

國立臺灣大學管理學院國際企業學研究所



碩士論文

Graduate Institute of International Business

College of Management

National Taiwan University

Master Thesis

公司債結構式模型實證

An Empirical Analysis of Structural Models
for Corporate Bond Pricing

林易辰

Yi-Chen Lin

指導教授：王之彥 博士

Advisor: Jr-Yang Wang, Ph.D.

中華民國 103 年 7 月

July, 2014



誌 謝

如果說誌謝的下筆速度不比論文打字的速度快，一點都沒錯，這是這篇文章裡最不容易寫的一個章節。

感謝之彥老師自去年六月底以來每週一次的指導與灌溉，遇到我不甚理解的部分，老師仍不厭其煩地提點我，直到我吸收為止，甚至還會跟我分享一些生活的點點滴滴，讓每一次的討論都帶著輕鬆的氣氛。沒有老師的辛勤教導，我絕不可能在這一年完成這篇碩士論文。謝謝之彥老師。

感謝我的家人陪我度過這兩年的碩士生涯，不管我再晚進入家門，總會有一句「還有一碗熱湯要不要喝」歡迎我，不管我再怎麼氣餒，都會有一句「加油」替我打氣。爸爸、媽媽、阿公、阿嬤、老妹、小姑姑，我終於把論文寫完了。謝謝你們。

感謝國企系所以及財金系所的老師們，你們在課堂上的專業知識，一直是我永遠吸收不完的，透過你們的授課和觀點，我才能夠在這兩年裡看得更深更遠。謝謝你們。

感謝在國企所的老師們，這兩年來一起走過的點點滴滴，從前年的招生說明會，到今年的大小畢業典禮，這段回憶絕對是永遠不變的真實。如今要分道揚鑣了，感謝的同時也祝福你們能一帆風順。謝謝你們。

感謝我在台大的好朋友們，我永遠不會忘記在教研館一起努力、一起摸魚、一起皺眉、一起歡笑的日子，不管是六月三日以前的書香氣息，抑或是六月三號以後的玩樂人生，有你們的陪伴，我才會有彩色的碩士生活。

感謝我在暨大的好朋友和老師們，如果說沒有你們的陪伴我進不了台大，一點都不為過，即使各奔西東這麼久了，還是能收到你們都關心。我終於畢業了。謝謝你們。

再次感謝所有陪我走過這段人生的人，有你們的陪伴，才会有今天的我。

林易辰 謹致

民國一零三年七月



摘要

Chang (2012) 指出，在 Collin-Dufresne and Goldstein (2001) 公司債定價模型的基礎上，再加入 Amin (1993) 之跳躍擴散樹狀模型之後，可解決現有結構式模型容易低估信用價差 (Credit Spread) 的先天缺陷，同時在採用回溯推算過程之下，此模型甚至可計算如可贖回債券 (callable bond)、信用違約交換 (Credit Default Swap) 等其他金融商品。而本研究針對其模型計算公司債之部分，與另外五個具代表性之結構式定價模型進行實證分析與比較，其包含：Merton (1974)、Geske (1977)、Longstaff and Schwartz (1995)、Leland and Toft (1996)、以及 Collin-Dufresne and Goldstein (2001)。

資料方面，本研究選出數張符合模型設定標準，於 2002 至 2007 年於美國發行之純含息債券作為實證樣本，並與評價日之市價隱含信用價差進行比較。

全文內容主要以跳躍擴散樹狀模型及其他結構式模型之建構為主，其中包含前人文獻之細節回顧與模型參數之估計方式等。次之，則以實證資料之計算結果作為搭配，以驗證此跳躍擴散樹狀模型對於過去結構式模型缺陷之改良程度。

關鍵字：結構式模型、對數槓桿比、隨機利率、跳躍擴散、回溯推算過程、實證分析。

Abstract



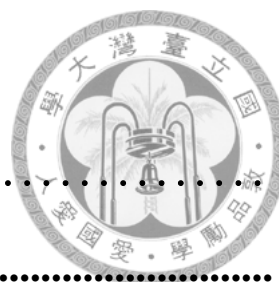
This thesis conducts an empirical analysis for corporate bond prices and their credit spreads with several classical structural models. Following Eom, Helwege, and Huang (2004), I examine the models of Merton (1974), Geske (1977), Longstaff and Schwartz (1995), Leland and Toft (1996), and Collin-Dufresne and Goldstein (2001). Moreover, according to Chang (2012), the underestimation of the credit spread based on Collin-Dufresne and Goldstein's (2001) stationary leverage structural model can be resolved by incorporating the jump process into their stationary leverage stochastic process. Therefore, this thesis also examines this new structural model based on the stationary leverage ratio with jumps. Following the criteria proposed in Eom, Helwege, and Huang (2004) to screen corporate bonds, I obtain several corporate bonds issued between 2002 and 2007 in the U.S. as the study sample to investigate the performance of the above-mentioned six structural models for evaluating the bond prices and their credit spreads.

Keyword: Structural Model, Leverage Ratio, Stochastic Interest Rate, Jump Diffusion, Lattice Model, Corporate Bond Price, Credit Spread



目 錄

誌 謝	i
摘 要	ii
Abstract	iii
目 錄	iv
圖目錄	vi
表目錄	vii
第一章 緒論	1
第一節 研究背景	1
第二節 研究架構	2
第三節 全文架構	3
第二章 文獻回顧	4
第一節 Merton (1974) M 模型	5
第二節 Geske (1977) G 模型	6
第三節 Longstaff and Schwartz (1995) LS 模型	8
第四節 Leland and Toft (1996) LT 模型	10
第五節 Collin-Dufresne and Goldstein (2001) CDG 模型	12
第六節 Chang (2012) CDGtree 模型	15

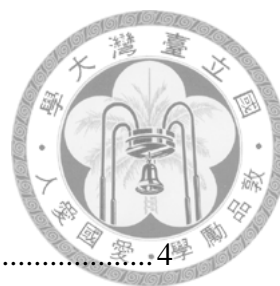


第七節 CDGtree 模型與 CDG 模型之數據模擬與比較	23
第三章 參數估計與實證結果.....	30
第一節 資料選取及數據來源	30
第二節 模型參數估計	31
第三節 實證結果.....	44
第四章 結論	54
References	56
Appendix A.....	58
Vasicek (1977) V 模型	58
Hull and White (1994) HW 模型.....	59
Appendix B.....	61



圖目錄

圖 2.1 X_t 樹狀分支示意圖	17
圖 2.2 X_t 均值追蹤三元樹分支示意圖	19
圖 2.3 三維樹狀節點分支示意圖	20
圖 2.4 債權回溯推算簡單樹狀示意圖	22
圖 2.5 零息公司債評價回歸示意圖($l_0 = 0.35$)	25
圖 2.6 零息公司債評價回歸示意圖($l_0 = 0.65$)	26
圖 2.7 Model III 及 Model IV 回溯推算過程比較	28
圖 3.1 各模型信用價差示意圖	48
圖 A.1 Hull-White 利率樹示意圖	59



表目錄

表 2.1 各模型參數表.....	4
表 2.2 零息公司債評價.....	25
表 2.3 零息公司債 l_0 之敏感度分析.....	27
表 2.4 零息公司債 Model III 跳躍參數敏感度分析.....	27
表 3.1 各模型參數估計方式.....	31
表 3.2 跳躍參數敏感度分析.....	34
表 3.3 回復率敏感度分析.....	35
表 3.4 實務資料.....	37
表 3.5 公司債各模型信用價差.....	44

第一章 緒論




第一節 研究背景

結構式模型以公司資產負債為依據，作為違約與否的判斷基準。最早是由 Merton (1974) (往後簡稱為 M) 提出了許多風險性債券定價的理論貢獻，但是在實證上，其定價模型無法有效計算出與市場交易相符的信用價差 (credit spread)。因此後續之研究，便針對此模型做了廣泛之延伸及修正，包括票息設定、違約門檻、以及引進隨機利率模型等。

在 M 模型之後，Geske (1977) (往後簡稱為 G) 修改了對於票息之設定，將其視為公司股東之複合選擇權，意即股東可以在付息日當天選擇是否付息，如果選擇不付息，則公司違約。其後，Longstaff and Schwartz (1995) (往後簡稱為 LS) 及 Leland and Toft (1996) (往後簡稱為 LT) 發展首次通過時間模型，藉由資產首次達到違約門檻判斷公司是否違約，在任意時點下，當公司資產小於違約門檻時即發生違約，而前者同時考慮了 Vasicek (1977) (以下簡稱 V) 隨機利率模型，後者則將公司債設定為一連續發放之過程，以達成公司維持某一穩定槓桿比率之設定。而 Collin-Dufresne and Goldstein (2001) (往後簡稱為 CDG) 則在 LS 的基礎上，加入目標槓桿比率，使其違約門檻為一穩定隨機過程。其後 Chang (2012) (以下簡稱 CDGtree) 在 CDG 的基礎上，加入了 Amin (1993) 之跳躍擴散樹狀模型，如此將可考慮無預警之違約事件，並用 Hull-White (1994) (以下簡稱 HW) 隨機利率樹狀模型取代 Vasicek (1977) 隨機利率模型，以符合目前市場上利率期間結構之現狀。

在實證研究方面，Lyden and Saraniti (2000) 提出了第一篇比較兩個以上結構式模型實證結果的研究 (M 及 LS)，並蒐集美國 56 家公司及其公司債資料進行驗證。而 Eom, Helwege, and Huang (2004) 更進一步比較五個結構式模型 (M、G、LT、



LS、CDG) 搭配 Vasicek (1977)、Nelson and Seigel (1987) 兩個利率模型之實證結果，並將規模擴大至美國 182 張公司債。其研究指出，平均而言，M 及 G 模型會低估信用價差；LT、LS、及 CDG 會高估信用價差。此外，除了 LT 模型在大多數設定之下皆會高估信用價差之外，其他四個模型對於槓桿較低、資產波動率較小的公司，都有低估信用價差之現象。其後，Holborow (2008) 也比較了 M 及 LS 模型，並利用最大概似估計法對資產動態變數進行估計。

上述之實證研究發現，早期之 M 及 G 模型平均上會低估信用價差，而後改良之 LS、LT、以及 CDG 模型，反而高估了信用價差，且誤差相當大。另外，針對於槓桿較低且公司價值波動率低的債券，大部分模型普遍都有低估之現象，唯有 LT 模型在絕大部份條件之下都會高估信用價差，唯其對於發放票息之設定不符合實際狀況，亦無法作為一指標性模型。此外，目前多數應用首次通過時間結構式違約模型者皆僅能計算純含息債券價格，然而當今市場上以複合式債券如可轉換公司債、可贖回債券等為主流，純含息債券相當少，令其實證受到相當大之限制。當研究者需估計某公司違約之機率時，此公司若未發行純含息公司債，則此評價模型將無法校準參數並用以估計該標的公司之違約機率。

第二節 研究架構

本研究改良了 Chang (2012) 所提出之穩定均數回歸槓桿比率隨機過程 CDGtree 模型，並證明經過模型設定上之調整，CDGtree 模型可取代 CDG 模型。同時透過實際資料的引入，與 M、G、LT、LS、CDG 共五個結構式模型進行實證比較。最後證實 CDGtree 模型不僅可考慮無法預期之違約事件，同時在實務上亦解決了槓桿低或公司價值波動率低時，結構式模型容易低估信用價差之現象。

債券的選取上，本研究參考 Holborow (2008) 之設定，挑選出 7 張在 2002 至 2007 年間所發行的債券，並以該債券發行一周內交易量最大當天之最後一筆交易

價格為比較基準，與模型計算出之價格進行比較，詳細設定將會在第三章說明。資料參數估計的部分，本研究參考 Eom, Helwege, and Huang (2004) 之設定，詳細估計方式亦在第三章說明。



第三節 全文架構

全文共分四章節，各章內容簡述如下：

第一章 – 緒論，內容包括研究背景、研究架構及全文架構等三節。

第二章 – 文獻探討，內容包括 Merton (1974) M 模型、Geske (1977) G 模型、Longstaff and Schwartz (1995) LS 模型、Leland and Toft (1996) LT 模型、Collin-Dufresne and Goldstein (2001) CDG 模型、Chang (2012) CDGtree 模型、及 CDGtree 模型與 CDG 模型之數據模擬與比較等七節。

第三章 – 參數估計與實證結果，內容包括資料選取及數據來源、模型參數估計、及實證結果等三節。

第四章 – 結論，內容為全文研究做總結。

第二章 文獻回顧



本章將會逐一介紹本研究所討論之六個公司債結構式評價模型之設定及性質，並針對 Chang (2012) 之模型作較詳盡之解說及與 CDG 模型之比較，證明 Chang (2012) 之 CDGtree 模型可以取代 CDG 模型。模型介紹依序為 Merton (1974)、Geske (1977)、Longstaff and Schwartz (1995)、Leland and Toft (1996)、Collin-Dufresne and Goldstein (2001)、以及 Chang (2012) 之模型。

本研究之參數設定為求完整性已經過統一，因此使用之符號會與原文獻有所不同，且為避免文章過於冗贅，將各模型較常出現之參數於表 2.1 作較詳盡之整理與解說，方便讀者對照。圖中○者表示參數有使用於該模型。

表 2.1 各模型參數表

參數	解釋	M	G	LS	LT	CDG	CDG tree
債券屬性參數							
T	債券到期日	○	○	○	○	○	○
c	票息利率	○	○	○	○	○	○
K	公司總負債面額；違約門檻	○	○	○		○	○
w	本金回復率	○	○	○	○	○	
w_c	票息回復率			○		○	
公司屬性參數							
V_t	公司資產於時間點 t 之總市值	○	○	○	○	○	○
E_t	公司權益於時間點 t 之總市值	○					
D_t	公司負債於時間點 t 之總市值	○				○	
δ	公司支付率	○	○	○	○	○	○
μ_V	公司報酬率(Q 測度)	○		○		○	○
σ_V	公司報酬率之標準差	○	○	○	○	○	○
dZ_V	V_t 之維納隨機過程	○		○		○	○

S	公司稅稅率				<input type="radio"/>		
利率參數							
$r(t)$	t 到期的常數無風險利率	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>		<input type="radio"/>		
$D(r_t, t_i)$	對於 t_i 到 t 之折現因子	<input type="radio"/>		<input type="radio"/>		<input type="radio"/>	
a	利率回歸速度			<input type="radio"/>		<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
b	長期利率平均			<input type="radio"/>		<input type="radio"/>	
r_t	t 時點之瞬時無風險利率			<input type="radio"/>		<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
σ_r	利率之標準差			<input type="radio"/>		<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
dZ_r	r_t 之維納隨機過程			<input type="radio"/>		<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
ρ	dZ_V 及 dZ_r 之相關係數			<input type="radio"/>		<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
運算符號							
n	標準常態機率密度函數				<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
N	標準常態累積機率函數	<input type="radio"/>		<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
N_i	i 維常態累積機率函數		<input type="radio"/>				

第一節 Merton (1974) M 模型

Merton (1974) 首先假設公司資產於 Q 測度下服從：

$$dV_t = (r - \delta)V_t dt + \sigma_V V_t dZ_V$$

並假設公司債為零息債券且總發行量為 K ，在到期日 T 時公司必須支付給債權人之價值為 $\min(K, V_T)$ ，其中 V_T 為到期日之公司價值。若將公司債視為一無風險債券減去一個以公司資產為標的之賣權成本，便可運用 Black-Scholes 選擇權定價模型之公式，導出零息債券之價格，此處以 BPM_{zero} 表示。而為符合一般含息債券之設定，Eom, Helwege, and Huang (2004) 將含息債券拆解為多個零息債券之組合，其面額及到期日皆符合含息債券付息日及還本日之設定。以一半年付息一次，本金為 1 之含息債券為例，其評價公式為：



$$BP^{coupon}(T) = \sum_{i=1}^{n_T} \frac{c}{2} BP^{M_zero}(t_i) + BP^{M_zero}(T),$$

其中 $n_T = T/0.5$ 代表到期日之切割總期數；而本計畫採用 Eom, Helwege, and Huang (2004) 之 M 延伸模型，其評價公式如下：

$$\begin{aligned} BP^M(V_{t_i}, K, T) &= \sum_{i=1}^{n_T} D(r_0, t_i) E^Q \left[\left(\frac{Kc}{2} \right) I_{\{V_{t_i} \geq K\}} + \min\left(\frac{w_c Kc}{2}, V_{t_i} \right) I_{\{V_{t_i} < K\}} \right] \\ &+ D(r_0, T) E^Q \left[K I_{\{V_T \geq K\}} + \min(wK, V_T) I_{\{V_T < K\}} \right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中 t_i 表示第 i 期之時間點； $D(r_0, t_i)$ 為 $[t, t_i]$ 之折現因子，可由時間點 t ； E^Q 為風險中立測度之期望值；

$$\begin{aligned} E^Q \left[I_{\{V_{t_i} \geq K\}} \right] &= N(d_2(K, t_i)), \\ E^Q \left[I_{\{V_{t_i} < K\}} \min(\varphi, V_{t_i}) \right] &= V_0 D(r_0, t_i)^{-1} e^{-\delta t} N(-d_1(\varphi, t_i)) + \varphi [N(d_2(\varphi, t_i)) - N(d_2(K, t_i))], \\ d_1(k, t_i) &= \frac{\ln\left(\frac{V_0}{kD(r_0, t_i)}\right) + \left(-\delta + \frac{\sigma_V^2}{2}\right) t_i}{\sigma_V \sqrt{t_i}}, \\ d_2(k, t_i) &= d_1(k, t_i) - \sigma_V \sqrt{t_i}, \end{aligned}$$

其中 $\varphi \in [0, K]$ 。

第二節 Geske (1977) G 模型

Geske (1977) 視每一期付息日及還本日(t_1, t_2, \dots, t_{n_T})為一股東之選擇權，如果支付票息及還本則公司繼續經營，反之公司宣告違約，並將資產給予債權人。同時根據 Black and Cox (1976) 的論點，公司係以發行新股之方式支付票息，當股價小於



