

國立台灣大學工學院土木工程學系



碩士論文

Department of Civil Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis

彈塑性本構關係式於土石流之研究

The Study of Debris Flow with  
Elastoplastic Constitutive Equation

許秘嘉

Hsu, Mi-Chia

指導教授：劉格非 博士

Advisor: Liu, Ko-Fei, Ph.D.

中華民國 104 年 7 月

July, 2015

# 國立臺灣大學碩士學位論文

## 口試委員會審定書



### 彈塑性本構關係式於土石流之研究

### The Study of Debris Flow with Elastoplastic Constitutive Equation

本論文係 許秘嘉 (R01521318) 在國立臺灣大學土木工程學系碩士班完成之碩士學位論文，於民國 104 年 7 月 16 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

劉 格 非

(指導教授)

周 憲 德

吳 光 鐘

戴 璽 恆

呂 良 正

Handwritten signature of Liu Gefei in blue ink.

Handwritten signature of Zhou Xunde in black ink.

Handwritten signature of Wu Guangzhong in black ink.

Handwritten signature of Dai Shiheng in black ink.

Handwritten signature of Lu Liangzheng in blue ink.

系主任

(簽名)

## 致謝



能順利的完成這本論文，真的要非常感謝劉格非老師對我的指導，在老師的要求下，我逐漸地明白了做研究所需要的嚴謹態度以及思考原則；尤其是對問題的審視上，不能僅從單方面的解釋就去任意下判斷，應該要更多的與他人交流討論才能得到問題更完整的面貌。在與老師的討論中，除了能得到豐富的學識之外，老師往往也會不斷地教導我做人處事所應盡的原則，讓我深深覺得老師交給我的東西，不僅只是學術上的理論，更多的是社會上必然需要的行為態度。雖然在老師的指導下很辛苦，但在碩士班的這幾年生活中，我真的感到非常的充實。

在研究所的學習過程中，一路走來無論是在學校或生活上我都遇到了很多的挫折跟困難，所以非常感謝研究室的大姐頭、峪萇學長、老吳學長、士超學長、來福學長、瑋珉學長、允峰學長們常常能不厭其煩的教導和幫助我所遇到的大大小小的困難；以及周展名、鄭凱尹們不離不棄的陪伴，和許許多多幫助過我或是讓我了解自己不足之處的所有學長姐、學弟妹們。

這篇論文的完成，除了感謝劉格非老師以及研究所認識的老師、同學之外；我還想特別感謝我的父母家人們不論在我開心、沮喪、難過時對我的關懷跟幫助，以及我室友洪同學長期的陪伴，真的非常謝謝你們。

# 摘要



在台灣由於地狹人稠，隨著社會經濟的持續發展，平地開發趨於飽和的狀況下，造成以前沒有使用的山坡地區陸續的開發使用，破壞了原有集水區的水土保持，尤其在地震以及豪雨發生時間密集的台灣來說，土石流災害更是頻繁的發生；因此土石流的防治與預警將顯得更為重要

對土石流的預警來說，往往需要以動力分析的方式推導出適合的土石流方程式，而在過程中土石流的本構關係式的研究將成為土石流在動力分析上的重要依據。本研究即是在 Julien and Lan(1991)所提出的二次本構式以及降伏應力將土石流分成弱剪層、強剪層的分層概念下，描述強剪層的黏性與慣性剪應力行為之外；並在原有的弱剪層本構關係式上加上線彈性本構理論，多考慮了應力與應變之間的關係。並在二維卡氏座標的描述下以尺度分析的方式得到在長波理論下的土石流控制方程式以及邊界條件，求解土石流體從靜止到啟動前一刻的非穩態解析解，以及土石流體啟動後形成穩態均勻流之後的解析解，並試著描述整個土石流從靜止開始運動至啟動，再至穩態均勻流的整個過程。希冀提供後續土石流在啟動以及強剪層為應力與應變率，弱剪層為應力與應變本構式的研究問題上，作為基本分析或數值實驗的參考。

關鍵字：土石流、彈塑性理論、本構關係式、廣義的虎克定律、尺度分析

# Abstract



In Taiwan, the population is dense, especially in the city. As the development of social economics, it is nearly saturated about the urban development. As a result, the development of slope land is unavoidable. Then, it destroys the soil and water conservation of the original watershed. Especially in the high frequency of earthquake and heavy rain in Taiwan. Debris flow disasters is more frequent occurrence, therefore mudslide prevention and early warning will become more important.

For early warning of debris flow, it often using the dynamic analysis to derive the governing equation of debris flow. In that case, the constitutive equation of debris flow will become very important in the process of derivation. In this study, based on Julien and Lan(1991), the constitutive equation of debris flow is divided into shear layer part and plug layer part. In shear layer, we considered the relation of shear stress and shear strain rate. In shear layer, we applied the linear elasticity and considered the relation of shear stress and shear strain.

With the continuity equation and momentum equation in Cartesian coordinate system and long wave assumption. We derived the new debris flow governing equation and tried to solve steady and uniform state and unsteady state. Wish can provide a new debris flow analytical solutions to become a reference of fundamental analysis or reference of numerical experiments.

# 目錄

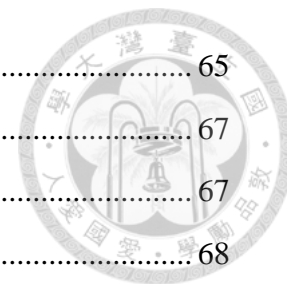


口試委員審定書 .....	I
致謝 .....	II
摘要 .....	III
Abstract .....	IV
目錄 .....	V
表目錄 .....	VIII
圖目錄 .....	IX
第一章 緒論 .....	1
1.1..... 前言 .....	1
1.2..... 前人研究 .....	3
1.2.1 土石流本構關係式研究 .....	3
1.2.2 黏彈性本構關係式研究 .....	3
1.3..... 研究目的與方法 .....	4
1.4..... 論文架構 .....	5
第二章 基本理論 .....	6
2.1..... Julien and Lan 的本構關係式 .....	6
2.2..... 廣義的虎克定律(Hooke's law) .....	7
2.3..... 研究使用的本構關係式 .....	9
2.4..... 控制方程式 .....	11
2.4.1 弱剪層控制方程式 .....	12
2.4.2 強剪層控制方程式 .....	13
2.5..... 邊界條件 .....	14
2.5.1 自由表面 .....	14
2.5.2 弱剪層與強剪層交界面 .....	15
2.5.3 底床 .....	16
2.6..... 尺度分析 .....	17



2.6.1	參數尺度估計 .....	17
2.6.2	全流深控制方程式 .....	21
2.6.3	強剪層厚度尺度估計 .....	23
2.6.4	弱剪層彈性剪應變量尺度估計 .....	26
2.6.5	弱剪層控制方程式 .....	28
2.6.6	強剪層控制方程式 .....	30
2.6.7	邊界條件 .....	35
2.6.7.1	自由表面 .....	35
2.6.7.2	弱剪層與強剪層交界面 .....	36
2.6.7.3	底床 .....	40
第三章	方程式正規化與整理 .....	41
3.1	..... 本構關係式正規化 .....	41
3.1.1	弱剪層本構關係式 .....	41
3.1.2	強剪層本構關係式 .....	41
3.2	..... 控制方程式正規化 .....	42
3.2.1	全流深控制方程式 .....	43
3.2.2	弱剪層控制方程式 .....	44
3.2.3	強剪層控制方程式 .....	46
3.3	..... 邊界條件正規化 .....	50
3.3.1	自由表面 .....	50
3.3.2	弱剪層與強剪層交界面 .....	51
3.3.3	底床 .....	54
3.4	..... 穩態均勻流解 .....	55
3.4.1	全流深部分 .....	56
3.4.2	強剪層部分 .....	57
3.4.3	弱剪層部分 .....	58
3.4.4	穩態均勻流解之整理 .....	60
第四章	非穩態解 .....	64
4.1	..... 問題定義 .....	64

4.2.....	控制方程式 .....	65
4.3.....	邊界條件與初值條件 .....	67
4.4.....	求解非穩態解 .....	67
4.4.1	齊性邊界條件的波動方程解 .....	68
4.4.1.1	$\lambda < 0$ 時 .....	69
4.4.1.2	$\lambda = 0$ 時 .....	69
4.4.1.3	$\lambda > 0$ 時 .....	69
4.4.2	特徵函數展開法 .....	70
4.4.3	Laplace transform .....	70
4.4.3.1	剪應力函數 .....	71
4.4.3.2	啟動條件 .....	72
第五章	結論與建議 .....	74
5.1.....	結論 .....	74
5.2.....	建議 .....	75
參考文獻	.....	76





# 表目錄



表 1-1.....	2
表 2-1.....	8
表 2-2.....	18
表 2-3.....	19
表 2-4.....	19
表 2-5.....	20
表 2-6.....	25
表 2-7.....	34
表 3-1.....	44
表 3-2.....	46
表 3-3.....	48
表 3-4.....	49
表 3-5.....	54
表 3-6.....	56
表 4-1.....	57

# 圖目錄

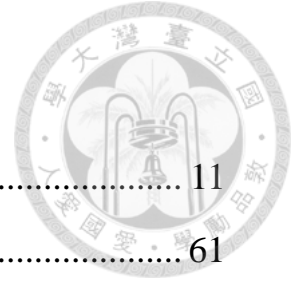


圖 2-1.....	11
圖 3-1.....	61
圖 3-2.....	61
圖 3-3.....	62
圖 3-4.....	62
圖 3-5.....	63
圖 4-1.....	64

# 第一章 緒論



## 1.1 前言

土石流(debris flow)，又稱為泥石流，是由泥、砂、礫石及巨石等物質與水所形成之高濃度混合物，受重力作用所產生的一種沿坡面或溝渠由高處往低處流動之自然現象。依據行政院農委會水土保持局所編印之「水土保持手冊」的分類，土石流按照其內所含的不同物質組成之材料粒徑分佈，大致可分為石流、泥流以及土石流三類。

- (1) 石流(granular flow)：土石流體內粒徑 $0.1mm$ 以下之泥沙含量在10%以下者。此類土石流中大多為大顆粒之石塊，例如砂石、礫石和卵石等；其運動方式以碰撞和滾動為主，泥水只扮演潤滑的角色，流速約在 $3\sim 10m/s$ 之間，相較泥流而言破壞力大但流動距離較短。
- (2) 泥流(mud flow)：土石流體內粒徑 $0.1mm$ 以下之泥沙含量在50%以上者。此類土石流中組成的石塊顆粒相較石流而言較小，主要為黏土、粉土和砂等。細顆粒；其運動方式以泥水本身的流動為主，而砂石則懸浮於其中，流速約為 $2\sim 20m/s$ ，相較石流而言破壞力小但流動距離較長，其災害型態主要為淹沒農地與民宅。
- (3) 土石流(debris flow)：土石流體內粒徑 $0.1mm$ 以下之泥沙含量介於至50%之間者。其運動型態介於石流與泥流之間。

