們可以推導出 E_x 和 H_x 的特徵值問題，然後藉由安培定律和法拉第定律兩個旋度(curl)公式([42]的(13a)和(13c)式)，把 E_y 和 H_y 求出來。邊界條件則使用類似於[40]的(66-69)式，並引用[43]的方法把 R 和 T 算出來，詳細的流程可參看附錄三。

第三節、極化分光器的設計

這個小節是本論文的主題之一。一開始，筆者會先進一步探討第一節提到的現象，接著大略討論設計的方向，最後是個別對 RGB 三波段進行設計。



一、相同 n_{eff} 的進一步探討

當填充因子(filling factor, f)有以下關係時，TM 極化會有兩個相同的 n_{eff} [38]：

$$f = \frac{\frac{\pi}{\Lambda} - \gamma}{\beta - \gamma} \quad (2-19)$$

其中，計算 β 和 γ 所需的 n_{eff} 如下³⁸。

$$n_{\text{eff}}^2 = \frac{n_1^2 n_2^2}{n_1^2 + n_2^2} \quad (2-20)$$

這邊，我們進一步來看，當我們使用上述的填充因子，固定使用同一結構，在不同的入射角和不同的波長下會有甚麼結果。這邊一樣使用圖 2.3 的數據 ($d = 0.7\mu\text{m}$)，差別只是原本的填充因子換成以(2-19)式計算後的結果。

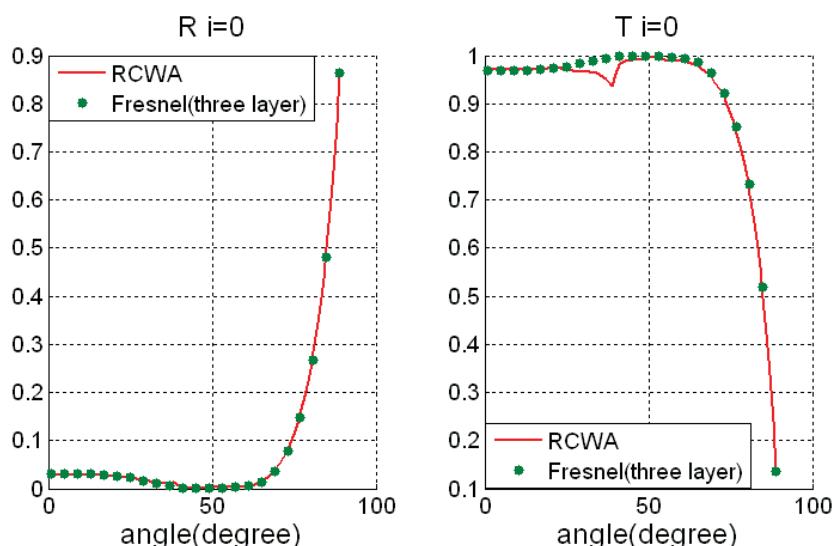


圖 2.9 不同入射角下同一波長 TM 極化的零階效率以及等效折射率近似
首先，因為入射角改變，原先利特羅裝置的條件被破壞，(2-10)式無法再使

³⁸ TM 極化有相同的 n_{eff} 時，表示(2-7b)式的最低點正好要切到-1。[38]之中的推導方式是讓 $(n_2^4 \beta^2 + n_1^4 \gamma^2) / (2n_1^2 n_2^2 \beta \gamma)$ 一項等於 1 (得(2-20)式)，之後由和角公式得 $\beta h_1 + \gamma h_2 = n\pi$ ，取 $n=1$ 後得(2-19)式，關於 n 為何要取 1 可參看附錄二之八。

用。不過，TM 極化的一階繞射效率在其他角度似乎不受影響(>90%)。筆者進一步比較後，發現若我們將光柵層換成一等效介質，然後再套用三層介質的夫瑞奈公式(Fresnel's equation)計算穿透量和反射量。結果如圖 2.9，和 RCWA 模擬的結果相差不大。有趣的是，光柵層使用的折射率正是高階的等效折射率近似[44]³⁹。

下圖是不同波長下一階繞射光的繞射效率(相同入射角)。可以看出，上述單一介質的等效無法在某個波長都成立。

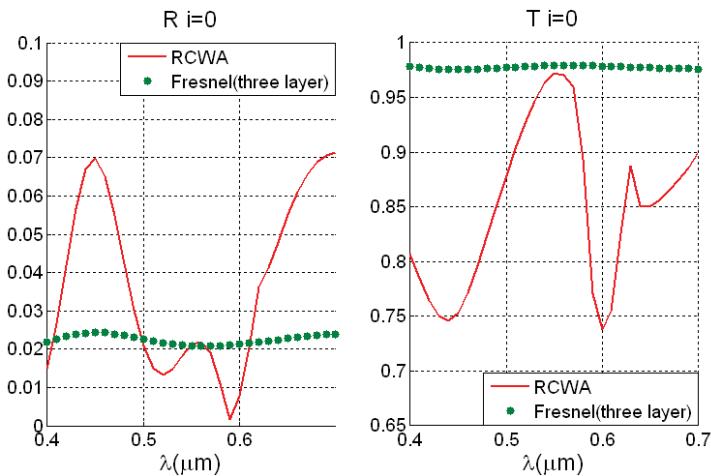


圖 2.10 不同波長下同入射角 TM 極化的零階效率以及等效折射率近似

讀到這，讀者也許想問，TE 極化能否有類似的效果？由(2-7a)式，我們可以發現 TE 極化並無法像註解 38 那樣得到兩個相同的 n_{eff} ⁴⁰。

那麼，有沒有機會讓 TE 在第一階繞射光也有類似的特性？我們可以反過來思考，如果 TE 在第一階繞射光也能用一等效介質近似，那如同圖 2.5，折射光和入射光在法線的同一邊，此即所謂的負折射(negative refraction)現象。但在自然界中，還沒有發現負折射率物質，一般負折射現象多經由超穎材料(metamaterial)達成，像是經由人為特殊排列的晶格(像是光子晶體[46])。此外，[44]提供的高階等效折射率，也無法算出負值。

³⁹ 可參看附錄二之四，差別應只是 \cos 和 \sin 在近似時取更多項。

⁴⁰ (2-7a)式中，因為 $\beta \neq \gamma$ ，所以 $(\beta^2 + \gamma^2)/(2\beta\gamma)$ 不可能等於 1，沒辦法像註解 38 那樣推導。更進一步的討論可參看附錄二之七。

二、設計的方向與參數

由以上的討論，若我們讓 TM 極化有相同的 n_{eff} ，TM 極化的一階繞射效率在大角度範圍內變動不大。因此在設計時，筆者會先讓 TM 極化有相同的 n_{eff} ，接下來就可以只考慮 TE 極化的部分。由圖 2.6，茲將參數整理如下。

d	Λ	n_t	n_i	n_1	n_2	f
光柵深度	光柵週期	穿透介質	入射介質	光柵介質	填充因子	

表 2.1 設計參數

首先，讓我們先考慮光柵介質和週期。在光柵介質中，筆者會設定 $n_2 = 1$ (即空氣)。這一方面可降低製程難度，另一方面也是讓光柵的兩個介質有大一點的折射率差，加大材料雙折射(form-birefringence)的效應。光柵週期會影響繞射光的階數，若是週期太大，可能會有好幾階的繞射光出現。若穿透的繞射光在波段內的每個波長，都只有一階和零階時，光柵週期的選擇要滿足(2-9a)式。若要找到大於 0 的填充因子，要滿足(2-9b)式⁴¹。

$$|\lambda_c - 2\lambda| < 2n_t\Lambda < \min \{|\lambda_c - 4\lambda|, |\lambda_c + 2\lambda|\} \quad (2-21a)$$

$$\frac{\lambda_c}{2} \sqrt{\frac{n_2^2 + n_1^2}{n_1^4}} < \Lambda < \frac{\lambda_c}{2} \sqrt{\frac{n_2^2 + n_1^2}{n_2^4}} \quad (2-21b)$$

在實際設計時，我們不一定要讓每個波長都只有零階和一階穿透繞射光，是以光柵的選擇可以再大一點。但為了在 TM 極化有相同的 n_{eff} 時，求出大於零的填充因子，(2-9b)式一定要成立⁴²。

一旦光柵週期和光柵介質都決定了，我們就能由(2-19)和(2-20)兩式求得適當的填充因子。不過，由於製程的緣故，不是任意的填充因子都是可行的。這是因

⁴¹ 參看附錄二之八， λ_c 是波段的中心波長。

⁴² 若考慮製程的因素，(2-9b)式要做些微修正，可參看附錄二之八。

為，當我們使用蝕刻(etching)技術時，是藉由光阻(photoresist)的圖樣(pattern)定義要蝕刻的區域，而光阻圖樣是由光微影技術(photolithography)控制，所以光學的解析度(resolution)⁴³限制了能定義的區間，亦即 h_1 和 h_2 是受到限制的。下圖是不同波長光源和不同透鏡組下，微影技術的解析度。雖然，利用短波長光源(F_2 和EUV)能進一步達到 23 奈米，但是短波長光源不容易使用[47]。因此，最後筆者將此最小值設定在 40nm(圖中橫線)，約是技術純熟的 ArF 光源能達到的極限⁴⁴。

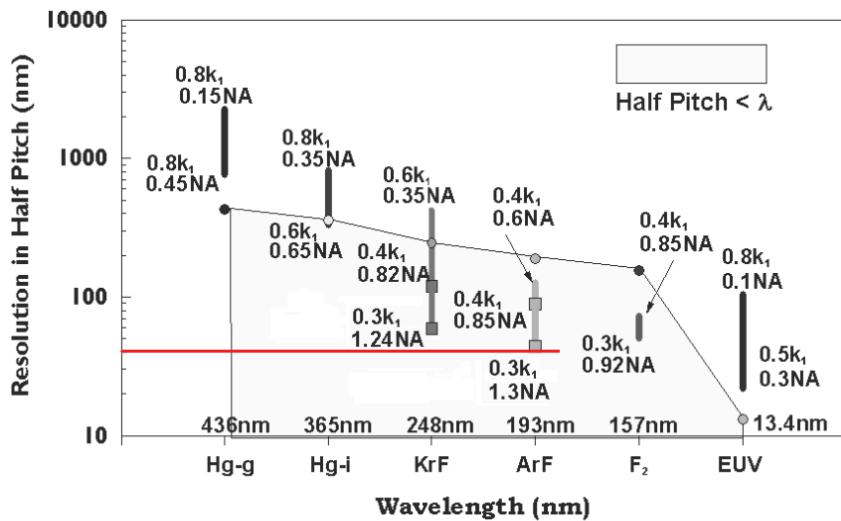


圖 2.11 浸潤式光微影技術的發展[47]

一旦決定了填充因子，藉由(2-7a)式和圖 2.2 的圖解法，我們可以把 TE 極化的 n_{eff} 求出來，接著由(2-10)式，把適合的光柵深度找出來。

$$\frac{\pi}{\lambda_c} (n_{eff1} - n_{eff2})d = m \frac{\pi}{2} \quad m \text{ is odd} \quad (2-22)$$

最後，需要調整的參數包括光柵週期 Λ 、穿透介質 n_t 、入射介質 n_i 、光柵介質 n_1 以及光柵深度 d 。

⁴³ 和光源的波長以及透鏡組的數值孔徑(numerical aperture)等參數有關(解析度 $W \propto \lambda/N.A.$)[47]。

⁴⁴ 浸潤式微影技術(immersion lithography)是在鏡頭和光阻間加上液體(例如水)，因為在水中能有較小的光波長，因此能將解析度再往下修正[47]。



三、RGB 三色的頻段

我們在第一章曾經提過，若將可見光的波段分為 RGB 三個波段，能夠降低極化分光器的設計難度，因此我們必須考慮 LED 的發光光譜。

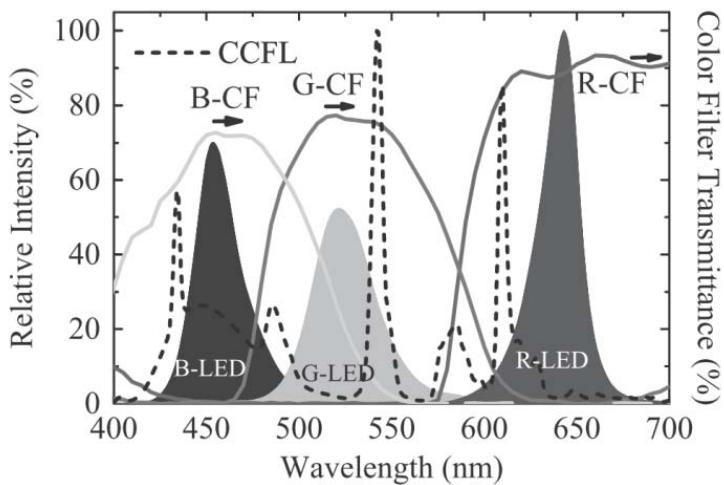


圖 2.12 RGB LED 頻譜([26])

上圖是文獻[26]中 LED 的光譜，我們的目標就是在這三個波段各設計一個極化分光器。由上圖，筆者將各個波段設定如下表。

	波長範圍	峰值
R	0.58~0.7 μm	0.64 μm
G	0.48~0.6 μm	0.53 μm
B	0.42~0.53 μm	0.46 μm

表 2.2 由圖 2.12 決定 RGB 頻段

四、一階繞射角和波長的關係

在開始設計之前，有一點是要注意的。由繞射公式：

$$n_t \sin \theta_m = n_i \sin \theta_i - m \frac{\lambda}{\Lambda} \quad (2-23)$$

不難發現，對同一入射角的光(Littrow mounting 下 $n_i \sin \theta_i = \lambda_c/2\Lambda$)，一階的繞射角 θ_m 會隨波長不同而改變。回顧[23]的數據。其波長的範圍是從(1.48~1.62μm)， $n_i = 1$ 、 $n_t = 1.45$ ，光柵週期1.014μm。最後算出來，1.62μm對應的繞射角是35.08°，1.48μm則是28.65°，大約有七度左右。

總體來說，散射角可由下面的式子來判斷。

$$\delta = \Delta(\sin \theta) = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{n_t \Lambda} \quad (2-24)$$

$$n_i \sin \theta_i = \lambda_c/2\Lambda$$

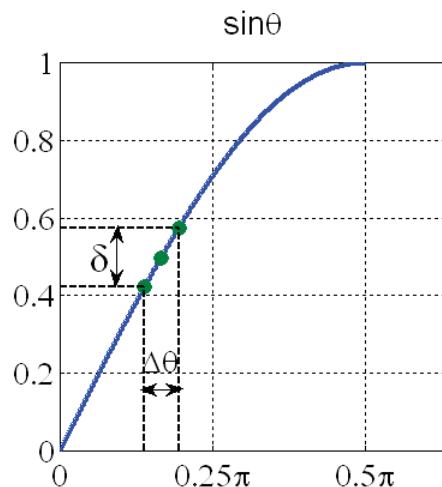


圖 2.13 使用圖解法找繞射角差($\Delta\theta$)

為了大略估計 $\Delta\theta$ ，我們可以用中心波長的斜率來計算，因此 $\Delta\theta \approx \delta/\text{slope}$ 。但不幸的是， \sin 函數在0~1/2π的斜率都小於1，這表示 $\Delta\theta$ 還會經過某種程度的放大。因此，若我們想要縮小 $\Delta\theta$ ，除了降低 δ 外，也希望光的入射角越小越好。這邊讓我們來檢視一下，降低 $\Delta\theta$ 的一些嘗試。

首先入射角為 $n_i \sin \theta_i = \lambda_c/2\Lambda$ ，我們能改變的只有入射介質的折射率 n_i 和光柵的週期 Λ 。但由(2-21)式可以知道光柵週期是有上限的，入射介質的折射率 n_i 也因材料的限制，不太可能取到很大的值。

那降低 δ 呢？我們能改變的是 $n_t \Lambda$ ，但同樣由(2-21)式可知道，這個值也是有上限的。雖然實際上可以略大一點，但若大的太多，高階的繞射光會出現，使得

零階和一階繞射光的效率降低。

以上述的 B 波段為例，波長範圍從 $0.42\sim0.53\text{ }\mu\text{m}$ ， $\lambda_c = 0.46\mu\text{m}$ ， $n_t = 1.45$ ， $n_1 = 1.45$ ， $n_2 = 1$ 。則由(2-21)式，週期最大只能到 $0.4\mu\text{m}$ 左右。則 $n_i \sin \theta_i = 0.575$ ，若入射介質的折射率 $n_i = 1$ ，則斜率大約為 0.81， $n_i = 1.45$ 的話，斜率能到 0.91。最後換算出來的 $\Delta\theta$ 大概為 13.41 和 11.94 度。B 波段和[23]有相近頻寬，但繞射角的差異卻快兩倍，這主要是因為在可見光波段，很難有大光柵週期。

不過，若是為了液晶顯示器背光模組的用途，那一階繞射的散射現象就不是那麼重要了。這是因為，在背光模組之後，為了提高光的均勻度或是混成白光，常會需要擴散片以及導光板之類的元件，而這些元件本來就多是利用散射(scattering)的原理，因此，只需確保背光模組的光能夠進入這些元件就夠了。

五、各個變數的影響

以 B 波段為例。接著圖 2.3 的數據： $n_1 = 1.45$ 、 $n_2 = 1$ 、 $\Lambda = 0.3\mu\text{m}$ 、 $n_t = 1.45$ 、 $n_i = 1$ ，差別只是中心波長換成 $\lambda_c = 0.46\mu\text{m}$ 。

1. 光柵深度 d

由(2-19)和(2-20)式，我們能夠把填充因子算出來，結果為 $f = 0.3178$ 。而(2-7a)式和圖 2.2 的圖解法，能求得 TE 極化的 n_{eff} 分別為 0.6884 和 1.0498。

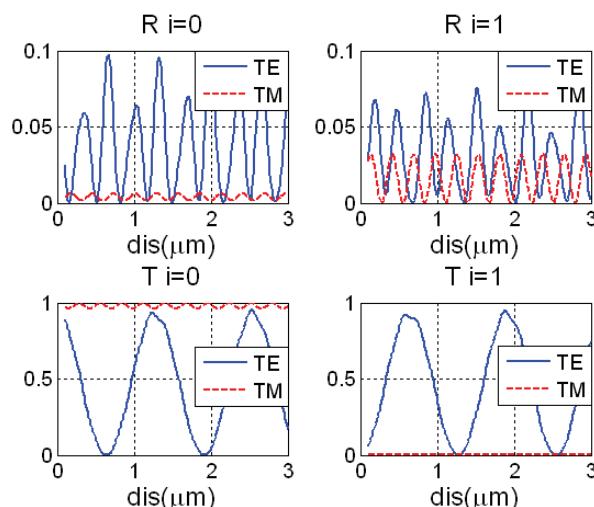


圖 2.14 利特羅裝置下不同光柵深度下各階的繞射效率

上圖是中心波長 λ_c 在不同光柵深度下，各階的繞射效率。因為 TM 極化有相同的 n_{eff} ，TM 極化在各階的繞射效率正如預期，並不受光柵深度 d 影響。剩下要做的工作就是挑選一個適當的光柵深度。這邊，筆者先讓深度 $d = 1.9\mu m$ (在 (2-22) 式中 $m=3$ 的情況)。

下圖是最後的模擬結果。為了方便起見，筆者把整個波段(橫軸)以及各個入射角(縱軸)的繞射效率(反射為 R、穿透為 T、 i 表示繞射階數)一併繪出。

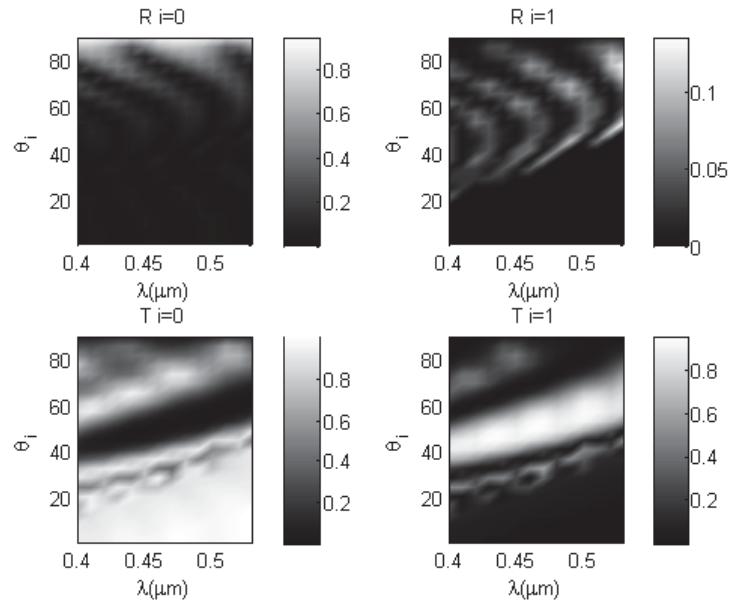


圖 2.15 TE 極化的繞射效率 1

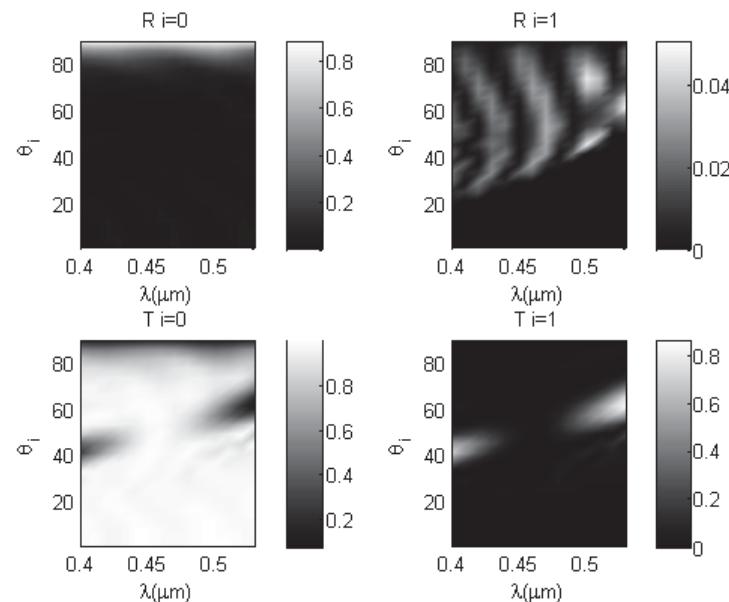


圖 2.16 TM 極化的繞射效率 1

值得注意的是，TM 極化的一階穿透光($T@i=1$)，出現了兩個極大值。這是因為這兩個波長在這個角度時接近其利特羅裝置的條件($n_i \sin \theta_i = \lambda/2\Lambda$)，把這個光柵深度代入(2-10)式恰能有相對較大的值出現。統整如下表。

極值(μm)	利特羅裝置角度	TM n_{eff}		(2-10)式	RCWA
$\lambda = 0.4@ \theta_i = 41^\circ$	41.81°	0.8769	0.9454	0.728	0.7006
$\lambda = 0.53@ \theta_i = 61^\circ$	62.05°	0.6302	0.7455	0.9277	0.862

表 2.3 TM 極化光在一階穿透的極值

由於這兩個極值相當接近 TE 極化在一階繞射光的高穿透區域，這會降低這些波長的消光比。從(2-10)式可以看出，若要降低一階繞射光的穿透率，一個直接的方式便是使用小一點的光柵深度。下面是以小一點的光柵深度模擬後的結果($d = 0.6364\mu\text{m}$ 其他參數不變)。

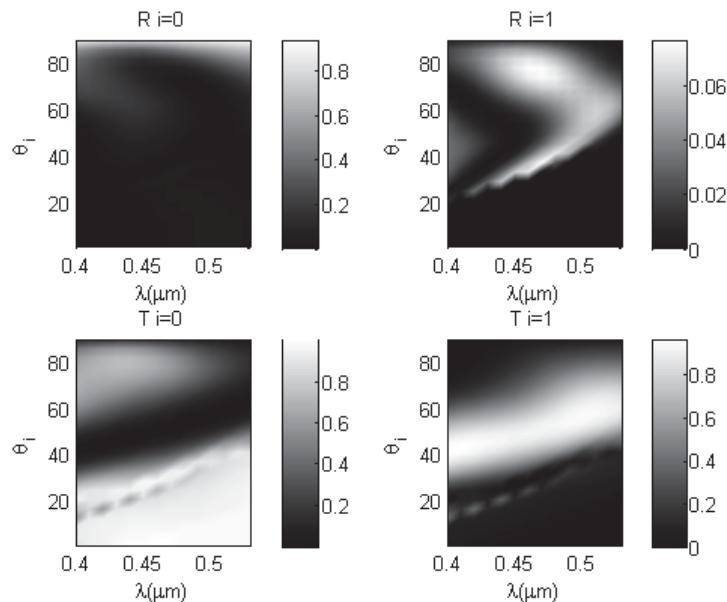


圖 2.17 TE 極化的繞射效率 2

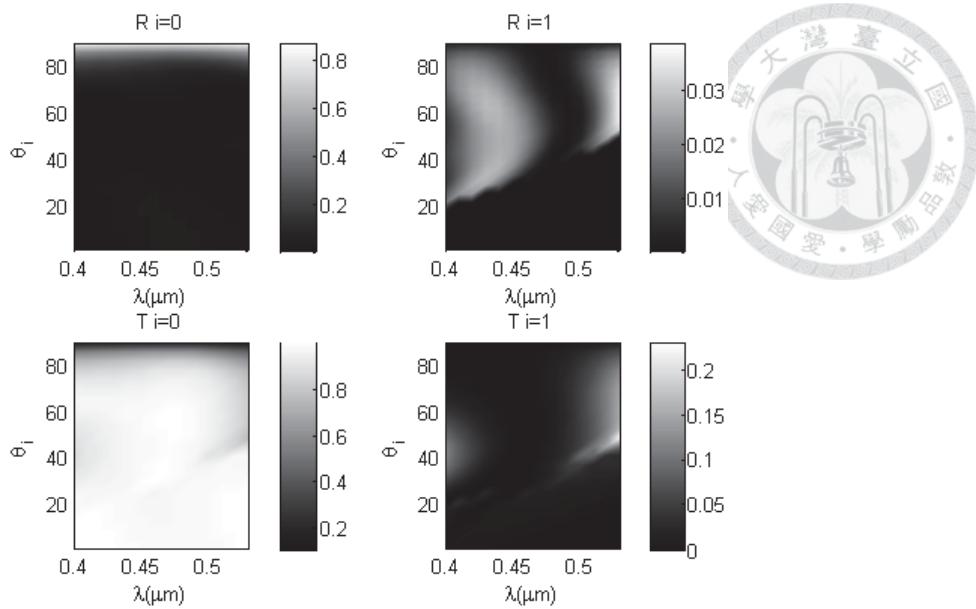


圖 2.18 TM 極化的繞射效率 2

2. 光柵介質 n_1

若我們加大光柵介質 n_1 ，可以預見的是，物質的雙折射效應可以更明顯。而由(2-9b)式，我們也能再加大光柵週期的上限。唯一的問題是，我們是否找的到高折射率的材料？

高折射率物質可應用在鍍膜技術(coating)，像是抗反射膜(anti-reflection)。製程上能藉由化學氣相沉積(chemical vapor deposition, CVD)或是物理氣相沉積(physical vapor deposition, PVD)來達成。

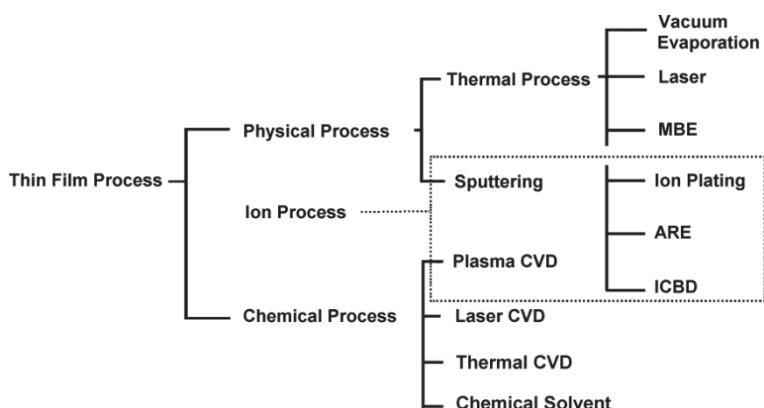


圖 2.19 薄膜製程[48]

一般常見的中高折射率材料包括 Al_2O_3 、 Ta_2O_5 、 ZrO_2 、 TiO_2 、 HfO_2 等，可以使用濺鍍法(sputtering)的方式在鍍在基板(substrate)上[49]。其折射率除了 Al_2O_3 約為 1.6 外大概都在 2 附近。不過，因為我們將使用這些材料來做光柵，因此也要考慮蝕刻的容易度。不幸的是，雖然有文獻嘗試[50]，但因為材料特性， ZrO_2 和 HfO_2 本身並不容易蝕刻[50]。因此，筆者先以 Ta_2O_5 為例(蝕刻製程可參看[51])，由[52]，將筆者擬合出的柯西函數⁴⁵代入 RCWA 的運算中。

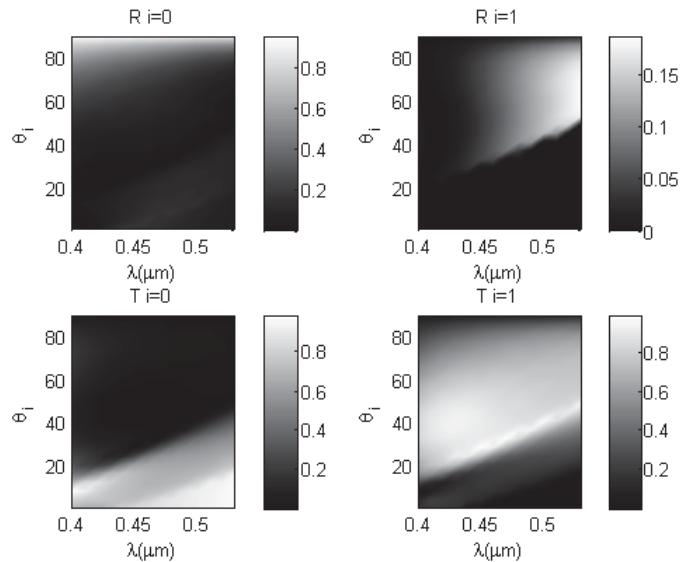


圖 2.20 TE 極化的繞射效率 3

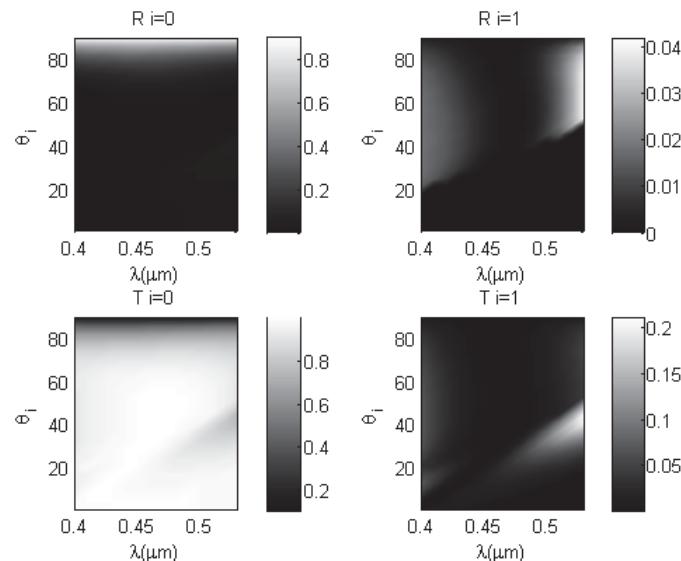


圖 2.21 TM 極化的繞射效率 3

⁴⁵ 文獻[49]的柯西函數(Cauchy's equation of refractive index)似有誤，因此筆者以文獻[51]的 fig.4 取若干值後再以 matlab 曲線擬合。最後結果為： $n(\lambda) = 2.0868 + 0.0141/\lambda^2 + 0.002/\lambda^4$ (λ in μm)。

