

國立臺灣大學工學院土木工程學系

碩士論文

Department of Civil Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis



軟化桁架結構組成律、崩塌面及安全載重空間之探討

Study of Constitutive Law, Collapse Surfaces

and Safe Load Domain for Trusses with Softening

林冠宇

Kuan-Yu Lin

指導教授：洪宏基 教授

Advisor: Prof. Hong-Ki Hong

中華民國 103 年 7 月

July 2014

國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書

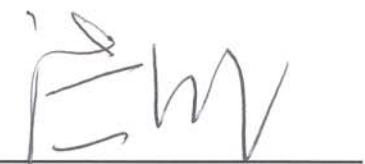
軟化桁架結構組成律、崩塌面及安全載重空間之探討

Study of Constitutive Law, Collapse Surfaces
and Safe Load Domain for Trusses with Softening

本論文係林冠宇君（學號 R01521220）在國立臺灣大學土木工程
學系碩士班完成之碩士學位論文，於民國 103 年 7 月 29 日承下列考試
委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

洪 宏 基



(指導教授)

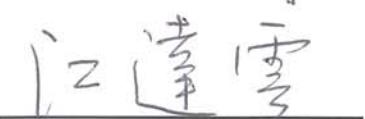


張 國 鎮

呂 學 育



江 達 雲



系主任

呂 良 正



(簽名)

誌謝



順利完成本篇論文首先要感謝我的指導教授洪宏基老師，在我兩年的研究生生涯給了我相當大的自主學習空間，讓我可以從各個不一樣的角度觀點，用不一樣的方法，去發現各種不同的問題，並培養我獨立思考，勇於創新的研究態度。即便在兩年的研究過程中，學習和研究上會碰到瓶頸和困頓，但是在老師的循循善誘，還是一一克服困難走了過來。回首過來，每週三下午的研究討論，此過程讓我學習到老師嚴謹的做學問態度並讓我培養了研究生所需具備的獨立思考能力以及探索未知學理所需具備的專業素養。口試期間，感謝張國鎮教授、呂學育教授以及江達雲教授所提出的問題與建議，讓我更能仔細的去檢視我的研究成果並能夠找到其他研究方向的展望，幫助我了解需要改進與檢討的地方。

感謝研究室的博士後研究生劉力偉大學長，在我兩年的研究生求學生涯，不時給予不同的課題，訓練我做研究的能力，然後在我研究出現困頓時，適時的給予我一些建議與指教，然後指導我們做實驗以及其他實務能力的培養。另外感謝已經畢業的吳昱霆學長以及張睿成學長，雖然兩位學長畢業去當兵了，但不時還要接受我這個小學弟的求教，感謝你們耐心的解答。感謝曾經為同學的林曾瑞，雖然你先離開了這個研究團隊，但你到外面找到了自己的定位和努力方向，曾為同窗的半年真的深受你的照顧。感謝曾跟我一起奮鬥半年的兩位小學弟章靖和范揚志，辛苦你們在我碩二繁重的研究過程，幫我負擔了很多研究室的工作。感謝同學曾惠瑜在口試那天的紀錄和新的學弟蔡忠穎在口試當天的幫忙，讓口試得以順利進行。感謝結構組裡面很多的工作行政人員，其中包括常常我們的助教劉曉梅、結構組行政的周婉香小姐、以及土研所的黃茂樹技師，在兩年裡面研究生的生活，你們照顧、幫忙我在許許多多的是事物上，感謝吳侑軒、譚皓祥以及施可葳學長，沒有葳葳助教在碩一的課程時候拉我一把、沒有當年皓祥在碩一的程式課程的幫助、沒有侑軒在繪圖技巧上的一些指教，今天我沒辦法在這邊完成我的學業以及這篇論文，感謝結構組的各位同學朋友，在我兩年的研究生生涯，所有給予我幫助和照顧的每一位，期待大家在未來的日子都闖出自己的一片天。

感謝我的家人，我的父母給予的我物質充裕的生活，讓我不需要為了經濟而去煩惱可以專心在我的課業上，並感謝他們鼓勵我學習讓我可以在我人生路上，選擇自己喜歡的路去走，感謝妹妹在我研究的生活中，利用她在機械領域的專業知識給予我幫助，感謝時常支持給予我加油打氣和笑聲的舅舅、阿姨一家人。另外有些人我想把你們一一列舉出來，謝謝你們在我繁重的研究生生涯帶給我很多歡笑，謝謝幾個好哥們，龔逸祥、陳冠余、張博勝，大家沒事出來的聊天談心講未來；謝謝過去大學的好朋友，林宇軒、李卿澄、李宗翰、曾淳凱偶爾的聚聚但總能夠從你們身上聊到不一樣的開心事；謝謝幾個好姊妹，陳嘉荃、王蓉瑄、陳玄立令，我們一起擁有這段歡笑談心的日子；謝謝幾個國中死黨，吳少夫、張哲瑋、游舒涵，雖然大家已經長大不能常常玩在一塊，但是偶爾敘敘舊總能回味無窮；謝謝袁一丹、游采瑜、楊觀華、鄭雯心、唐詩豪在我碩二下半年的生活，加入很多一起開心出遊、玩活動的回憶。

摘要



在塑性力學的領域中，極限分析是一個很重要的主題。塑性反應是路徑相關的，但極限分析的最大好處是，對於塑性結構可以在不給定路徑的情況下，直接快速地求得崩塌載重。在過去，最常見的作法即是結合數學規劃法，列出最佳化問題來求解彈塑性結構的崩塌載重。

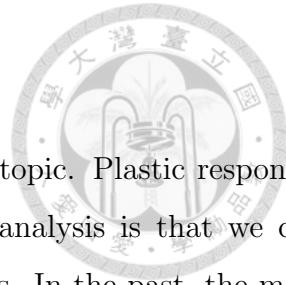
而最近，有人透過片段線性多降伏面模型描述彈塑性材料的組成律，並且透過降伏式與崩塌平衡機構的關係，發展了一套方法去求解結構物的崩塌面，並且建立出其在外力空間的安全載重區域。但是對於軟化材料，如何正確地去描述組成律，還有軟化結構物的安全載重空間分析，有過於保守的問題需要改進和研究。

在本文裡面，我們使用元件的並聯描述軟化桿件的組成律，並且使其中一個並聯元件具有耗散非正的特性。然後我們將軟化桿件視為一個封閉系統仍然會遵守熱力學定律。透過這樣的觀念，我們可以透過不同的機械模型像是雙線性模型或是完全彈塑性模型來描述軟化桿件的組成律。

對於軟化結構物的安全載重空間分析，我們認為使用軟化桿件的殘餘應力強度去計算崩塌面是過於保守的，而且透過結構設計，整體結構物會發生互制的行為。基於上面兩點的考量，本文加入了相對應的位移空間，當無限制變形（塑流平台）發生，對應到的即是載重空間的崩塌面去重新定義軟化結構物的崩塌載重。最後去找到正確的崩塌機構並且擴大了軟化結構物可使用的安全載重空間。

關鍵字：極限分析，組成律，熱力學定律，軟化，崩塌載重，安全載重空間

Abstract



In the field of theory of plasticity, limit analysis is an important topic. Plastic responses are known to be path-dependent. The greatest advantage of limit analysis is that we can obtain plastic collapse loads directly without prescribing loading paths. In the past, the most common approach is applying mathematical programming to calculating the collapse loads of elastoplastic structures.

Recently, some people use the piecewise linear model to describe the constitutive law of elastoplastic materials, and develop a method via the relationship of evolving yielding surface and collapse mechanism in equilibrium to calculate the collapse surfaces of structures and to construct the safe domain in load space. But for softening materials, the difficulties of how to describe the constitutive law correctly and the analysis of safe load domain being too conservative are two major problems which need to be improved and studied.

In this thesis, we use a parallel connection of components to describe the constitutive law of a softening member of truss. We make one of the components with the characterisation of negative dissipation, and regard the softening member as a closed system, which still follows the laws of thermodynamics. With this concept, we can formulate the constitutive law with various mechanical models such as bilinear model of elastoplasticity or model of perfect elastoplasticity.

For the analysis of safe load domain for a softening structure, we deem using the residual strengths of softening members to calculate the collapse surface to be too conservative, and there will exist structural interactions between structural members in states of stresses higher than residual strengths. With these two viewpoints, we use the corresponding displacement space to redefine the collapse load of a softening structure when unrestricted deformation (plastic flow plateau) takes place, and we find correct collapse modes and thus expand the safe load domain for softening structures.

Keywords: limit analysis, constitutive law, laws of thermodynamics, softening, collapse load, safe load domain



目錄

口試委員會審定書	i
誌謝	ii
摘要	iii
Abstract	iv
目錄	v
表目錄	viii
圖目錄	ix
1 導論	1
1.1 研究動機與目的	1
1.2 文獻回顧	2
1.3 研究內容與本文架構	3
1.4 符號說明與假設	5
1.4.1 符號說明	5
1.4.2 假設	6
2 軟化彈塑性性組成模式	7
2.1 彈塑性組成模式	7
2.1.1 片段線性多降伏平面模式	7
2.1.2 元件並聯模式	9
2.2 軟化桿件能量儲存耗散的新解	12



2.2.1	桿件模式的熱力學定律	12
2.2.2	耗散非負的規則	13
2.2.3	建立軟化桿件的能量模型	14
2.3	數值運算例一、軟化彈塑性模型組成律關係	16
2.3.1	數值運算例一之一、片段雙線性彈塑模式	16
2.3.2	數值運算例一之二、完全彈塑性模式	17
2.4	軟化結構層次模型	17
2.5	小結	20
3	軟化桁架的崩塌面與安全載重空間	21
3.1	崩塌載重	21
3.1.1	傳統極限分析定義的崩塌載重	21
3.1.2	崩塌載重的定義探討	21
3.1.3	軟化結構的崩塌載重	24
3.2	軟化桁架崩塌面之求解	24
3.2.1	降伏面與崩塌面的關係	24
3.2.2	定義桁架崩塌面模式	25
3.2.3	桿件前處理	26
3.2.4	模態向量與崩塌模態式的定義	28
3.2.5	模態向量的條件式與求解	29
3.3	數值運算例二、軟化桁架崩塌面求解	32
3.3.1	數值運算例二之一、二桿桁架	32
3.3.2	數值運算例二之二、三桿桁架	33
3.3.3	數值運算例二之三、橋型桁架	36
3.4	軟化桿件的安全載重空間新解	37
3.4.1	軟化結構物安全載重空間的考量一	37
3.4.2	軟化結構物安全載重空間的考量二	38
3.4.3	重新定義軟化結構物的崩塌面與安全載重空間	39
3.5	數值運算例三、軟化桁架安全載重空間探討	40
3.5.1	數值運算例三之一、五桿桁架	40
3.5.2	數值運算例三之二、九桿桁架	42



3.6 小結	45
4 結論與未來展望	
4.1 結論	46
4.2 未來展望	47
參考文獻	49
附錄A、元件並聯模式推導	90
附錄B、桿件能量模式	94



表目錄

2.1 數值運算例一之一、1 號元件變率資料	54
2.2 數值運算例一之一、1 號元件資料	54
2.3 數值運算例一之一、2 號元件變率資料	55
2.4 數值運算例一之一、2 號元件資料	55
2.5 數值運算例一之二、1 號元件變率資料	56
2.6 數值運算例一之二、1 號元件資料	56
2.7 數值運算例一之二、2 號元件變率資料	57
2.8 數值運算例一之二、2 號元件資料	57
2.9 數值運算例一、軟化桿件變率資料	58
2.10 數值運算例一、軟化桿件資料	58
3.1 數值運算例二之一、二桿軟化桁架結構崩塌面、降伏面角點資料	59
3.2 數值運算例二之二、三桿軟化桁架結構崩塌面、降伏面角點資料	59
3.3 數值運算例二之三、橋型軟化桁架結構崩塌面、降伏面角點資料	59
3.4 數值運算例三之一、五桿軟化桁架結構崩塌面、降伏面角點資料	60
3.5 數值運算例三之一、五桿軟化桁架結構崩塌面對應之位移空間角點資料	60
3.6 數值運算例三之二、九桿軟化桁架結構崩塌面、降伏面角點資料	60
3.7 數值運算例三之二、九桿軟化桁架結構崩塌面對應之位移空間角點資料	60



圖目錄

2.1	片段線性降伏面機械模型	61
2.2	片段線性降伏面組成模式	61
2.3	剛塑性機械模型	62
2.4	剛塑性組成模式	62
2.5	完全彈塑性機械模型	63
2.6	完全彈塑性組成模式	63
2.7	雙線性元件模型並聯	64
2.8	軟化桿件勁度關係圖	65
2.9	軟化桿件系統之能量關係示意圖	65
2.10	數值運算例一、軟化桿件彈塑性模式	66
2.11	數值運算例一、軟化桿件應變控制路徑	66
2.12	數值運算例一之一、1 號元件和 2 號元件	67
2.13	數值運算例一之二、1 號元件和 2 號元件	68
2.14	軟化桿件的歷時分析圖	69
2.15	桿件、結構層次關係圖	70
3.1	廣義應力、廣義應變塑流平台示意圖	71
3.2	負勁度完全彈塑性組成模式	71
3.3	完全彈塑性桿件、硬化桿件塑流平台對應到桿件最大內力	72
3.4	軟化桿件塑流平台對應到並非桿件最大內力	73
3.5	軟化桿件有無經歷過塑性，其加載過程所經歷的桿件最大內力不一	73
3.6	軟化彈塑性組成模式	74
3.7	求取崩塌面時剔除在外圍超平面(虛線)，最內部之交集區域為安全載重空間	75
3.8	軟化桿件之安全載重區域可取降伏面(虛線) 與崩塌面(實線) 所圍出區域的聯集	75



3.9 數值運算例二之一、二桿桁架模型	76
3.10 數值運算例二之一、二桿桁架結構崩塌面	76
3.11 數值運算例二之二、三桿桁架模型	77
3.12 數值運算例二之二、三桿桁架結構崩塌面	77
3.13 數值運算例二之三、橋型桁架模型	78
3.14 數值運算例二之三、橋形桁架結構崩塌面	78
3.15 軟化結構崩塌發生互制行為時軟化桿件之並聯元件關係圖	79
3.16 結構物載重空間與相對應位移空間示意圖	80
3.17 載重空間崩塌面對應位移空間出現無限制變形	80
3.18 崩塌面與安全載重空間求解分析流程圖	81
3.19 數值運算例三之一、五桿桁架各軟化桿件組成律關係	82
3.20 數值運算例三之一、五桿桁架模型	83
3.21 數值運算例三之一、五桿桁架結構降伏面、崩塌面與安全載重空間	83
3.22 數值運算例三之一、五桿桁架結構崩塌面受力節點所對應的位移空間	84
3.23 數值運算例三之一、五桿桁架結構崩塌面與擴大的安全載重空間比較	84
3.24 數值運算例三之一、五桿桁架結構殘餘應力強度分析與考慮結構互制比較	85
3.25 數值運算例三之二、九桿桁架各軟化桿件組成律關係	86
3.26 數值運算例三之二、九桿桁架模型	87
3.27 數值運算例三之二、九桿桁架結構降伏面、崩塌面與安全載重空間	87
3.28 數值運算例三之二、九桿桁架結構崩塌面受力節點所對應的位移空間	88
3.29 數值運算例三之二、九桿桁架結構崩塌面與擴大的安全載重空間比較	88
3.30 數值運算例三之二、九桿桁架結構殘餘應力強度分析與考慮結構互制比較	89



第 1 章 導論

1.1 研究動機與目的

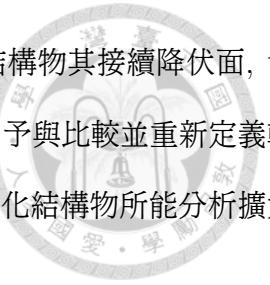
在結構物的設計分析階段，其求解結構物的極限承載力一直是工程師關心的重點，但是當進入塑性階段的分析設計，求解就不再像彈性階段下的如此簡單，而實務上通常會使用非線性靜力側推分析 (pushover analysis)，以固定的外力形式逐漸加載，加載到所設計的結構物產生不穩定時停止，加載過程可以得到塑鉸產生的先後次序以及結構物崩塌時的外力。

非線性靜力側推分析是一種具有歷時、增量、一步接一步的塑性分析方法。在外力固定的形式下，單調加載的增量分析 (incremental analysis) 手法，將載重組合施加在結構上，分析過程中的每個時間點可以獲得如外力、位移、桿件內力、桿件變形以及各個桿件進入塑性的先後次序。但是增量分析具有下列的缺點，需要輸入大量的準備資料，然後必須透過冗長的運算過程輸出大量的歷時資料。

因此為了解決增量法求解的問題，快速且精準的得到結構物的崩塌機構與崩塌載重，塑性力學中的極限分析 (limit analysis) 方法因應而生，使用數學規劃法 (mathematical programming) 理論，在固定外力形式下可以直接 (一步到位) 的求解結構的極限承載強度。然後改進了「單目標最佳化」為「多目標最佳化」，打破單一比例載重的限制，其求解對應的崩塌載重及多維載重空間的崩塌面。

而過去，我們的研究團隊建立了一套彈塑性組成律模式以及其演算的規則，描述了材料的剛塑性、完全彈塑性、硬軟化材料等的力學行為，然後將其材料桿件層次的問題，提升到結構層次設計一套方法能夠快速求解結構物極限承載力。

但是過去所建立的模型其對於軟化 (softening) 材料的分析還不是非常明確，所以本文嘗試去修正，使其滿足正交塑流規則以及熱力學定律，建立更正確的一套模式來描述軟化材料的彈塑組成律行



爲。然後提升至桿件結構分析快速求解軟化材料的崩塌載重，但是由於軟化結構物其接續降伏面，會有發生降伏面內縮裡面的情形，所以對於其崩塌載重，在位移或是外力空間上，予與比較並重新定義軟化結構物安全載重空間求解的定義，建立一個更正確有效率使用材料、提供軟化結構物所能分析擴大的安全載重區域。

1.2 文獻回顧

傳統的極限分析，至今已經發展相當的完全了，而只要介紹到塑性力學的理論時，就一定會談到此理論，像是 Chen and Han[4], Jirásek and Bažant[12]等塑性力學專書都有提到；極限分析與數學規劃法之間的相互關係也很早就有人發現，其後也編輯成論文集、評論文章、專著等，如 Maier[16, 17], Borkowski[2, 3], Sewell[28] 等類似文章也不斷地被提出來，其主要專注在極限分析的非線性最佳化及有限元素法上的應用，極限分析也可以描述不同的破壞情形，除了初始崩塌(incipient collapse)之外，也有對於交互塑性 (alternating plasticity)、安定分析 (shakedown analysis) 的討論[22, 27]。

Maier[16, 17]在60年代使用發展出的片段線性多降伏平面模式 (piecewise-linear model)，來描述彈塑性組成律關係，簡化原來比較複雜的形式；利用直線 (二維應力空間)，平面 (三維應力空間) 或超平面 (多維應力空間) 去近似原來多次的降伏曲面經過這樣的簡化，雖然多了很多條降伏式，但是每一條降伏式所對應的互補三元就只是一個線性互補問題 (linear complementarity problem)，其廣義應力應變關係也具有片段線性的形式，處理起來簡單很多。Kaneko[13, 14, 15]提出與解出彈塑性問題，此片段線性多降伏平面模型必須滿足 P 矩陣限制所提出的彈性組成律，並認為片段線性多降伏平面模式中的互補三元，其應該是包括導數的參數化線性互補問題。其所指的就是含有變數的增量法，如此能夠彰顯塑性力學問題的重要精隨”與路徑相關”。另外對於結構的極限狀態，Reinicke 文獻[26]提出結構在極限狀態會產生無限制的塑性變形(塑流)，並找出滿足此條件的狀態。

在極限分析問題外力方面，通常的做法會給定比例載重的限制，而 Hodge[11]提出多參數載重的極限分析問題，處理多參數載重的極限分析問題，Nafday 等人[24, 25]，將多參數載重解釋成非比例載重，將極限分析問題變成多目標規劃問題，建立非劣解與崩塌面的概念，並使用多目標單體法求解崩塌面。Chen 等人[5, 6]提出多載重系統的雙目標最佳化模式，使用參考應力法建立二維的載重區

域，並且使用上限法與下限法比較載重區域的差異。Tin-Loi 與 Lo [34]也有使用文獻[25]的例子來求解崩塌面，不過材料均限於剛塑性或完全彈塑性。

Cocchetti 與 Maier [7]及Tangaramvong 與 Tin-Loi [29, 30, 31]對於硬化、軟化材料均有不錯的研究成果，提出考慮純彎矩、軸力與彎矩互制的硬軟化塑鉸模式，以下限法描述剛架的極限分析問題，然而均給定單一比例載重的限制，以單目標最佳化的方式求得崩塌點；若想考慮不同載重組合的崩塌點，則必須再假設不同的比例載重做分析。

宋信璋 [37]對於軟化桁架結構，使用最佳化的分析方法，嘗試打開單調加載的外力形式限制，並提出一個簡易計算方法，對桁架內功增量分段加以處理解開二套互補三元，搭配增量分析的方法驗證，求解軟化桁架結構崩塌載重以及處理區域不穩定的問題。郭建呈 [38]對於彈塑性結構的分析，由於過去比例載重的限制，形成單目標最佳化的問題，將比例載重的限制去除，定義極限分析的多目標最佳化問題，搭配加權方法配合交互式線性多目標流程求解安全載重區域。吳昱霆 [39]對於整個硬軟化桁架結構，提出極限分析中，崩塌載重的問題不應該只是最佳化後的數值結果，崩塌載重以崩塌面的形式存在，透過載重空間降伏面與崩塌面關係，定義結構崩塌所對應的機構向量，藉由搜尋崩塌機構的方式求解崩塌面，建立出結構物的安全載重空間。

1.3 研究內容與本文架構

本文延續過去研究團隊的成果，利用不同的模式描述不同的力學行為，如：線性彈性、剛塑性、完全彈塑性、硬軟化行為等，進而由桿件層次推廣到結構層次，用來解決探討極限分析中的崩塌載重求解。而過去利用不同的桿件模式成功描述材料的硬化行為，並可以解釋材料的降伏面演化，以及求解最後的崩塌面。但是在軟化桿件上的力學行為描述並不完備。

本文提出了在描述軟化桿件的力學行為時，除了可以使用一組正勁度和一組負勁度的完全彈塑性元件並聯來描述外，也可透過不同的片段線性多降伏面模式的元件來並聯來描述表示結構的軟化桿件降伏面的演化行為；另外本文更提出了觀念，描述軟化桿件時，其並聯其中一根元件具有耗散非正的特性，但是在兩根以上元件並聯的軟化桿件其能量耗散率還是恆大於等於零，符合熱力學的第二定律，同時透過其中一根元件的耗散非正(在本文表示其內變數增量恆小於等於零)的特性，使軟化桿件的塑

流方向向量與降伏面的法向量相同，滿足正交塑流的特性。

利用前述所改進的力學模式，本文再將其層次提升至解決結構問題，帶入正確的平衡、協調式，利用求出的降伏演化式，探討其崩塌載重問題。在這邊，本文提出因利用不同定義的崩塌平衡機構定義，以及透過力量控制或是位移控制的不同加載路徑分析，其所求出的崩塌面式不一致的，需重新定義或是正確描述其崩塌平衡機構行為。另外在這邊，本文利用了上述的軟化結構模型，求解軟化結構模型只利用殘餘應力強度分析過於保守的特性之崩塌面，找出因結構互制行為而比前者分析擴大之安全載重空間。

本文的內容架構一共分成四個章節，以下將分別說明：

第一章為導論，說明本文的研究動機與目的，並在文獻回顧中討論前人對於彈塑性力學、極限分析等研究發展成果，並撰寫出本文的大綱以及研究架構。

第二章是軟化彈塑性性組成律模式，本文嘗試使用不同片段線性多降伏面模式，並利用元件並聯的概念，進而描述軟化模型的彈塑組成律，此外本文在此提出一個軟化桿件，其底下構成之並聯元件中，應有一元件其耗散行為改為耗散為負的條件，然後逐一探討每個元件的作功、儲存能量、耗散能量情形，最後將整根並聯過後的軟化桿件視為一封閉系統，在整個封閉系統下的彈塑性力學模式依然符合熱力學的第一、第二定律。然後透過一個數值例子，對於軟化桿件利用元件並聯其底下能量儲存耗散的機制，應證本章節提出的理論。

第三章為軟化桁架的崩塌面與安全載重空間，前半段對於軟化材料之極限狀態予與定義，透過一定的演算規則和分析，求解軟化桿件所構成結構之崩塌載重，然後透過數值的例子，針對一些簡單的桁架結構模型如：三桿桁架、橋型桁架等簡單結構進行求解運算。然後第三章後半段針對軟化結構物結構互制的情形，加入對應的位移空間去探討並重新定義結構物的安全載重範圍，希望能更正確找出崩塌面並擴大可分析的載重空間。這部分也設計出一個數值例子，來驗證這部分所提出的觀點。

第四章為結論與未來展望，針對本文的研究成果，給予一個總結，也討論本文不週全、不完備之處，並針對其他可能衍生或延伸問題和未來研究方向給予適當的建議和方向。

1.4 符號說明與假設

1.4.1 符號說明



$\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ $a_i \leq b_i$, a_i, b_i 為向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的分量

\mathbf{q}, q 廣義應變向量,

\mathbf{q}^e, q^e 廣義彈性應變向量,

\mathbf{q}^p, q^p 廣義塑性應變向量,

\mathbf{Q}, Q 廣義應力向量,

\mathbf{Q}_a, Q_a 廣義主動應力向量,

\mathbf{Q}_b, Q_b 廣義回應力向量,

\mathbf{Y}, y 廣義降伏應力向量,

$\boldsymbol{\lambda}, \lambda$ 內時 (廣義等價塑性應變),

\mathbf{K}_e, k_e 彈性勁度陣,

\mathbf{K}_p, k_p 走動模數陣,

\mathbf{H} 降伏演化陣,

\mathbf{N}^T 降伏面法向量陣,

\mathbf{M} 塑流方向陣,

\mathbf{u} 結構節點位移向量,

\mathbf{F} 結構節點外力向量,

\mathbf{A} 桿件變形的協調常數陣,

\mathbf{x} 崩塌模態向量,

\mathbf{X} 崩塌模態陣,



\mathbf{f}, \mathbf{f}	降伏函數向量, $\mathbf{f} \leq \mathbf{0}$ 表示廣義應力允許區域
\mathbf{f}_{col}	崩塌函數向量, $\mathbf{f}_{col} < \mathbf{0}$ 表示安全載重空間(區域)
U	儲存能函數,
\dot{W}	外力作功功率,
$\dot{\Lambda}$	耗散功率,
$(\cdot)_L$	桿件層次的符號
$(\cdot)_G$	結構層次的符號
$(\cdot) = d(\cdot)/dt$	對時間的變率

1.4.2 假設

本文使用的假設如下:

- 桁架桿件鉸接, 無任何摩擦, 不能承受彎矩及扭矩, 只承受軸力, 桿件變形前後剖面保持平面
- 考慮擬靜態的情況下施加位移控制或是載重控制, 排除動態效應
- 桿件的塑性變形可以無限制的發展
- 彈塑性材料採取合適的片段線性多降伏平面模型, 並且滿足其相關聯的正交塑流規則
- 忽略桿件反應時, 溫度所帶來的影響效應
- 忽略 $P - \Delta$ 效應, 也就是說沒有考慮挫屈不穩定的問題
- 假設小變位、小變形
- 假設變值載重變化頻率不高, 故沒有漸進崩塌 (incremental collapse) 或交錯降伏 (alternating yielding) 之破壞情形



第 2 章 軟化彈塑性性組成模式

2.1 彈塑性組成模式

2.1.1 片段線性多降伏平面模式

對於桁架結構的極限分析 (limit analysis) 問題, 因為桿件只承受軸力, 所以無論在桿件層次的組成模式或結構層次的組成模式, 採用片段線性多降伏平面模型是極為自然的。片段線性多降伏平面模型即是將彈塑性組成律, 從非線性的降伏式近似成多條線性降伏式及對應的彈塑性開關。強調在廣義應力空間上降伏面的片段線性化, 以片段線性的方法去描述材料在進入塑性時的行為; 而使用此片段線性多降伏平面模型的優點為, 在分析時我們可以將問題保持在線性等式與線性不等式的特性, 所以, 在求解大型複雜結構時, 可以較輕易地求解數量龐大的降伏條件, 避免高次的運算, 擁有計算上的好處。

廣義的片段線性多降伏平面模式如下, 一維機械模型示意如圖2.1:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^e + \mathbf{q}^p, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_a + \mathbf{Q}_b, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{k}_e \mathbf{q}^e, \quad (2.3)$$

$$\dot{\mathbf{q}}^p = \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\lambda}}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{Q}_b = \mathbf{k}_p \mathbf{q}^p, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{f}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{N}^T \mathbf{Q} - \mathbf{M}^T \mathbf{Q}_b - \mathbf{Y} \leq \mathbf{0}, \quad (2.7)$$



$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad (2.8)$$

其中 $\mathbf{q}, \mathbf{q}^e, \mathbf{q}^p, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}_a, \mathbf{Q}_b$ 分別為廣義應變、廣義彈性應變、廣義塑性應變、廣義應力、廣義主動應力、廣義回應力，均為維度為 $n \times 1$ 的向量。所謂廣義應變可以為軸向變形、剪應變、曲率、扭率等等，而廣義應力可以為軸力、剪力、彎矩、扭矩等等， $\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Y}$ 則依序為降伏函數向量、內時(等價廣義塑性應變向量)、廣義降伏應力向量，均為維度為 $m \times 1$ 的向量， $\mathbf{k}_e, \mathbf{k}_p$ 分別為彈性模數與塑性(走動)模數向量，均為維度為 $n \times n$ 的方陣。 $\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots, \mathbf{N}_m]$ 是維度為 $n \times m$ 的矩陣，一個行向量代表每一個降伏平面在廣義應力空間的單位法向量。 $\mathbf{M} = [\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_m]$ 是維度為 $n \times m$ 的矩陣，一個行向量代表每一個降伏平面的塑流方向向量。上標 T 表示矩陣的轉置，粗體表示向量或是矩陣，非粗體表示純量。

式(2.1) 表示廣義應變彈塑分解，式 (2.2) 表示廣義應力主回分解，式 (2.3) 表示廣義虎克定律，式 (2.4) 表示塑流規則，式 (2.5) 表示廣義回應力的演化規則，式 (2.7) 表示應力允許條件，在廣義應力空間唯一封閉的凸區域，其邊界則為降伏面式 (2.8) 表示耗散非負，式 (2.6) 表示彈塑二擇一條件，式 (2.7-2.6) 代表互補三元，可以描述彈塑性多組的切換開關。可以描述微元、構件、結構等不同層次的彈塑性力學行爲。在本文中，我們將針對此模式所表示的軸力桿件(一維廣義應力-應變關係示意如圖2.2)，進行更進一步的降伏面演化分析，以及崩塌面、安全載重空間之深入探討。而此模型的兩個特例：

1. 剛塑性模式

在 $\mathbf{k}_e \rightarrow \infty, \mathbf{k}_p = \mathbf{0}$ 的情況下，為剛塑性。

一維機械模型表示成一個摩擦阻尼，示意如圖2.3，材料組成律如下：

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\lambda}}, \\ \mathbf{f}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}} &= 0, \\ \mathbf{f} &= \mathbf{N}^T \mathbf{Q} - \mathbf{Y} \leq \mathbf{0}, \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