土石流發生之原因，與集水區上游所堆積的豐富土石材料、適當的地形坡度以及充足的水分，有密切的關係。對於地質條件不穩定的山坡地而言，在許多因風化而形成的石塊、泥砂、土壤，經由墜落、傾翻、滑動等山坡地土體運動型式而堆積在河谷或坡腳後；這些土石材料就有可能在之後的豪雨所帶來的豐沛雨量中，與水充分混合並因重力作用隨著坡面向下流動形成流動速度快、破壞力強大的土石流。

在台灣由於地狹人稠，隨著社會經濟的持續發展，平地開發趨於飽和的狀況下，造成以前沒有使用的山坡地區陸續的開發使用，破壞了原有集水區的水土保持。而且以台灣島本身的地文以及水文情況來說；丘陵、台地與山區的面積就占

了全島約 63%(李光敦, 2005), 山脈地質又多屬沉積岩及變質岩, 這些質地易斷裂且高度風化的岩層, 在數次的自然或人為影響下產生的堆積土石, 在地震以及豪雨來臨時, 就有可能產生土石流, 造成下游居住地區的居民生命財產損失。下表 1-1 即為根據行政院農委會水土保持局在 2008 年防災歷年成果專輯中整理出的, 台灣歷年颱風與土石流災害統計。

表 1-1 台灣歷年颱風與土石流災害統計(防災歷年成果專輯, 2008)

時間	災害名稱	颱風總災情			土石流災害		
		死亡	失蹤	受傷	死亡	失蹤	受傷
90.07.30	桃芝颱風 (TORAJI)	111	103	188	55	93	33
90.09.17	納莉颱風 (NARI)	94	10	265	4	0	0
93.07.02	敏督利颱風 (MINDULLE)	29	12	16	6	0	3
93.08.23	艾利颱風 (AERE)	14	15	395	4	2	1
94.07.17	海棠颱風 (HAITANG)	13	2	31	0	0	0
96.08.18	聖帕颱風 (SEPAT)	0	1	28	0	0	0
96.10.06	柯羅莎颱風 (KROSA)	9	2	57	0	0	0
97.07.16	卡玫基颱風 (KALMAEGI)	20	6	8	0	0	0
97.09.14	辛樂克颱風 (SINLAKU)	14	7	20	0	0	0



## 1.2 前人研究

### 1.2.1 土石流本構關係式研究

對於土石流本構關係的研究上，主要為針對具有降伏應力的非牛頓流體而言，其探討的是剪應力與剪應變率之間的關係；由於流體存在降伏應力，因此在運動時將會因為受到的剪應力大小而將流體分成作用剪應力大於降伏應力之強剪層以及小於降伏應力之弱剪層兩部分。對於強剪層的組成率而言，不同粒徑組成的土石流將具有不同的剪應力與應變率之間的關係；以大顆粒土壤材料為主要組成的石流型土石流(Granular flow)，其本構關係式多為考慮顆粒間碰撞造成的慣性剪應力，例如 Bagnold 模式(1954)；以小顆粒土壤材料為主要組成的泥流型土石流(mud flow)，其本構關係式多為考慮黏滯剪應力對流動的影響，例如賓漢流體(Bingham Fluid)模式(Wan and Wang, 1994)，以及 Coussot(1994)提出的以考慮剪應力隨剪應變率增加而下降之 Herschel-Bulkley 模式等；而 Julien and Lan(1991)則是用粗細不等的土壤材料證明了 Bagnold 模式(1954)事實上可利用泥流的降伏應力與剪應變率一次項的賓漢模式(Wan and Wang, 1994)，再加入一個剪應變率的二次項來表示其慣性剪應力項。

### 1.2.2 黏彈性本構關係式研究

無論是 Bagnold 模式(1954)、賓漢流體(Bingham Fluid)模式(Wan and Wang, 1994)、Herschel-Bulkley 模式(Coussot, 1994)還是 Julien and Lan(1991)所提出的二次本構關係式而言；其剪應力與剪應變率之間的關係都是考慮在強剪層區域的問題，而對於弱剪層區域而言，都是在降伏應力分層的物理意義下，以弱強剪層交界面剪應變率為零的條件求出弱剪層的速度分佈，而對於弱剪層應力與應變之間的關係；L. Fusi, A. Farina(2004,2010,2011,2012)提出了一個新的黏彈塑性本構關係式，其在弱剪層區域考慮了應力與應變關係的彈性理論，並應用於潤滑理論(Lubrication Theory)上，探討弱剪層應力與應變之間的關係。而對於現場土石流弱剪層而言，其受到外力作用將會產生與彈性有關的可回復應變以及與塑性有關的不可回復應變；因此本研究即是在土石流本構關係式中，在弱剪層部分引入彈性作用的影響，並且藉此推導出新的土石流控制方程式。



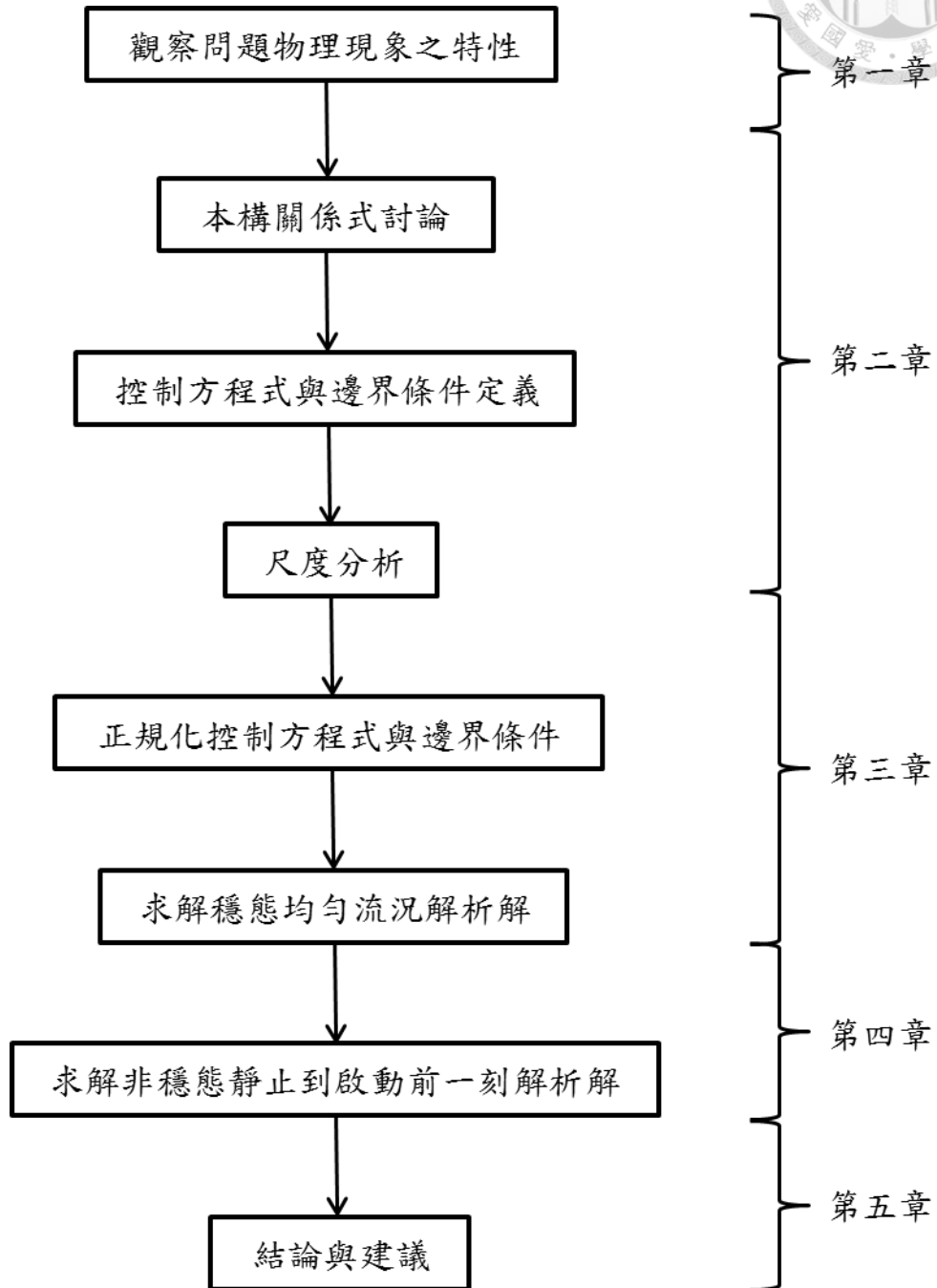
### 1.3 研究目的與方法

對於具有降伏應力的土石流體，土石流的運動行為可以分成土石流材料受到的剪應力大於降伏應力之強剪層(Shear layer or Boundary layer)，以及土石流材料受到的剪應力小於降伏應力之弱剪層(Plug layer)等兩區域。例如 Julien and Lan(1991)所提出的二式本構式而言；在強剪層區域中，土石流在運動過程中內部材料的應力大小將與土石流本身的降伏應力、土石流體與顆粒間之黏滯剪應力以及紊流和顆粒間碰撞之慣性剪應力有關；但對於弱剪層區域而言，該式僅表達了該區域內的土石流運動其內部材料之間並無應變率的存在，也就是指運動中的土石流材料在未發生降伏時，其內部材料之間的相對速度非常微小，弱剪層的土石流運動猶如土壤材料整層沿著弱強剪層交界面滑動的行為。

因此為了要分析弱剪層內部材料之間的應力關係，我們試著從土壤力學中土壤受應力之後產生的可回復應變(彈性應變)以及不可回復應變(塑性應變)之間的關係出發，在 Julien and Lan 的本構模式下加入弱剪層土石流材料在運動過程中應力與應變之間的關係。而為了簡化分析，本研究首先僅考慮弱剪層區域內的彈性應變行為，並使用線彈性本構關係式，也就是指廣義的 Hook's Law 對弱剪層的應力應變關係進行描述。

在本研究問題中，使用二維的卡氏座標以及強剪層為 Julien and Lan(1991)所提出的應力與應變率的二次本構式，弱剪層為應力與應變的線彈性本構式；做為整層土石流流動時的組成率。之後再以尺度分析的方式得到在長波理論下的土石流控制方程式以及邊界條件，求解土石流體從靜止到啟動前一刻的非穩態解析解，以及土石流體啟動後形成穩態均勻流之後的解析解，並試著描述整個土石流從靜止開始運動至啟動，再至穩態均勻流的整個過程。希冀提供後續土石流在啟動以及強剪層為應力與應變率，弱剪層為應力與應變本構式的研究問題上，作為基本分析或數值實驗的參考。