首先，因為光柵介質 n_1 改變，填充因子和光柵深度都要再修正，但光柵週期和入射穿透的介質都不變。把中心波長和折射率⁴⁶代入(2-19)和(2-20)式，算出的填充因子為 $f = 0.2222$ ，以此得 $h_1 = 66.67\text{nm}$ 、 $h_2 = 233.33\text{nm}$ 。對應的光柵深度為 $0.2629\text{ }\mu\text{m}$ 。

下兩張圖是筆者進一步以圖 2.19 和 2.20 繪製一階(TE/TM)和零階(TM/TE)穿透光的消光比。由圖中可以看出，若要求兩者都要 10 以上，能夠讓整個波段($0.42\sim0.53\mu\text{m}$)吻合的入射角度只有 50 度附近而已。觀察圖 2.19 和 2.20 可以發現，這是因為，TE 極化在一階繞射的亮帶從 20 度到 50 度是傾斜的。

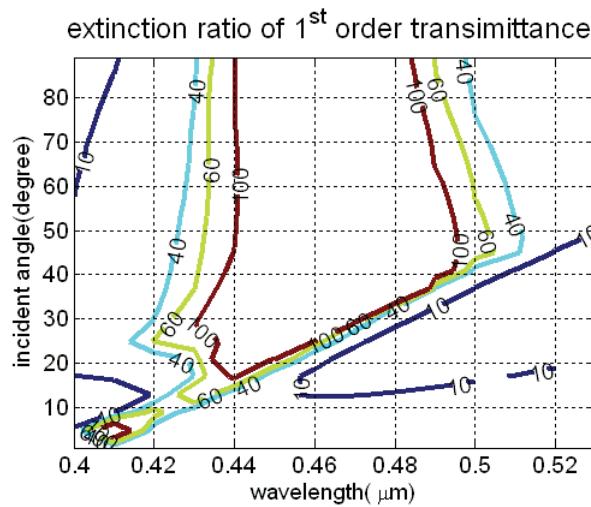


圖 2.22 圖 2.19&圖 2.20 的一階消光比

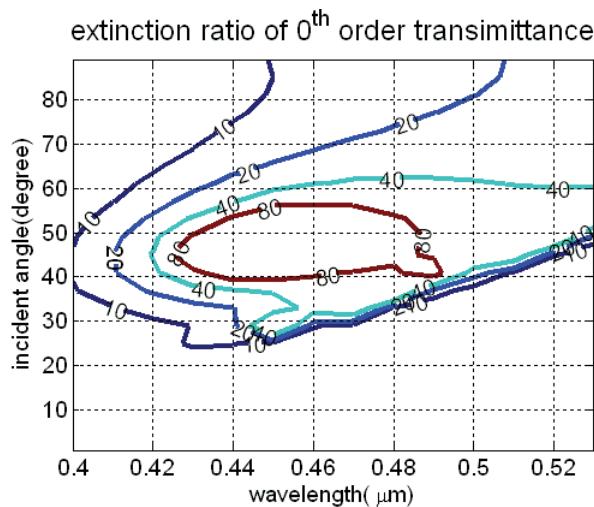


圖 2.23 圖 2.19&圖 2.20 的零階消光比

⁴⁶ 在[49]中，除了量測折射率， Ta_2O_5 的虛部折射率也有紀錄。但數量級都是 10^{-4} ，若 $\lambda = 0.4\mu\text{m}$ ，行進 $1\mu\text{m}$ ，強度衰減約為 1%，因此筆者接下來的模擬都忽略這個衰減。

我們進一步觀察這個現象。由利特羅裝置的式子($n_i \sin \theta_i = \lambda/2\Lambda$)可以發現隨著波長的上升，滿足利特羅裝置的角度(以下稱利特羅角度)就跟著往上升，因此正如圖 2.17 和 2.20，TE 在一階繞射的亮帶並不是水平的。對此，一個解決方式是加大光柵週期。

3. 光柵週期 Λ

接著上述，筆者把光柵週期調到 $0.4\mu\text{m}$ 。而因為光柵週期改變，填充因子和光柵深度都要修正，最後結果為， $f = 0.1014$ ，對應的光柵深度為 $0.4452\mu\text{m}$ 。

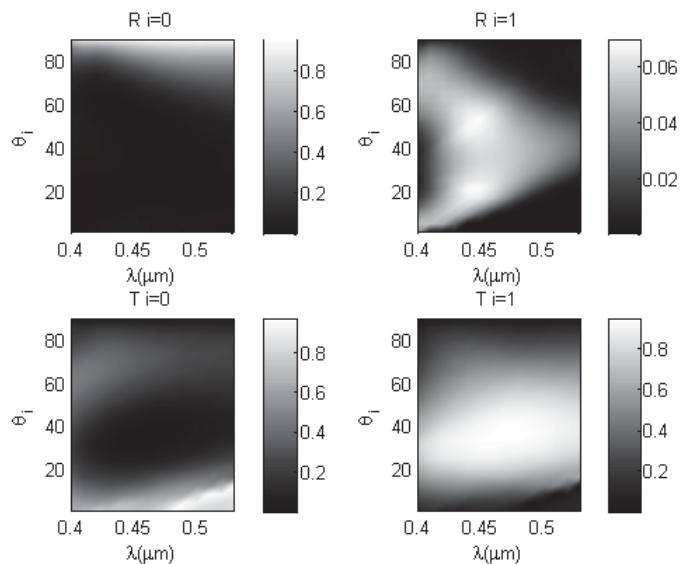


圖 2.24 TE 極化的繞射效率 4

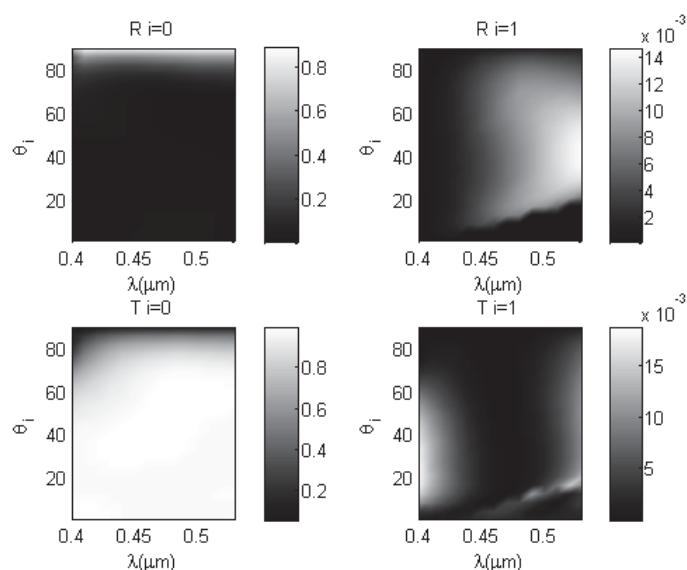


圖 2.25 TM 極化的繞射效率 4

可以看出調高週期後，跟圖 2.20 比起來，TE 極化的一階繞射效率在圖 2.24 降低了傾斜程度。這是因為光柵週期上升，能降低每個波長的利特羅角度，就相當於把整個亮帶略往下移，同時，週期上升也能拉近波段端點的利特羅角度差，降低亮帶的斜率。這可以用類似於(2-24)式的方式來解釋。

$$\delta = \Delta(n_i \sin \theta) = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{2\Lambda} \propto \frac{1}{\Lambda} \Rightarrow \Delta\theta \propto \delta \propto \frac{1}{\Lambda} \quad (2-25)$$

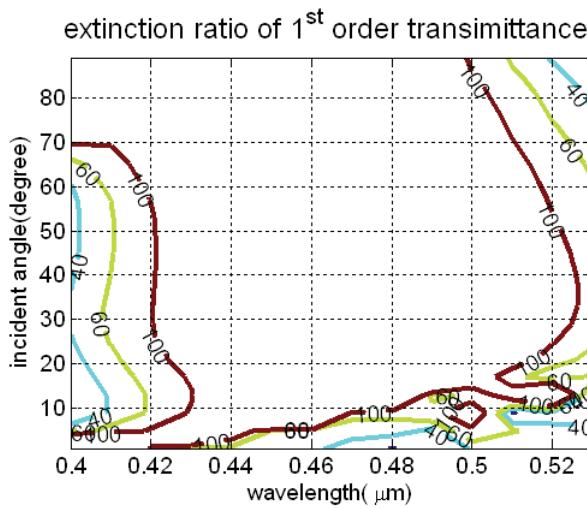


圖 2.26 圖 2.24&圖 2.25 的一階消光比

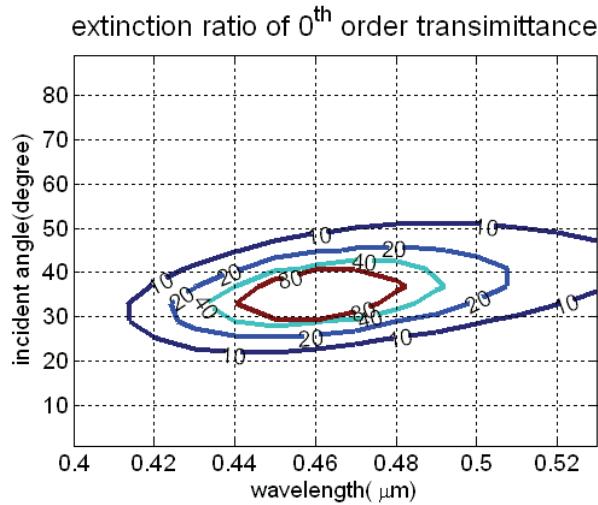


圖 2.27 圖 2.24&圖 2.25 的零階消光比

雖然一階的消光比在 B 波段內有不錯的結果，但是零階的消光比卻只從 10 起跳，而且看起來就像一個小山丘。比較圖 2.23 和 2.27 更可以發現，週期較長



的時候比較像山丘⁴⁷。

如此看來，一味的加大週期不全是有利的。雖然可以讓一階繞射光有較好的消光比，卻會使得零階繞射光的消光比變差。因此我們需要做的，就是選取適當的週期，讓兩個消光比都能滿足我們的要求。

最後筆者選擇的週期是 $0.35\mu\text{m}$ ，填充因子變為 $f = 0.1532$ ，光柵深度 $d = 0.3277\mu\text{m}$ 。而結果如下。

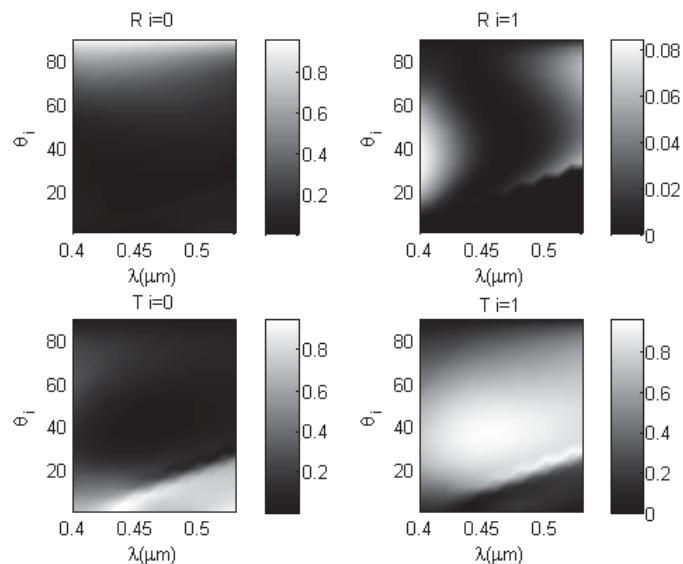


圖 2.28 TE 極化的繞射效率 5

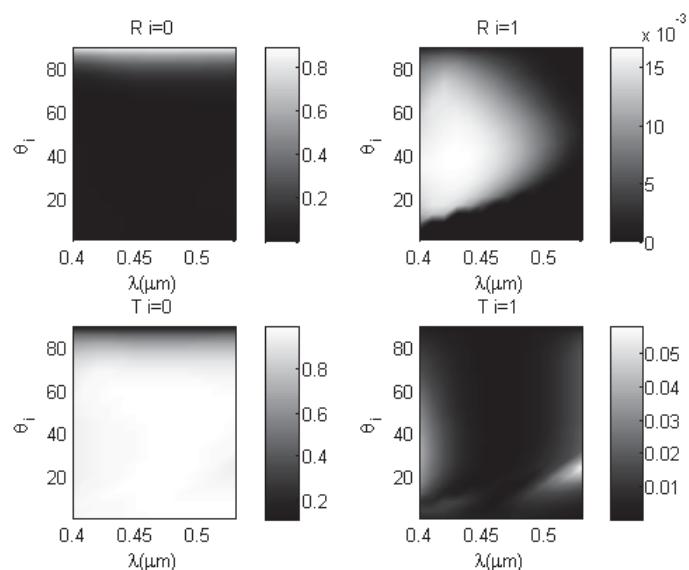


圖 2.29 TM 極化的繞射效率 5

⁴⁷ 決定零階消光比的因素主要是 TE 極化的零階穿透率。進一步的討論可參看附錄二之九。

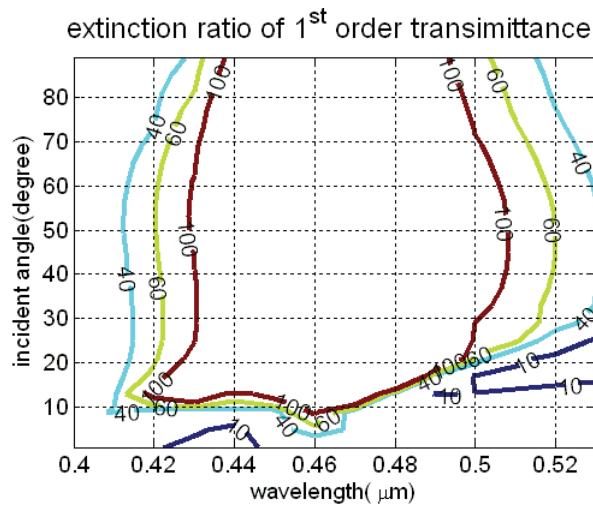


圖 2.30 圖 2.28&圖 2.29 的一階消光比

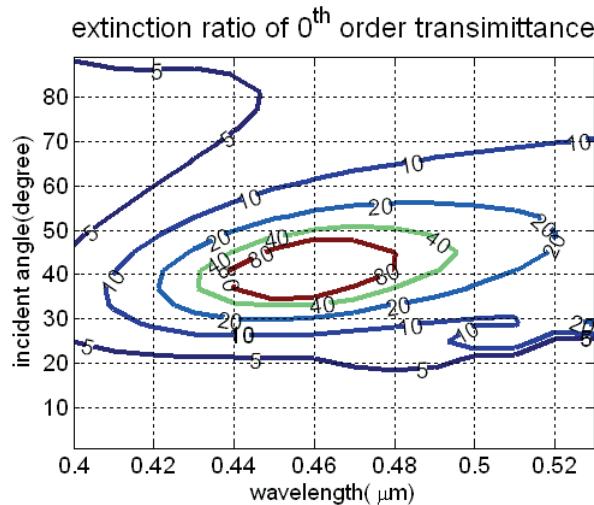


圖 2.31 圖 2.28&圖 2.29 的零階消光比

由這兩張圖能看出，在 $0.42\sim0.53\mu\text{m}$ 這個波段中，一階的消光比在入射角為 $30^\circ\sim50^\circ$ 內大約都有 40 以上，零階的消光比也幾乎都有 10 以上。

4. 穿透介質 n_t 與入射介質 n_i

由繞射公式可看出，這兩項參數會影響繞射的階數。而我們為了加大雙折射的效應，將其中一個光柵介質 n_2 設定為 1。考慮到製程的容易度，筆者傾向讓入射介質 n_i 也一樣是空氣。

至於穿透介質 n_t ，我們可以用等效折射率的理論來類比。把光柵結構分成三

層，光從空氣入射，進入光柵區，最後由基板(substrate)出光。這樣看來，折射率是漸增的，類似抗反射膜的原理。因此，一個直覺是穿透介質 n_t 會影響反射率。下圖是 n_t 分別為1.3、1.7、 Ta_2O_5 ，TE和TM極化零階和一階的反射率。

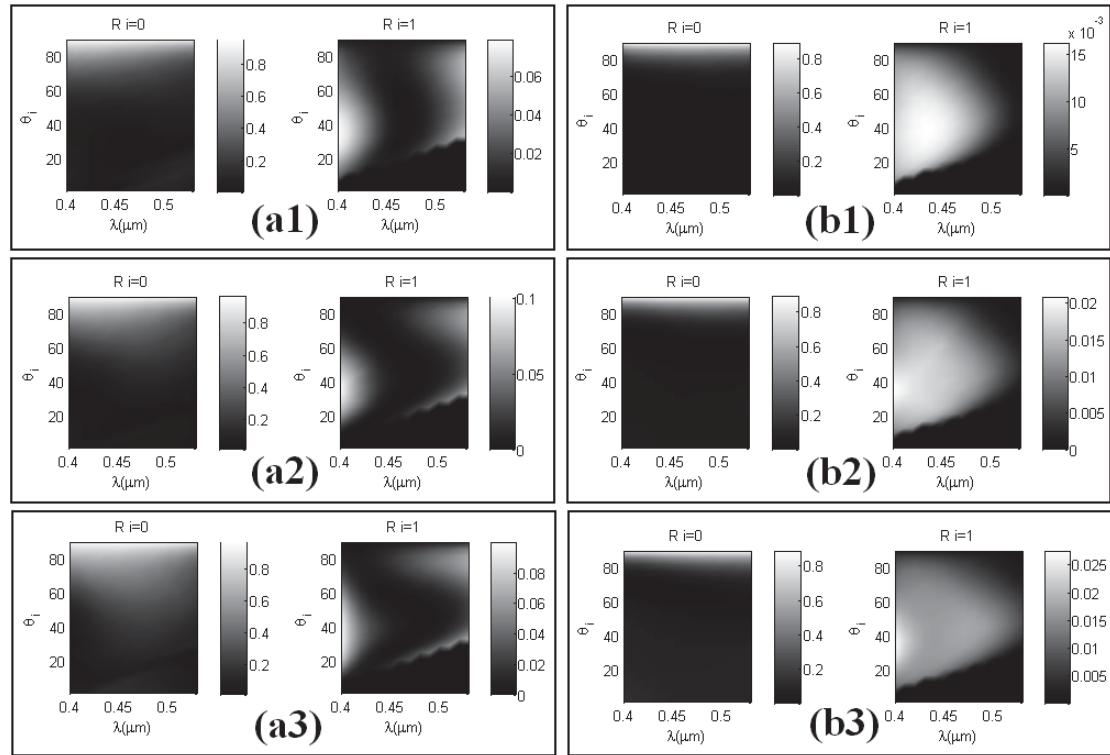


圖 2.32 不同 n_t 下 TE 和 TM 極化的反射率

(a1) TE 1.3 (a2) TE 1.7 (a3) TE Ta_2O_5
 (b1) TM 1.3 (b2) TM 1.7 (b3) TM Ta_2O_5

六、RGB 極化分光器

我們在前一小段已經設計出 B 波段的極化分光器，接下來就是設計 R 波段和 G 波段的極化分光器。而在設計時，會希望 RGB 這三個波段的極化分光器都有相近的角度範圍。如此我們就可以用同一個光學元件來修正光源的發散角。而設計的流程和參數的調整在前幾小段已經大略描述了，因此，筆者就直接提供最後的結果。下圖是 G 波段(0.48~0.6μm)的模擬結果，使用的架構和 B 波段相近，差別只是光柵週期改為0.385μm，填充因子 $f = 0.1741$ ，光柵深度 $d = 0.3613 \mu m$ 。

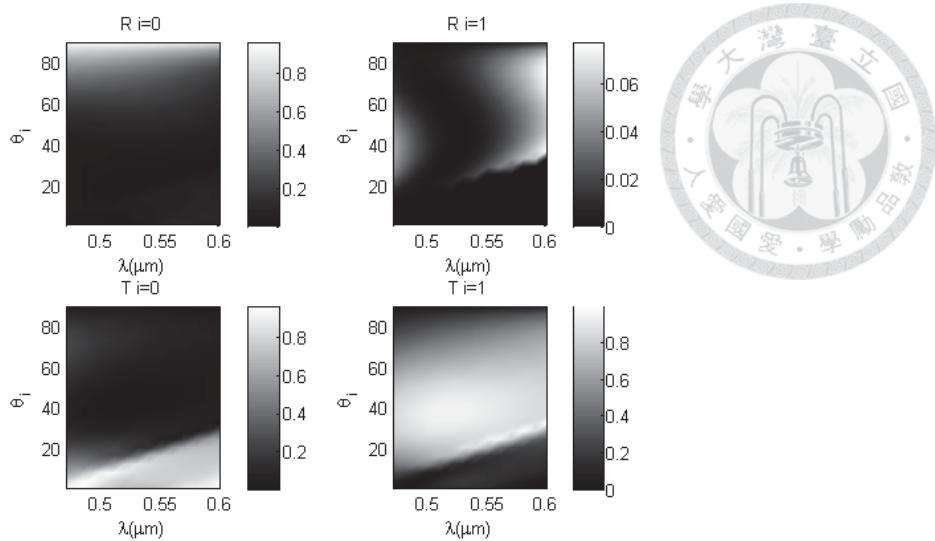


圖 2.33 TE 極化在 G 波段的繞射效率

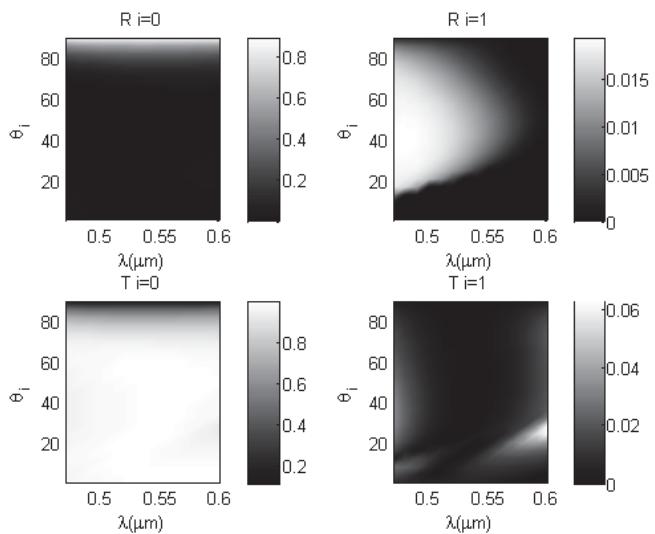


圖 2.34 TM 極化在 G 波段的繞射效率

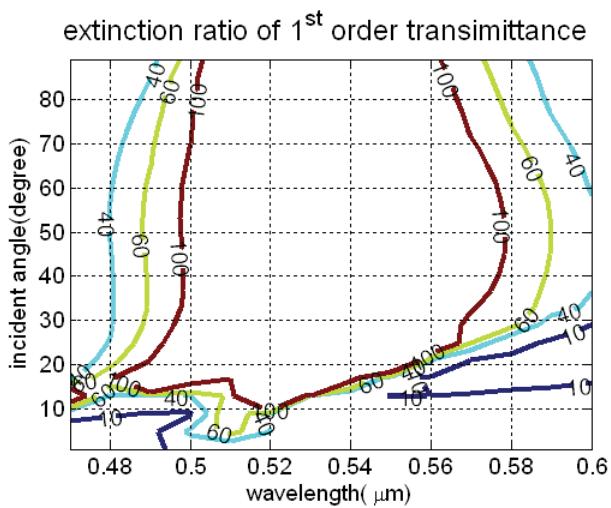


圖 2.35 圖 2.33&圖 2.34 的一階消光比

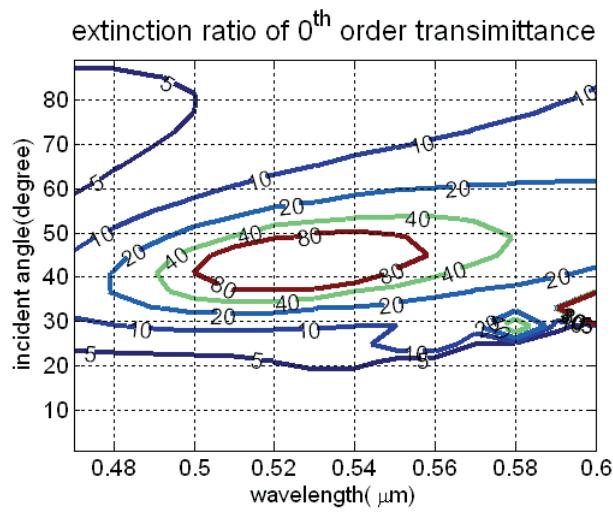


圖 2.36 圖 2.33&圖 2.34 的零階消光比

在 G 波段中，一階的消光比在入射角為 $30^\circ \sim 50^\circ$ 內大約都有 40 以上，零階的消光比也都有 10 以上。下面是 R 波段($0.58 \sim 0.7 \mu\text{m}$)的模擬結果

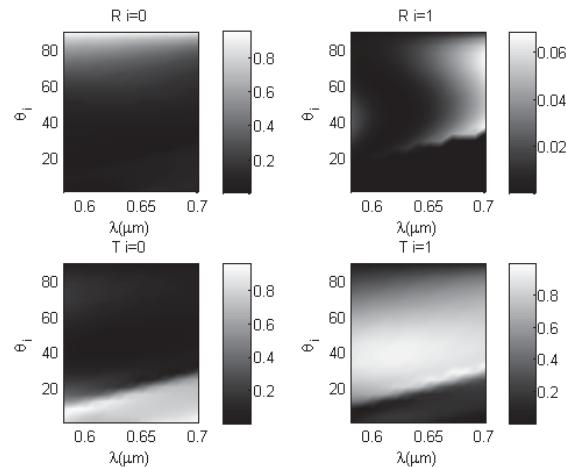


圖 2.37 TE 極化在 R 波段的繞射效率

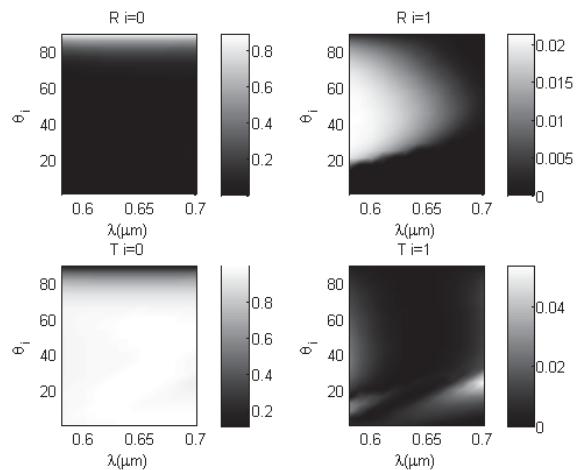


圖 2.38 TM 極化在 R 波段的繞射效率

光柵週期在這裡是 $0.45\mu\text{m}$ ，填充因子 $f = 0.1902$ ，光柵深度 $d = 0.4263\mu\text{m}$ 。

下面兩張圖是 R 波段的消光比。

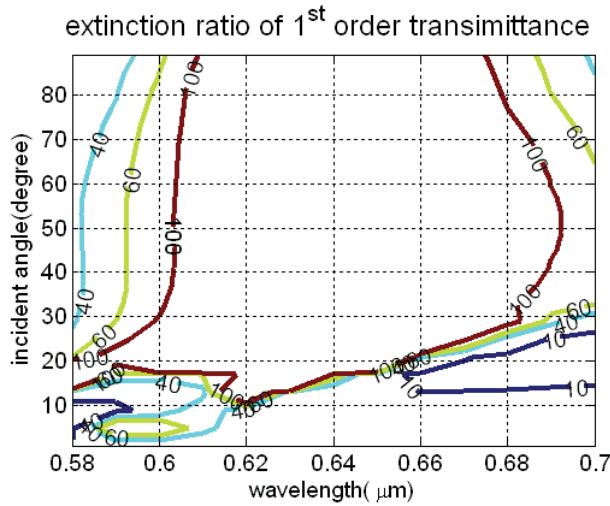


圖 2.39 圖 2.37&圖 2.38 的一階消光比

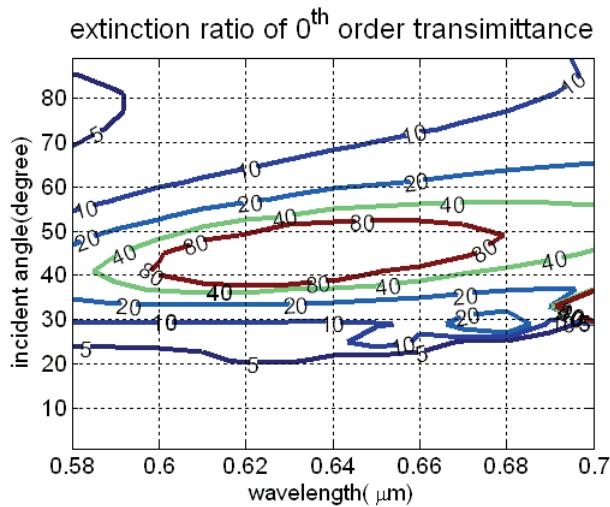


圖 2.40 圖 2.37&圖 2.38 的零階消光比

在 R 波段中，一階的消光比在入射角為 $30^\circ \sim 50^\circ$ 內大約都有 40 以上，零階的消光比也都有 10 以上。

值得注意的一點是，上述的討論都是入射平面(incident plane)和光柵平面平行的情況。在實際應用上，入射平面可能不會和光柵平面平行，因此接下來就讓我們來看一下，立體角度下的模擬結果。