要付出之票息，將不會有投資人願意認購新股，公司也會因此而倒閉，且在此設定之下可維持公司資本結構之穩定性。G 模型利用回朔過程解出今日考慮違約風險之債券價格，例如，對於 t_{n_T-1} ， $E_{t_{n_T-1}}(V_{t_{n_T-1}}) = E^Q[(V_T - K(1 + \frac{c_i}{2})I_{\{V_{t_i} \geq K(1 + \frac{c_i}{2})\}})]$ ，而 $D_{t_{n_T-1}}(V_{t_{n_T-1}}) = V_{t_{n_T-1}} - E_{t_{n_T-1}}(V_{t_{n_T-1}})$ ，此外，其還需要計算一特別公司價值 $\bar{V}_{t_{n_T-1}}$ ，使得 $E_{t_{n_T-1}}(\bar{V}_{t_{n_T-1}}) = K \frac{c_i}{2}$ ，好反映破產時之公司價值。在付息時間點 $t_{n_T-2}, t_{n_T-3}, \dots, t_1$ ，直到時間點 t_0 ，繼續這個過程，最後可以得到今日債權價格之評價公式為：

$$BP^G = V_0 \left[1 - N_{n_T} \left(\begin{bmatrix} h_1 + \sigma_V \sqrt{t_1} \\ \vdots \\ h_{n_T} + \sigma_V \sqrt{t_{n_T}} \end{bmatrix}; [\varepsilon_{ij}] \right) \right] + \sum_{i=1}^{n_T} c_i e^{-r(t_i)t_i} N_i \left(\begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_i \end{bmatrix}; [\varepsilon_{ij}] \right) + K e^{-r(T)T} N_{n_T} \left(\begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{n_T} \end{bmatrix}; [\varepsilon_{ij}] \right), \quad (2.2)$$

其中 N_i 為 i 維常態之累積機率函數； n_T 代表到期日之切割總期數；

$$\varepsilon_{ij} \equiv \sqrt{t_i/t_j}, \text{ 對於所有 } (i, j), \quad j = 1, 2, 3, \dots, n, \quad i = 1, 2, 3, \dots, j$$

$$h_i \equiv \frac{\ln\left(\frac{V}{\bar{V}_{t_i}}\right) + \left(r(t_i) - \delta - \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)t_i}{\sigma_V \sqrt{t_i}}$$

$$\bar{V}_{t_i} \text{ 滿足等式 } E_{t_i}(\bar{V}_i) = K \frac{c_i}{2}; \bar{V}_{n_T} = K(1 + \frac{c_i}{2}).$$

$$\text{上式之 } E_{t_i}(\bar{V}_{t_i}) = \bar{V}_{t_i} N(h_i + \sigma_V \sqrt{T - t_i}) - K e^{-r(t_i)(T-t_i)} N(h_i) .$$

其證明過程相當複雜，有興趣之讀者可進一步參考 Geske (1977) 之文獻。



第三節 Longstaff and Schwartz (1995) LS 模型

Black and Cox (1976) 提出一首次通過 (first passage) 之概念，當公司資產首次達到某一違約門檻 K 時，公司即發生違約。此外，早期之研究如 M 及 G 模型為降低計算之繁雜度，皆假設利率為一固定常數，然而此假設明顯地與實證不符，因此 Longstaff and Schwartz (1995) 便延伸 Black and Cox (1976) 之研究，發展出一套同時考慮首次通過時間模型及 Vasicek (1977) 隨機利率之雙變數結構式評價模型。兩個隨機過程分別為：

$$\frac{dV_t}{V_t} = \mu_V dt + \sigma_V dZ_V,$$
$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma_r dZ_r.$$

根據 Itô's Lemma 與定義 $y_t = \ln V_t$ ，可得到下列均數回歸動態過程：

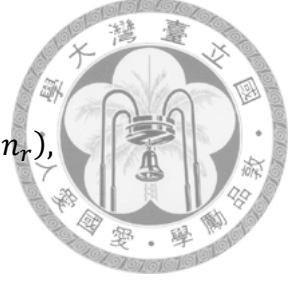
$$dy_t = \left(r_t - \delta - \frac{\sigma_V^2}{2} \right) dt + \sigma_V dZ_V.$$

LS 模型假設當公司資產低於一違約門檻 K 時會發生違約，亦即當 $l_t = k - y_t > 0$ (其中 $k \equiv \ln(K)$) 時，違約會發生。相較於 Black and Cox (1976) 假設違約發生時債權人可即時拿回本金且無違約成本，LS 模型假設當違約發生時，債權人僅能拿回本金乘以一外生回復率 w 之部分。然而 Collin-Dufresne and Goldstein (2001) 認為，LS 模型對於計算違約機率之推導有誤，因此於其文獻中附錄為 LS 模型作修正，本研究之模型亦使用該部分做為計算架構。

在考慮回復率及違約機率下，LS 之零息債券評價公式為：

$$B^{LS_zero}(l_0, r_0, T) = D(r_0, T) \left(1 - (1 - w) Q^T(l_0, r_0, T) \right),$$

其中 $l_0 \equiv K/V_0$ ； Q^T 代表在 T -forward 測度下，自時間點 0 看零息債券於時間點 T 前違約之機率；



$$Q^T(l_0, r_0, T) \equiv \sum_{j=1}^{n_T} \sum_{i=1}^{n_r} q(r_i, t_j),$$

$$q(r_i, t_1) = \Delta r \Psi(r_i, t_1), \quad \forall i \in (1, 2, \dots, n_r),$$

$$q(r_i, t_j) = \Delta r \left[\Psi(r_i, t_j) - \sum_{v=1}^{j-1} \sum_{u=1}^{n_r} q(r_u, t_v) \psi(r_i, t_j | r_u, t_v) \right],$$

$$\forall i \in (1, 2, \dots, n_r), \forall j \in (2, \dots, n_T),$$

$$\Psi(r_t, t) \equiv \pi(r_t, t | r_0, 0) N \left(\frac{\mu(r_t, t | l_0, r_0, 0)}{\Sigma(r_t, t | l_0, r_0, 0)} \right),$$

$$\psi(r_t, t | r_s, s) \equiv \pi(r_t, t | r_s, s) N \left(\frac{\mu(r_t, t | l_s = 0, r_s, s)}{\Sigma(r_t, t | l_s = 0, r_s, s)} \right), \quad \forall (t > s),$$

$$\mu(r_t, l_s, r_s) \equiv E_s^T[l_t | r_t] = E_s^T[l_t] + \frac{\text{Cov}_s^T[l_t, r_t]}{\text{Var}_s^T[r_t]} (r_t - E_s^T[r_t]),$$

$$\Sigma^2(r_t, l_s, r_s) \equiv \text{Var}_s^T[l_t | r_t] = \text{Var}_s^T[l_t] + \frac{\text{Cov}_s^T[l_t, r_t]^2}{\text{Var}_s^T[r_t]},$$

$$\begin{aligned} E_s^T[l_t] &= l_s - \left(b - \frac{\sigma_r^2}{a^2} - \delta - \frac{\sigma_V^2}{2} - \frac{\sigma_r \rho \sigma_V}{a} \right) (t - s) \\ &\quad - \left(r_s - b + \frac{\sigma_r^2}{a^2} + \frac{\sigma_r \rho \sigma_V}{a} e^{-a(T-t)} \right) B_a^{(t-s)} \\ &\quad - \frac{\sigma_r^2}{2a} e^{-a(T-t)} \left(B_a^{(t-s)} \right)^2, \end{aligned}$$

$$E_s^T[r_t] = r_s e^{-a(t-s)} + \left(ba - \frac{\sigma_r^2}{a} \right) B_a^{(t-s)} + \left(\frac{\sigma_r^2}{a} \right) e^{-a(T-t)} B_{2a}^{(t-s)},$$

$$\text{Var}_s^T[l_t] = \left(\sigma_V^2 + 2 \frac{\sigma_r \rho \sigma_V}{a} + \frac{\sigma_r^2}{a^2} \right) (t - s) - 2 \left(\frac{\sigma_r \rho \sigma_V}{a} + \frac{\sigma_r^2}{a^2} \right) B_a^{(t-s)} + \frac{\sigma_r^2}{a^2} B_{2a}^{(t-s)},$$

$$\text{Var}_s^T[r_t] = \sigma_r^2 B_{2a}^{(t-s)},$$

$$\text{Cov}_s^T[l_t, r_t] = \frac{\sigma_r^2}{a} B_{2a}^{(t-s)} - \left(\frac{\sigma_r^2}{a} + \sigma_V \sigma_r \rho \right) B_a^{(t-s)},$$

其中 $n_t = T/\Delta t$ 代表到期日之切割總期數並定義 $t_j \equiv j\Delta t$; $n_r = (r_{\max} - r_{\min})/\Delta r$ 代表將 V 模型或其他隨機利率模型之利率空間中，由最高利率

r_{max} 至最低利率 r_{min} 做均等切割之總個數並定義 $r_i \equiv r_{min} + i\Delta r$ ； Δr 為均等切割後之單位利率差； $\pi(r_t, t | r_s, s)$ 表期望值為 $E_s^T[r_t]$ 變異數為 $Var_s^T[r_t]$ 之常態分配機率密度函數，即利率樹狀節點 r_t 於時間點 t 之條件發展機率值； $\mu(r_t, t | l_s, r_s, s)$ 與 $\Sigma(r_t, t | l_s, r_s, s)$ 為已知利率節點 r_t 之對數槓桿比 l_t 條件期望值與變異數； $B_a^T \equiv (1 - e^{-aT})/a$ 則為 V 模型無風險債券計算因子。

經由拆解含息債券成為多個零息債券組合，便可得到評價含息債券之 LS 模型（假設本金為 1）：

$$BP^{LS}(l_0, r_0, T) = \frac{c}{2} \sum_{i=1}^n [D(r_0, t_i)(1 - (1 - w_c)Q^T(l_0, r_0, t_i))] + D(r_0, T)(1 - (1 - w)Q^T(l_0, r_0, T)). \quad (2.3)$$

第四節 Leland and Toft (1996) LT 模型

Leland and Toft (1996) 同樣也延伸了首次通過時間模型之研究，探討結構式模型之發展，對於違約成本之設定也與 LS 模型相同，然而其發現 LS 模型對於破產之判斷係由一外生違約門檻決定，此設定並無法說明在實務上股東在經考量之後決定技術性破產，將公司讓與債權人之情況；且認為引進隨機利率，僅僅造成模型更趨於複雜，與固定利率之設定相比計算結果相差並不大。因此 LT 在其模型中，加入一個內生且獨立於時間之違約門檻 V_B ，並修改對債券之設定，將其票息及本金視為一連續發放之過程，此設定下可使流通在外負債為一固定值，維持穩定之槓桿比例；並將利率設為一固定之常數。在假設公司資產隨機過程為 $dV_t = (r - \delta)V_t dt + \sigma_V V_t dZ_V$ ，且在時間 T 之內碰觸到違約門檻之下，到期可以拿到一個回復價值 wV_B 。

LT 模型之評價公式為：

$BP^{LT}(0, T)$

$$= K \frac{c}{r(T)} + K \left(1 - \frac{c}{r(T)}\right) \left(\frac{1 - e^{-r(T)T}}{r(T)T} - I(T)\right) + \left(wV_B - K \frac{c}{r(T)}\right) J(T), \quad (2.4)$$

其中

$$I(T) = \frac{1}{r(T)T} \left(G(T) - e^{-r(T)T} F(T)\right),$$

$$J(T) = \frac{1}{\hat{z}\sigma_V\sqrt{T}} \left(-e^{\hat{z}-\hat{a}} N[q_1(T)]q_1(T) + e^{-(\hat{z}+\hat{a})} N[q_2(T)]q_2(T)\right),$$

$$G(T) = e^{\hat{z}-\hat{a}} N[q_1(T)] + e^{-(\hat{z}+\hat{a})} N[q_2(T)],$$

$$F(T) = N[h_1(T)] + e^{-2\hat{a}\hat{z}} N[h_2(T)],$$

$$q_1(T) = \frac{(-\hat{b} - \hat{z}\sigma_V^2 T)}{\sigma_V\sqrt{T}}, \quad q_2(T) = \frac{(-\hat{b} + \hat{z}\sigma_V^2 T)}{\sigma_V\sqrt{T}},$$

$$h_1(T) = \frac{(-\hat{b} - \hat{a}\sigma_V^2 T)}{\sigma_V\sqrt{T}}, \quad h_2(T) = \frac{(-\hat{b} + \hat{a}\sigma_V^2 T)}{\sigma_V\sqrt{T}},$$

$$\hat{x} = \hat{a} + \hat{z}$$

$$\hat{a} = \frac{r(T) - \delta}{\sigma_V^2} - \frac{1}{2}, \quad \hat{b} = \ln\left(\frac{V}{V_B}\right), \quad \hat{z} = \left(\hat{a}^2 + \frac{2r(T)}{\sigma_V^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

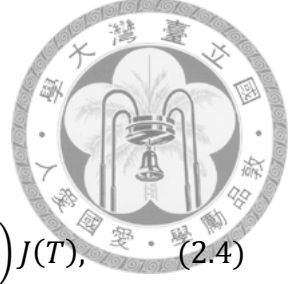
$$V_B = \frac{\left(\frac{Kc}{r(T)}\right) \left(\frac{A}{r(T)T} - B\right) - \frac{AK}{r(T)T} - KSc\hat{x}/r(T)}{1 + (1-w)\hat{x} - wB},$$

$$A = 2\hat{a}e^{-rT} N(\hat{a}\sigma_V\sqrt{T}) - 2\hat{z}N(\hat{z}\sigma_V\sqrt{T}) - \frac{2}{\sigma_V\sqrt{T}} n(\hat{z}\sigma_V\sqrt{T})$$

$$- \frac{2e^{-r(T)T}}{\sigma_V\sqrt{T}} n(\hat{a}\sigma_V\sqrt{T}) + \hat{z} - \hat{a},$$

$$B = -\left(2\hat{z} + \frac{2}{\hat{z}\sigma_V^2 T}\right) N(\hat{z}\sigma_V\sqrt{T}) - \frac{2}{\sigma_V\sqrt{T}} n(\hat{z}\sigma_V\sqrt{T}) + \frac{1}{\hat{z}\sigma_V^2 T} + \hat{z} - \hat{a},$$

詳細推導過程請參考 Leland and Toft (1996) 之文獻。



第五節 Collin-Dufresne and Goldstein (2001) CDG 模型



Collin-Dufresne and Goldstein (2001)延續了 LS 模型之研究，並加入一穩定槓桿比率之概念，同時以雙因子馬可夫過程 (two-factor Markov process) 修正了計算違約風險之部分，因此在經過參數上之調整後，可直接變形為 LS 模型。

同 LS 模型，CDG 模型假設公司資產與利率隨機模型如下：

$$dV_t = (r_t - \delta)V_t dt + \sigma_V V_t dZ_V,$$

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma_r dZ_r.$$

並將公司資產及負債取自然對數，得到 $y_t = \ln V_t$ 與 $b_t = \ln D_t$ 。接著應用 Itô's Lemma 得到下列均數回歸動態過程：

$$dy_t = \left(r_t - \delta - \frac{\sigma_V^2}{2} \right) dt + \sigma_V dZ_V,$$

$$db_t = \kappa[y_t - \nu - \phi(r_t - b) - b_t]dt,$$

其中 κ 、 ν 、 ϕ 為均數回歸之參數，估計方式將於第三章第二節有更詳盡說明； $y_t - \nu - \phi(r_t - b)$ 可視為 b_t 之長期平均，當 b_t 低於長期平均時公司將會提升門檻，即提高公司槓桿比率，反之亦然。此表示公司將會將槓桿比率維持在某一穩定水準之內。最後令 $l_t \equiv b_t - y_t = \ln \frac{D_t}{V_t}$ ，即對數槓桿比率。當 $l_t \leq 0$ 時，表示 $D_t \leq V_t$ ，公司未發生違約；反之公司違約。再將對數槓桿比率取全微分可得到以下式子：

$$\begin{aligned} dl_t &= \kappa[y_t - \nu - \phi(r_t - b) - b_t] dt - \left(r_t - \delta - \frac{\sigma_V^2}{2} \right) dt - \sigma_V dZ_V \\ &= \kappa \left[-\nu - \phi(r_t - b) - \frac{r_t - \delta - \frac{\sigma_V^2}{2}}{\kappa} - l_t \right] dt - \sigma_V dZ_V. \end{aligned}$$



最後，當公司於到期日 T 前即發生違約，則公司債持有人可於到期日拿回 w 比例之本金。即可導出 CDG 之零息債券評價公式：

$$BP^{CDG_zero}(l_0, r_0, T) = D(r_0, T)(1 - (1 - w)Q^T(l_0, r_0, T)),$$

其中 Q^T 代表在 T-forward 測度下，自時間點 0 看零息債券於時間點 T 前違約之機率；

$$Q^T(l_0, r_0, T) \equiv \sum_{j=1}^{n_T} \sum_{i=1}^{n_r} q(r_i, t_j),$$

$$q(r_i, t_1) = \Delta r \Psi(r_i, t_1), \quad \forall i \in (1, 2, \dots, n_r),$$

$$q(r_i, t_j) = \Delta r \left[\Psi(r_i, t_j) - \sum_{v=1}^{j-1} \sum_{u=1}^{n_r} q(r_u, t_v) \psi(r_i, t_j | r_u, t_v) \right],$$

$$\forall i \in (1, 2, \dots, n_r), \forall j \in (2, \dots, n_T),$$

$$\Psi(r_t, t) \equiv \pi(r_t, t | r_0, 0) N \left(\frac{\mu(r_t, t | l_0, r_0, 0)}{\Sigma(r_t, t | l_0, r_0, 0)} \right),$$