## 1.4 論文架構



## 第二章 基本理論



### 2.1 Julien and Lan 的本構關係式

由 Julien and Lan(1991)所提出的一維本構關係式可知：

$$\begin{cases} \tau = \tau_0 + \mu_d \left( \frac{dv_1}{dz} \right) + \mu_c \left( \frac{dv_1}{dz} \right)^2 & ; |\tau| < \tau_0 \\ \frac{dv_1}{dz} = 0 & ; |\tau| < \tau_0 \end{cases} \quad (2-1)$$

其中  $\tau$  為剪應力， $\tau_0$  為降伏應力(yield stress)， $\mu_d$  為動力黏滯度(dynamic viscosity)， $\mu_c$  為紊亂-離散參數(turbulent-dispersive parameter)， $\frac{dv_1}{dz}$  為垂直接流動方向的速度梯度，代表了材料的變形率。(2-1)式包含了降伏應力、一次及二次變形率；在黏性領域時  $\mu_d \left( \frac{dv_1}{dz} \right) \gg \mu_c \left( \frac{dv_1}{dz} \right)$ ，在慣性領域時  $\mu_d \left( \frac{dv_1}{dz} \right) \ll \mu_c \left( \frac{dv_1}{dz} \right)$ ，故此本構關係式可自土石流之黏性領域一直計算至慣性領域。至於黏性領域與慣性領域之分界點則為  $\frac{dv_1}{dz} = O \left( \frac{\mu_d}{\mu_c} \right)$ 。經過 Julien and Lan(1991)的測試，該式的確可以模擬土石流、石流及泥流在不同變形率下之行為。

藉由(2.1)式降伏應力之觀點，可將土石流的運動行為分成土石流材料受到的剪應力大於降伏應力之強剪層(Shear layer or Boundary layer)，以及土石流材料受到的剪應力小於降伏應力之弱剪層(Plug layer)等兩區域。在強剪層區域中，土石流在運動過程中內部材料的應力大小將與土石流本身的降伏應力、土石流體與顆粒間之黏滯剪應力以及紊流和顆粒間碰撞之慣性剪應力有關；但對於弱剪層區域而言，該式僅表達了該區域內的土石流運動其內部材料之間並無應變率的存在，也就是指運動中的土石流材料在未發生降伏時，其內部材料之間的相對速度非常微小，弱剪層的土石流運動猶如土壤材料整層沿著弱強剪層交界面滑動的行為。因此為了要分析弱剪層內部材料之間的應力關係，我們試著從土壤力學中土壤受應力之後產生的可回復應變(彈性應變)以及不可回復應變(塑性應變)之間的關係出發，在 Julien and Lan 的本構模式下加入弱剪層土石流材料在運動過程中應力與應變之間的關係。而為了簡化分析，本研究首先僅考慮弱剪層區域內的彈性應變行為。





## 2.2 廣義的虎克定律(Hooke's law)

首先從土石流體內部微小體積元素受到的總應力的觀點出發，該總應力可以分成初始靜止時就有存在的壓力項，以及微小體積單元發生應變時才會出現的剪應力項兩部分。

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau \quad (2-2)$$

其中  $\sigma_{ij}$  為連體場內，土石流材料中內部某微小立方體元素所受的總應力， $P$  為土石流的壓力， $\delta_{ij}$  為克羅內克函數(Kronecker delta function)， $\tau_{ij}$  為土石流剪應力。

考慮土石流是一個不可壓縮流體，並且在運動過程中，弱剪層土壤材料其應力與彈性應變之間的比例常數滿足均質(homogeneous)、等向性(isotropy)，並且在變形過程中屬於小變形假設(small deformation assumption)之情況。則此時藉由不可壓縮、均質且等向性之廣義的虎克定律，將(2-2)式中的剪應力項以彈性剪應變的形式展開。

$$\tau_{ij} = 2Ge_{ij} \quad (2-3)$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2Ge_{ij} \quad (2-4)$$

其中(2-3)式即為不可壓縮材料下的廣義的虎克定律(Hooke's law)，(2-4)式為弱剪層土石流運動中內部受到的總應力張量，其與壓力以及剪應力所造成的剪應變量有關； $G$  為剪力模量(shear modulus)， $e_{ij}$  為剪應力所產生的剪應變量張量，該應變量之值可由變形前後的彈性位移變化量函數描述，記為

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2-5)$$

$u_i$  為弱剪層土壤材料在變形過程中的彈性位移函數，其與空間以及時間函數有關，其中  $i, j$  為  $1 \sim 2$ 。則該應變量張量之值記為

$$|e_{ij}| = \left[ \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} \right]^{1/2} \quad (2-6)$$

另外，由於均質等向性的材料其楊氏模量(Young's modulus,  $E$ )、柏松比(Poisson's ration,  $\nu$ )、彈性模量(Bulk modulus of elasticity,  $k$ )、拉梅常數  $\lambda$ 、剪力模量  $G$ ，兩兩之間具有一定的比例關係，因此只要在知道其中兩項數值的情況下，即可推求出其他所有項的數值大小，如下表 2-1 所示。其中  $R = \sqrt{E^2 + 9\lambda^2 + 2E\lambda}$ 。



表 2-1 均值等向性材料的彈性常數換算表(Elasticity, 2009)

	$E$	$\nu$	$k$	$\lambda$	$G$
$(E, \nu)$	$E$	$\nu$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$
$(E, k)$	$E$	$\frac{3k-E}{6k}$	$k$	$\frac{3k(3k-E)}{9k-E}$	$\frac{3kE}{9k-E}$
$(E, \lambda)$	$E$	$\frac{2\lambda}{E+\lambda+R}$	$\frac{E+3\lambda+R}{6}$	$\lambda$	$\frac{E-3\lambda+R}{4}$
$(E, G)$	$E$	$\frac{E}{2G}-1$	$\frac{GE}{3(3G-E)}$	$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$	$G$
$(\nu, k)$	$3k(1-2\nu)$	$\nu$	$k$	$\frac{3k\nu}{1+\nu}$	$\frac{3k(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$
$(\nu, \lambda)$	$\frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu}$	$\nu$	$\frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu}$	$\lambda$	$\frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu}$
$(\nu, G)$	$2G(1+\nu)$	$\nu$	$\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{2G\nu}{1-2\nu}$	$G$
$(k, \lambda)$	$\frac{9k(k-\lambda)}{3k-\lambda}$	$\frac{\lambda}{3k-\lambda}$	$k$	$\lambda$	$\frac{3}{2}k-\lambda$
$(k, G)$	$\frac{9kG}{6k+G}$	$\frac{3k-2G}{6k+2G}$	$k$	$k-\frac{2}{3}G$	$G$
$(\lambda, G)$	$\frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+G)}$	$\frac{3\lambda+2G}{3}$	$\lambda$	$G$



## 2.3 研究使用的本構關係式

為了要分析弱剪層土石流材料的應力與彈性應變之間的關係，我們將 Julien and Lan(1991)的一維本構關係式推衍至張量型式，並且將均質等向性的線彈性本構關係式(2-3)式加入 Julien and Lan 的張量形式的本構式的弱剪層區域中，作為土石流運動過程中的本構關係式。

$$\begin{cases} \tau_{ij} = \left( \frac{\tau_0}{|\dot{e}_{ij}|} + \mu_d + \mu_c |\dot{e}_{ij}| \right) \dot{e}_{ij} & ; |\tau_{ij}| \geq \tau_0 \\ \tau_{ij} = 2G e_{ij} & ; |\tau_{ij}| \leq \tau_0 \end{cases} \quad (2-7)$$

$\tau_{ij}$  為剪應力張量， $\dot{e}_{ij}$  為剪應變率張量， $e_{ij}$  為剪應變張量， $\tau_0$  為降伏應力， $\mu_d$  為動力黏滯度， $\mu_c$  為紊亂-離散參數。這裡我們沿用了與 Julien and Lan(1991)本構式中的降伏應力分層相同的概念，將土石流運動分成土石流材料受到的剪應力大於降伏應力之強剪層，以及土石流材料受到的剪應力小於降伏應力之弱剪層等兩區域。因此在弱強剪層交界面處其作用剪應力為等於降伏應力且剪應變率為趨近於零，而弱剪層區域的微小應變變化則藉由線彈性本構理論描述。其中(2-7)式中弱剪層剪應力張量  $\tau_{ij}$ 、剪應變張量  $e_{ij}$ 、彈性位移函數  $u_i$  與各張量大小；以及強剪層剪應力張量  $\tau_{ij}$ 、剪應變率張量  $\dot{e}_{ij}$  與各張量之值，在下圖 2-1 的本研究中的二維卡氏坐標展開時整理為

弱剪層部份

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad |e_{ij}| = \left( \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad |\tau_{ij}| = \left( \frac{1}{2} \tau_{ij} \tau_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2-8)$$

$$\begin{cases} \tau_{xx} = 2G e_{xx} & \tau_{xy} = G e_{xy} \\ \tau_{yy} = 2G e_{yy} & \tau_{yx} = G e_{yx} \end{cases} \quad (2-9)$$

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (2-10)$$

$$|e_{ij}| = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2-11)$$



$$|\tau_i| = \left[ \frac{1}{2} (\tau_{xx}^2 + \tau_{yy}^2 + 2\tau_{xy}^2) \right]^{1/2} \quad (2-12)$$

強剪層部份

$$\dot{e}_{ij} = \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad , \quad |\dot{e}_{ij}| = \left( \frac{1}{2} \dot{e}_{ij} \dot{e}_{ij} \right)^{1/2} \quad , \quad |\tau_{ij}| = \left( \frac{1}{2} \tau_{ij} \tau_{ij} \right)^{1/2} \quad (2-13)$$

$$\begin{cases} \tau_{xx} = \left[ \left( \frac{\tau_0}{|\dot{e}_{ij}|} + \mu_d + \mu_c |\dot{e}_{ij}| \right) \right] \dot{e}_{xx} \quad , \quad \tau_{xy} = \left[ \left( \frac{\tau_0}{|\dot{e}_{ij}|} + \mu_d + \mu_c |\dot{e}_{ij}| \right) \right] \dot{e}_{xy} \\ \tau_{yy} = \left[ \left( \frac{\tau_0}{|\dot{e}_{ij}|} + \mu_d + \mu_c |\dot{e}_{ij}| \right) \right] \dot{e}_{yy} \quad , \quad \tau_{yx} = \left[ \left( \frac{\tau_0}{|\dot{e}_{ij}|} + \mu_d + \mu_c |\dot{e}_{ij}| \right) \right] \dot{e}_{yx} \end{cases} \quad (2-14)$$

$$e_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad , \quad e_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad , \quad e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (2-15)$$

$$|\dot{e}_{ij}| = \left[ 2 \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right]^{1/2} \quad (2-16)$$