七、立體角度

在開始前，先以下圖的方式定義角度和極化[40]。由法線(z軸)和入射波向量(\vec{k})組成的平面稱為入射平面(incident plane)，入射平面和x軸的夾角定為 δ ，波向量和法線的夾角即為入射角 θ_i 。將入射電場分為垂直入射平面的分量 E_s 與平面內的分量 E_p ，TE極化對應 $\varphi = 90^\circ$ ，TM極化則是 $\varphi = 0^\circ$ 。

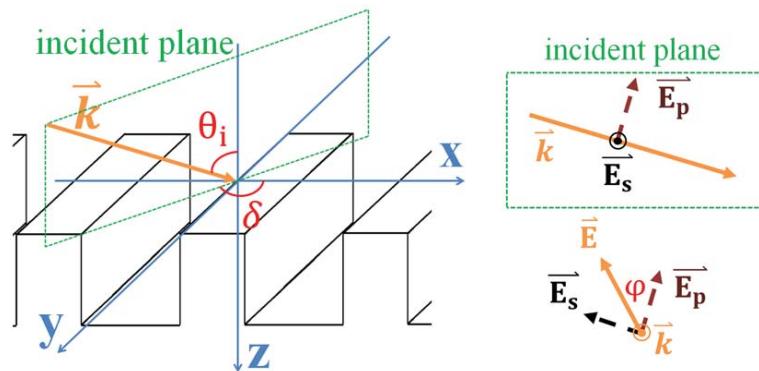


圖 2.41 定義立體角度與極化[40]

由上圖可以看出，先前的模擬都本於 $\delta = 0$ 。這邊我們要觀察 $\delta \neq 0$ 的情況。

先從 B 波段開始。

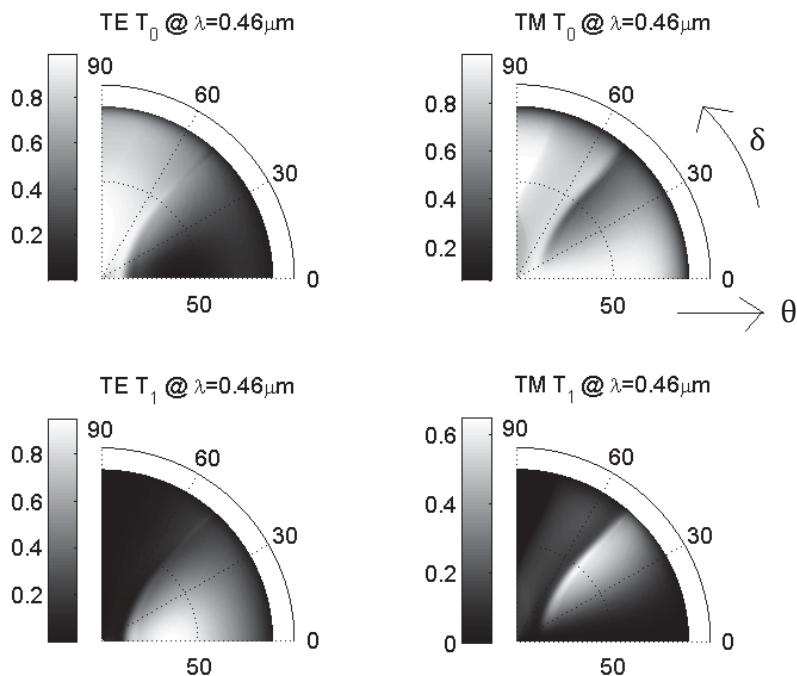


圖 2.42 不同 δ 與不同入射角下 TE 和 TM 極化在零階及一階的穿透率

($\lambda = 0.46\mu\text{m}$)

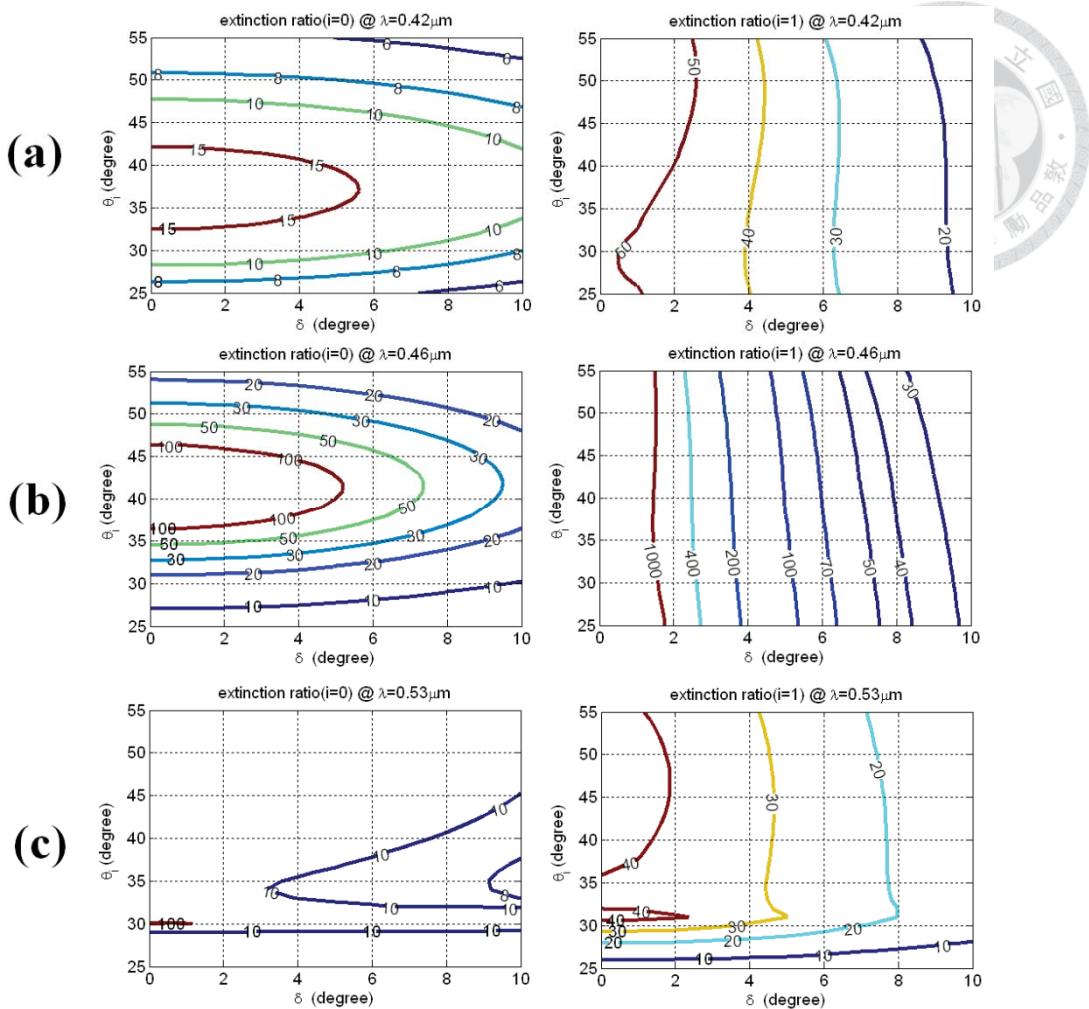


圖 2.43 不同 δ 與不同入射角下 B 波段($0.42\sim0.53\mu\text{m}$)中若干波長的消光比

(a) $\lambda = 0.42\mu\text{m}$ 左：零階消光比(TM/TE) 右：一階消光比(TE/TM)

(b) $\lambda = 0.46\mu\text{m}$ 左：零階消光比(TM/TE) 右：一階消光比(TE/TM)

(c) $\lambda = 0.53\mu\text{m}$ 左：零階消光比(TM/TE) 右：一階消光比(TE/TM)

由圖 2.43 可以看出，隨著 δ 上升，零階消光比大於 10 的入射角度範圍就逐漸下降。若取 $\delta = \pm 5^\circ$ 為 δ 的容許範圍， θ_i 的範圍為 $30^\circ\sim50^\circ$ ，則三個波長的零階消光比都大於 8，一階消光比則大於 20。

下兩張圖是 G 波段和 R 波段在幾個波長的消光比。

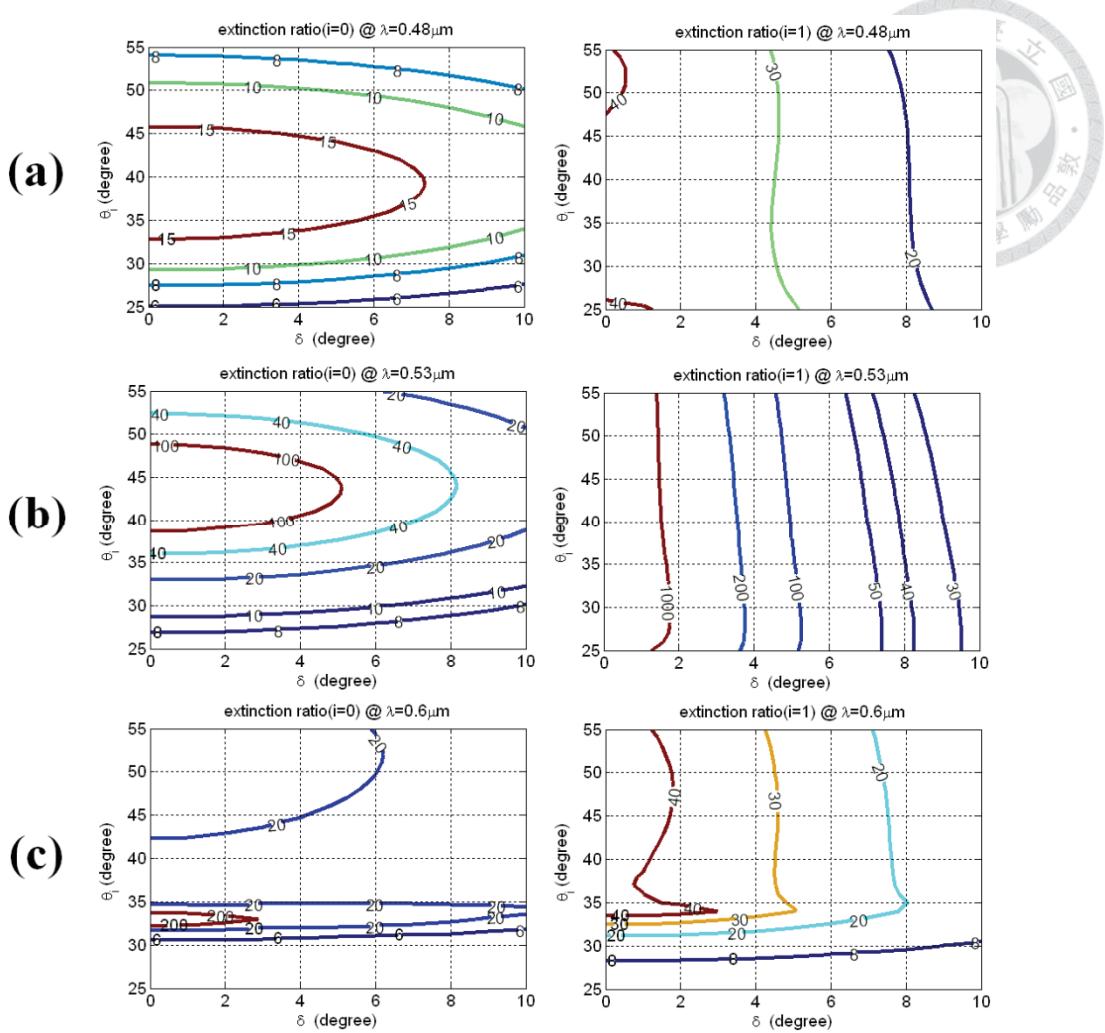


圖 2.44 不同 δ 與不同入射角下 G 波段($0.48\sim0.6\mu\text{m}$)中若干波長的消光比

(a) $\lambda = 0.48\mu\text{m}$ 左：零階消光比(TM/TE) 右：一階消光比(TE/TM)

(b) $\lambda = 0.53\mu\text{m}$ 左：零階消光比(TM/TE) 右：一階消光比(TE/TM)

(c) $\lambda = 0.6\mu\text{m}$ 左：零階消光比(TM/TE) 右：一階消光比(TE/TM)

由圖 2.44，若取 $\delta = \pm 5^\circ$ 為 δ 的容許範圍， θ_i 的範圍為 $30^\circ\sim50^\circ$ ，則三個波長的零階消光比都大於 6，一階消光比則大於 10。

最後一張圖是 R 波段在幾個波長的消光比。

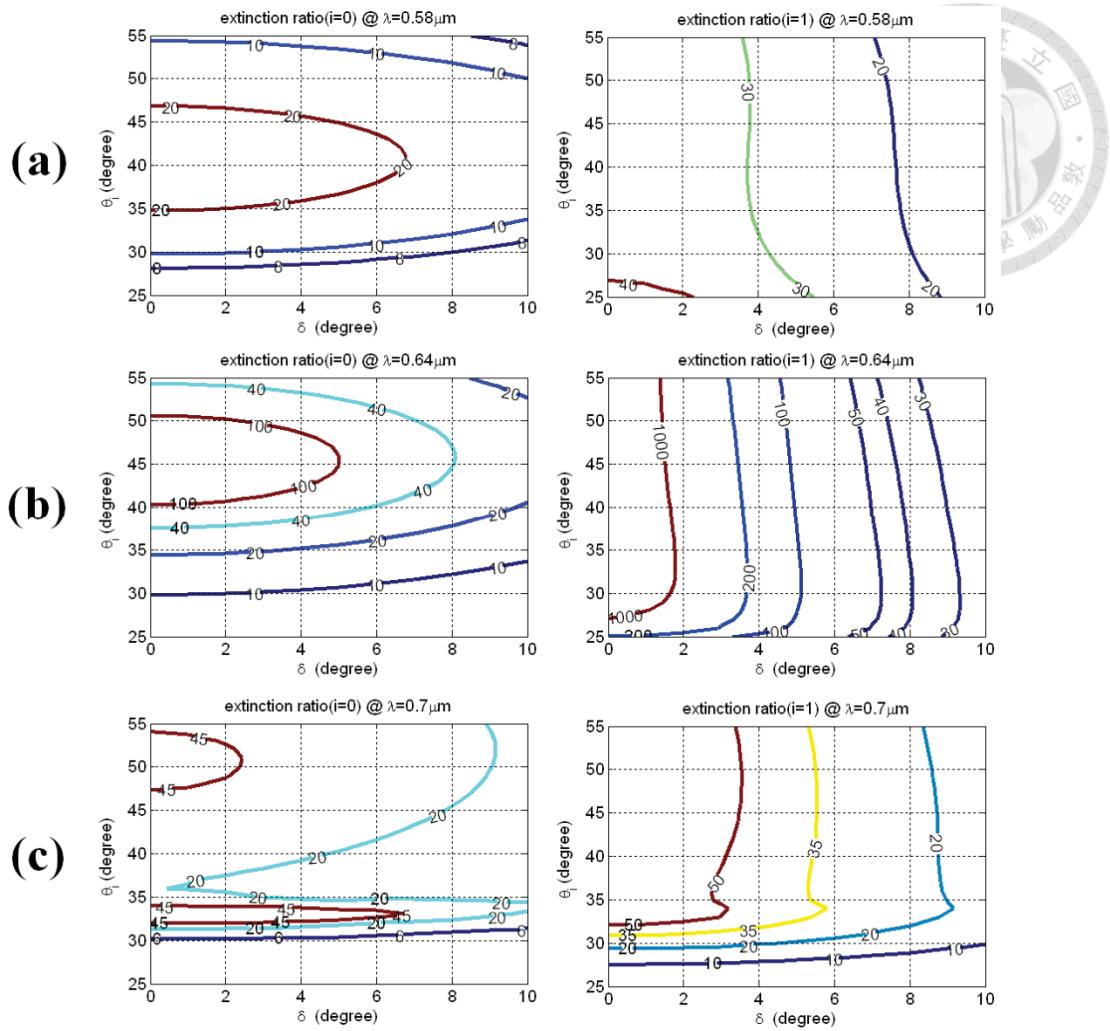


圖 2.45 不同 δ 與不同入射角下 R 波段($0.58\sim0.7\mu\text{m}$)中若干波長的消光比

- (a) $\lambda = 0.58\mu\text{m}$ 左：零階消光比(TM/TE) 右：一階消光比(TE/TM)
- (b) $\lambda = 0.64\mu\text{m}$ 左：零階消光比(TM/TE) 右：一階消光比(TE/TM)
- (c) $\lambda = 0.7\mu\text{m}$ 左：零階消光比(TM/TE) 右：一階消光比(TE/TM)

由圖 2.45，若取 $\delta = \pm 5^\circ$ 為 δ 的容許範圍， θ_i 的範圍為 $30^\circ\sim50^\circ$ ，則三個波長的零階消光比都大於 6，一階消光比則大於 10。

不過，回顧圖 2.12，我們在決定 RGB 三個波段時，選擇的是較大的範圍，意即三波段在各自端點波長的強度相對較小(≈ 0)。實際應用時，若可以縮減波端的頻寬，允許的角度範圍可以在大一些。

最後，以下表統整這一章中，極化分光器的各項設計參數。

波段	範圍(μm)	λ_c (μm)	深度(μm)	週期(μm)	填充因子
R	0.58~0.7	0.64	0.4263	0.45	0.1902
G	0.48~0.6	0.53	0.3613	0.385	0.1741
B	0.42~0.53	0.46	0.3277	0.35	0.1532

表 2.4 RGB 極化分光器的設計參數





在這一章中，筆者會利用類似的光柵結構，但是物理機制卻略有不同，最後可以讓特定極化反射，另一極化穿透。

一開始筆者會先簡述物理機制，之後再以一個例子驗證筆者的想法。

第一節、物理機制

在第二章第一節推導光柵的模態解時，我們曾經提過， n_{eff} 是光沿 z 方向行進的等效折射率。那麼，如果我們能夠讓特定極化有虛數 n_{eff} ，就像全反射中的消逝波(evanescent wave)一樣，就能夠讓該極化全反射。另一方面，只要另一極化仍然是實數 n_{eff} ，該極化就會穿透。

對此，我們可以回顧一下圖 2.2 利用圖解法求 n_{eff} 的過程。如下圖的方式，藉由某些機制，讓圖 2.2 的兩條線平移，最後就可以讓一個極化有虛數 n_{eff} ，另一極化仍然是實數 n_{eff} 。

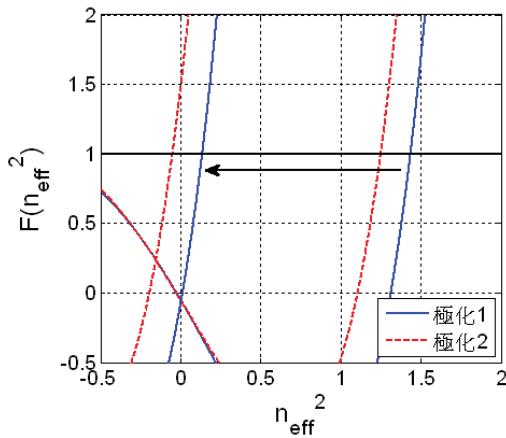


圖 3.1 錯開兩極化的 n_{eff} 讓特定極化全反射

在推導(2-7)式時⁴⁸， β 和 γ 表示的是波向量 k 在 n_1 和 n_2 兩介質中 x 方向的分量，即 $\beta = k_0 \sqrt{n_1^2 - n_{\text{eff}}^2}$, $\gamma = k_0 \sqrt{n_2^2 - n_{\text{eff}}^2}$ 。在那時我們讓 y 分量為 0，這邊我們

⁴⁸ 請參看附錄二之四或是第二章文獻[53]。



多加上 k_y ，看看會有甚麼影響。因為波向量在介面上的投影要連續，在兩介質中的 y 分量也同樣是 k_y ，原式的 β 和 γ 與(2-7)式就必須改寫如下($k_y = k_0 n_i \sin \theta_i \sin \delta$ 、 $k_x = k_0 n_i \sin \theta_i \cos \delta$)⁴⁹：

$$\begin{aligned}\beta' &= k_0 \sqrt{n_1^2 - (n_i \sin \theta_i \sin \delta)^2 - n_{\text{eff}}^2} \\ \gamma' &= k_0 \sqrt{n_2^2 - (n_i \sin \theta_i \sin \delta)^2 - n_{\text{eff}}^2}\end{aligned}\quad (3-1)$$

$$\cos \beta' h_1 \cos \gamma' h_2 - \frac{\beta'^2 + \gamma'^2}{2\beta' \gamma'} \sin \beta' h_1 \sin \gamma' h_2 = \cos(k_x \Lambda) \quad (3-2a)$$

$$\cos \beta' h_1 \cos \gamma' h_2 - \frac{n_2^4 \beta'^2 + n_1^4 \gamma'^2}{2n_1^2 n_2^2 \beta' \gamma'} \sin \beta' h_1 \sin \gamma' h_2 = \cos(k_x \Lambda) \quad (3-2b)$$

由(3-1)和(3-2)式可以看出， k_y 這一項相當於讓圖 3.1 中的兩條線向左平移了 $(n_i \sin \theta_i \sin \delta)^2$ 。如此一來，似乎只要給定 k_y ，由圖解法解(3-2)式的 n_{eff} ，讓兩種極化光有不一樣的 n_{eff} ，且讓平移量 $(n_i \sin \theta_i \sin \delta)^2$ 夾在兩極化的 n_{eff}^2 之中，我們就能得到實數和虛數的 n_{eff} 。不過， k_x 和我們選擇的 k_y 必須滿足 $k_x^2 + k_y^2 \leq k_0^2 n_i^2$ ，亦即 k_y 還需要配合適當的 n_i 才能有全反射的現象。

另一個需要注意的是，(3-2a)式和(3-2b)式分別對應到哪種極化⁵⁰。在附錄二之四中，TE 極化的式子比較像(3-2a)式。此時電場只有 y 分量，即電場平行兩介質間的介面，磁場有 x 和 z 分量；TM 極化則比較像(3-2b)式，磁場只有 y 分量，且平行於兩介質間的介面，電場有 x 和 z 分量。

這邊我們用一個極端的例子，讓圖 2.41 中的 $\delta = 90^\circ$ 。如此一來，TE 極化 ($\varphi = 90^\circ$) 的電場只有 E_x ，磁場則在 y 和 z 方向都有分量，且平行於兩介質間的介面。這樣類比就能得到(3-2b)式為 TE 極化。同理，(3-2a)式為 TM 極化。

因此，當有 k_y 項時，我們就有機會讓 TE 極化反射，TM 極化穿透。

⁴⁹ 可以參看圖 2.41。

⁵⁰ 關於極化的定義參看圖 2.41。

第二節、寬頻極化分光器

在這個小節中，筆者一開始會先簡略討論設計的方向，接著和第二章第三節的過程相仿，觀察幾項參數的影響。



一、設計的方向與參數

由前面的討論，在設計時，筆者會從波段的中心波長($\lambda_c = 0.55\mu\text{m}$)配合週期和填充因子，以圖解法解 n_{eff} ，此舉是為了找出讓 TE 極化全反射所需的 k_y 。而為了簡化問題，筆者會先從 $k_x = 0$ (即 $\delta = 90^\circ$)開始設計。

首先，為了集中反射和透射的光，筆者會限制光柵週期，讓反射光和透射光在特定角度只有零階光存在，這樣的限制還可以解決高階繞射光繞射角會色散的現象。嚴格來說，若整個波段在任意角度都只有零階繞射光，(2-21)式修改為⁵¹：

$$\Lambda < \left(\frac{\lambda}{2n_i}, \frac{\lambda}{n_i + n_t} \right)_{\min} \quad (3-3)$$

(3-3)式的要求相當嚴格，而實際上我們只需保證特定角度內沒有高階繞射光出現即可，是以週期可以略大一點。稍後會進一步討論光柵週期對設計的影響。

光柵介質和第二章相仿，為了加大雙折射的效應，同樣讓 $n_2 = 1$ 。而由第二章的結論，高 n_1 會有較好的效果。這邊筆者選用的是閃鋅礦($\beta - \text{ZnS}$, beta zinc sulfide, Sphalerite)，其謝米爾方程式(Sellmeier equation, 即折射率的色散方程式)為[53](λ 單位為 μm)：

$$n^2 - 1 = \frac{0.33904026\lambda^2}{\lambda^2 - 0.31423026^2} + \frac{3.7606868\lambda^2}{\lambda^2 - 0.1759417^2} + \frac{2.7312353\lambda^2}{\lambda^2 - 33.886560^2} \quad (3-4)$$

不過，[53]也提及此公式只適用於 $0.55\sim10.5\mu\text{m}$ 。但根據[54]的測量值，筆者以

⁵¹ 由繞射公式可知， $n_t < |n_i \sin \theta_i \pm \lambda / \Lambda|$ 時，只有零階穿透光。若 $n_i \sin \theta_i > 0$ ，式子成立有兩種狀況：(1) $n_i \sin \theta_i + \lambda / \Lambda > n_t$ (2) $n_i \sin \theta_i - \lambda / \Lambda < -n_t$ 。因為(1)的左式最小可到 λ / Λ ，所以(1)可得 $\lambda / \Lambda > n_t$ 。因為(2)的左式最大可到 $n_i - \lambda / \Lambda$ ，(2)可得 $n_i - \lambda / \Lambda < -n_t$ 。接下來只要取(1)和(2)的交集就可以得(3-3)式。

此和[53]的結果比較發現差異不大(參看圖 3.2)，因此最後在整個可見光波段，筆者仍使用此式。

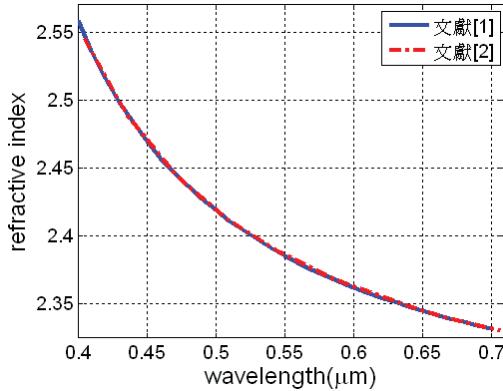


圖 3.2 比較文獻[53]的謝米爾方程和文獻[54]的折射率測量值

接下來是入射介質 n_i ，我們可以用簡單的物理常識來想，要發生全反射時，入射介質要大於穿透介質。因為光柵區的等效折射率一定大於 1，所以入射介質 n_i 就不能和第二章一樣使用空氣。此外，若光是從空氣入射，對 TE 極化來說，我們必須要滿足 $\sin \theta_i = n_i \sin \theta_t \geq n_{\text{grating}}$ ，其中 n_{grating} 是光柵區的等效折射率。但因為光柵區的等效折射率一定大於 1，上式是不可能達到的，這暗示入射介質區域必須作成稜鏡(prism)的樣子來加大角度，就像第一章提到的 MacNeille 極化分光器一樣。不過要強調的是，以上對角度的分析本於幾何光學(geometrical optics)，亦即元件的尺度遠大於光波長。而我們的數值方法 RCWA 本於馬克斯威爾方程式，是為了處理次波長結構(subwavelength structure)，因此模擬使用的結構尚不考慮稜鏡的部分，仍和第二章相同，由 n_i 、光柵區、 n_t 三區組成。之後再以幾何光學的方式分析稜鏡的設計。

接著，觀察 $\sin \theta_i = n_i \sin \theta_t$ 一式可以發現，大的 n_i 可以放大入射角的容許角度⁵²。因此在這邊，筆者會先讓 n_i 和 n_t 一樣都是閃鋅礦。最後，需要調整的參數包括光柵週期 Λ 、穿透介質 n_t 、填充因子 f 、以及光柵深度 d 。

⁵² 設 $\sin y = n \sin x$ ，則 $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{n^2 - n^2 \sin^2 x}{1 - n^2 \sin^2 x}} > 1$ ，這表示在 n 中的角度變化 Δx 經介面到空氣時，其空氣的角度變化 Δy 可以被放大。



二、各個變數的影響

一開始，筆者先讓 $\Lambda = 0.1\mu\text{m}$ ， $f = 0.5$ ， $n_1 = n_t = n_i : \beta = Z_{\text{ns}}$ ，中心波長 $\lambda_c = 0.55\mu\text{m}$ ，然後由圖解法先繪製還未平移前的線($k_y = 0$)。

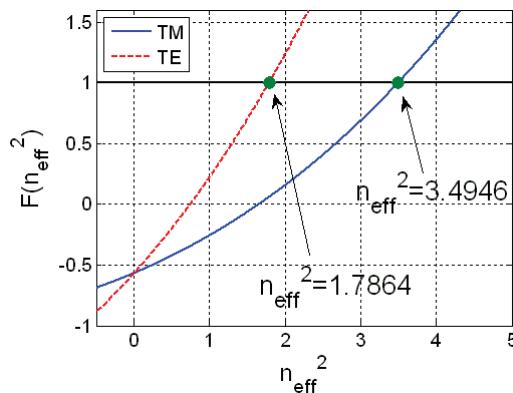


圖 3.3 由圖解法找 TE 的全反射角

由上圖可以知道，我們至少需要平移 1.7864 才能讓 TE 極化有虛數 n_{eff} ，此即 $3.4946 \geq (n_i \sin \theta_i)^2 \geq 1.7864$ ，亦即 $51.59^\circ \geq \theta_i \geq 34.07^\circ$ 時，我們能讓 TE 極化全反射，TM 極化還是穿透。

1. 光柵深度 d

我們在第一章曾經談過受抑全反射(FTIR)。光雖然在第一個介面達成全反射的條件，但是第二層介質的深度不夠大，消逝波尚未衰減完就穿透過第三層介質，整體來說仍然有穿透光存在。因此可以預料的是，不能讓光柵深度 d 太小。下一個圖是不同光柵深度，相同波長下，入射角度和反射率穿透率作圖。而和第二章相仿，筆者連帶使用[44]提供的高階等效折射率公式，代入三層介質的夫瑞奈公式(Fresnel's equation)計算反射量和穿透量。結果如圖 3.4。

在圖 3.4 可以發現，隨著光柵深度加大，正如之前的討論，TE 極化反射的效應就更明顯，而且也正如我們在上面的計算，在入射角大約為 35~52 度間，能夠分開 TE 和 TM 極化。但光在光柵區來回反射與透射造成的干涉也使得反射率的圖形多了一些像漣波(ripple)的震盪，這顯然不是我們所樂見的。