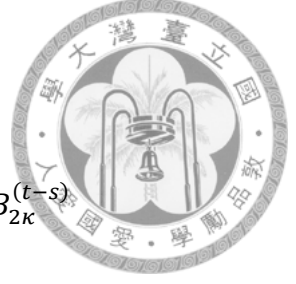
$$\psi(r_t, t | r_s, s) \equiv \pi(r_t, t | r_s, s) N \left(\frac{\mu(r_t, t | l_s = 0, r_s, s)}{\Sigma(r_t, t | l_s = 0, r_s, s)} \right), \quad \forall (t > s),$$

$$\mu(r_t, l_s, r_s) \equiv E_s^T[l_t | r_t] = E_s^T[l_t] + \frac{Cov_s^T[l_t, r_t]}{Var_s^T[r_t]} (r_t - E_s^T[r_t]),$$

$$\Sigma^2(r_t, l_s, r_s) \equiv Var_s^T[l_t | r_t] = Var_s^T[l_t] + \frac{Cov_s^T[l_t, r_t]^2}{Var_s^T[r_t]},$$

$$\begin{aligned} E_s^T[l_t] = & l_s e^{-\kappa(t-s)} - (1 + \kappa\phi) \left(r_s + \frac{\sigma_r^2}{a^2} - b \right) e^{-a(t-s)} B_{(\kappa-a)}^{(t-s)} \\ & - \left(\frac{\sigma_r \rho \sigma_V}{a} + (1 + \kappa\phi) \frac{\sigma_r^2}{2a^2} \right) e^{-a(T-t)} B_{(\kappa+a)}^{(t-s)} \\ & + (1 + \kappa\phi) \frac{\sigma_r^2}{2a^2} e^{-a(T-t)} e^{-2a(t-s)} B_{(\kappa-a)}^{(t-s)} \\ & + \left(\frac{\sigma_r \rho \sigma_V}{a} + \kappa \bar{l} - (1 + \kappa\phi) \left(b - \frac{\sigma_r^2}{a^2} \right) \right) B_{\kappa}^{(t-s)}, \end{aligned}$$

$$E_s^T[r_t] = r_s e^{-a(t-s)} + \left(ba - \frac{\sigma_r^2}{a} \right) B_a^{(t-s)} + \left(\frac{\sigma_r^2}{a} \right) e^{-a(T-t)} B_{2a}^{(t-s)},$$



$$\begin{aligned}
\text{Var}_s^T[l_t] &= \left(\frac{(1+\kappa\phi)\sigma_r}{\kappa-a}\right)^2 B_{2a}^{(t-s)} \\
&\quad + \left[\sigma_v^2 + \left(\frac{(1+\kappa\phi)\sigma_r}{\kappa-a}\right)^2 - 2\frac{\rho\sigma_v(1+\kappa\phi)\sigma_r}{\kappa-a}\right] B_{2\kappa}^{(t-s)} \\
&\quad + 2\left[\frac{\rho\sigma_v(1+\kappa\phi)\sigma_r}{\kappa-a} - \left(\frac{(1+\kappa\phi)\sigma_r}{\kappa-a}\right)^2\right] B_{(\kappa+a)}^{(t-s)}, \\
\text{Var}_s^T[r_t] &= \sigma_r^2 B_{2a}^{(t-s)}, \\
\text{Cov}_s^T[l_t, r_t] &= -\frac{(1+\kappa\phi)\sigma_r^2}{\kappa-a} B_{2a}^{(t-s)} - \left(\sigma_v\sigma_r\rho - \frac{(1+\kappa\phi)\sigma_r^2}{\kappa-a}\right) B_{(\kappa+a)}^{(t-s)}, \\
\bar{l} &\equiv \frac{\delta + \frac{\sigma_v^2}{2}}{\kappa} - v - \phi b,
\end{aligned}$$

其中 $n_t = T/\Delta t$ 代表到期日之切割總期數並定義 $t_j \equiv j\Delta t$ ； $n_r = (r_{\max} - r_{\min})/\Delta r$ 代表將 V 模型或其他隨機利率模型之利率空間中，由最高利率 r_{\max} 至最低利率 r_{\min} 做均等切割之總個數並定義 $r_i \equiv r_{\min} + i\Delta r$ ； Δr 為均等切割後之單位利率差； $\pi(r_t, t | r_s, s) = f(r_t)$ ， $f(r_t)$ 表期望值為 $E_s^T[r_t]$ 變異數為 $\text{Var}_s^T[r_t]$ 之常態分配機率密度函數，即利率樹狀節點 r_t 於時間點 t 之條件發展機率值； $\mu(r_t, t | l_s, r_s, s)$ 與 $\Sigma(r_t, t | l_s, r_s, s)$ 為已知利率節點 r_t 之對數槓桿比 l_t 條件期望值與變異數； $B_a^T \equiv (1 - e^{-aT})/a$ 則為 V 模型無風險債券計算因子。

經由拆解含息債券成為多個零息債券的組合，便可得到評價含息債券之 CDG 模型（假設本金為 1）：

$$\begin{aligned}
BP^{CDG}(l_0, r_0, T) &= \frac{c}{2} \sum_{i=1}^n [D(r_0, t_i)(1 - (1 - w_c)Q^T(l_0, r_0, t_i))] \\
&\quad + D(r_0, T)(1 - (1 - w)Q^T(l_0, r_0, T)). \tag{2.5}
\end{aligned}$$



第六節 Chang (2012) CDGtree 模型

CDG 模型改善了以往結構式模型對於到期日較長之債券不易達到違約條件之缺陷，但依舊無法解釋實務中公司可能於短時間內突然達到違約條件（無論是否可預測）之現象。Chang (2012) 認為，股價突發性之跳躍將會引發公司價值及負債比率隨之跳躍，此外，當公司發行新債、贖回舊債，抑或舊債到期時，也都會對槓桿造成一個跳躍之影響。因此其在文獻中，以 CDG 模型為基礎，並考慮於風險中立測度下加入 Amin (1993) 之跳躍擴散樹狀模型，令公司資產服從一對數常態跳躍擴散過程，同時考慮以 HW 利率隨機過程模型替代 V 模型，以期令利率期間結構與市場觀測值更為接近，各式詳列如下：

$$\begin{aligned}\frac{dV_t}{V_t} &= (r_t - \delta - \lambda M) dt + \sigma_V dZ_V + (J - 1) dP_t, \\ dr_t &= a \left[\frac{\theta(t)}{a} - r_t \right] dt + \sigma_r dZ_r \equiv \mu_r dt + \sigma_r dZ_r,\end{aligned}$$

其中 dP_t 為一獨立卜瓦松計數過程，其跳躍強度設定為 λ 且

$$\begin{cases} dP_t = 0 & \text{with probability } (1 - \lambda dt) \\ dP_t = 1 & \text{with probability } \lambda dt \end{cases},$$

$\theta(t)$ 為一確保 Hull-White 利率隨機過程所產生之利率期間結構與市場上所觀察到之利率期間結構一致之時間函數。此外，CDGtree 模型亦令跳躍之幅度大小服從一對數常態分配，即 $\ln J \sim N(\mu_J, \sigma_J^2)$ ，此即表示 $J - 1$ 為發生 Poisson 事件時資產之變動百分比，而漂移項減去 λM 則為維持資產於風險中立測度下之平賭性質。

故可推得 $M \equiv E[J - 1] = e^{\mu_J + \sigma_J^2/2} - 1$ 。

接著，仿照 CDG 模型的步驟，運用 Itô's Lemma 及取得對數槓桿比率後，可得到：



$$\begin{aligned}
dl_t &= \kappa \left[-\nu - \phi \left(r_t - \frac{\theta(t)}{a} \right) - \frac{\mu_y}{\kappa} - l_t \right] dt - \sigma_V dZ_V - (\ln J) dP_t \\
&= \kappa [\bar{l}(r_t) - l_t] dt - \sigma_V dZ_V - (\ln J) dP_t \\
&= \mu_l dt - \sigma_V dZ_V - (\ln J) dP_t
\end{aligned}$$

其中

$$\mu_y \equiv (r_t - \delta - \sigma_V^2/2 - \lambda M),$$

$$\bar{l}(r_t) = -\nu - \phi \left(r_t - \frac{\theta(t)}{a} \right) - \frac{\mu_y}{\kappa} = -\nu + \phi \frac{\theta(t)}{a} - r_t \left(\frac{1}{\kappa} + \phi \right) + \frac{\delta + \frac{\sigma_V^2}{2} + \lambda M}{\kappa},$$

$$\mu_l = \kappa [\bar{l}(r_t) - l_t],$$

由於前述之 r_t 與 l_t 隨機過程 (dZ_r 與 dZ_V) 之間具相關性，為求兩模型樹狀分支之機率建構易於計算，CDGtree 模型採用正交變數轉換技巧，令轉換後之兩隨機過程具獨立性，再分別依 HW 與 Amin (1993) 之樹狀模型為此二項隨機過程進行模擬，即可建構一支三維樹狀模型。

進行變數正交轉換前，先要建立一個與 dZ_r 及 dP_t 皆獨立之維納隨機過程 dZ_X ，並令 dZ_V 為 $dZ_V = \sqrt{1 - \rho^2} dZ_X + \rho dZ_r$ ，其中 ρ 為 dZ_V 與 dZ_r 之相關係數。新建構之隨機過程 dX_t 與既有之 dr_t 可寫為：

$$dX_t = \mu_x dx + \sigma_X dZ_X + \ln J dP_t,$$

$$dr_t = \mu_r dt + \sigma_r dZ_r,$$

其中 $\mu_x \equiv -\mu_l - \frac{\sigma_V \rho \mu_r}{\sigma_r}$ ； $\sigma_X \equiv \sigma_V \sqrt{1 - \rho^2}$ 。

此外，在正交化過程當中，可以得到 l_t 、 X_t 、及 r_t 之間的關係式如下：

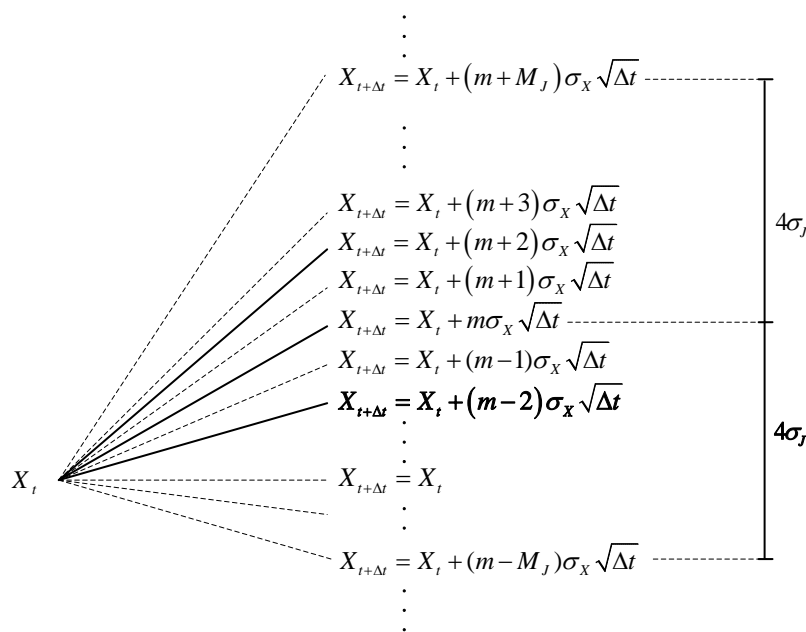
$$l_t \equiv l(X_t, r_t) = l_0 - (X_t - X_0) - \left(\frac{\sigma_V \rho}{\sigma_r} \right) (r_t - r_0).$$

透過此建立之兩獨立隨機過程變數 X_t 與 r_t 可各自發展樹狀模型，而其上之節點 (X_t, r_t) 皆可上述之關係式對應求得一 $l_t = l(X_t, r_t)$ 值。當 $l_t = l(X_t, r_t) > 0$



時，即表示此公司發生違約，意即此節點屬於三維樹狀中之違約區域。其中隨機利率 r_t 之樹狀架構請參照 Appendix A 對於利率模型之介紹。

X_t 之樹狀架構共分兩部份，一為基本樹狀成長，二為跳躍擴散成長。CDGtree 模型依 Dai (2009) 之均值追蹤演算法發展基本樹狀成長之三元樹架構，並仿照 Amin (1993) 之模型發展跳躍擴散成長樹狀之架構。其示意詳見圖 2.1：



(資料來源：王之彥老師民國一百零一年國科會計畫)

圖 2.1 X_t 樹狀分支示意圖

上圖中，跳躍擴散之分支涵蓋全樹狀範圍，即自 $X_t + (m - M_J)\sigma_X\sqrt{\Delta t}$ 至 $X_t + (m + M_J)\sigma_X\sqrt{\Delta t}$ 之分支皆為跳躍樹狀之可能落點；而基本樹狀之三元樹落點則分佈於圖中三條實線分支上，即 $X_t + (m + 2)\sigma_X\sqrt{\Delta t}$ 、 $X_t + (m - 2)\sigma_X\sqrt{\Delta t}$ 與 $X_t + m\sigma_X\sqrt{\Delta t}$ 等三支上。同時，考慮跳躍擴散之機率與基本成長樹狀非獨立之性質，故跳躍擴散之分佈範圍除虛線分支外亦包含實線分支。此外，由 dX_t 之隨機過程得知 X_t 之漂移項 μ_X 含有 r_t ，會導致其本身產生隨機性，故基本樹狀之三元分支並非如傳統方式成長，而是向 m 分支方向(即 $X_t + m\sigma_X\sqrt{\Delta t}$ 分支)成長，以達

到 Dai (2009) 之均值追蹤演算目的，並令未包含跳躍之三元分支之機率介於 $[0,1]$ 之間。而跳躍範圍以四倍之跳躍標準差做估計，以捕捉較準確之模型期望值，即令模型之次期 $X_{t+\Delta t}$ 分支以 $X_t + m\sigma_X\sqrt{\Delta t}$ 為中心向外建構，範圍設定為 $\pm 4\sigma_J$ 內，即取 $M_J = 4\sigma_J/(\sigma_X\sqrt{\Delta t})$ 再四捨五入至最近整數為範圍自 m 分支向上與向下擴張，如圖 2.1 所示。

基本三元樹無跳躍之部份，其分支向上 $X_t + (m+2)\sigma_X\sqrt{\Delta t}$ 、向中 $X_t + m\sigma_X\sqrt{\Delta t}$ 與向下 $X_t + (m-2)\sigma_X\sqrt{\Delta t}$ 成長之機率分別為 P_u^X 、 P_m^X 與 P_d^X ，再加入跳躍擴散過程，結合兩架構以求取 X_t 樹狀模型各節點分支機率，考慮跳躍發生之機率 $\lambda\Delta t$ 與跳躍擴散之分支機率 $\Delta N(\cdot)$ ，可得各分支機率如下：

$$P(k) = \begin{cases} \text{prob}[X_{t+\Delta t} - X_t = k\sigma_X\sqrt{\Delta t}] = (1 - \lambda\Delta t)P_u^X + \lambda\Delta t\Delta N(k), & \text{if } k = m + 2 \\ \text{prob}[X_{t+\Delta t} - X_t = k\sigma_X\sqrt{\Delta t}] = (1 - \lambda\Delta t)P_m^X + \lambda\Delta t\Delta N(k), & \text{if } k = m \\ \text{prob}[X_{t+\Delta t} - X_t = k\sigma_X\sqrt{\Delta t}] = (1 - \lambda\Delta t)P_d^X + \lambda\Delta t\Delta N(k), & \text{if } k = m - 2 \\ \text{prob}[X_{t+\Delta t} - X_t = k\sigma_X\sqrt{\Delta t}] = \lambda\Delta t\Delta N(k), & \text{if } k \neq m, m \pm 2 \end{cases}$$

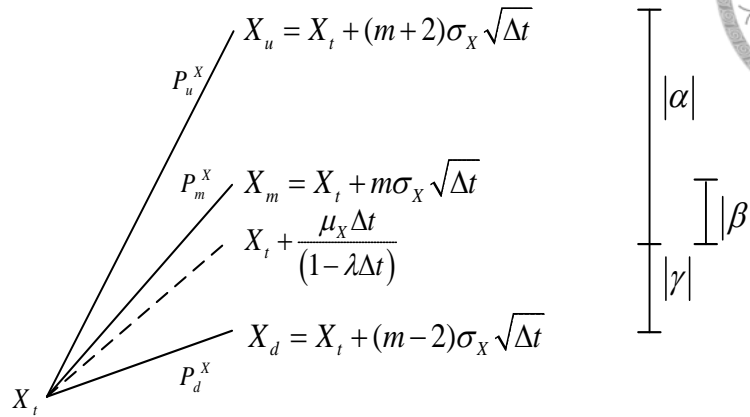
其中 k 為介於 $[m - M_J, m + M_J]$ 間之整數，且

$$\Delta N(k) = \begin{cases} N\left(\left(m - M_J + \frac{1}{2}\right)\sigma_X\sqrt{\Delta t}\right) & , k = m - M_J \\ N\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\sigma_X\sqrt{\Delta t}\right) - N\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\sigma_X\sqrt{\Delta t}\right), & m - M_J + 1 \geq k \geq m + M_J - 1, \\ 1 - N\left(\left(m + M_J - \frac{1}{2}\right)\sigma_X\sqrt{\Delta t}\right) & , k = m + M_J \end{cases}$$

此外，依據 Amin (1993) 可知 X_t 隨機過程於 $(t, t + \Delta t]$ 間之期望值為 $E[\Delta X_t] = \mu_X\Delta t + \lambda\Delta tE[\ln J]$ ，且由於前述之跳躍機率所搭配之分支，需可推得上式之 $\lambda\Delta tE[\ln J]$ 。故於無跳躍條件下，次期三元樹分支應產生之期望值為 $\frac{\mu_X\Delta t}{1-\lambda\Delta t}$ 。

如此則其三元樹分支機率 $(1 - \lambda\Delta t)P_u^X$ 、 $(1 - \lambda\Delta t)P_m^X$ 與 $(1 - \lambda\Delta t)P_d^X$ 才可算

得一期望值配適於 $\mu_X \Delta t$ ，如圖 2.2 所示：



(資料來源：王之彥老師民國一百零一年國科會計畫)