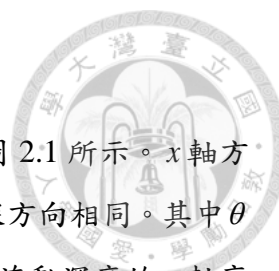
$$|\tau_i| = \left[ \frac{1}{2} (\tau_{xx}^2 + \tau_{yy}^2 + 2\tau_{xy}^2) \right]^{1/2} \quad (2-17)$$

需要特別注意的是， $u_x$ 、 $u_y$  分別代表土石流於  $x$ 、 $y$  方向的彈性位移函數； $v_x$ 、 $v_y$  則分別表示土石流於  $x$ 、 $y$  方向的流速。並且由流場的實質導函數(Material derivative)可知，土石流速度與彈性位移函數以及流速之間的關係記為

$$\underbrace{v_x = \frac{du_x}{dt}}_{(1)} = \underbrace{\frac{\partial u_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial u_x}{\partial y}}_{(2)} \quad . \quad \text{其中(1)式表達了速度與彈性位移之間的關係，(2)}$$

式則表達了該速度可在流場的實質導函數下表示為局部導函數項(Local derivative)以及對流導函數項(Convective derivative)兩部分；對局部導函數項而言，其與局部的彈性位移對時間的變化有關；對對流導函數項而言，其與該位置的流速所造成的彈性位移變化量有關。

(2-7)式表達了在強剪層區域中，剪應力與降伏應力、黏滯剪應力、慣性剪應力有關；在弱剪層區域中，剪應力則與土石流材料所產生之彈性應變有關，而兩層之間的交界則是以剪應力等於降伏應力作區隔。與(2-1)式不同的是，本研究考慮了弱剪層應力與彈性應變間的關係。



## 2.4 控制方程式

以二維卡氏座標描述現場土石流於溪床上之運動過程，如圖 2.1 所示。 $x$  軸方向為沿著土石流向下游流動之方向， $y$  軸方向則與土石流之流深方向相同。其中  $\theta$  為底床坡度， $y=B(x,t)$  為底床的  $y$  軸高度， $y=h(x,t)$  為土石流流動深度的  $y$  軸高度， $y=H(x,t)$  為土石流弱剪層厚度的  $y$  軸高度， $y=\delta(x,t)$  為土石流強剪層厚度的  $y$  軸高度，則土石流於底床的弱強剪層交界面的  $y$  軸高度記為  $y=B(x,t)+\delta(x,t)$ 。

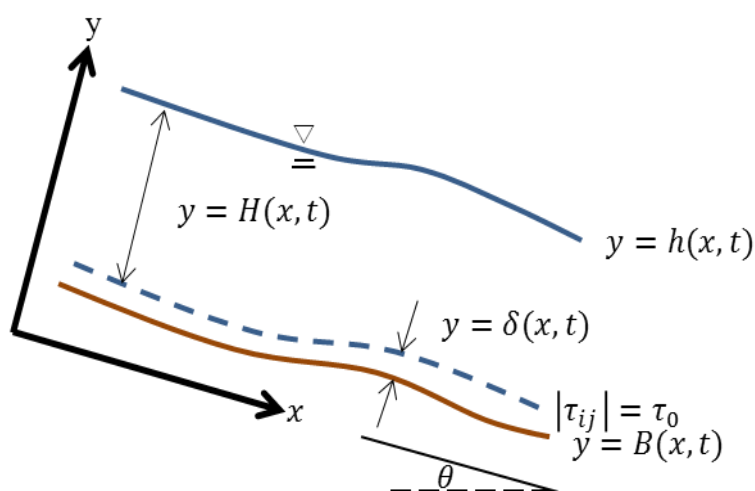
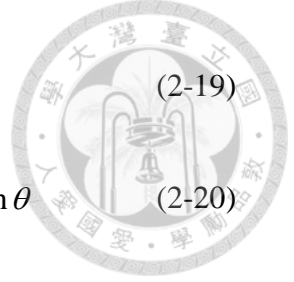


圖 2-1 土石流運動過程中的卡氏座標圖式

考慮土石流的運動是在一個質量守恆的系統，則在不可壓縮土石流體的假設情況下，土石流運動過程中的質量守恆式與動量方程式寫為

$$\begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial v_j}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + g_j \end{cases} \quad (2-18)$$

其中  $v_i$  為土石流的流速張量， $\tau_{ij}$  為內部土石流材料受到的剪應力張量， $p$  為土石流壓力， $\rho$  為土石流密度， $g$  為重力加速度，下標  $i$ 、 $j$  為 1~2。以圖 2-1 之二維卡氏坐標展開時， $v_1 = v_x$ 、 $v_2 = v_y$  分別為土石流於  $x$ 、 $y$  方向之速度， $\tau_{11} = \tau_{xx}$ 、 $\tau_{12} = \tau_{xy}$ 、 $\tau_{21} = \tau_{yx}$ 、 $\tau_{22} = \tau_{yy}$  分別為土石流內部材料受到的剪應力分量。則此時將連續方程式與動量方程式以圖 2-1 卡式座標軸展開後，即為土石流運動之全流深控制方程式，記為



$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (2-19)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) + g \sin \theta \quad (2-20)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) - g \cos \theta \quad (2-21)$$

### 2.4.1 弱剪層控制方程式

為了得到弱剪層的控制方程式，我們將(2-7)式中的弱剪層本構關係式代入(2-18)式的動量方程式中

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (2G e_{ij}) + g_j \quad (2-22)$$

以(2-8)式的彈性位移函數  $u_i$  展開應變量張量  $e_{ij}$

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{2G}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + g_j \quad (2-23)$$

由不可壓縮土石流之體積應變量等於零可知  $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$ ，則整理(2-23)式並加上(2-18)式中的連續方程式，可得弱剪層控制方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial v_j}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} + g_j \end{cases} \quad (2-24)$$

其中  $\frac{\partial v_j}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$  為土石流弱剪層運動所產生的慣性力項， $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j}$  為運動過程中產

生的壓力項， $\frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2}$  為各方向之剪應變變化量在各軸所形成的單位質量彈力項， $g_j$

為重力項；。(2-24)式以二維卡式座標展開時

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (2-25)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{G}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + g \sin \theta \quad (2-26)$$



$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{G}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) - g \cos \theta \quad (2-27)$$

## 2.4.2 強剪層控制方程式

為了得到強剪層的控制方程式，同樣的我們將(2-7)式中的強剪層本構關係式代入(2-18)式的動量方程式中

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \frac{\tau_0}{|\dot{\epsilon}_{ij}|} + \mu_d + \mu_c |\dot{\epsilon}_{ij}| \right) \dot{\epsilon}_{ij} \right] + g_j \quad (2-28)$$

以(2-13)式中的剪應變率張量 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 整理(2-28)式，並加上(2-18)式中的連續方程式可得強剪層控制方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial v_j}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \frac{\tau_0}{|\dot{\epsilon}_{ij}|} + \mu_d + \mu_c |\dot{\epsilon}_{ij}| \right) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + g_j \end{cases} \quad (2-29)$$

將(2-29)式以二維卡式座標展開時

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (2-30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \theta \\ + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\tau_0}{|\dot{\epsilon}_{ij}|} + \mu_d + \mu_c |\dot{\epsilon}_{ij}| \right) \right] \left( 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\tau_0}{|\dot{\epsilon}_{ij}|} + \mu_d + \mu_c |\dot{\epsilon}_{ij}| \right) \right] \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2-31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \cos \theta \\ + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\tau_0}{|\dot{\epsilon}_{ij}|} + \mu_d + \mu_c |\dot{\epsilon}_{ij}| \right) \right] \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\tau_0}{|\dot{\epsilon}_{ij}|} + \mu_d + \mu_c |\dot{\epsilon}_{ij}| \right) \right] \left( 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2-32)$$

其中，(2-31)、(2-32)式內各剪應力分量展開為

$$\tau_{xx} = \left[ \left( \frac{\tau_0}{|\dot{\epsilon}_{ij}|} + \mu_d + \mu_c |\dot{\epsilon}_{ij}| \right) \right] \left( 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} \right), \quad \tau_{yy} = \left[ \left( \frac{\tau_0}{|\dot{\epsilon}_{ij}|} + \mu_d + \mu_c |\dot{\epsilon}_{ij}| \right) \right] \left( 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \quad (2-33)$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \left[ \left( \frac{\tau_0}{|\dot{\epsilon}_{ij}|} + \mu_d + \mu_c |\dot{\epsilon}_{ij}| \right) \right] \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (2-34)$$



## 2.5 邊界條件

對於現場土石流而言，底床河道的固體邊界在土石流運動過程中將提供一個抑制土石流運動的阻力，使得靠近邊界處的土石流體受到較大的剪應力而可能產生作用剪應力大於降伏應力的強剪層區域出現。因此現場土石流於溪床上運動過程中的邊界條件，可以運用(2-7)式降伏應力分層的觀念將土石流邊界分成自由表面與弱強剪層交界面以及底床等三個部分去討論，如圖 2.1 之自由表面藍色實線、弱強剪層交界藍色虛線以及底床棕色線所構成的假想邊界線所示。

### 2.5.1 自由表面

對於土石流運動中的自由表面邊界而言，它是一個土石流體與空氣互相接觸的交界面。由運動狀態來看，在考慮過程中土石流體與空氣不會有質量交換的情況下，交界面處的土石流體質點必然無法穿越該邊界，而使質點速度在任何時刻都與自由表面相切，因此自由表面處的土石流體質點的法向量速度必然與邊界的法向量速度相等；也就是指具有運動邊界條件(Kinematic boundary condition)。當自由表面函數以  $y-h(x,t)=0$  表示時，KBC 在數學上記為

$$\frac{d(y-h)}{dt} = 0 \quad \text{at} \quad y = h(x,t) \quad (2-35)$$

其中(2-35)式展開為

$$v_y = \frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{at} \quad y = h(x,t) \quad (2-36)$$

而從動力狀態來看該自由表面邊界的話，在連體場的考慮下，交界面處的應力必然滿足空氣所提供的應力與土石流體所提供的應力互相相等之概念。也就是指具有動力邊界條件(Dynamic boundary condition)。而 DBC 在數學上的表達，可藉由任意面  $\Sigma_i$  的應力表達式  $\Sigma_i = \sigma_{ij} \cdot n_j$  做描述，其中  $i=x$  方向， $j=y$  方向。

$$\Sigma_i = \sigma_{ij} \cdot n_j \Big|_{\text{bedrock flow}} = \sigma_{ij} \cdot n_j \Big|_{\text{air}} \quad \text{at} \quad y = h(x,t) \quad (2-37)$$