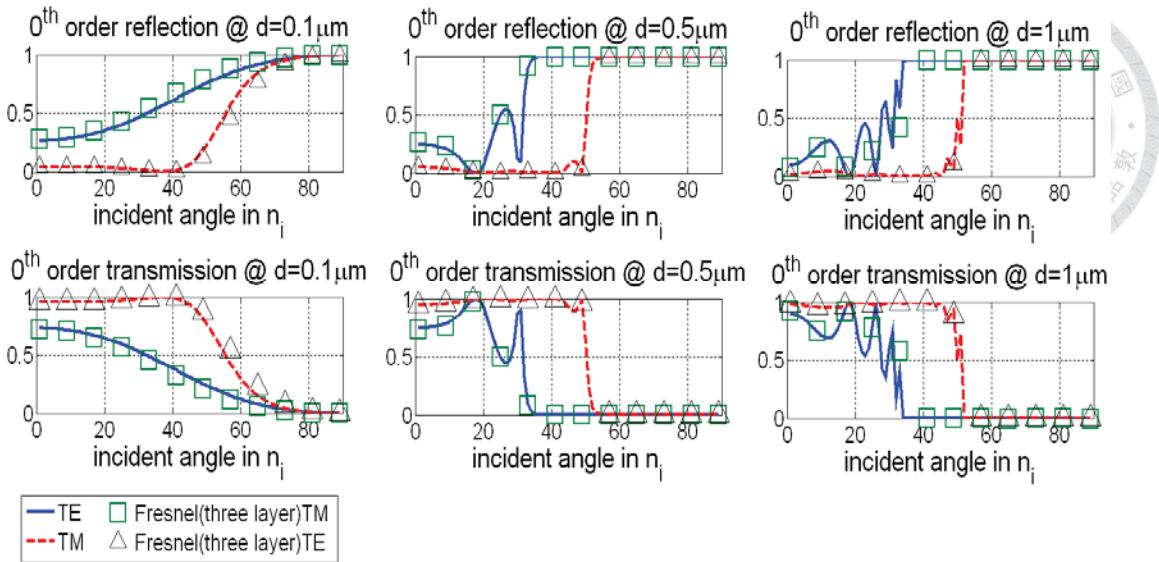


圖 3.4 不同光柵深度下入射角對反射率穿透率的影響($\lambda_c = 0.55\mu\text{m}$)

由以上的討論，筆者最後選定 $d = 0.3\mu\text{m}$ 。此外，有一點要補充的是，因為我們在圖 2.41 對 TE 極化的定義會使得在 $\delta = 90^\circ$ 時，電場只有 x 分量，且垂直於光柵介質的界面(請參看圖 2.41)，以夫瑞奈公式來看剛好對應到 TM。

和第二章相仿，為了清楚知道入射角度和波長的影響，筆者將之一併繪入，其結果如下(R 表示反射、T 表示穿透、i 指繞射的階數)。

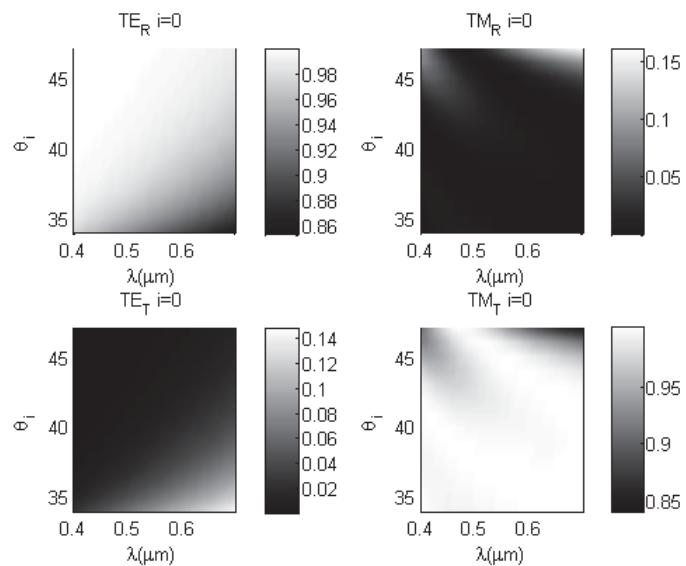


圖 3.5 不同入射角與不同波長下 TE 極化和 TM 極化的反射率與穿透率

($\delta = 90^\circ$ 即 $k_x = 0$)

由上圖可以看出，在入射角為 $34^\circ \sim 47^\circ$ 時，TE 極化的反射率至少有八成，TM 極化的反射率也壓到二成以下。

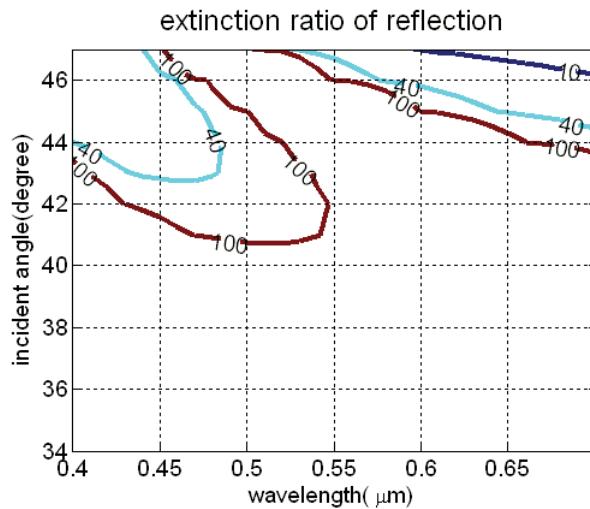


圖 3.6 圖 3.5 反射光的消光比(TE_R/TM_R)

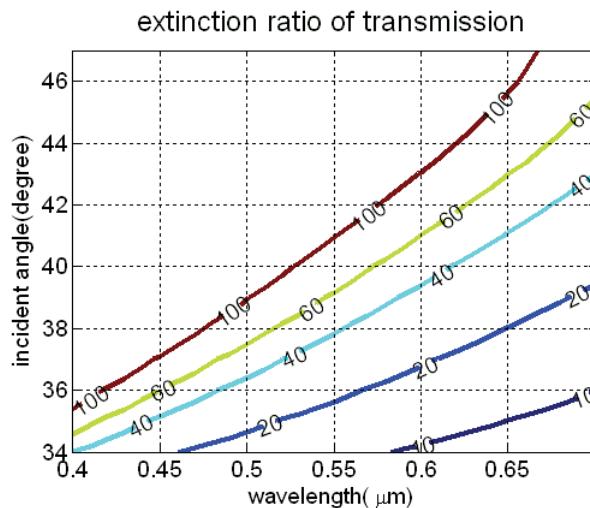


圖 3.7 圖 3.5 穿透光的消光比(TE_T/TM_T)

由圖 3.6 和圖 3.7，若進一步要求反射光和穿透光的消光比都在 10 以上，入射角的允許範圍約為 $36^\circ \sim 46^\circ$ 。



2. 光柵週期 Λ

前面曾經提過(3-3)式的限制相當嚴格，而因為我們只需要在特定角度內限制只有零階光存在即可，是以光柵週期可以取大一點。不過，該怎麼決定光柵週期？

由(3-2)式可以發現，對同一波長和相同填充因子來說，光柵週期會改變(3-2)式的左式，亦即會改變從圖解法求得的 n_{eff} ，而 n_{eff} 又決定我們需要使用多大的 k_y 來平移曲線，如此推到最後就能發現，不同光柵週期會改變入射角的容許範圍。

因此，效仿圖 3.3 的做法，筆者試著把不同週期下，不同波長的入射角範圍繪出(同樣只考慮 $\delta = 90^\circ$ ，填充因子都是 0.5)。

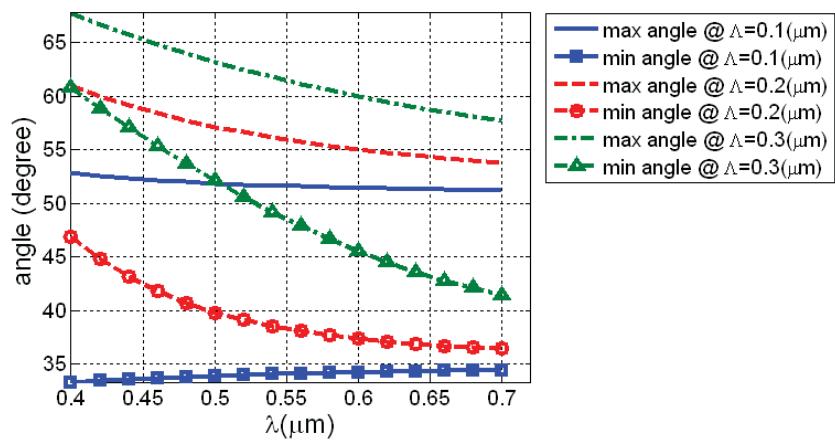


圖 3.8 不同光柵週期下各個波長允許的角度範圍($k_x = 0$)

從圖 3.8 很容易看出來，隨著光柵週期的加大，能夠滿足整個波段的角度範圍就越來越小。

3. 填充因子 f

我們同樣由(3-2)式來看這個參數，圖 3.9 是不同填充因子下，由圖解法求出 TE 和 TM 的 n_{eff}^2 。像我們在圖 3.3 的作法，這兩值的距離代表的是容許角度的範圍，因此我們會希望這兩值的間距越大越好。而由圖 3.9 可以看出，填充因子 f 為 0.5 時兩者的間距是最大的。因此最後筆者將填充因子定為 0.5。

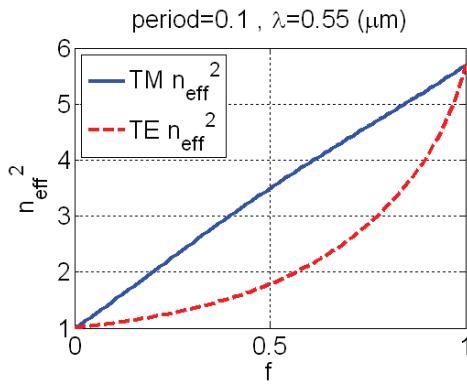


圖 3.9 不同填充因子下由圖解法求出 TE 和 TM 的 n_{eff}^2 ($k_x = 0$)

4. 穿透介質 n_t

在圖 3.4 我們曾經比較高階的等效折射率和 RCWA 的模擬結果，發現差異不大，因此在這邊我們引用等效折射率的概念來分析。

如果我們讓穿透介質為空氣，因為光柵區的等效折射率必定大於 1，最後全反射的臨界角就會由穿透介質決定⁵³，亦即 $\sin^{-1} 1/n_t$ 。對穿透介質來說，TE 和 TM 又有相同的折射率，因此就沒有分光的效果。由以上的討論，我們便需要讓 n_t 大於光柵的等效折射率。另一點可以預見的是，若 n_t 只是略大於光柵的等效折射率，我們就需要大一點的光柵深度讓消逝波衰減得夠小，不產生受抑全反射 (FTIR)。下圖是相同光柵深度下兩個不同穿透介質的模擬。 $(n_i = n_1 : \beta - \text{ZnS} : n_2 = 1 : \Lambda = 0.1\mu\text{m} : f = 0.5 : d = 0.3\mu\text{m} : \lambda = 0.55\mu\text{m})$ 。

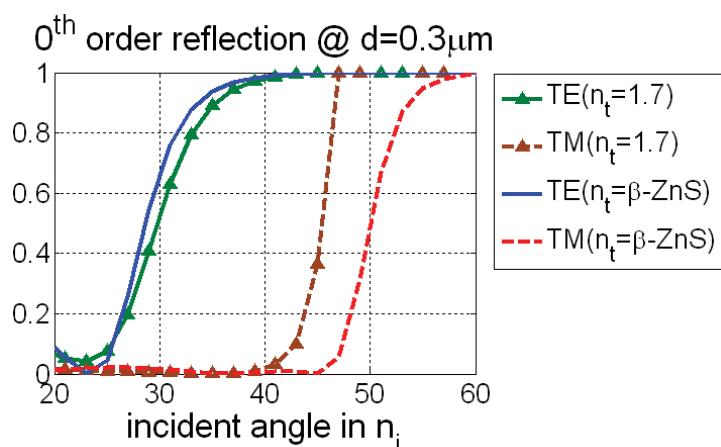


圖 3.10 不同穿透介質下入射角對反射率作圖 ($k_x = 0$)

⁵³ 對入射介質來說，光柵層的全反射臨界角為 $\sin^{-1} n_{\text{grating}}/n_i$ ，必定大於 $\sin^{-1} 1/n_i$ 。

首先，由[44]提供的高階等效折射率公式，我們能算出 TE 極化的等效折射率為 1.3331，TM 極化則是 1.8697。若我們讓 $n_t = 1.7$ ，則 TM 極化的全反射臨界角還是由 n_t 決定，因此正如圖 3.10 所示， $n_t = 1.7$ 時，入射角度的允許範圍比較小。此外， $n_t = 1.7$ 的 TE 反射率也略小於 $n_t = \beta - \text{ZnS}$ ，正如我們在上面討論 FTIR 的效應。因此，筆者最後會讓穿透介質和入射介質同樣是閃鋅礦。

三、立體角度

由以上的討論，最後的架構為 $\Lambda = 0.1\mu\text{m}$ ， $f = 0.5$ ， $n_1 = n_t = n_i : \beta - \text{ZnS}$ ， $d = 0.3\mu\text{m}$ 。關於立體角度的定義可參看圖 2.41，這邊筆者直接附上最後的結果。

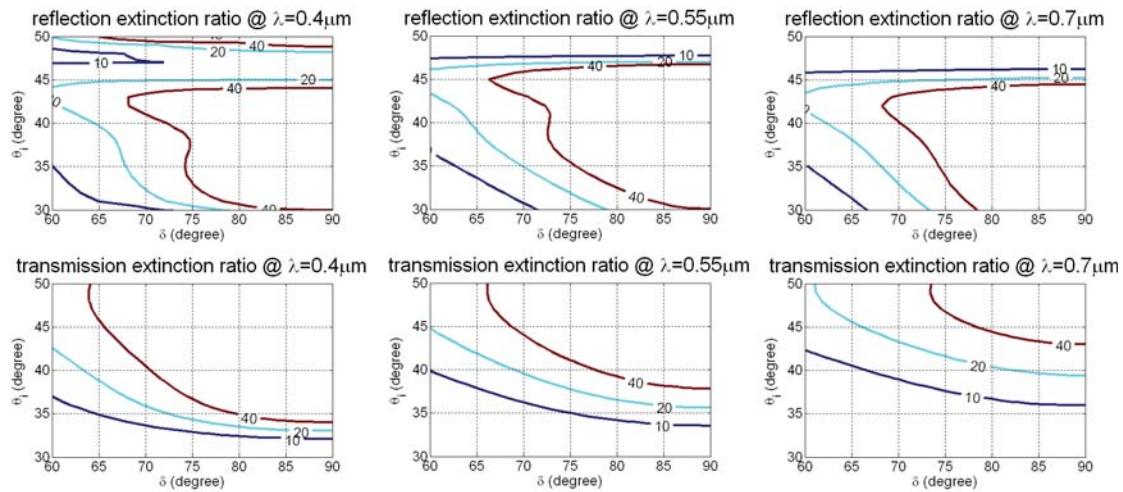


圖 3.11 不同 δ 與不同入射角 (θ_i) 下可見光波段 ($0.4\sim0.7\mu\text{m}$) 若干波長的消光比

反射光的消光比定義為 TE_R/TM_R ， TE_R 為 TE 的反射率。穿透光的消光比定義為 TM_T/TE_T ， TE_T 為 TE 的穿透率。

由上圖可以看出， θ_i 在 $37^\circ\sim46^\circ$ 間， δ 在 $90^\circ \pm 10^\circ$ 之間時，反射率的消光比和穿透率的消光比至少都有 10 以上。

四、稜鏡(prism)

我們在前面曾經提過，入射介質區域必須作成稜鏡(prism)的樣子來加大角度。

在這個小段中讓我們回頭稜鏡的設計。

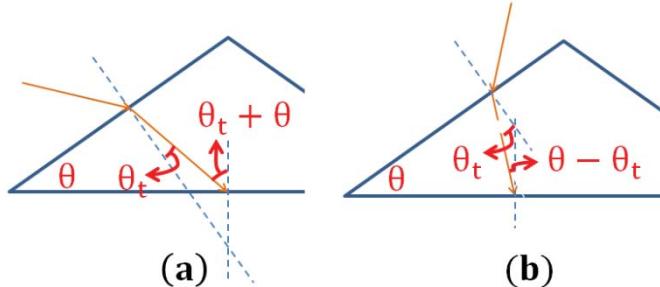


圖 3.12 稜鏡傾斜角 θ 與入射光線的關係($\delta = 90^\circ$)

(a)光線由法線下入射 (b)光線由法線上入射

我們在前面討論的入射角 θ_i ，就是圖 3.12 內的 $\theta_t + \theta$ 和 $\theta - \theta_t$ 。為了讓入射角的範圍較有對稱性，由上述的結果 $37^\circ \sim 46^\circ$ ，筆者讓 θ 等於 42° 。

不過，考慮實際的應用，我們還是需要知道立體角度為多少。

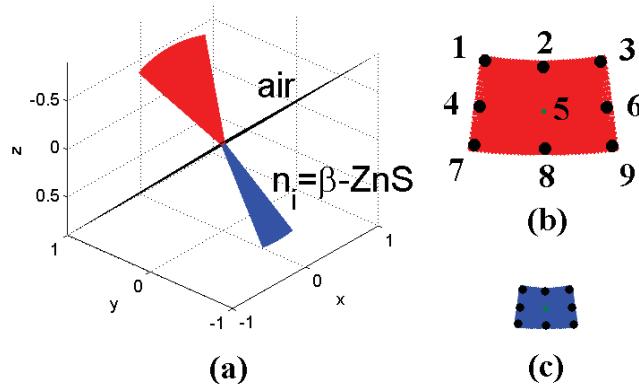


圖 3.13 以幾何光學分析入射光的允許範圍

(a)光從空氣入射 β -ZnS稜鏡 (b)空氣中的俯視圖 (c) β -ZnS中的俯視圖

在上一個小段最後，我們知道光在 β -ZnS層的入射角度限制為 $\theta_i: 37^\circ \sim 46^\circ$ ， $\delta: 80^\circ \sim 100^\circ$ 。由此，我們能夠以此畫出 β -ZnS層中的單位波向量⁵⁴。知道這些波向量後，藉由折射定律，就可以把空氣中的波向量一併繪出，如圖 3.13(a)。圖 3.13(b)是從空氣垂直俯視，圖 3.13(c)則是從 β -ZnS垂直俯視，從(b)和(c)可以看出， β -ZnS層確實放大入射角的容許角度。筆者在圖中取幾個代表性的點，計算它們和法線(點 5)的夾角，結果如下。

⁵⁴ $k_x = k_0 n_i \sin \theta_i \cos \delta$ 、 $k_y = k_0 n_i \sin \theta_i \sin \delta$ 、 $k_z = k_0 n_i \cos \theta_i$ 。

圖 3.13(b)(空氣層)			圖 3.13(c)(β – ZnS層)		
點 1 19.1288°	點 2 11.7264°	點 3 19.1288°	點 1 8.0783°	點 2 5°	點 3 8.0783°
點 4 15.7549°	點 5 0°	點 6 15.7549°	點 4 6.6866°	點 5 0°	點 6 6.6866°
點 7 18.9541°	點 8 9.3616°	點 9 18.9541°	點 7 8.0068°	點 8 4°	點 9 8.0068°

表 3.1 圖 3.13 中各點與法線(點 5)的夾角

五、總結

在這一章中，筆者同樣以光柵設計，但是物理機制和利特羅裝置不同。藉由與等效折射率的比較(圖 3.4)可以看出，這一章的物理機制比起利特羅裝置更能吻合等效介質的近似(第二章中我們只能讓 TM 極化吻合等效介質理論)。也許就因為如此，這一章的物理機制才能在整個寬頻帶都能使用。此外，由於我們並未運用到高階的繞射光，因此這種架構也能避開不同波長有不同繞射角的問題。

不過，這種架構和利特羅裝置比起來，製程上的難度較高。而且分開的極化光和 MacNeille 極化分光器同樣是一個反射一個穿透，若我們想要同時使用兩個極化光，便需要額外的反射元件。

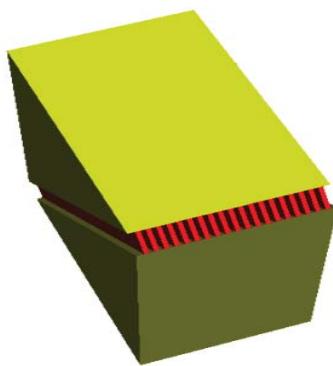


圖 3.14 寬頻極化分光器架構



我們在第二章最後設計出 RGB 三個波段的極化分光器，但其立體角度卻是受限的。在這一章中，筆者從兩個方向切入，首先是針對 LED 光源，大略介紹縮小出光角度的方式，接著以高斯函數近似 LED 的出光頻譜，縮小波段的範圍，進而加大極化分光器容許的角度範圍，最後，大略粗估光使用效率(LUE)。

第一節、調整出光角度的可能方式

一、一般 LED 的出光角度

為了讓極化分光器能夠成功的運作，從 LED 出來的光必須要吻合第二章所計算的立體角度。對此，我們有必要先檢視 LED 的出光角度。

LED 的出光原理是讓電子和電洞在主動區域(active region)複合，只要主動區域是直接能隙(direct bandgap)材料，能階的躍遷就能放出光子，而產生出的光子就會是由高折射率區域入射到空氣之中，對此，介面上的全反射效應就會降低出光效率。通常我們用光取出率(Light Extraction Efficiency)來描述。下圖是不同介面形狀的輻射場型(radiation pattern)[55]。

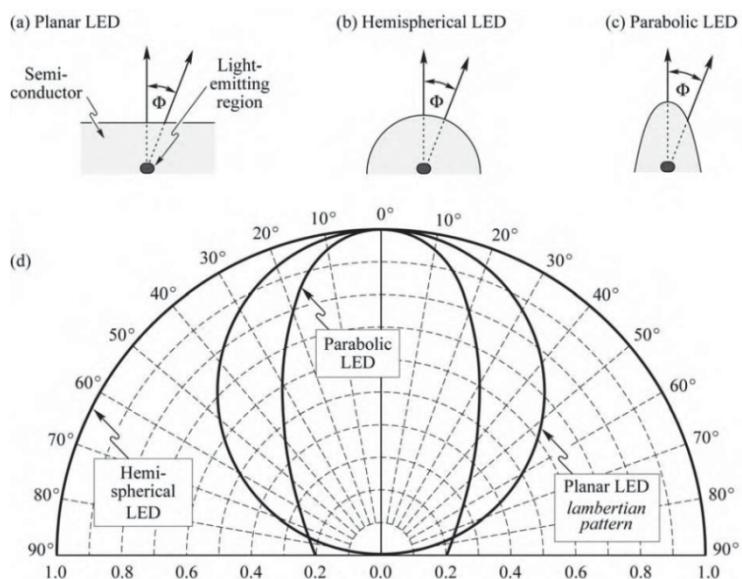


圖 4.1 不同出光面下 LED 的輻射場形[55]



若我們出光面是為平面，其輻射場形會像朗伯場形(Lambertian pattern)⁵⁵。這種場形的強度(intensity)與角度的關係為 $I_0 \cos \theta$ ，這表示其角度的半高寬(Full width at half maximum, FWHM)有 120° 。這對我們在第二章設計的極化分光器相當不利。

二、可能的方式

文獻中有一些方法是在出光面上做微結構，一來是破壞光子出光到空氣的全反射效應，二是藉由這些結構改變出光場形。文獻[56]是在表面添加銀的光柵結構($\lambda = 0.867\mu\text{m}$)，文獻[57]則是以光子晶體形成微共振腔(microcavity)，以類似雷射的方式讓出光較為準直(FWHM 約為 30 度)。

當然，也有文獻專注在 LED 之外，以額外的光學元件改變光線的角度。像是夫瑞奈透鏡(Fresnel lens)[58]。但，這種解決方式所需的光學元件往往會有體積龐大的問題。

另一方面，我們也能向光通訊的 LED 取經。這種 LED 為了提高把光耦合(coupling)進光纖內的效率，會希望出光範圍大約落在光纖的數值孔徑(numerical aperture, NA)內。一例是微共振腔結構[55](Resonant-cavity LED, RCLED)，另一種是所謂的超螢光發光二極體(superluminescent light-emitting diodes, SLED)[55]。

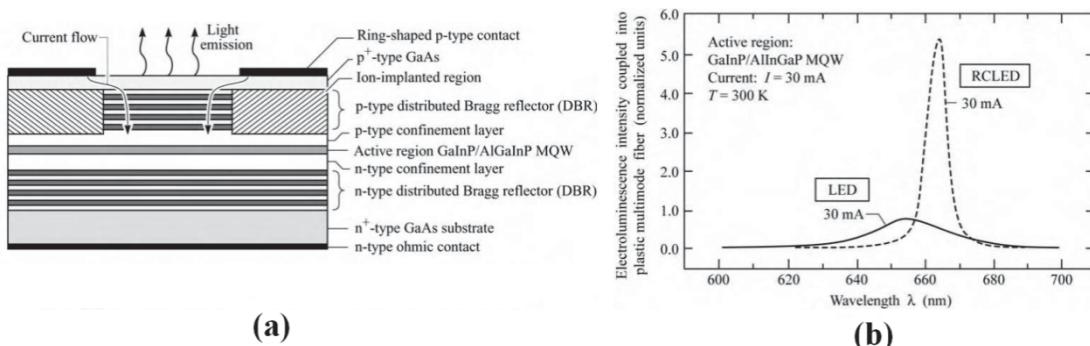


圖 4.2 利用微共振腔的例子[55]

(左) LED 結構 (右) 經 $NA=0.275$ 光纖的電發光強度(EL)

⁵⁵ 證明可參看[55]。



圖 4.2 是光線由 RCLED 出光後，耦進光纖後的出光強度。由光纖的 NA，我們很快能得到，其出光角度大約為 $\pm 16^\circ$ ($\because \sin^{-1} 0.275 \approx 16^\circ$)。從圖 4.2 也可以發現，由於微共振腔的效應，其頻寬和傳統 LED 比起來小了一些。

超螢光發光二極體是一種邊射型發光二極體(edge-emitting light emitting diode, EELED)，其機制和雷射二極體有些相似，都是利用製程的方式在主動層上下長出披覆層(cladding)，藉而產生波導效應，將光導引到側面出光。由於光是經由波導出光的，理論上能改變遠場的輻射場形。

和雷射二極體相比，超螢光發光二極體略有不同。對雷射來說，我們希望藉由共振腔的共振效應來加大出光強度，像是法比-培羅特共振腔(Fabry-Perot resonator)。不過，這種共振腔會改變出光頻譜(要符合特定條件才能共振)，為此，文獻中[59]列出可能的方法，對結構做了些許的修正，其目的多是降低出光介面的反射率[55][60]，減弱共振腔的共振效應。

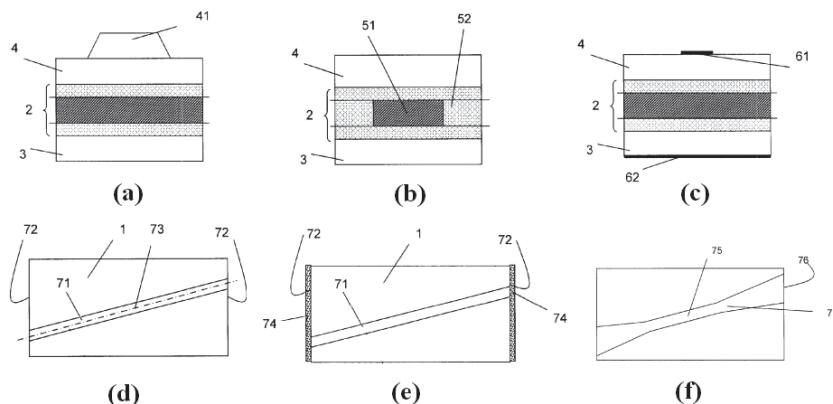


圖 4.3 SLED 可能結構[59]

(a)(b)(c)：側面圖 (d)(e)(f)：俯視圖

(a) 脊狀波導 (b) 方形波導 (c) 以電流侷限出光區域
 (d) 傾斜波導 (e) 鍍抗反射層 (f) 楔形波導

圖 4.3 的(a)(b)(c)代表的是我們如何將光侷限在特定區域，使之產生波導效應。(d)(e)(f)則是降低共振效應的嘗試，(d)是將波導傾斜一個角度，使出光介面

反射的光無法再回到波導形成共振模態。[60][61]對傾斜角度有進一步探討。

下圖是邊射型發光二極體以及面發射發光二極體(surface-emitting diode)，還有超螢光發光二極體典型的 L-I 曲線。

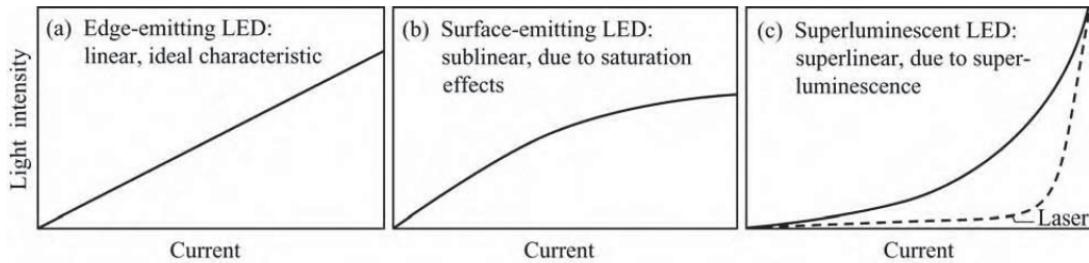


圖 4.4 幾種發光二極體的典型 L-I 圖[55]

由上圖可以發現，跟傳統的 LED 比起來，SLED 的曲線類似於雷射二極體。這表示，我們需要足夠大的電流才能取得較大的光輸出。這其實不難理解，若考慮一個在主動區新生成的光子，其發散角度應該是隨機的，亦即此光子的角度也有可能小於波導全反射的臨界角，唯有在波導內的光產生類似於雷射受激發光(stimulated emission)的機制，才能讓多數光都沿著波導傳播[55]。事實上，SLED 的發光機制也和傳統 LED 的自發發光(spontaneous emission)略有不同，稱為放大自發發光(amplified spontaneous emission)[61]，在[55]之中就把 SLED 當成是 EELED 的強化版本。