對應的一維廣義應力-應變關係示意如圖2.4。

2. 完全彈塑性模式

在 $\mathbf{k}_p = \mathbf{0}$ 的情況下, 表示回應力 $\mathbf{Q}_b = \mathbf{0}$, 為完全彈塑性。

一維機械模型表示成一個彈簧與一個摩擦阻尼器的串聯, 示意如圖2.5, 材料組成律如下:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q} &= \mathbf{q}^e + \mathbf{q}^p, \\
 \mathbf{Q} &= \mathbf{k}_e \mathbf{q}^e, \\
 \dot{\mathbf{q}}^p &= \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\lambda}}, \\
 \mathbf{f}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}} &= 0, \\
 \mathbf{f} &= \mathbf{N}^T \mathbf{Q} - \mathbf{Y} \leq \mathbf{0}, \\
 \dot{\boldsymbol{\lambda}} &\geq \mathbf{0},
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

對應的一維廣義應力-應變關係示意如圖2.6。

2.1.2 元件並聯模式

欲描述硬軟化彈塑性材料可以使用多組的片段線性多降伏平面模型, 同時機械元件間滿足機動律、平衡律, 根據廣義應力、廣義應變組成律關係, 決定所需使用並聯模型的數量與其關係。以下討論兩組片段線性多降伏平面模型並聯的情形, 其一維機械模型示意如圖 2.7, 考慮滿足正交塑流規則, $\mathbf{M}^T = \mathbf{N}^T$, 以及方便推導, 我們將式子 (2.1-2.6) 合併改寫成如下:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^e + \mathbf{q}^p, \tag{2.11}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{k}_e \mathbf{q}^e, \tag{2.12}$$

$$\dot{\mathbf{q}}^p = \mathbf{N} \dot{\boldsymbol{\lambda}}, \tag{2.13}$$

$$\mathbf{f}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0, \tag{2.14}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{N}^T \mathbf{Q} - \mathbf{H} \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Y} \leq \mathbf{0}, \tag{2.15}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}, \tag{2.16}$$

其中 $\mathbf{H} = \mathbf{N}^T \mathbf{k}_p \mathbf{N}$ 。



考慮軸力桿件模式，其所對應的廣義應力空間為一維軸力空間 $m = 1$ ，因為有拉降伏以及壓降伏降伏面個數為 $n = 2$ 的情況下，然後使用兩組上述組成律模型去做並聯關係式的推導。

1 號元件如下



$$q_1 = q_1^e + q_1^p,$$

$$Q_1 = k_{e1}q_1^e,$$

$$\dot{q}_1^p = \mathbf{N}_1 \dot{\boldsymbol{\lambda}}_1,$$

$$\mathbf{f}_1^T \dot{\boldsymbol{\lambda}}_1 = 0$$

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{N}_1^T Q_1 - \mathbf{H}_1 \boldsymbol{\lambda}_1 - \mathbf{Y}_1 \leq \mathbf{0},$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_1 \geq \mathbf{0},$$

2 號元件如下

$$q_2 = q_2^e + q_2^p,$$

$$Q_2 = k_{e2}q_2^e,$$

$$\dot{q}_2^p = \mathbf{N}_2 \dot{\boldsymbol{\lambda}}_2,$$

$$\mathbf{f}_2^T \dot{\boldsymbol{\lambda}}_2 = 0, \quad (2.18)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_2 \geq \mathbf{0},$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{N}_2^T Q_2 - \mathbf{H}_2 \boldsymbol{\lambda}_2 - \mathbf{Y}_2 \leq \mathbf{0},$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_2 \geq \mathbf{0}, \quad (\text{若為構成軟化桿件之元件則應改為 } \dot{\boldsymbol{\lambda}}_2 \leq \mathbf{0})$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1^T &= \begin{bmatrix} n_{1t} \\ n_{1c} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_{1t} \\ \lambda_{1c} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} f_{1t} \\ f_{1c} \end{bmatrix} \\ \mathbf{N}_2^T &= \begin{bmatrix} n_{2t} \\ n_{2c} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_{2t} \\ \lambda_{2c} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} f_{2t} \\ f_{2c} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

配合機械元件的機動律與平衡律：

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} q, \quad (2.19)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

藉由兩組彈塑型模式組成律 (??) 與 (2.18), 搭配元件的機動律 (2.19) 與平衡律 (2.20), 即可組合成一組片段線性多降伏面具有塑流平台的硬、軟化彈塑性模式, 詳細推導請參照附錄 A。

可推導出一維線性多降伏平面的硬、軟化彈塑性模型如下:

$$q = q^e + q^p, \quad (2.21)$$

$$Q = k_e q^e, \quad (2.22)$$

$$\dot{q}^p = \mathbf{N} \dot{\lambda}, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{f}^T \dot{\lambda} = 0, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{N}^T Q - \mathbf{H} \lambda - \mathbf{Y} \leq \mathbf{0}, \quad (2.25)$$

$$\dot{\lambda} \geq \mathbf{0}, \quad (2.26)$$

其中

$$k_e = k_{e1} + k_{e2}, \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{k_{e1}}{k_{e1} + k_{e2}} \mathbf{N}_1 & \frac{k_{e2}}{k_{e1} + k_{e2}} \mathbf{N}_2 \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 + \mathbf{N}_1^T \frac{k_{e1} k_{e2}}{k_{e1} + k_{e2}} \mathbf{N}_1 & -\mathbf{N}_1^T \frac{k_{e1} k_{e2}}{k_{e1} + k_{e2}} \mathbf{N}_2 \\ -\mathbf{N}_2^T \frac{k_{e1} k_{e2}}{k_{e1} + k_{e2}} \mathbf{N}_1 & \mathbf{H}_2 + \mathbf{N}_2^T \frac{k_{e1} k_{e2}}{k_{e1} + k_{e2}} \mathbf{N}_2 \end{bmatrix}.$$

欲呈現硬軟化模型的行爲, 可以藉由調整參數 $\mathbf{N}, k_e, \mathbf{H}(k_p), \mathbf{Y}$ 來加以控制, 而對應本文所提出的具有塑流平台的簡單軟化桿件模型一維廣義應力應變關係如圖 2.8, 而上述兩組並聯模型的參數須滿足規則如下:

其並聯後的彈性段勁度大於零:

$$k_{e1} + k_{e2} > 0,$$

發生軟化行爲段表示其勁度為一負值:

$$\frac{y_1}{|k_{e1}|} < \frac{y_2}{|k_{e2}|}, \quad \frac{k_{e1} k_{p1}}{k_{e1} + k_{p1}} + k_{e2} < 0$$

進入平台以後其勁度為零：

$$\frac{k_{e1}k_{p1}}{k_{e1} + k_{p1}} + \frac{k_{e2}k_{p2}}{k_{e2} + k_{p2}} = 0.$$



透過滿足上述的規則條件，我們發現可以透過各種不同片段多降伏面組成律模式，討論此兩組彈塑性的並聯模型，希望同時滿足正交塑流規則，以及熱力學的第一第二定律，又能描述我們想要的軟化彈塑性模型，本文提出針對互補三元的耗散非負這一條加以修正。進而達成本文的訴求，正確描述軟化桿件的力學行為以及清楚定義軟化桿件的能量儲存耗散模式。

2.2 軟化桿件能量儲存耗散的新解

2.2.1 桿件模式的熱力學定律

片段線性多降伏平面模式的式 (2.16) 其所表示的意思是耗散非負，而內變數 (內時) λ 可視為等價廣義塑性應變式 (2.13)，而正常的 $\dot{\lambda} \geq 0$ ，描述材料的功率耗散一定是要非負的

1. 彈性時耗散為零 $\dot{\lambda} = 0$ ，

2. 塑性時耗散為正 $\dot{\lambda} > 0$ ，

使我們的材料模式滿足熱力學的第二定律 (任何自然界的力熱系統一定是朝系統的熵值增加或不變的方向改變)，而這邊等價於我們的材料模型耗散功率是非負的。

為了讓軟化桿件滿足正交塑流規則，也為了更明確定義描述軟化桿件的組成律規則，建立一個正確的能量模型，滿足熱力學的第一、第二定律。本文提出將軟化桿件視為一個由兩件元件所構成系統，而其中一件元件模型的組成模型裡面的耗散非負，改成耗散非正。

→ $\dot{\lambda}_1 \geq 0, \dot{\lambda}_2 \leq 0$

提出耗散非正的情形是跟熱力學第二定律相違背的，所以我們必須重新檢視這樣的修正調整，是否還能滿足熱力學第二定律。在軟化桿件整個封閉系統內，雖然底下有一件元件模型我們將其修正成耗散非正，但是其構成系統內還有一件元件的耗散非負，只要我們能確保耗散非負的元件在力學行為

中, 一定會先進塑入塑性; 而且當系統內的兩件元件都進塑性時, 耗散非負的桿件其耗散功率大於耗散非正的耗散功率, 這樣整根軟化桿件的封閉系統, 就一定能夠熱力學第二定律的耗散非負規則。

2.2.2 耗散非負的規則

$\dot{\Lambda}$ 在本文為耗散功率, 而式子定義的規則如下:

$$\dot{\Lambda} = Q_a \dot{q}_p = \mathbf{Y}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}},$$

而根據上面的軟化段規則, $\frac{y_1}{|k_{e1}|} < \frac{y_2}{|k_{e2}|}$ 表示一號元件 (耗散非負) 一定會先進入塑性段, 而二號元件 (耗散非正) 則會後進入塑性段。因此當桿件還是在彈性段時, 系統下兩件元件都沒有進入塑性, 其耗散功率為零

$$\dot{\Lambda} = 0,$$

而在桿件進入軟化段時, 其耗散功率為

$$\dot{\Lambda} = \dot{\Lambda}_1 = \mathbf{Y}_1^T \dot{\boldsymbol{\lambda}}_1 > 0,$$

最後在材料進入平台後, 只要滿足耗散非負的耗散功率的大於耗散非正的耗散功率即可,

$$\mathbf{Y}_1^T \dot{\boldsymbol{\lambda}}_1 = |\mathbf{Y}_1^T \dot{\boldsymbol{\lambda}}_1| > |\mathbf{Y}_2^T \dot{\boldsymbol{\lambda}}_2| = -\mathbf{Y}_2^T \dot{\boldsymbol{\lambda}}_2,$$

而其耗散公式如下:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_1 \geq \mathbf{0}, \quad \dot{\Lambda}_1 = \mathbf{Y}_1^T \dot{\boldsymbol{\lambda}}_1 \geq 0, \quad (2.27)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_2 \leq \mathbf{0}, \quad \dot{\Lambda}_2 = \mathbf{Y}_2^T \dot{\boldsymbol{\lambda}}_2 \leq 0, \quad (2.28)$$

$$\dot{\Lambda} = \dot{\Lambda}_1 + \dot{\Lambda}_2 = \mathbf{Y}_1^T \dot{\boldsymbol{\lambda}}_1 + \mathbf{Y}_2^T \dot{\boldsymbol{\lambda}}_2 > 0, \quad (2.29)$$

重新檢視一次軟化桿件的能量模型，我們將其外界對於軟化桿件所做的功定義表示如下，式子的推導詳細推導請參照附錄 B：

$$\begin{aligned}\dot{W} &= Q\dot{q} \\ &= Q_1\dot{q} + Q_2\dot{q} \\ &= \dot{W}_1 + \dot{W}_2\end{aligned}$$



將其所作的功，分別作用在 1 號元件與 2 號元件，然後根據熱力學第一定律，能量守恆

$$\dot{W} = \dot{U} + \dot{\Lambda}$$

然後分別建立系統下面的兩組軸力元件能量模型。

2.2.3 建立軟化桿件的能量模型

1 號元件模型：

$$\begin{aligned}\dot{W}_1 &= \dot{U}_1 + \dot{\Lambda}_1, \\ \dot{W}_1 &= Q_1\dot{q}_1, \\ \dot{U}_1 &= Q_{1b}\dot{q}_1^p + Q_{1e}\dot{q}_1^e, \\ U_1 &= \frac{1}{2}k_{p1}(q^p)^2 + \frac{1}{2}k_{e1}(q^e)^2, \\ \dot{\Lambda}_1 &= Q_{1a}\dot{q}_1^p \geq 0,\end{aligned}\tag{2.30}$$

2 號元件模型：

$$\begin{aligned}\dot{W}_2 &= \dot{U}_2 + \dot{\Lambda}_2, \\ \dot{W}_2 &= Q_2\dot{q}_2, \\ \dot{U}_2 &= Q_{2b}\dot{q}_2^p + Q_{2e}\dot{q}_2^e, \\ U_2 &= \frac{1}{2}k_{p2}(q^p)^2 + \frac{1}{2}k_{e2}(q^e)^2, \\ \dot{\Lambda}_2 &= Q_{2a}\dot{q}_2^p \geq 0,\end{aligned}\tag{2.31}$$

最後其軟化桿件這個系統的總耗散功率為正

$$\dot{\Lambda} = \dot{\Lambda}_1 + \dot{\Lambda}_2 \geq 0$$



故從熱力學的觀點來看，當我們將軟化桿件視為一個封閉系統如圖 2.9，此封閉系統業必遵守熱力學第一第二定律。而我們也可將原本的模型修改成以下，原本的內時 $\dot{\lambda} \geq 0$ 改成並聯以後的 $\dot{\Lambda} \geq 0$ 。

$$q = q^e + q^p, \quad q, q^e, q^p, Q \in \mathbb{R}^{1 \times 1} \quad (2.32)$$

$$Q = k_e q^e, \quad \mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{N}^T, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{2 \times 1} \quad (2.33)$$

$$\dot{q}^p = \mathbf{N} \dot{\lambda}, \quad () = d() / dt \quad (2.34)$$

$$\mathbf{f}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0, \quad (2.35)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{N}^T \mathbf{Q} - \mathbf{H} \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Y} \leq 0, \quad (2.36)$$

$$\dot{\Lambda} \geq 0, \quad (2.37)$$



2.3 數值運算例一、軟化彈塑性模型組成律關係

本節利用前述發展的的理論以及計算流程，對軟化二力桿件的組成律關係進行模擬與分析，分別使用不同的元件並聯模式，描述求解同一種軟化桿件組成律，並針對其能量儲存與耗散的情形，做熱力學定律的檢驗，以確保本文所提出滿足正交塑流規則的組成律模式，軟化桿件系統其構成應為耗散非負與耗散非正各一的元件並聯所組成的系統。

考慮一個片段三線性模式的軟化組成律模型，分成三段，包括彈性階段、軟化階段以及平台階段，給定一個應變控制過程，討論紀錄其能量儲存耗散，說明本文改變2號元件內時耗散非負的限制，正確描述軟化桿件。軟化桿件參數：彈性勁度 $k_e = 1.5$ ，降伏強度 $y = 6$ ，進入軟化段時應力應變關係圖的斜率是-1.5，殘留應力強度是3，此軟化桿件彈塑性組成律模式如圖 2.10。

給定一應變路徑 $0 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 10 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 0 \rightarrow -2 \rightarrow -4 \rightarrow 0$

在此應變控制下軟化桿件應力應變關係如圖 2.11，而下面兩種不同元件的並聯模式，加入了耗散非正的內時情形，除了可以滿足桿件的正交塑流規則，也可以正確表示能量儲存耗散關係。

2.3.1 數值運算例之一、片段雙線性彈塑模式

考慮2.1.2的桿件並聯模式，給定二根桿件的組成模式，其材料常數為：

1 號元件：彈性勁度 $k_e = 1$ ，降伏強度 $y = 4$ ，塑性模數 $k_p = -\frac{2}{3}$ ，

2 號元件：彈性勁度 $k_e = 0.5$ ，降伏強度 $y = 3$ ，塑性模數 $k_p = -\frac{2}{3}$ ，

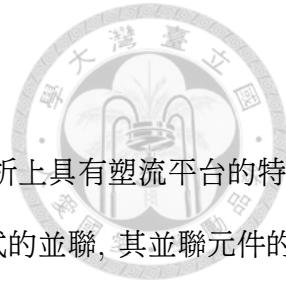
給定一應變路徑 $0 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 10 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 0 \rightarrow -2 \rightarrow -4 \rightarrow 0$

1 號元件和2 號元件並聯後在此應變控制路徑的情形如圖 2.12。

透過2.2.3小節能量儲存耗散的規則公式以及2.1.1的彈塑性模式，將 $Q, Q_a, Q_b, q, q^e, q^p, \lambda, W, U, \Lambda$ 等求出。

1 號元件數據及其變率資料紀錄如表 2.1, 表 2.2。

2 號元件數據及其變率資料紀錄如表 2.3, 表 2.4。



2.3.2 數值運算例一之二、完全彈塑性模式

考慮2.1.2的桿件並聯模式，但是使用完全彈塑性的模型，完全彈塑性在分析上具有塑流平台的特性，這在極限分析上一個很大的優勢（在第3章有提到），而使用完全彈塑性模式的並聯，其並聯元件的參數中塑性模數就會為零，然後其中2號元件為負勁度，給定兩件元件的組成模式，其材料常數為：

1號元件：彈性勁度 $k_e = 3$ ，降伏強度 $y = 12$ ，塑性模數 $k_p = 0$ ，

2號元件：彈性勁度 $k_e = -1.5$ ，降伏強度 $y = 9$ ，塑性模數 $k_p = 0$ ，

給定一應變路徑 $0 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 10 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 0 \rightarrow -2 \rightarrow -4 \rightarrow 0$

1號元件和2號元件並聯後在此應變控制路徑的情形如圖 2.13

透過2.2.3小節能量儲存耗散的規則公式以及2.1.1的彈塑性模式，將 $Q, Q_a, Q_b, q, q^e, q^p, \lambda, W, U, \Lambda$ 等求出。

1號元件數據及其變率資料紀錄如表 2.5, 表 2.6。

2號元件數據及其變率資料紀錄如表 2.7, 表 2.8。

由結果我們可以得知，上述兩種表示方法都可以表示同樣的軟化桿件的彈塑組成模式，滿足並聯時的平衡律和機動律，在本文加入內時有負的增量觀念，除了可以滿足軟化桿件的正交塑流規則，也可以得到軟化桿件相同的能量儲存耗散關係求解結果是一樣的，如表 2.9, 表 2.10，而在此應變路徑下，將表 2.9 和表 2.10 做成一歷時分析如圖 2.14 兩種並聯的組成元件，都可以發現會有一件元件其內時 $\lambda \leq 0$ ，而當此元件降伏以後，其能量耗散皆為非正的，但是因為組成桿件的其中一件元件，其耗散功率維持非負且恆大於等於耗散非正元件的耗散功率，故整個看成一個軟化桿件系統其總耗散功率還是非負的。故認為加入軟化桿件其一並聯元件是耗散非正的概念是正確的。

2.4 軟化結構層次模型

經過前幾節的說明，具有塑流平台的軟化彈塑性桿件，確實可以用兩個以上的片段線性多降伏面彈塑性模式，透過並聯的模式來產生。接下來我們討論一個具有 n 根桿件的桁架模型，將每根桿件的編號分別為 $1, \dots, n$ ，此第 i 根桿件的軸力為 Q_i ，軸向變形為 q_i ，彈性軸向變形為 q_i^e ，塑性軸向變形

爲 q_i^p ，軸向勁度爲 k_i ，降伏式爲 \mathbf{f}_i ，等價塑性軸向變形的內時 λ_i ，降伏軸力爲 \mathbf{Y}_i ，單位法向量爲 \mathbf{N}_i^T ，塑流方向向量爲 \mathbf{N}_i ，降伏演化陣爲 \mathbf{H}_i ，耗散功率爲 $\dot{\Lambda}_i$ 。然後我們將 n 根桿件進一步改寫成以下的形式：

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^e + \mathbf{q}^p, \quad \mathbf{q}, \mathbf{q}^e, \mathbf{q}^p, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}_L \mathbf{q}^e, \quad \mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{2n \times 1} \quad (2.39)$$

$$\dot{\mathbf{q}}^p = \mathbf{N}_L \dot{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \mathbf{N}_L \in \mathbb{R}^{n \times 2n} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{f}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0, \quad \mathbf{K}_L \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{N}_L^T \mathbf{Q} - \mathbf{H}_L \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Y} \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{H}_L \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \quad (2.42)$$

$$\dot{\Lambda} \geq 0. \quad (\cdot) = d(\cdot)/dt \quad (2.43)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &:= \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_n \end{bmatrix}^T, \mathbf{q}^e := \begin{bmatrix} q_1^e & \cdots & q_n^e \end{bmatrix}^T, \mathbf{q}^p := \begin{bmatrix} q_1^p & \cdots & q_n^p \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{Q} &:= \begin{bmatrix} Q_1 & \cdots & Q_n \end{bmatrix}^T, \mathbf{f} := \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^T & \cdots & \mathbf{f}_n^T \end{bmatrix}^T, \boldsymbol{\lambda} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1^T & \cdots & \boldsymbol{\lambda}_n^T \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{Y} &:= \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^T & \cdots & \mathbf{y}_n^T \end{bmatrix}^T, \mathbf{K}_L := \text{diag} \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & k_n \end{bmatrix}, \mathbf{H}_L := \text{diag} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \cdots & \mathbf{H}_n \end{bmatrix}, \\ \mathbf{N}_L^T &:= \text{diag} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^T & \cdots & \mathbf{N}_n^T \end{bmatrix}, \dot{\Lambda} := \dot{\Lambda}_1 + \dot{\Lambda}_2 + \cdots + \dot{\Lambda}_n. \end{aligned}$$

式 (2.38-2.43) 以 $\mathbf{q}, \mathbf{q}^e, \mathbf{q}^p, \mathbf{Q}$ 為變數，再尚未加入結構的機動律和平衡律來考慮時， $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ 則分別對應到 n 個桿件的內力空間，下標 L 是桿件層次符號，表示其模型還在桿件層次。由彈塑應變分解式 (2.38)、彈性組成律式 (2.39)、塑流規則式 (2.40)，在假設各個桿件在組合成結構時其初始狀態皆爲零值，則可推導桿件內力與變形關係用全量表示：

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}_L \mathbf{q} - \mathbf{K}_L \mathbf{N}_L \boldsymbol{\lambda}, \quad (2.44)$$

現在考慮此結構的自由度爲 m ，加入機動律跟平衡律：

$$\mathbf{q} = \mathbf{A} \mathbf{u}, \quad (2.45)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}^T \mathbf{Q}, \quad (2.46)$$

其中 $\mathbf{u} \in R^{m \times 1}$ 為節點位移向量; $\mathbf{F} \in R^{m \times 1}$ 為節點外力向量; $\mathbf{A} \in R^{n \times m}$ 為協調常數陣, 機動律與平衡律的協調常數陣有轉置的關係。先將機動律 (2.45) 代入 (2.44) 後, 再代入平衡律 (2.46):

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}_L \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{K}_L \mathbf{N}_L \boldsymbol{\lambda}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}^T \mathbf{K}_L \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{A}^T \mathbf{K}_L \mathbf{N}_L \boldsymbol{\lambda}$$

$$= \mathbf{K}_G \mathbf{u} - \mathbf{A}^T \mathbf{K}_L \mathbf{N}_L \boldsymbol{\lambda},$$

隨之將 \mathbf{u} 提出移至等號左邊可得

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_G^{-1} \mathbf{F} + \mathbf{K}_G^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{K}_L \mathbf{N}_L \boldsymbol{\lambda}. \quad (2.47)$$

最後再將 (2.47) 代回機動律 (2.45), 再代入桿件內力與變形關係式 (2.44) 得

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}_L \mathbf{A} \mathbf{K}_G^{-1} \mathbf{F} + (\mathbf{K}_L \mathbf{A} \mathbf{K}_G^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{I}) \mathbf{K}_L \mathbf{N}_L \boldsymbol{\lambda}, \quad (2.48)$$

再將式 (2.48) 代入降伏面式 (2.42),

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{N}_L^T \mathbf{K}_L \mathbf{A} \mathbf{K}_G^{-1} \mathbf{F} + \mathbf{N}_L^T (\mathbf{K}_L \mathbf{A} \mathbf{K}_G^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{I}) \mathbf{K}_L \mathbf{N}_L \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{H}_L \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Y} \\ &= \mathbf{N}_G^T \mathbf{F} - \mathbf{H}_G \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Y} \leq 0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

利用了上述全部的桿件模式, 以及結構的機動律式及平衡律式, 推導出結構層次模式:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^e + \mathbf{u}^p, \quad \mathbf{u}, \mathbf{u}^e, \mathbf{u}^p, \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{m \times 1} \quad (2.50)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_G \mathbf{u}^e, \quad \mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{2n \times 1} \quad (2.51)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^p = \mathbf{N}_G \dot{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \mathbf{N}_G \in \mathbb{R}^{m \times 2n} \quad (2.52)$$

$$\mathbf{f}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0, \quad \mathbf{K}_G \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (2.53)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{N}_G^T \mathbf{F} - \mathbf{H}_G \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Y} \leq 0, \quad \mathbf{H}_G \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \quad (2.54)$$

$$\dot{\Lambda} \geq 0, \quad () = d() / dt \quad (2.55)$$

其中

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{K}_G^{-1} \mathbf{F},$$

$$\mathbf{u}^p = \mathbf{K}_G^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{K}_L \mathbf{N}_L \boldsymbol{\lambda},$$

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{A}^T \mathbf{K}_L \mathbf{A},$$

$$\mathbf{N}_G = \mathbf{K}_G^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{K}_L \mathbf{N}_L,$$

$$\mathbf{N}_G^T = \mathbf{N}_L^T \mathbf{K}_L \mathbf{A} \mathbf{K}_G^{-1},$$

$$\mathbf{H}_G = -\mathbf{N}_L^T (\mathbf{K}_L \mathbf{A} \mathbf{K}_G^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{I}) \mathbf{K}_L \mathbf{N}_L + \mathbf{H}_L,$$

式 (2.50-2.55) 表示以 \mathbf{u}, \mathbf{F} 為變數的結構模式, 此時降伏面 $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ 對應在結構的載重空間 \mathbf{F} , 所以 \mathbf{f} 是為結構降伏面, 而下標 G 表示為結構層次符號。

2.5 小結

本章修改了片段線性多降伏面模式的互補三元, 由於希望使其滿足正交塑流規則, 可以建立其能量儲存耗散的關係式, 且整個軟化桿件系統滿足熱力學的第一第二定律, 可以利用不同的片段線性多降伏平面模式, 透過並聯的機制, 得到想要的軟化桿件組成模式, 而例一的結果可以看出, 透過應變控制方式去測試不同桿件並聯模型描述軟化行為結果, 結果發現軟化桿件其組成元件如果有一耗散非正的元件, 是可以正確的描述出軟化桿件的力學行為以及定義其能量的儲存與耗散的情形, 驗證本文探討分析的結果, 最後利用多根的桿件模型, 加入了結構的機動律與平衡律去考慮, 可以如圖2.15將桿件層次的分析, 晉升到結構層次, 求解硬化、軟化結構的崩塌面或是分析其安全載重空間。





第 3 章 軟化桁架的崩塌面與安全載重空間

3.1 崩塌載重

3.1.1 傳統極限分析定義的崩塌載重

過去使用極限分析求解崩塌載重與彈塑性分析的觀念是不同的，彈塑性分析需要給定一定的加載路徑或是條件；而極限分析是排除歷時過程的繁瑣計算，直接鎖定在桿件的極限狀態條件下，而在這邊的極限狀態，也就是彈塑性模型廣義應力與廣義應變組成關係中所必須存在的塑流平台如圖 3.1，存在塑流平台才能夠找到崩塌載重 (collapse load)，也就是說極限分析可以視為漸進 (asymptotic) 型式的彈塑性分析，可以一步到位的求取崩塌載重。

使用傳統的極限分析，可以根據給予不同的條件使用上限法與下限法，上限法是假設機構產生型式，令其滿足協調方程式，使外力所做的功率會相等於內力的耗散功率，此時所求得的外力必定會大於或等於崩塌載重；而下限法是不論贅餘力如何去假設，外力與內力必須滿足平衡方程式，然後定義構件內力達到降伏條件，此時所求得的外力必定小於等於崩塌載重。當上限法與下限法的假設合適，其可以得到精確的崩塌載重。但是如何精確上限法、下限法的假設正確，得到相同解而沒有缺口問題。(此處的缺口是指上下限法假設錯誤時並不互為對偶命題描述同一問題。)

3.1.2 崩塌載重的定義探討

為改進傳統的極限分析方式，重新正確的定義結構的極限狀態，利用片段線性多降伏平面模式推導出彈塑性結構極限分析的控制方程式。片段線性多降伏平面模式無論在桿件或是結構層次均存在塑流平台，所謂的塑流平台就是泛指結構或是桿件，發生無限制塑流，塑性變形可以沒有限制的發展的極

限狀態。而在極限分析的文獻定義的崩塌載重，是使結構產生過多的塑性變形的外力，並不是真實狀況中結構已經崩塌。本文在這邊則是認為結構的崩塌載重應該要從以下的兩種觀點去討論分析：

1. 崩塌機構 (進入塑流平台) 產生：

在加載的過程中，結構體裡面會有部分不同的桿件進入塑流平台，但是整體的結構還是會滿足變形協調 (諧和) 律，使得已經進入塑流平台的桿件得以被約束，讓其還不發生無限制的變形；而當入塑流平台的桿件數，使得整體或局部結構產生無限制的變形或是位移時，發生結構不穩定，也就是崩塌機構的產生，此時的受力情形極為崩塌載重。

2. 結構的內力無法與外力平衡：

在外力空間裡的加載過程中，會有部分桿件的內力達到降伏強度，因此彼此間所承受的力量會重新分配，內力除了必須滿足桿件本身的降伏條件之外，也要與整體結構受到的外力維持平衡；而當各個桿件所提供的內力，再也無法與結構受到的外力平衡時，此時所受的外力情形即為崩塌載重。

對於一個結構物裡只有完全彈塑性桿件，此結構體在本文稱之為完全彈塑性結構；一個結構物裡包含完全彈塑性桿件以及硬化桿件，則稱之為硬化結構。對於完全彈塑性桿件或是硬化桿件來說，其所受的加載情形不論是單調比例加載還是循環加卸載，當這些桿件達到極限狀態時，其塑流平台所對應的即是桿件所能夠提供的最大內力如圖 3.3。這樣的性質的好處是在分析的過程中，各地進入塑流平台的桿件剛好對應到的就是結構體所能承受的最大外力。

換句話說，對於上述的完全彈塑性結構、硬化結構，在外力控制下，其進行加載達到結構的內力外力無法平衡，或是位移控制，當結構體因部分桿件進入平台而在位移空間發生無限制的變形或是位移，其所對應在外力空間的崩塌載重是一致的。塑流平台上的每一點，均對應到同樣的崩塌載重，此為極限分析上的重要性質，因為塑流平台上的每一點均代表桿件已進入塑性，而在桿件裡面的內時 λ 對應到不一樣的值，但是均對應到同樣的崩塌載重，意即塑流平台所對應的崩塌載重與歷時、初始狀態、加載路徑是無關是唯一的。

但是對於包含軟化桿件的結構物，欲描述其極限狀態就不像是硬化桿件或是完全彈塑性桿件單純，本文在此重新由前面討論的兩觀點的崩塌載重去檢視：

1. 崩塌機構 (進入塑流平台) 產生：

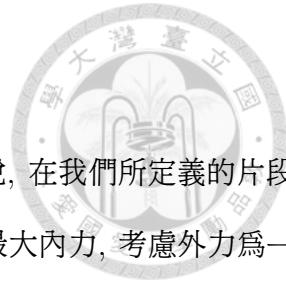
對於軟化結構來說，如果使用一位移 (應變控制) 去加載，跟前面討論一樣的，結構體裡有不同的桿件進入塑流平台，在滿足整體結構的變形協調的條件下，即便已經有桿件進入塑流平台，還是會因為協調的約束條件，使得結構體不會發生無限制的變形；但是當軟化桿件經歷過軟化段，隨後再進入平台 (軟化桿件的殘餘應力強度)，如果從外力空間 (桿件內力) 觀察，當桿件進入崩塌機構時，會出現降伏面內縮 (桿件內力下降) 的情形，意即如果分析的崩塌機構包含了軟化桿件無限制變形的極限狀態，並非對應在加載過程中的最大應力如圖 3.4。