其中  $\Sigma_i$  在此為考慮沿著  $i$  軸方向的自由表面的合力， $n_j$  為自由表面的向外法向量於  $j$  方向的分量，其可以自由表面的單位梯度向量描述；記為

$$n_j = (n_x, n_y) = \frac{\nabla(z-h)}{|\nabla(z-h)|} = \frac{-1}{|\nabla(z-h)|} \left( \frac{\partial}{\partial x}, 1 \right) \quad (2-38)$$





則此時以(2-4)式與(2-38)式整理(2-37)式，並且忽略空氣所提供的應力時

$$\Sigma_i = (-p\delta_{ij} + \tau_{ij}) n_j \Big|_{D_{j e b r i s f l o w}} = 0 \quad a t \quad = h \quad y x \quad (2-39)$$

$$\Sigma_x = (-p + \tau_{xx}) \frac{\partial h}{\partial x} - \tau_{xy} = 0 \quad a t \quad = h \quad x y \quad (2-40)$$

$$\Sigma_y = \tau_{yx} \frac{\partial h}{\partial x} - (-p + \tau_{yy}) = 0 \quad a t \quad = h \quad x y \quad (2-41)$$

而對於自由表面邊界而言，其位於土石流之弱剪層運動區域；因此再以(2-3)式與(2-5)式將(2-40)~(2-41)式中剪應力項展開

$$\Sigma_x = -p \frac{\partial h}{\partial x} + 2G \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} - G \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = 0 \quad a t \quad = h \quad x \quad t y \quad (2-42)$$

$$\Sigma_y = G \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + p - G \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad a t \quad = h \quad x \quad t y \quad (2-43)$$

### 2.5.2 弱剪層與強剪層交界面

對於土石流運動而言，弱剪層與強剪層的分界是以土石流本身的降伏應力以及運動過程中所受到的剪應力大小而產生的運動型態分層的概念，因此在靠近底床的弱強剪層交界面處，其仍然都屬於同一個土石流體的運動。在連體場的架構下，該交界面處仍然需要保持弱剪層與強剪層的運動性質以及動力性質連續的條件，也就是說在靠近底床的弱強剪層交界面處的土石流體質點，其弱強剪層的速度、剪應力以及壓力將為互相相等的。如下(2-44)式所示，其中下標  $p$  代表 Plug layer 為弱剪層部分，下標  $s$  代表 Shear layer 為強剪層部分。

$$v_{ip} = v_{is}, \quad \tau_{ijp} = \tau_{ijs}, \quad p_p = p_s \quad a t \quad = B \quad x + \delta \quad y \quad (2-44)$$

而在運動過程中，由於土石流是以降伏應力分成弱剪層以及強剪層等兩個不同的區域，因此在弱強剪層交界面處除了具有運動與動力性質連續之外，該界面的剪應力大小也將等於土石流本身的降伏應力值。由(2-17)式可知該交界面的剪應力記為

$$|\tau_0| = \left[ \frac{1}{2} (\tau_{xx}^2 + \tau_{yy}^2 + 2\tau_{xy}^2) \right]^{1/2} \quad a t \quad = B \quad y + \delta \quad (x) \quad (2-45)$$

則此時分別以弱剪層以及強剪層的剪應力關係式展開(2-45)式。首先對於弱剪層部



分而言，代入(2-9)、(2-10)式的弱剪層剪應力關係式展開(2-45)式，可得交界面處降伏應力與剪應變之間的關係式

$$\tau_0 = \left[ 2G^2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + G^2 \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + 2G \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right]^{1/2} \quad \text{at } y = B(x, t) + \delta(x, t) \quad (2-46)$$

對於強剪層部分而言，代入(2-14)、(2-15)式展開(2-45)式，可得交界面處降伏應力與剪應變率之間的關係式

$$\tau_0 = \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\tau_0}{|\dot{e}_{ij}|} + \mu_d + \mu_c |\dot{e}_{ij}| \right) \left( 2 \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \right]^2 + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\tau_0}{|\dot{e}_{ij}|} + \mu_d + \mu_c |\dot{e}_{ij}| \right) \left( 2 \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]^2 + \left[ \left( \frac{\tau_0}{|\dot{e}_{ij}|} + \mu_d + \mu_c |\dot{e}_{ij}| \right) \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial x} + \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]^2 \right\}^{1/2} \quad \text{at } y = B(x, t) + \delta(x, t) \quad (2-47)$$

其中(2-47)式中剪應變率張量之值 $|\dot{e}_{ij}|$ 如(2-16)式所示。

### 2.5.3 底床

對於底床邊界而言，它是一個土石流體與固體邊界的交界面。在土石流黏性作用以及不考慮土石流運動過程中沖刷和淤積對底床的影響下，底床邊界處的土石流體質點速度除了具有無滑移邊界條件(No slip condition)而使邊界速度等於零之外；底床邊界在運動過程中將不隨著時間發生變化。

$$v_{is} = 0 \quad \text{at } z = B(x) \quad (2-48)$$



## 2.6 尺度分析

為了瞭解土石流在運動過程中的物理特性，於本節開始我們將整個土石流的運動分成全流深、弱剪層以及強剪層土石流這三個部分，運用尺度分析的方式，以現場土石流的尺度各別分析土石流全流深、弱剪層以及強剪層的控制方程式，忽略控制方程式中各項內的小尺度項，以及各項互相比較後的小尺度項對土石流運動的影響。在整個尺度分析的流程裡，我們是先進行土石流全流深的尺度分析，並以全流深控制方程式的尺度分析的結果，去進行強剪層厚度的尺度以及弱剪層彈性剪應變量尺度的估計，之後再分別以該估計結果去進行弱剪層以及強剪層控制方程式的尺度分析。

其中由(2-18)、(2-24)、(2-29)式可以知道，我們需要了解現場土石流在運動過程中的幾何尺度( $x$ 、 $y$ 、 $\theta$ )、運動尺度( $v_x$ 、 $v_y$ 、 $t$ )、壓力尺度( $p$ )、剪應力尺度( $\tau_{ij}$ )、強剪層厚度尺度( $\delta$ )、彈性位移尺度( $u_x$ 、 $u_y$ )、土石流的密度 $\rho$ 、剪力模量 $G$ 、動力黏滯度 $\mu_d$ 、紊亂-離散參數 $\mu_c$ 等。

### 2.6.1 參數尺度估計

對於現場土石流而言，所在之溪床寬度以及流動深度往往都在 5 公尺左右，但長度卻可達 100 公尺以上；如下表 2-2 Jan and Chen(2005)整理 1996 年賀伯颱風造成南投縣陳有蘭溪集水區內土石流的流寬、堆積深度以及坡度特徵所示。因此考慮土石流的運動為在長波理論的假設下，土石流沿著流長方向的尺度為遠大於土石流沿著流深方向的尺度。其中令流長方向尺度為  $x = O(L)$ ，流深方向尺度為

$y = O(D)$ ，且  $L = 100m$ 、 $D = 5m$ 、 $O(\frac{L}{D}) \gg O(1)$ 、 $\theta = 10^\circ$ 。

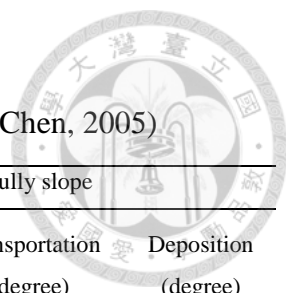


表 2-2 賀伯颱風期間陳有蘭溪集水區土石流特徵(Jan and Chen, 2005)

Location	Flow type	Gully width (m)	Alluvial Fan		Gully slope		
			Area (ha)	Average Depth (m)	Initiation (degree)	Transportation (degree)	Deposition (degree)
Junkengkou	Bouldery	5	0.90	4	33.7	16.0	16.0
Junkengqiao	Cobble-gravelly	5	1.45	4	25.2	12.0	9.1
Xinyizhongxin	Cobble-gravelly	4	0.36	3	23.1	18.0	6.0
Sangfengqiu	Cobble-gravelly	5	0.52	3	34.6	16.0	7.0
Fengqiu	Bouldery	9	9.10	5	27.4	18.0	5.7
Tongfu	Muddy	6	1.67	3	27.2	17.8	8.5
Longhua	Muddy	6	2.60	4	28.6	15.0	15.0
Shenmu	Cobble-gravelly	12	5.56	4	29.3	11.2	7.4

現場土石流的流速，依據行政院農委會水土保持局所編印的「水土保持手冊」的調查，泥流約介於  $2 \sim 20 m/s$  之間，而石流約介於  $3 \sim 10 m/s$  之間，因此估計土石流於  $x$  方向之速度尺度為  $U = 5 m/s$  並經由(2-19)式之連續方程式中各項尺度相等估計得到  $y$  方向之速度尺度。其中  $v_x = O(U)$ 、 $v_y = O(\frac{UD}{L})$ 。而土石流的時間尺度則藉由土石流從上游運動至下游的流長尺度和流長方向之速度尺度作估計，

$$t = O(\frac{L}{U})。$$

土石流的壓力尺度，可以從運動過程中產生的動壓尺度  $p = O(\rho U^2)$  或者是土石流深度受重力作用所產生的靜壓尺度  $p = O(\rho g D \cos \theta)$  估計。對於本研究而言，為使用靜壓尺度去進行估計。而由(2-7)式的土石流本構關係式可以知道，土石流在運動過程中，可以運用本身的降伏應力概念，將運動過程分成受到的剪應力大於降伏應力的強剪層以及受到的剪應力小於降伏應力的弱剪層等兩個部份，因此土石流內部的剪應力尺度，則由土石流本身的降伏應力大小進行估計，其中

$$\tau_{ij} = O(\tau_0), \tau_0 = 1000 N/m^2, \rho = 1000 kg/m^3。$$

弱剪層土石流材料的剪力模量  $G$  之尺度則藉由 Obrzud R. & Truty, A.(2012)以及 Braja M. Das(2010)所整理的不同組成粒徑的土壤材料的楊式模量  $E$  和泊松比  $\nu$  之代表性數值，並經由表 2-1 之轉換關係式得到。如下表 2-3、2-4、2-5 所示。



表 2-3 粗顆粒土壤材料的楊氏模量之代表性數值  $MPa$  (Obrzud R. & Truty, A, 2012)

USCS	Description	Loose	Medium	dense
GW, SW	Gravels/Sand well graded	30~80	80~160	160~320
SP	Sand, uniform	10~30	30~50	50~80
GM, SM	Sand/Gravels silty	7~12	12~20	20~30

表 2-4 細顆粒土壤材料的楊氏模量之代表性數值  $MPa$  (Obrzud R. & Truty, A, 2012)