圖 2.2 X_t 均值追蹤三元樹分支示意圖

上圖中， α 、 β 與 γ 之定義為 X_u 、 X_m 與 X_d 減去 $X_t + \frac{\mu_X \Delta t}{1-\lambda \Delta t}$ 之差距：

$$\begin{cases} \beta \equiv X_t + m\sigma_X\sqrt{\Delta t} - \left(X_t + \frac{\mu_X \Delta t}{1-\lambda \Delta t}\right) \\ \alpha \equiv \beta + 2\sigma_X\sqrt{\Delta t} \\ \gamma \equiv \beta - 2\sigma_X\sqrt{\Delta t} \end{cases},$$

為免於無跳躍下之三元樹分支機率超出 $[0,1]$ 之間，令 m 值為一滿足 $X_{t+\Delta t} = X_t + m\sigma_X\sqrt{\Delta t}$ 最貼近 $X_t + \frac{\mu_X \Delta t}{1-\lambda \Delta t}$ 以作為三元樹之向中分支，再將此分支加減 $2\sigma_X\sqrt{\Delta t}$ 推求上下二分支，以完成 X_t 於無跳躍下之基本樹狀三元樹部分，如圖 2.2 所示。又：

$$\begin{cases} P_u^X X_u + P_m^X X_m + P_d^X X_d = X_t + \frac{\mu_X \Delta t}{1-\lambda \Delta t} \\ P_u^X (X_u)^2 + P_m^X (X_m)^2 + P_d^X (X_d)^2 - \left(X_t + \frac{\mu_X \Delta t}{1-\lambda \Delta t}\right)^2 = \sigma_X^2 \Delta t \\ P_u^X + P_m^X + P_d^X = 1 \end{cases}$$

結合上述 α, β, γ 之定義可得到：

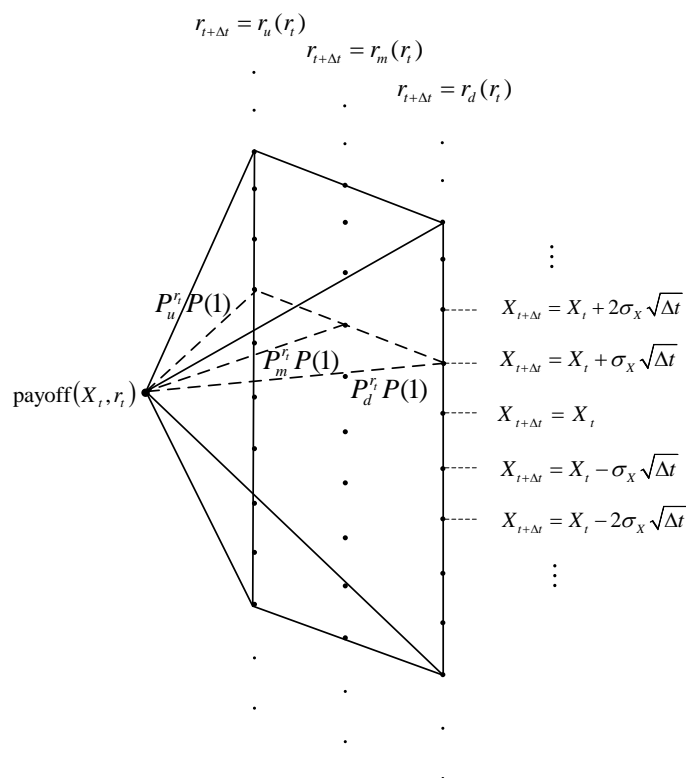


$$\begin{cases} P_u^X \alpha + P_m^X \beta + P_d^X \gamma = 0 \\ P_u^X \alpha^2 + P_m^X \beta^2 + P_d^X \gamma^2 = \sigma_X^2 \Delta t \\ P_u^X + P_m^X + P_d^X = 1 \end{cases}$$

根據 Cramer's rule，可求得 P_u^X 、 P_m^X 與 P_d^X 顯示如下

$$\begin{cases} P_u^X = \frac{(\beta - \sigma_X \sqrt{\Delta t})^2}{8\sigma_X^2 \Delta t} \\ P_m^X = \frac{3\sigma_X^2 \Delta t - \beta^2}{4\sigma_X^2 \Delta t} \\ P_d^X = \frac{(\beta + \sigma_X \sqrt{\Delta t})^2}{8\sigma_X^2 \Delta t} \end{cases}$$

此時 P_u^X 與 P_d^X 之分子與分母均為非負之數，故其必為非負之機率。而 P_m^X 則由於 $\beta \in (-\sigma_X \sqrt{\Delta t}, \sigma_X \sqrt{\Delta t})$ ，故可確保 P_m^X 必為正數機率。



(資料來源：王之彥老師民國一百零一年國科會計畫)

圖 2.3 三維樹狀節點分支示意圖



結合 X_t 與 r_t 兩樹狀即可形成一三維樹狀模型如圖 2.3 所示，在回溯推算過程時，我們必須考慮下一期 $(2M_J + 1) \times 3$ 節點之報酬。假設於各節點上其報酬為 $PO(X_t, r_t)$ ，則此模型之回溯推算過程可描述如下：

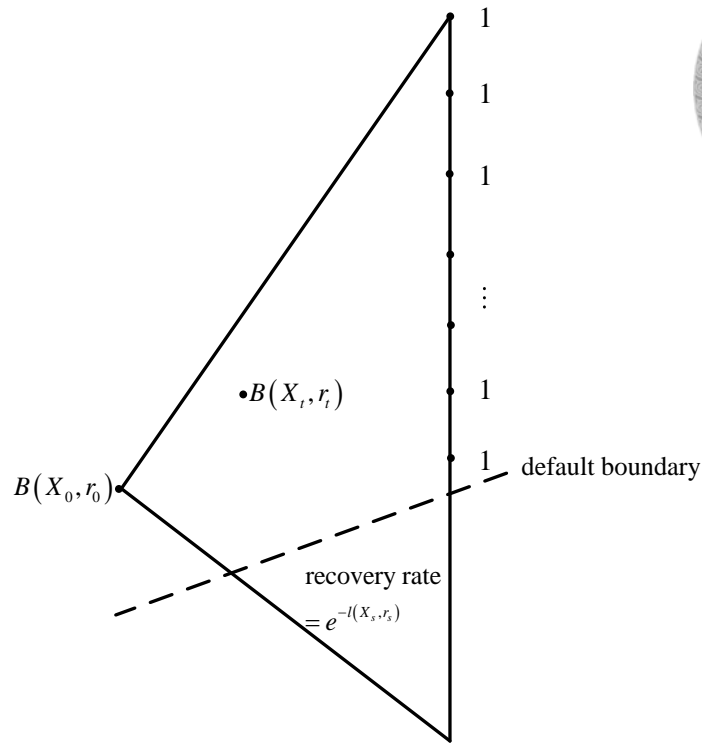
$$PO(X_t, r_t) = e^{-r_t \Delta t} \left[\sum_{\theta=u,m,d} P_{\theta}^{r_t} \sum_k P(k) PO(X_t + k\sigma_X \sqrt{\Delta t}, r_{\theta}(r_t)) \right],$$

其中 k 為介於 $[m(X_t, r_t) - M_J, m(X_t, r_t) + M_J]$ 之間之整數。要注意對於不同之 (X_t, r_t) 節點，因為 μ_X ，對於中間分支本模型也會推得不同之 m 值，所以 $m = m(X_t, r_t)$ 為 (X_t, r_t) 之函數。

針對含息債券之評價，相較於 CDG 模型假設違約發生後債權人需於期末方能拿回部分本金之設定，CDGtree 為符合跳躍擴散特性，改以 Duffie and Singleton (1999) 所提出之 RMV (recovery of market value) 方法做計算，其假設於違約發生時，債權人可立即收到當時債券價值之一特定比例，而合約即刻終止，此特定比例即公司價值之回復率。由於此模型之對數槓桿比 l_t 為負債與資產之對數比，故其隱含一內生決定之公司價值。當違約發生時，其剩餘價值之比例為：

$$l_t = k_t - y_t \Rightarrow l_t = \ln\left(\frac{D_t}{V_t}\right) \Rightarrow \frac{V_t}{D_t} = \exp(-l_t),$$

此 $\exp(-l_t)$ 可視作此公司之內生回復率。換言之，若違約發生時，債權人可即刻拿到當時公司債價值之 e^{-l_t} 比例。



(資料來源：王之彥老師民國一百零一年國科會計畫)

圖 2.4 債權回溯推算簡單樹狀示意圖

上圖中，位於違約邊界下之區域其 $l(X_s, r_s) > 0$ ，代表發生違約。此外，考慮隨機跳躍過程之下，各個未違約節點於次期皆可能會跳到違約區域中。

最後，CDGtree 模型含息債券評價公式如下：

$$\begin{aligned}
 & BP^{CDGtree}(X_t, r_t) \\
 &= e^{-r_t \Delta t} \left\{ \sum_{\theta=u, m, d} P_{\theta}^{r_t} \left[\sum_k P(k) \left(\begin{array}{l} BP(ind) I_{\{l(ind) \leq 0\}} \\ + e^{-l(ind)} \Gamma_{\theta} I_{\{l(ind) > 0\}} \end{array} \right) \right] \right\} + c I_{\{l(ind) \leq 0\}}, \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

其中 $\Gamma_{\theta} = \sum_k \frac{P(k)}{\sum_k P(k) I_{\{l(ind) \leq 0\}}} BP(ind) I_{\{l(ind) \leq 0\}}$ ； $ind = (X_t + k\sigma_X \sqrt{\Delta t}, r_{\theta}(r_t))$ 。

對於下一期未違約的節點 $l(ind) \leq 0$ 而言， $\frac{P(k)}{\sum_k P(k) I_{\{l(ind) \leq 0\}}}$ 可視為未違約情況下之條件機率，因此 Γ_{θ} 可視為是未違約情況下，在時間點 t 時公司債之期望值，因為 $BP(ind)$ 是由回溯推算過程來求得，所以 Γ_{θ} 還是有反映公司未來違約之可能。若要反映 CDG 模型（其考慮只要在時間 T 違約時，債券所有人會在到期時拿



回本金乘上 w)，我們假設每當進入到違約區域時 (假設在 $[\tau, \tau + \Delta t]$ 時間間隔區間，其中 τ 為破產時點)，則緊接下一期可拿到本金乘上 $we^{-r_t(T-(\tau+\Delta t))}$ ；便等同於 CDG 模型在到期時可以拿到殘餘價值 w 。因此含息公司債價格 $BP(X_t, r_t)$ 之回溯推算過程需修改為：

$$BP^{CDGtree}(X_t, r_t) = e^{-r_t \Delta t} \left\{ \sum_{\theta=u,m,d} P_{\theta}^{r_t} \left[\sum_k P(k) \left(\begin{array}{l} BP(ind)I_{\{l(ind) \leq 0\}} \\ + we^{-r_t(T-(t+\Delta t))}I_{\{l(ind) > 0\}} \end{array} \right) \right] \right\} + cI_{\{l(ind) \leq 0\}}.$$

同時，此模型亦可考慮有贖回或賣回之選擇權公司債。以可贖回之公司債為例，若於時點 t 下公司債可以 CP_t 之價碼贖回，則前述公司債價格 $BP^{CDGtree}(X_t, r_t)$ 還需與 CP_t 比較，以反映其可贖回之情形：

$$BP^{CDGtree}(X_t, r_t) = \min(BP^{CDGtree}(X_t, r_t), CP_t).$$

最後由上述過程推得之 $BP^{CDGtree}(X_t, r_t)$ 即為公司債之今日價格，於實證上可藉由計算 $BP^{CDGtree}(X_t, r_t)$ 與實際公司債價格做比對，以校正模型設定之各項參數值。

第七節 CDGtree 模型與 CDG 模型之數據模擬與比較

由於 CDGtree 模型係以 CDG 模型為基礎所構成，僅於跳躍擴散模型、隨機利率模型、及回復率設定上有所不同。然而這些參數皆可輕易調整為與 CDG 相同之設定，因此本節將證明 CDGtree 模型能夠模擬出與 CDG 相近之環境及計算結果，並且比較跳躍與否及不同回復率設定之影響。

跳躍擴散模型部分，令 $\lambda = 0$ 、以及 $\sigma_j = 0$ 即可將跳躍分支消除，僅留下基本三元樹之分支；利率模型部分，由 Appendix A 對於 HW 模型之敘述得知，將



V 模型所計算出之利率期間結構取代真實世界之利率期間結構時，HW 模型即為 V 模型；回復率之修正方式已於第二章第六節介紹過。

調整完模型設定之後，便可進行不同型態之 CDGtree 模型與 CDG 模型之數據比較，本研究以本金為 1，到期日為 5 年之零息債券作為評價主體，並分別比較兩種不同起始負債比之結果，參數上本研究沿用 Collin-Dufresne and Goldstein (2001) 之設定¹。另外，此二模型之準確度取決於時間區隔 Δt ，當 Δt 切割越細則模型越準確，卻也使得運算時間相對更加龐大。為同時追求計算速度及準確度，本節之模擬將分別計算在 $\Delta t = \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24}, \frac{1}{30}$ 下之零息債券價格之後，以一元二次式進行回歸分析² ($\Delta t, \Delta t^2$ 為自變數，債券價格為依變數)，並取其截距項作為當 Δt 趨近於無限小時模型價格之估計，如圖 2.5 及圖 2.6。同時，本模型亦比較在跳躍模型下兩種不同回復率設定之下之模型結果。以下為本節重點比較之四種模型：

Model I : CDG

Model II : CDGtree + No Jump + $w \cdot e^{-r_\tau(T-(\tau+\Delta t))}$

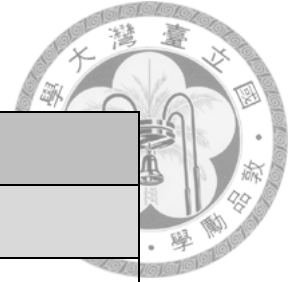
Model III : CDGtree + Jump + $w \cdot e^{-r_\tau(T-(\tau+\Delta t))}$

Model IV : CDGtree + Jump + $e^{-l(\tau+\Delta t)}$

¹參數設定如下： $l_0 = 0.35$ or $l_0 = 0.65$ ； $\sigma_V = 0.2$ ； $\phi = 2.8$ ； $\delta = 0.03$ ； $\sigma_r = 0.015$ ； $a = 0.1$ ； $\sigma_J = 0$ or $\sigma_J = 0.3$ ； $\rho = -0.2$ ； $X_0 = 0$ ； $\mu_J = -\sigma_J^2/2$ ； $\kappa = 0.18$ ； $\nu = 0.6$ or $\nu = 0.5$ ； $\lambda = 0$ or $\lambda = 2$ ； $c = 0$ ； $w = 0.56$ 。

² 仿照 Collin-Dufresne and Goldstein (2001)於 Appendix C.3 所提及之外插法，其利用 $\Delta t = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ 為切割點並使用 Numerical Recipes 之 polint routine 法進行外插。

表 2.2 零息公司債評價



Zero Coupon Bond (Unit : \$) T = 5 yr				
l_0	0.35		0.65	
Model I	0.73832480	0%	0.65962290	0%
Model II	0.73866856	0.0465%	0.66343917	0.5786%
Model III	0.56052513	-24.0815%	0.44774376	-32.1213%
Model IV	0.67220865	-8.9549%	0.59002528	-10.5511%

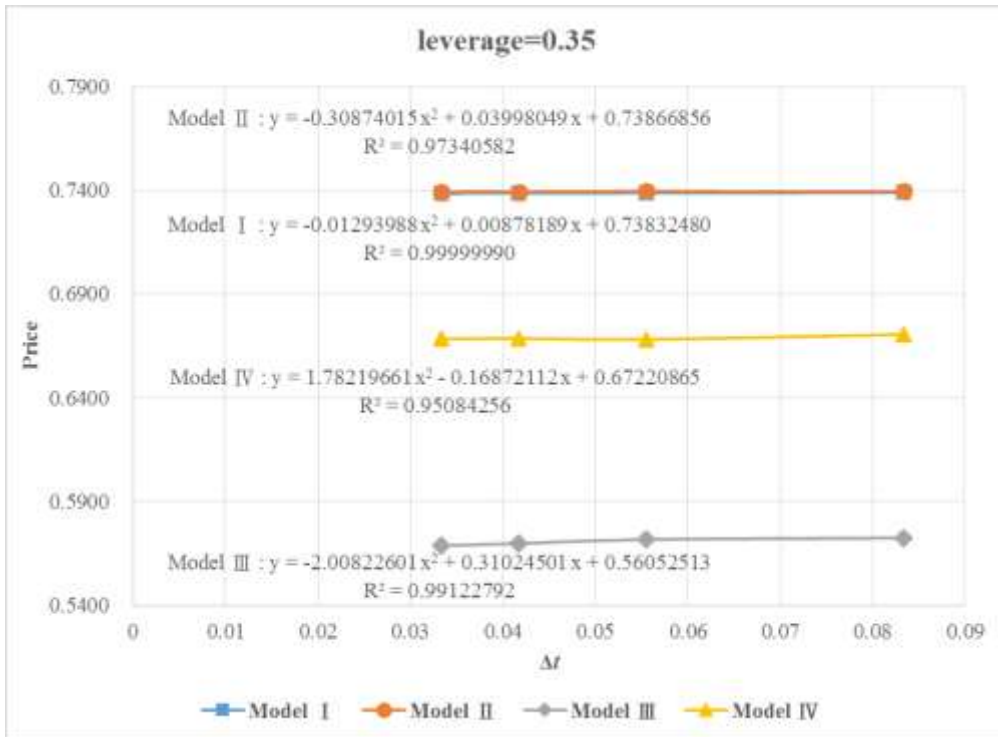


圖 2.5 零息公司債評價回歸示意圖 ($l_0 = 0.35$)