2. 結構的內力無法與外力平衡：

但是對於外力空間的加載過程中，如果為一單調加載的形式，則如果當加載過程中外力已無法和內力平衡時，我們定義為崩塌載重，則回頭來看軟化桿件，其並沒有進入塑流平台，發生結構的無限制變形，故當我們在外力空間討論探討崩塌載重時，軟化桿件所對應到的無限制變形，並不會對應到單調加載過程中的桿件最大內力。此外軟化桿件有無經歷過塑性，其加載過程所經歷的桿件最大內力也會不一，如圖 3.5。

由上述的兩點探討，由於塑流平台具有與歷程無關的優點，本文選擇考慮進入平台為軟化桿件的極限狀態，這樣的極限狀態即表示軟化桿件發生無限制變形，其所對應的內力雖然不是對應到桿件的最大內力，但會與完全彈塑性，硬化彈塑性一樣保有與歷時無關的特性

由於進入塑流平台 (無限制變形) 具有與歷時無關的優點，所以本章節在接下來描述求解描述軟化桿件進入塑性，降伏面開始演化的彈塑性組成律，在並聯元件的模型上會選用片段線性多降伏面模型中的完全彈塑性模式：其中一個為會先進入降伏的正勁度完全彈塑性元件，另一個則是引入會後進入降伏狀態的負勁度完全彈塑性元件如圖 3.2，這樣的選擇是希望不論是在問題的結構層次，或是往下探去看桿件層次的組成關係，都可以擁有塑流平台的特性，這點會有助於後面求解、了解達到崩塌機構時，各桿件進入平台的情形，以及在彈塑開關上可以更容易去找到要達成崩塌機構的條件。



3.1.3 軟化結構的崩塌載重

在本文裡，包含軟化桿件的結構物稱之為軟化結構。對於軟化桿件來說，在我們所定義的片段線性多降伏面談塑性模式並聯所組成的塑流平台，並不是對應到軟化桿件的最大內力，考慮外力為一維的情形下，軟化結構物在一為外力位移空間中其塑流平台所對應的外力大小 \bar{F} ，並不是結構體所能承受的最大外力 F_{max} ，這一點是有別於完全彈塑性桿件和硬化桿件的，而根據前面一個章節所探討的，本文決定要以產生無限制變形的塑流平台，來表示軟化結構的崩塌載重。

因為考慮軟化桿件在塑流平台為極限狀態，廣義應力應變狀態如圖 3.6，反應在軟化結構裡，代表我們選擇結構物達到塑流平台對應的外力為崩塌載重，則軟化結構物的崩塌載重也具有在任意歷時或是任意加載路徑唯一的崩塌載重，軟化結構物的崩塌載重均會對應到同樣的外力大小 \bar{F} ，此時的軟化結構物的崩塌載重求解會趨於保守，但會具有任意路徑、與歷時無關且結構絕對安全的特性。

3.2 軟化桁架崩塌面之求解

本章節為了文章的完整性，引入了吳昱霆 [39]的論文針對崩塌面定理的導證，發展了一套完整求解完全彈塑性、硬化桁架結構物的崩塌面的求解推導，而本文針對軟化桿件，因為在2.2節對於其組成律重新定義，引入了其一元件耗散非負的規則，所以去修正過去求解崩塌面的求解方法，然後使用此方法求解崩塌面，對於其求解的結果給予討論，如何去增加結構分析上可以使用的安全載重空間不要過於保守。考慮降伏面彈性加載空間還是與歷時有關以及軟化結構物的互制行為，發展出軟化結構物應加入對應位移空間，當位移空間發生無限制變形的邊界時，對應到的載重空間是軟化結構物的崩塌面，而其圍出區域是安全載重空間。

3.2.1 降伏面與崩塌面的關係

若結構的每一根桿件均未經歷過任何塑性行為，式(2.50 – 2.55)中的內變數 λ 為零向量，每個 λ_l ($l = 1, 2, \dots$) 都是 0，結構處於零值狀態，則結構降伏面式 (2.54) 中 $\mathbf{H}_G \lambda = \mathbf{0}$ ，此時的降伏面稱

爲初始降伏面(initial yield surface):

$$\mathbf{f} = \mathbf{N}_G^T \mathbf{F} - \mathbf{Y} \leq \mathbf{0}. \quad (3.1)$$

在初始降伏面所圍出的載重區域內，只要加載路徑中的外力路徑均不超出此區域，加載路徑可以是任意變化、循環的，結構會始終保持在彈性狀態，且初始降伏面不會發生演化，即是與歷時、加載路徑、初始狀態無關，是唯一的。然而一旦外力點超出此區域，就會有桿件進入塑性，式(2.50 – 2.55)中的內時 λ 開始有值， $\mathbf{H}_G \lambda$ 項會使初始降伏面演化成接續降伏面，根據不同的 λ 值會有不同的接續降伏面，這時會與歷時、加載路徑、初始狀態有關。

繼續討論接續降伏面，從結構的彈塑組成律模型式 (2.50 – 2.55) 來看，意即其內時 λ 是已經有值的，此時的降伏面稱爲接續降伏面 (subsequent yield surface):

$$\mathbf{f} = \mathbf{N}_G^T \mathbf{F} - \mathbf{H}_G \lambda - \mathbf{N} \mathbf{Y} \leq \mathbf{0}. \quad (3.2)$$

如果可以掌握歷時加載或是得到其內時 λ 的資訊，即便不是在零值狀態 (結構並非處於初始狀態) 時，但是因爲知道其內時 λ 的資訊，也可以求得一個接續降伏面的彈性加載範圍，加載的路徑只要不要超過區域，加載過程還是可以在接續降伏面內的彈性加載空間內任意變化、循環的。

在前面的章節裡有提到，本文所分析討論的崩塌載重是唯一的，在載重空間，一個點代表一組載重組合，所以一組崩塌載重組合，是一個崩塌點，所有崩塌點了崩塌面，因此與崩塌面一樣具有與歷時、加載路徑無關的特性。而在這邊討論初始降伏面、接續降伏面、崩塌面的比較，是因爲軟化材料會發生，當其初始降伏面進入接續降伏面以至後面的崩塌面，都有可能發生降伏式所圍出的載重空間，在某些地方變小內縮。所以假如知道初始狀態是零值時，同時討論崩塌面與初始降伏面的聯集作爲安全載重空間；或是在已知內時的情況下，同時討論崩塌面與接續降伏面的聯集考慮作爲安全載重空間對分析設計上是一個可以考慮的想法。

3.2.2 定義桁架崩塌面模式

由前面章節提到的，結構物的崩塌在面在載重空間爲片段線性的形式，而本文爲確保找出與歷時無關而且是唯一的崩塌面，根據前一小節探討如何去定義崩塌面的模式：

由於本文考慮的組成律為片段線性多面形降伏面模式，崩塌面與降伏面在載重空間中都具有由多個不等式所交集出來的區域，且每個不等式在載重空間中都具有法向量及與原點的距離，因此崩塌面會具有如結構降伏面式 (2.54) 中 \mathbf{N}_G^T , \mathbf{Y} 的常數矩陣、常數向量。崩塌面是桿件經歷過塑性也是唯一的，就是即使內時 $\boldsymbol{\lambda}$ 是有值的，還是不具有 $\mathbf{H}_G \boldsymbol{\lambda}$ 項。因此本文認為崩塌面是一個不具有 $\mathbf{H}_G \boldsymbol{\lambda}$ 項的模式，才不會使得崩塌面演化。總結上面的討論的討論，認為崩塌面的數學形式以及物理意義，因此把崩塌面定義如下：

$$\mathbf{f}_{\text{col}} = \mathbf{N}_{\text{col}}^T \mathbf{F} - \mathbf{Y}_{\text{col}} \leq \mathbf{0}, \quad (3.3)$$

其中 $\mathbf{f}_{\text{col}} = \begin{bmatrix} f_{\text{col}}^1 & \dots & f_{\text{col}}^j \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{j \times 1}$ 為崩塌面向量， f_{col}^i 表示其中一個崩塌面，而 i 表示其對應的崩塌機構編號， $\mathbf{N}_{\text{col}}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{\text{col}}^1 & \dots & \mathbf{N}_{\text{col}}^j \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{j \times k}$ ， $\mathbf{N}_{\text{col}}^i$ 為第 i 個崩塌面在載重空間中的法向量陣； $\mathbf{Y}_{\text{col}} = \begin{bmatrix} Y_{\text{col}}^1 & \dots & Y_{\text{col}}^j \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{j \times 1}$ ， $\mathbf{Y}_{\text{col}}^i$ 為第 i 個崩塌面在載重空間中與原點的距離； j 為崩塌面的面數，此時所對應的廣義應力空間維度 k 表示節點外力的獨立個數； $\mathbf{N}_{\text{col}}^T$, \mathbf{Y}_{col} 為待演算求解的常數矩陣，崩塌面即區域 $\mathbf{f}_{\text{col}} \leq \mathbf{0}$ 的邊界，而安全載重空間(區域) 即 $\mathbf{f}_{\text{col}} < \mathbf{0}$ 。

3.2.3 桿件前處理

硬軟化桿件，本文選擇當結構發生無限制變形時的崩塌載重，意即當形成崩塌機構的桿件進入塑流平台，然後利用此性質，將硬軟化桿件的多個降伏面，簡化成軸力桿件在極限狀態的2個降伏面，分別代表拉力側的拉降伏以及壓力側的壓降伏，經由這樣的簡化可以減少降伏面的個數，使得結構降伏面的每個分量分別代表桿件在極限分析的降伏面。硬軟化桿件的降伏面式(2.36)如下：

$$\mathbf{f} = \mathbf{N}^T Q - \mathbf{H} \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Y} \leq \mathbf{0}, \quad (3.4)$$

可以展開為：

$$\begin{bmatrix} f_{t_1} \\ f_{c_1} \\ f_{t_2} \\ f_{c_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{t_1} \\ n_{c_1} \\ n_{t_2} \\ n_{c_2} \end{bmatrix} Q - \mathbf{H} \begin{bmatrix} \lambda_{t_1} \\ \lambda_{c_1} \\ \lambda_{t_2} \\ \lambda_{c_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{t_1} \\ y_{c_1} \\ y_{t_2} \\ y_{c_2} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



對於硬化桿件, 其塑流平台段的每一點對應到的就是最大內力; 而對於軟化桿件, 其塑流平台段的每一點雖然不是對應到最大內力, 但均對應到同樣的內力大小, 因此, 桿件極限狀態的降伏面, 是一個與內變數 λ 無關, 不具有 $\mathbf{H}\lambda$ 項的模式。定義一個轉換矩陣 \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} := \begin{bmatrix} t_1 & 0 & t_2 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 \end{bmatrix},$$

其中 t_1, t_2 對應到的是拉力側降伏面 f_{t_1}, f_{t_2} ; 而 c_1, c_2 對應到的是壓力側降伏面 f_{c_1}, f_{c_2} 。如果是硬化桿件的 t_1, t_2 需滿足 $t_1 t_2 > 0$; c_1, c_2 需滿足 $c_1 c_2 > 0$; 另外軟化桿件的 t_1, t_2 需滿足 $t_1 t_2 < 0$; c_1, c_2 需滿足 $c_1 c_2 < 0$ 。將 \mathbf{T} 乘以式 (3.4) 可以得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{f} &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{N}^T Q - \mathbf{T} \cdot \mathbf{H}\lambda - \mathbf{T} \cdot \mathbf{Y} \\ &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{N}^T Q - \mathbf{T} \cdot \mathbf{Y} \leq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

由上式定義新的符號:

$$\hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{N}}^T Q - \hat{\mathbf{Y}} \leq \mathbf{0}, \quad (3.5)$$

其中 $\hat{\mathbf{f}} := \mathbf{T} \cdot \mathbf{f}$, $\hat{\mathbf{N}}^T := \mathbf{T} \cdot \mathbf{N}^T$, $\mathbf{T} \cdot \mathbf{H}\lambda = \mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{y}} := \mathbf{T} \cdot \mathbf{Y}$ 。式 (3.5) 可以展開為:

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_t \\ \hat{f}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{n}_t \\ \hat{n}_c \end{bmatrix} Q - \begin{bmatrix} \hat{y}_t \\ \hat{y}_c \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

此時 $\hat{f}_t = t_1 f_{t_1} + t_2 f_{t_2}$, $\hat{f}_t = 0$ 表示桿件在拉力極限狀態的降伏面; $\hat{f}_c = c_1 f_{c_1} + c_2 f_{c_2}$, $\hat{f}_c = 0$ 表示桿件在壓力極限狀態的降伏面。將第 2 章中的硬軟化桿件的降伏面式 (2.36) 以式 (2.49) 重新表示, 如此一來在 2.4 節的推導過程中, $\mathbf{f}, \mathbf{N}_L^T, \mathbf{H}_L, \mathbf{Y}$ 的維度會降低, 因此結構層次的外力允許條件式 (2.54) 改寫成:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}} &= \hat{\mathbf{N}}_L^T \mathbf{K}_L \mathbf{A} \mathbf{K}_G^{-1} \mathbf{F} + \hat{\mathbf{N}}_L^T (\mathbf{K}_L \mathbf{A} \mathbf{K}_G^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{I}) \mathbf{K}_L \mathbf{N}_L \lambda - \hat{\mathbf{H}}_L \lambda - \hat{\mathbf{Y}}, \\ &= \hat{\mathbf{N}}_G^T \mathbf{F} - \hat{\mathbf{H}}_G \lambda - \hat{\mathbf{Y}} \leq \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

($\hat{}$) 表示維度有降低的符號

所以一個有 n 根桿件, m 個自由度的外力允許條件式中:

$$\mathbf{f}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{2n \times 1}; \mathbf{N}_L^T \in \mathbb{R}^{2n \times n}; \mathbf{H}_L \in \mathbb{R}^{2n \times m}.$$

其中如果裡面有 $2i$ 根桿件要進行桿件前處理 (表示其結構裡有 i 根硬軟化桿件), 則結構降伏式的維度也會降低:

$$\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{Y}} \in \mathbb{R}^{2(n-i) \times 1}; \hat{\mathbf{N}}_L^T \in \mathbb{R}^{2(n-i) \times m}; \hat{\mathbf{H}}_L \in \mathbb{R}^{2(n-i) \times m}.$$

3.2.4 模態向量與崩塌模態式的定義

當崩塌平衡機構產生時, 會有部分的桿件達到塑流平台, 其餘的桿件則是未達到塑流平台或是仍在彈性; 而不同的崩塌平衡機構, 構成了崩塌模態就會對應到不同達到塑流平台的桿件。在本節中希望能藉由此概念, 將前一小節中推導的, 桿件極限狀態的降伏面式 (3.6), 與崩塌面式 (3.3) 的關係建立起來。

由崩塌面式 (3.3), 我們假設共有 j 種崩塌模態, 所以共有 j 個崩塌面向量:

$$\mathbf{f}_{\text{col}} = \begin{bmatrix} f_{\text{col}}^1 & \cdots & f_{\text{col}}^j \end{bmatrix}^T,$$

其中 $f_{\text{col}}^1, \dots, f_{\text{col}}^j$ 分別對應到不同的崩塌模態。

現在我們希望能將崩塌面與降伏面, 以數學關係連接起來, 因此, 定義模態向量 \mathbf{x}_j :

$$\mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} x_{1t} & x_{1c} & \cdots & x_{(n-i)t} & x_{(n-i)c} \end{bmatrix}^T, \quad (3.7)$$

其中的每個分量會對應到式 (3.6) 中各根桿件的拉壓極限狀態:

$$\hat{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{1t} & \hat{f}_{1c} & \cdots & \hat{f}_{(n-i)t} & \hat{f}_{(n-i)c} \end{bmatrix}^T,$$

且模態向量 \mathbf{x}_j 需要滿足以下關係:

$$\begin{aligned} f_{\text{col}}^j &= \mathbf{x}_j^T \hat{\mathbf{f}} \\ &= \mathbf{x}_j^T \hat{\mathbf{N}}_G^T \mathbf{F} - \mathbf{x}_j^T \hat{\mathbf{H}}_G \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{x}_j^T \hat{\mathbf{Y}} \leq 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

其中 $\mathbf{x}_j^T \hat{\mathbf{N}}_G^T \mathbf{F} \neq 0$, $\mathbf{x}_j^T \hat{\mathbf{H}}_G \boldsymbol{\lambda} = 0$, $\mathbf{x}_j^T \hat{\mathbf{Y}} > 0$.

將所有的模態向量 \mathbf{x}_j 寫成以下形式 \mathbf{X} , 定義為崩塌模態陣:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_j \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2(n-i) \times j}$ 表示為所有崩塌模態的集合，則 \mathbf{X}^T 乘上式 (3.8) 可以寫成

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_{\text{col}} &= \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{f}} \\
 &= \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{N}}_G^T \mathbf{F} - \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{H}}_G \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{Y}} \\
 &= \mathbf{N}_{\text{col}}^T \mathbf{F} - \mathbf{Y}_{\text{col}} \leq \mathbf{0},
 \end{aligned} \tag{3.10}$$



其中: $\mathbf{N}_{\text{col}}^T = \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{N}}_G^T$, $\mathbf{X}^T \hat{\mathbf{H}}_G \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$, $\mathbf{Y}_{\text{col}} = \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{Y}}$.

如此以來，經由模態陣的連接，崩塌面與降伏面的數學關係已經建立完成。接下來只要能求解出所有的模態向量，便能得到完整的崩塌面模式。

3.2.5 模態向量的條件式與求解

由式 (3.8) 中可以得知模態向量 \mathbf{x}_j 需要滿足一些條件，才能將 f_{col}^j 與 $\hat{\mathbf{f}}$ 連接起來，以下將針對其各個條件，賦予物理意義及數學意義，定義出模態向量需滿足的條件式，然後探討求解模態陣法以及步驟流程。

1. 崩塌面在結構經歷塑性變形後後仍然是唯一的，也就是即使內時 $\boldsymbol{\lambda}$ 有值也會是唯一的，所以崩塌面與內時的值 $\boldsymbol{\lambda}$ 是無關的。以數學形式表示即是 $\mathbf{x}_j^T \hat{\mathbf{H}}_G \boldsymbol{\lambda} = 0$ ，也就是說此式要需要滿足 $\mathbf{x}_j^T \hat{\mathbf{H}}_G = \mathbf{0}$ 才會成立，將此條件寫為轉置形式 $(\hat{\mathbf{H}}_G^T \mathbf{x}_j)^T$:

$$\hat{\mathbf{H}}_G^T \mathbf{x}_j = \mathbf{0}, \tag{3.11}$$

表示 \mathbf{x}_j 屬於硬軟化演化矩陣 $\hat{\mathbf{H}}_G^T$ 的零核空間 (null space)， \mathbf{x}_j 是此硬軟話演化矩陣 $\hat{\mathbf{H}}_G^T$ 特徵值 (eigenvalue) 為零時所對應的特徵向量 (eigenvector)。換言之求解模態陣 \mathbf{X} ，就是在找尋其對應特徵為零所組合而成的特徵向量，這樣演算的概念就可以將問題轉換到線性代數上的特徵值為零求解找對應特徵向量或是高斯消去等方法來求解。

2. 模態向量 \mathbf{x}_j 必須將 f_{col}^j 與 $\hat{\mathbf{f}}$ 連接起來，也就是 $f_{\text{col}}^j = \mathbf{x}_j^T \hat{\mathbf{f}}$ ；而式中 $\hat{\mathbf{f}} \leq \mathbf{0}$ 且 $f_{\text{col}}^j \leq 0$ ，要同時滿足這些關係式，模態向量 \mathbf{x}_j 需要滿足:

$$\mathbf{x}_j \geq \mathbf{0}, \tag{3.12}$$

上式即表示 \mathbf{x}_j 的分量應為大於零或是等於零。在 $f_{\text{col}}^j = \mathbf{x}_j^T \hat{\mathbf{f}}$ 中, \mathbf{x}_j 大於零的分量會對應到已進入塑流平台的桿件, 而 \mathbf{x}_j 等於零的分量會對應到未進入塑流平台的桿件。因此, $\mathbf{x}_j \geq \mathbf{0}$ 即表示崩塌面 $f_{\text{col}}^j = 0$ 的 f_{col}^j , 是由 $\hat{\mathbf{f}}$ 的各個分量中, 已進入塑流平台的桿件降伏面, 以疊加的方式合成出來的。由此討論本文針對發生桿件的崩塌平衡機構, 去給予每一個特徵值零其對應的特徵向量給予值求解。

- 在載重空間中, 崩塌面的每個超平面必須存在法向量, 才能圍束出結構的安全載重區域, 也就是崩塌面的法向量矩陣必不為零。以數學形式來表示, 也就是此式要滿足 $\mathbf{x}_j^T \hat{\mathbf{N}}_G^T \neq \mathbf{0}$ 才會成立, 將此條件寫為轉置形式 $(\hat{\mathbf{N}}_G \mathbf{x}_j)^T$:

$$\hat{\mathbf{N}}_G \mathbf{x}_j \neq \mathbf{0}, \quad (3.13)$$

上式在線性代數理論基礎就是 \mathbf{x}_j 不可以是降伏面法向量矩陣 $\hat{\mathbf{N}}_G$ 的零核空間, 換句話說就是 \mathbf{x}_j 不為降伏面法向量矩陣 $\hat{\mathbf{N}}_G$ 特徵值為零時其所對應的特徵向量。因此求解過程要將使崩塌面的法向量變為零向量的 \mathbf{x}_j 過濾剔除, 不放進崩塌的模態陣。

因此, 由式 (3.11)-(3.13) 可以歸納出模態向量 \mathbf{x}_j 為滿足以下條件的解集合:

$$\{\mathbf{x}_j | \hat{\mathbf{H}}_G^T \mathbf{x}_j = \mathbf{0}, \mathbf{x}_j \geq \mathbf{0}, \hat{\mathbf{N}}_G \mathbf{x}_j \neq \mathbf{0}\}. \quad (3.14)$$

另外由所有模態向量 \mathbf{x}_j 的集合所組成的模態陣 \mathbf{X} , 也會滿足上述之條件:

$$\{\mathbf{X} | \hat{\mathbf{H}}_G^T \mathbf{X} = \mathbf{0}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}, \hat{\mathbf{N}}_G \mathbf{X} \neq \mathbf{0}\}. \quad (3.15)$$

模態陣 \mathbf{X} 建立完成後, 將其代回式 (3.10):

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{col}} &= \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{f}} \\ &= \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{N}}_G^T \mathbf{F} - \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{H}}_G \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{Y}} \\ &= \mathbf{N}_{\text{col}}^T \mathbf{F} - \mathbf{Y}_{\text{col}} \leq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

即會得到完整的崩塌面模式, 其中所有崩塌超平面在最內部的交集區域即為結構的安全載重區域如圖 3.7。另外可以加入一些限制式, 加速演算的流程, 本文探討的為桁架結構, 其中任何一根桿件均不能

同時處於拉力極限狀態跟壓力極限狀態，也就是對於單一桿件機構向量 \mathbf{x}_j 的分量有以下三種可能：

- (1) 桿件處於拉力側的塑流平台: $x_{it} > 0, x_{ic} = 0$.
- (2) 桿件處於壓力側的塑流平台: $x_{it} = 0, x_{ic} > 0$.
- (3) 桿件未達塑流平台: $x_{it} = 0, x_{ic} = 0$.

由 (1), (2), (3) 可得：

$$x_{it}x_{ic} = 0, x_{it} \geq 0, x_{ic} \geq 0,$$

由於每根桿件必須都符合上式，而 $x_{it} \geq 0, x_{ic} \geq 0$ 已包含在式 $\mathbf{x}_j \geq \mathbf{0}$ 中，因此可以寫成：

$$\sum_{i=1}^n x_{it}x_{ic} = 0, \quad (3.16)$$

具有互補三元的線性互補問題型式。將限制式 (3.16) 加入判斷，可以早先更進一步提早剔除 \mathbf{x}_j 的組合中，同一根桿件同時處於拉力跟壓力極限狀態的崩塌超平面，加快演算流程。



3.3 數值運算例二、軟化桁架崩塌面求解

例二針對擁有軟化桿件所構成的簡單結構：二桿桁架、三桿桁架和橋型桁架，去使用3.2的求解流程，透過正確的演算過程，演算求解結構物裡具有軟化桿件的崩塌面。

3.3.1 數值運算例二之一、二桿桁架

考慮一個具有二根桿件的桁架如圖 3.9 所示，各桿件長度均為 L ，1 號桿與 2 號桿之間的夾角為 60 度。外力向量 \mathbf{F} 施加在兩桿相交的節點上。

1 號桿為完全彈塑性，其材料常數為：彈性勁度 $k_1 = 2$ ，降伏強度 $y_1 = 6$ ，

2 號桿為軟化彈塑性，由兩組完全彈塑性元件並聯組合而成，其材料常數為：

1 號元件：彈性勁度 $k_{21} = 8$ ，降伏強度 $y_{21} = 8$ ，

2 號元件：彈性勁度 $k_{22} = -1$ ，降伏強度 $y_{22} = 4$ ，

根據 2.1.2 節軟化彈塑性模式推導，可得到軟化桿的全部材料常數 $k, \mathbf{y}, \mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{h}$ 。

對於軟化桿件會先進行前置處理，原本的軟化桿件降伏面 \mathbf{f}_2 為：

$$\begin{bmatrix} f_{2t_1} \\ f_{2c_1} \\ f_{2t_2} \\ f_{2c_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} Q_2 - \frac{-8}{7} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{2t_1} \\ \lambda_{2c_1} \\ \lambda_{2t_2} \\ \lambda_{2c_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

定義一個轉換矩陣 \mathbf{T}_2 ：

$$\mathbf{T}_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

將 \mathbf{T}_2 乘以 \mathbf{f}_2 即可完成軟化桿件的前處理得到 $\hat{\mathbf{f}}_2$ ：

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_{2t} \\ \hat{f}_{2c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} Q_2 - \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

軟化桿件前處理後所得到的結構降伏面 $\hat{\mathbf{f}}$ 。對於 \mathbf{f}_{col} ，依照本文3.2.5節的方法一樣會先求得所有的崩塌模態，也就是本文定義的模態陣：

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$



其中的模態向量 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ 則是分別對代表：1拉, 1壓, 2拉, 2壓共四種崩塌模態。(數字表示桿件編號, 拉表示桿件拉力極限狀態, 壓表示桿件壓力極限狀態)

再將模態陣前乘已知的結構降伏面 ($\mathbf{f}_{\text{col}} = \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{f}}$)，即會得到此軟化桁架結構的崩塌面模式：

$$\mathbf{f}_{\text{col}} = \mathbf{N}_{\text{col}}^T \mathbf{F} - \mathbf{Y}_{\text{col}} \leq \mathbf{0}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -1 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

軟化桿件考慮其初始降伏面，將崩塌面 (每一邊代表一種模態機構) 畫在二維載重空間中比較其初始降伏面如圖 3.10；崩塌面的角點資料如表 3.1(a)，角點代表相鄰的兩個邊對應的崩塌模態同時發生，初始降伏面的角點資料如表 3.1(b)。

3.3.2 數值運算例二之二、三桿桁架

考慮一個具有三根桿件的桁架如圖 3.11 所示，各桿件長度均為 L ，1號桿與2號桿之間、及2號桿與3號桿之間的夾角均為 60 度。外力向量 \mathbf{F} 施加在三桿相交的節點上。

1號桿及3號桿為完全彈塑性，其材料常數為：

彈性勁度 $k_1 = k_3 = 2$ ，降伏強度 $y_1 = y_3 = 6$ ，

2號桿為軟化彈塑性，由兩組完全彈塑性元件並聯組合而成，其材料常數為：

1 號元件：彈性勁度 $k_{21} = 8$ ，降伏強度 $y_{21} = 8$ ，



2 號元件: 彈性勁度 $k_{22} = -1$, 降伏強度 $y_{22} = 4$,

根據 2.1.2 節軟化彈塑性模式推導, 可得到軟化桿的全部材料常數 $k, \mathbf{y}, \mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{h}$.