USCS	Description	Very soft to soft	Medium	Stiff to very stiff	Hard
ML	Silts with slight plasticity	2.5~8	10~15	15~40	40~80
ML, CL	Silts with low plasticity	1.5~6	6~10	10~30	30~60
CL	Clays with low-medium plasticity	0.5~5	5~8	8~30	30~70
CH	Clays with high plasticity	0.35~4	4~7	7~20	20~32
OL	Organic silts		0.5~5		
OH	Organic clays		0.5~4		

上表為使用統一土壤分類系統(Unified Soil Classification System ; USCS)。根據 (Braja M. Das, 2010)所著之大地工程原理可知，G 代表礫石或礫石性土壤、S 代表砂或砂質土壤，屬於粗顆粒土壤材料；M 代表無機粉土，C 代表無機黏土，O 代表有機粉土和黏土，屬於細顆粒土壤材料。而 W、P、L、H 分別為優良級配、不良級配、液性限度低於 50 之低塑性以及液性限度高於 50 之高塑性土壤材料。

表 2-5 土壤材料的楊氏模量與泊松比之代表性數值 (Braja M. Das, 2010)

Soil type	$E(MPa)$	$\nu$
Dense sand	35~70	0.3~0.45
Medium sand		0.25~0.4
Loose sand	10~28	0.2~0.4
Silty sand		0.2~0.4
Hard clay	6~14	
Medium clay		0.2~0.5
Soft clay	1.8~3.5	0.15~0.25

以粗顆粒土壤材料組成為主的石流其楊氏模量代表性數值約介於 $10^7 \sim 10^8 Pa$ 之間，以細顆粒土壤材料組成為主的泥流其楊氏模量代表性數值約介於 $10^6 \sim 10^7 Pa$ 之間。則此時估計 $E=10^7 Pa$ ，且泊松比在不可壓縮土石流下估計為 $\nu=0.5$ ，並運用表 2-1

之轉換式可知 $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 3.3 \times 10^6 Pa$ 。因此各變數之尺度估計分別為 $x = O(L)$ 、

$y = O(D)$ 、 $v_x = O(U)$ 、 $v_y = O(\frac{UD}{L})$ 、 $t = O(\frac{L}{U})$ 、 $p = O(\rho g D \cos \theta)$ 、 $\tau_{ij} = O(\tau_0)$ ，

且 $L=100m$ 、 $D=5m$ 、 $U=5m/s$ 、 $\theta=10^\circ$ 、 $\rho=1000kg/m^3$ 、 $\tau_0=1000N/m^2$ 、 $G=3.3 \times 10^6 Pa$ 。



## 2.6.2 全流深控制方程式

在長波理論的假設下，運用 2.6.1 節所估計的現場土石流尺度，對全流深控制方程式作各項的尺度估計並忽略較小項對土石流運動的影響。尺度分析的過程是先分別忽略慣性力項、壓力梯度項、剪應力項以及重力項內的微小項的影響，之後再將各項的最大尺度項分別比較並再一次忽略較小項。由(2-20)、(2-21)式可知

$$\underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}}_{o\left(\frac{U^2}{L}\right)} = -\underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}_{o\left(\frac{gDc \cos \theta}{L}\right)} + \frac{1}{\rho} \left( \underbrace{\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}}_{o\left(\frac{\tau_0}{\rho L}\right)} + \underbrace{\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}}_{o\left(\frac{\tau_0}{\rho D}\right)} \right) + \underbrace{g \sin \theta}_{o(g \sin \theta)} \quad (2-49)$$

$$\underbrace{\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}}_{o\left(\frac{U^2 D}{L^2}\right)} = -\underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}}_{o\left(\frac{gDc \cos \theta}{D}\right)} + \frac{1}{\rho} \left( \underbrace{\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}}_{o\left(\frac{\tau_0}{\rho L}\right)} + \underbrace{\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}}_{o\left(\frac{\tau_0}{\rho D}\right)} \right) - \underbrace{g \cos \theta}_{o(g \cos \theta)} \quad (2-50)$$

對  $x$  軸動量方程式而言，慣性力項、壓力梯度項、重力項內各項的尺度大小皆一樣，僅有剪應力項內各項尺度不同，則首先針對剪應力項作尺度分析。

$$\frac{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}}{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}} = O\left(\frac{\tau_0 / \rho L}{\tau_0 / \rho D}\right) = O\left(\frac{D}{L}\right) \ll O(1) \quad (2-51)$$

故可知剪應力項內  $\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \ll \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}$ 。則此時以壓力梯度項分別與慣性項、最大階剪應

力尺度項以及重力項比較尺度大小。

$$\frac{\frac{\partial v_x}{\partial t}}{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}} = O\left(\frac{U^2 / L}{g D \cos \theta / L}\right) = O\left(\frac{U^2}{g D \cos \theta}\right) = O(0.5) \neq O(1) \quad (2-52)$$

$$\frac{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}}{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}} = O\left(\frac{\tau_0 / \rho D}{g D \cos \theta / L}\right) = O\left(\frac{L \tau_0}{\rho g D^2 \cos \theta}\right) = O(0.4) \neq O(1) \quad (2-53)$$

$$\frac{g \sin \theta}{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}} = O\left(\frac{g \sin \theta}{g D \cos \theta / L}\right) = O\left(\frac{L \sin \theta}{D \cos \theta}\right) = O(3.5) \neq O(1) \quad (2-54)$$

對  $y$  軸動量方程式而言，剪應力項的各項尺度大小為



$$\frac{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}}{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}} = O\left(\frac{\tau_0 / \rho L}{\tau_0 / \rho D}\right) = O\left(\frac{D}{L}\right) \ll O(1) \quad (2-55)$$

故可知剪應力項內  $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \ll \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}$ 。則此時以壓力梯度項分別與慣性項、最大階剪應

力尺度項比較尺度大小。

$$\frac{\frac{\partial v_y}{\partial t}}{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}} = O\left(\frac{U^2 D / L^2}{g D \cos \theta / D}\right) = O\left(\frac{U^2 D^2}{g D L^2 \cos \theta}\right) = O(1.3 \times 10^{-3}) \ll O(1) \quad (2-56)$$

$$\frac{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}}{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}} = O\left(\frac{\tau_0 / \rho D}{g D \cos \theta / D}\right) = O\left(\frac{\tau_0}{\rho g D \cos \theta}\right) = O(0.0 \ll) O \quad (2-57)$$

$$\frac{\frac{g \cos \theta}{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}}{\frac{g \cos \theta}{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}} = O\left(\frac{g \cos \theta s}{g D \cos \theta / D}\right) = O(1) \quad (2-58)$$

則透過以上的尺度分析，將動量方程式的微小項省略並加上(2-18)式的連續方程式後，即可得土石流全流深控制方程式。

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (2-59)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right) + g \sin \theta \quad (2-60)$$

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \cos \theta \quad (2-61)$$





### 2.6.3 強剪層厚度尺度估計

從土石流全流深動量方程式(2-59)、(2-60)式可以知道，現場土石流的運動在長波理論假設下， $y$  軸動量方程式內剪應力的影響，遠小於壓力梯度以及重力作用，僅有在  $x$  軸動量方程式內剪應力的尺度才與慣性力、重力以及壓力梯度一樣重要。以下即是運用土石流  $x$  軸動量方程式(2-60)式與強剪層本構關係式(2-7)式之間的關係，估計現場土石流運動過程中的強剪層厚度。

將(2-7)式中的強剪層本構關係式代入(2-60)式中

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\tau_0}{|\dot{e}_{ij}|} + \mu_d + \mu_c |\dot{e}_{ij}| \right) \dot{e}_{yx} \right] \quad (2-62)$$

首先在長波理論假設下  $O\left(\frac{D}{L}\right) \ll O(1)$ ，化簡(2-62)式中的剪應變率與剪應變率張量的大小

$$\dot{e}_{xy} = \dot{e}_{yx} = \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (2-63)$$

$$o\left(\frac{U}{D}\right) \quad o\left(\frac{UD}{L^2}\right)$$

$$|\dot{e}_{ij}| = \left[ 2 \underbrace{\left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2}_{o\left(\frac{2U^2}{L^2}\right)} + 2 \underbrace{\left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2}_{o\left(\frac{2U^2}{L^2}\right)} + \underbrace{\left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2}_{o\left(\frac{U^2}{D^2}\right)} + \underbrace{\left( \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2}_{o\left(\frac{U^2 D^2}{L^4}\right)} + 2 \underbrace{\left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)}_{o\left(\frac{2U^2}{L^2}\right)} \right]^{1/2} \quad (2-64)$$

由上式可知忽略微小項的影響後  $\dot{e}_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$  且  $|\dot{e}_{ij}| = \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} = \left| \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|$ ，則此時再以

2.6.1 節所定義的現場土石流尺度描述(2-62)式中各項的尺度大小。其中令強剪層厚度尺度  $y = O(\delta)$ 。

$$\underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}}_{o\left(\frac{U^2}{L}\right)} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}_{o\left(\frac{gDc}{L}\right)} + \underbrace{g \sin \theta}_{o(g \sin \theta)} + \frac{1}{\rho} \left( \underbrace{\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}_{o\left(\frac{\mu_c U^2}{\rho \delta^2}\right)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \right]}_{o\left(\frac{\mu_c U^2}{\delta^3}\right)} \right) \quad (2-65)$$

對於土石流強剪層控制方程式而言，從數學上看，(2-65)式是在剪應力使用降伏應力作為估計時得到的各項尺度等大的結果，因此對於受到的剪應力大大於降伏應力的強剪層而言，剪應力效應在動量方程式內仍然很重要。而從物理上的觀點來看，由於流動過程流體靠近底床而流速不快，因此壓力梯度與重力的影

響都將比慣性力來的重要。

則此時強剪層厚度尺度的估計，為參考(黃名村，2003)的方式；藉由壓力梯度項與剪應力項同樣重要下估計得到強剪層厚度關係式後，以  $L=100m$ 、 $D=5m$ 、 $U=5m/s$ 、 $\cos\theta=1$ 、 $\rho=1500kg/m^3$ ，以及 Bagnold(1954)、Govier et al.(1957)，與 Savage and Mckeown(1983)於試驗室所得之  $\mu_d$  與  $\mu_c$  二參數放大1000倍作為現場土石流尺度，並藉此估計現場強剪層厚度尺度，如下表 2-6 所示。

當壓力梯度與黏滯剪應力項一樣重要時

$$\frac{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}{\mu_d \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}} = O\left(\frac{g \cos\theta D / L}{\mu_d U / \rho \delta^2}\right) = O(1) \quad , \delta_{\mu_d} = O\left(\frac{\mu_d U L}{\rho g D \cos\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2-66)$$