下圖是文獻[62]中，以氮化鎵(GaN)材料製作的藍紫光超螢光發光二極體。

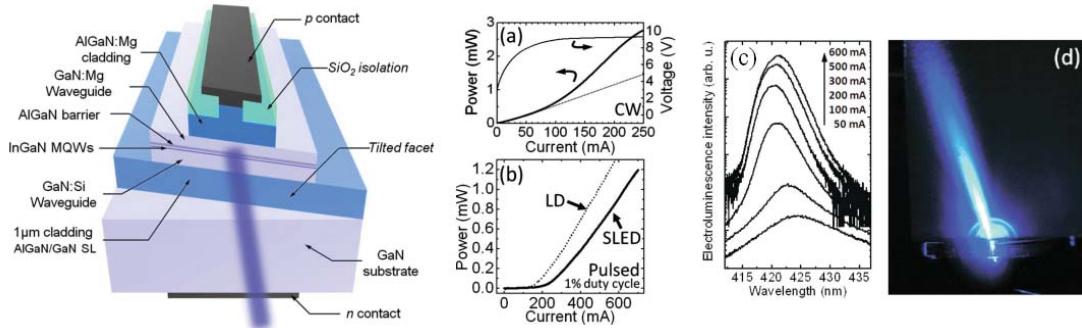


圖 4.5 超螢光發光二極體[62]

(a) CW 操作下的 I-V 與 L-I 曲線 (b) 脈衝操作下的 L-I 曲線

(c) 不同電流的 EL 圖

(d) 實際出光的 SLED



文獻[62]也有提供光束的發散角，圖 4.5 例子水平和垂直方向的角度半高寬 (FWHM) 分別為 12° 和 44° 。

雖然如上面的討論，SLED 需要足夠大的電流才能取得較大的光輸出。不過，我們也還是能效法 SLED 的做法，並以此得到較小的發散角度。

除此之外，還有一個方法是從 LED 的封裝下手。

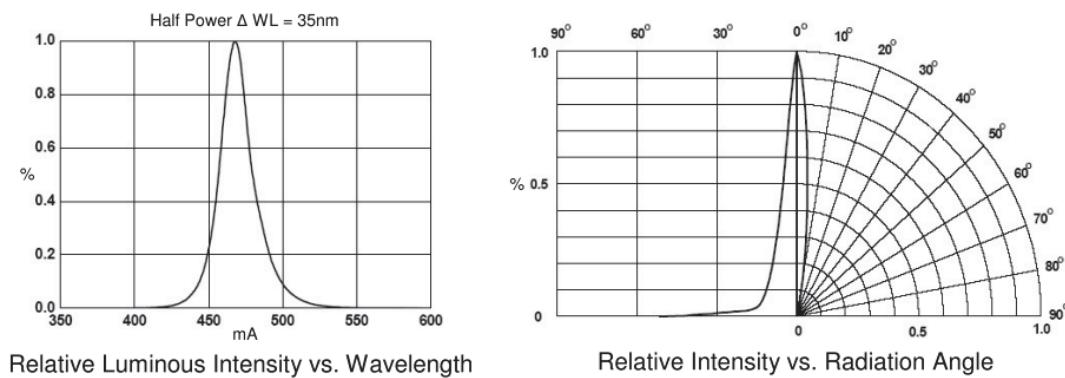


圖 4.6 藉由封裝改變出光場形例一²

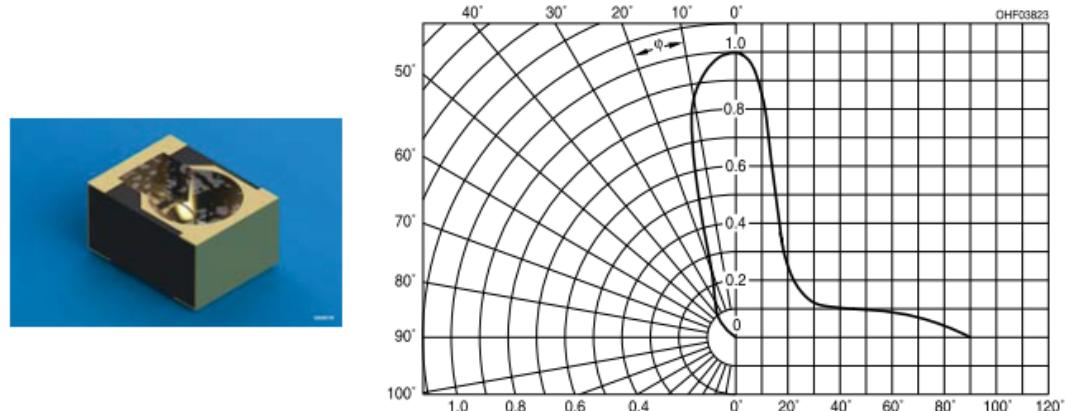


圖 4.7 藉由封裝改變出光場形例二³ ($\lambda = 0.85\mu\text{m}$)

⁵⁶ OPTEK Technology Inc. 型號：OVLGB0Cx9

⁵⁷ OSRAM Opto Semiconductors 型號：SFH 4650

第二節、高斯近似的發光頻譜

在前兩章，筆者曾經詳細的計算了極化分光器允許的入射角度範圍。這個範圍跟我們所取的頻寬範圍息息相關。讀者可以回顧圖 2.12，LED 的光譜在某些波長是相對較小的，若為了這些波長將頻寬範圍定得太僵，反而會使允許的入射角度範圍降低(讀者可以回顧圖 2.43、圖 2.44 以及圖 2.45)。因此，在這一個小節，讓我們來更仔細的取捨這些波長。

一、高斯近似

在文獻[55][63]中，使用了高斯函數來擬合(fitting)LED 的發光頻譜。

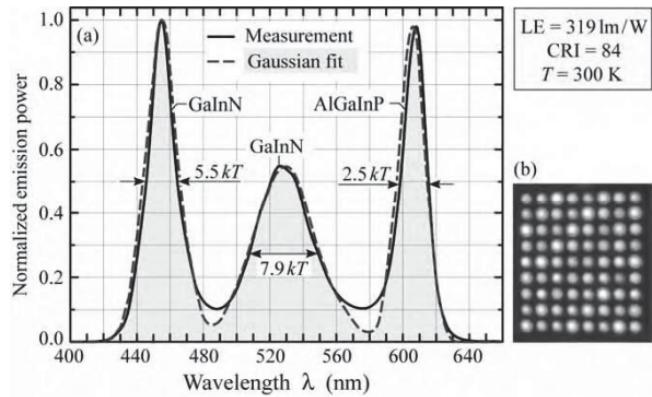


圖 4.8 [55]中以高斯函數擬合 RGB 的 LED 光譜

在[55]中，擬合 LED 光譜的式子如下：

$$P(\lambda) \propto e^{-\frac{(\lambda-\lambda_p)^2}{2\sigma^2}} \quad (4-1)$$

其中， $P(\lambda)$ 代表的是出光功率。圖中的用 kT 表示的 FWHM 可用下式求出 $\Delta\lambda$ 。

⁵⁸ 這個 $\Delta\lambda$ 代表的是波長的半高寬。

$$\frac{hc}{\lambda_p - \Delta\lambda/2} - \frac{hc}{\lambda_p + \Delta\lambda/2} = \text{FWHM} \quad (4-2)$$

(4-2)式的 h 為普朗克常數(Planck's constant)， c 為光速。而 $\Delta\lambda$ 和標準差

⁵⁸ k 為波茲曼常數(Boltzmann constant)。



(4-3)

(standard deviation)的關係為[55]：

$$\sigma = \frac{\Delta\lambda}{2\sqrt{2\ln 2}}$$

因此，只要知道了 λ_p ，由圖 4.8 中的半高寬和(4-2)與(4-3)式，我們就能求波長的半高寬 $\Delta\lambda$ 以及標準差 σ 。整理如下表。

	λ_p	$\Delta\lambda$	σ
B 波段	460 nm	24.3 nm	10.3 nm
G 波段	530 nm	46.2 nm	19.6 nm
R 波段	640 nm	21.4 nm	9.1 nm

表 4.1 不同波段的峰值與波長半高寬及標準差

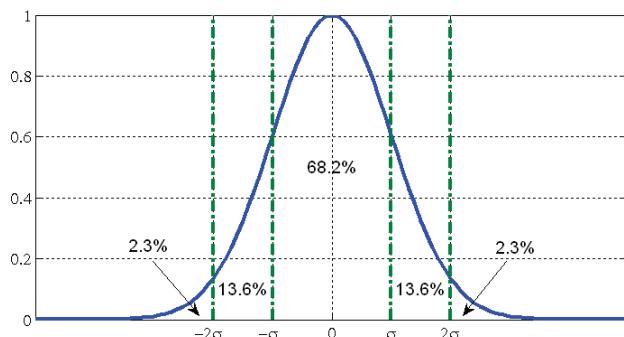


圖 4.9 高斯函數與標準差

由圖 4.9 可以看出，若將波段限制為 $\lambda_p - 2\sigma$ 到 $\lambda_p + 2\sigma$ ，總能量「損失」約 4.6%。實際的能量「損失」能以下式進行計算⁵⁹。 $(\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt)$

$$\text{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)/2 \quad (4-4)$$

(4-4)式計算的是 0 到 a 倍的標準差之間的面積佔全部頻譜的比例。

⁵⁹ $\int_0^x e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2} \int_0^{x/\sqrt{2}} e^{-t^2} dt = \sqrt{2\pi} \text{erf}(x/\sqrt{2})/2$ 。全部頻譜面積為 $\sqrt{2\pi} \text{erf}(\infty) = \sqrt{2\pi}$ 。值得注意的是，我們的極化分光器並不會造成損耗，這邊的「損失」指的是忽略的波段佔全部總能量的多少，因此接下來提到損失皆用括號以示區別。



二、立體角度的轉換

由於在實際應用時，我們的光柵結構必須和入射光有一個夾角。若將入射光考慮成一個光錐，我們便有必要確認這些入射光是不是都滿足我們對角度(θ_i & δ)的要求。如圖 4.10 所示。

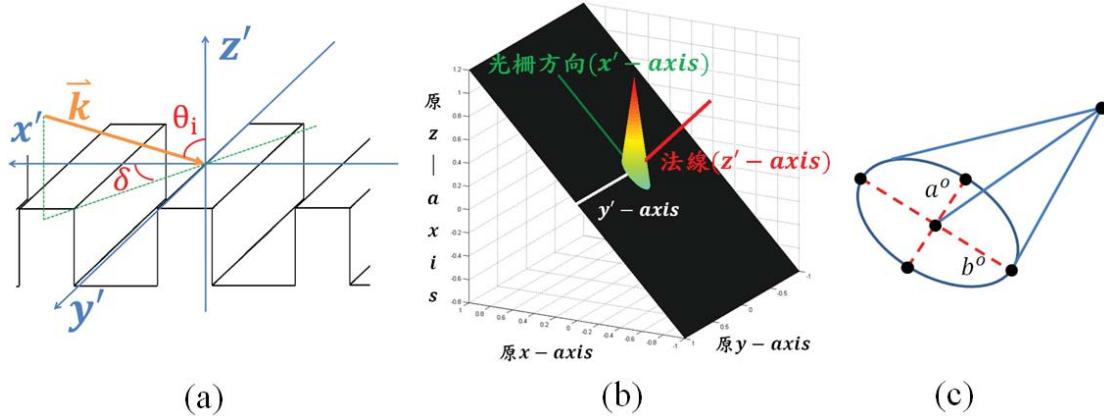


圖 4.10 立體角度示意

(a) 光柵平面與新三軸定義 (b) 光錐與新舊三軸 (c) 光錐角度

若光錐開口是朝向負 z 的方向，在確定光柵平面和 xy 平面的夾角後，我們便能定義出新的 $x'y'z'$ 三軸，如圖 4.10(b) 所示。同時，光錐的底面可以為一個橢圓，如圖 4.10(c) 所示， a^o 和 b^o 分別是短軸和長軸對應到頂點的角度。此外，由頂點到底面積的每一點能算出一個向量，這些向量就是圖 4.10(a) 的 \vec{k} 。分別投影到新三軸，最後新三軸的分量 (x', y', z') 即為 $(\sin \theta_i \cos \delta, \sin \theta_i \sin \delta, \cos \theta_i)$ ，由此我們就能計算出 θ_i 與 δ 。

三、各個波段的取捨

讓我們先來看 B 波段，由表 4.1，我們將 B 波段變為 $439.4 \sim 480.6 \text{ nm}$ 。

同時，我們也以圖 4.10 的方式，計算光柵平面和 xy 平面之間適宜的夾角(θ_{xy})。最後結果為：光柵平面和 xy 平面夾角 42.5° ，若光錐的角度 $a^o = 6.6^\circ$ 以及 $b^o = 9.5^\circ$ ，計算出的 θ_i 的範圍會落在 33° 到 52° 間， δ 落在 $\pm 9.8814^\circ$ 間(一階消光比 20 以上，零階消光比 10 以上)。

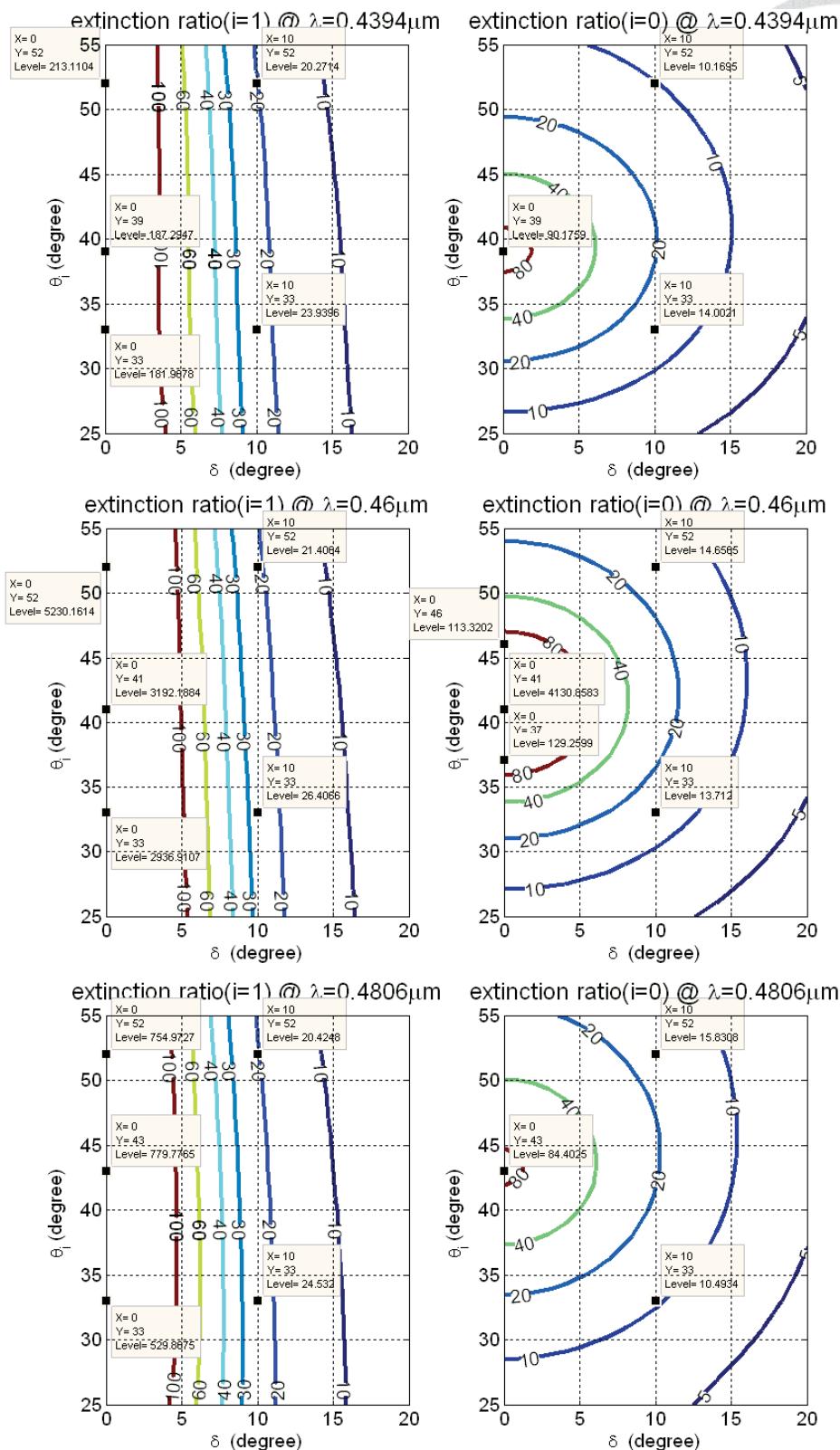


圖 4.11 B 波段若干波長之消光比與角度的關係

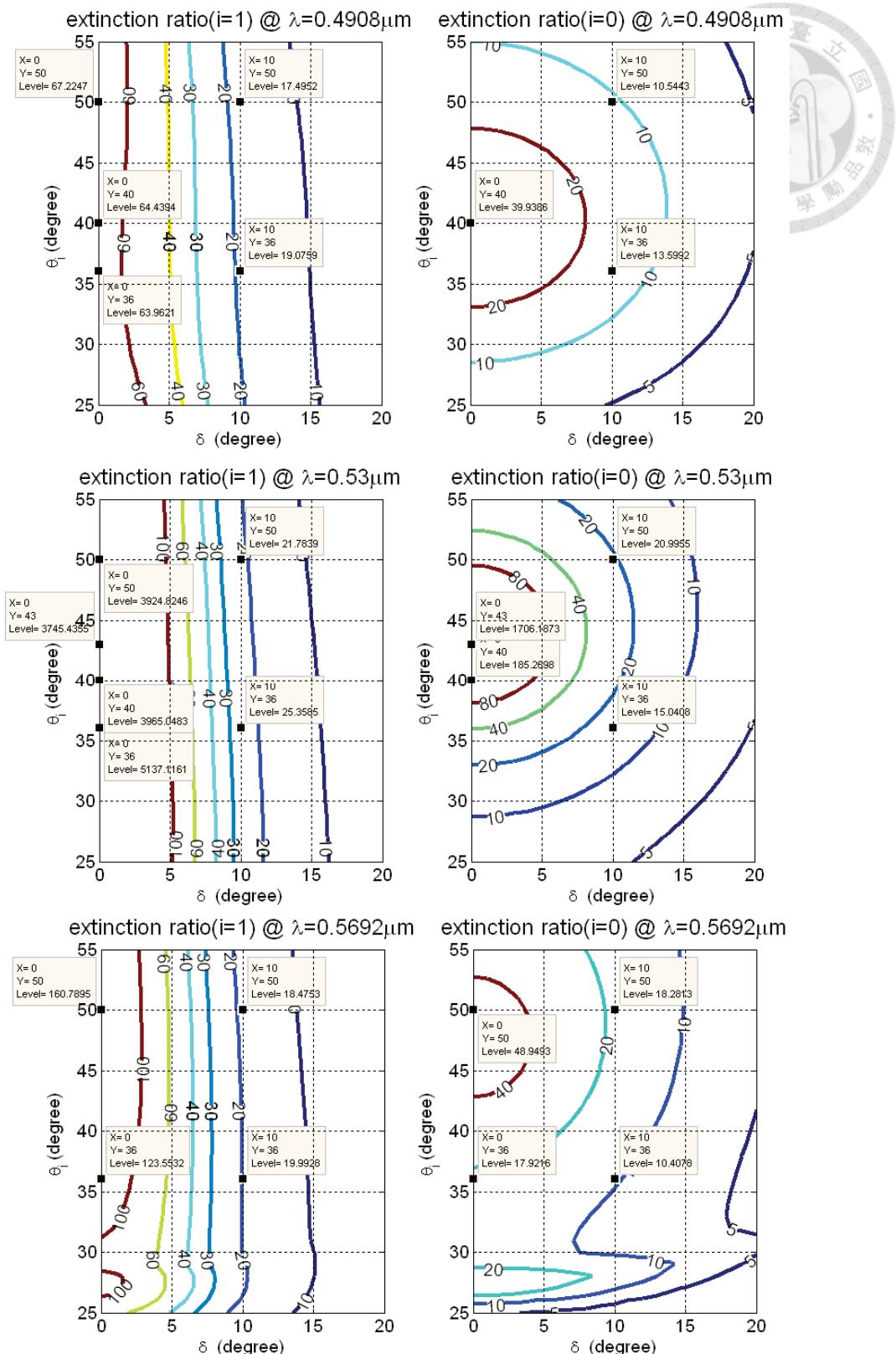


圖 4.12 G 波段若干波長之消光比與角度的關係

由於 G 波段的半高寬較大，因此可從圖 4.12 看出，我們取的波長 $0.5692\mu\text{m}$ ，其角度 θ_i 的下限為 36 度。那麼，如果我們取小一點的波長呢？

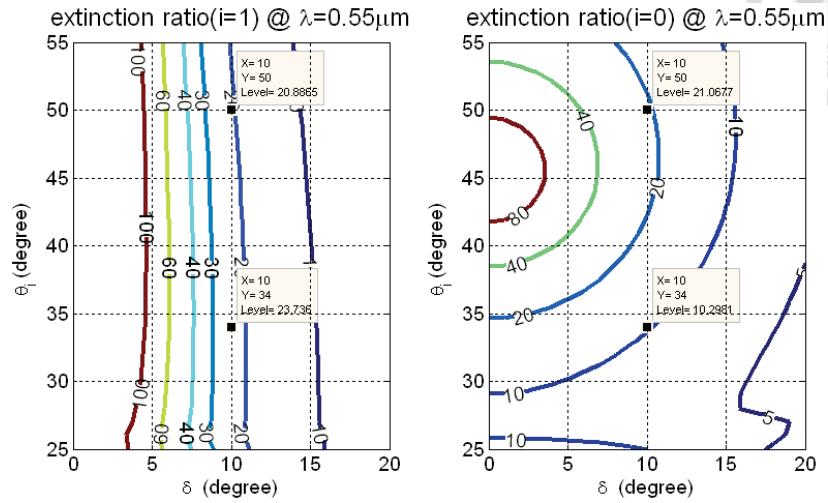


圖 4.13 $\lambda = 0.55\mu\text{m}$ 時消光比與角度的關係

從(4-4)式，我們可以檢驗一下選用 $\lambda = 0.55\mu\text{m}$ 會「損失」多少能量。經過計算後， $\lambda = 0.4908\sim 0.55\mu\text{m}$ 所佔的比例大約為 82.35%，亦即「損失」了近 18% 的能量，卻只讓角度增加兩度。因此筆者還是按照原先的取法。

最後，筆者將 RGB 三波段的結果統整如下表。

波段	峰值(μm)	波段範圍(μm)	入射光錐角度		消光比		θ_{xy}
			半短軸	半長軸	一階	零階	
B	0.46	0.4394~0.4806	6.6°	9.5°	20	10	42.5°
G	0.53	0.4908~0.5692	6.7°	7°	17	10	43°
R	0.64	0.6218~0.658	7.2°	12.5°	17	10	47.5°

表 4.2 結果統整

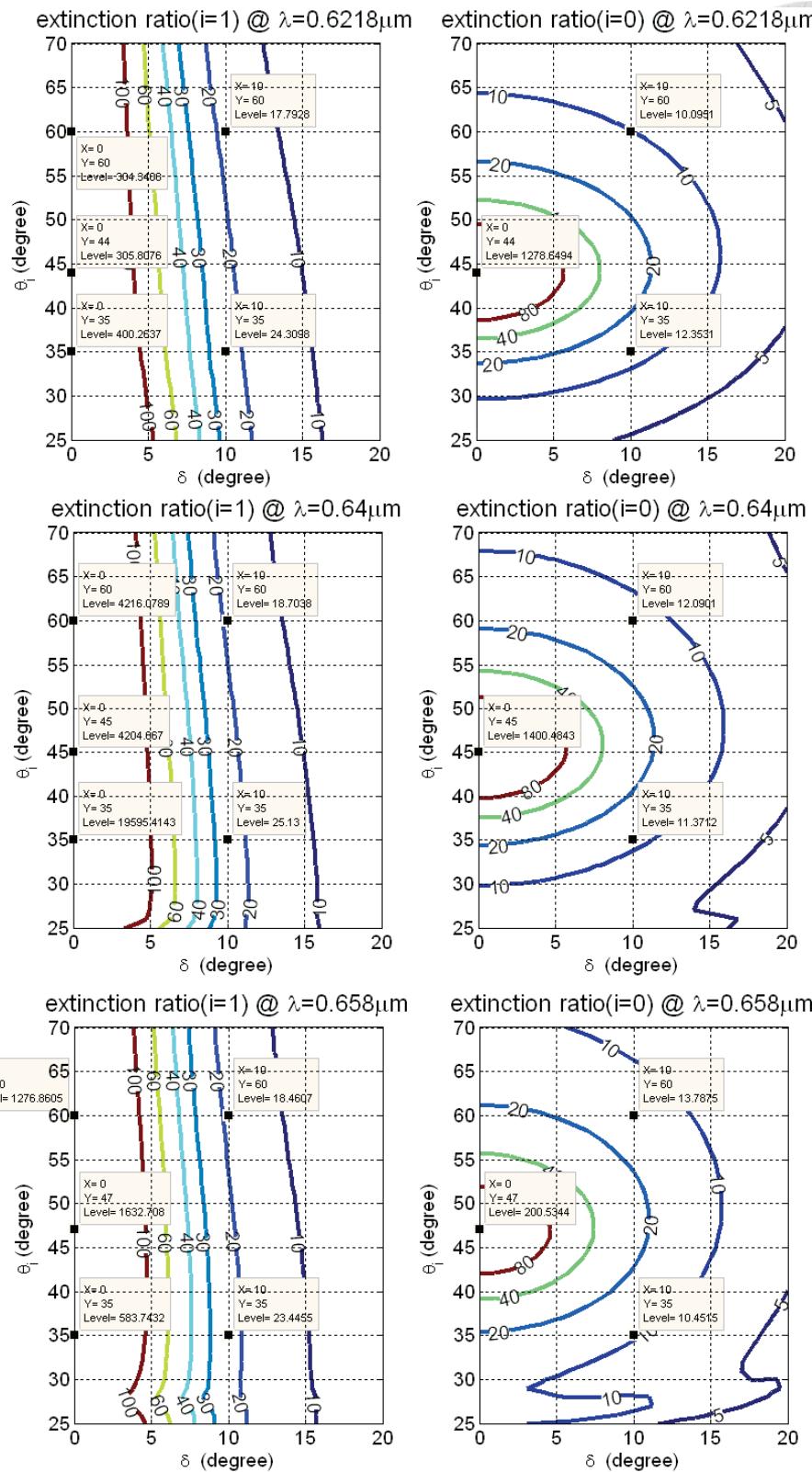


圖 4.14 R 波段若干波長之消光比與角度的關係

第三節、光使用效率

在這一章中，筆者首先介紹了集中 LED 光束的幾種可能的方法。接著，藉由捨棄波段的若干波長，我們能夠讓允許入射的角度範圍略大一些。與此同時，筆者也藉此計算出極化分光器應擺放的適當角度。

接著上述的探討，只要在極化分光器之後加上半波片，將 TM 極化轉成 TE 極化⁶⁰，我們便有機會讓液晶顯示器的背光模組提高光使用率，如下圖，只要將 TM 極化變成 TE 極化，最多就能讓光使用率最高提升兩倍。

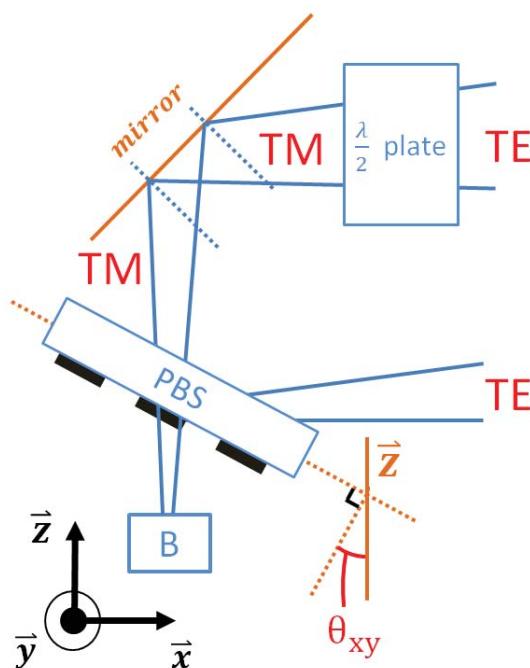


圖 4.15 提高光使用率的背光模組(只繪藍光 LED)

最後，讓我們大略估計光的使用效率。由於極化分光器最後都需要延遲板 (retarder) 改變極化方向，所以對不同方式的極化分光器來說，延遲板造成的損耗是固定的。因此，在這裡讓我們考慮，「有多少光是可以再利用的？」。此即光使用率的上限，對應到線柵結構(wire-grid)中，即為 S 極化的反射光和 P 極化的穿透光，在利特羅裝置中，指的就是 TE 極化的一階穿透光以及 TM 極化的零階穿透光。下面是 $\delta = 0$ 時的計算結果(線柵結構是引用第一章圖 1.9 的例子)。