透過跟二桿桁架例題的方法一樣, 先將軟化桿件做前處理得到結構降伏面 $\hat{\mathbf{f}}$, 與原本的結構降伏面 \mathbf{f} (沒經過軟化桿件前處理), 兩者詳細的數值可以如下比較。

若沒將硬化桿件前處理, 所得到原本的結構降伏面 \mathbf{f} 為:

$$\mathbf{f} = \mathbf{N}_G^T \mathbf{F} - \mathbf{H}_G \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Y} \leq \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} f_{1t} \\ f_{1c} \\ f_{2t_1} \\ f_{2c_1} \\ f_{2t_2} \\ f_{2c_2} \\ f_{3t} \\ f_{3c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5625 & 0.1084 \\ 0.5625 & -0.1084 \\ -0.5000 & -0.8660 \\ 0.5000 & 0.8660 \\ -0.0625 & -0.1083 \\ 0.0625 & 0.1083 \\ 0.4375 & -0.3969 \\ -0.4375 & 0.3969 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} - \mathbf{H}_G \begin{bmatrix} \lambda_{1t} \\ \lambda_{1c} \\ \lambda_{2t_1} \\ \lambda_{2c_1} \\ \lambda_{2t_2} \\ \lambda_{2c_2} \\ \lambda_{3t} \\ \lambda_{3c} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 8 \\ 8 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

其中

$$\mathbf{H}_G = \begin{bmatrix} 0.8570 & -0.8750 & -1 & 1 & -0.1250 & 0.1250 & 0.8750 & -0.8750 \\ -0.8750 & 0.8750 & 1 & -1 & 0.1250 & -0.1250 & -0.8750 & 0.8750 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -0.1250 & 0.1250 & -1 & 1 & -1.1250 & 1.1250 & -0.1250 & 0.1250 \\ 0.1250 & -0.1250 & 1 & -1 & 1.1250 & -1.1250 & 0.1250 & -0.1250 \\ 0.8750 & -0.8750 & -1 & 1 & -0.1250 & 0.1250 & 0.8750 & -0.8750 \\ -0.8750 & 0.8750 & 1 & -1 & 0.1250 & -0.1250 & -0.8750 & 0.8750 \end{bmatrix}.$$

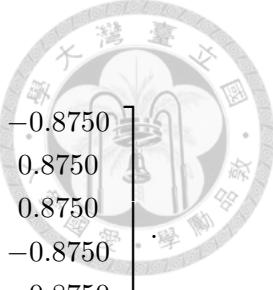
若將軟化桿件前處理後, 所得到的結構降伏面 $\hat{\mathbf{f}}$ 為:

$$\hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{N}}_G^T \mathbf{F} - \hat{\mathbf{H}}_G \boldsymbol{\lambda} - \hat{\mathbf{Y}} \leq \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} f_{1t} \\ f_{1c} \\ \hat{f}_{2t} \\ \hat{f}_{2c} \\ f_{3t} \\ f_{3c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5625 & 0.1084 \\ 0.5625 & -0.1084 \\ -0.4375 & -0.7577 \\ 0.4375 & 0.7577 \\ 0.4375 & -0.3969 \\ -0.4375 & 0.3969 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} - \hat{\mathbf{H}}_G \begin{bmatrix} \lambda_{1t} \\ \lambda_{1c} \\ \lambda_{2t_1} \\ \lambda_{2c_1} \\ \lambda_{2t_2} \\ \lambda_{2c_2} \\ \lambda_{3t} \\ \lambda_{3c} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

其中

$$\hat{\mathbf{H}}_G = \begin{bmatrix} 0.8570 & -0.8750 & -1 & 1 & -0.1250 & 0.1250 & 0.8750 & -0.8750 \\ -0.8750 & 0.8750 & 1 & -1 & 0.1250 & -0.1250 & -0.8750 & 0.8750 \\ -0.8750 & 0.8750 & 1 & -1 & 0.1250 & -0.1250 & -0.8750 & 0.8750 \\ 0.8570 & -0.8750 & -1 & 1 & -0.1250 & 0.1250 & 0.8750 & -0.8750 \\ 0.8750 & -0.8750 & -1 & 1 & -0.1250 & 0.1250 & 0.8750 & -0.8750 \\ -0.8750 & 0.8750 & 1 & -1 & 0.1250 & -0.1250 & -0.8750 & 0.8750 \end{bmatrix}$$



而對於 \mathbf{f}_{col} ，依樣依照本文3.2.5節的方法一樣會先求得所有的崩塌平衡機構 (本文定義的崩塌模態陣):

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_4 & \mathbf{x}_5 & \mathbf{x}_6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

其中的模態向量 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6$ 分別代表:1拉2拉, 1拉3壓, 1壓2壓, 1壓3拉, 2拉3拉, 2壓3壓, 共六種崩塌模態。(數字表示桿件編號, 拉表示桿件拉力極限狀態, 壓表示桿件壓力極限狀態)

再將模態陣前乘已知的結構降伏面 ($\mathbf{f}_{\text{col}} = \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{f}}$)，即會得到此硬化桁架的崩塌面模式:

$$\mathbf{f}_{\text{col}} = \mathbf{N}_{\text{col}}^T \mathbf{F} - \mathbf{Y}_{\text{col}} \leq \mathbf{0}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -1 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 10 \\ 12 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

軟化桿件考慮其初始降伏面，將崩塌面 (每一邊代表一種模態機構) 畫在二維載重空間中比較其初始降伏面如圖 3.12；崩塌面的角點資料如表 3.2(a)，角點代表相鄰的兩個邊對應的崩塌模態同時發生，初始降伏面的角點資料如表 3.2(b)。



3.3.3 數值運算例二之三、橋型桁架

考慮一個具有 10 根桿件的橋形桁架如圖 3.13 所示，其中垂直桿與水平桿長度皆為 L ，斜桿長度皆為 $\sqrt{2}L$ 。有兩個各自獨立的載重 F_1, F_2 分別作用在不同的節點上，假設所有桿件均為拉壓對稱。將 4 號桿及 9 號桿考慮為同樣的軟化桿件，由兩組完全彈塑性元件並聯組合而成，其材料常數為：

1 號元件：彈性勁度 $k_{i_1} = 2$ ，降伏強度 $y_{i_1} = 8$ ，

2 號元件：彈性勁度 $k_{i_2} = 1$ ，降伏強度 $y_{i_2} = 6$ ，

其餘桿件為完全彈塑性，其材料常數為：

其他八組：彈性勁度 $k_i = 1$ ，降伏強度 $y_i = 2$ ，

根據 2.1.2 節軟化彈塑性模式推導，可得到軟化桿的全部材料常數 $k, \mathbf{y}, \mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{h}$ 。

將所受的載重考慮為二維載重空間，考慮只有 F_1, F_2 兩個獨立載重作用的情形，求取其崩塌面 \mathbf{f}_{col} ，透過 3.2 節的崩塌面求解流程，解決軟化桿件前處理，然後多根桿件組成結構模式降伏式，求取降伏演化陣的核空間，找到所對應的崩塌模態，將所求出的結果畫在二維載重空間中，可以畫出一個凸六邊形，每一邊代表一種崩塌模態，分別為 4 拉，4 壓，9 拉，9 壓，5 拉 8 壓，5 壓 8 拉，共有六種崩塌模態。崩塌面的各個角點資料如表 3.3(a) 代表相鄰兩個邊對應的崩塌模態同時發生。在二維載重下求得的崩塌面如下：

$$\mathbf{f}_{\text{col}} = \mathbf{N}_{\text{col}}^T \mathbf{F} - \mathbf{Y}_{\text{col}} \leq \mathbf{0}$$

$$= \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

軟化桿件考慮其初始降伏面，將崩塌面（每一邊代表一種崩塌模態）畫在二維載重空間中比較其初始降伏面如圖 3.14；崩塌面的角點資料如表 3.3(a)，角點代表相鄰的兩個邊對應的崩塌模態同時發生，初始降伏面的角點資料如表 3.3(b)。



3.4 軟化桿件的安全載重空間新解

3.4.1 軟化結構物安全載重空間的考量一

3.2 節所計算出來的軟化結構崩塌載重，在外力大小上是過於保守或是有誤的，而且對應到載重空間中的崩塌面，其所圍出的安全載重區域也會比較小，因此在考量考慮軟化結構物的安全載重空間，嘗試將降伏面式與3.2 節所求出的崩塌面分別圍出的區域加入同時考慮，擴大安全載重空間的範圍。

由於本文希望軟化結構的安全載重空間，能確保是具有與歷時無關的安全載重空間，因此使用前一小節的運算方法，選擇結構發生無限制變形時的載重為崩塌載重，在此情形下，軟化桿件只有彈性段或是進入平台的殘餘應力強度可以分析。而這樣求出的軟化結構物的安全載重空間是偏保守的，為了能擴大此區域，本文認為如果能夠得知部分的結構歷時資訊（在本文裡面指的是內時的資訊），可以加入降伏式所圍出之範圍，取之聯集，則可以在某些程度上的擴大安全載重空間如圖 3.8。

如果知道結構是在初始狀態，沒有經歷過任何塑性變形（內變數為零），抑或如果結構不是在初始狀態，但是可以得到結構的歷時資訊，取其降伏面以及軟化結構崩塌面的聯集來作為可以考量的安全載重空間：

$$\{F|f_{col} \leq 0\} \cup \{F|f \leq 0\}, \quad (3.17)$$

其中

$$f_{col} = \mathbf{N}_{col}^T \mathbf{F} - \mathbf{Y}_{col} \leq 0,$$

$$f = \mathbf{N}_G^T \mathbf{F} - \mathbf{H}_G \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Y} \leq 0.$$

由於 f_{col} 不是內變數 $\boldsymbol{\lambda}$ 的函數，所以 f_{col} 與歷時無關，在其所圍的區域內，加載路徑可以是任意的，且 f_{col} 不會演化，是唯一的；而 f 為內變數 $\boldsymbol{\lambda}$ 的函數，所以 f 會與歷時有關，當外力點超出所圍的區域，則 f 會發生演化，不是唯一的。但是因為軟化結構的特性就是其降伏面的演化會發生內縮的現象，所以假設我們得知其歷時資訊，在不要超過其降伏式所圍出之區域裡面做彈性的加卸載，也一定會是安全的。

結構物在初始狀態 ($\lambda = 0$) 的狀態, 其所對應的即是初始降伏面以及崩塌面兩個分別圍出區域的聯集; 而結構物在非初始狀態 ($\lambda \neq 0$), 但是知道 λ 的狀態, 其所對應的即是接續降伏面以及崩塌面兩個分別圍出區域的聯集。經由這樣的一個考量, 軟化結構物的安全載重空間分成崩塌載重空間以及降伏式所圍出的兩個部分; 考慮聯集區域為安全載重空間, 且存在與歷時有關的部分, 安全載重空間在加載過程還是會演化, 並不是真正的軟化結構物的崩塌面與安全載重空間, 所以不是一個很好的方法。

3.4.2 軟化結構物安全載重空間的考量二

由3.4.1小節的討論可以找到一個適合擴大軟化結構物安全載重空間的考量方案, 但是因為其還是存在某部分是與歷時有關的, 並不能完全達到, 在不管初始狀態、歷時過程, 載重路徑的加載過程, 都是唯一的安全載重空間。

另外本文在分析軟化結構物的崩塌面時, 認為軟化結構物在加載的過程中, 會有可能發生結構物崩塌在我們前面求解的崩塌面以外, 所以本文認為軟化結構物的安全載重空間, 應該可以透過某種機制使其確定結構物達到崩塌模態一定會發生在, 以前分析方法求解出來的崩塌面以外, 而使軟化結構物達成崩塌模態在軟化結構殘餘應力強度分析求解出來的崩塌面之外的機制, 就是結構物各桿件的互制行為。對於軟化桁架桿件進入無限制變形的平台, 其所對應的崩塌機制一定是軟化桿件的殘餘應力強度, 但是對於一整個結構物來說, 因為結構互制的行為必須滿足變形協調律以及平衡律, 所以結構物的崩塌平衡機構是可以找到, 當部分桿件進入平台導致結構物崩塌時, 某些軟化桿件會因為協調律以及平衡律, 其桿件內力以及形變的關係發生在軟化桿件的軟化行為段, 而非軟化桿件的平台, 利用這個結構互制行為, 本文認為可以找到一個與歷時、加載路徑以及初始狀態無關, 唯一而且有擴大的安全載重區域。

想要找出結構互制行為擴大的軟化結構安全載重空間, 也就是比軟化結構物的殘餘應力強度分析還要大的安全載重空間, 我們在針對其軟化桿件降伏式(2.36), 做檢討, 在其求解過程中不像過去強制軟化桿件進入平台的去做分析, 而是將一個軟化桿件重新檢視為兩件元件, 一件是具有平台的正勁度完全彈塑性元件模型, 而另一件則是具有平台的負勁度完全彈塑性元件模型 (選擇具有平台的完全彈塑性模型), 表示這兩件元件在分析上同樣具有發生無限制變形的塑流平台的好處, 而這邊我們希望

發生的結構互制行爲如圖 3.15, 是希望針對正勁度元件達到降伏進入平台, 而負勁度元件維持在負勁度彈性時的這種情況, 求解整體結構的崩塌機構, 找到一個更嚴謹而且有利於分析的安全載重空間。

3.4.3 重新定義軟化結構物的崩塌面與安全載重空間

本文在這邊重新定義安全載重分析空間, 認爲其應該爲一個有界, 單連通的區域, 且另外存在一個對應的位移空間如圖 3.16, 而當結構物的位移空間裡發生無限制變形, 其所對應到的載重區域裡的邊界爲崩塌面, 而所圍出的空間即爲安全載重空間區域如圖 3.17, 在這區域裡面不論其狀態是否爲零值在任意加卸載或是循環卸載都不會發生崩塌。而此安全載重空間的求解機制, 在軟化桿件這邊是需要重新檢視所求得的崩塌模態陣, 並且對應到軟化結構物的位移空間上是否有發生無限制塑流的條件限制去加以判斷, 而剩下的求解過程和方法就和3.2節一樣, 最後如果將整個崩塌面與安全載重空間的求解分析加以整理, 可以歸納畫成一套流程如圖 3.18, 主要是在判斷軟化結構物的崩塌模態時, 不能只以載重空間最內側的崩塌模態去做選擇, 而是利用對應的位移空間去檢視是否選擇了正確的崩塌模態, 剔除內部不會發生的崩塌模態, 找出軟化結構物的崩塌面和安全載重空間的真解。



3.5 數值運算例三、軟化桿架安全載重空間探討

數值運算例三針對軟化桿件變多時,如果透過結構設計,可以因為結構互制的發生,而導致結構物發生崩塌時,某部分的桿件因為互制的效應,導致軟化桿件的崩塌並不會只是在彈性段或是平台,而是進入軟化段,所以在分析上提出過去分析軟化桿件過於保守的問題,除了使用殘餘應力強度分析和結構初始崩塌面所求取的安全載重分析,考慮互制行為進去可以找到一個不管歷時、加載路徑、初始狀態但是絕對安全的承載空間,彰顯軟化桿件利用結構互制的行為。下面兩個例子,加入了比較多的軟化桿件,利用其相對應的位移空間重新去尋找正確的崩塌平衡機構,即崩塌模態,分析探討的安全載重空間,擴大外力的可行承載範圍。

3.5.1 數值運算例三之一、五桿桁架

考慮一個具有 5 根桿件的桁架結構如圖 3.20 所示,其中垂直桿與水平桿長度皆為 L ,斜桿長度皆為 $\sqrt{2}L$ 。有兩個各自獨立的載重 F_1, F_2 分別作用在節點上。

將1號桿、2號桿、3號桿考慮為同樣的軟化桿件,由兩件完全彈塑性元件並聯組合而成,其材料常數為:

1 號元件: 彈性勁度 $k_{i_1} = 5$, 降伏強度 $y_{i_1} = 10\sqrt{2}$,

2 號元件: 彈性勁度 $k_{i_2} = -1$, 降伏強度 $y_{i_2} = 4\sqrt{2}$,

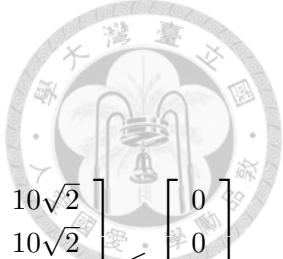
將4號桿、5號桿考慮為同樣的軟化桿件,由兩件完全彈塑性元件並聯組合而成,其材料常數為:

1 號元件: 彈性勁度 $k_{i_1} = 5$, 降伏強度 $y_{i_1} = 10$,

2 號元件: 彈性勁度 $k_{i_2} = -1$, 降伏強度 $y_{i_2} = 6$,

根據2.1.2軟化桿件彈塑性推導,可得到軟化桿件的全部材料常數 $k, \mathbf{y}, \mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{h}$,其組成律關係如圖 3.19。本例考慮 F_1, F_2 兩個獨立載重的情形,依照本文裡第 3 章的方法並加入 3.4 節的觀念和想法去求得其崩塌面模式如參考附錄。

如果使用3.2節的方法使用軟化桿件的殘餘應力強度,其所求得的崩塌載重會過於保守,而加入3.4節的觀念去求解崩塌面,可以找到軟化結構物因為互制行為而得到的安全載重空間,大於軟化桿件殘餘應力強度分析的結果,而且同樣具有與歷時和載重路徑無關的特性。



將1號桿、2號桿、3號桿和4號桿、5號桿先進行前置處理。

1、2、3號桿原本的軟化桿件降伏面 $\mathbf{f} \leq \mathbf{0}$ 為：

$$\begin{bmatrix} f_{t_1} \\ f_{c_1} \\ f_{t_2} \\ f_{c_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} Q_2 - \frac{-5}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{t_1} \\ \lambda_{c_1} \\ \lambda_{t_2} \\ \lambda_{c_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10\sqrt{2} \\ 10\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4、5號桿原本的軟化桿件降伏面 $\mathbf{f} \leq \mathbf{0}$ 為：

$$\begin{bmatrix} f_{t_1} \\ f_{c_1} \\ f_{t_2} \\ f_{c_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} Q_2 - \frac{-5}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{t_1} \\ \lambda_{c_1} \\ \lambda_{t_2} \\ \lambda_{c_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

透過一個轉換矩陣 \mathbf{T}_2 ：

$$\mathbf{T}_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

將 \mathbf{T}_2 乘以 \mathbf{f} 即可完成軟化桿件的前處理得到 $\hat{\mathbf{f}}$ ：

1、2、3號桿為

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_t \\ \hat{f}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} Q_- \begin{bmatrix} 6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4、5號桿為

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_t \\ \hat{f}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} Q_- \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

透過3.2節的崩塌面求解流程，找到降伏演化陣的零核空間，定義出崩塌模態陣，可得到以下崩塌面的

求解

$$\mathbf{f}_{\text{col}} = \mathbf{N}_{\text{col}}^T \mathbf{F} - \mathbf{Y}_{\text{col}} \leq \mathbf{0}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

但是對於這個結構, 此分析是過於保守的, 本例題在 4、5 號桿件進入平台前, 3 號桿件就會進入平台, 當 3 號桿件的進入平台, 會造成下部結構三鉸共線, 導致結構不穩定, 結構物亦形成崩塌, 所以此軟化結構物的分析, 應該加入相對應的位移空間, 並且去找位移空間發生無限制變形的邊界, 所對應到在外力空間的才是真正的崩塌面。

$$\mathbf{f}_{\text{col}} = \mathbf{N}_{\text{col}}^T \mathbf{F} - \mathbf{Y}_{\text{col}} \leq \mathbf{0}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

將此軟化結構物的崩塌面、初始降伏面, 以及考慮結構互制新求得的崩塌面畫在二維載重空間中如圖 3.21, 初始降伏面的角點資料如表 3.4(a), 崩塌面的角點資料如表 3.4(b), 考慮結構互制求得的崩塌面角點資料如表 3.4(c)。可以觀察到軟化結構物的降伏面會具有內縮的性質, 求出的崩塌面會在初始降伏面裡面, 但是加入結構設計的考量, 可以透過本文 3.4.3 節提到的方法, 畫出軟化結構物所對應的位移空間如圖 3.22, 初始降伏面的位移角點資料如表 3.5(a), 崩塌面的位移角點資料如表 3.5(b), 當在位移空間達到發生無限塑流的邊界, 其所對應在載重空間, 即是一個不考慮歷時、載重路徑或是循環加卸載的崩塌面, 且擴大可供分析使用的安全載重空間, 圖 3.23 比較此軟化結構物在不同的分析情形, 得到不同的崩塌機構, 以及所擴大的安全載重空間, 圖 3.24 比較此軟化結構物的桿件在使用殘餘應力強度分析或是考慮結構互制的情形, 各桿件的應變應力關係。

3.5.2 數值運算例三之二、九桿桁架

考慮一個具有 9 根桿件的桁架結構如圖 3.26 所示, 其中垂直桿與水平桿長度皆為 L , 斜桿長度皆為 $\sqrt{2}L$ 。有兩個各自獨立的載重 F_1, F_2 分別作用在節點上。

將 2 號桿、8 號桿考慮為同樣的軟化桿件, 由兩根完全彈塑性元件並聯組合而成, 其材料常數為:

1 號元件: 彈性勁度 $k_{i_1} = 14$, 降伏強度 $y_{i_1} = 28$,

2 號元件: 彈性勁度 $k_{i_2} = -2$, 降伏強度 $y_{i_2} = 6$,

將 4 號桿、6 號桿考慮為同樣的軟化桿件, 由兩根完全彈塑性元件並聯組合而成, 其材料常數為:



1 號元件: 彈性勁度 $k_{i_1} = 14$, 降伏強度 $y_{i_1} = 14\sqrt{2}$,

2 號元件: 彈性勁度 $k_{i_2} = -2$, 降伏強度 $y_{i_2} = 4\sqrt{2}$,

將1號桿、3號桿、5號桿、7號桿、9號桿考慮為同樣的軟化桿件, 由兩根完全彈塑性元件並聯組合而成, 其材料常數為:

1 號元件: 彈性勁度 $k_{i_1} = 14$, 降伏強度 $y_{i_1} = 14$,

2 號元件: 彈性勁度 $k_{i_2} = -2$, 降伏強度 $y_{i_2} = 4$,

根據2.1.2軟化桿件彈塑性推導, 可得到軟化桿件的全部材料常數 $k, \mathbf{y}, \mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{h}$, 其組成律關係如圖 3.25。本例考慮 F_1, F_2 兩個獨立載重的情形, 依照本文裡第3章的方法並加入3.4節的觀念和想法去求得其崩塌面模式如參考附錄。

如果使用3.2節的方法使用軟化桿件的殘餘應力, 其所求得的崩塌載重會過於保守, 而加入3.4節的觀念去求解崩塌面, 可以找到軟化結構物因為互制行為而得到的安全載重空間, 大於軟化桿件殘餘應力強度分析的結果, 而且同樣具有與歷時和載重路徑無關的特性。

加入桿件前處理, 強迫求解時形成崩塌機構的軟化桿件進入塑流平台:

2、8號桿件進行桿件前處理為, 其降伏式為

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_t \\ \hat{f}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} Q_- \begin{bmatrix} 22 \\ 22 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4、6號桿件進行桿件前處理為, 其降伏式為

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_t \\ \hat{f}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} Q_- \begin{bmatrix} 10\sqrt{2} \\ 10\sqrt{2} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1、3、5、7、9號桿件進行桿件前處理, 其降伏式為

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_t \\ \hat{f}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} Q_- \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

然後透過3.2節的崩塌面求解流程, 找到降伏演化陣的零核空間, 定義出崩塌模態陣, 可得到以下崩塌面的求解:

$$\mathbf{f}_{\text{col}} = \mathbf{N}_{\text{col}}^T \mathbf{F} - \mathbf{Y}_{\text{col}} \leq \mathbf{0}$$



$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

但是在這邊如果針對 F_1 的載重對於整體結構的影響來說，在材料桿件使用上，8 號桿的殘留應力強度是較大的，也就是說，就整體結構加卸載過程分析，8 號桿件是會比其他軟化桿件更早進入平台，達到結構崩塌的機構，而這邊如果對於軟化結構都採取較保守的殘留應力強度分析，會變得過於保守，如果能夠透過相對應的位移空間發生無限制變形時，針對互制的關係找到正確的崩塌平衡機構，求得更大的安全載重空間，且此安全載重空間同樣包含了與歷時和加載路徑無關的優良特性。

$$\mathbf{f}_{\text{col}} = \mathbf{N}_{\text{col}}^T \mathbf{F} - \mathbf{Y}_{\text{col}} \leq \mathbf{0}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 22 \\ 22 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

將此軟化結構物的崩塌面、初始降伏面，以及考慮結構互制新求得的崩塌面畫在二維載重空間中如圖 3.27，初始降伏面的角點資料如表 3.6(a)，崩塌面的角點資料如表 3.6(b)，考慮結構互制求得的崩塌面角點資料如表 3.6(c)。可以觀察到軟化結構物的降伏面會具有內縮的性質，求出的崩塌面會在初始降伏面裡面，但是加入結構設計的考量，可以透過本文 3.4.3 節提到的方法，畫出軟化結構物所對應的位移空間如圖 3.28，初始降伏面的位移角點資料如表 3.7(a)，崩塌面的位移角點資料如表 3.7(b)，當在位移空間達到發生無限塑流的邊界，其所對應在載重空間，即是一個不考慮歷時、載重路徑或是循環加卸載的崩塌面，且擴大可供分析使用的安全載重空間，圖 3.29 比較此軟化結構物在不同的分析情形，得到不同的崩塌機構，以及所擴大的安全載重空間，圖 3.30 比較此軟化結構物的桿件在使用殘餘應力強度分析或是考慮結構互制的情形，各桿件的應變應力關係。

由此例題的結果可以看出，雖然某種程度上軟化桿件的分析，使用殘餘應力強度是比較保守但偏離事實的選項，但是如果加入結構設計的因素去考量，可以利用結構的互制行為，在使用軟化桿件分析求解上，增加其可使用的安全載重空間。



3.6 小結

本章節前半部分對於軟化桁架結構物的崩塌載重, 去定義跟加以探討, 並闡述片段線性多降伏面彈塑性模型的塑流平台在求解崩塌載重的好處, 加入硬軟化桿件的前置處理, 然後利用與歷時無關的特性, 列出求解條件還有限制, 找出降伏演化矩陣的零核空間, 得到結構物的崩塌面與安全載重空間。並利用數值運算例二呈現本文探討分析的結果, 利用 3.2 節的演算過程, 找到軟化桿件的描述, 層次提升至結構層次, 軟化桿件加入桿件前處理, 然後找出降伏演化陣 (本文裡是軟化演化陣) 的零核空間, 找出結構降伏式對應的平衡機構陣, 即崩塌模態陣, 求取軟化結構的崩塌面。

而本章的後半部分對於軟化結構物的分析, 為利用軟化桿件的塑流平台加入了桿件的前處理, 所以在求解軟化結構物的崩塌載重時, 其所對應到軟化桿件的殘餘應力強度有分析過於保守偏離事實的問題, 以致於軟化結構物分析可行的安全載重區域較小, 在此本文加入相對應的位移空間, 重新定義結構物的崩塌面與安全載重空間, 然後提出利用結構互制的想法, 認為軟化結構物在求解崩塌面的方法上應該可以修正調整, 找出軟化結構物更大的安全載重空間。數值運算例三則是利用 3.4 節的安全載重空間定義, 嘗試去擴大過去求解分析軟化結構物更大的崩塌空間, 並嘗試修改過去求解裡將軟化桿件因為進入平台所對應的殘留應力過於保守的問題, 嘗試打開軟化桿件前置處理, 分別針對其進入平台去找崩塌模態, 還有檢視其相對應的位移空間, 透過這個例子, 找出軟化桿件因為結構互制的效應所能擴大結構物的絕對安全載重區域的分析。



第 4 章 結論與未來展望

4.1 結論

結合過去前人的研究成果，配合修正更改的理論與演算法的推導，成功使用力學模型，正確描述軟化結構物的力學行為，找到軟化結構物的初始降伏面、接續降伏面，以及最後崩塌載重所圍成的崩塌面，並打破過去使用殘餘應力強度分析情形的限制，擴大了工程師設計上可以考量的安全區域，並經由一些數值例子結果描述說明本文的方法。以下將總結本文的研究內容：

1. 利用兩個以上不同的片段線性多降伏平面彈塑性模型的並聯，可以組合成一組片段多線性具有降伏平台的模型，來描述軸力桿件軟化的力學行為，本文成功提供異於過去只使用簡單的完全彈塑性彈塑性模型並聯來描述材料各種力學行為。並且透過其並聯模式的機制，除了得以描述硬軟化行為的組成律，再透過機動律與平衡律，將桿件層次提升到結構層次的分析，分析各桿件的內力空間組合出在外力空間的初始與接續降伏面，以及與歷時無關的崩塌模態與崩塌載重。
2. 透過修正過去內變數 $\lambda \geq 0$ ，互補三元中耗散非負的規定，在滿足熱力學第一定律能量守恆，以及熱力學第二定律封閉系統內的熵值變化量恆大於等於零，提出了將一軟化桿件視為一封閉系統；為了描述此軟化桿件的組成律關係，利用其系統內其一構成元件使用耗散非正的概念，另一元件為能為耗散非負，但是整個桿件仍為耗散非負，滿足熱力學第二定律。同時在桿件系統再經過內變數（內時）定義的修正，也讓軟化桿件模型滿足了正交塑流，造成可行解有正定凸的情況，也可以建立出整個能量位勢的概念，了解軟化桿件承受加卸載時其儲存耗散的能量情形。

3. 對於軟化結構物的極限分析，本文重新清楚定義與解釋軟化結構物的崩塌載重，因為軟化結構其桿件最大外力所對應的並不是我們文章裡的塑流平台，若對於軟化結構物在外力空間上所做的歷時分析，因為外力是以增量逐步加載的方式去找尋，與利用位移空間所去尋找的崩塌載重是不一樣的，而在這邊我們重新對於其所找出不同的崩塌情形去分析其所找出的崩塌情形是否有安全疑慮，又或者是否太過保守，對此利用本文的演算方法，能找出崩塌時的結構體因其互制行為而優於過去只使用殘餘應力強度分析的安全載重範圍，提高了工程師分析設計的載重空間，增加材料使用的效率。

4.2 未來展望

本文雖然已達到一定程度的研究成果，但對於桿件硬軟化，以及其降伏面的演化至崩塌載重的定義求解，不論是在理論推導方面或是演算方法上都還有許多可以討論以及改進的空間，在此提出以下的幾點建議：

1. 本文所提出的方法，目前是應用處理在二力桿件桁架結構的問題上，若想將其應用至平面或是空間剛架結構上，則就必須加入考慮軸力彎矩兩方向互制的廣義塑鉸模式，此時的材料彈塑性組成律會分別是二維或是三維的空間上，而為了要描述這樣的組成律，其可行的研究方向可朝將軸彎降伏曲面簡化為片段線性多降伏平面模型去作探討。
2. 在實務的工程上，結構的構件數目往往是相當龐大的，且需考慮的獨立的載重種類也會大幅增加，因此，嘗試應用本文所提出的演算規則是否在大型結構物上的演算也具有良好的計算效率，以及其數值的精度是否會對於崩塌面、安全載重空間上的求解造成影響。
3. 軟化桿件具有其接續降伏面會往內縮的性質，故在外力空間上其與歷時無關的崩塌載重分析，會得到的結果為軟化桿件其殘餘應力所做的分析一樣而過度保守，故本文加入某些情形下當結構發生崩塌機構時，所產生的互制行為，進而擴大了軟化結構物可分析使用的安全載重空間，但是如何快速有效地求解在外力空間某些因結構互制而擴大的安全載重空間，則是未來可以討論或是更精進的一個問題。

- 
4. 對於大型結構物的分析，是否可以透過文章內所提出的彈塑性組成模型，針對其彈塑開關的地方，加入布林代數的理論，透過電腦程式演算代數規則的撰寫，可以加速對於桿件數很多（高維度的載重空間）的結構做出結構分析或是輕易求得結構不同的崩塌模態。
 5. 考慮其他塑性分析問題時的安全載重空間，如；安定分析、交互塑性等，根據不同的結構或是工程情形去考量評估合適的安全載重空間。



參考文獻

- [1] Borges, L., Zouain, N., and Huespe, A., Nonlinear optimization procedure for limit analysis, *European Journal of Mechanics, A/solids*, Vol.15, No. 3, pp.487-512, 1996.
- [2] Borkowski, A., On dual approach to piecewise-linear elasto-plasticity. Part I: Continuum models, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*, Vol.52, No.4, pp.329-343, 2004.
- [3] Borkowski, A., On dual approach to piecewise-linear elasto-plasticity. Part II: Discrete models, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*, Vol.52, No.4, pp.345-352, 2004.
- [4] Chen, W. F. and Han, D. J., *Plasticity for Structural Engineers*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [5] Chen, H. F. and Shu, D. W., A numerical method for lower bound limit analysis of 3-D structures with multi-loading systems, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol.76, No.2 pp.105-112, 1999.
- [6] Chen, H. F., Liu, Y. H., Cen, Z. Z. and Xu, B. Y., On the solution of limit load and reference stress of 3-D structures under multi-loading systems, *Engineering Structures*, Vol.21, No.6, pp.530-537, 1999.
- [7] Cocchetti, G. and Maier, G., Elatic-plastic and limit-state analyses of frames with softening plastic-hinge models by mathematical programming, *International Journal of Solids and Strucures*, Vol.40, No.25, pp.7219-7244, 2003.

- [8] Cohn, M. Z. and Maier, G., eds., *Engineering Plasticity by Mathematical Programming - Proceedings of the NATO Advanced Study Institute*, Pergamon Press, New York, 1977.
- [9] Cohon, J. L., *Multiobjective Programming and Planning*, Academic Press, New York, 1978.
- [10] Herskovits, J., Leontiev, A., Dias, G. and Santos, G., Contact shape optimization: a bilevel programming approach, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.20, No.3, pp.214-221, 2000.
- [11] Hodge, P. G., Limit analysis with multiple load parameters, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.6, No.5, pp.661-675, 1970.
- [12] Jirásek, M. and Bažant, Z.P., *Inelastic Analysis of Structures*, Wiley, Chichester, England, 2002.
- [13] Kaneko, I., A parametric linear complementarity problem involving derivatives, *Mathematical Programming*, Vol.15, No.1, pp.146-154, 1978.
- [14] Kaneko, I., Piecewise linear elastic-plastic analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.14, No.5, pp.757-767, 1979.
- [15] Kaneko, I., Complete solutions for a class of elastic-plastic structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.21, No.2, pp.193-209, 1980.
- [16] Maier, G., A quadratic programming approach for certain classes of non-linear structural problems, *Meccanica*, Vol.3, No.2, pp.121-130, 1968.
- [17] Maier, G., A matrix structural theory of piecewise linear elastoplasticity with interacting yield planes, *Meccanica*, Vol.1, No.5, pp.54-66, 1970.