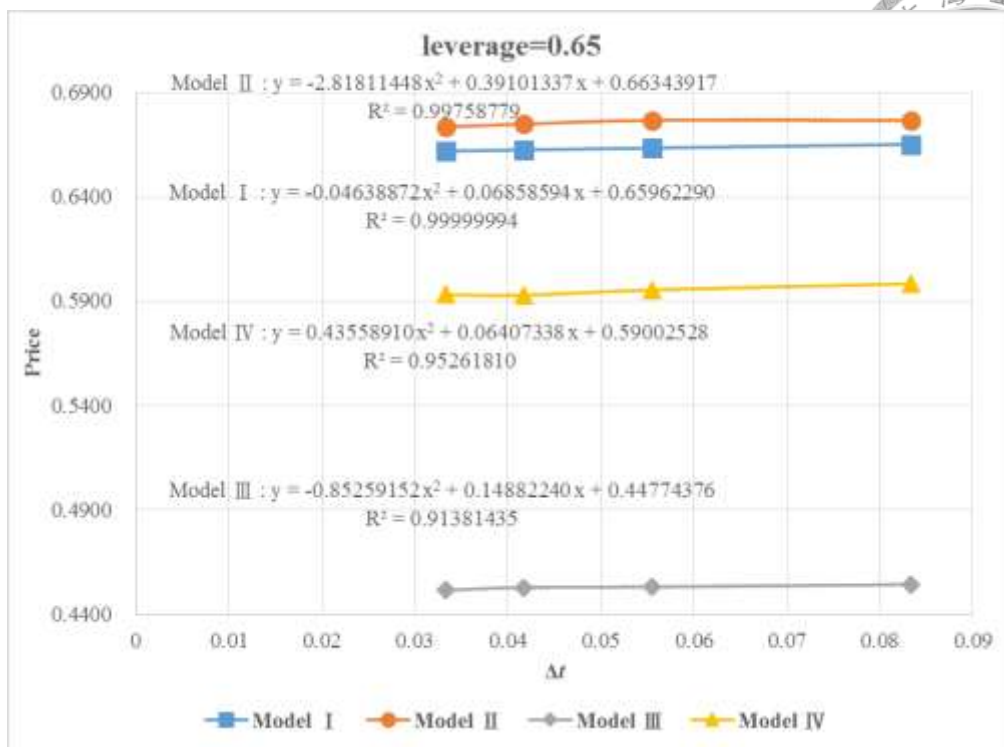


圖 2.6 零息公司債評價回歸示意圖 ($l_0 = 0.65$)

表 2.2 為各模型計算到期日為五年之零息債券評價表，其中粗體字為當期公司債價格，而百分比數值則為該型態與 Model I 評價之差異百分比。比較各模型之評價可發現 Model II 能夠計算出與 Model I 非常近似之價格，差距皆在百分之一以下，而推究其因，來自於利率結構設定之不同。本研究在 CDG 模型中，已給定利率必為正數之設定，然而在以 HW 模型模擬 V 模型過程當中，在 ΔR 較大且初始利率較低之下，利率節點可能出現負值，致使折現因子出現大於零之情況，因此價格會較 CDG 模型之評價為高。欲將其排除則須調整利率結構設定，便可避免利率樹狀分支產生負數之情況。即在利率樹正常之情況下，Model II 將與 Model I 評價結果相差無幾，因此 CDGtree 模型確實可考慮一般 CDG 之設定並取代之。而針對 l_0 對兩模型差距之影響，本研究亦進行教詳細之敏感度分析，其結果如表 2.3 所示：



表 2.3 零息公司債 l_0 之敏感度分析

Zero Coupon Bond (Unit : \$) T = 5 yr						
l_0	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
Model I	0.742593	0.739065	0.729626	0.711262	0.680718	0.633777
Model II	0.743576	0.740690	0.732268	0.715965	0.681507	0.636867
	0.1323%	0.2199%	0.3622%	0.6614%	0.1159%	0.4875%

表 2.3 為針對 Model I 與 Model II 在不同 l_0 設定下模擬價格之敏感度分析表，可發現其模擬價格差距並非與 l_0 成正比，而是近似於一跳躍狀，此震盪收斂亦為樹狀模型特色之一。原因來自於在模型建構中，會有一最接近 0 之 $l_t(X_t, r_t)$ ，其與 0 之距離會受到不同 l_0 所影響，與 0 之距離變化亦會影響評價結果，因此其收斂過程並不如 CDG 模型穩定。

而 Model II 與 Model III 之差異，來自於跳躍過程之貢獻，同時也是本模型之改良核心。由於本模型將 μ_j 設為一負數， X_t 平均跳躍方向為負，又由模型推導過程中得知 X_t 與 l_t 具反向關係，亦即此設定會令 l_t 平均跳躍方向為正，更容易達到違約門檻。在涵蓋風險上升情況下，Model III 計算出之價格明顯比 Model II 低。本研究亦進行了對不同 λ 及 σ_j 之敏感度分析，以探討其跳躍效果受到此兩變數之影響（以 $l_0 = 0.35$ 之債券， $\Delta t = 1/12$ 為例）：

表 2.4 零息公司債 Model III 跳躍參數敏感度分析

Zero Coupon Bond (Unit : \$) T = 5 yr $l_0 = 0.35$ $\Delta t = 1/12$				
Model II = 0.73925559				
	$\lambda = 2$		$\lambda = 4$	
$\sigma_j = 0.1$	0.72123152	-2.4381%	0.69715242	-5.6953%
$\sigma_j = 0.3$	0.56054956	-24.1738%	0.46272919	-37.4061%



表 2.4 為 Model III 跳躍參數之敏感度分析，其中粗體字部分為 Model III 在不同設定下之債券價格，對應之百分比為與無跳躍模型 Model II 價格之差距。在 $\lambda = 2$ 下，當 σ_j 從 0.1 增至 0.3，其價格差距會放大 10 倍， $\lambda = 4$ 下也有 6.5 倍之多，遠高於在固定 σ_j 下放大 λ 所增加之倍數。因此跳躍過程之標準差 σ_j 為主要影響價格評價之參數。

另外，在兩種不同回復率設定之下，本模型之回溯推算過程會造成 Model III 及 Model IV 之模型價格產生明顯之差異。以 $l_0 = 0.35$ 設定之零息債券為例 ($\Delta t = 1/12$)：

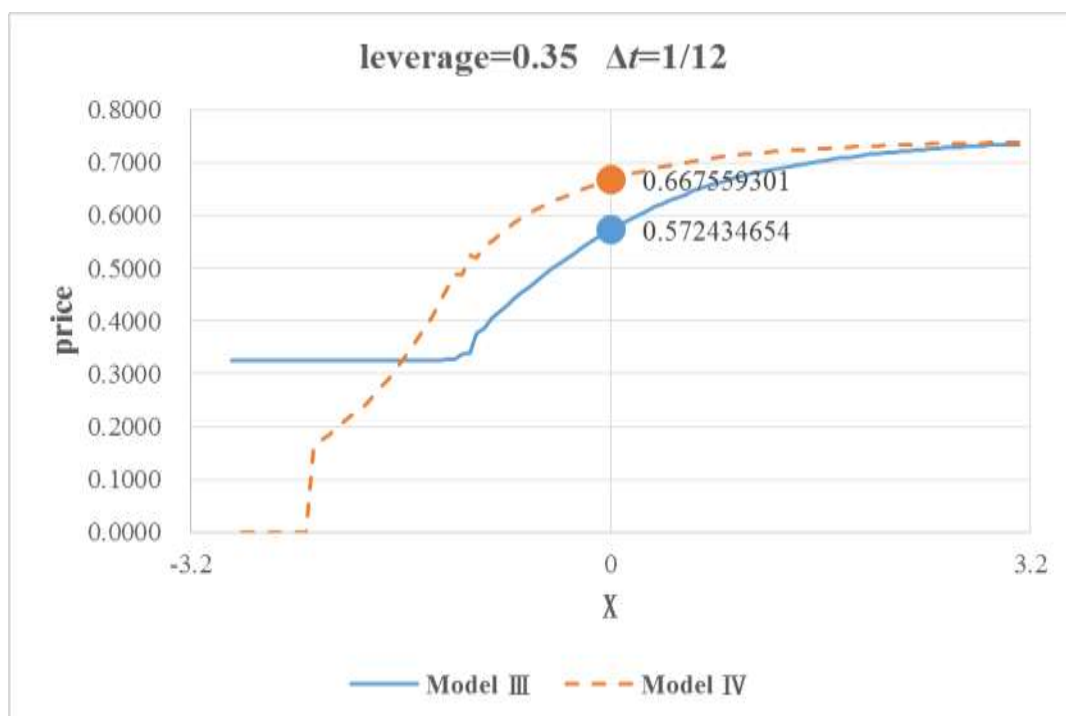



圖 2.7 Model III 及 Model IV 回溯推算過程比較

圖 2.7 為 Model III 及 Model IV 所評價出第 0 期各 X 節點下之債券價格，而利率節點在此時已收斂為一點，其中 $X = 0$ 之節點為本評價過程中最後債券價格。可發現 Model III 之價格隨著 X_t 漸小 (l_t 漸大)，會以較快速度下降，在 $X = 0$ 之節點時其價格會高出 Model IV 之價格許多，最後會趨近於某一定值；而 Model IV



之價格下降速度較緩慢，最後會低於 Model III 之定值，並在某一特定 X_t 之後降為 0。主要原因在於，假設最末期為第 n 期，Model III 在該期破產之剩餘價值為定值 0.44，在回溯推算第 $n-1$ 期過程當中，僅以本金 1 (未破產) 及剩餘價值 0.44(破產) 計算債券價格，因此在 $l_{n-1} = 0$ 附近之節點其價格會下降較快，而對於 X_{n-1} 很小 (l_{n-1} 很大) 以至於其後一期可能之 X_n 全數破產之節點，皆以殘餘價值 0.44 進行折現，因此會趨近為一定值；然而在 Model IV 過程當中，其殘餘價值取決於當時槓桿 l_n 再乘上一 Γ_θ ，在 l_n 略大於 0 時，其殘餘價值 $\exp(-l_n)$ 會從 1 開始向 0 以指數速度下降，故在回溯推算過程當中，第 $n-1$ 期之債券會隨著 l_n 以較緩慢的速度下降，直到其後期節點平均剩餘價值低於 0.44 之後，其價格始低於 Model III 相對節點之價格。而最後會降為 0 之原因，在於後項之 Γ_θ 僅反映未違約情況下公司債之期望值，因此對於後期全數違約之節點，其 Γ_θ 並不具任何意義，而在這些節點下本研究程式編寫之 Γ_θ 全數為 0，因此造成最後降為 0 之現象。

最後，Model I 及 Model IV 之差異，即為 CDGtree 模型改良 CDG 模型之總效果。在引進跳躍過程以及內生回復率之下，可使模型評價價格降低 8% 至 10%，且對於初始槓桿 l_0 較低者亦能改善高估債券價格之缺陷。

第三章 參數估計與實證結果



第一節 資料選取及數據來源

在 Merton (1974)及其後的結構式模型文獻當中，皆假設公司存在非常簡單之資本結構，即單一債券加上普通股權益，因此後續研究如 Longstaff and Schwartz (1995)、Eom, Helwege, and Huang (2004)、Holborow (2008)，在實證資料篩選上皆考慮負債種類不超過數種、及求償順位單一等條件。

本研究在債券之選取上亦遵循前人之文獻設定，首先刪除資本結構與其他產業截然不同之金融產業，以及獲利表現易受法規影響之能源產業，再者，債券必須包含固定票息、不可轉換、不可贖回或賣回、以美元計價之特性。滿足上述條件下，本研究挑選在 2002 年 1 月 1 日至 2007 年 12 月 31 日之間於美國發行，且剩餘到期日在一年以上之債券。為符合簡單資本結構設定，其發行公司必須僅發行兩張以下流通在外之債券，且擁有相同之求償順位。再者，該公司必須為上市櫃公司，且僅發行普通股股票，以利估計其權益之市場價值。此外，該債券必須在發行後有較清楚且完整之收盤價資訊。以確保該債券於市場上之流動性及價格揭露。最後，由於部分參數之估計為求準確，必須使用發行日十年前之權益市值及公司財務資料，因此資料不完整之新興公司本研究亦不考慮。經過以上篩選過程，研究供挑選出七張符合條件之債券，作為實證分析之樣本。其中本研究刻意保留一能源產業公司，以探討結構式模型對於此類型公司債之評價效果。

債券資料及交易價格來源為 FISD (Mergent Fixed Income Securities Database)；公司財務資料來源為 Compustat；股價、股利率、流通在外股數等市場資料來源為 CRSP。上述資料庫皆已併入華頓商學院學術研究資料庫(Wharton Research Data Services)。無風險利率方面，本研究採用來源為 Federal Reserve Board 官方網站

H15 分頁所公布之歷史 CMT³資料，作為各利率模型配適利率期間結構及模型參數之依據。



第二節 模型參數估計

各模型都有其相對應之參數集合需進行估計，本研究將必須估計之參數分為債券屬性參數、公司屬性參數、利率參數三類，以下將參數整理於表 3.1 如下，並逐一介紹估計方式。

表 3.1 各模型參數估計方式

參數	描述	估計方式	資料來源
債券屬性參數			
c	票息利率	給定	FISD
T	到期日	給定	FISD
F	債券面額	總負債	Compustat
w	本金回復率	給定	Moody's
w_c	票息回復率	假設為 0	-
公司屬性參數			
V	資產總市值	總負債 + 權益市值	Compustat
σ_V	資產波動率	經槓桿調整後之歷史權益波動率	CRSP
δ	支付率	c 與經股票回購調整後之股利支付率之加權平均	Compustat, CRSP, FISD
κ_l	目標槓桿回歸速度	對數槓桿對延遲對數槓桿及 r 建立回歸式之回歸係數	Compustat, CRSP, CMT
ν	目標槓桿回歸常數		
ϕ	槓桿與利率敏感度		
μ_J	跳躍程度期望值	考慮 $\mu_J = -\frac{\sigma_J^2}{2}$ 使得 $\frac{dv_t}{v_t}$ 之跳躍程度期望值為 0	
σ_J	跳躍程度標準差	敏感度分析	
λ	跳躍強度		
S	公司稅稅率	假設為 0.35	-

³採 CMT 資料是為了與 Eom, Helwege, and Huang (2004)比較，如需零息無風險利率，可參考 OptionMetrics 之 continuously compounding Treasury rates 或 Bloomberg 的無風險零息利率曲線。

利率參數			
$r(t_i)$	無風險零息利率	對 CMT 利率期間結構做 spline interpolation	CMT
ρ	V 與 r 之相關係數	權益報酬率與 r 變動量之相關係數	CRSP, CMT
a	利率回歸速度	V 模型，詳見 Appendix A	CMT
b	長期利率平均		
r_t	t 時點無風險利率		
σ_r	利率波動性		

相較於直接使用債券面額，本研究使用公司總負債於財務報表上之帳面價值作為債券面額之估計。由於結構式模型定義，當資產價值小於負債時公司發生違約，而本研究在資料選取上允許公司發行一種以上之債券，故使用總負債作為估計方式較符合實務狀況。

總資產本研究以其市值作估計，即等於權益市值與負債市值之總和，前者以流通在外股數乘以股價作為估計值，後者直接以負債之帳面價值替代。同時，負債比亦可從上述過程中求出。

資產波動率 σ_V 則使用權益之隱含波動率來估計，其概念類似於 Black-Scholes 選擇權訂價模型中之權益隱含波動率。由其訂價模型中可得知：

$$E_0 = V_0 e^{-\delta T} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2),$$

$$\text{其中 } d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{K}\right) + \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma_V \sqrt{T}}, d_2 = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{K}\right) + \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma_V \sqrt{T}}.$$

將 E_0 對 V_0 偏微分可得到

$$\frac{\partial E_0}{\partial V_0} = N(d_1),$$

並假設 V 及 E 皆服從一維納隨機過程：

$$dV = rVdt + \sigma_V VdZ,$$



$$dE = rEdt + \sigma_E EdZ,$$

又 E 為 V 及 t 之函數，應用 Itô's Lemma 可得到：

$$dE = (\dots)dt + \left(\frac{\partial E}{\partial V} V \sigma_V\right) dZ,$$

由上述之推導可以得到以下關係式：

$$\sigma_V = \frac{\sigma_E E}{VN(d_1)}. \quad (3.1)$$

其中 σ_E 本研究使用該債券之發行公司於評價日前 150 天股價波動率作為計算，如此便僅包含一未知數 σ_V ，其可透過二分法求出。

支付率 δ 包含公司對股利、股票回購、以及債券票息之支付，因此為求準確的估計，必須取得股利率、股票回購、票息利率、以及公司之負債比率。本研究以負債比率對債券票息及權益支付率加權平均之結果代表支付率。當公司在該年度進行股票回購，則權益支付率為股利率與股票回購率之加總；反之則為股利率；又若公司僅進行股票回購而無發放股利，則支付率即為股票回購率。

κ 、 ν 、 ϕ 為 CDG 及其衍生之 CDGtree 模型特有之穩定槓桿參數，可透過對數槓桿對延遲對數槓桿 l_t 及 r_t 建立回歸式之回歸係數求出。CDG 模型中之穩定槓桿隨機過程可改寫為：

$$dl_t = \left[-\left(\kappa\nu - \phi b - \delta - \frac{\sigma_V^2}{2} \right) dt \right] + [-\kappa dt]l_t + [-\kappa\phi dt - dt]r_t - \sigma_V dZ_V$$

可發現該三變數可透過下一期對數槓桿對本期對數槓桿及短期利率建立回歸式之回歸係數求出。將上式第一中括弧視為常數項，第二中括弧視為 l_t 之回歸係數，第三中括弧視為 r_t 之回歸係數，則此式即為計算穩定槓桿參數所需之回歸式。由 l_t 之係數可得到 κ ，代入 r_t 之係數可得到 ϕ ，最後代入常數項即可得到 ν 。