⁶⁰之所以不是把 TE 極化轉成 TM 極化，是因為 TE 極化會有不同波長有不同散射角的問題。

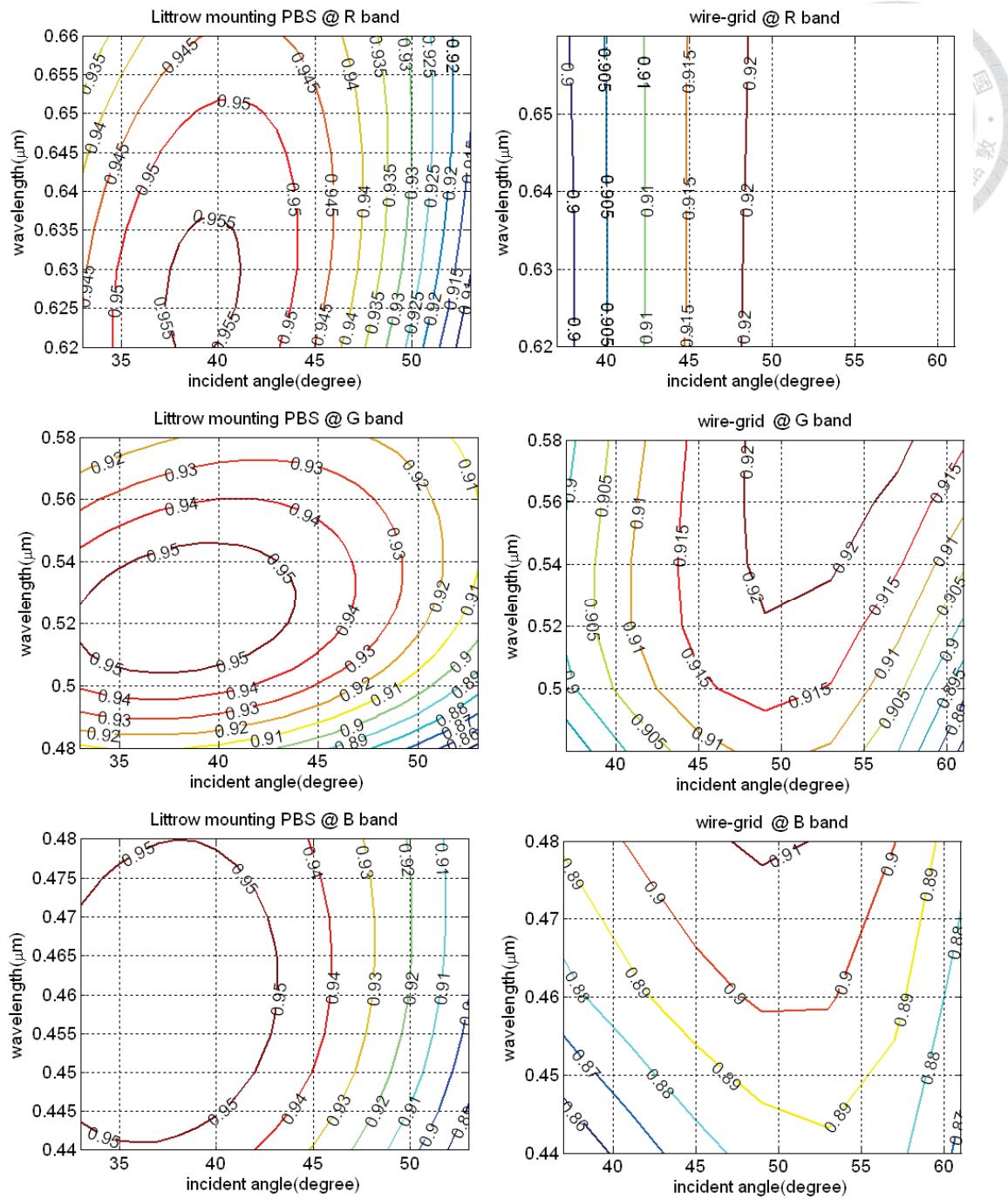


圖 4.16 各波段光使用率的上限

從圖 4.16 可以看出，以 B 波段來說，我們所設計的極化分光器，其光使用效率的上限和線柵結構相比，最多可以有近 10% 的差距，平均而言，三個波段也都有 3~4% 的差距。



本論文的目標是利用極化分光器設計出高光使用效率的偏振器。

一開始，筆者大略介紹和比較幾種不同的極化分光器。接著引入繞射光柵既有的理論和文獻，除了大略解釋了利特羅裝置的物理機制和數值方法——嚴格耦合波分析(RCWA)，也分析了各項參數所造成的影响，可以做為將來設計時的參考。雖然我所設計的極化分光器未能涵蓋整個可見光波段，但這個問題亦能分化成 RGB 三個波段個別解決。

另一方面，為了解決集光的問題，筆者從兩個方向切入。首先，雖然討論小角度 LED 的文獻並不多，但筆者也試著介紹了縮小出光角度的可能方式。接著，藉由高斯函數的近似，我們能夠對波段內波長做適當的取捨，進而加大極化分光器允許的角度範圍。最後設計出的 RGB 波段極化分光器，其零階和一階消光比至少都有 10 以上，最佳的情況也有 80 以上。

其中，R 波段波長範圍由原先 $0.58\text{--}0.7\mu\text{m}$ 調整成 $0.6218\text{--}0.658\mu\text{m}$ 。光錐主軸和光柵的夾角(θ_{xy})為 47.5° 時，入射光錐(可參看圖 4.10)半短軸角度為 7.2° ，半長軸則為 12.5° 。一階消光比至少 17 以上，零階消光比則至少 10 以上。

G 波段波長範圍由原先 $0.48\text{--}0.6\mu\text{m}$ 調整成 $0.4908\text{--}0.5692\mu\text{m}$ 。 $\theta_{xy} = 43^\circ$ 時，入射光錐半短軸角度為 6.7° ，半長軸則為 7° 。一階消光比至少 17 以上，零階消光比則至少 10 以上。

B 波段波長範圍由原先 $0.42\text{--}0.53\mu\text{m}$ 調整成 $0.4394\text{--}0.4806\mu\text{m}$ 。 $\theta_{xy} = 42.5^\circ$ 時，入射光錐半短軸角度為 6.6° ，半長軸則為 9.5° 。一階消光比至少 20 以上，零階消光比則至少 10 以上。

和傳統小於 50% 的光使用率的偏振器相比，使用我們設計的極化分光器後，最高能有 90% 光是可以利用的。和論文中的線柵結構例子相比，光使用率平均也有 3~4% 的差距，最多亦相差近 10%。

在以上的架構之外，筆者亦從既有的理論出發，另闢蹊徑提出假想，同時也成功的證實筆者的假設。雖然結構上更為複雜，而且製程難度較高，但這個機制卻能應用到整個可見光波段，消光比亦至少有 10 以上，允許的入射角度可參看表 3.1。



附錄一、Glan–Thomson 極化分光器的允許角度範圍

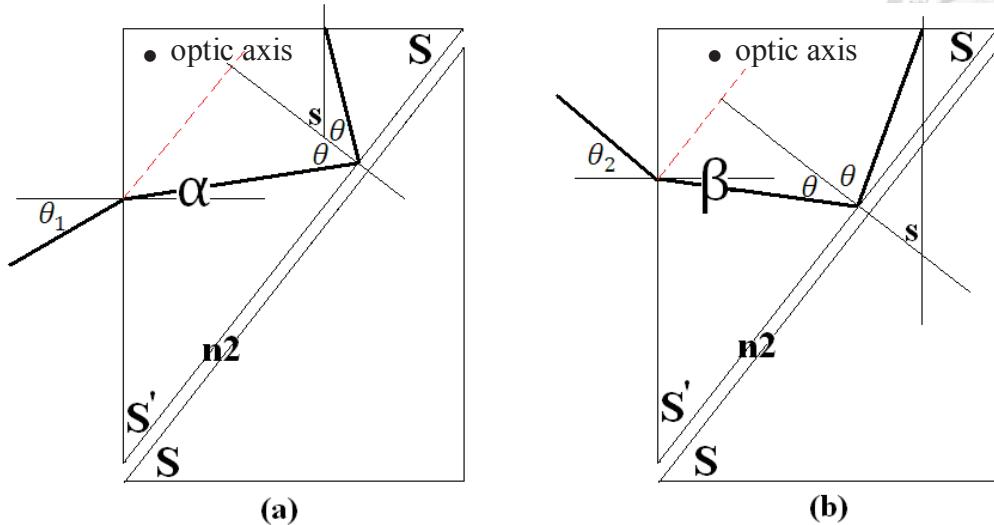


圖 A1 Glan–Thomson 極化器的尋常光(O-ray)路徑

在[4]之中，Glan–Thomson 極化器的入射角範圍有詳細的計算，其運算把兩塊晶體之間所填物質的折射率(n_2)，經過適當研磨後達到的角度 S 一併列入考慮。惟其運算並未考慮到經過全反射後的 o-ray 是否能夠折射出來。本附錄試著從幾何光學出發，希望能找到不同 n_2 和 S 會造成的影響，以此再推估入射角的範圍。

上圖接著第一章的討論，而兩條虛線是沿著入射法線，再往上轉 S 度，如此一來，虛線就和晶體和 n_2 之間的介面平行。如此一來，我們能像[4]一樣，得到：

$$S - \alpha + \theta = 90^\circ \quad \& \quad S + \beta + \theta = 90^\circ \quad .^{61} \quad (A-1)$$

接著，為了讓 o-ray 能夠折射出來，其入射角必定要小於其臨界角(critical angle)。由圖 A1 很快就能得到：

$$\begin{aligned} |S - \theta| &< \sin^{-1} 1/n_0 \\ \Rightarrow 90^\circ - S' - \sin^{-1} 1/n_0 &< \theta < 90^\circ - S' + \sin^{-1} 1/n_0 \end{aligned} \quad (A-2)$$

除此之外，o-ray 要達到全反射的條件，所以 $\sin^{-1} n_2/n_0 < \theta$ 。由此看來，決定 θ 上下限的式子可能不只一個。下表中，我將可能的情況分為光由下往上打(a)、由

⁶¹ 如果令 $90^\circ - S = S'$ ，就和第一章的 $\theta - \alpha = S'$ 一致了。

上往下打(b)，以及 o-ray 還有 e-ray。

(a) $\alpha = \theta - S'$		
$\alpha_e < \sin^{-1} 1/n_e$	θ_{\min}	S'
	θ_{\max}	$\min\left(\frac{\sin^{-1} n_2/n_e}{\sin^{-1} 1/n_e + S'}\right)$
$\alpha_o < \sin^{-1} 1/n_o$	θ_{\min}	$\max\left(\frac{90^\circ - S' - \sin^{-1} 1/n_o}{\sin^{-1} n_2/n_o}\right)$
	θ_{\max}	$\min\left(\frac{90^\circ - S' + \sin^{-1} 1/n_o}{\sin^{-1} 1/n_o + S'}\right)$
(b) $\beta = S' - \theta$		
$\beta_e < \sin^{-1} 1/n_e$	θ_{\min}	$\max\left(\frac{S' - \sin^{-1} 1/n_e}{0}\right)$
	θ_{\max}	$\min\left(\frac{\sin^{-1} n_2/n_e}{S'}\right)$
$\beta_o < \sin^{-1} 1/n_o$	θ_{\min}	$\max\left(\frac{90^\circ - S' - \sin^{-1} 1/n_o}{\sin^{-1} n_2/n_o}\right)$
	θ_{\max}	$\min\left(\frac{90^\circ - S' + \sin^{-1} 1/n_o}{S'}\right)$

表 A1 判斷入射光範圍所需的條件

有了這些之後，我們便能由 o-ray e-ray 的 θ 上下限，各自回推入射光的上下限，然後取兩者的交集，就是最終的結果了。我以 matlab 寫了個程式，判斷不同 n_2 之下，入射光上下限的變化。

由上表，當我們加大 n_2 ，需要的臨界角就越大，只要超過 S' ，我們就找不到對應的 β 角。同時 α 也越來越大，於是就造成了 n_2 上升，入射角的範圍就漸漸往大角度移動。但 α 不能無限制的加大，於是到最後即使入射角到 90 度了光也打不進去。 n_2 等於 1.4864 時，角度範圍有將近 45 度之多，但這些角度都落在大角度，這在實際情況下不太實用。至於另一個變數 S' ，可以預見的是，隨著 S' 的上升，

α會變得越來越小(所以入射角也越小)，β則變得越來越大(所以入射角也越大)。圖 A2 是 matlab 的運算結果，表 A2 是不同 S' 和 n_2 下入射角度的允許範圍。左邊是光由下往上打時入射光上下限隨 n_2 的變化，右邊則是光由上往下打。

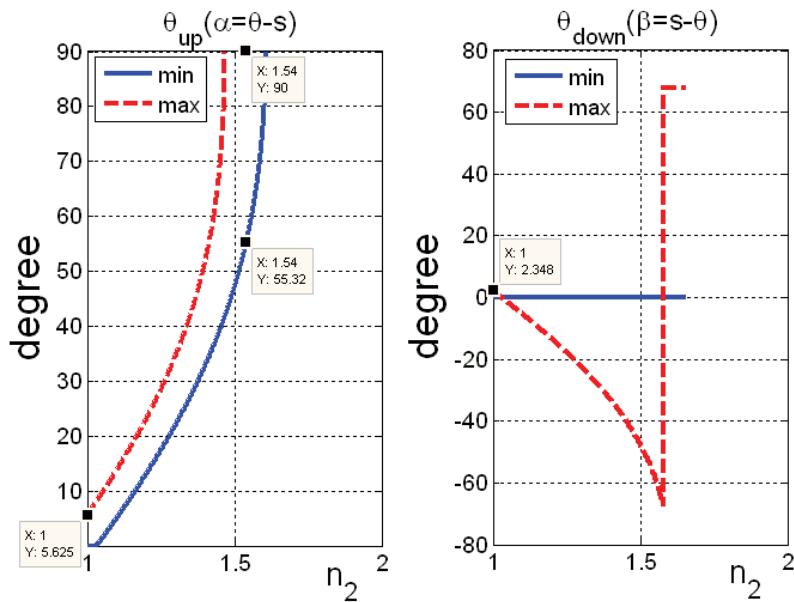


圖 A2 (左)不同 n_2 對應到的 θ_{up}
(右)不同 n_2 對應到的 θ_{down} ($S' = 38.5^\circ$)

n_2 S'	1	1.4864	1.54
38.5°	$0^\circ < \theta_{up} < 5.63^\circ$ $0^\circ < \theta_{down} < 2.35^\circ$	$44.86^\circ < \theta_{up} < 90^\circ$	$55.3^\circ < \theta_{up} < 90^\circ$
45°	$4.04^\circ < \theta_{down} < 13.2^\circ$	$32.07^\circ < \theta_{up} < 90^\circ$	$40.83^\circ < \theta_{up} < 90^\circ$
50°	$11.52^\circ < \theta_{down} < 21.76^\circ$	$23.08^\circ < \theta_{up} < 49.03^\circ$	$31.23^\circ < \theta_{up} < 49.03^\circ$
55°	$19.1^\circ < \theta_{down} < 30.67^\circ$	$14.48^\circ < \theta_{up} < 29.16^\circ$	$22.29^\circ < \theta_{up} < 29.16^\circ$

表 A2 不同 S' 與 n_2 下的不同入射角度範圍

由上表可以看出，當我們選用 S' 為 50° 左右有不錯的結果。但 50° 表示，若入射光平面約有 30 公分長，分光器的縱深就要到 35 公分，體積上就不大實用。



附錄二、第二章公式推導與探討

本附錄是第二章中一些式子的推導。



一、 ϵ 隨空間變化的波方程——(2-1)式的推導

由 $\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$ 以及 $\nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = \epsilon \nabla \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \nabla \epsilon = 0$ 。在時域諧波(time-harmonic)的馬克斯威爾方程下，我們很快能得到：

$$\nabla^2 \vec{E} + \nabla \left(\vec{E} \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \right) + \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} = 0 \quad (B-1)$$

至於磁場，由向量微分式可得：

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = j\omega [\nabla \times (\epsilon \vec{E})] = j\omega (\epsilon \nabla \times \vec{E} + \nabla \epsilon \times \vec{E}) \quad (B-2)$$

接著

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} = j\omega [\epsilon (-j\omega \mu \vec{H}) + \nabla \epsilon \times (\frac{\nabla \times \vec{H}}{j\omega \epsilon})] \quad (B-3)$$

最後可得

$$\nabla^2 \vec{H} + \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \times \nabla \times \vec{H} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{H} = 0 \quad (B-4)$$

二、特殊情況下的波方程——(2-2)式的推導

接著上面，由向量微分式：

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) \quad (B-5)$$

如前所述， $\nabla \epsilon = (\partial \epsilon / \partial x, 0, 0)$ 以及 $\vec{H} = (0, H_y, 0)$ ，分別對應到 \vec{B} 和 \vec{A} ，接著 $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ 、 $\nabla \times \vec{B} = 0$ (即 $\nabla \times \nabla \epsilon = 0$)。而 $(\vec{H} \cdot \nabla) \nabla \epsilon = H_y \frac{\partial}{\partial y} \epsilon = 0$ 。⁶²

所以最後就得到：

$$\nabla^2 \vec{H} - \left(\frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \cdot \nabla \right) \vec{H} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{H} = 0 \quad (B-6)$$

⁶² 在笛卡兒座標系(Cartesian coordinates)中 $\vec{A} \cdot \nabla = (A_x \partial / \partial x + A_y \partial / \partial y + A_z \partial / \partial z)$ 。

三、由布洛赫定理求模態解的係數——(2-5)式的推導

布洛赫定理是固態物理中相當重要的定理，該定理為：在週期排列的原子序列中，電子的物質波可寫成 $\psi(x) = e^{jkx}\theta(x)$ ，其中 $\theta(x)$ 為一週期函數。

在這邊，週期排列的介質也會導致電場和磁場有類似的效果。所以：

$$\begin{aligned}
 \underline{u(\Lambda)} &= e^{jk\Lambda}\theta(\Lambda) = e^{jk\Lambda}\theta(0) = \underline{e^{jk\Lambda}u(0)} \\
 \Rightarrow e^{jk\Lambda}u(0) &= a \cdot p(\Lambda) + b \cdot q(\Lambda) \\
 \Rightarrow ae^{jk\Lambda} &= a \cdot p(\Lambda) + b \cdot q(\Lambda) \\
 \Rightarrow \frac{a}{b} &= \frac{q(\Lambda)}{e^{jk\Lambda} - p(\Lambda)} \tag{B-7}
 \end{aligned}$$

四、從傳輸線理論推導(2-7)式

在傳輸線(transmission line)理論中，兩層介面的 ABCD 矩陣可寫為[36]：

$$\begin{bmatrix} \cos \beta L & jZ \sin \beta L \\ j \sin \beta L / Z & \cos \beta L \end{bmatrix} \tag{B-8}$$

其中， Z_m 為該介面的阻抗， β_m 為垂直介面的波向量(wave vector)分量。

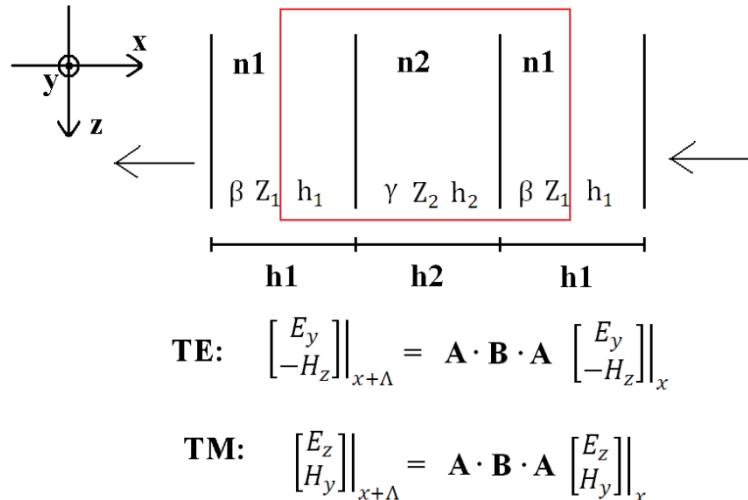


圖 B1 傳輸線理論的 ABCD 矩陣與週期性結構

如上圖，經過一個週期，就相當於在 $n1$ 中先走了 $h1/2$ (矩陣 A)，再來在 $n2$ 中走了 $h2$ (矩陣 B)，最後再在 $n1$ 中走 $h1/2$ (矩陣 A)，寫成矩陣形式如下。

$$\begin{bmatrix} \cos \beta h_1/2 & jZ_1 \sin \beta h_1/2 \\ j \sin \beta h_1/2 & \cos \beta h_1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma h_2 & jZ_2 \sin \gamma h_2 \\ j \sin \gamma h_2 / Z_2 & \cos \gamma h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta h_1/2 & jZ_1 \sin \beta h_1/2 \\ j \sin \beta h_1/2 & \cos \beta h_1/2 \end{bmatrix} \quad (B-9)$$

把上式相乘之後，我們便可將之等效為一個新的 ABCD 矩陣。比對係數後得到：

$$\cos(k_i \sin \theta_i \Lambda) = \cos \beta h_1 \cos \gamma h_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_2}{Z_1} \right) \sin \beta h_1 \sin \gamma h_2 \quad (B-10)$$

對 TE 來說其阻抗為：

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} = \frac{\sqrt{n_2^2 - n_{\text{eff}}^2}}{\sqrt{n_1^2 - n_{\text{eff}}^2}} = \frac{\gamma}{\beta} \quad (B-11)$$

TM 則為：

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{n_2 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_2} = \frac{n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_2} \cdot \frac{n_2^2}{n_1^2} = \frac{n_2^2 \beta}{n_1^2 \gamma} \quad (B-12)$$

最後就可以得到下式。

$$\cos \beta h_1 \cos \gamma h_2 - \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta\gamma} \sin \beta h_1 \sin \gamma h_2 = \cos(k_i \sin \theta_i \Lambda) \quad \text{TE (B-13a)}$$

$$\cos \beta h_1 \cos \gamma h_2 - \frac{n_2^4 \beta^2 + n_1^4 \gamma^2}{2n_1^2 n_2^2 \beta \gamma} \sin \beta h_1 \sin \gamma h_2 = \cos(k_i \sin \theta_i \Lambda) \quad \text{TM (B-13b)}$$

附帶一提的是，若假設光柵週期 Λ 遠小於波長，則 \cos 和 \sin 函數可近似成 $\cos \beta h_1 \approx 1 - (\beta h_1)^2/2$ 以及 $\sin \beta h_1 \approx \beta h_1$ 。

則對 TE 來說：

$$\left[1 - \frac{(\beta h_1)^2}{2} \right] \left[1 - \frac{(\gamma h_2)^2}{2} \right] - \frac{1}{2} (\beta^2 + \gamma^2) h_1 h_2 = 1$$

$$\xrightarrow{(\beta h_1)^2 \cdot (\gamma h_2)^2 \approx 0} (\beta h_1)^2 + (\gamma h_2)^2 + (\beta^2 + \gamma^2) h_1 h_2 = 0$$

$$\Rightarrow (\beta^2 h_1 + \gamma^2 h_2)(h_1 + h_2) = 0$$



$$\begin{aligned}
 & \xrightarrow{h_1+h_2 \neq 0} \beta^2 h_1 + \gamma^2 h_2 = 0 \\
 \Rightarrow (n_1^2 - n_{\text{eff}}^2)h_1 + (n_2^2 - n_{\text{eff}}^2)h_2 &= 0 \\
 \Rightarrow n_{\text{eff}}^2 &= \frac{h_1 n_1^2 + h_2 n_2^2}{h_1 + h_2} \tag{B-14}
 \end{aligned}$$

正好就是我們在第一章引入的等效折射率！TM 的部分類似 TE 的推導，有興趣的讀者可以一試。

五、(2-10)式的推導過程

$$e^{-j\frac{\pi}{\Lambda}x} = au_1(x) + bu_2(x) \tag{B-15}$$

$$a \cdot u_1(x) e^{-jk_0 n_{\text{eff1}} d} + b \cdot u_2(x) e^{-jk_0 n_{\text{eff2}} d} = E_0 e^{-j\frac{\pi}{\Lambda}x} + E_1 e^{j\frac{\pi}{\Lambda}x} \tag{B-16}$$

接著，我們對(B-15)和(B-16)式的左右邊各乘上 $e^{-j\frac{\pi}{\Lambda}x}$ 後 ($\int_0^\Lambda e^{-2j\frac{\pi}{\Lambda}x} dx = 0$)，然後積分得到：

$$\frac{a}{\Lambda} \int_0^\Lambda e^{-j\frac{\pi}{\Lambda}x} u_1(x) dx + \frac{b}{\Lambda} \int_0^\Lambda e^{-j\frac{\pi}{\Lambda}x} u_2(x) dx = 0 \tag{B-17}$$

令 $A = \frac{a}{\Lambda} \int_0^\Lambda e^{-j\frac{\pi}{\Lambda}x} u_1(x) dx$ 、 $B = \frac{b}{\Lambda} \int_0^\Lambda e^{-j\frac{\pi}{\Lambda}x} u_2(x) dx$ ，則(2)式的積分變為：

$$A e^{-jk_0 n_{\text{eff1}} d} + B e^{-jk_0 n_{\text{eff2}} d} = E_1 \tag{B-18}$$

由(B-17)， $A = -B$ 。則：

$$A(e^{-jk_0 n_{\text{eff1}} d} - e^{-jk_0 n_{\text{eff2}} d}) = E_1$$



$$\begin{aligned}
\therefore |E_1|^2 &= E_1 \cdot E_1^* = |A|^2 (e^{-jk_0 n_{eff1} d} - e^{-jk_0 n_{eff2} d})(e^{jk_0 n_{eff1} d} - e^{jk_0 n_{eff2} d}) \\
&= |A|^2 [2 - e^{jk_0 (n_{eff1} - n_{eff2}) d} - e^{-jk_0 (n_{eff1} - n_{eff2}) d}] \\
&= |A|^2 [2 - 2 \cos(k_0 (n_{eff1} - n_{eff2}) d)] \\
&= 4|A|^2 \sin^2 \frac{k_0 (n_{eff1} - n_{eff2}) d}{2}
\end{aligned} \tag{B-19}$$

由之前的討論，我們假設 $u_1(x) \approx \cos \pi x / \Lambda$ 、 $u_2(x) \approx \sin \pi x / \Lambda$ 。則由(B-15)式，可得 $a=1$ 以及 $b=i$ ，最後可得 $A=1/2$ ，代入上式就得到(2-10)式了。

六、使用平面波展開法的波方程——(2-13)式的推導

波方程為：

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k_0^2 \left(\sum_L \varepsilon_L e^{jL\frac{2\pi}{\Lambda}x} \right) E_y = 0 \tag{B-20}$$

將區域 II 的解(2-11b)式代入 (S_m'' 是 S_m 對 z 作二次微分)。

$$-\sum_m k_{mx}^2 S_m \cdot e^{-jk_{mx}x} + \sum_m S_m'' \cdot e^{-jk_{mx}x} + k_0^2 \sum_m \sum_L \varepsilon_L S_m e^{-jk_{(m+L)x}x} = 0 \tag{B-21}$$

令 $q = m + L$ 。

$$-\sum_q k_{qx}^2 S_q \cdot e^{-jk_{qx}x} + \sum_q S_q'' \cdot e^{-jk_{qx}x} + k_0^2 \sum_q \sum_L \varepsilon_L S_{q-L} e^{-jk_{qx}x} = 0 \tag{B-22}$$

整理一下即可得：

$$\sum_q (S_q'' - k_{qx}^2 S_q + k_0^2 \sum_L \varepsilon_L S_{q-L}) \cdot e^{-jk_{qx}x} = 0 \tag{B-23}$$

由於對每個 x 都要成立，所以：

$$S_q'' - k_{qx}^2 S_q + k_0^2 \sum_L \varepsilon_L S_{q-L} = 0 \tag{B-24}$$

七、能否讓 TE 極化也有相同的 n_{eff} ?