- [18] Maier, G., Grierson, D.E. and Best, M.J., Mathematical programming methods for deformation analysis at plastic collapse, *Computers & Structures*, Vol.7, No.5, pp.599-612, 1977.
- [19] Maier, G. and Munro, J., Mathematical programming methods in engineering plastic analysis, *Applied Mechanics Reviews*, ASME, Vol.35, No.12, pp.1631-1643, 1982.
- [20] Maier, G., and Lloyd-Smith, D., Mathematical programming applications to engineering plastic analysis: update to November 1985, *Applied Mechanics Update 1986*, C.R. Steele and G.S. Springer eds., ASME, New York, pp.377-383, 1986.
- [21] Maier, G. Giacomini, S. and Paterlini, F., Combined elastoplastic and limit analysis via restricted basis linear programming, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.19, No.1, pp.21-48, 1979.
- [22] Maier, G., Garvelli, V. and Cocchetti, G., On direct methods for shakedown and limit analysis, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol.19, pp.79-100, 2000.
- [23] Muscat, M., Mackenzie, D. and Hamilton, R., A work criterion for plastic collapse, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol.80, No.1, pp.49-58, 2003.
- [24] Nafday, A. M., Corotis, R. B. and Cohon, J. L., Multiparametric limit analysis of frames. I: model, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.114, No.3, pp.377-386, 1988.
- [25] Nafday, A. M., Corotis, R. B. and Cohon, J. L., Multiparametric limit analysis of frames. II: computations, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.114, No.3, pp.387-403, 1988.
- [26] Reinicke, K. M., Ralston, T. D., Plastic limit analysis with an anisotropic, parabolic yield function, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol.14, No.3, pp.147-154, 1977.

- [27] Staat, M. and Heitzer, M., LISA - a European project for FEM-based limit and shakedown analysis, *Nuclear Engineering and Design*, Vol.206, No.2-3, pp.151-166, 2001.
- [28] Sewell, M. J., *Maximum and Minimum Principles - a Unified Approach, with Application*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1986.
- [29] Tangaramvong, S. and Tin-Loi, F., Limit analysis of strain softening steel frames under pure bending, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol.63, No.9, pp.1151-1159, 2007.
- [30] Tangaramvong, S. and Tin-Loi, F., A complementarity approach for elastoplastic analysis of strain softening frames under combined bending and axial force, *Engineering Structures*, Vol.29, No.5, pp.742-753, 2007.
- [31] Tangaramvong, S. and Tin-Loi, F., Simultaneous ultimate load and deformation analysis of strain softening frames under combined stresses, *Engineering Structures*, Vol.30, No.3, pp.664-674, 2008.
- [32] Tangaramvong, S. and Tin-Loi, F., Limit analysis of elastoplastic frames considering 2nd-order geometric nonlinearity and displacement constraints, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.51, No.3, pp.179-191, 2009.
- [33] Tin-Loi, F., A yield surface linearization procedure in limit analysis, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, Vol.18, No.1, pp.135-149, 1990.
- [34] Tin-Loi, F., and Lo, Y. F., Collapse limit surface generation for multiparametric loading, *Applied Mathematical Modelling*, Vol.16, pp.491-497, 1992.
- [35] Tin-Loi, F. and Xia, S. H., Nonholonomic elastoplastic analysis involving unilateral frictionless contact as a mixed complementarity problem, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.190, No.35-36, pp.4551-4568, 2001.

- [36] Tin-Loi, F. and Xia, S. H., Holonomic softening: Models and analysis, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, Vol.29, No.1, pp.65-84, 2001.
- [37] 宋信璋, 軟化彈塑性桁架的崩塌載重, 國立台灣大學土木工程學系碩士論文, 2007.
- [38] 郭建呈, 彈塑性結構載重空間崩塌面探討, 國立台灣大學土木工程學系碩士論文, 2010.
- [39] 吳昱霆, 硬軟化桁架崩塌面分析, 國立台灣大學土木工程學系碩士論文, 2012.



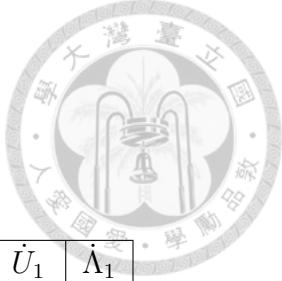


表 2.1: 數值運算例一之一、1 號元件變率資料

	\dot{Q}_1	\dot{Q}_{1a}	\dot{Q}_{1b}	\dot{q}_1	\dot{q}_1^e	\dot{q}_1^p	$\dot{\lambda}_{1t}$	$\dot{\lambda}_{1c}$	\dot{W}_1	\dot{U}_1	$\dot{\Lambda}_1$
A → B	2	2	0	2	2	0	0	0	4	4	0
B → C	2	2	0	2	2	0	0	0	8	8	0
C → D	-4	0	-4	2	-4	6	6	0	0	-24	24
D → E	-8	0	-8	4	-8	12	12	0	-32	-80	48
E → F	-4	-4	0	-4	-4	0	0	0	48	48	0
F → G	-4	-4	0	-4	-4	0	0	0	64	64	0
G → H	4	0	4	-2	4	-6	0	6	24	0	24
H → I	4	0	4	-2	4	-6	0	6	16	-8	24
I → J	4	0	4	-2	4	-6	0	6	8	-16	24
J → K	4	4	0	4	4	0	0	0	0	0	0

表 2.2: 數值運算例一之一、1 號元件資料

	Q_1	Q_{1a}	Q_{1b}	q_1	q_1^e	q_1^p	λ_{1t}	λ_{1c}	f_{1t}	f_{1c}	W_1	U_1	Λ_1
A	0	0	0	0	0	0	0	0	-4	-4	0	0	0
B	2	2	0	2	2	0	0	0	-2	-6	4	4	0
C	4	4	0	4	4	0	0	0	0	-8	12	12	0
D	0	4	-4	6	0	6	6	0	0	-8	12	-12	24
E	-8	4	-12	10	-8	18	18	0	0	-8	-20	-92	72
F	-12	0	-12	6	-12	18	18	0	-4	-4	28	-44	72
G	-16	-4	-12	2	-16	18	18	0	-8	0	92	20	72
H	-12	-4	-8	0	-12	12	18	6	-8	0	116	20	96
I	-8	-4	-4	-2	-8	6	18	12	-8	0	132	12	120
J	-4	-4	0	-4	-4	0	18	18	-8	0	140	-4	144
K	0	0	0	0	0	0	18	18	-4	-4	140	-4	144

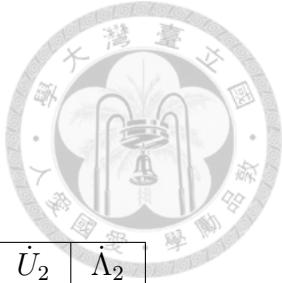


表 2.3: 數值運算例一之一、2 號元件變率資料

	\dot{Q}_2	\dot{Q}_{2a}	\dot{Q}_{2b}	\dot{q}_2	\dot{q}_2^e	\dot{q}_2^p	$\dot{\lambda}_{2t}$	$\dot{\lambda}_{2c}$	\dot{W}_2	\dot{U}_2	$\dot{\Lambda}_2$
A → B	1	1	0	2	2	0	0	0	2	2	0
B → C	1	1	0	2	2	0	0	0	4	4	0
C → D	1	1	0	2	2	0	0	0	6	6	0
D → E	8	0	8	4	16	-12	-12	0	44	80	-36
E → F	-2	-2	0	-4	-4	0	0	0	-36	-36	0
F → G	-2	-2	0	-4	-4	0	0	0	-28	-28	0
G → H	-1	-1	0	-2	-2	0	0	0	-12	-12	0
H → I	-1	-1	0	-2	-2	0	0	0	-10	-10	0
I → J	-4	0	-4	-2	-8	6	0	-6	-2	16	-18
J → K	2	2	0	4	4	0	0	0	12	12	0

表 2.4: 數值運算例一之一、2 號元件資料

	Q_2	Q_{2a}	Q_{2b}	q_2	q_2^e	q_2^p	λ_{2t}	λ_{2c}	f_{2t}	f_{2c}	W_2	U_2	Λ_2
A	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	-3	0	0	0
B	1	1	0	2	2	0	0	0	-2	-4	2	2	0
C	2	2	0	4	4	0	0	0	-1	-5	6	6	0
D	3	3	0	6	6	0	0	0	0	-6	12	12	0
E	11	3	8	10	22	-12	-12	0	0	-6	56	92	-36
F	9	1	8	6	18	-12	-12	0	-2	-4	20	56	-36
G	7	-1	8	2	14	-12	-12	0	-4	-2	-8	28	-36
H	6	-2	8	0	12	-12	-12	0	-5	-1	-20	16	-36
I	5	-3	8	-2	10	-12	-12	0	-6	0	-30	6	-36
J	1	-3	4	-4	2	-6	-12	-6	-6	0	-32	22	-54
K	3	-1	4	0	6	-6	-12	-6	-4	-2	-20	34	-54

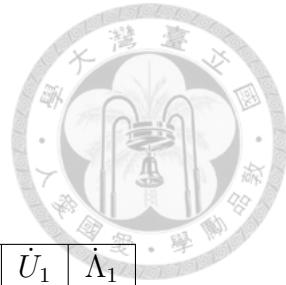


表 2.5: 數值運算例一之二、1 號元件變率資料

	\dot{Q}_1	\dot{Q}_{1a}	\dot{Q}_{1b}	\dot{q}_1	\dot{q}_1^e	\dot{q}_1^p	$\dot{\lambda}_{1t}$	$\dot{\lambda}_{1c}$	\dot{W}_1	\dot{U}_1	$\dot{\Lambda}_1$
A → B	6	6	0	2	2	0	0	0	12	12	0
B → C	6	6	0	2	2	0	0	0	24	24	0
C → D	0	0	0	2	0	2	2	0	24	0	24
D → E	0	0	0	4	0	4	4	0	48	0	48
E → F	-12	-12	0	-4	-4	0	0	0	0	0	0
F → G	-12	-12	0	-4	-4	0	0	0	48	48	0
G → H	0	0	0	-2	0	-2	0	2	24	0	24
H → I	0	0	0	-2	0	-2	0	2	24	0	24
I → J	0	0	0	-2	0	-2	0	2	24	0	24
J → K	12	12	0	4	4	0	0	0	0	0	0

表 2.6: 數值運算例一之二、1 號元件資料

	Q_1	Q_{1a}	Q_{1b}	q_1	q_1^e	q_1^p	λ_{1t}	λ_{1c}	f_{1t}	f_{1c}	W_1	U_1	Λ_1
A	0	0	0	0	0	0	0	0	-12	-12	0	0	0
B	6	6	0	2	2	0	0	0	-6	-18	12	12	0
C	12	12	0	4	4	0	0	0	0	-24	36	36	0
D	12	12	0	6	4	2	2	0	0	-24	60	36	24
E	12	12	0	10	4	6	6	0	0	-24	108	36	72
F	0	0	0	6	0	6	6	0	-12	-12	108	36	72
G	-12	-12	0	2	-4	6	6	0	-24	0	156	84	72
H	-12	-12	0	0	-4	4	6	2	-24	0	180	84	96
I	-12	-12	0	-2	-4	2	6	4	-24	0	204	84	120
J	-12	-12	0	-4	-4	0	6	6	-24	0	228	84	144
K	0	0	0	0	0	0	6	6	-12	-12	228	84	144

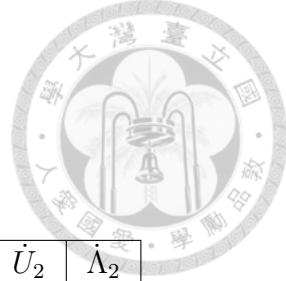


表 2.7: 數值運算例一之二、2 號元件變率資料

	\dot{Q}_2	\dot{Q}_{2a}	\dot{Q}_{2b}	\dot{q}_2	\dot{q}_2^e	\dot{q}_2^p	$\dot{\lambda}_{2t}$	$\dot{\lambda}_{2c}$	\dot{W}_2	\dot{U}_2	$\dot{\Lambda}_2$
A → B	-3	-3	0	2	2	0	0	0	-6	-6	0
B → C	-3	-3	0	2	2	0	0	0	-12	-12	0
C → D	-3	-3	0	2	2	0	0	0	-18	-18	0
D → E	0	0	0	4	0	4	-4	0	-36	0	-36
E → F	6	6	0	-4	-4	0	0	0	12	12	0
F → G	6	6	0	-4	-4	0	0	0	-12	-12	0
G → H	3	3	0	-2	-2	0	0	0	-12	-12	0
H → I	3	3	0	-2	-2	0	0	0	-18	-18	0
I → J	0	0	0	-2	0	-2	0	-2	-18	0	-18
J → K	-6	-6	0	4	4	0	0	0	12	12	0

表 2.8: 數值運算例一之二、2 號元件資料

	Q_2	Q_{2a}	Q_{2b}	q_2	q_2^e	q_2^p	λ_{2t}	λ_{2c}	f_{2t}	f_{2c}	W_2	U_2	Λ_2
A	0	0	0	0	0	0	0	0	-9	-9	0	0	0
B	-3	-3	0	2	2	0	0	0	-6	-12	-6	-6	0
C	-6	-6	0	4	4	0	0	0	-3	-15	-18	-18	0
D	-9	-9	0	6	6	0	0	0	0	-18	-36	-36	0
E	-9	-9	0	10	6	4	-4	0	0	-18	-72	-36	-36
F	-3	-3	0	6	2	4	-4	0	-6	-12	-60	-24	-36
G	3	3	0	2	-2	4	-4	0	-12	-6	-72	-36	-36
H	6	6	0	0	-4	4	-4	0	-15	-3	-84	-48	-36
I	9	9	0	-2	-6	4	-4	0	-18	0	-102	-66	-36
J	9	9	0	-4	-6	2	-4	-2	-18	0	-120	-66	-54
K	3	3	0	0	-2	2	-4	-2	-12	-6	-108	-54	-54



表 2.9: 數值運算例一、軟化桿件變率資料

	$\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2$	$\dot{q} = \dot{q}_1 = \dot{q}_2$	$\dot{W} = \dot{W}_1 + \dot{W}_2$	$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$	$\dot{\Lambda} = \dot{\Lambda}_1 + \dot{\Lambda}_2$
A → B	3	2	6	6	$0 = 0 + 0$
B → C	3	2	12	12	$0 = 0 + 0$
C → D	-3	2	6	-18	$24 = 24 + 0$
D → E	0	4	12	0	$12 = 48 + (-36)$
E → F	-6	-4	12	12	$0 = 0 + 0$
F → G	-6	-4	36	36	$0 = 0 + 0$
G → H	3	-2	12	-12	$24 = 24 + 0$
H → I	3	-2	6	-18	$24 = 24 + 0$
I → J	0	-2	6	0	$6 = 24 + (-18)$
J → K	6	4	12	12	$0 = 0 + 0$

表 2.10: 數值運算例一、軟化桿件資料

	$Q = Q_1 + Q_2$	$q = q_1 = q_2$	$W = W_1 + W_2$	$U = U_1 + U_2$	$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$
A	0	0	0	0	$0 = 0 + 0$
B	3	2	6	6	$0 = 0 + 0$
C	6	4	18	18	$0 = 0 + 0$
D	3	6	24	0	$24 = 24 + 0$
E	3	10	36	0	$36 = 72 + (-36)$
F	-3	6	48	12	$36 = 72 + (-36)$
G	-9	2	84	48	$36 = 72 + (-36)$
H	-6	0	96	36	$60 = 96 + (-36)$
I	-3	-2	102	18	$84 = 120 + (-36)$
J	-3	-4	108	18	$90 = 144 + (-54)$
K	3	0	120	30	$90 = 144 + (-54)$



表 3.1: 數值運算例二之一、二桿軟化桁架結構崩塌面、降伏面角點資料

(a) \mathbf{f}_{col}		(b) \mathbf{f}	
F_1	F_2	F_1	F_2
-5	$-\sqrt{3}$	$\frac{13}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
-1	$-5\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{13}{2}\sqrt{3}$
5	$\sqrt{3}$	$-\frac{13}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
1	$5\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{13}{2}\sqrt{3}$

表 3.2: 數值運算例二之二、三桿軟化桁架結構崩塌面、降伏面角點資料

(a) \mathbf{f}_{col}		(b) \mathbf{f}	
F_1	F_2	F_1	F_2
5	$5\sqrt{3}$	-9.8447	4.2655
11	$-\sqrt{3}$	-11.2007	-2.7710
7	$-5\sqrt{3}$	3.5003	-11.2588
-5	$-5\sqrt{3}$	9.8447	-4.2655
-11	$\sqrt{3}$	11.2007	2.7710
-7	$5\sqrt{3}$	-3.5003	11.2588

表 3.3: 數值運算例二之三、橋型軟化桁架結構崩塌面、降伏面角點資料

(a) \mathbf{f}_{col}		(b) \mathbf{f}	
F_1	F_2	F_1	F_2
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	3	-3
$2\sqrt{3}$	$-\frac{3}{2}\sqrt{3}$	-0.4	-2.8
$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$	-2.8	-0.4
$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-3	3
$-2\sqrt{3}$	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	0.4	2.8
$-\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	2.8	0.4



表 3.4: 數值運算例三之一、五桿軟化桁架結構崩塌面、降伏面角點資料

(a) \mathbf{f}		(b) \mathbf{f}_{col}		(c) \mathbf{f}_{col} (考慮結構互制)	
F_1	F_2	F_1	F_2	F_1	F_2
$8\sqrt{2}$	$8\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$
$8\sqrt{2}$	$-8\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$	$-4\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$	$-6\sqrt{2}$
$-8\sqrt{2}$	$-8\sqrt{2}$	$-6\sqrt{2}$	$-4\sqrt{2}$	$-6\sqrt{2}$	$-6\sqrt{2}$
$-8\sqrt{2}$	$8\sqrt{2}$	$-6\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$-6\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$

表 3.5: 數值運算例三之一、五桿軟化桁架結構崩塌面對應之位移空間角點資料

(a) \mathbf{f}		(b) \mathbf{f}_{col} (考慮結構互制)	
u_1	u_2	u_1	u_2
$2\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$8\sqrt{2}$
$2\sqrt{2}$	$-4\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$-8\sqrt{2}$
$-2\sqrt{2}$	$-4\sqrt{2}$	$-4\sqrt{2}$	$-8\sqrt{2}$
$-2\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$-4\sqrt{2}$	$8\sqrt{2}$

表 3.6: 數值運算例三之二、九桿軟化桁架結構崩塌面、降伏面角點資料

(a) \mathbf{f}		(b) \mathbf{f}_{col}		(c) \mathbf{f}_{col} (考慮結構互制)	
F_1	F_2	F_1	F_2	F_1	F_2
24	12	20	10	22	10
24	-12	20	-10	22	-10
-24	-12	-20	-10	-22	-10
-24	12	-20	10	-22	10

表 3.7: 數值運算例三之二、九桿軟化桁架結構崩塌面對應之位移空間角點資料

(a) \mathbf{f}		(b) \mathbf{f}_{col} (考慮結構互制)	
u_1	u_2	u_1	u_2
6	1	9	2
6	-1	9	-2
-6	-1	-9	-2
-6	1	-9	2