$r(t_i)$ 及 r_i 之估計本研究使用內插法及 V 模型去配適出最符合債券評價日前一天 FRB 所釋出之 CMT 系列。針對單因子模型如 M、G、LT，由於 CMT 系列僅包含 3、6 個月與 1、2、3、5、7、10、20、30 年之期間結構，因此本研究使用 Matlab 所提供之 spline interpolation 函數對 CMT 系列進行內插以計算其他到期期間之無風險零息利率；雙因子模型如 LS、CDG 方面，則使用 V 模型去計算各期之理論即期利率；而 CDGtree 模型則使用 HW 模型計算之，同時風險零息利率期間結構亦作為計算相對應無風險債券理論價格之變數。各利率模型之參數及模型詳見 Appendix A。而各評價日利率期間結構詳見 Appendix B。

ρ 之估計本研究以權益報酬率與利率變動量之相關係數作為代表。權益報酬率使用評價日前十年之股價資料；利率則使用 CMT 系列中期間最短之 3 個月期即期利率，並計算兩者之相關係數。

為估計兩跳躍參數 σ_j 及 λ ，本研究以 Coca-Cola Comp. 之債券作為樣本 (取評價日 2007/10/31)，並在其他參數皆確認下(見表 3.3)，分別以 $\sigma_j = 0.1$, $\sigma_j = 0.3$, $\sigma_j = 0.5$, $\sigma_j = 0.7$ 及 $\lambda = 2$, $\lambda = 4$, $\lambda = 5$ 做敏感度分析，取一組可計算出最接近市價之模型參數作為往後實證之使用。其結果如表 3.2：

表 3.2 跳躍參數敏感度分析

債券市場價格： 99.621			
	$\lambda = 2$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$
$\sigma_j = 0.1$	107.7543	107.7543	107.7543
$\sigma_j = 0.3$	107.7515	107.7246	107.7078
$\sigma_j = 0.5$	105.9756	99.5378	96.2068
$\sigma_j = 0.7$	90.7885	62.8235	52.6917



可發現 $\sigma_j = 0.5$, $\lambda = 4$ 之設定下，模型價格與市場價格最為接近，因此在下一節以 Coca-Cola Comp. 為例之實證分析便以此組參數作為估計，其他公司亦同。

回復率方面，本研究使用穆迪信評 (Moody's) 於 2009 年 “Corporate Default and Recovery Rates, 1920-2008” 公布之公司債本金回復率，若有擔保(Secured)則回復率為 52.3%，若無擔保(Unsecured)則回復率為 36.4%，本研究所使用之實務公司債皆為有擔保公司債；而票息回復率在本研究當中皆假設為 0。由於本研究之 CDGtree 模型同時考慮搭配 CDG 模型外生回復率之設定，因此亦進行了對於回復率之敏感度分析，以 CDGtree + Jump + HW 利率模型 + $w e^{-r_\tau(T-(\tau+\Delta t))}$ 之模型設定評價 Coca-Cola Comp. 於 2007/10/31 之債券價格為例：

表 3.3 回復率敏感度分析

債券市場價格： 99.621			
	w = 32.3%	w = 52.3%	w = 72.3%
$\sigma_j = 0.5, \lambda = 4$	85.8667	90.3442	94.8217
$\sigma_j = 0.5, \lambda = 2$	101.9756	103.1755	104.3753
$\sigma_j = 0.3, \lambda = 4$	107.5851	107.6201	107.6551
$\sigma_j = 0.3, \lambda = 2$	107.7373	107.7408	107.7443

表 3.3 為在四種不同跳躍參數下對於回復率之敏感度分析，可發現在 $\sigma_j = 0.5$, $\lambda = 4$ 之下，將回復率提高至 72.3% 依舊無法得到準確之評價，對於回復率之變動亦相對敏感；然而在 $\sigma_j = 0.5$, $\lambda = 2$ 之下，已使模型價格高於市價，且回復率必須低於 32.3% 方能更靠近市價；若將 σ_j 降低至 0.3，已使得模型價格升至無違約風險債券之水準 (此例為 107.7543)，且不同之回復率其影響並不大。且若要在這設定之下得到較合理之評價， σ_j 及 w 皆必須非常準確，本研究主要選擇針對跳躍參數之選擇，因此對回復率則保持沿用穆迪信評 (Moody's) 之設定。



在完成各式模型架構之公司債及參數估計後，便可進行實際資料之信用價差評價分析。信用價差之計算過程如下所列：

$$BP^{model} = \sum_{j=1}^{N_T} \frac{C}{2} e^{-Y^T t_j} + e^{-Y^T T},$$

其中 BP^{model} 為公司債之價格； Y^T 為公司債殖利率。

令 $BP^{defaultfree}$ 為相對應之無風險債價格，其根據今日之無風險零息利率期間結構所算出來， R^T 為無風險殖利率，則可得下列式子：

$$BP^{defaultfree} = \sum_{j=1}^{N_T} \frac{C}{2} e^{-R^T t_j} + e^{-R^T T}.$$

而 $Y^T - R^T$ 則定義成公司債與無違約風險債券間殖利率之信用價差。在 R^T 固定下，公司債價格越低其 Y^T 越高，因此其信用價差亦較高。

本研究所使用之實務資料如以下各表：



表 3.4 實務資料

發行公司： Anixter Inc.		信用評等：Ba1		
到期日： 2015/2/24				
票息利率： 5.95%		**單位/幣別：仟/美金		
參數	評價日			
	2005/2/28	2006/3/1	2007/3/2	
市價	100.62	92.25	93.50	
T	10	9	8	
F^{**}	943600.00	1305900.00	1830800.00	
V^{**}	2284803.34	3077568.75	4098558.08	
l_t	0.4130	0.4243	0.4467	
σ_V	0.1401	0.1623	0.1670	
δ	0.0513	0.0844	0.0255	
κ_l	1.4827	3.0765	2.0288	
ϕ	-7.2282	-7.6008	-7.2402	
ν	0.7621	0.9010	0.8531	
ρ	-0.0448	-0.0216	-0.0068	
a	0.2886	1.7629	3.2134	
b	0.0591	0.0582	0.0505	
σ_r	0.0407	0.2796	0.3212	
r_t	0.0272	0.0442	0.0534	
σ_J	0.3	0.3	0.3	
λ	4	4	4	



表 3.4 實務資料 (續)

發行公司： Baldor Electric Comp 信用評等：B3		
到期日： 2017/1/25		
票息利率： 8.625% **單位/幣別：仟/美金		
參數	評價日	
	2007/1/29	2007/12/28
市價	104.75	103.50
T	10	9.083333333
F^{**}	219153.00	2056921.00
V^{**}	1341880.32	3966822.88
l_t	0.1633	0.5185
σ_V	0.2435	0.1751
δ	0.0318	0.0549
κ_l	0.6072	0.7327
ϕ	5.7743	-7.6939
ν	1.9971	1.1393
ρ	0.1330	0.1834
a	2.5660	0.1252
b	0.0548	0.0530
σ_r	0.2746	0.0003
r_t	0.0511	0.0314
σ_r	0.6	2
r_t	0.6	2



表 3.4 實務資料 (續)

發行公司： Berry Petroleum Comp 信用評等：B3		
到期日： 2016/10/18		
票息利率： 8.25% **單位/幣別：仟/美金		
參數	評價日	
	2006/10/20	2007/10/22
市價	100.375	101
T	10	9
F^{**}	736998.00	871481.00
V^{**}	1921463.92	2546533.90
l_t	0.3836	0.3422
σ_V	0.6427	0.2119
δ	0.0361	0.0330
κ_l	2.2084	1.0472
ϕ	-3.8324	-10.3764
ν	1.6559	1.2950
ρ	0.1390	0.1536
a	2.9654	0.0760
b	0.0539	0.0532
σ_r	0.3213	0.0000
r_t	0.0512	0.0385
σ_J	0.57	4
λ	0.57	4



表 3.4 實務資料 (續)

發行公司： Blount Inc.		信用評等：B2	
到期日： 2012/8/4			
票息利率： 8.875%		**單位/幣別：仟/美金	
參數	評價日		
	2004/8/6	2005/8/8	2006/8/8
市價	102.25	109	100.25
T	8	7	6
F^{**}	802800.00	666045.00	587645.00
V^{**}	1196857.15	1422235.52	1154291.84
l_t	0.6708	0.4683	0.5091
σ_V	0.1407	0.1548	0.1514
δ	0.0595	0.0416	0.0452
κ_l	0.5716	0.4507	0.4518
ϕ	6.5290	-5.6017	-8.0416
ν	1.2245	0.1674	-0.0962
ρ	0.0503	0.0987	0.0857
a	0.2378	0.4492	2.8287
b	0.0795	0.0527	0.0546
σ_r	0.0488	0.0508	0.2946
r_t	0.0136	0.0352	0.0511
σ_J	0.3	0.3	0.3
λ	4	4	4



表 3.4 實務資料(續)

發行公司：Coca-Cola Comp. 信用評等：Aa3		
到期日：2017/10/29		
票息利率：5.35% **單位/幣別：仟/美金		
參數	評價日	
	2007/10/31	2007/12/31
市價	99.621	103.35
T	10	9.83
F^{**}	22001000.00	22001000.00
V^{**}	154962212.72	154962212.72
l_t	0.1420	0.1420
σ_V	0.1184	0.1288
δ	0.0317	0.0317
κ_l	0.5486	0.6438
ϕ	6.2719	5.4469
ν	2.6370	2.4635
ρ	-0.0103	-0.0160
a	0.0564	0.1074
b	0.0584	0.0524
σ_r	0.0049	0.0016
r_t	0.0388	0.0312
σ_J	0.5	4
λ	0.5	4



表 3.4 實務資料(續)

發行公司：Dean Foods Comp 信用評等：B3		
到期日：2016/5/11		
票息利率：7% **單位/幣別：仟/美金		
參數	評價日	
	2006/5/15	2007/5/15
市價	100.9	101
T	10	9
F^{**}	5025567.00	5001907.00
V^{**}	10294448.53	11028983.26
l_t	0.4882	0.4525
σ_v	0.1111	0.2749
δ	0.1177	0.1209
κ_l	3.4326	2.1261
ϕ	-3.7336	-3.5037
ν	0.6752	0.6900
ρ	0.1211	0.1180
a	0.0996	3.2518
b	0.0571	0.0510
σ_r	0.0045	0.2846
r_t	0.0493	0.0486
σ_J	0.3	4
λ	0.3	4



表 3.4 實務資料 (續)

發行公司： Public Service Ent. Grp. ⁴		信用評等： A3	
到期日： 2014/8/16			
票息利率： 5%		**單位/幣別： 仟/美金	
參數	評價日		
	2004/8/20	2005/8/16	2006/8/24
市價	100.0433	101.14	96.341
T	10	9	8
F^{**}	21897000.00	22816000.00	21647000.00
V^{**}	31368258.12	37335680.24	38274130.28
l_t	0.6981	0.6111	0.5656
σ_V	0.0475	0.0823	0.0984
δ	0.0512	0.0515	0.0517
κ_l	1.5855	1.3358	0.7610
ϕ	2.0948	1.2989	0.9096
ν	0.4306	0.4253	0.4918
ρ	-0.0307	0.0327	0.0330
a	0.2000	0.6566	2.9178
b	0.0759	0.0489	0.0540
σ_r	0.0366	0.0634	0.3087
r_t	0.0139	0.0354	0.0511
σ_J	0.12	0.12	0.12
λ	4	4	4

⁴ 能源產業。

第三節 實證結果



本節將比較以下共八種不同模型以及市價所評價出之信用價差，其中 CDGtree 模型本研究進行三種不同設定之結果比較：

Model I : M 模型

Model II : G 模型

Model III : LT 模型

Model IV : LS 模型

Model V : CDG 模型

Model VI : CDGtree + Jump + V 利率模型 + $we^{-r_\tau(T-(\tau+\Delta t))}$

Model VII : CDGtree + Jump + V 利率模型 + $e^{-l(\tau+\Delta t)}$

Model VIII : CDGtree + Jump + HW 利率模型 + $e^{-l(\tau+\Delta t)}$

其中 Model IV 至 Model VIII 採用 $\Delta t = 1/12$ ，以兼顧評價時間，而各模型所評價之信用價差表及示意圖整理如下：

表 3.5 公司債各模型信用價差

Coca-Cola Comp. (Aa3)		
信用價差 (單位:bp)	評價日	
	2007/10/31	2007/12/31
市價	99.140982	98.229440
Model I	0.000000	0.000312
Model II	0.000000	2.839614
Model III	42.847671	71.915154
Model IV	-5.540357	-10.835043
Model V	-5.540402	-10.835452
Model VI	224.380537	190.217313
Model VII	83.833326	73.958972
Model VIII	100.203022	94.894577



表 3.5 公司債各模型信用價差 (續)

Anixter Inc. (Ba1)			
信用價差 (單位:bp)	評價日		
	2005/2/28	2006/3/1	2007/3/2
市價	158.888937	243.890313	237.577993
Model I	23.934124	106.731064	19.587901
Model II	1.163489	13.153127	10.471707
Model III	80.796786	78.065021	61.569365
Model IV	81.690158	316.146825	89.897655
Model V	8.180914	446.969856	302.405867
Model VI	503.224502	2237.973126	2128.525979
Model VII	178.997487	1624.733301	767.983563
Model VIII	176.458788	1622.371125	761.012209

表 3.5 公司債各模型信用價差 (續)

Baldor Electric Comp. (B3)		
信用價差 (單位:bp)	評價日	
	2007/1/29	2007/12/28
市價	289.130825	457.879621
Model I	5.519261	123.962492
Model II	0.098655	72.228510
Model III	145.251332	313.831023
Model IV	31.454125	226.082209
Model V	5.251725	4.421224
Model VI	325.403365	979.500088
Model VII	268.757070	551.874802
Model VIII	264.037448	572.579229



表 3.5 公司債各模型信用價差 (續)

Berry Petroleum Comp. (B3)		
信用價差 (單位:bp)	評價日	
	2006/10/20	2007/10/22
市價	324.500408	367.095961
Model I	673.209512	31.094469
Model II	2499.332806	27.856224
Model III	513.292005	173.472928
Model IV	1144.897384	70.658176
Model V	4.877413	-0.023399
Model VI	781.980711	1094.276250
Model VII	313.229685	636.170337
Model VIII	309.916559	759.053814

表 3.5 公司債各模型信用價差 (續)

Blount Inc. (B2)			
信用價差 (單位:bp)	評價日		
	2004/8/6	2005/8/8	2006/8/8
市價	431.332602	281.521800	375.801883
Model I	211.679528	28.734998	32.703337
Model II	470.663924	17.858617	21.069898
Model III	386.292428	202.731410	178.735539
Model IV	514.881652	93.633316	153.831704
Model V	14.291841	273.108185	1074.865701
Model VI	952.133293	1605.675802	2074.424535
Model VII	442.529863	1077.150098	1510.660502
Model VIII	449.720804	1074.984510	1508.969675



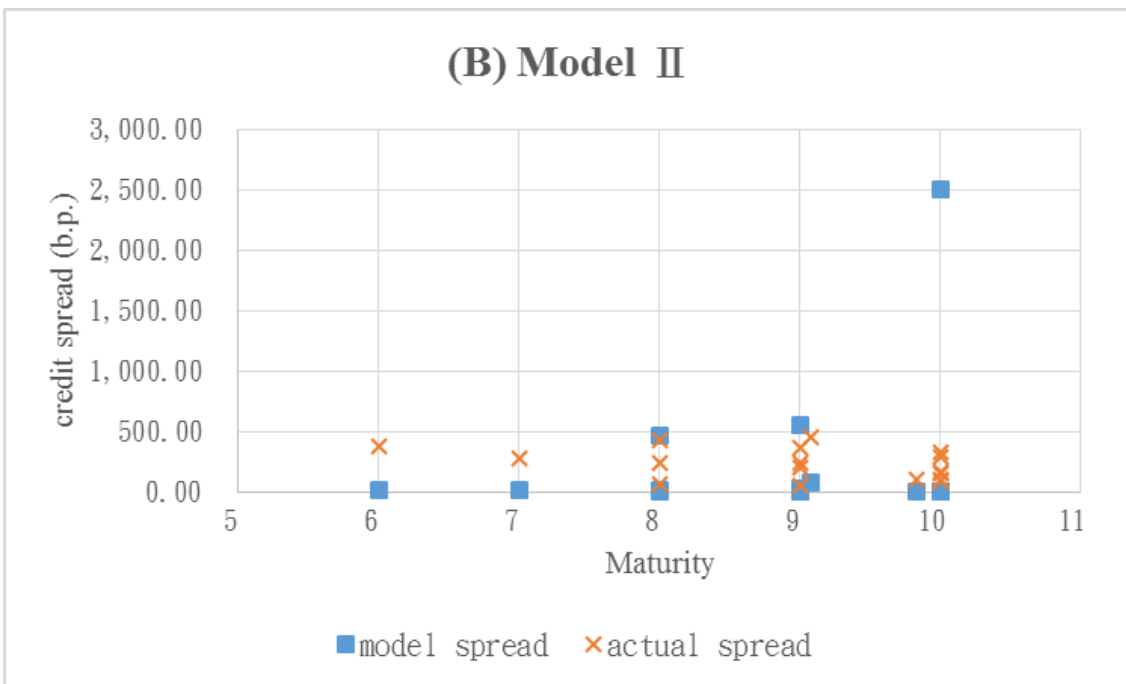
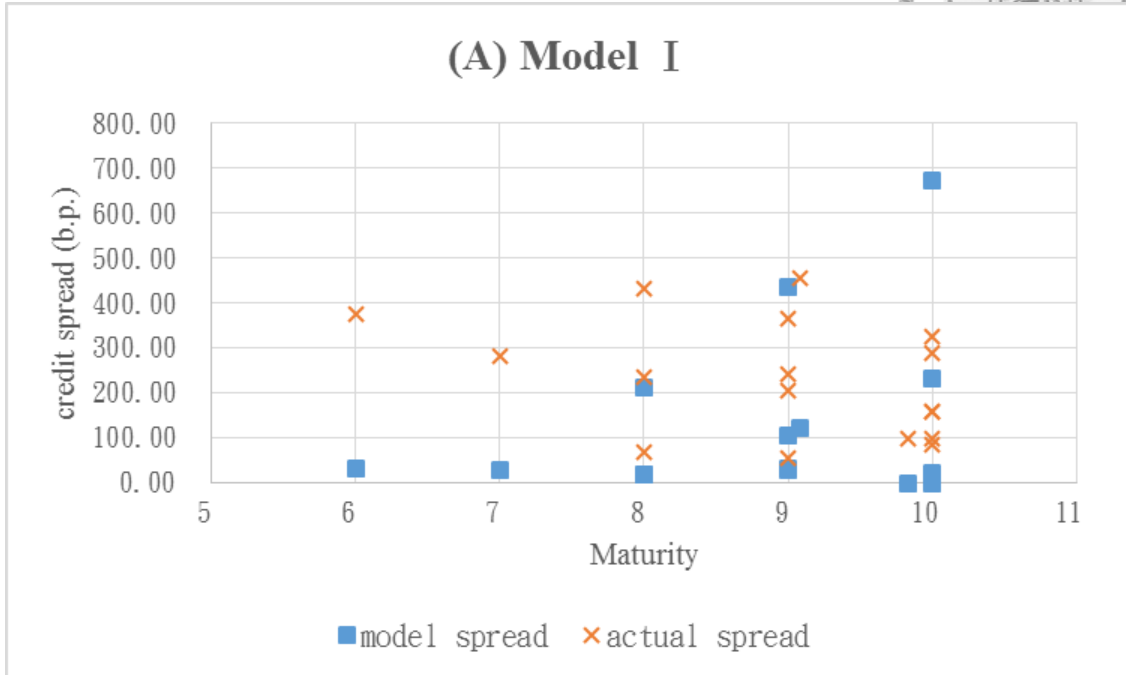
表 3.5 公司債各模型信用價差 (續)