這個小段主要是探討，對 TE 極化來說我們是否有機會湊到兩個相同的 n_{eff} 。由前面的討論，若只有光柵層只有一層是不可能達到的。那像[23]，以兩層介質來組合呢？

在討論之前，我們有必要回頭檢視[23]的做法。

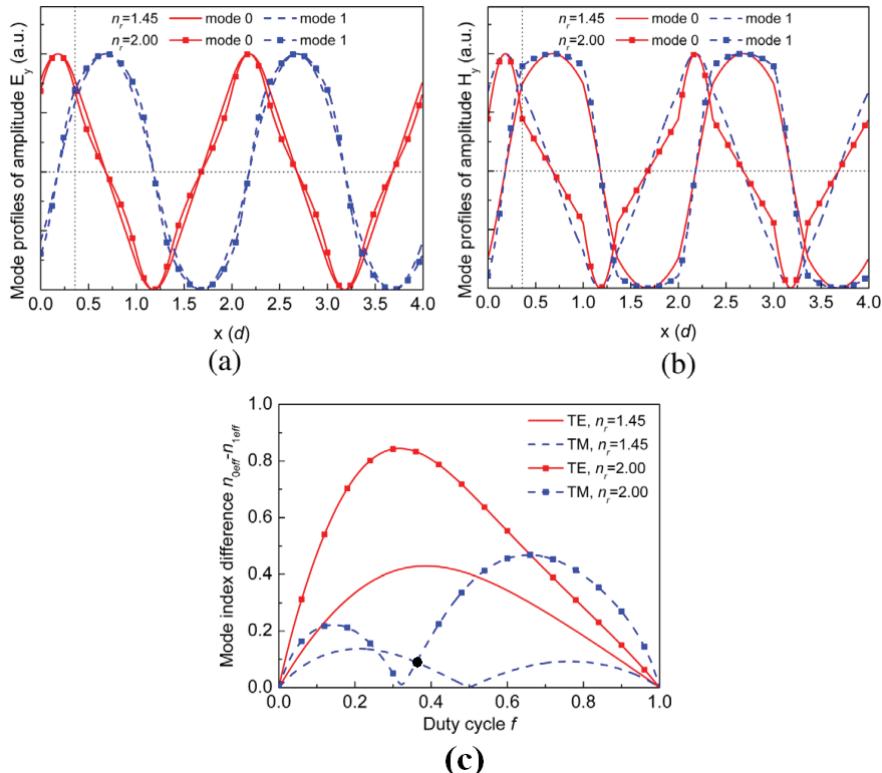


圖 B2 (a) TE 極化的場形分布 (b) TM 極化的場形分布 (c) $n_{0\text{eff}} - n_{1\text{eff}}$

上圖是[23]的一個範例，接著由下表定義奇偶(參看圖 B2(a)(b))。

TE	$n=1.45$	$n=2$	TM	$n=1.45$	$n=2$
even(cos-like)	mode 0	mode 0	even(cos-like)	mode 1	mode 0
odd(sin-like)	mode 1	mode 1	odd(sin-like)	mode 0	mode 1

表 B1 奇函數和偶函數的定義

由於偶函數比較容易耦進(coupling)偶函數[23]，因此對 TM 來說，其總相位差(偶函數模態的相位減去奇函數模態的相位)應該如下：

$$\begin{aligned}
 \Delta n \cdot d \cdot k_0 &= [(n_{1\text{eff}})_{1.45} + (n_{0\text{eff}})_2]d \cdot k_0 - [(n_{0\text{eff}})_{1.45} + (n_{1\text{eff}})_2]d \cdot k_0 \\
 &= [(n_{1\text{eff}})_{1.45} - (n_{0\text{eff}})_{1.45} + (n_{0\text{eff}})_2 - (n_{1\text{eff}})_2]d \cdot k_0 \\
 &= [(\Delta n)_2 - (\Delta n)_{1.45}]d \cdot k_0
 \end{aligned} \tag{B-25}$$

由以上不難發現，只要讓兩層的 Δn 相等($\Delta n = n_{0\text{eff}} - n_{1\text{eff}}$)就能讓總相位差為零。從圖 B2(c)，我們能夠輕易的找到這個合適的填充因子。而仔細的推敲推導流程可以發現，總相位差之所以是兩層 Δn 的差值，是因為其中一層的 mode 1 正好對應到偶函數。所以，問題的核心在於，我們有沒有辦法讓 TE 的模態解，其 mode 1 (對應較小的 n_{eff})正好對應到偶函數(even)(高折射率區域)。

光子晶體中有這樣的概念：考慮電場有許多模態解，且彼此在空間的變化相差不大(彼此斜率相仿)，那集中在高折射率的電場會對應到最低頻的模態(eigenmode)[45]。對一維的光子晶體來說，正向入射的克若尼-潘尼模型(Kronig-Penney Model)有以下的式子：

$$\cos \frac{\omega}{c_0} n_1 h_1 \cos \frac{\omega}{c_0} n_2 h_2 - \frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1 n_2} \sin \frac{\omega}{c_0} n_1 h_1 \sin \frac{\omega}{c_0} n_2 h_2 = \cos(k\Lambda) \tag{B-26}$$

事實上，就是因為上式找不到某一些 ω 的解，才有能階的存在。

若將之和我們的式子對比，克若尼-潘尼模型中的 ω 就能對應到 n_{eff} 。

$$\begin{aligned}
 \cos \beta h_1 \cos \gamma h_2 - \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta\gamma} \sin \beta h_1 \sin \gamma h_2 &= \cos(k_i \sin \theta_i \Lambda) \\
 \frac{\omega}{c_0} n_1 \leftrightarrow \beta &= k_0 \sqrt{n_1^2 - n_{\text{eff}}^2}
 \end{aligned} \tag{B-27}$$

我們的模態解也正好類似於正弦和餘弦函數，空間的變化也相差不大。如此一來，我們是不是可以類比「電場集中在高折射率會對應到最低頻的模態」成「電

場集中在高折射率會對應到大的 n_{eff} 。⁶³正如第二章圖 2.2 和圖 2.3 的例子所示。

嚴謹的數學證明如下，我們引入[45]的定義。

$$u_f = \frac{\int d^3\vec{r} |\nabla \times \vec{E}|^2}{\int d^3\vec{r} \epsilon(\vec{r}) |\vec{E}|^2} = \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 \quad (B-28)$$

TE 極化可寫為 $E_y(x, z) = u(x)e^{-jk_z z}$ ，因此：

$$\nabla \times \vec{E} = (jk_z u(x)e^{-jk_z z}, 0, u'(x)e^{-jk_z z})$$

$$u_f = \frac{\int [|k_z u(x)|^2 + |u'(x)|^2] dx}{\int \epsilon(\vec{r}) |\vec{E}|^2 dx} = \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 \quad (B-29)$$

在利特羅裝置下，兩組模態解可近似成正弦和餘弦函數，因此兩個模態的積分項 $\int |u'(x)|^2 dx$ 應相差不大⁶³。如此一來，兩個模態在分子項的差別就是 $k_z^2 = k_0^2 n_{eff}^2$ 。假設電場集中在高折射率的地方，那麼分母就相對較大，但兩個模態都是對應到同一個頻率⁶⁴，那麼分子就只能較大，亦即有較大的 n_{eff} 。

這麼看來，若 TE 的兩個 n_{eff} 對應到兩個模態解，其中較大的 n_{eff} 就會使電場集中在高折射率(即偶函數)的地方，也因此，我們很難找到低 n_{eff} 的偶函數電場。意即我們很難讓 mode 1 (對應較小的 n_{eff}) 對應到偶函數(even)(高折射率區域)。

八、對光柵週期的限制——(2-9)式的推導

前面提到，填充因子有特定關係時，TM 極化有相同的 n_{eff} 。為了能實際應用這個特性，我們必須讓填充因子大於零，而由於製程的限制，我們更進一步要求 h_1 和 h_2 不得小於 a ⁶⁵。

$$h_1 = \Lambda f = \frac{\pi - \gamma \Lambda}{\beta - \gamma} > a \Rightarrow \frac{\pi - a(\beta - \gamma)}{\gamma} > \Lambda$$

⁶³ 讀者可試著積分 $\int_0^\Lambda \cos^2 \pi x / \Lambda dx$ 和 $\int_0^\Lambda \sin^2 \pi x / \Lambda dx$ 。

⁶⁴ 這邊和一維光子晶體有些微不同，我們的結構中是沒有能階的。

⁶⁵ λ_c 是波段的中心波長。此外，這邊我們先引用 $\beta h_1 + \gamma h_2 = \pi$ ，最後說明為何只取 $n=1$ 。



(B-30)

$$h_2 = \Lambda(1 - f) = \frac{\beta\Lambda - \pi}{\beta - \gamma} > a \Rightarrow \frac{\pi + a(\beta - \gamma)}{\beta} < \Lambda$$

$$\text{with } \beta = \frac{2\pi}{\lambda_c} \sqrt{\frac{n_1^4}{n_2^2 + n_1^2}} \quad \gamma = \frac{2\pi}{\lambda_c} \sqrt{\frac{n_2^4}{n_2^2 + n_1^2}}$$

上式中，若 $a=0$ ，則波長的限制變為：

$$\frac{\lambda_c}{2} \sqrt{\frac{n_2^2 + n_1^2}{n_1^4}} < \Lambda < \frac{\lambda_c}{2} \sqrt{\frac{n_2^2 + n_1^2}{n_2^4}} \quad (B-31)$$

此外，我們也必須讓波段內的所有波長在利特羅裝置下 ($n_i \sin \theta_i = \lambda_c/2\Lambda$) 都能有一階的繞射光穿透。此即：

$$|n_t \sin \theta_m| = \left| \frac{\lambda_c}{2\Lambda} - \frac{\lambda}{\Lambda} \right| < n_t \quad (B-32)$$

$$|\lambda_c - 2\lambda| < 2n_t\Lambda$$

若我們限制此光柵只能有零階和一階的繞射光，那麼：

$$\left| \frac{\lambda_c}{2\Lambda} - 2 \frac{\lambda}{\Lambda} \right| > n_t \quad \& \quad \left| \frac{\lambda_c}{2\Lambda} + \frac{\lambda}{\Lambda} \right| > n_t \quad (B-33)$$

$$\Rightarrow 2n_t\Lambda < \min \{ |\lambda_c - 4\lambda|, |\lambda_c + 2\lambda| \}$$

最後，讓我們來看看，為何(2-19)式的推導中， n 等於 1？

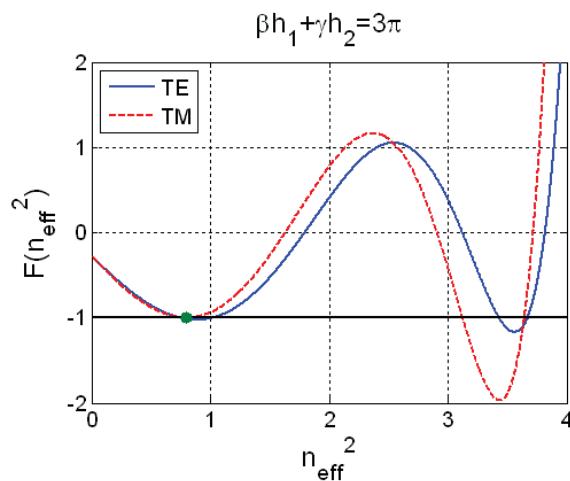


圖 B3 $\beta h_1 + \gamma h_2 = 3\pi$ 時， $F(n_{\text{eff}}^2) = -1$ 對應的 n_{eff}^2 解
 $\sim 99 \sim$

由圖中能看出， 3π 對應到第二個谷值。這表示在利特羅裝置下，TM 極化有三個 n_{eff} ，TE 極化則有四個。我們可由上面的式子把光柵週期的限制算出如下表⁶⁶。

條件	數學式	計算結果	
$f > 0$	$n \frac{\lambda_c}{2} \sqrt{\frac{n_2^2 + n_1^2}{n_1^4}} < \Lambda < n \frac{\lambda_c}{2} \sqrt{\frac{n_2^2 + n_1^2}{n_2^4}}$	$n=1$	$0.1286 < \Lambda < 0.5143 \text{ (}\mu\text{m)}$
		$n=3$	$0.3858 < \Lambda < 1.5429 \text{ (}\mu\text{m)}$
波段內的波長都有 一階繞射光穿透	$ \lambda_c - 2\lambda < 2n_t\Lambda$	$0.219 < \Lambda \text{ (}\mu\text{m)}$	
只有一階和零階繞 射光穿透	$2n_t\Lambda < \min \{ \lambda_c - 4\lambda , \lambda_c + 2\lambda \}$	$\Lambda < 0.4161 \text{ (}\mu\text{m)}$	

表 B2 對光柵週期的限制

從上表我們可以發現，週期 $0.4\mu\text{m}$ 時，仍然只有零階和一階的繞射光穿透。若我們取 $n=3$ ，反而還多了兩個 n_{eff} 。在前面我們曾提及，零階和一階的繞射，能夠看成是各個模態相互干擾的結果，現在我們有四個模態，以此設計反而增加了複雜度。是以在(2-19)式中我們選 $n=1$ 的情況。

九、對光柵週期的進一步探討

這個小段，筆者將嘗試解釋兩個問題。為何零階的消光比會像小山丘(圖 2.27)？以及，為何週期小時，零階消光比對角度的容忍度可以較大，所以看起來較不像山丘(圖 2.23)？

下圖是第二章圖 2.24 中 TE 極化的零階穿透率，圖中的虛線是不同波長對

⁶⁶ 波段為 $0.4\mu\text{m} \sim 0.53\mu\text{m}$ ，中心波長為 $0.46\mu\text{m}$ ， n_t 為 1.37 ， $n_1 = 2$ 、 $n_2 = 1$ ，週期為 $0.4\mu\text{m}$ 。這邊先忽略製程的要求 a 。

應到的利特羅角度($n_i \sin \theta_i = \lambda/2\Lambda$)。雖然在這條線上有達到利特羅裝置的條件，但是由(2-10)式能看出，要讓一階繞射光有高繞射效率，不同波長會求出不同的光柵深度。而我們現在都是使用相同的光柵深度，因此可以預見的是，由中心點往外，一階繞射效率就會慢慢降低，對應到零階繞射效率就是慢慢升高。

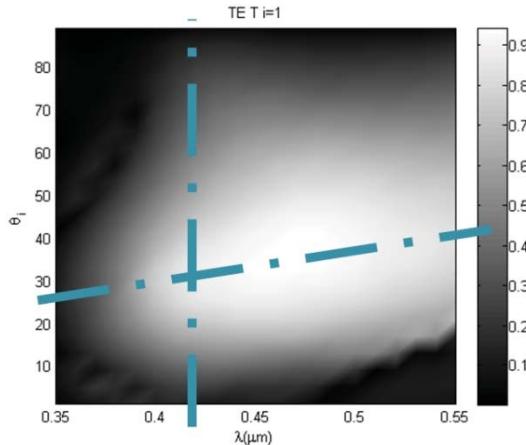


圖 B4 TE 極化的一階穿透率與波長及入射角的關係

此外，由於利特羅裝置是由角度決定的，對單一波長來說，離開利特羅角度後(上圖的鉛直線)，一階繞射效率就會慢慢降低，對應到零階繞射效率就是慢慢升高，而 TM 極化在這區域幾乎都是高繞射效率，使得消光比看起來就像一座小山丘。

因此，為了讓 TE 極化能夠容忍較大的角度變化，我們希望滿足利特羅角度斜直線上的每一點，其一階穿透率都變動不大。因為斜直線上的點都滿足利特羅裝置的要求，因此我們能夠使用(2-10)式來計算。下表是不同光柵週期下，以(2-10)式推估的一階穿透率。

Period	0.42		0.46		0.53	
	TE 1 st	TM 1 st	TE 1 st	TM 1 st	TE 1 st	TM 1 st
0.3(μm)	0.9859	0.0273	1	0	0.9877	0.0716
0.35(μm)	0.9735	0.0122	1	0	0.9659	0.0292
0.4(μm)	0.9616	0.0063	1	0	0.9491	0.0152

表 B3 以(2-10)式推估不同光柵週期下 B 波段若干波長的一階穿透率

從上表很容易看出，TE 極化在波長較短時有比較好的表現，TM 極化則與之相反。讀者可以比對圖 2.22 及圖 2.23(週期為 $0.3\mu\text{m}$)&圖 2.26 及圖 2.27(週期為 $0.4\mu\text{m}$)&圖 2.30 及圖 2.31(週期為 $0.35\mu\text{m}$)。



附錄三、三維嚴格耦合波法



這個附錄會介紹筆者使用的三維嚴格耦合波法，基本上本於[40][42][43]。

一、平面波展開法

讓我們回顧圖 2.41。

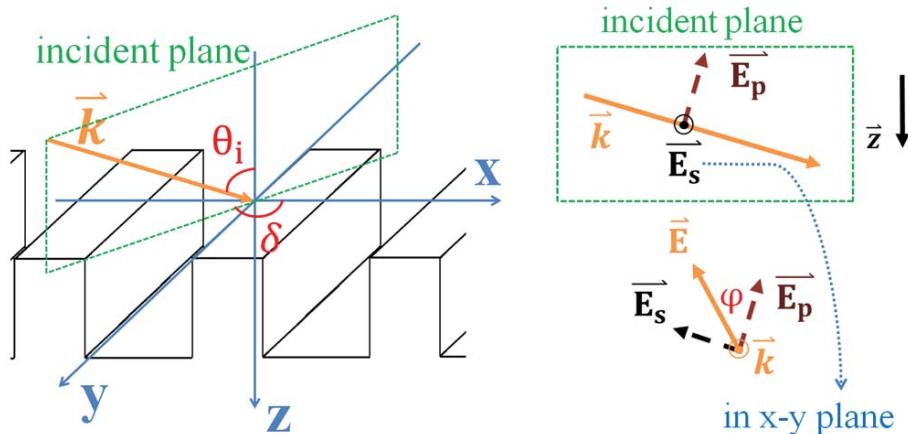


圖 C1 定義立體角度與極化[40]

在第二章曾經提過，電場可以拆成垂直入射平面的 E_s (在 x-y 平面上) 以及入射平面內的分量 E_p ，TE 極化對應 $\varphi = 90^\circ$ ，TM 極化則是 $\varphi = 0^\circ$ 。無論 TE 或是 TM 極化，我們必須考慮電場的 x 和 y 分量⁶⁷，因此需要重新定義平面波展開式。

1. 區域 I 和 III 的 S 分量

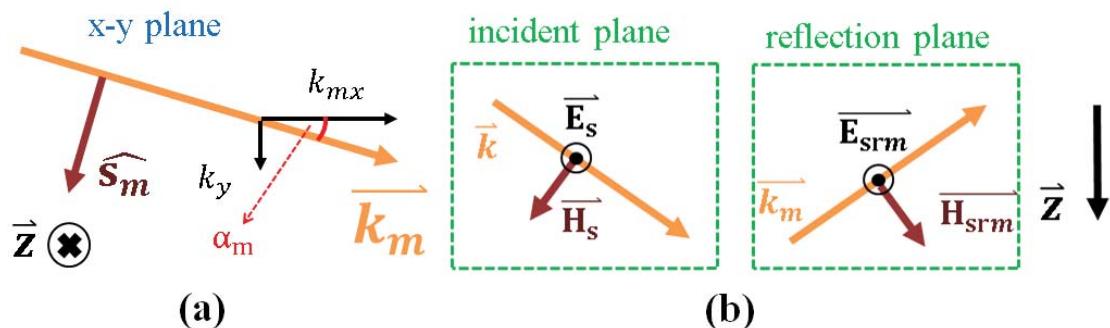


圖 C2 S 分量的電磁場向量

(a) x-y 平面上的向量示意 (b) 入射平面和反射平面

⁶⁷ 由於邊界條件只需要 x 方向和 y 方向的電磁場分量，所以我們只考慮 x 和 y 的分量。

圖 C.2 簡單說明了電磁波向量的幾何關係，其中 m 表示繞射階數。圖 C.2(a) 的 k_{mx} 類似第二章提到的繞射公式，寫為 $k_{mx} = k_0 n_i \sin \theta_i \cos \delta - 2m\pi/\Lambda$ 。而 \hat{s}_m 是 電場的單位向量，和入射平面垂直(即和波向量 \vec{k}_m 垂直)。值得注意的是，不同階 繞射光，會有不同的波向量 \vec{k}_m ，也因此會有不同的反射平面和穿透平面， α_m 和 \hat{s}_m 也會不同，在這當中， $\alpha_m = \tan^{-1} k_y / k_{mx}$ 、 $\hat{s}_m = -\sin \alpha_m \hat{a}_x + \cos \alpha_m \hat{a}_y$ 。

由圖 C.2 和圖 C.1，假設區域 I 和 III 電場平面波展開式的基底(basis)如下⁶⁸：

$$\vec{E}_s = \sin \varphi e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \hat{s}_0 = \sin \varphi e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \cdot (-\sin \alpha_0, \cos \alpha_0) \quad (C-1a)$$

$$\vec{E}_{srm} = R_{sm} e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \hat{s}_m = R_{sm} e^{-j\vec{k}_{mr} \cdot \vec{r}} \cdot (-\sin \alpha_m, \cos \alpha_m) \quad (C-1b)$$

$$\vec{E}_{stm} = T_{sm} e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \hat{s}_m = T_{sm} e^{-j\vec{k}_{mt} \cdot \vec{r}} \cdot (-\sin \alpha_m, \cos \alpha_m) \quad (C-1c)$$

(C-1a)式的 $\sin \varphi$ 可由圖 C.1 看出，當中的 $\alpha_0 = \tan^{-1} k_y / k_{0x}$ 如圖 C.2 定義，正是 入射波向量對應的角度值。此外，為了在邊界條件中方便地運用，在最後都以 xy 座標系表示這些向量。接著由(C-1)式，和馬克斯威爾方程的法拉第定律⁶⁹ ($\nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu_0 \vec{H}$)，我們能夠求得磁場在 x 與 y 方向的分量，列式如下：

$$(\vec{H}_s)|_{xy} = -\frac{k_{0z}}{k_0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sin \varphi e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \cdot (\cos \alpha_0, \sin \alpha_0) \quad (C-2a)$$

$$(\vec{H}_{srm})|_{xy} = \frac{k_{mz1}}{k_0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} R_{sm} e^{-j\vec{k}_{mr} \cdot \vec{r}} \cdot (\cos \alpha_m, \sin \alpha_m) \quad (C-2b)$$

$$(\vec{H}_{stm})|_{xy} = -\frac{k_{mz3}}{k_0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} T_{sm} e^{-j\vec{k}_{mt} \cdot \vec{r}} \cdot (\cos \alpha_m, \sin \alpha_m) \quad (C-2c)$$

⁶⁸ $\vec{k}_i \cdot \vec{r} = k_{0x}x + k_y y + k_{0z}z$ ， $\vec{k}_{mr} \cdot \vec{r} = k_{mx}x + k_y y - k_{mz1}z$ ， $\vec{k}_{mt} \cdot \vec{r} = k_{mx}x + k_y y + k_{mz3}(z - d)$ 。當中 $k_{mzi} = \sqrt{k_i^2 - k_{mx}^2 - k_y^2}$ ($i = 1$ 或 3)、 $k_y = k_0 n_i \sin \theta_i \sin \delta$ 、 $k_0 = 2\pi/\lambda$ 、 d 是光柵深度。

⁶⁹ 假設非磁性材料。

2. 區域 I 和 III 的 P 分量

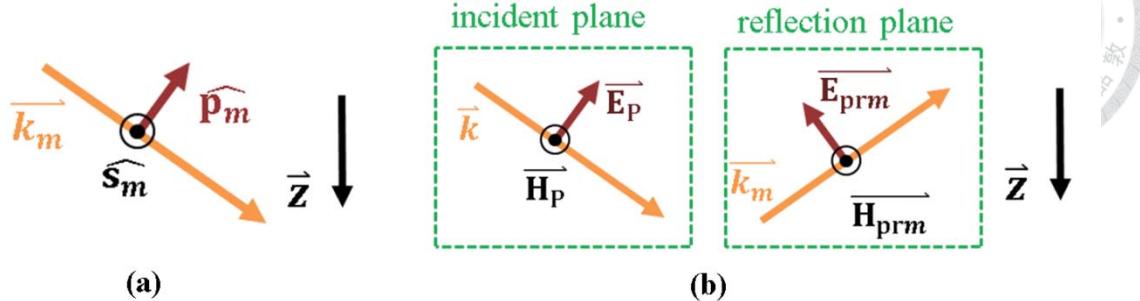


圖 C3 P 分量的電磁場向量

(a) $\widehat{S_m}$ 、 $\widehat{P_m}$ 和 \vec{k}_m 的向量關係 (b) 入射平面和反射平面

由圖 C.1 可得 $\vec{E}_p = \cos \varphi e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \widehat{P_0}$ 。由圖 C.3(a)，三者的單位向量會滿足

$\widehat{S_0} \times \widehat{k_0} = \widehat{P_0}$ ，以此能求 $\widehat{P_0}$ ⁷⁰。最後， $(\vec{E}_p)|_{xy} = \cos \varphi \cos \theta e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \cdot (\cos \alpha_0, \sin \alpha_0)$ 。

由此，利用安培定律($\nabla \times \vec{H} = j\omega \epsilon_0 n_1^2 \vec{E}$)，我們能將 \vec{H}_p 求出。而此處和 S 分量有些微不同，S 分量的反射係數 R 和穿透係數 T 是由電場定義的(參看(C-1)式)，這邊的 P 分量會效法[36]的作法，由磁場定義反射係數 R 和穿透係數 T。

$$\vec{H}_p = n_1 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos \varphi e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \cdot (-\sin \alpha_0, \cos \alpha_0) \quad (C-3a)$$

$$\vec{H}_{prm} = n_1 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} R_{pm} e^{-j\vec{k}_{mr} \cdot \vec{r}} \cdot (-\sin \alpha_0, \cos \alpha_0) \quad (C-3b)$$

$$\vec{H}_{ptm} = n_1 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} T_{pm} e^{-j\vec{k}_{mt} \cdot \vec{r}} \cdot (-\sin \alpha_0, \cos \alpha_0) \quad (C-3c)$$

同樣的，利用安培定律，我們也能將各個電場的 xy 分量都求出。

$$(\vec{E}_p)|_{xy} = \cos \varphi \cos \theta e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \cdot (\cos \alpha_0, \sin \alpha_0) \quad (C-4a)$$

⁷⁰ $\widehat{k_0} = (\sin \theta \cos \delta, \sin \theta \sin \delta, \cos \theta)$ 、 $\widehat{S_0} = (-\sin \alpha_0, \cos \alpha_0, 0)$ 。當然，除了外積的求法，我們也可以將 $\widehat{P_0}$ 投影至 $\widehat{k_0}$ 上(即乘 $\cos \theta$)，再配上 $\widehat{S_0}$ 在 xy 平面的法向量，即 $(\cos \alpha_0, \sin \alpha_0, 0)$ 。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E_{\text{prm}}}|_{xy} &= -\frac{k_{mz1}}{n_1 k_0} R_{\text{pm}} e^{-j \overrightarrow{k_{mr}} \cdot \vec{r}} \cdot (\cos \alpha_m, \sin \alpha_m) \\ \overrightarrow{E_{\text{ptm}}}|_{xy} &= \frac{k_{mz3} n_1}{k_0 n_3^2} T_{\text{sm}} e^{-j \overrightarrow{k_{mt}} \cdot \vec{r}} \cdot (\cos \alpha_m, \sin \alpha_m) \end{aligned}$$



3. 區域 II

正如第二章提到，筆者使用的平面波展開法本於[42]的(8)和(9)式，同樣地，
m 表示繞射階數。以下是展開式的平面波基底(basis)：

$$\overrightarrow{E_m}|_{xy} = e^{-j(k_{mx}x + k_{yy})} (S_{mx}(z) \hat{a}_x + S_{my}(z) \hat{a}_y) \quad (\text{C-5a})$$

$$\overrightarrow{H_m}|_{xy} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} e^{-j(k_{mx}x + k_{yy})} (U_{mx}(z) \hat{a}_x + U_{my}(z) \hat{a}_y) \quad (\text{C-5b})$$

二、馬克斯威爾方程與特徵值問題

在第二章時，我們決定了平面波展開式後，隨即就能代入波方程，然後藉由特徵值方程式，算出特徵值與特徵向量，不過三維的情況稍微複雜些，我們在此先簡略推導和介紹會使用到的電磁波方程式，接著再引入特徵值問題。

由(2-1a)式⁷¹：

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} + \nabla \left(\vec{E} \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \right) + k_0^2 \epsilon \vec{E} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E_x \partial \epsilon}{\epsilon \partial x} \right) + k_0^2 \epsilon E_x &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= -\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial (\epsilon E_x)}{\partial x} \right] - k_0^2 \epsilon E_x \end{aligned} \quad (\text{C-6})$$

此式正是[42]的(21a)式，由(C-5a)，將 $E_x = \sum_m e^{-j(k_{mx}x + k_{yy})} S_{mx}(z)$ 、以及

⁷¹ $\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E_x \partial \epsilon}{\epsilon \partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\epsilon} \left(E_x \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial (\epsilon E_x)}{\partial x} \right]$

$\varepsilon(x) = \sum_L \varepsilon_L e^{jL\frac{2\pi}{\lambda}x}$ 和 $\frac{1}{\varepsilon(x)} = \sum_L a_L e^{jL\frac{2\pi}{\lambda}x}$ 代入(C-6)式，整理得到 $S_{mx}(z)$ 的特徵值方

程式。接著似第二章(2-14)式的做法，令 $\mathbf{S}_x = [\cdots \quad S_{(m-1)x} \quad S_{mx} \quad S_{(m+1)x} \quad \cdots]^T$

以矩陣形式(粗體字為矩陣)描述如下(S_m'' 是 S_m 對 Z 作二次微分)。

$$\mathbf{S}_x'' = k_y^2 \mathbf{S}_x + \mathbf{k}_x \mathbf{E}^{-1} \mathbf{k}_x \mathbf{E} \mathbf{S}_x - k_0^2 \mathbf{E} \mathbf{S}_x \quad (C-7)$$

其中， \mathbf{E} 和 \mathbf{k}_x 正如(2-16)式所示， \mathbf{E}^{-1} 是由 a_L 構成的矩陣，其寫法同 \mathbf{E} 。

接著由(2-1b)式⁷²。

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{H} + \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \times \nabla \times \vec{H} + k_0^2 \varepsilon \vec{H} &= 0 \\ \Rightarrow \nabla^2 \vec{H} + k_0^2 \varepsilon \vec{H} + j\omega \varepsilon_0 (\nabla \varepsilon \times \vec{E}) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k_0^2 \varepsilon H_x &= 0 \end{aligned} \quad (C-8)$$

由(C-5b)式，把 $H_x = \sum_m \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} e^{-j(k_{mx}x + k_y y)} U_{mx}(z)$ 代入(C-8)式可得：

$$\mathbf{U}_x'' = k_y^2 \mathbf{U}_x + \mathbf{k}_x^2 \mathbf{U}_x - k_0^2 \mathbf{E} \mathbf{U}_x \quad (C-9)$$

(C-7)和(C-9)式類似於[40]的(60)式，正如第二章的介紹，這兩個式子是典型的特徵值問題。其解會是特徵向量與特徵值的線性組合，詳列如下：

$$\mathbf{U}_x = \mathbf{W}_1 e^{-\lambda_1 z} \mathbf{C}_1^- + \mathbf{W}_1 e^{\lambda_1 z} \mathbf{C}_1^+ \quad (C-10a)$$

$$\mathbf{S}_x = \mathbf{W}_2 e^{-\lambda_2 z} \mathbf{C}_2^- + \mathbf{W}_2 e^{\lambda_2 z} \mathbf{C}_2^+ \quad (C-10b)$$

λ_1 和 λ_2 是由特徵值組成的對角矩陣， \mathbf{W}_1 則是由這些特徵值對應的特徵向量組成的矩陣， \mathbf{C}_1^- 、 \mathbf{C}_1^+ 、 \mathbf{C}_2^- 和 \mathbf{C}_2^+ 為 $M \times 1$ 的陣列(array)，對應到每一對特徵向量和特徵值的係數。接著，由 $\nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu_0 \vec{H}$ 和 $\nabla \times \vec{H} = j\omega \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ 兩個旋度(curl)方程，我們能各自展開三個向量方程，總計六個方程式。以下讓我們看這兩組方程式：

⁷² $\nabla \times \vec{H} = j\omega \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ 。因為 $\nabla \varepsilon$ 只有 x 分量， $\nabla \varepsilon \times \vec{E}$ 的 x 分量要等於 0。



$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\epsilon_0\epsilon E_z \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \right] = -j\omega\mu_0 H_y \quad (C-11a)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\epsilon_0\epsilon E_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu_0 H_z \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{-1}{j\omega\mu_0} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \right] = j\omega\epsilon_0\epsilon E_y \quad (C-11b)$$

將 E_x 和 E_y 及 H_x 、 H_y 代入上式可得⁷³：

$$\mathbf{S}'_x = j \frac{\mathbf{k}_x}{k_0} \mathbf{E}^{-1} (\mathbf{k}_x \mathbf{U}_y - k_y \mathbf{U}_x) - j k_0 \mathbf{U}_y \quad (C-12a)$$

$$\mathbf{U}'_x = -j \frac{\mathbf{k}_x}{k_0} (\mathbf{k}_x \mathbf{S}_y - k_y \mathbf{S}_x) + j k_0 \mathbf{E} \mathbf{S}_y \quad (C-12b)$$

(C-12)式正好對應[42]中的(13a)和(13c)兩式。將(C-12)重新整理後：

$$j k_0 \left(\frac{\mathbf{k}_x}{k_0} \mathbf{E}^{-1} \frac{\mathbf{k}_x}{k_0} - \mathbf{I} \right) \mathbf{U}_y = \mathbf{S}'_x + j k_y \frac{\mathbf{k}_x}{k_0} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{U}_x \quad (C-13a)$$

$$j k_0 \left[\left(\frac{\mathbf{k}_x}{k_0} \right)^2 - \mathbf{E} \right] \mathbf{S}_y = -\mathbf{U}'_x + j k_y \frac{\mathbf{k}_x}{k_0} \mathbf{S}_x \quad (C-13b)$$

把(C-10)式代入(C-13)式，統整如下表(令 $\mathbf{A} = \left(\frac{\mathbf{k}_x}{k_0} \right)^2 - \mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}_x}{k_0} \mathbf{E}^{-1} \frac{\mathbf{k}_x}{k_0} - \mathbf{I}$)：

f(z)	$f(z) = a e^{-\lambda_1 z} \mathbf{C}_1^- + b e^{-\lambda_2 z} \mathbf{C}_2^- + c e^{\lambda_1 z} \mathbf{C}_1^+ + d e^{\lambda_2 z} \mathbf{C}_2^+$			
	a	b	c	d
\mathbf{U}_x	\mathbf{W}_1	0	\mathbf{W}_1	0
\mathbf{U}_y	$\frac{k_y}{k_0} \mathbf{B}^{-1} \frac{\mathbf{k}_x}{k_0} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{W}_1$	$-\frac{1}{j k_0} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{W}_2 \lambda_2$	$\frac{k_y}{k_0} \mathbf{B}^{-1} \frac{\mathbf{k}_x}{k_0} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{W}_1$	$\frac{1}{j k_0} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{W}_2 \lambda_2$
\mathbf{S}_x	0	\mathbf{W}_2	0	\mathbf{W}_2
\mathbf{S}_y	$\frac{1}{j k_0} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{W}_1 \lambda_1$	$\frac{k_y}{k_0} \mathbf{A}^{-1} \frac{\mathbf{k}_x}{k_0} \mathbf{W}_2$	$-\frac{1}{j k_0} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{W}_1 \lambda_1$	$\frac{k_y}{k_0} \mathbf{A}^{-1} \frac{\mathbf{k}_x}{k_0} \mathbf{W}_2$