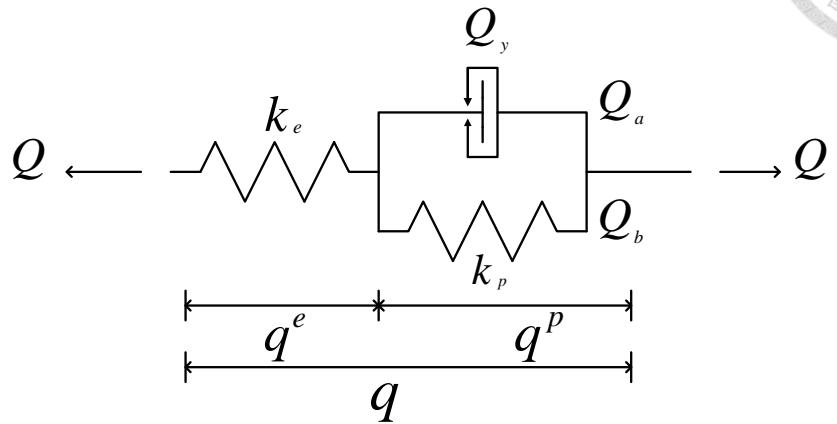


圖 2.1: 片段線性降伏面機械模型

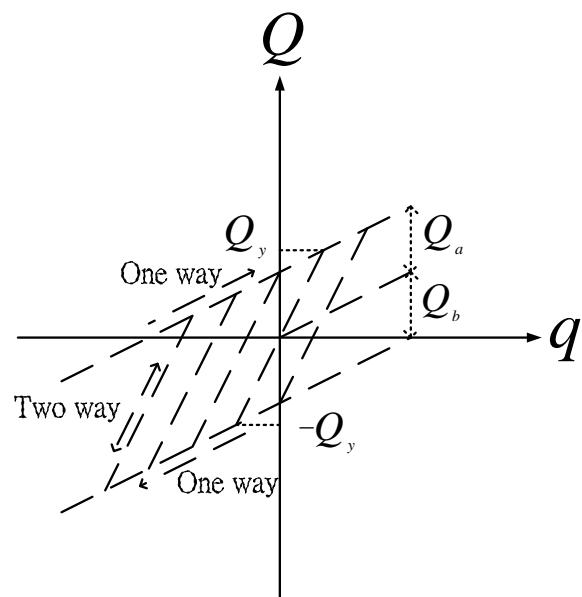


圖 2.2: 片段線性降伏面組成模式

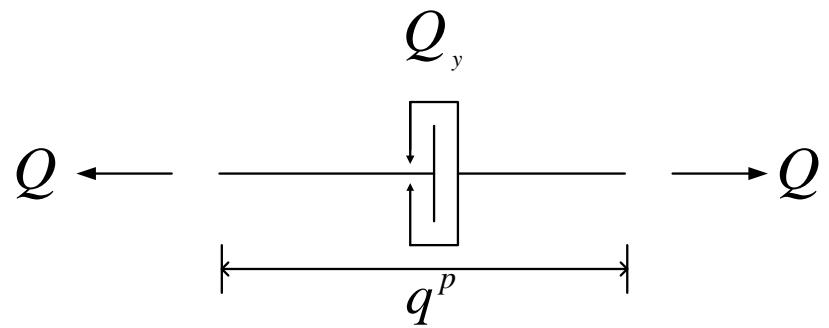


圖 2.3: 剛塑性機械模型

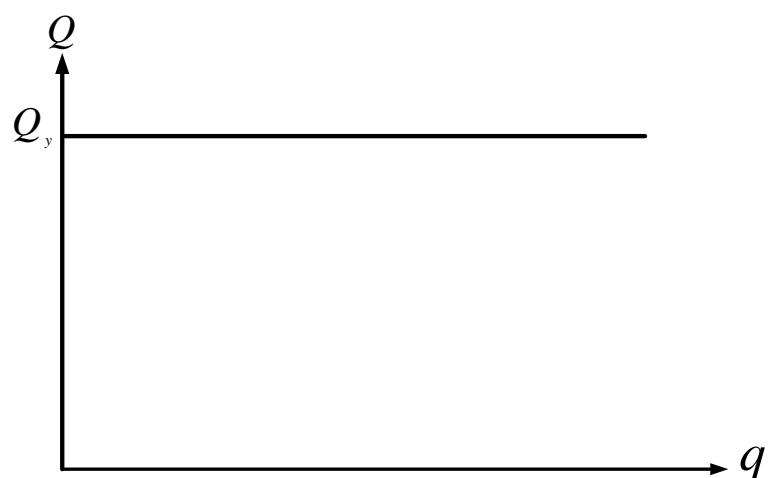


圖 2.4: 剛塑性組成模式

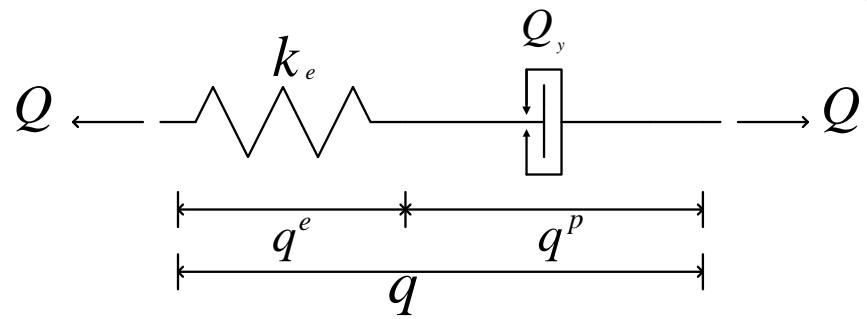


圖 2.5: 完全彈塑性機械模型

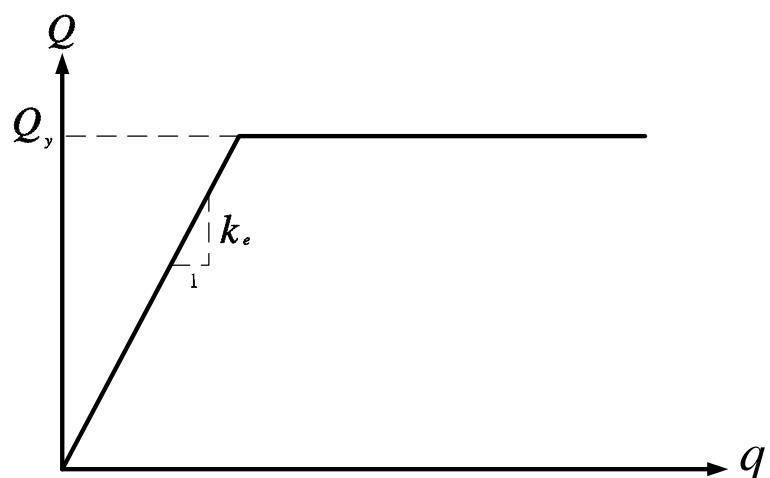


圖 2.6: 完全彈塑性組成模式

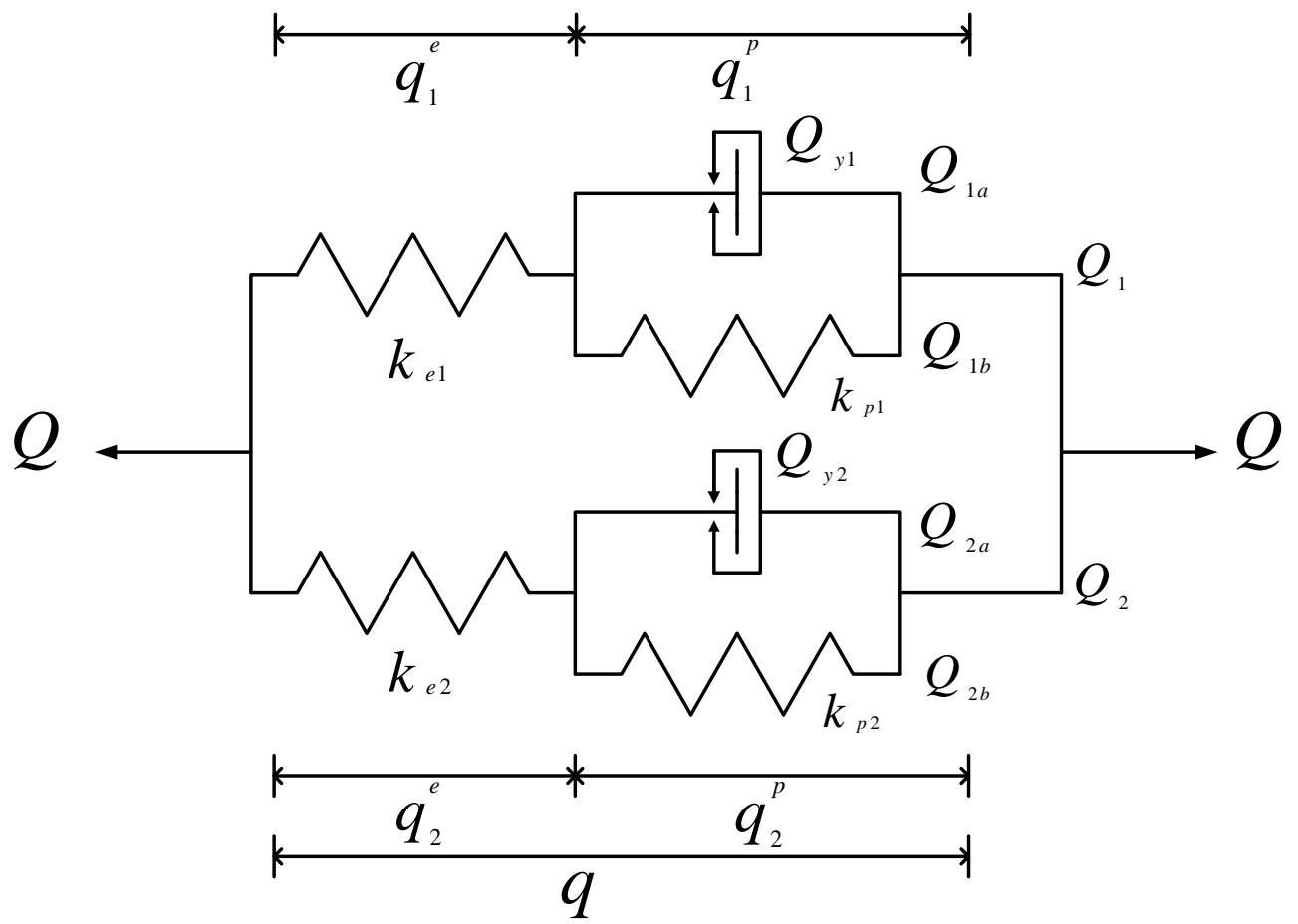


圖 2.7: 雙線性元件模型並聯

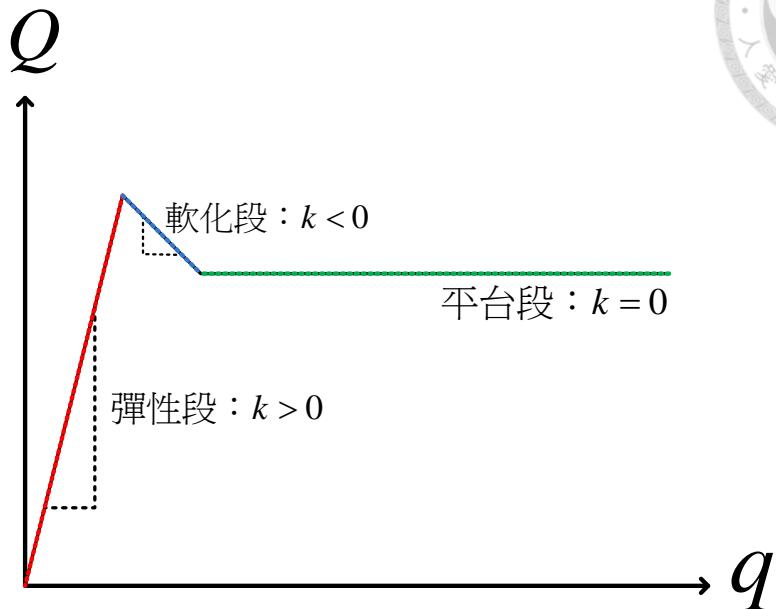


圖 2.8: 軟化桿件勁度關係圖

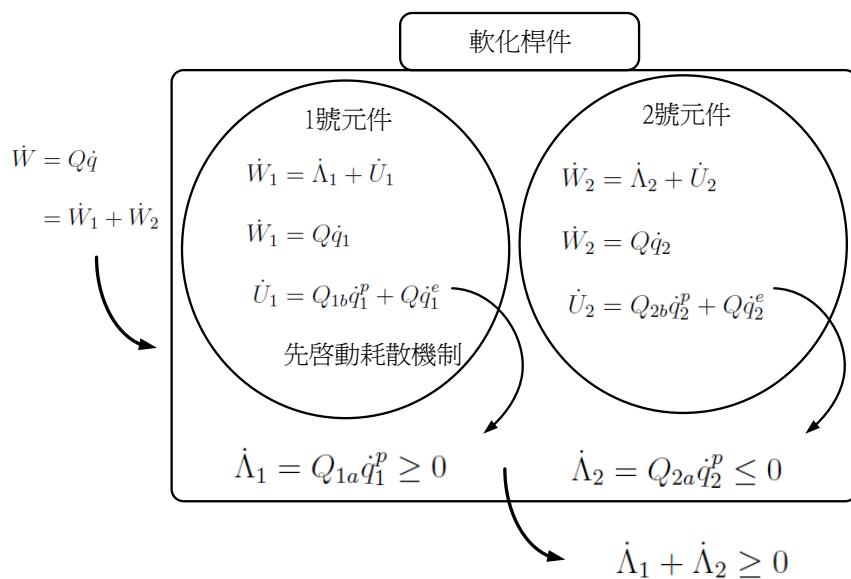


圖 2.9: 軟化桿件系統之能量關係示意圖

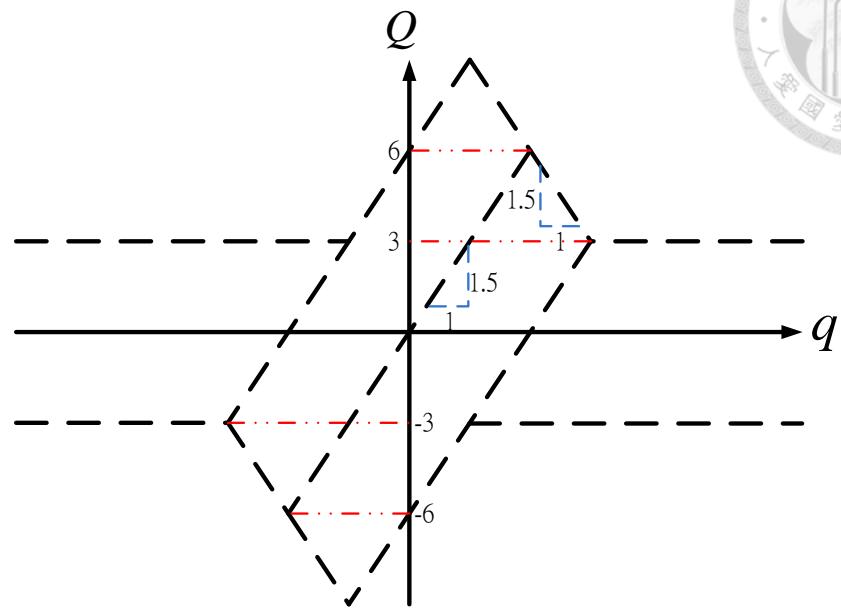


圖 2.10: 數值運算例一、軟化桿件彈塑性模式

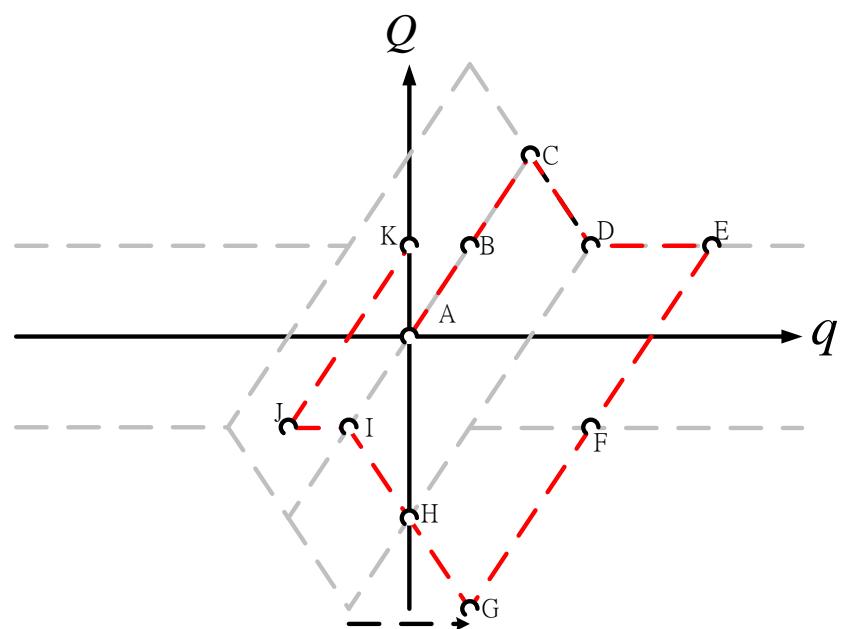


圖 2.11: 數值運算例一、軟化桿件應變控制路徑

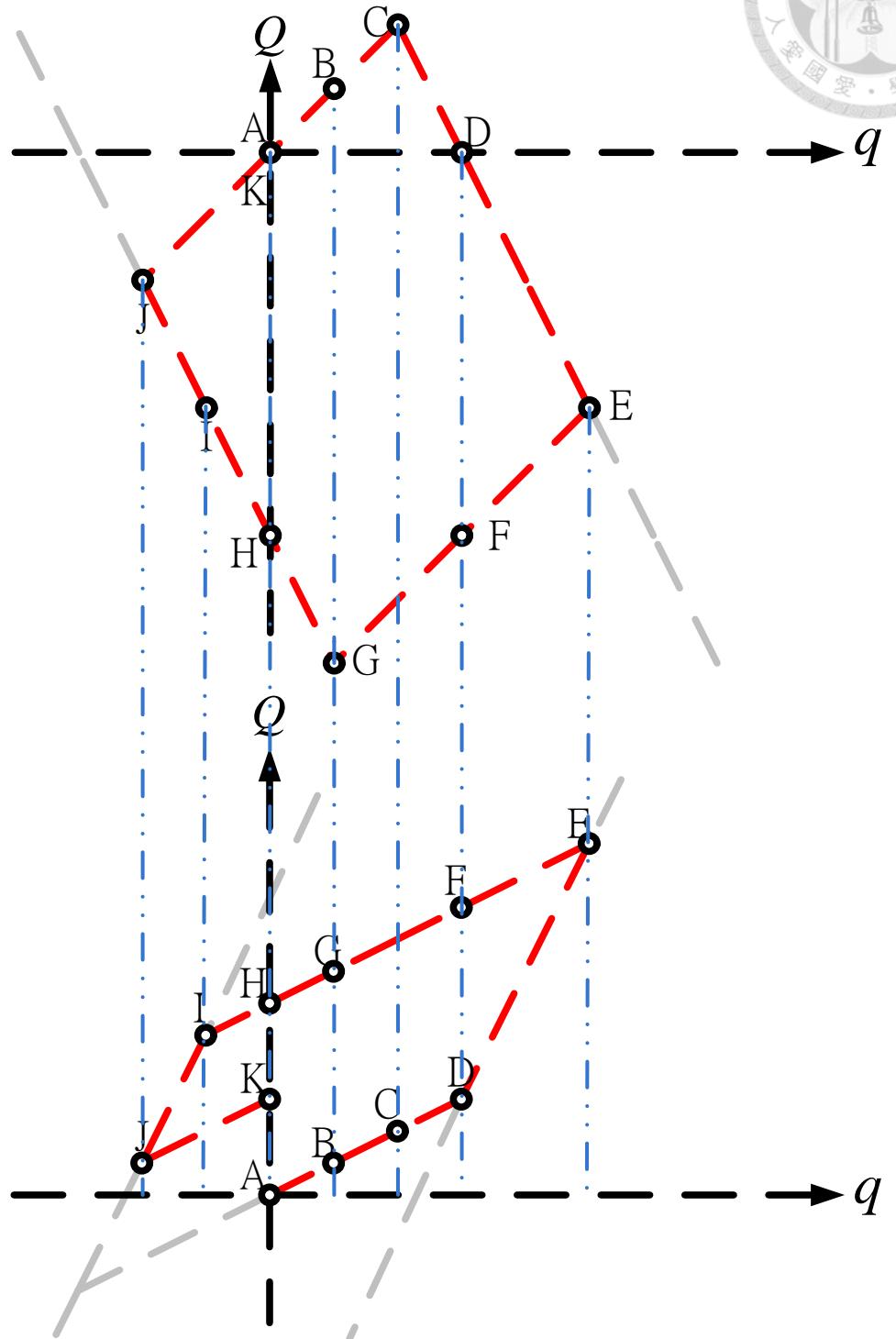


圖 2.12: 數值運算例一之一、1 號元件和 2 號元件

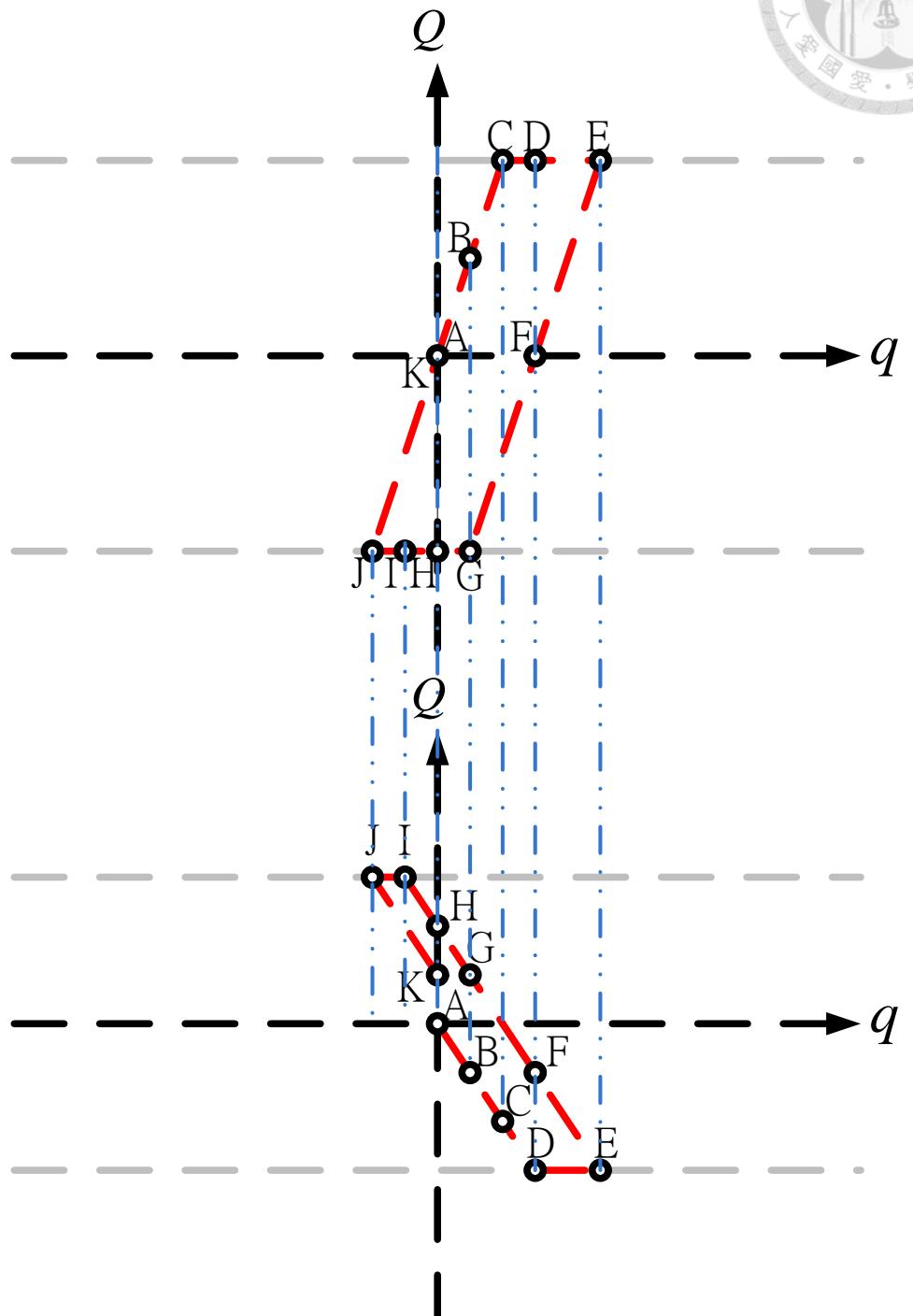


圖 2.13: 數值運算例一之二、1 號元件和 2 號元件

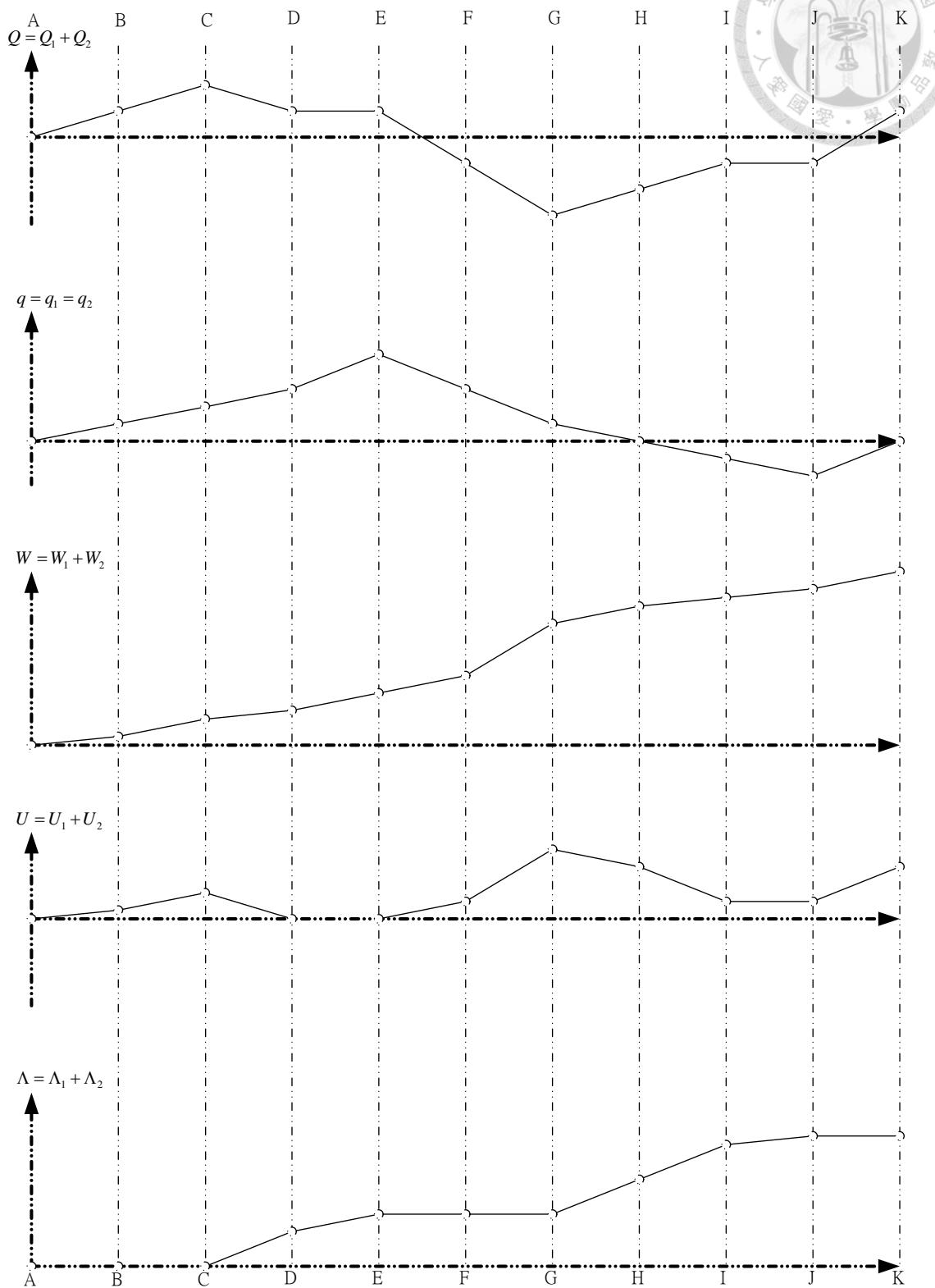


圖 2.14: 軟化桿件的歷時分析圖

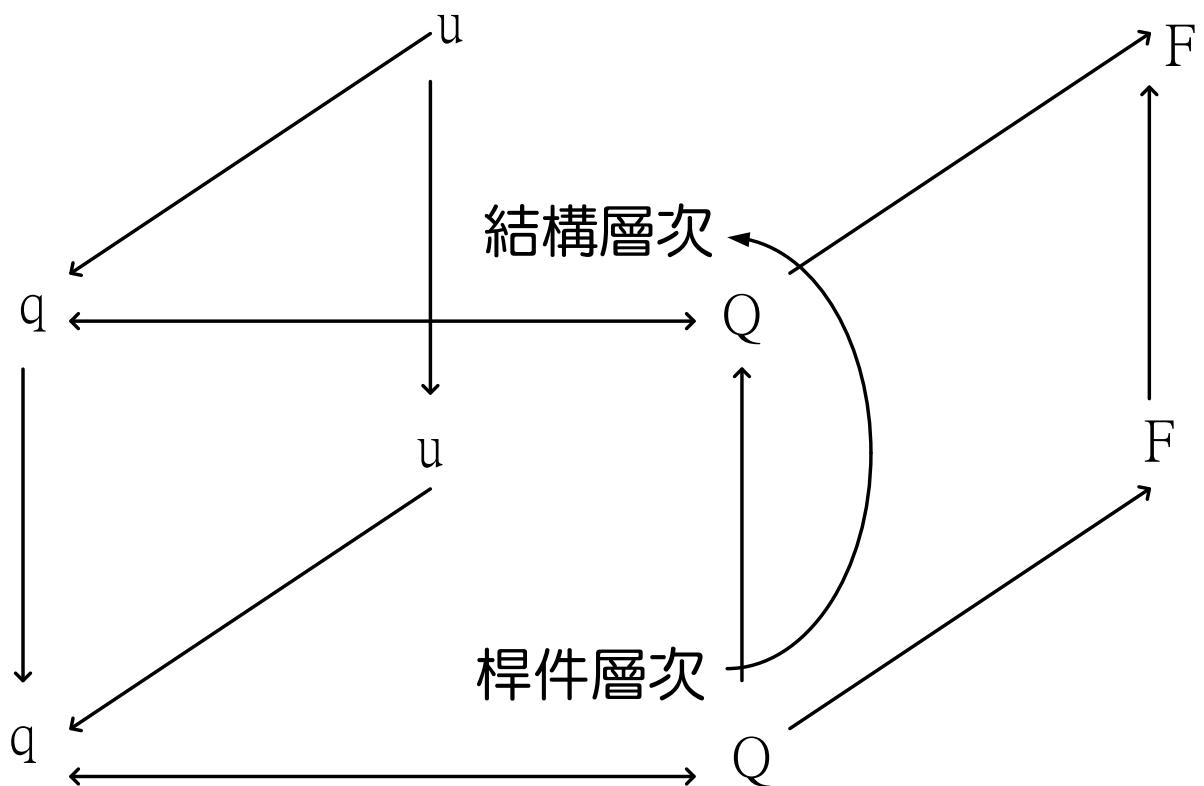


圖 2.15: 桿件、結構層次關係圖

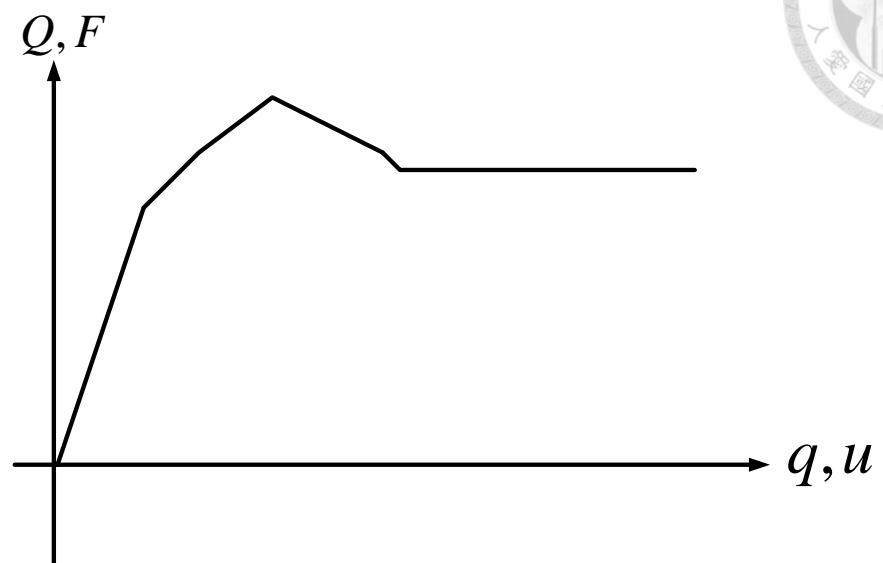


圖 3.1: 廣義應力、廣義應變塑流平台示意圖

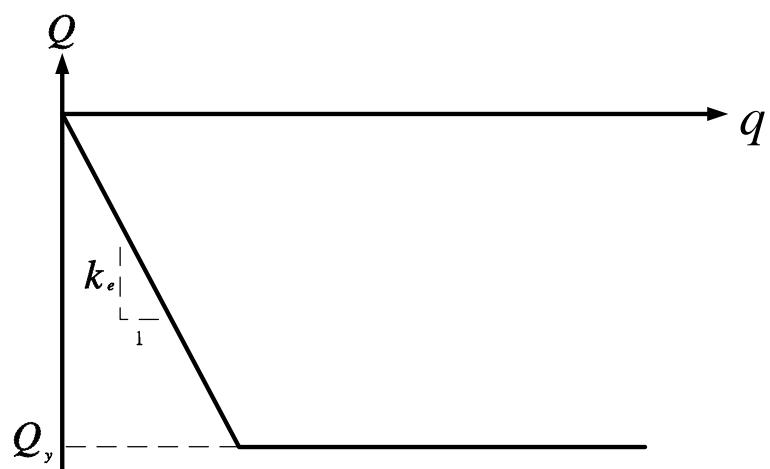


圖 3.2: 負勁度完全彈塑性組成模式

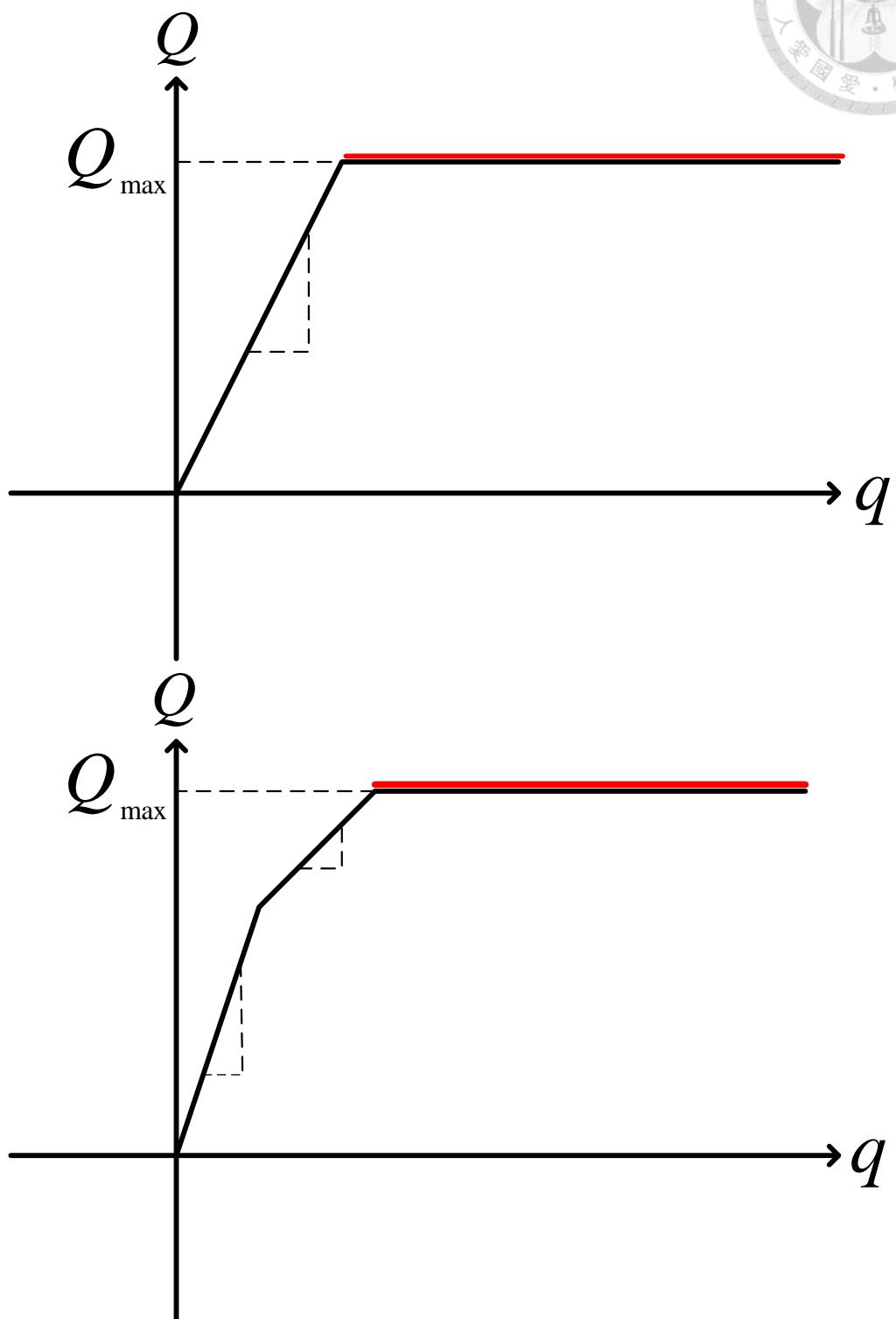


圖 3.3: 完全彈塑性桿件、硬化桿件塑流平台對應到桿件最大內力

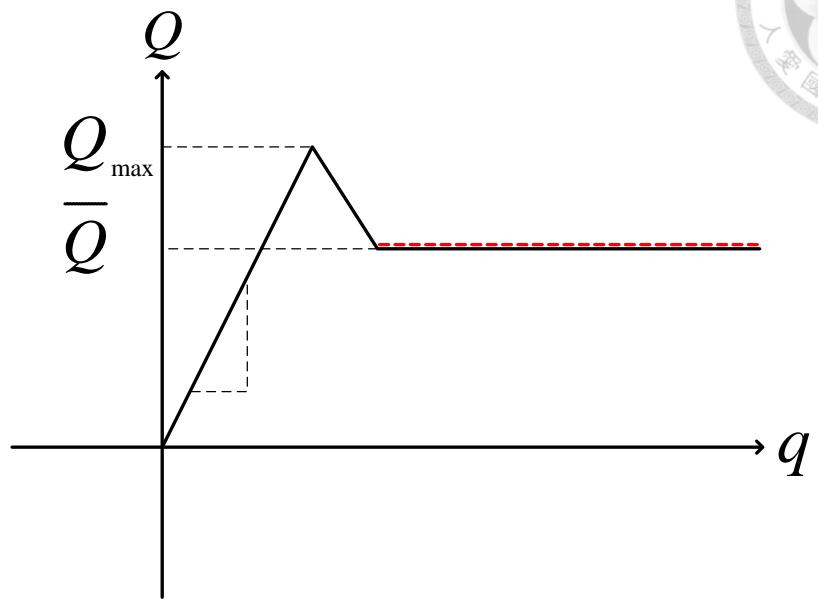


圖 3.4: 軟化桿件塑流平台對應到並非桿件最大內力

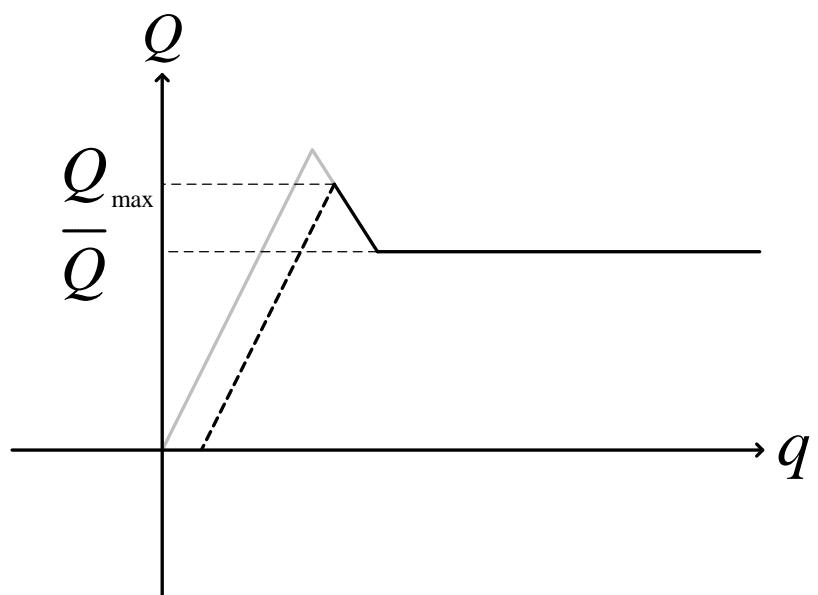


圖 3.5: 軟化桿件有無經歷過塑性, 其加載過程所經歷的桿件最大內力不一

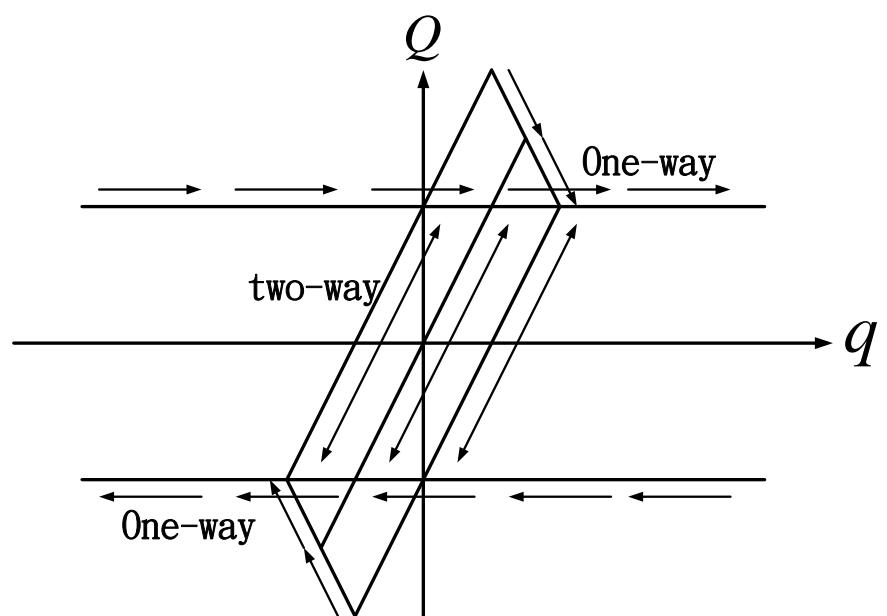
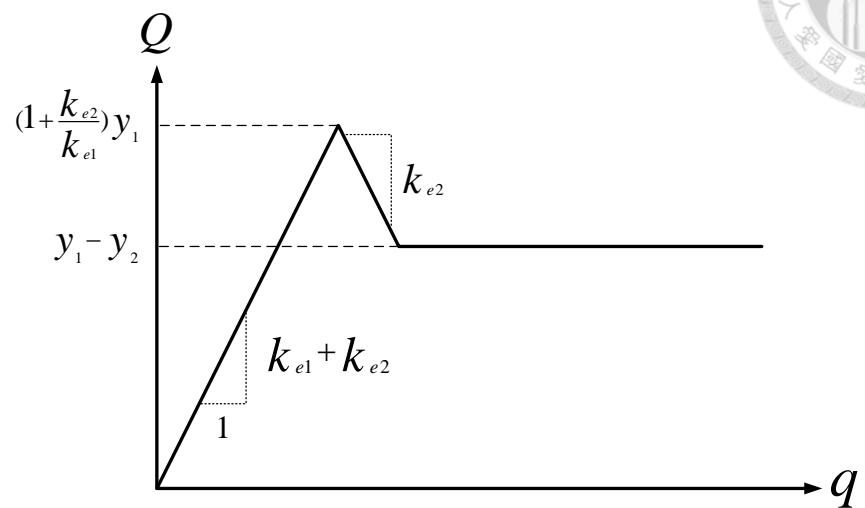