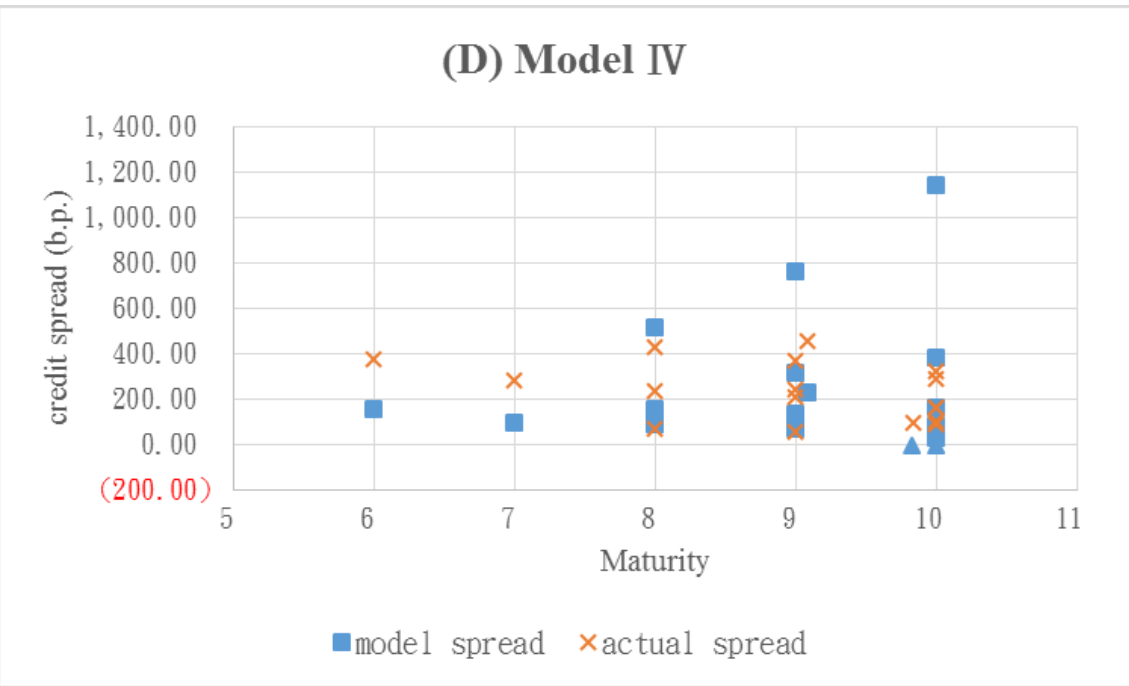
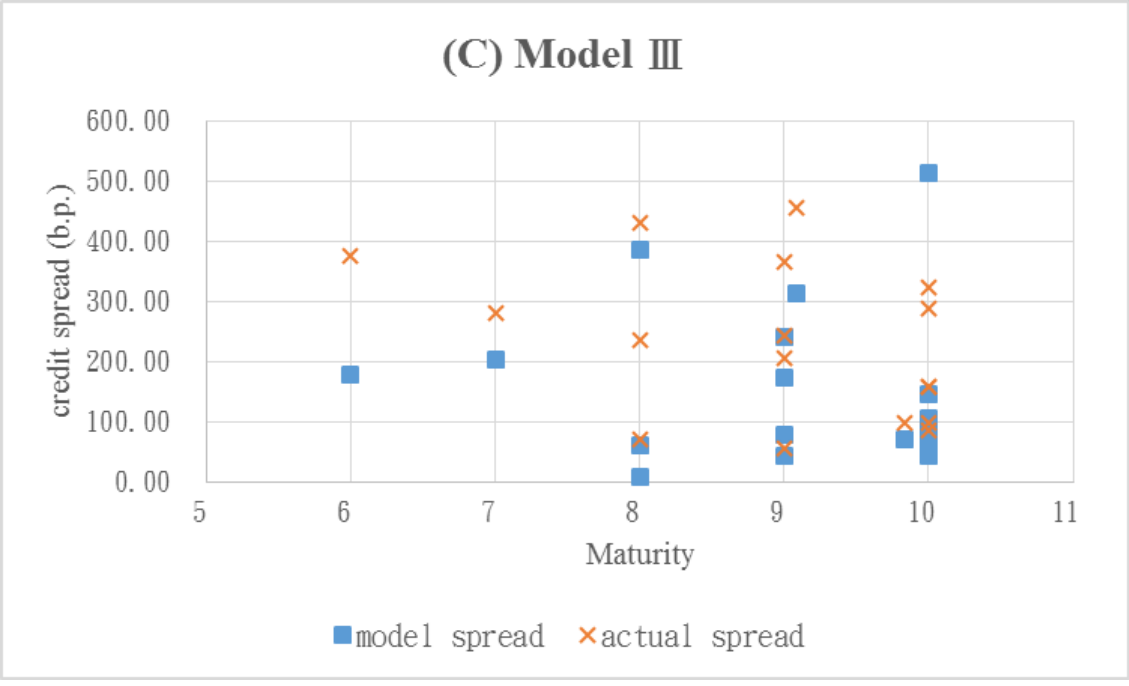
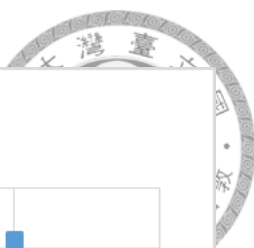
Dean Foods Comp. (B3)		
信用價差 (單位:bp)	評價日	
	2006/5/15	2007/5/15
市價	159.444033	207.101432
Model I	232.979077	435.798691
Model II	3.579713	552.462354
Model III	106.390373	240.827218
Model IV	384.746030	761.574296
Model V	1.295596	27.390621
Model VI	573.544352	1260.542117
Model VII	120.704809	412.558209
Model VIII	135.198737	405.342164

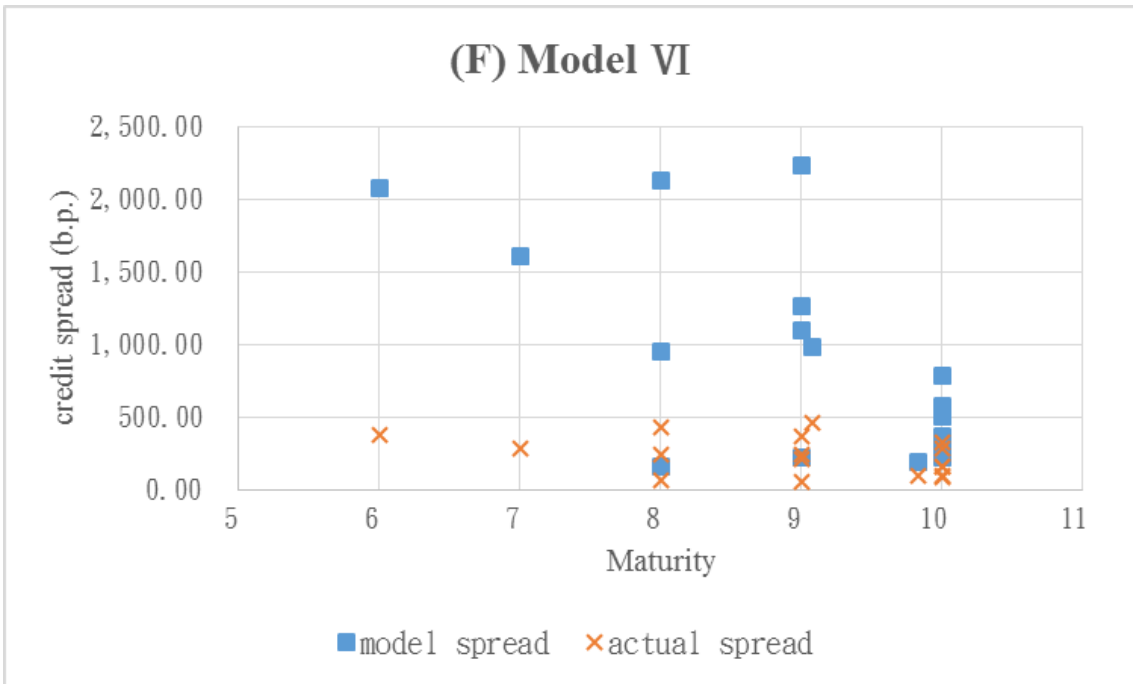
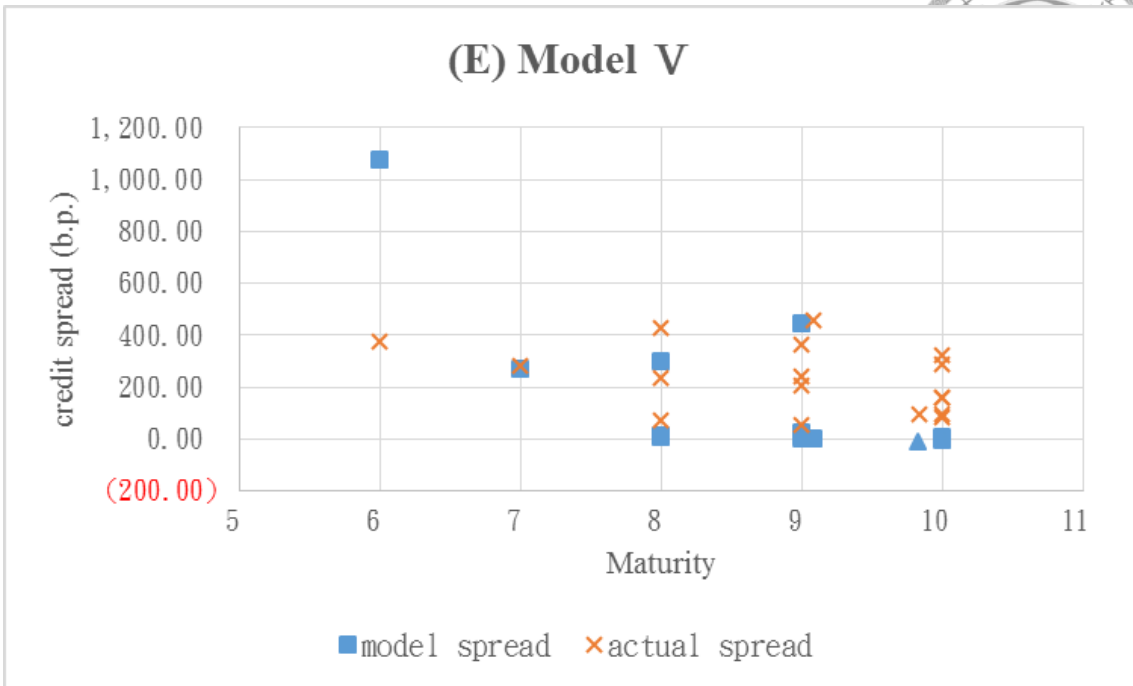
表 3.5 公司債各模型信用價差 (續)

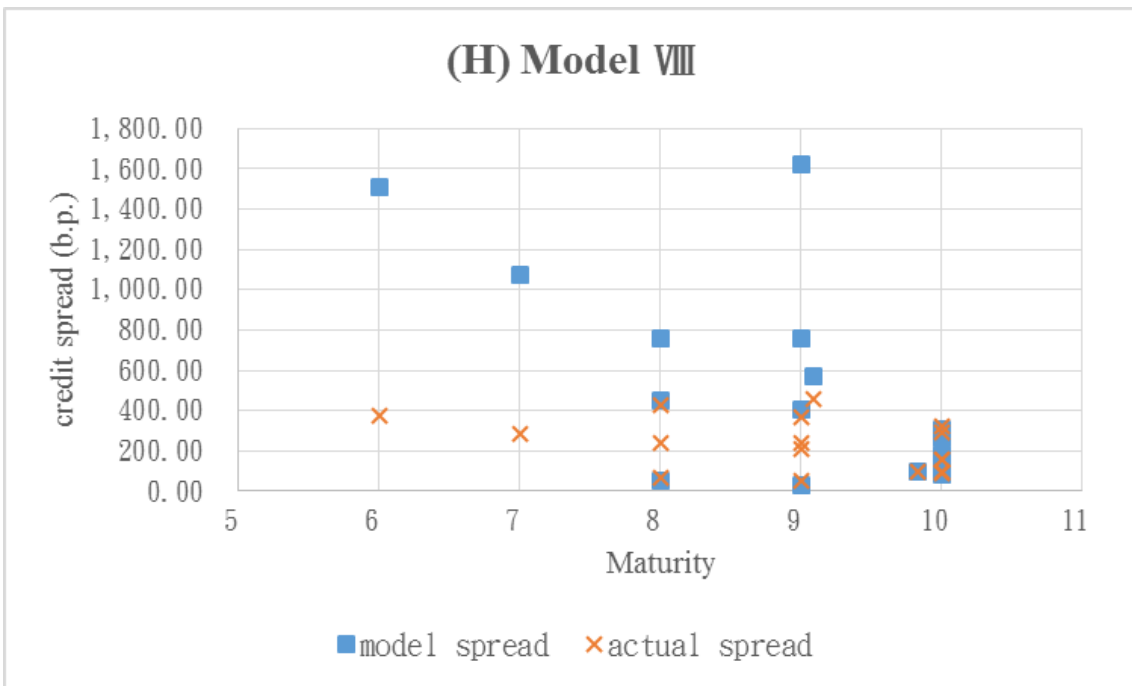
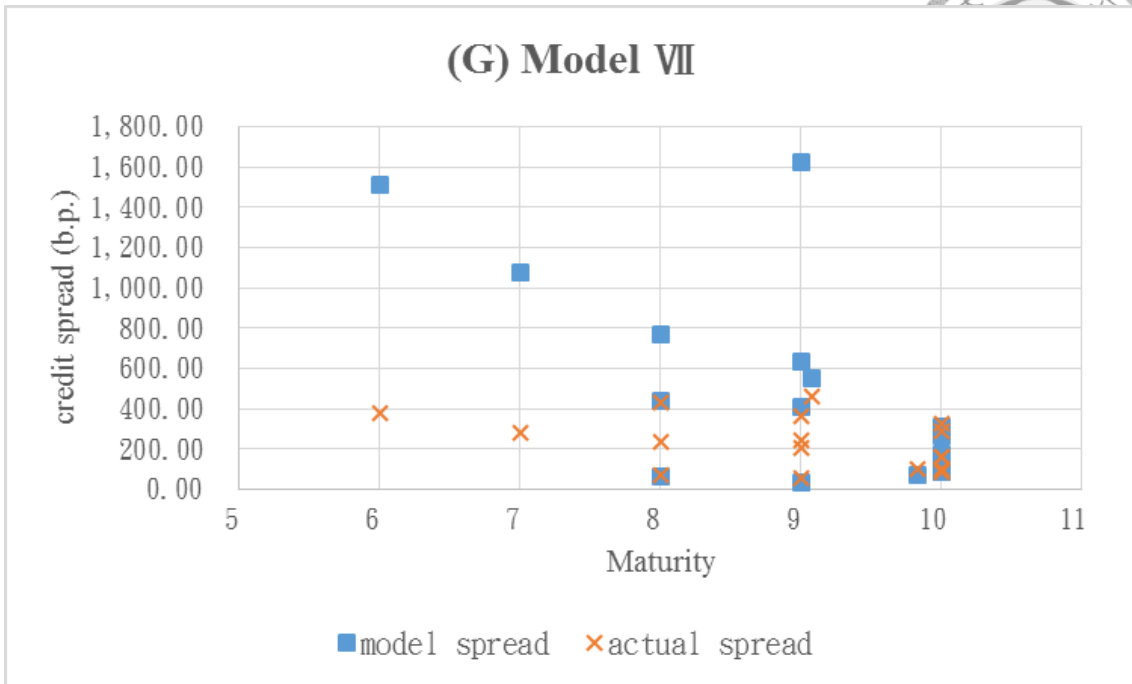
Public Service Ent. Grp. (A3)			
信用價差 (單位:bp)	評價日		
	2004/8/20	2005/8/16	2006/8/24
市價	86.576498	55.646451	70.229545
Model I	18.574529	29.632932	19.428580
Model II	5.903175	0.945382	0.582398
Model III	68.023627	44.523590	8.847375
Model IV	165.041592	135.093824	155.288485
Model V	5.596575	6.989429	11.380442
Model VI	363.961440	222.741041	163.741945
Model VII	85.267168	36.079778	60.746926
Model VIII	85.277304	29.447741	54.106442