當壓力梯度與慣性剪應力項一樣重要時

$$\frac{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}{\mu_c \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \right]} = O\left(\frac{g D \cos\theta / L}{\mu_c U^2 / \rho \delta^3}\right) = O(1) \quad , \delta_{\mu_c} = O\left(\frac{\mu_c U^2 L}{\rho g D \cos\theta}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (2-67)$$



表 2-6 現場土石流強剪層厚度尺度估計

$\mu_d(Ns/m^2)$	$\mu_c(kg/m^2)$	$\delta_{\mu_d}/D$	$\delta_{\mu_c}/D$	$\delta_{1000\mu_d}/D$	$\delta_{1000\mu_c}/D$
Govier et al.(1957)					
0.0351	0.000315	0.309%	0.441%	9.768%	4.407%
0.029	0.000024	0.281%	0.187%	8.878%	1.869%
0.0137	0.0000128	0.193%	0.152%	6.103%	1.515%
0.0093	0.0000031	0.159%	0.094%	5.028%	0.945%
0.0067	0.0000038	0.135%	0.101%	4.268%	1.011%
0.00315	0.00000634	0.093%	0.120%	2.926%	1.199%
Savage and Mckeown(1983)					
0.0715	0.00058	0.441%	0.540%	13.941%	5.402%
0.0975	0.000255	0.515%	0.411%	16.280%	4.108%
0.134	0.00188	0.604%	0.800%	19.085%	7.995%
0.0882	0.000272	0.490%	0.420%	15.484%	4.197%
0.0983	0.00263	0.517%	0.894%	16.347%	8.942%
Bagnold(1954)					
0.075	0.00342	0.452%	0.976%	14.278%	9.760%
0.0485	0.00224	0.363%	0.848%	11.482%	8.476%
0.03	0.00088	0.286%	0.621%	9.030%	6.208%
0.0185	0.00048	0.224%	0.507%	7.091%	5.072%
0.0126	0.00025	0.185%	0.408%	5.852%	4.081%
0.0083	0.000144	0.150%	0.340%	4.750%	3.395%
0.0067	0.000064	0.135%	0.259%	4.268%	2.591%

由表 2-6 可知現場土石流強剪層厚度最大可到全流深的 10% 上下，而平均約為全流深的 7% 左右；因此估計強剪層厚度約為占全流深的 7%，即  $\delta = 0.07D = 0.35m$ 。



## 2.6.4 弱剪層彈性剪應變量尺度估計

為了估計弱剪層土壤材料在變形過程的彈性剪應變量尺度，同樣的我們從土石流全流深  $x$  軸動量方程式(2-60)式以及弱剪層本構關係式(2-7)式出發，並且運用 2.6.1 節所定義的現場土石流尺度描述該控制方程式；其中弱剪層厚度尺度定義為  $y = O(H)$ ，而從表 2-6 的結果可以知道在土石流運動過程中實際上弱剪層厚度為非常接近全流深的尺度，故在此為定義  $O(H) = O(D)$  且  $H = 10m$ 。

$$\underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}}_{o\left(\frac{U^2}{L}\right)} = -\underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}_{o\left(\frac{gDc}{L}\right)} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}}_{o\left(\frac{\tau_0}{\rho D}\right)} + \underbrace{g \sin \theta}_{o(g \sin \theta)} \quad (2-68)$$

則代入現場土石流尺度可以發現弱剪層內慣性力項、壓力梯度項、重力項與運用降伏應力所估計的剪應力項尺度都互為等大。(2-68)式是在剪應力使用降伏應力作為估計時得到的各項尺度等大的結果，對於受到的剪應力大小小於降伏應力的弱剪層而言，降伏應力代表的是弱剪層土石流剪應力的最大尺度項；因此在不知道弱剪層內部剪應力分佈的情況下，在此以土石流降伏應力的大小去估計弱剪層剪應力尺度。而從應變是由應力作用產生的可以知道，彈性剪應變量的估計我們可以運用跟降伏應力等值的彈性剪應變量來表達降伏應力值，並藉由(2-68)式內各項尺度等大的情況下估計出土石流運動過程中可能的彈性剪應變量尺度，其中彈性剪應變量尺度定義為  $e_{ij} = O(\Delta)$ 。

與降伏應力等值的彈性剪應變量尺度可由(2-3)式得到

$$\tau_{ij} = 2Ge_{ij} \quad (2-69)$$

$o(\tau_0) \quad o(2G\Delta)$

將與降伏應力等值的彈性剪應變量  $\tau_0 = 2G\Delta$  代回(2-68)式

$$\underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}}_{o\left(\frac{U^2}{L}\right)} = -\underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}_{o\left(\frac{gDc}{L}\right)} + \underbrace{\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}}_{o\left(\frac{2G\Delta}{\rho D}\right)} + \underbrace{g \sin \theta}_{o(g \sin \theta)} \quad (2-70)$$

則由剪應力以降伏應力尺度估計後得到的慣性項、壓力梯度項、重力項、剪應力項各項等大條件可以知道，各別比較可以得到可能的彈性剪應變量尺度。

當剪應力項由等值的彈性剪應變量表達時



$$O(\tau_0) = O(\rho g D) \quad \Delta_y = O\left(\frac{\tau_0}{2G}\right) \quad (2-71)$$

當慣性力項與剪應力項一樣重要時

$$\frac{\frac{\partial v_x}{\partial t}}{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}} = O\left(\frac{U^2/L}{2G\Delta/\rho D}\right) = O(1) \quad \Delta_i = O\left(\frac{\rho U^2 D}{2GL}\right) \quad (2-72)$$

當壓力梯度項與剪應力項一樣重要時

$$\frac{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}} = O\left(\frac{g \cos \theta D/L}{2G\Delta/\rho D}\right) = O(1) \quad \Delta_p = O\left(\frac{\rho g D^2 \cos \theta}{2GL}\right) \quad (2-73)$$

當重力項與剪應力項一樣重要時

$$\frac{\frac{\rho g \sin \theta}{\rho} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}}{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}} = O\left(\frac{g \sin \theta n}{2G\Delta/\rho D}\right) = O(1) \quad \Delta_g = O\left(\frac{\rho g D \sin \theta}{2G}\right) \quad (2-74)$$

由(2-72)~(2-74)式可知，該彈性剪應變量將有四種可能的尺度 $\Delta_y$ 、 $\Delta_i$ 、 $\Delta_p$ 、 $\Delta_g$ ，其中下標 $y$ 、 $i$ 、 $p$ 、 $g$ 分別代表與(2-68)式中的剪應力項、慣性力項、壓力梯度項以及重力項比較所得到的彈性剪應變量尺度。以2.6.1節所定義的現場土石流尺度進行四種彈性剪應變量的比較時可以發現四種彈性剪應變量皆在同一階尺度大小下，如(2-75)、(2-76)、(2-77)式所示。則在此為選擇 $\Delta = \Delta_y$ 作為土石流弱剪層彈性剪應變量尺度的估計值。

$$O\left(\frac{\Delta_p}{\Delta_y}\right) = O\left(\frac{\rho g D^2 \cos \theta / 2GL}{\tau_0 / 2G}\right) = O\left(\frac{\rho g D^2 \cos \theta}{\tau_0 L}\right) \approx O(2.4 \times 10^{-2}) \quad (2-75)$$

$$O\left(\frac{\Delta_p}{\Delta_i}\right) = O\left(\frac{\rho g D^2 \cos \theta / 2GL}{\rho U^2 D / 2GL}\right) = O\left(\frac{g D \cos \theta}{U^2}\right) \approx O(1.9 \times 10^{-2}) \quad (2-76)$$

$$O\left(\frac{\Delta_p}{\Delta_g}\right) = O\left(\frac{\rho g D^2 \cos \theta / 2GL}{\rho g D \sin \theta / 2G}\right) = O\left(\frac{D \cos \theta}{L \sin \theta}\right) \approx O(0.28) \quad (2-77)$$

土石流弱剪層的彈性位移尺度則藉由運動過程中產生的彈性剪應變量尺度作估計。對一個具有彈性的材料而言，當材料受力發生彈性變形時，其內部材料點



在變形前後將產生一個具有大小以及方向的位置變化，也就是指(2-8)式中的彈性位移函數 $u_i$ 。則以(2-8)式的彈性剪應變與彈性位移間之關係式，分別考慮與 $x$ 、 $y$ 方向平行之剪應變時

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x x} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & \varepsilon_{y y} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ o(\Delta) & & o(\Delta) & \\ o\left(\frac{u_x}{L}\right) & & o\left(\frac{u_y}{D}\right) & \end{aligned} \quad (2-78)$$

則弱剪層彈性位移尺度藉由(2-78)式估計為 $u_x = O(L\Delta)$ 、 $u_y = O(D\Delta)$ 。

### 2.6.5 弱剪層控制方程式

在 2.6.1~2.6.4 節中，定義了現場土石流的尺度，而且尺度分析得到了描述整層土石流運動行為的全流深控制方程式，並以此控制方程式分別應用在土石流強剪層和弱剪層的運動中，藉此估計出了強剪層的厚度以及弱剪層的彈性剪應變量尺度。則本節開始即是要運用 2.6.3 和 2.6.4 的結果，重新估計弱剪層以及強剪層動量方程式內各項的大小，藉此得到描述弱剪層以及強剪層的控制方程式。其中下標 $p$ 代表弱剪層部分，下標 $s$ 代表強剪層部分。

尺度分析的過程是先分別忽略慣性力項、剪應變彈力項以及重力項內的微小項的影響，之後再將各項的最大尺度項分別比較並再一次忽略較小項。由(2-25)、(2-26)、(2-27)式可知

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{x p}}{\partial x} + \frac{\partial v_{y p}}{\partial y} &= 0 \\ o\left(\frac{U}{L}\right) & \quad o\left(\frac{U}{L}\right) \end{aligned} \quad (2-79)$$

$$\underbrace{\frac{\partial v_{x p}}{\partial t} + v_{x p} \frac{\partial v_{x p}}{\partial x} + v_{y p} \frac{\partial v_{x p}}{\partial y}}_{o\left(\frac{U^2}{L}\right)} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}_{o\left(\frac{gD \cos \theta}{L}\right)} + \frac{G}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + \underbrace{g \sin \theta}_{o(g \sin \theta)} + \underbrace{o\left(\frac{\Delta G}{\rho L}\right)}_{o\left(\frac{\Delta L G}{\rho D^2}\right)} \quad (2-80)$$

$$\underbrace{\frac{\partial v_{y p}}{\partial t} + v_{x p} \frac{\partial v_{y p}}{\partial x} + v_{y p} \frac{\partial v_{y p}}{\partial y}}_{o\left(\frac{U^2 D}{L^2}\right)} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}}_{o(g \cos \theta)} + \frac{G}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) - \underbrace{g \cos \theta}_{o(g \cos \theta)} + \underbrace{o\left(\frac{\Delta D G}{\rho L^2}\right)}_{o\left(\frac{\Delta G}{\rho D}\right)} \quad (2-81)$$