圖 3.6: 軟化彈塑性組成模式

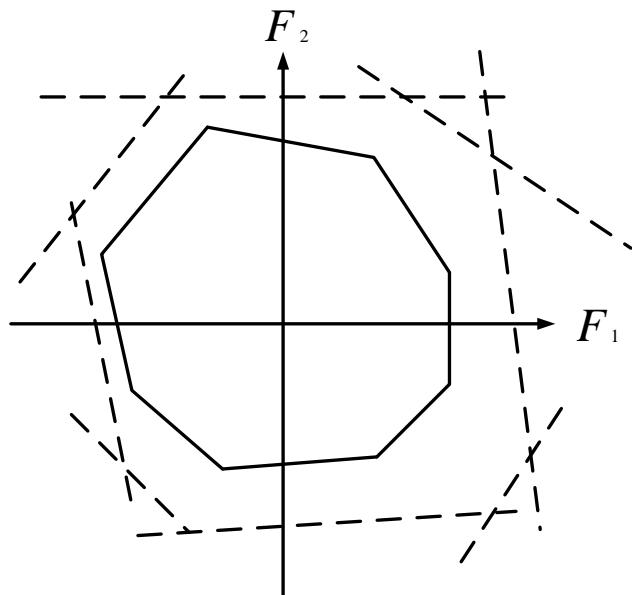


圖 3.7: 求取崩塌面時剔除在外圍超平面(虛線), 最內部之交集區域為安全載重空間

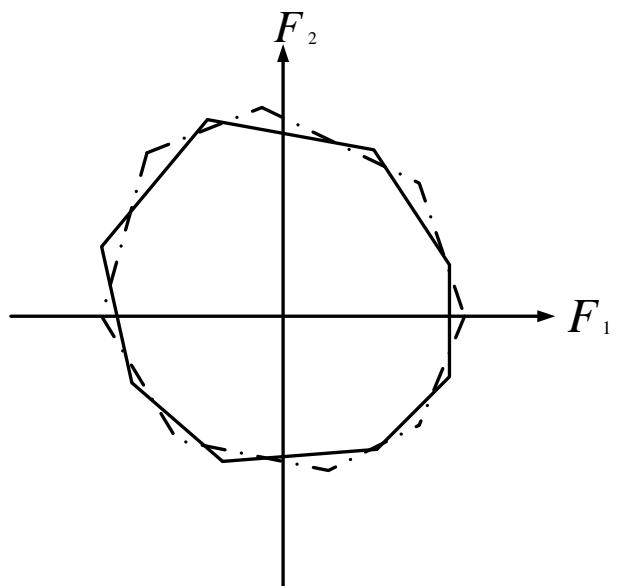


圖 3.8: 軟化桿件之安全載重區域可取降伏面(虛線) 與崩塌面(實線) 所圍出區域的聯集

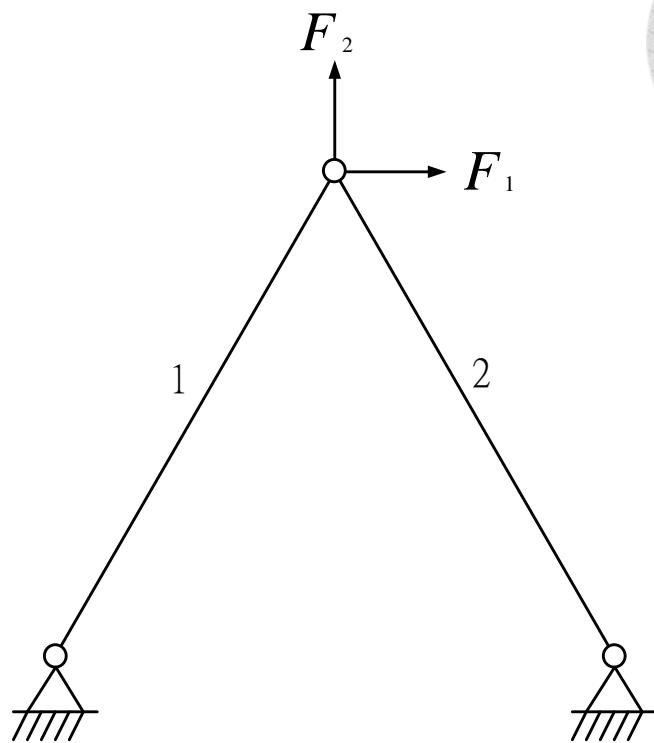


圖 3.9: 數值運算例二之一、二桿桁架模型

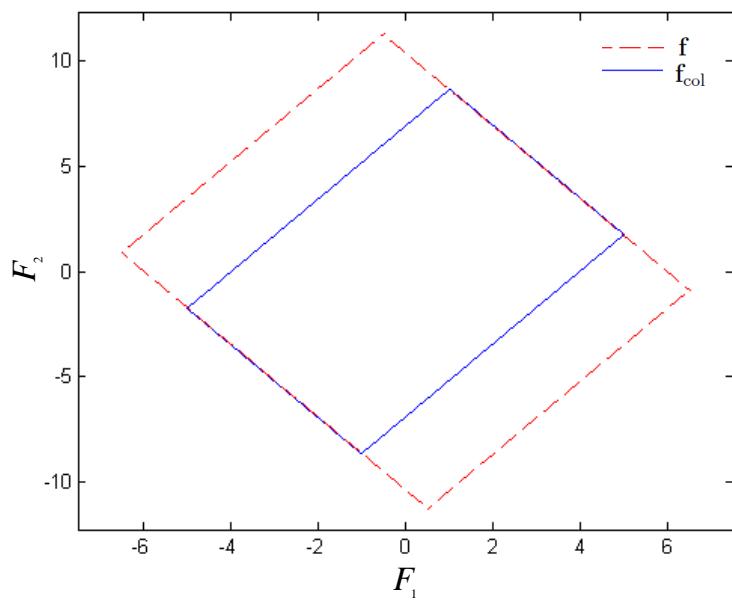


圖 3.10: 數值運算例二之一、二桿桁架結構崩塌面

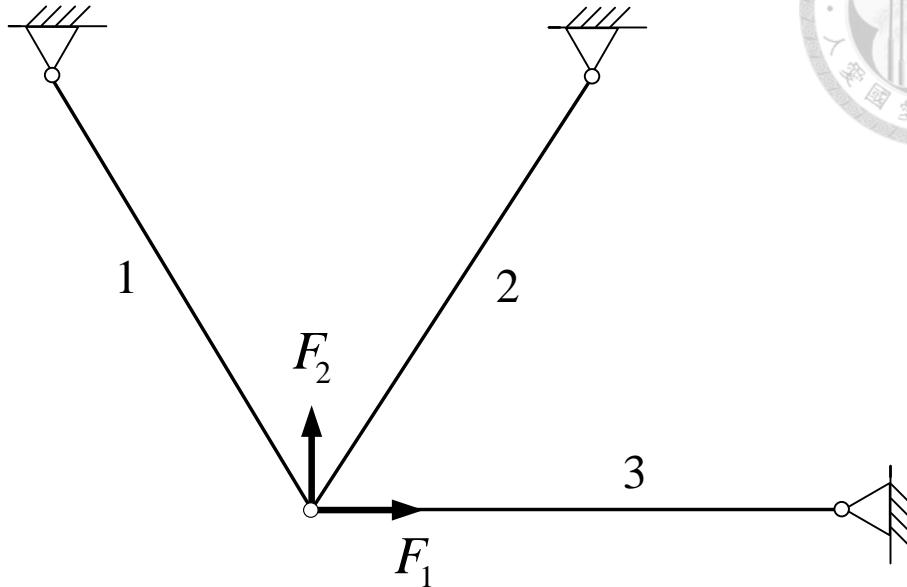


圖 3.11: 數值運算例二之二、三桿桁架模型

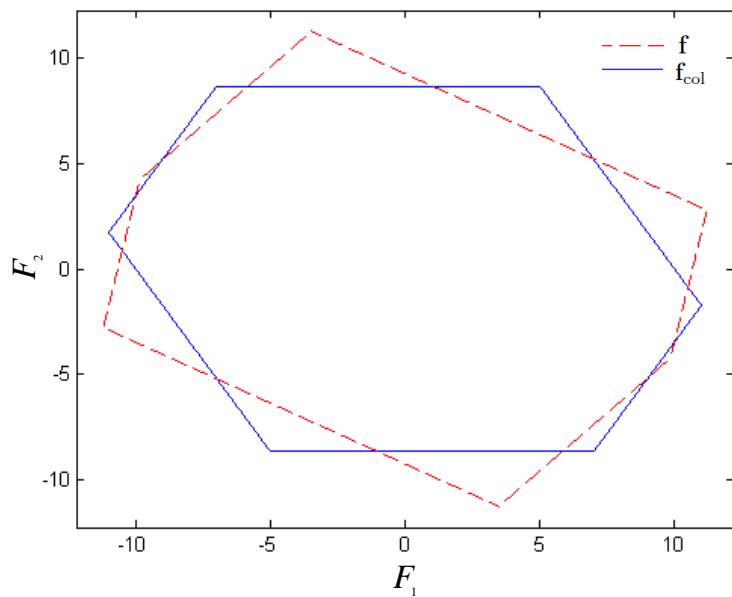


圖 3.12: 數值運算例二之二、三桿桁架結構崩塌面

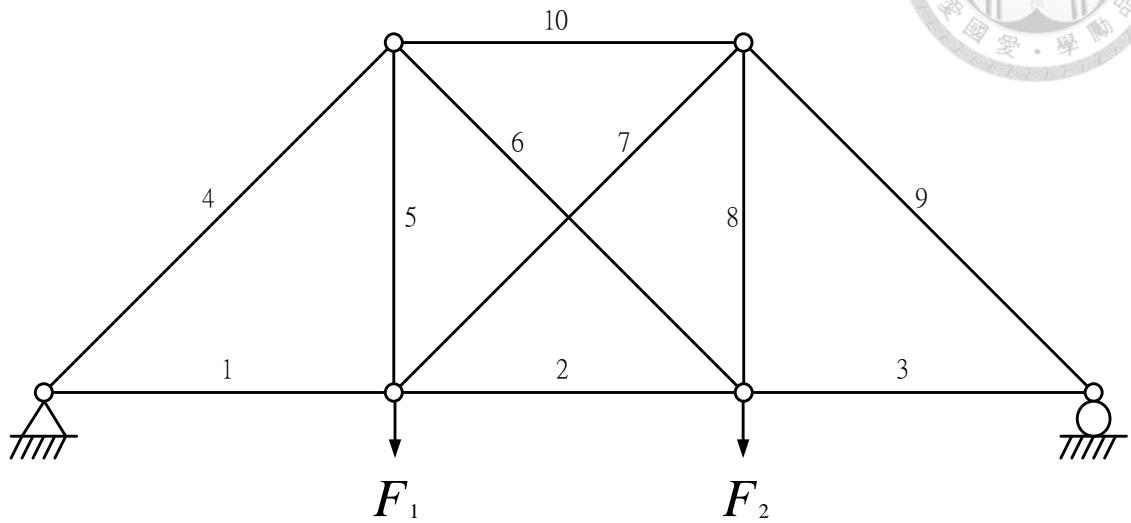


圖 3.13: 數值運算例二之三、橋型桁架模型

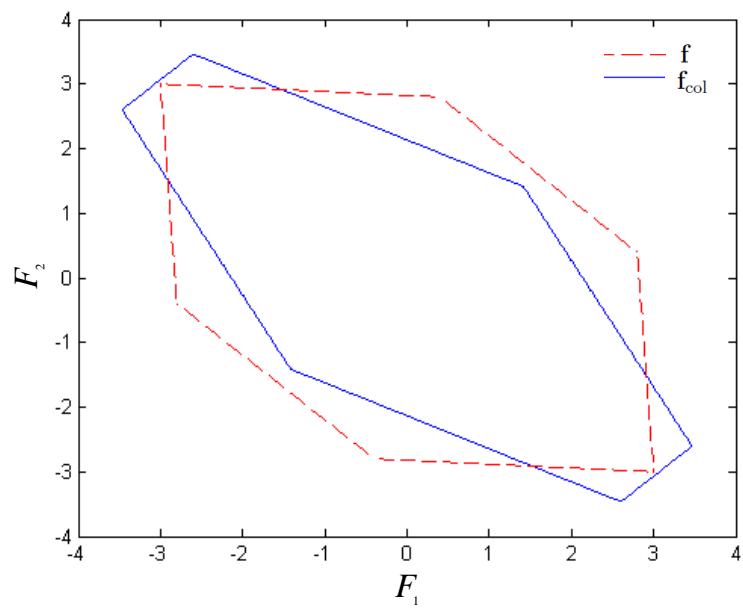


圖 3.14: 數值運算例二之三、橋形桁架結構崩塌面

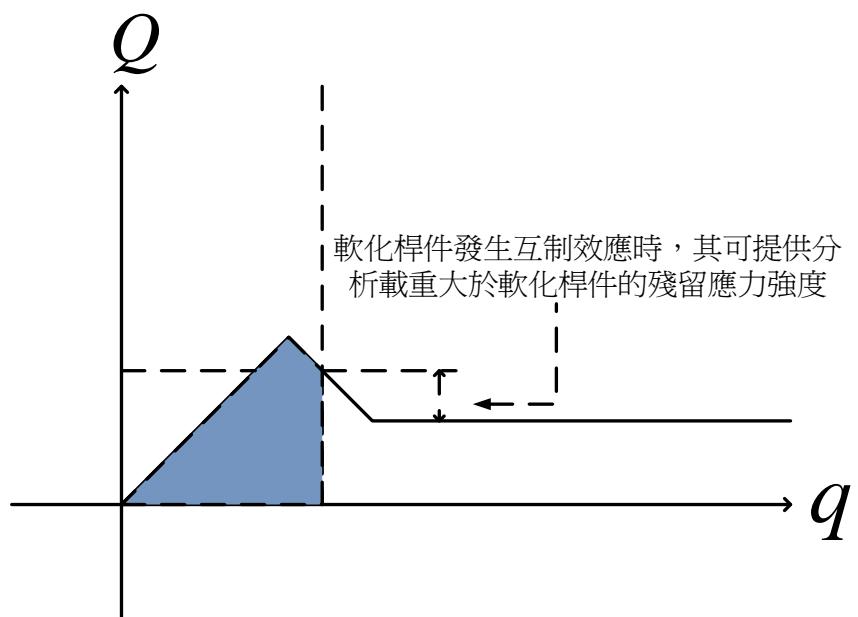
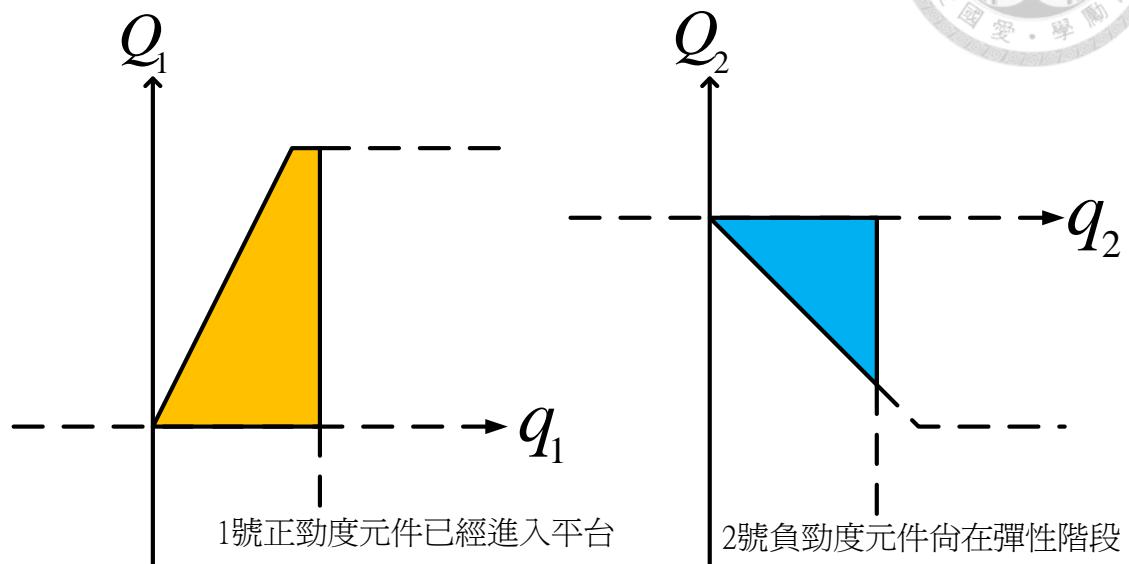


圖 3.15: 軟化結構崩塌發生互制行為時軟化桿件之並聯元件關係圖

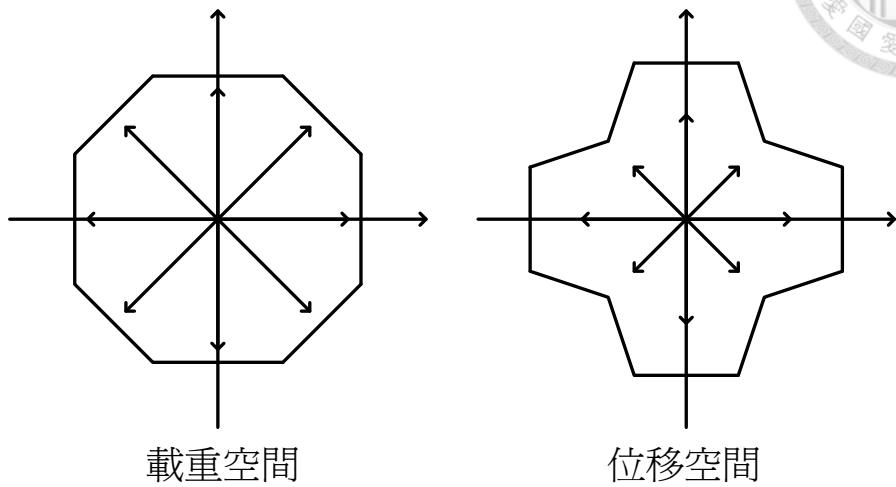


圖 3.16: 結構物載重空間與相對應位移空間示意圖

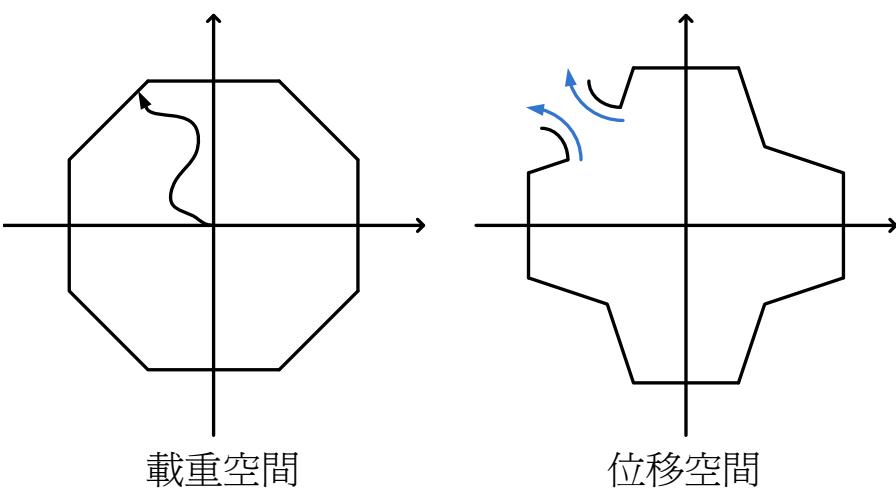


圖 3.17: 載重空間崩塌面對應位移空間出現無限制變形

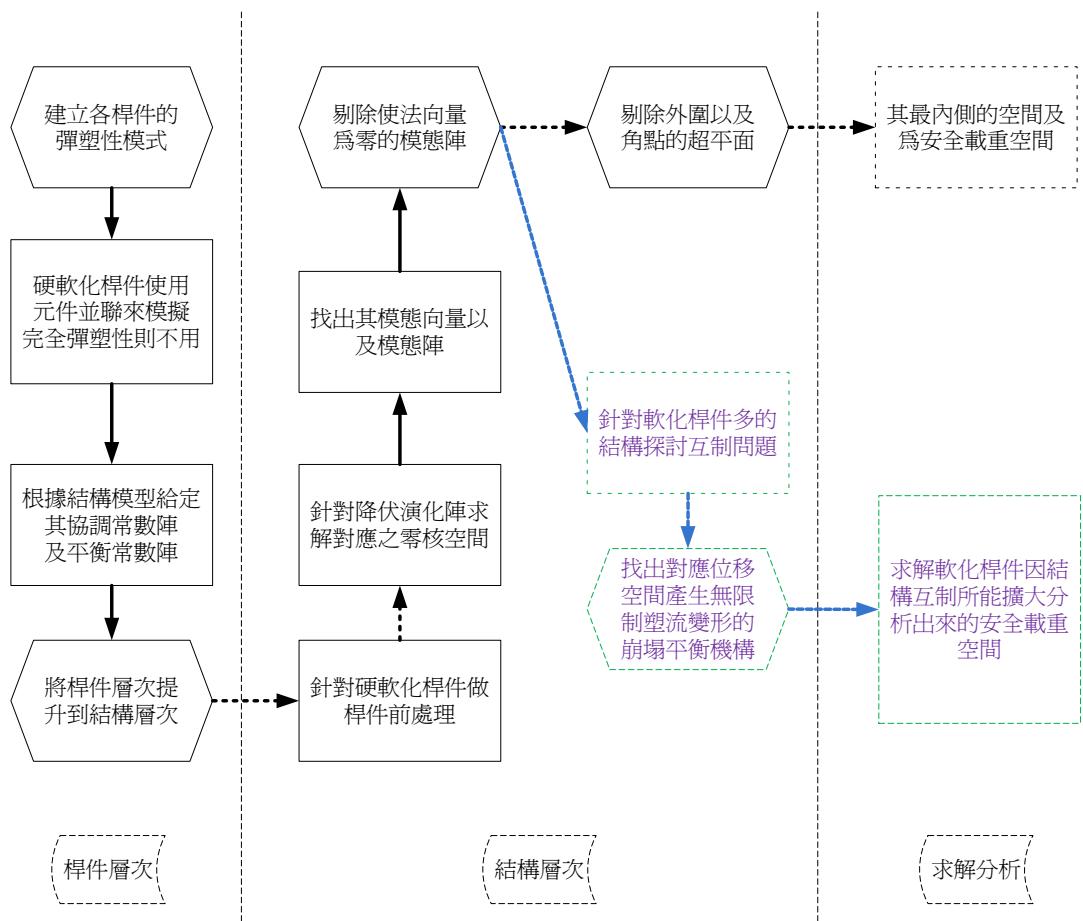


圖 3.18: 崩塌面與安全載重空間求解分析流程圖

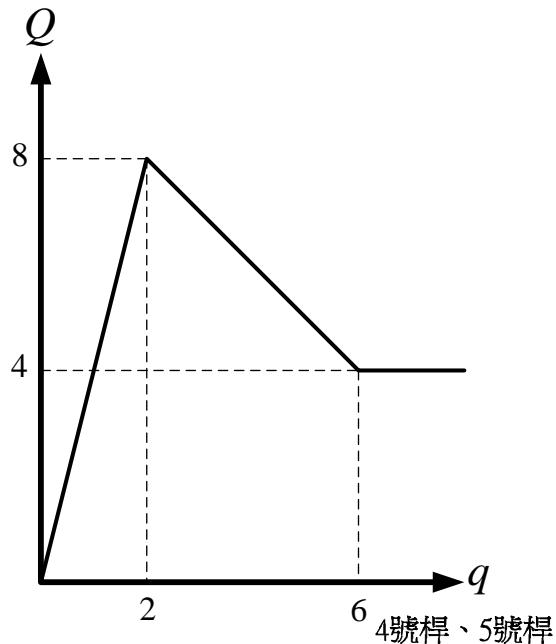
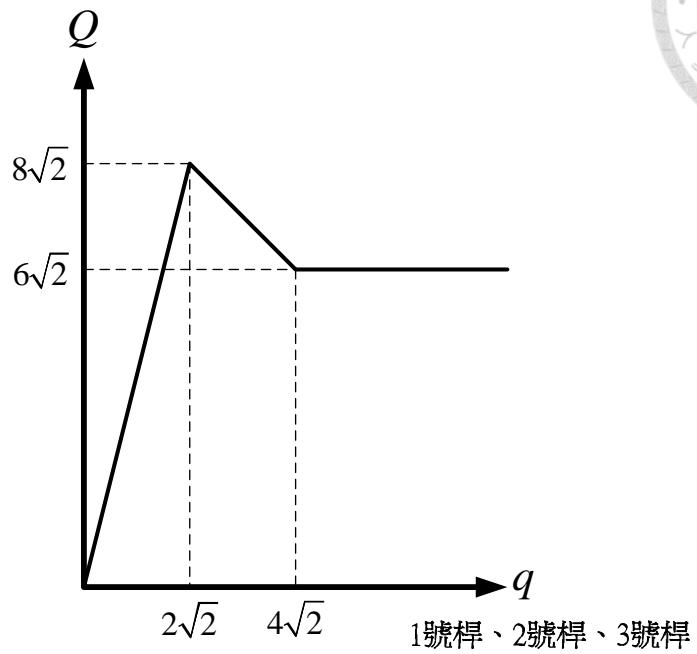


圖 3.19: 數值運算例三之一、五桿桁架各軟化桿件組成律關係

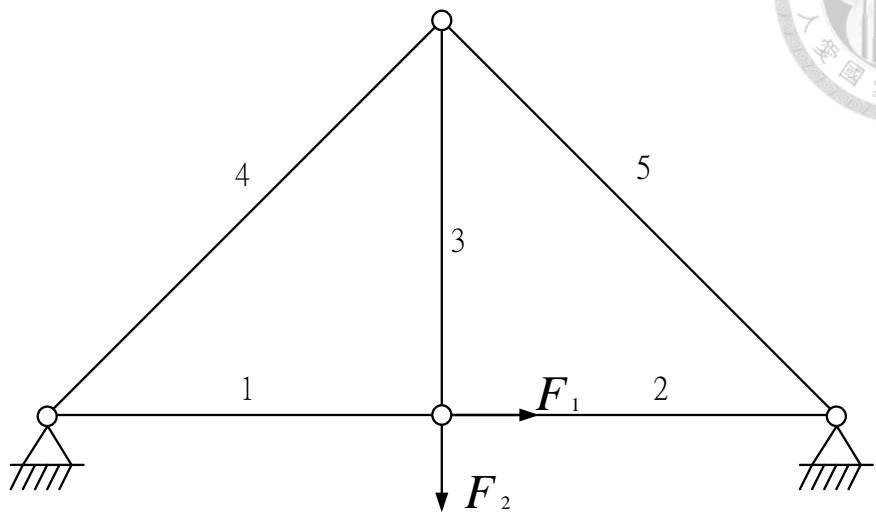


圖 3.20: 數值運算例三之一、五桿桁架模型

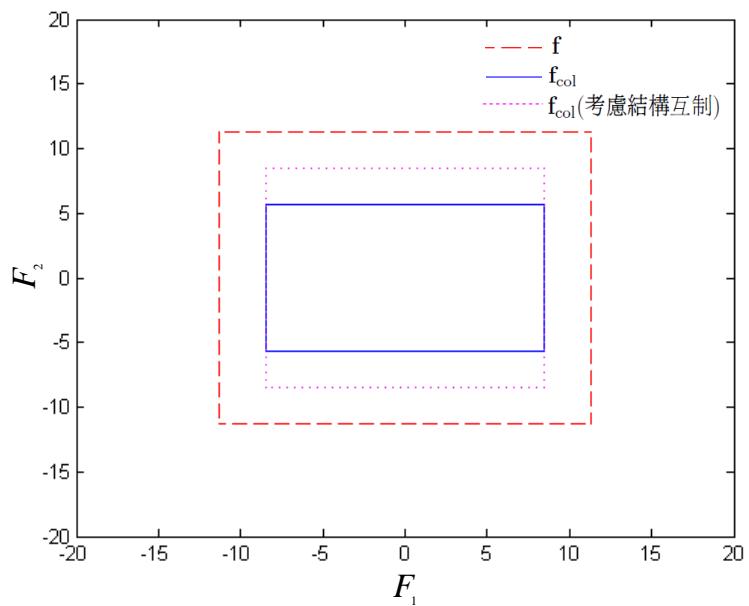


圖 3.21: 數值運算例三之一、五桿桁架結構降伏面、崩塌面與安全載重空間

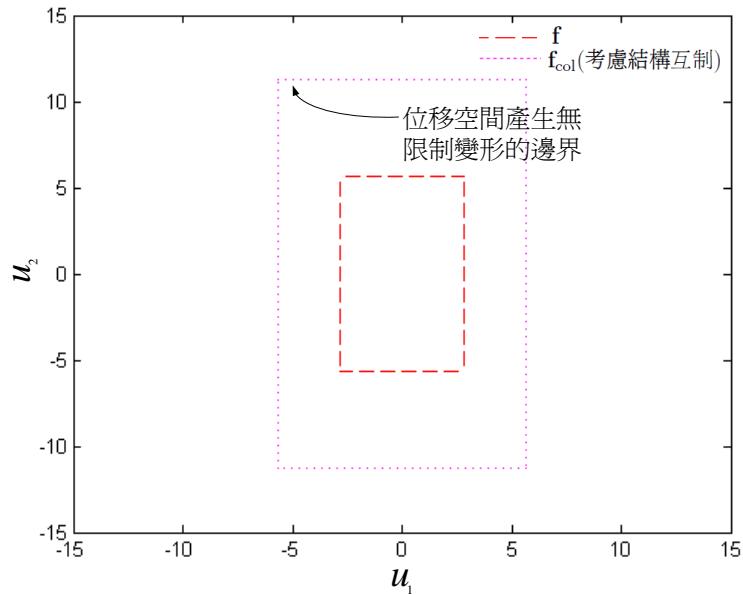
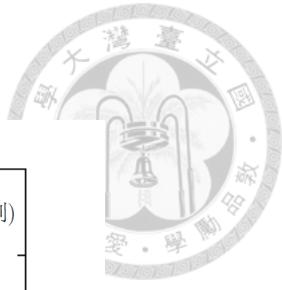