表 C1 用特徵值的線性組合表示 \mathbf{U}_x 、 \mathbf{U}_y 、 \mathbf{S}_x 、 \mathbf{S}_y

⁷³ $\partial/\partial y \Rightarrow -j k_y$ 、 $\partial/\partial x \Rightarrow -j \mathbf{k}_x$ 。

表 C1 可對應到[40]的(61)到(65)式。

到此，只要解開 \mathbf{U}_x 、 \mathbf{S}_x 兩個特徵值問題，就能用這些特徵值的線性組合表示 \mathbf{U}_x 、 \mathbf{U}_y 、 \mathbf{S}_x 、 \mathbf{S}_y 四個函數。



三、邊界條件

這邊使用的邊界條件一樣是電磁場在 xy 介面上要連續，意即(C-1)到(C-4)式和表 C1 在邊界上($z=0 \& z=d$)要相等。

我們在(C-1)到(C-4)式，分別把電磁場在 xy 平面上的分量求出來，現在即可利用表 C1 的結果作向量的疊加，如圖 C4 所示。

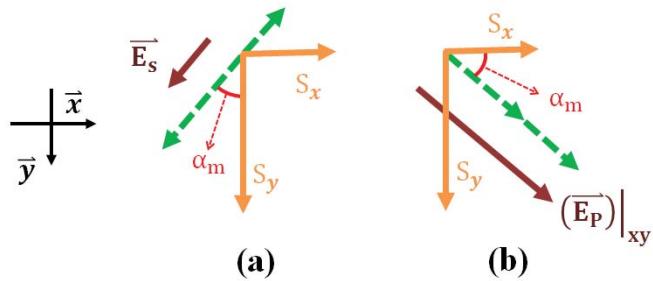


圖 C4 以 S_x 和 S_y 組合出 \vec{E}_s 與 $(\vec{E}_p)|_{xy}$

以 $m=0$ 的平面波基底為例， \vec{E}_s 在 $z=0$ 的邊界條件應為：

$$\sin \varphi + R_{s0} = \cos \alpha_0 S_{0y} - \sin \alpha_0 S_{0x} \quad (C-14)$$

(C-14)的右式可對應到圖 C4(a)。每個基底都會有一個類似(C-14)式的式子，最後就可以寫成矩陣的形式⁷⁴。

$$\sin \varphi \mathbf{I}' + \mathbf{R}_s = \mathbf{F}_c \mathbf{S}_y - \mathbf{F}_s \mathbf{S}_x \quad (C-15a)$$

$$n_1 \cos \theta \sin \varphi \mathbf{I}' - \frac{k_{z1} \mathbf{R}_s}{k_0} = -\mathbf{F}_s \mathbf{U}_y - \mathbf{F}_c \mathbf{U}_x \quad (C-15b)$$

$$n_1 \cos \varphi \mathbf{I}' + n_1 \mathbf{R}_p = \mathbf{F}_c \mathbf{U}_y - \mathbf{F}_s \mathbf{U}_x \quad (C-15c)$$

$$\cos \theta \cos \varphi \mathbf{I}' - \frac{k_{z1} \mathbf{R}_p}{n_1 k_0} = \mathbf{F}_s \mathbf{S}_y + \mathbf{F}_c \mathbf{S}_x \quad (C-15d)$$

⁷⁴ (C-2a)式的 $k_{0z} = k_0 n_1 \cos \theta$ 。

其中 \mathbf{I}' 為一陣列，只有中心值為一，其餘都為零(即 $[\dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots]^T$)。 \mathbf{R}_s 和 \mathbf{R}_P 是由 R_{sm} 和 R_{pm} 組成的陣列。 \mathbf{k}_{z1} 是對角線填上 $[\dots \ k_{-1z1} \ k_{0z1} \ k_{1z1} \ \dots]$ 的對角矩陣(diagonal matrix)。 \mathbf{F}_s 是對角線填 $[\dots \ \sin \alpha_{-1} \ \sin \alpha_0 \ \sin \alpha_1 \ \dots]$ 的對角矩陣。 \mathbf{F}_c 是對角線填 $[\dots \ \cos \alpha_{-1} \ \cos \alpha_0 \ \cos \alpha_1 \ \dots]$ 的對角矩陣。

在 $z=d$ 我們也能寫出另外一套邊界條件方程組。

$$\mathbf{T}_s = \mathbf{F}_c \mathbf{S}_y - \mathbf{F}_s \mathbf{S}_x \quad (C-16a)$$

$$\frac{k_{z3} \mathbf{T}_s}{k_0} = -\mathbf{F}_s \mathbf{U}_y - \mathbf{F}_c \mathbf{U}_x \quad (C-16b)$$

$$n_1 \mathbf{T}_P = \mathbf{F}_c \mathbf{U}_y - \mathbf{F}_s \mathbf{U}_x \quad (C-16c)$$

$$\frac{n_1 k_{z3} \mathbf{T}_P}{k_0 n_3^2} = \mathbf{F}_s \mathbf{S}_y + \mathbf{F}_c \mathbf{S}_x \quad (C-16d)$$

(C-15)和(C-16)式能類比成[40]的(66)到(69)式與(73)到(76)式。

假設我們一共使用了 M 個平面波進行運算。表 C1 有 \mathbf{C}_1^- 、 \mathbf{C}_1^+ 、 \mathbf{C}_2^- 和 \mathbf{C}_2^+ 總共 $4M$ 個係數是未知的。接著， R_{sm} 和 R_{pm} 及 T_{sm} 與 T_{pm} 總計起來也有 $4M$ 個未知數。是以全部有 $8M$ 個未知數。而由(C-15)和(C-16)兩個方程組，我們總共能列出 $8M$ 個方程式，理論上是可以求解的，不過也正如我們在第二章提及的，若在(C-7)和(C-9)的特徵值問題中，求出一個很大的正特徵值，解 $z=d$ 的邊界條件時，(C-16)的右式就有可能會趨近於無限大。

這邊，筆者使用[43]的解決方式。以下簡略敘述之。先將表 C1 再改寫一下如下⁷⁵：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_x \\ \mathbf{U}_y \\ \mathbf{S}_x \\ \mathbf{S}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 z} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{-\lambda_2 z} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & e^{\lambda_1 z} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & e^{\lambda_2 z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^- \\ \mathbf{C}_2^- \\ \mathbf{C}_1^+ \\ \mathbf{C}_2^+ \end{bmatrix} \quad (C-17)$$

因此，(C-15)和(C-16)的右式就能改寫如下：

⁷⁵ $\mathbf{a}_1 = [\mathbf{W}_1 \ \mathbf{0} \ \mathbf{W}_1 \ \mathbf{0}]$ 、
 $\mathbf{a}_2 = \left[\begin{smallmatrix} \frac{k_y}{k_0} \mathbf{B}^{-1} \frac{k_x}{k_0} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{W}_1 & -\frac{1}{jk_0} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{W}_2 \lambda_2 & \frac{k_y}{k_0} \mathbf{B}^{-1} \frac{k_x}{k_0} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{W}_1 & \frac{1}{jk_0} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{W}_2 \lambda_2 \end{smallmatrix} \right]$ 、
 $\mathbf{a}_3 = [\mathbf{0} \ \mathbf{W}_2 \ \mathbf{0} \ \mathbf{W}_2]$ 、
 $\mathbf{a}_4 = \left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{jk_0} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{W}_1 \lambda_1 & \frac{k_y}{k_0} \mathbf{A}^{-1} \frac{k_x}{k_0} \mathbf{W}_2 & -\frac{1}{jk_0} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{W}_1 \lambda_1 & \frac{k_y}{k_0} \mathbf{A}^{-1} \frac{k_x}{k_0} \mathbf{W}_2 \end{smallmatrix} \right]$ 。
 $\sim 110 \sim$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_c \mathbf{S}_y - \mathbf{F}_s \mathbf{S}_x \\ -\mathbf{F}_s \mathbf{U}_y - \mathbf{F}_c \mathbf{U}_x \\ \mathbf{F}_c \mathbf{U}_y - \mathbf{F}_s \mathbf{U}_x \\ \mathbf{F}_s \mathbf{S}_y + \mathbf{F}_c \mathbf{S}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_c \mathbf{a}_4 - \mathbf{F}_s \mathbf{a}_3 \\ -\mathbf{F}_s \mathbf{a}_2 - \mathbf{F}_c \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{F}_c \mathbf{a}_2 - \mathbf{F}_s \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{F}_s \mathbf{a}_4 + \mathbf{F}_c \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^- \\ \mathbf{C}_2^- \\ \mathbf{C}_1^+ \\ \mathbf{C}_2^+ \end{bmatrix} \quad (C-18)$$

總而言之，最後，(C-15)式和(C-16)式的邊界條件方程組能寫成(I 表示元素全為 1 的矩陣)：

$$\begin{bmatrix} \sin\varphi \cdot I & I & I & 0 \\ n_1 \cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot I & I & -\frac{k_{z1}}{k_0} & 0 \\ n_1 \cos\varphi \cdot I & I & 0 & n_1 I \\ \cos\theta \cdot \cos\varphi \cdot I & I & 0 & -\frac{k_{z1}}{n_1 k_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I' \\ 0 \\ R_s \\ R_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_c \mathbf{a}_4 - \mathbf{F}_s \mathbf{a}_3 \\ -\mathbf{F}_s \mathbf{a}_2 - \mathbf{F}_c \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{F}_c \mathbf{a}_2 - \mathbf{F}_s \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{F}_s \mathbf{a}_4 - \mathbf{F}_c \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^- \\ \mathbf{C}_2^- \\ \mathbf{C}_1^+ \\ \mathbf{C}_2^+ \end{bmatrix} \quad (C-19a)$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 & I & I \\ \frac{k_{z3}}{k_0} \cdot I & 0 & 0 & I \\ 0 & n_1 I & I & I \\ 0 & \frac{n_1 k_{z3}}{k_0 n_3^2} \cdot I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_s \\ T_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_c \mathbf{a}_4 - \mathbf{F}_s \mathbf{a}_3 \\ -\mathbf{F}_s \mathbf{a}_2 - \mathbf{F}_c \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{F}_c \mathbf{a}_2 - \mathbf{F}_s \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{F}_s \mathbf{a}_4 - \mathbf{F}_c \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^- \\ \mathbf{C}_2^- \\ \mathbf{C}_1^+ \\ \mathbf{C}_2^+ \end{bmatrix} \quad (C-19b)$$

$$\text{令 } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \sin\varphi \cdot I & I & I & 0 \\ n_1 \cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot I & I & -\frac{k_{z1}}{k_0} & 0 \\ n_1 \cos\varphi \cdot I & I & 0 & n_1 I \\ \cos\theta \cdot \cos\varphi \cdot I & I & 0 & -\frac{k_{z1}}{n_1 k_0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} I & 0 & I & I \\ \frac{k_{z3}}{k_0} \cdot I & 0 & 0 & I \\ 0 & n_1 I & I & I \\ 0 & \frac{n_1 k_{z3}}{k_0 n_3^2} \cdot I & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 d} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_c \mathbf{a}_4 - \mathbf{F}_s \mathbf{a}_3 \\ -\mathbf{F}_s \mathbf{a}_2 - \mathbf{F}_c \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{F}_c \mathbf{a}_2 - \mathbf{F}_s \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{F}_s \mathbf{a}_4 - \mathbf{F}_c \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}.$$

將(C-19a)式和(C-19b)式合起來寫成：



$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}' \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_s \\ \mathbf{R}_p \end{bmatrix} = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{G} \boldsymbol{\lambda}^{-1} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{Y} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_s \\ \mathbf{T}_p \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

至此，準備工作已經結束，接下來，讓我們來看[43]的作法。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^N \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k^{00} & \mathbf{H}_k^{01} \\ \mathbf{H}_k^{10} & \mathbf{H}_k^{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (C-21)$$

假設：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_j \\ \mathbf{Y}_j \end{bmatrix} &= \prod_{k=j}^N \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k^{00} & \mathbf{H}_k^{01} \\ \mathbf{H}_k^{10} & \mathbf{H}_k^{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad j \in \{1, 2, \dots, N\} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{N+1} \\ \mathbf{Y}_{N+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (C-22)$$

則：

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k = \mathbf{H}_k^{00} \mathbf{X}_{k+1} + \mathbf{H}_k^{01} \mathbf{Y}_{k+1} \\ \mathbf{Y}_k = \mathbf{H}_k^{10} \mathbf{X}_{k+1} + \mathbf{H}_k^{11} \mathbf{Y}_{k+1} \end{cases} \quad k \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (C-23)$$

接著做以下的假設：

$$\begin{cases} \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{X}_k = \mathbf{Y}_k \\ \mathbf{Q}_k \cdot \mathbf{X}_k = \mathbf{T} \end{cases} \quad k \in \{1, 2, \dots, N+1\} \quad (C-24)$$

則由(C-23)式和(C-24)式：

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \mathbf{X}_k = (\mathbf{H}_k^{00} + \mathbf{H}_k^{01} \mathbf{P}_{k+1}) \mathbf{X}_{k+1} \\ \mathbf{Q}_k \cdot \mathbf{X}_k = \mathbf{Q}_{k+1} \cdot \mathbf{X}_{k+1} \end{cases} \\ &\Rightarrow \mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_{k+1} (\mathbf{H}_k^{00} + \mathbf{H}_k^{01} \mathbf{P}_{k+1})^{-1} \end{aligned} \quad (C-25a)$$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \mathbf{X}_k = (\mathbf{H}_k^{00} + \mathbf{H}_k^{01} \mathbf{P}_{k+1}) \mathbf{X}_{k+1} \\ \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{X}_k = (\mathbf{H}_k^{10} + \mathbf{H}_k^{11} \mathbf{P}_{k+1}) \mathbf{X}_{k+1} \end{cases} \\ &\Rightarrow \mathbf{P}_k = (\mathbf{H}_k^{10} + \mathbf{H}_k^{11} \mathbf{P}_{k+1}) (\mathbf{H}_k^{00} + \mathbf{H}_k^{01} \mathbf{P}_{k+1})^{-1} \end{aligned} \quad (C-25b)$$

當 $\mathbf{H}_k^{10} = \mathbf{H}_k^{01} = \mathbf{0}$ (即 \mathbf{H} 是對角矩陣)，(C-25)式變為：



(C-26)

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_{k+1} (\mathbf{H}_k^{00})^{-1} \\ \mathbf{P}_k = \mathbf{H}_k^{11} \mathbf{P}_{k+1} (\mathbf{H}_k^{00})^{-1} \end{cases}$$

從(C-26)式很容易可以發現，我們只要將會發散($e^{\lambda d} \approx \infty$)的矩陣元素都放到 \mathbf{H}_k^{00} 的區域，經過(C-26)計算之後，原本趨近無限大的部分反而變成趨近於零，最後就不會有發散的模擬結果。

而由(C-24), \mathbf{P} 和 \mathbf{Q} 的初始定義($\mathbf{X}_{N+1} = \mathbf{T}, \mathbf{Y}_{N+1} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{P}_{N+1} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0} \& \mathbf{Q}_{N+1} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T}$)為 $\mathbf{Q}_{N+1} = \mathbf{I}$ 以及 $\mathbf{P}_{N+1} = \mathbf{0}$ ，經過(C-25)的遞迴運算，最後 \mathbf{R} 和 \mathbf{T} 的解為： $\mathbf{P}_1 \mathbf{I} = \mathbf{R}$ 、 $\mathbf{Q}_1 \mathbf{I} = \mathbf{T}$ 。

藉由上述的方法，我們能夠將 \mathbf{R}_s 、 \mathbf{R}_p 、 \mathbf{T}_s 、 \mathbf{T}_p 全部算出。最後的反射率和穿透率為：

$$\begin{cases} \mathbf{R} = (|\mathbf{R}_s|^2 + |\mathbf{R}_p|^2) \frac{\mathbf{k}_{z1}}{k_{0z1}} \\ \mathbf{T} = \left[|\mathbf{T}_s|^2 \frac{\mathbf{k}_{z3}}{k_{0z1}} + |\mathbf{T}_p|^2 \frac{\mathbf{k}_{z3}}{k_{0z1}} \left(\frac{n_1^2}{n_3^2} \right) \right] \end{cases} \quad (C-27)$$

其中 $\mathbf{k}_{z1} = [\dots \ k_{-1z1} \ k_{0z1} \ k_{1z1} \ \dots]^T$ 。⁷⁶

四、收斂性

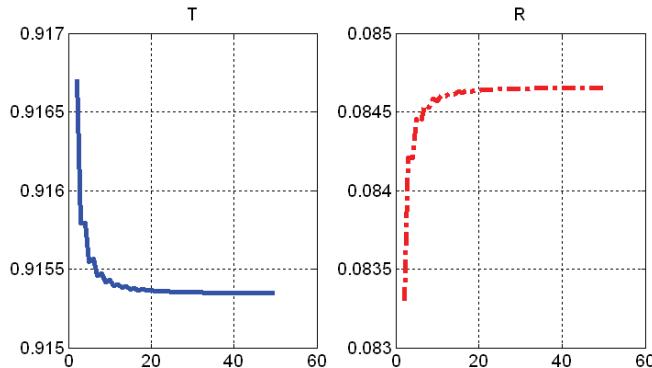


圖 C5 繞射效率與使用平面波數的關係(RCWA 的收斂性)

同樣地，由上圖可以看出，使用的平面波數越多，模擬結果就會越接近原本的答案。

⁷⁶ 和前面的 \mathbf{k}_{z1} 不同，這個式子的 \mathbf{k}_{z1} 是一個陣列，前面則是對角矩陣，以斜體與否作為區別。

五、能量守恆

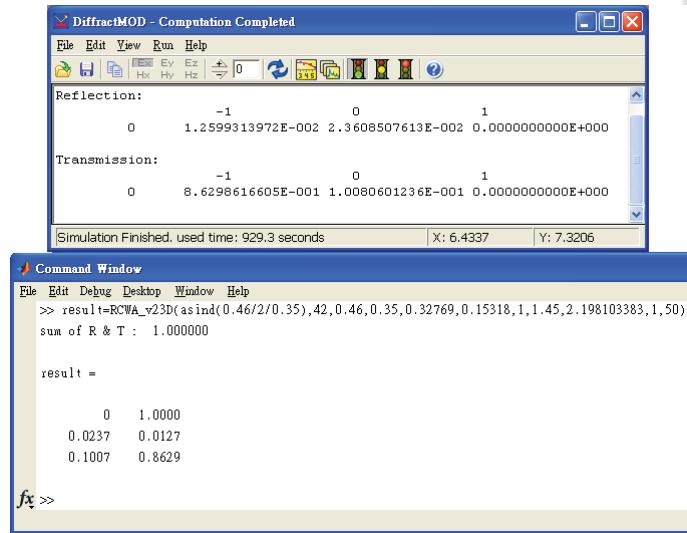


圖 C6 RSoft(Diffract mod 3.0)的模擬結果(上)與 Matlab 程式碼比較(下)

從上圖可以看出，我們的演算法和 RSoft(Diffract mod 3.0)的差異不大，而且，也同時遵守能量守恆定律。



第一章

- [1] D. F. Vanderwerf, *Applied Prismatic and Reflective Optics*, SPIE press, 2010
- [2] E. Hecht, *Optics*, 4th edition, Addison-Wesley, 2002
- [3] K. Iizuka, *Elements of Photonics*, vol. 1, Wiley-Interscience, 2002
- [4] J. M. Bennett, H. E. Bennett, *Polarization in Handbook of Optics*, W. G. Driscoll, W. Vaughan(editors), 1st edition, McGRAW-HILL, 1978
- [5] G. Peng, R. Ye et al, "Design of MacNeille Polarizing Beam Splitter", Symposium on Photonics and Optoelectronics 2009 conference
- [6] M. S. Brennesholtz, E. H. Stupp, *Projection Displays*, 2nd edition, Wiley Series in Display Technology, 2008
- [7] M. Banning, "Practical Methods of Making and Using Multilayer Filters", JOSA, Vol. 37, Issue 10, pp. 792-795 (1947)
- [8] Li Li, J. A. Dobrowolski, "Visible broadband, wide-angle, thin-film multilayer polarizing beam splitter", Applied Optics, Vol. 35, Issue 13, pp. 2221-2225 (1996)
- [9] Li Li, J. A. Dobrowolski, "High-Performance Thin-Film Polarizing Beam Splitter Operating at Angles Greater than the Critical Angle", Applied Optics, Vol. 39, Issue 16, pp. 2754-2771 (2000)
- [10] J. M. Jonza et al., "Polarizing beam-splitting optical component," U.S. Patent No. 5,962,114 (1999)
- [11] W. W. Merrill et al., "Post-formable multilayer films and methods of forming", U.S. Patent No. 2012/0105957 A1(2012)
- [12] C. L. Bruzzone et al., "Polarizing beam splitter," U.S. Patent No. 6,721,096 (2004)
- [13] S. K. Eckhardt et al., "3M PBS for high-performance LCOS optical engine",

- [14] M. Born, E. Wolf et al., *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*, 7th edition, Cambridge University Press, 1999
- [15] D. Wang, W. Liu et al., "Embedded metal-wire nanograting and its application in an optical polarization beam splitter/combiner", *Applied Optics*, Vol. 47, Issue 3, pp. 312-316 (2008)
- [16] M. Xu, H. Urbach et al., "Wire-grid diffraction gratings used as polarizing beam splitter for visible light and applied in liquid crystal on silicon", *Optics Express*, Vol. 13, Issue 7, pp. 2303-2320 (2005)
- [17] R. T. Perkins, C. Y. Cheng et al., "Multilayer wire-grid polarizer with off-set wire-grid and dielectric grid", U.S. Patent No. 8,027,087 B2 (2011)
- [18] R.T. Perkins, D. P. Hansen et al., "Broadband wire grid polarizer for the visible spectrum", U.S. Patent No. 6,122,103 (2000)
- [19] E. D. Palik, *Handbook of Optical Constants of Solids*, Volume 1, Academic Press (1985)
- [20] A. D. Rakić, "Algorithm for the determination of intrinsic optical constants of metal films: application to aluminum", *Applied Optics*, Vol. 34, Issue 22, pp. 4755-4767 (1995)
- [21] S. Habraken, O. Michaux et al., "Polarizing holographic beam splitter on a photoresist", *Optics Letters*, Vol. 20, Issue 22, pp. 2348-2350 (1995)
- [22] P. Lalanne, J. Hazart et al., "A transmission polarizing beam splitter grating", *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* 1 p.p.215-219 (1999)
- [23] J. G. Zheng, C. G. Zhou et al., "Polarizing beam splitter of two-layer dielectric rectangular transmission gratings in Littrow mounting", *Optics Communications*



Volume 282, Issue 15, p.p. 3069–3075 (2009)

[24] Q. Y. Bi, J. G. Zheng et al., "Design of rectangular-groove fused-silica gratings as polarizing beam splitters", *Optics Express*, Vol. 18, Issue 11, pp. 11969-11978 (2010)

[25] C. G. Zhou, W. Jia, "Novel uses for deep-etched, fused-silica diffraction gratings", *SPIE Newsroom*, 2011

[26] J. H. Lee, D. N. Liu, S. T. Wu, *Introduction to Flat Panel Displays*, Wiley Series in Display Technology, 2009

[27] T. Scharf, *Polarized Light in Liquid Crystals and Polymers*, Wiley-Interscience, 2007

[28] C. C. Chen , C. Y. Wu, T. F. Wu, "LED back-light driving system for LCD panels", *Applied Power Electronics Conference and Exposition 2006*, IEEE, p.p. 381-385

[29] 陳建宏, "利用分色光柵提高液晶面板的光學效率之分析與探討", 國立台灣大學碩士論文, 2006

[30] 簡瑋廷, "高功率發光二極體應用於導光元件之研究", 國立中央大學碩士論文, 2006

[31] L. Li, J. A. Dobrowoloski et al., "Novel Thin Film Polarizing Beam-splitter and Its Application in High Efficiency Projection Displays", *Proceedings of SPIE*, volume 3634, p.p. 52–62, 1999

[32] T. Gunjima, Y. Ooi et al., "LCD device including an illumination device having a polarized light separating sheet between a light guide and the display", US Patent RE38305 E (2003)

[33] Pochi Yeh, Claire Gu, *Optics of Liquid Crystal Displays*, 1st edition, Wiley Series in Pure and Applied Optics, 1999

[34] E. Lueder, *3D Displays*, 1st edition, Wiley Series in Display Technology, 2012

第二章

- [35] I.C. Botten, M.S. Craig et al, "The Dielectric Lamellar Diffraction Grating", *OPTICA ACTA*, 1981, VOL . 28, NO. 3, 413-428
- [36] J. G. Van Bladel, *Electromagnetic Fields*, 2nd edition, Wiley-IEEE Press, 2007
- [37] Jijun Feng, Changhe Zhou et al., "Three-port beam splitter of a binary fused-silica grating", *Applied Optics*, Vol. 47, Issue 35, pp. 6638-6643 (2008)
- [38] T. Clausnitzer, T. Kämpfe et al., "Investigation of the polarization-dependent diffraction of deep dielectric rectangular transmission gratings illuminated in Littrow mounting", *Applied Optics*, Vol. 46, Issue 6, pp. 819-826 (2007)
- [39] M. G. Moharam, T. K. Gaylord, "Rigorous coupled-wave analysis of planar-grating diffraction", *JOSA*, Vol. 71, Issue 7, pp. 811-818 (1981)
- [40] M. G. Moharam, Eric B. Grann et al., "Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary gratings", *JOSA A*, Vol. 12, Issue 5, pp. 1068-1076 (1995)
- [41] P. Lalanne, G. M. Morris, "Highly improved convergence of the coupled-wave method for TM polarization", *JOSA A*, Vol. 13, Issue 4, pp. 779-784 (1996)
- [42] S. Pengm, G. M. Morris, "Efficient implementation of rigorous coupled-wave analysis for surface-relief gratings", *JOSA A*, Vol. 12, Issue 5, pp. 1087-1096 (1995)
- [43] N.Chateau, J.-P. Hugonin, "Algorithm for the rigorous coupled-wave analysis of grating diffraction", *JOSA A*, Vol. 11, Issue 4, pp. 1321-1331 (1994)
- [44] R. C. Tyan, P. C. Sun et al., "Polarizing beam splitter based on the anisotropic spectral reflectivity characteristic of form-birefringent multilayer gratings", *Optics Letters*, Vol. 21, Issue 10, pp. 761-763 (1996)
- [45] J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson et al., *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light*, 2nd edition, Princeton University Press, 2008, chap 2



[46] S. Foteinopoulou, E. N. Economou, and C. M. Soukoulis, "Refraction in Media with a Negative Refractive Index", Phys. Rev. Lett. 90, 107402 (2003)

[47] Burn J. Lin, *Optical Lithography: Here is Why*, SPIE Press, 2010, chap 7 & 8

[48] Kiyotaka Wasa, Makoto Kitabatake et al., *Thin Films Material Technology: Sputtering of Compound Materials*, 1st edition, Springer, 2004

[49] S. M. Edlou, A. Smajkiewicz et al., "Optical properties and environmental stability of oxide coatings deposited by reactive sputtering" Applied Optics, Vol. 32, Issue 28, pp. 5601-5605 (1993)

[50] V. Lowalekar, S. Raghavanet, "Etching of zirconium oxide, hafnium oxide, and hafnium silicates in dilute hydrofluoric acid solutions", J. Mater. Res., 19 [4] 1149–56 (2004)

[51] Michael Köhler, *Etching in Microsystem Technology*, 1st edition, Wiley-VCH, p.p. 324 (1999)

[52] CY Huang, HM Ku et al., "Refractive index variation of amorphous Ta₂O₅ film fabricated by ion beam sputtering with RF bias power", Optical Review , Volume 16, Issue 3, p.p. 274-275 (2009)

第三章

[53] M. Bass, C. DeCusatis et al., *Handbook of Optics : Optical Properties of Materials, Nonlinear Optics, Quantum Optics*, Vol. IV, 3rd edition, McGraw-Hill Professional, 2009, p.p.2.65

[54] M. Debenham, "Refractive indices of zinc sulfide in the 0.405-13- μ m wavelength range", Applied Optics, Vol. 23, Issue 14, pp. 2238-2239 (1984)

第四章

[55] E. F. Schubert, *Light-Emitting Diodes*, 2nd edition, Cambridge University Press

(2006)

[56] A. Köck, E. Gornik et al., "Strongly directional emission from AlGaAs/GaAs light-emitting diodes", *Appl. Phys. Lett.* 57, 2327 (1990)

[57] Chun-Feng Lai, Hao-Chung Kuo et al., "Highly-directional emission patterns based on near single guided mode extraction from GaN-based ultrathin microcavity light-emitting diodes with photonic crystals", *Appl. Phys. Lett.* 97, 013108 (2010)

[58] Jae-Young Joo, Sun-Kyu Lee, "Miniaturized TIR Fresnel lens for miniature optical LED applications", *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, Volume 10, Issue 2, p.p. 137-140 (2009)

[59] L. Occhi, V. Laino, C. Velez, "Light source, and device", US Patent 8,022,389 B2, (2011)

[60] G.A. Alphonse, M. Toda, "Mode Coupling in Angled Facet Semiconductor Optical Amplifiers and Superluminescent Diodes", *IEEE J. Lightwave Tech.*, Volume:10 , Issue:2, p.215-219 (1992)

[61] G. A. Alphonse, D. B. Gilbert, M. G. Harvey, "High-power superluminescent diodes", *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Volume:24 , Issue: 12, p.p. 2454 – 2457 (1988)

[62] E. Feltin, A. Castiglia et al., "Broadband blue superluminescent light-emitting diodes based on GaN", *Appl. Phys. Lett.* 95, 081107 (2009)

[63] Bong-Min Song, Bongtae Han, "Spectral power distribution deconvolution scheme for phosphor-converted white light-emitting diode using multiple Gaussian functions", *Applied Optics*, Vol. 52, Issue 5, pp. 1016-1024 (2013)