圖 3.1 各模型信用價差示意圖









結果顯示，Model I 不論對於低或高初始槓桿之公司，皆無法評價出有效之債券價格，針對低初始槓桿之公司債時，更經常出現模型價格幾近於無違約風險債券價格之現象，普遍低估信用價差；Model II 之低估程度與 Model I 相近，僅



針對於信用評等較差且初始槓桿較高之債券出現較為接近之評價；而 Model III 則較不會出現信用價差接近 0 之結果(最低亦有 18bp)，但亦無法得到有效之債券評價。

Model IV 模型及 Model V 模型，對於初始槓桿低之公司，則可能出現小於 0 之錯誤信用價差(圖 3.1 (D) 及 (C) 中之三角點)，原因來自於其引用之 V 隨機利率模型並無法正確反映實際利率期間結構，其所計算出來之無違約風險折現因子將會產生偏差。由式(2.3)及式(2.5)可得知，在無法計算出有效之違約機率(Q^T 幾乎為 0)，且各期之 V 模型折現因子 $D(r_t, t_i)$ 較真實利率期間結構之無違約風險折現因子小下，在計算公司債價格時有機會出現高於 HW 模型建構之無違約風險債券價格之錯誤評價。此外，此兩模型對於初始槓桿低之公司，無法計算出合理違約機率之缺陷依舊存在。而對於高初始槓桿之公司債，則此兩模型便出現不穩定的評價結果，非過度高估即過度低估，鮮有較準確之評價。

Model VI 及 Model VII 之評價價格如同第二章第七節 Model III 及 Model IV 之結果，前者在保留著 CDG 模型之外生回復率設定下，會計算出高於後者之信用價差，也因此，前者之設定下會全數出現高估之現象。

Model VIII，同時也是本研究對 CDGtree 模型之標準設定，其與 Model VII 之差異，即反映了引用 V 模型和 HW 模型之差異，由於 V 模型係以參數集合模擬出最接近真實利率期間結構之利率曲線，然而用以計算折現因子或評價無違約風險債券時，並無法有效反映出真實之期間結構，而 HW 模型便解決此一缺陷。

然而，除 Coca-Cola Comp. 兩評價日相近之外，對於其他公司，以同一張債券於首次評價日所估計出較合理之跳躍參數，計算往後評價日之信用價差，結果反而出現過度高估之現象。原因在於，在不同時間點，公司屬性參數亦會有所變動，而可能影響各時間點之跳躍參數。如 Anixter Inc. 在 2006 年股利支付率較高，可能衝擊到債權價值、Blount Inc. 之公司市值於 2005 年突然上升 19%，負債比下降 30%

等。因此不同時間點，其合適之跳躍參數亦可能不同。

最後，本研究將探討各種結構式模型對特殊產業(以能源公司 Public Service Ent. Grp. 為例)之評價結果。



此公司具有高初始槓桿之性質，然而相較於其他公司，其資產波動程度較小，其信用評等具有 A3 之投資級等級，因此可發現其市價隱含之信用價差較前述高槓桿者為低，甚至低於評等較高且槓桿較低之 Coca-Cola Comp.。

而前五組模型皆無法有效評價出合理之信用價差，如 Model II 所評價出之信用價差皆不超過 6bp；Model IV 則因為初始槓桿過高且波動程度小，所計算出之違約機率較高而導致信用價差高出約 80bp。然而 Model VIII 以同一組跳躍參數所計算出不同評價日之信用價差，其差距反而較前述公司債之結果小，且變動方向亦相同。可能原因即來自於其資產波動程度 σ_V 及槓桿對利率之敏感度 ϕ 較穩定，使其跳躍參數之變動也較小。因此跳躍過程之加入，亦改善了以往結構式模型對於特殊性質產業之評價能力。

第四章 結論



本研究接續 Chang (2012) 對跳躍擴散槓桿比可違約債券評價 CDGtree 模型之研究，並與其他結構式模型進行實證比較，參數估計方法本研究參考 Eom, Helwege, and Huang (2004) 之設定，選取了 7 家到期期間介於 6~10 年之單純含息債券作為分析案例。

在第二章第七節，本研究證實了 CDGtree 模型能夠得到較 CDG 模型為低之債券評價，且在修改模型設定下，能夠模擬出與原 CDG 模型非常近似之價格，因此 CDGtree 模型可視為 CDG 之一延伸模型。而在第三章實證結果顯示，即使到期日拉長至 6~10 年，以往之結構式模型仍普遍低估信用價差，對於低初始槓桿之公司債更難以有效預測其違約風險，僅 LT 模型之低估程度較小。唯 CDGtree 模型因考慮了無預警突發破產狀況，提高了對公司違約機率之估計，因此可計算出更接近於市價之模型價格及信用價差。同時亦證明，對於 Eom, Helwege, and Huang (2004) 所提出之特殊產業如能源業，結構式模型之解釋能力較弱。

總結而言，Chang (2012) 之跳躍擴散槓桿比評價模型確實解決了以往結構式模型對於初始負債比率較低之公司債容易產生低估信用價差之現象，甚至改善對於特殊性質產業如能源業之公司債評價能力，且 HW 模型之取代則更能令債券價格反映真實之利率期間結構。若今後電子運算技術發展成長，相信會使此模型可考慮之變數更加精密且複雜，令其應用發展更臻成熟。

唯 CDGtree 模型所提及之跳躍模型參數 λ 、 μ_j 、及 σ_j ，至今尚無相關文獻發展出有效之實務估計方式，本研究對其亦僅使用較簡單之估計，第三章第三節之實證結果亦發現，對於同一張債券，於不同評價日所使用之跳躍參數亦不盡相同，使用相同之參數往往會使其違約機率大增，反而過度高估其信用價差，其


模型評價將失去準確度。若未來對於公司負債及股價之跳躍過程領域有更進一步之發展，相信對於此模型之解釋能力會有相當之提升。



References



- Amin, K. I. (1993). "Jump Diffusion Option Valuation in Discrete Time," *Journal of Finance*, Vol. 48, No.5, pp.1833–1863.
- Black, F. and J. C. Cox (1976). "Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions," *Journal of Finance*, Vol. 31, No. 2, pp. 351–367.
- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637–659.
- Chang, Y. L. (2012). "A pricing Model for Defaultable Securities with the Jump-Diffusion Leverage Ratio Process and Hull-White Interest Rate Model," Master's thesis, Graduate Institute of International Business, National Taiwan University
- Collin-Dufresne, P. and R. S. Goldstein (2001). "Do Credit Spreads Reflect Stationary Leverage Ratios," *Journal of Finance*, Vol. 56, No. 5, pp. 1929–1957.
- Dai, T. S. (2009). "Efficient Option Pricing on Stocks Paying Discrete or Path-Dependent Dividends with the Stair Tree," *Quantitative Finance*, Vol. 9, No. 7, pp. 827–838.
- Duffie, D. and K. J. Singleton (1999). "Modeling Term Structures of Defaultable Bonds," *Review of Financial Studies*, Vol. 12, No.4, pp. 687–720.
- Eom, Y. H., J. Helwege, and J. Z. Huang (2004). "Structure Models of Corporate Bond Pricing: An Empirical Analysis," *The Review of Financial Studies*, Vol. 17, No.2, pp. 499–544.
- Geske, R. (1977). "The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 12, No. 4, pp. 541–552.
- Holborow D. (2008). "The Effectiveness of Structural Bond Pricing with Maximum Likelihood Estimation of Asset Dynamics Parameters," Master's thesis, Faculty of Engineering, Physical Sciences and Architecture, University of Queensland
- Hull, J. "Options, Futures, and Other Derivatives," Pearson Education, 8th edition, 2012.
- Hull, J., M. Predescu, and A. White (2006). "The Valuation of Correlation-Dependent Credit Derivatives Using a Structural Model," *Journal of Credit Risk*, Vol. 6, No. 3, pp. 99-132.
- Hull, J. and A. White (1994). "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Model I: Single Factor Models," *Journal of Derivatives*, Vol. 2, No. 1, pp. 7–16.
- Leland, H. E. and K. B. Toft (1996). "Optimal Capital Structure, Endogenous Bankruptcy, and the Term Structure of Credit Spreads," *The Journal of Finance*, Vol. 51, No. 3, pp. 987–1019.
- Longstaff, F. A. and E. S. Schwartz (1995). "A Simple Approach to Valuing Risky Fixed

- 
- and Floating Rate Debt,” *Journal of Finance*, Vol. 50, No. 3, pp. 789–819.
- Lyden, S. and D. Saraniti (2000). “An Empirical Examination of the Classical Theory of Corporate Security Valuation,” *Barclays Global Investors*, San Francisco, CA.
- Merton, R. C. (1974). “On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates,” *Journal of Finance*, Vol. 29, No. 2, pp. 449–470.
- Moody’s Global Credit Policy (2009). “Corporate Default and Recovery Rates, 1920-2008,” Moody’s
- Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing, by William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery, 1992.
- Vasicek, O. (1977). “An equilibrium characterization of the term structure,” *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, No. 2, pp. 177–188.

Appendix A



令 $r(t, T; \Theta_r)$ 代表在 t 時間點下期間為 $T - t$ ，並透過利率模型代入其參數集合 Θ_r 所預測之即期利率。針對 V 隨機利率模型，本研究透過 calibration 方式分別找出一組最適參數集合使模型建構出之即期利率曲線與該日 CMT 即期利率的誤差平方和最小，如此便可輕易計算無風險含息債券之模型價格。

Vasicek (1977) V 模型

V 模型建構之利率隨機過程設定如下：

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma_r dZ_r,$$

其中 a 為利率回歸速度； b 為長期利率平均； r_t 為 t 時間點下之無風險利率； σ_r 為利率之標準差； dZ_2 為一維納隨機過程。而 Vasicek (1977) 亦證明本金為 1，到期日為 T 之零息債券其在時間點 t 之價格為：

$$P(t, T) = e^{-r(t, T; \Theta_r)(T-t)} = A(t, T)e^{-B(t, T)r_t},$$

由上式可得到：

$$r(t, T; \Theta_r) = \frac{B(t, T) - \ln A(t, T)}{T - t}, \quad (\text{A. 1})$$

其中 $\Theta_r = (a, b, r_t, \sigma_r)$ ；

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a},$$

$$A(t, T) = \exp \left[\frac{(B(t, T) - (T - t))(a^2 b - \sigma_r^2 / 2)}{a^2} - \frac{\sigma_r^2 B(t, T)^2}{4a} \right],$$



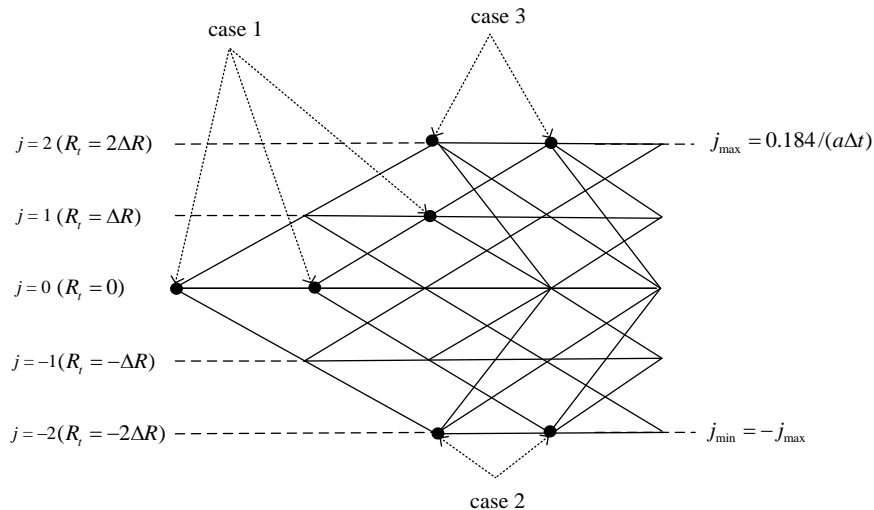
Hull and White (1994) HW 模型

HW 模型建構之利率隨機過程設定如下

$$dr_t = a \left[\frac{\theta(t)}{a} - r_t \right] dt + \sigma_r dZ_r,$$

其中， a 、 r_t 、 σ_r 、 dZ_r 之設定同 V 模型； $\theta(t)$ 為確保利率隨機過程所產生之期間結構與市場觀測結果一致之時間函數，當 $\theta(t)$ 退化為一常數且 $\theta(t) = ab$ 時，HW 模型即為 V 模型，因此 V 模型可視為 HW 模型之一退化特例。

而後為架構其樹狀模型，HW 模型先自訂一時間變數 R_t ，並令 $dR_t = -aR_t dt + \sigma_r dZ_r$ 以建構一均數回歸至 0 之隨機過程，其設定如圖 A.1 所示。再令 $r_t = R_t + \alpha_t$ ，其中 α_t 為使 R_t 符合實際利率期限結構之時間變數。如此即可將隨機利率 r_t 成功模擬建構，意即依上述步驟發展，便可完成利率隨機過程之三元樹模型。



(資料來源：王之彥老師民國一百零一年國科會計畫)

圖 A.1 Hull-White 利率樹示意圖

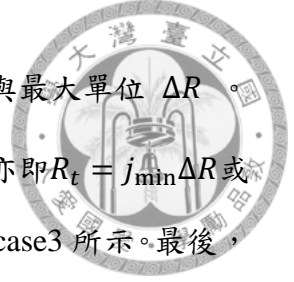


圖 A.1 中， $\Delta R \equiv \sqrt{3\sigma_r^2\Delta t}$ ， j_{\min} 與 j_{\max} 則分別表示最小與最大單位 ΔR 。由於此模型具均數回歸之性質，因此當 R_t 之值過低或過高時，亦即 $R_t = j_{\min}\Delta R$ 或 $R_t = j_{\max}\Delta R$ 時，HW 模型發展完全向上或向下，如圖中 case2 與 case3 所示。最後，要求此模型之發展機率，即令其變異數與期望值與 R_t 樹狀設定相符，便可求得不同 case 下各分支之發展機率 $P_u^{R_t}$ 、 $P_m^{R_t}$ 與 $P_d^{R_t}$ ，再考慮分支機率不變之下，即 $P_\theta^{r_t} = P_\theta^{R_t}$ ，其中 $\theta = u, m, d$ ，便可求得 r_t 之發展機率如下

$$\begin{aligned}
 \text{case 1: } & \begin{cases} P_u^{R_t} = \frac{1}{6} + \frac{(ja\Delta t)^2 - ja\Delta t}{2} \\ P_m^{R_t} = \frac{2}{3} - (ja\Delta t)^2 \\ P_d^{R_t} = \frac{1}{6} + \frac{(ja\Delta t)^2 + ja\Delta t}{2} \end{cases} & \text{for } R_t = j\Delta R \text{ and } j \neq j_{\max}, j_{\min}; \\
 \text{case 2: } & \begin{cases} P_u^{R_t} = \frac{1}{6} + \frac{(ja\Delta t)^2 + ja\Delta t}{2} \\ P_m^{R_t} = -\frac{1}{3} - (ja\Delta t)^2 - 2ja\Delta t \\ P_d^{R_t} = \frac{7}{6} + \frac{(ja\Delta t)^2 + 3ja\Delta t}{2} \end{cases} & \text{for } R_t = j\Delta R = j_{\min}\Delta R; \\
 \text{case 3: } & \begin{cases} P_u^{R_t} = \frac{7}{6} + \frac{(ja\Delta t)^2 - 3ja\Delta t}{2} \\ P_m^{R_t} = -\frac{1}{3} - (ja\Delta t)^2 + 2ja\Delta t \\ P_d^{R_t} = \frac{1}{6} + \frac{(ja\Delta t)^2 - ja\Delta t}{2} \end{cases} & \text{for } R_t = j\Delta R = j_{\max}\Delta R.
 \end{aligned}$$

Appendix B



CMT 利率期間結構 (單位：百分比)

日期	到期日 (單位：年)									
	0.25	0.5	1	2	3	5	7	10	20	30
2004/8/5	1.48	1.75	2.09	2.64	3.04	3.64	4.05	4.43	5.18	ND
2004/8/19	1.48	1.73	1.96	2.43	2.8	3.39	3.84	4.22	5.03	ND
2005/2/25	2.74	2.95	3.15	3.54	3.68	3.91	4.09	4.27	4.72	ND
2005/8/5	3.52	3.75	3.87	4.11	4.16	4.24	4.3	4.4	4.66	ND
2005/8/15	3.54	3.82	3.91	4.08	4.11	4.15	4.2	4.27	4.53	ND
2006/2/28	4.62	4.74	4.73	4.69	4.67	4.61	4.57	4.55	4.7	ND
2006/5/12	4.85	5	5	5.01	5.03	5.08	5.12	5.19	5.44	5.29
2006/8/7	5.12	5.2	5.12	4.96	4.89	4.86	4.87	4.93	5.09	5
2006/8/23	5.09	5.17	5.07	4.87	4.81	4.77	4.78	4.82	5.03	4.95
2006/10/19	5.1	5.16	5.05	4.85	4.79	4.75	4.75	4.79	4.99	4.91
2007/1/26	5.13	5.18	5.12	4.99	4.91	4.87	4.87	4.88	5.07	4.98
2007/3/1	5.15	5.11	4.95	4.63	4.54	4.5	4.51	4.56	4.78	4.68
2007/5/14	4.85	4.94	4.87	4.73	4.65	4.61	4.63	4.69	4.93	4.86
2007/10/19	3.86	4.07	3.98	3.8	3.85	4.03	4.19	4.41	4.74	4.68
2007/10/30	3.96	4.07	3.98	3.82	3.85	4.06	4.2	4.4	4.72	4.68
2007/12/27	3.17	3.43	3.37	3.24	3.23	3.64	3.88	4.21	4.66	4.61
2007/12/28	3.18	3.45	3.34	3.12	3.13	3.52	3.77	4.11	4.56	4.51