圖 3.22: 數值運算例三之一、五桿桁架結構崩塌面受力節點所對應的位移空間

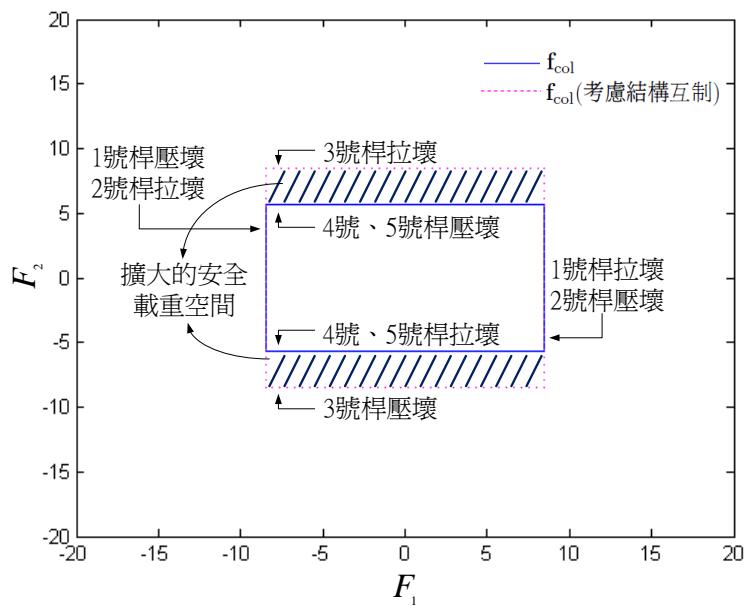


圖 3.23: 數值運算例三之一、五桿桁架結構崩塌面與擴大的安全載重空間比較

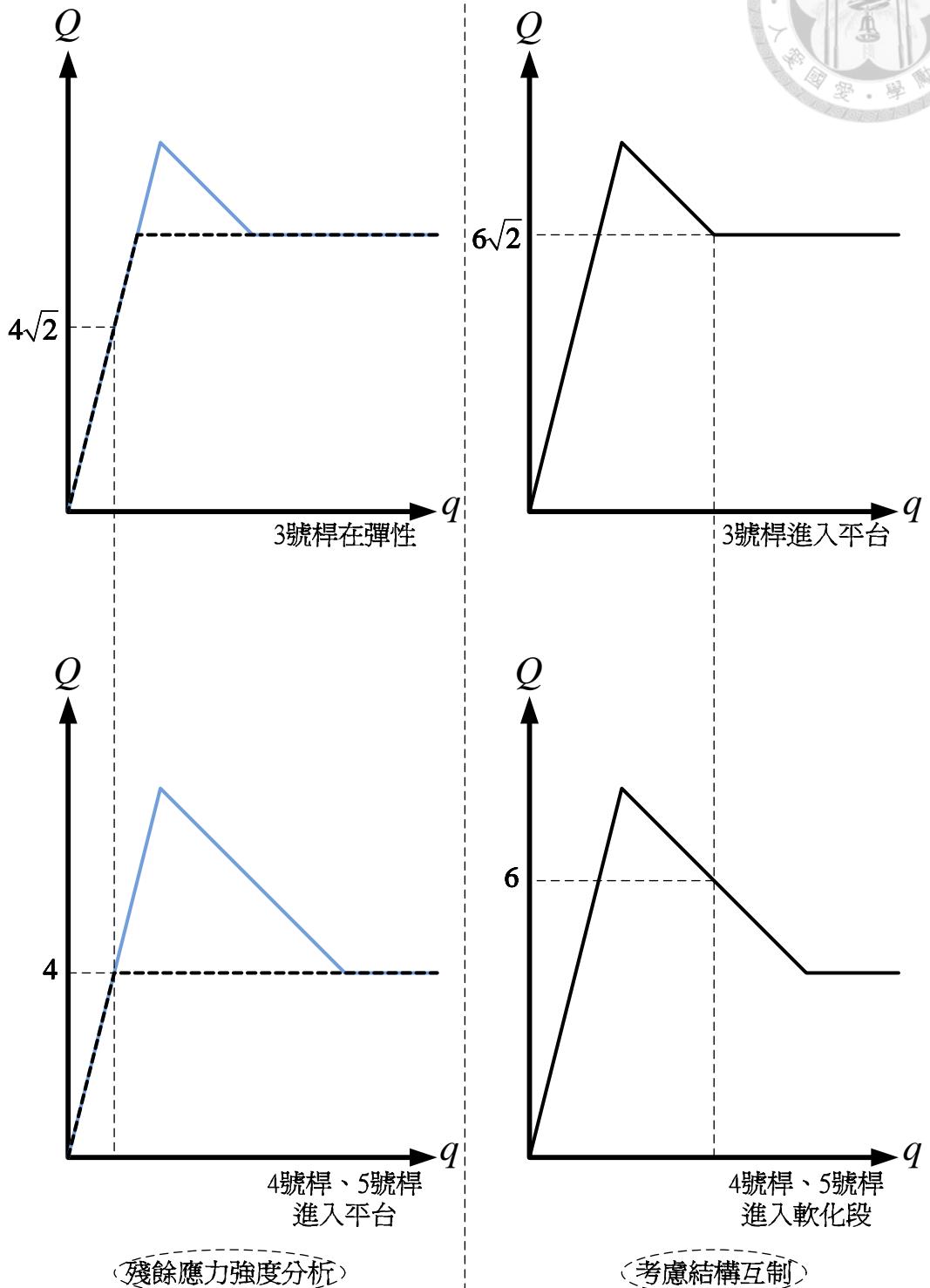


圖 3.24: 數值運算例三之一、五桿桁架結構殘餘應力強度分析與考慮結構互制比較

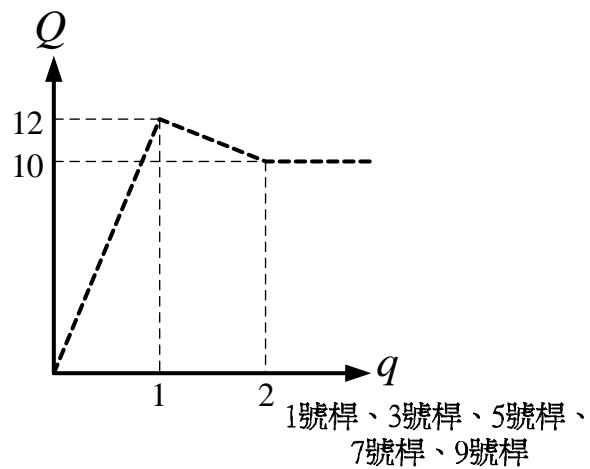
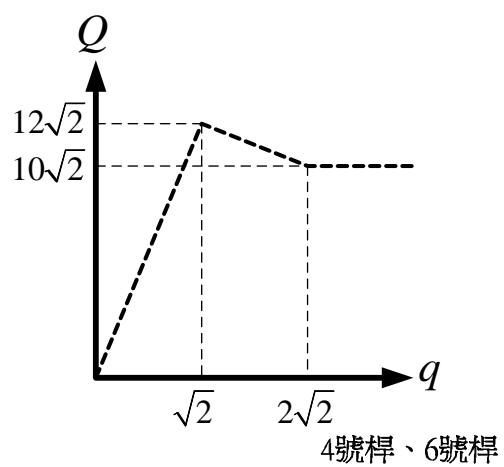
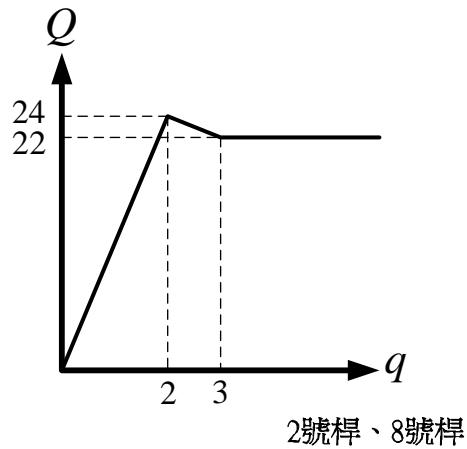


圖 3.25: 數值運算例三之二、九桿桁架各軟化桿件組成律關係

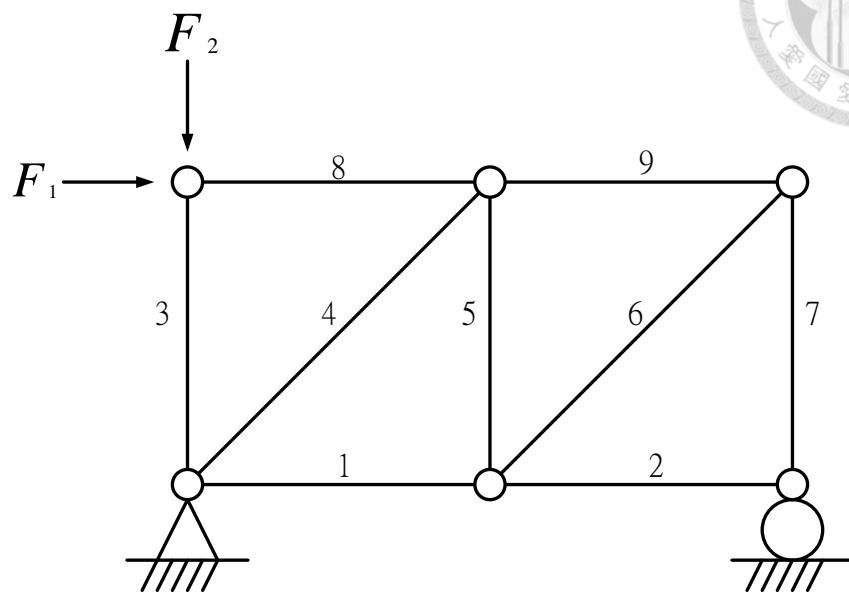


圖 3.26: 數值運算例三之二、九桿桁架模型

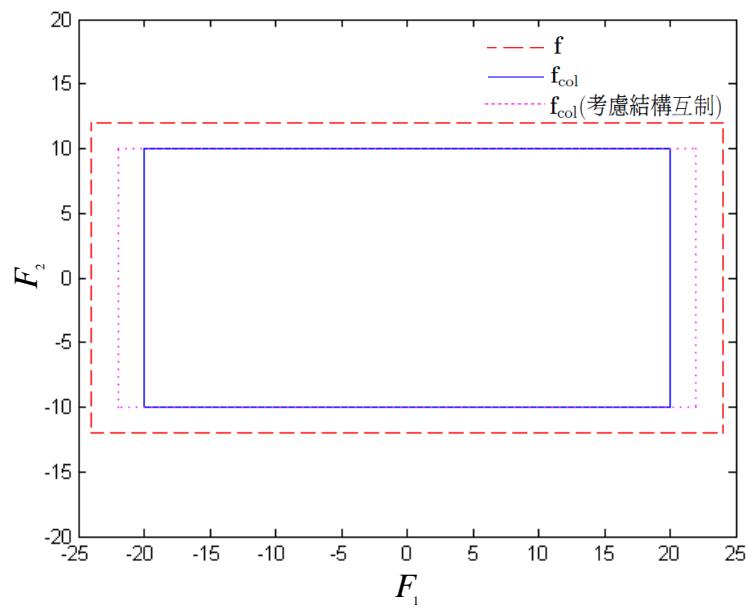


圖 3.27: 數值運算例三之二、九桿桁架結構降伏面、崩塌面與安全載重空間

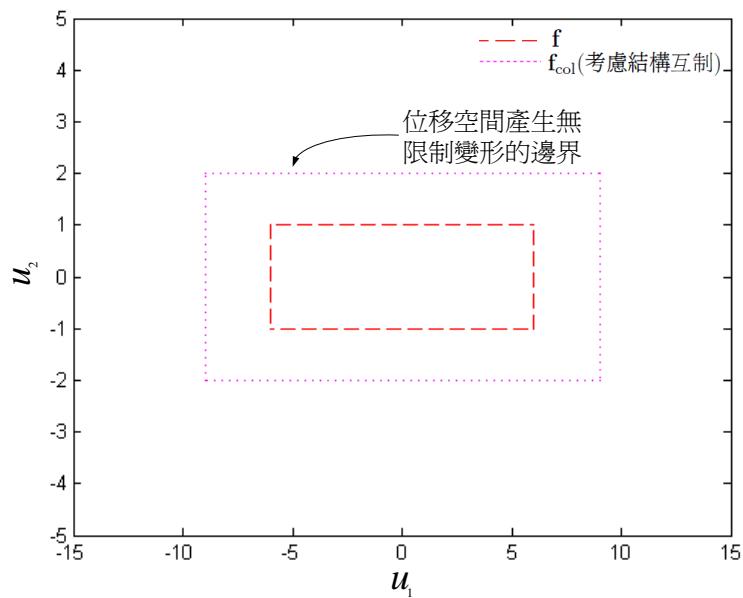
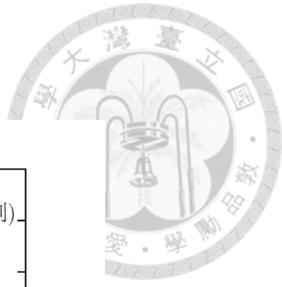


圖 3.28: 數值運算例三之二、九桿桁架結構崩塌面受力節點所對應的位移空間

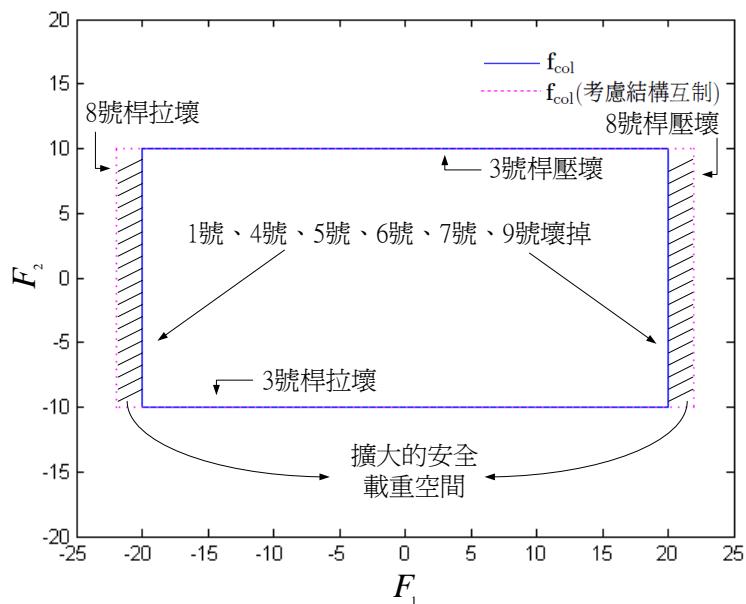


圖 3.29: 數值運算例三之二、九桿桁架結構崩塌面與擴大的安全載重空間比較

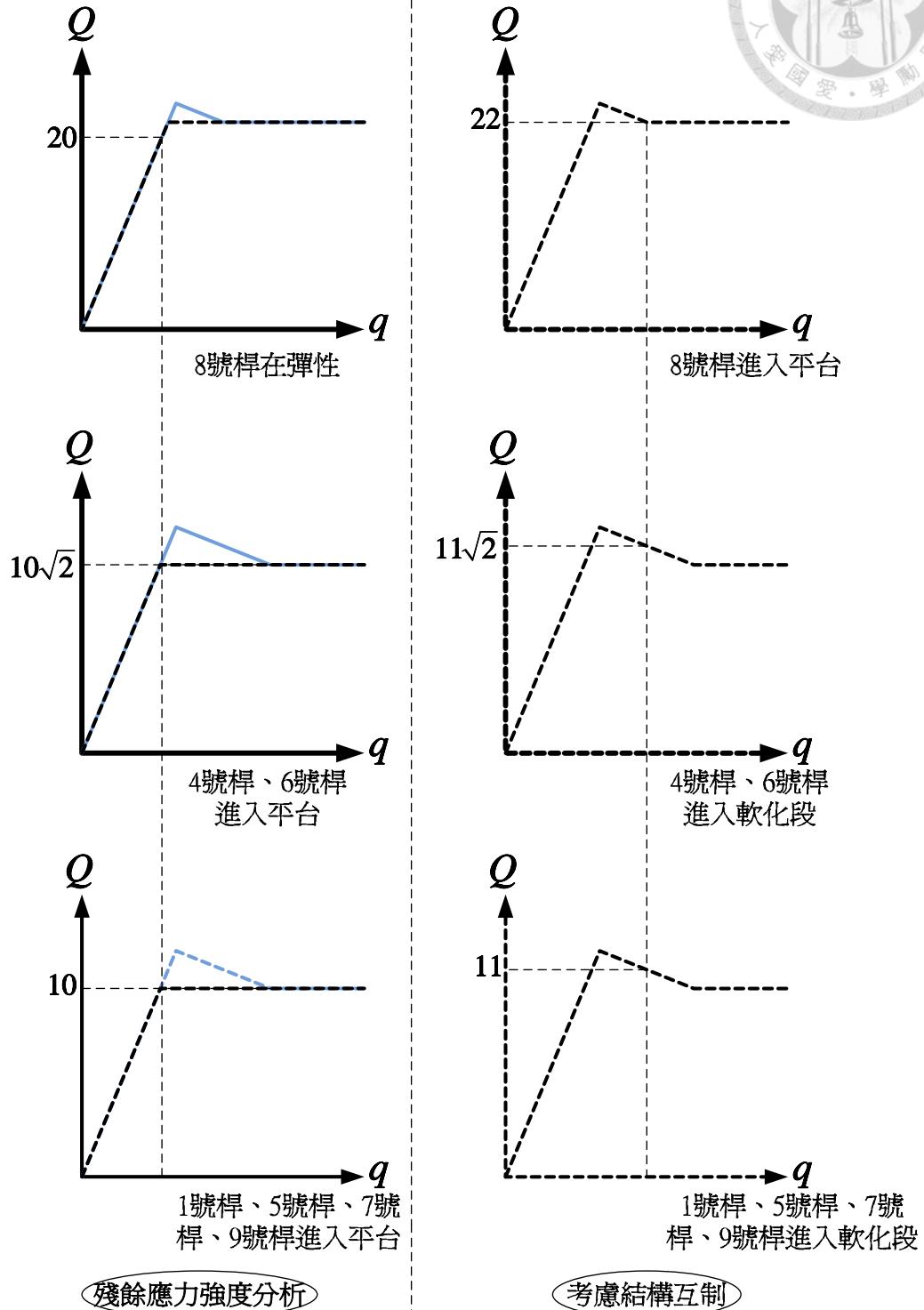


圖 3.30: 數值運算例三之二、九桿桁架結構殘餘應力強度分析與考慮結構互制比較

附錄 A、元件並聯模式推導



文中提到的軟化桿件具有三線性片段的彈塑性組成關係, 可利用兩個片段多線性降伏面模式並聯推導:

1 號元件如下:

$$(1.1) \quad q_1 = q_1^e + q_1^p$$

$$(1.2) \quad Q_1 = k_{e1}q_1^e$$

$$(1.3) \quad \dot{q}_1^p = \mathbf{N}_1 \dot{\boldsymbol{\lambda}}_1$$

$$(1.4) \quad \mathbf{f}_1^T \dot{\boldsymbol{\lambda}}_1 = 0$$

$$(1.5) \quad \mathbf{f}_1 = \mathbf{N}_1^T Q_1 - \mathbf{H}_1 \boldsymbol{\lambda}_1 - \mathbf{Y}_1 \leq \mathbf{0}$$

$$(1.6) \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}_1 \geq \mathbf{0}$$

2 號元件如下:

$$(2.1) \quad q_2 = q_2^e + q_2^p$$

$$(2.2) \quad Q_2 = k_{e2}q_2^e$$

$$(2.3) \quad \dot{q}_2^p = \mathbf{N}_2 \dot{\boldsymbol{\lambda}}_2$$

$$(2.4) \quad \mathbf{f}_2^T \dot{\boldsymbol{\lambda}}_2 = 0$$

$$(2.5) \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{N}_2^T Q_2 - \mathbf{H}_2 \boldsymbol{\lambda}_2 - \mathbf{Y}_2 \leq \mathbf{0}$$

$$(2.6) \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}_2 \geq \mathbf{0}$$

加入平衡律

$$(3.1) \quad Q = Q_1 + Q_2$$

與協調律

$$(3.2) \quad q = q_1 + q_2$$

將兩元件的彈塑分離式 $(A_{1.1}),(A_{2.1})$ 移項代入平衡律 $(A_{3.1})$

$$\begin{aligned}
 Q &= Q_1 + Q_2 \\
 &= k_{e1}(q - q_1^P) + k_{e2}(q - q_2^P) \\
 &= (k_{e1} + k_{e2})q - (k_{e1}q_1^P + k_{e2}q_2^P) \\
 \implies q &= (k_{e1} + k_{e2})^{-1}Q + (k_{e1} + k_{e2})^{-1}(k_{e1}q_1^P + k_{e2}q_2^P)
 \end{aligned}$$



將上式分別代入元件一和元件二的廣義虎克定律 $(A_{1.2}),(A_{2.2})$

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= k_{e1}(q - q_1^P) \\
 &= k_{e1}[(k_{e1} + k_{e2})^{-1}Q + (k_{e1} + k_{e2})^{-1}(k_{e1}q_1^P + k_{e2}q_2^P) - q_1^P] \\
 &= k_{e1}(k_{e1} + k_{e2})^{-1}Q + [k_{e1}(k_{e1} + k_{e2})^{-1} - 1]k_{e1}q_1^P + k_{e1}(k_{e1} + k_{e2})^{-1}k_{e2}q_2^P
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_2 &= k_{e2}(q - q_2^P) \\
 &= k_{e2}[(k_{e1} + k_{e2})^{-1}Q + (k_{e1} + k_{e2})^{-1}(k_{e1}q_1^P + k_{e2}q_2^P) - q_2^P] \\
 &= k_{e2}(k_{e1} + k_{e2})^{-1}Q + [k_{e2}(k_{e1} + k_{e2})^{-1} - 1]k_{e2}q_2^P + k_{e2}(k_{e1} + k_{e2})^{-1}k_{e1}q_1^P
 \end{aligned}$$

將新得到的 Q_1 和 Q_2 分別帶回元件的降伏式 $(A_{1.5}),(A_{2.5})$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_1 &= \mathbf{N}_1^T Q_1 - \mathbf{H}_1 \boldsymbol{\lambda}_1 - \mathbf{Y}_1 \leq \mathbf{0} \\
 &= \mathbf{N}_1^T k_{e1}(k_{e1} + k_{e2})^{-1}Q + \mathbf{N}_1^T [k_{e1}(k_{e1} + k_{e2})^{-1} - 1]k_{e1}\mathbf{N}_1 \boldsymbol{\lambda}_1 + \\
 &\quad k_{e1}(k_{e1} + k_{e2})^{-1}k_{e2}\mathbf{N}_2 \boldsymbol{\lambda}_2 - \mathbf{H}_1 \boldsymbol{\lambda}_1 - \mathbf{Y}_1 \leq \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_2 &= \mathbf{N}_2^T Q_2 - \mathbf{H}_2 \boldsymbol{\lambda}_2 - \mathbf{Y}_2 \leq \mathbf{0} \\
 &= \mathbf{N}_2^T k_{e2}(k_{e2} + k_{e1})^{-1}Q + \mathbf{N}_2^T [k_{e2}(k_{e1} + k_{e2})^{-1} - 1]k_{e2}\mathbf{N}_2 \boldsymbol{\lambda}_2 + \\
 &\quad k_{e2}(k_{e1} + k_{e2})^{-1}k_{e1}\mathbf{N}_1 \boldsymbol{\lambda}_1 - \mathbf{H}_2 \boldsymbol{\lambda}_2 - \mathbf{Y}_2 \leq \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

整理新的並聯元件彈塑分離式、廣義虎克定律以及塑流規則



$$q = q^e + q^p$$

$$q^e = (k_{e1} + k_{e2})^{-1}Q$$

$$q^p = (k_{e1} + k_{e2})^{-1}(k_{e1}q_1^p + k_{e2}q_2^p)$$

$$= (k_{e1} + k_{e2})^{-1}k_{e1}\mathbf{N}_1\boldsymbol{\lambda}_1 + (k_{e1} + k_{e2})^{-1}k_{e2}\mathbf{N}_2\boldsymbol{\lambda}_2$$

$$= \begin{bmatrix} (k_{e1} + k_{e2})^{-1}k_{e1}\mathbf{N}_1 & (k_{e1} + k_{e2})^{-1}k_{e2}\mathbf{N}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1 \\ \boldsymbol{\lambda}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{N}\boldsymbol{\lambda}$$

$$\dot{q}^p = \mathbf{N}\dot{\boldsymbol{\lambda}}$$

整理降伏式

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{k_{e1}}{k_{e1}+k_{e2}}\mathbf{N}_1 \\ \frac{k_{e2}}{k_{e1}+k_{e2}}\mathbf{N}_2 \end{bmatrix} Q - \frac{k_{e1}k_{e2}}{k_{e1}+k_{e2}} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^T\mathbf{N}_1 & -\mathbf{N}_1^T\mathbf{N}_2 \\ -\mathbf{N}_2^T\mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2^T\mathbf{N}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1 \\ \boldsymbol{\lambda}_2 \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1 \\ \boldsymbol{\lambda}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

整理成以下三線性 (硬化軟化) 彈塑性材料組成律模式:

$$q = q^e + q^p$$

$$Q = k_e q^e$$

$$= (k_{e1} + k_{e2})q^e$$

$$\dot{q}^p = \begin{bmatrix} (k_{e1} + k_{e2})^{-1}k_{e1}\mathbf{N}_1 & (k_{e1} + k_{e2})^{-1}k_{e2}\mathbf{N}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1 \\ \boldsymbol{\lambda}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{N}\dot{\boldsymbol{\lambda}}$$

$$\mathbf{f}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{k_{e1}}{k_{e1}+k_{e2}}\mathbf{N}_1 \\ \frac{k_{e2}}{k_{e1}+k_{e2}}\mathbf{N}_2 \end{bmatrix} Q - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 + \mathbf{N}_1^T \frac{k_{e1}k_{e2}}{k_{e1}+k_{e2}}\mathbf{N}_1 & -\mathbf{N}_1^T \frac{k_{e1}k_{e2}}{k_{e1}+k_{e2}}\mathbf{N}_2 \\ -\mathbf{N}_2^T \frac{k_{e1}k_{e2}}{k_{e1}+k_{e2}}\mathbf{N}_1 & \mathbf{H}_2 + \mathbf{N}_2^T \frac{k_{e1}k_{e2}}{k_{e1}+k_{e2}}\mathbf{N}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1 \\ \boldsymbol{\lambda}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}$$

$$\dot{\Lambda} \geq 0$$

其中

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{N}_1^T k_1^p \mathbf{N}_1$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{N}_2^T k_2^p \mathbf{N}_2$$

不管是軟化模型還是硬化模型，在本文裡面因為滿足正交塑流規則，其**H**陣必為一對稱陣。而透過這樣的一個模式推導，原本具有廣義回應力的彈塑性組成律模式，就將其轉換成具有**H**陣(硬軟化演化陣)的模式。

由上述所推導的三線性(硬化、軟化)彈塑性模式。藉由彈性彈簧與摩擦阻尼器的串並聯，在滿足平衡律與協調律(平衡律與協調律的轉換陣具有轉置關係)，就可以透過更多的元件來組合出所需求或是更複雜的彈塑性組成律。



附錄 B、桿件能量模式



片段線性多降伏面彈塑性組成律模式:

$$(1.1) \quad q = q^e + q^p \quad q, q^e, q^p, Q, Q_a, Q_b \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$$

$$(1.2) \quad Q = Q_a + Q_b \quad \mathbf{f}, \dot{\boldsymbol{\lambda}}, \mathbf{N}^T, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$$

$$(1.3) \quad Q = k_e q^e \quad (\cdot) = d(\cdot)/dt$$

$$(1.4) \quad Q_b = k_p q^p$$

$$(1.5) \quad \dot{q}^p = \mathbf{N} \dot{\boldsymbol{\lambda}}$$

$$(1.6) \quad \mathbf{f}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0,$$

$$(1.7) \quad \mathbf{f} = \mathbf{N}^T Q_a - \mathbf{Y} \leq \mathbf{0},$$

$$(1.8) \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}.$$

考慮二力桿件給定如下:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix}, y > 0, \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

將彈塑分離($B_{1.1}$)寫成變率形式:

$$\dot{q} = \dot{q}^e + \dot{q}^p$$

外力作功的做功功率可以表示成如下:

然後代入彈塑分離式($B_{1.1}$)和廣義應力主回分解式($B_{1.2}$):

$$\dot{W} = Q \dot{q}$$

$$= Q(\dot{q}^e + \dot{q}^p)$$

$$= Q \dot{q}^e + Q \dot{q}^p$$



$$= Q\dot{q}^e + Q_a\dot{q}^p + Q_b\dot{q}^p$$

$\dot{U} + \dot{\Lambda}$ 热力学第一定律

$$\text{令 } \dot{U} = Q\dot{q}^e + Q_b\dot{q}^p$$

代入廣義虎克定律式($B_{1.3}$)以及廣義回應力演化規則($B_{1.4}$), 對其積分並設定積分常數

$$\dot{U} = (k_e q^e) \dot{q}^e + (k_p q^p) \dot{q}^p$$

$$U = \frac{1}{2} k_e (q^e)^2 + \frac{1}{2} k_p (q^p)^2$$

而 $\dot{\Lambda} = Q_a \dot{q}^p$

將($B_{1.7}$)代入彈塑二擇一($B_{1.6}$)乘開移項, 再代入塑流規則($B_{1.5}$):

$$\mathbf{f}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0$$

$$\Rightarrow (\mathbf{N}^T Q_a - \mathbf{Y})^T \dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0$$

$$\Rightarrow Q_a \mathbf{N} \dot{\boldsymbol{\lambda}} - \mathbf{Y}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0$$

$$\Rightarrow Q_a \mathbf{N} \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{Y}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}}$$

$$\text{其中 } \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_t \\ \dot{\lambda}_c \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \dot{\lambda}_t \geq 0, \dot{\lambda}_c \geq 0$$

$$\Rightarrow Q_a \dot{q}^p = \mathbf{Y}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \begin{bmatrix} y & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_t \\ \dot{\lambda}_c \end{bmatrix} = y(\dot{\lambda}_t + \dot{\lambda}_c) \geq 0$$

$\dot{\Lambda} = Q_a \dot{q}^p \geq 0$ 热力学第二定律

對於並聯的桿件的能量模式就可以表示成如下:

1 號元件:

$$\dot{W}_1 = Q_1 \dot{q}_1$$

$$= \dot{U}_1 + \dot{\Lambda}_1$$

$$\dot{U}_1 = Q_{1b} \dot{q}_1^p + Q_1 \dot{q}_1^e$$

$$\dot{\Lambda}_1 = Q_{1a} \dot{q}_1^p$$

2 號元件:

$$\dot{W}_2 = Q_2 \dot{q}_2$$

$$= \dot{U}_2 + \dot{\Lambda}_2$$

$$\dot{U}_2 = Q_{2b} \dot{q}_2^p + Q_2 \dot{q}_2^e$$

$$\dot{\Lambda}_2 = Q_{2a} \dot{q}_2^p$$

1. 硬化桿件的 2 號元件耗散 $\dot{\Lambda}_2 = Q_{2a} \dot{q}_2^p \geq 0$

2. 軟化桿件的 2 號元件耗散 $\dot{\Lambda}_2 = Q_{2a} \dot{q}_2^p \leq 0$

而兩根元件合併的能量形式, 滿足熱力學第一定律:

$$\dot{W} = \dot{U} + \dot{\Lambda}$$

$$\dot{W}_1 + \dot{W}_2 = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{\Lambda}_1 + \dot{\Lambda}_2$$

$$Q_1 \dot{q}_1 + Q_2 \dot{q}_2 = Q_{1b} \dot{q}_1^p + Q_1 \dot{q}_1^e + Q_{2b} \dot{q}_2^p + Q_2 \dot{q}_2^e + Q_{1a} \dot{q}_1^p + Q_{2a} \dot{q}_2^p$$

硬化桿件的 2 號元件耗散非負, 軟化桿件的 2 號元件耗散非正, 但是合併以後的系統其耗散還是維持

非負的, 滿足熱力學第二定律:

$$\dot{\Lambda} = \dot{\Lambda}_1 + \dot{\Lambda}_2 \geq 0$$