對 $x$ 軸動量方程式而言，慣性力項、重力項內各項的尺度大小皆一樣，僅有剪應變彈力項內各項尺度不同，則首先針對剪應變彈力項作尺度分析。



$$\frac{\frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}}{\frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}} = O\left(\frac{\Delta G / \rho L}{\Delta L G / \rho D^2}\right) = O\left(\frac{D^2}{L^2}\right) = O\left(\frac{1}{400}\right) \ll O(1) \quad (2-82)$$

故可知剪應變彈力項內  $\frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \ll \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$ 。則此時方程式內各項分別與壓力梯度項

比較尺度大小。由(2-71)式可知  $\Delta = O\left(\frac{\tau_0}{2G}\right)$ 。

$$\frac{\frac{\partial v_{xp}}{\partial t}}{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}} = O\left(\frac{U^2 / L}{g D \cos \theta / L}\right) = O\left(\frac{U^2}{g D \cos \theta}\right) = O(0.5) \neq O(1) \quad (2-83)$$

$$\frac{\frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}}{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}} = O\left(\frac{\Delta L G / \rho D^2}{g D \cos \theta / L}\right) = O\left(\frac{\tau_0 L^2}{2 \rho g D^3 \cos \theta}\right) = O(4.1) \neq O(1) \quad (2-84)$$

$$\frac{\frac{g \sin \theta}{-1} \frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{g \sin \theta}{-1} \frac{\partial p}{\partial x}} = O\left(\frac{g \sin \theta}{g D \cos \theta / L}\right) = O\left(\frac{L \sin \theta}{D \cos \theta}\right) = O(3.5) \neq O(1) \quad (2-85)$$

對  $y$  軸動量方程式而言，剪應變彈力項的各項尺度大小為

$$\frac{\frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}}{\frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}} = O\left(\frac{\Delta D G / \rho L^2}{\Delta G / \rho D}\right) = O\left(\frac{D^2}{L^2}\right) = O\left(\frac{1}{400}\right) \ll O(1) \quad (2-86)$$

故可知剪應變彈力項內  $\frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \ll \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}$ 。則此時方程式內各項分別與壓力梯度項

比較尺度大小。

$$\frac{\frac{\partial v_{yp}}{\partial t}}{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}} = O\left(\frac{U^2 D / L^2}{g \cos \theta}\right) = O\left(\frac{U^2 D}{L^2 g \cos \theta}\right) = O(1.3 \times 10^{-3}) \ll O(1) \quad (2-87)$$

$$\frac{\frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}}{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}} = O\left(\frac{\Delta G / \rho D}{g \cos \theta}\right) = O\left(\frac{\tau_0}{\rho g D \cos \theta}\right) = O(0.04) \ll O(1) \quad (2-88)$$



$$\frac{g \cos \theta}{\rho \frac{\partial p}{\partial y}} = O\left(\frac{g \cos \theta}{g \cos \theta}\right) = O(1) \quad (2-89)$$

則透過以上的尺度分析，將弱剪層動量方程式的微小項省略並加上(2-79)式的連續方程式後，即可得弱剪層控制方程式。

$$\frac{\partial v_{x,p}}{\partial x} + \frac{\partial v_{y,p}}{\partial y} = 0 \quad (2-90)$$

$$\frac{\partial v_{x,p}}{\partial t} + v_{x,p} \frac{\partial v_{x,p}}{\partial x} + v_{y,p} \frac{\partial v_{x,p}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{G}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right) + g \sin \theta \quad (2-91)$$

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \cos \theta \quad (2-92)$$

## 2.6.6 強剪層控制方程式

同樣的，運用 2.6.1~2.6.4 節的結果，重新估計底床強剪層控制方程式中各項尺度的大小並忽略較小項的影響。而由於現場土石流的底床強剪層厚度相對於流長以及流深而言的確很薄，因此 2.6.1 節的長波理論假設，在強剪層土石流運動中同樣為流長尺度遠大於流深尺度。而由表 2-6 可知在不同土石流材料的  $\mu_d$  以及  $\mu_c$  的情況下，現場土石流強剪層厚度最大可到全流深的 10% 上下，而平均約為全流深的 7% 左右，因此估計強剪層厚度約為占全流深的 7%。則此時定義強剪層厚度尺度  $y = O(\delta)$ 、 $\delta = 0.35m$ ，而  $\mu_d$  與  $\mu_c$  兩參數則以 Bagnold(1954)於實驗室所得到之兩參數數據放大 1000 倍作為現場土石流的流變參數的估計值，其中  $\mu_d = 48.5 \text{Ns/m}^2$ ， $\mu_c = 2.24 \text{kg/m}$ ，如表 2-6 所示。

同樣的在長波理論的假設下，估計底床強剪層運動中各方向的剪應變率  $\dot{e}_{ij}$  以及剪應變率張量之值  $|\dot{e}_{ij}|$ 。由(2-10)、(2-11)式可知

$$\dot{e}_{xy} = \dot{e}_{yx} = \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} + \frac{\partial v_{ys}}{\partial x} \right) \quad (2-93)$$

$$o\left(\frac{U}{\delta}\right) \quad o\left(\frac{U\delta}{L^2}\right)$$

$$|\dot{e}_{ij}| = \left[ 2 \underbrace{\left(\frac{\partial v_{xs}}{\partial x}\right)^2}_{o\left(\frac{2U^2}{L^2}\right)} + 2 \underbrace{\left(\frac{\partial v_{ys}}{\partial y}\right)^2}_{o\left(\frac{2U^2}{L^2}\right)} + \underbrace{\left(\frac{\partial v_{xs}}{\partial y}\right)^2}_{o\left(\frac{U^2}{\delta^2}\right)} + \underbrace{\left(\frac{\partial v_{ys}}{\partial x}\right)^2}_{o\left(\frac{U^2\delta^2}{L^4}\right)} + 2 \underbrace{\left(\frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \frac{\partial v_{ys}}{\partial x}\right)}_{o\left(\frac{2U^2}{L^2}\right)} \right]^{1/2} \quad (2-94)$$





忽略微小項，則(2-93)、(2-94)式簡化為

$$\dot{e}_{xy} = \dot{e}_{yx} = \frac{\partial v_{xs}}{\partial y}, \quad |\dot{e}_{ij}| = \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left| \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right| = \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \text{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \quad (2-95)$$

其中  $\text{sgn}(\frac{\partial v_{xs}}{\partial y})$  為符號函數(Sign function)，當  $\frac{\partial v_{xs}}{\partial y} < 0$  時  $\text{sgn}(\frac{\partial v_{xs}}{\partial y})$  為 -1， $\frac{\partial v_{xs}}{\partial y} > 0$  時

$\text{sgn}(\frac{\partial v_{xs}}{\partial y})$  為 +1， $\frac{\partial v_{xs}}{\partial y} = 0$  時  $\text{sgn}(\frac{\partial v_{xs}}{\partial y})$  為 0；因此在弱強剪層交界面時  $|\dot{e}_{ij}| = 0$ ，在

交界之外的強剪層區域時  $|\dot{e}_{ij}| \neq 0$ ，故  $\text{sgn}^{-1}(\frac{\partial v_{xs}}{\partial y})$  存在且等於  $\text{sgn}(\frac{\partial v_{xs}}{\partial y})$ 。則此時以

現場土石流尺度描述(2-30)、(2-31)、(2-32)式，並以(2-95)式整理為

$$\frac{\partial v_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} = 0 \quad (2-96)$$

$o\left(\frac{U}{L}\right) \quad o\left(\frac{U}{L}\right)$

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial v_{xs}}{\partial t} + v_{xs} \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} + v_{ys} \frac{\partial v_{xs}}{\partial y}}_{o\left(\frac{U^2}{L}\right)} &= -\underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}_{o\left(\frac{gDc}{L}\right)} + \underbrace{g \sin \theta}_{o(g \sin \theta)} \\ &+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \underbrace{\left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right)}_{o\left(\frac{2\tau_0 \delta}{\rho L^2}\right)} \text{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 v_{xs}}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \underbrace{\left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \text{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)}_{o\left(\frac{2\mu U^2}{\rho L^2 \delta}\right)} \right] \quad (2-97) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 v_{xs}}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \underbrace{\left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \text{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)}_{o\left(\frac{\mu U^2}{\rho \delta^3}\right)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial v_{ys}}{\partial t} + v_{xs} \frac{\partial v_{ys}}{\partial x} + v_{ys} \frac{\partial v_{ys}}{\partial y}}_{o\left(\frac{U^2 D}{L^2}\right)} &= -\underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}}_{o\left(\frac{gDc}{\delta}\right)} - \underbrace{g \cos \theta}_{o(g \cos \theta)} \\ &+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 v_{xs}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \underbrace{\left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \text{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)}_{o\left(\frac{\mu U^2}{\rho L \delta^2}\right)} \right] \quad (2-98) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \underbrace{\left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \text{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)}_{o\left(\frac{2\tau_0}{\rho L}\right)} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 v_{ys}}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \underbrace{\left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \text{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)}_{o\left(\frac{2\mu U^2}{\rho L \delta^2}\right)} \right] \end{aligned}$$

其中，(2-97)、(2-98)式內各剪應分量表示為

$$\tau_{xx} = \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right]}_{o\left(\frac{2\tau_0\delta}{L}\right)} \underbrace{\left[ \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right]}_{o\left(\frac{2\mu_d U}{L}\right)} + \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \right]}_{o\left(\frac{2\mu_c U^2}{L\delta}\right)} \quad (2-99)$$

$$\tau_{yy} = \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right]}_{o\left(\frac{2\tau_0\delta}{L}\right)} \underbrace{\left[ \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right]}_{\left(\frac{2\mu_d U}{L}\right)} + \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \right]}_{\left(\frac{2\mu_c U^2}{L\delta}\right)} \quad (2-100)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \underbrace{\frac{\partial v_{xs}}{\partial y}}_{\left(\frac{\mu_d U}{\delta}\right)} + \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]}_{\left(\frac{\mu_c U^2}{\delta^2}\right)} \quad (2-101)$$

對  $x$  軸動量方程式而言，首先我們先針對剪應力項內的各項作尺度分析。由 (2-97) 式可知，該剪應力項內共具有  $O\left(\frac{2\mu_d U}{\rho L^2}\right)$ 、 $O\left(\frac{\mu_d U}{\rho \delta^2}\right)$ 、 $O\left(\frac{2\mu_c U^2}{\rho L \delta}\right)$ 、 $O\left(\frac{\mu_c U^2}{\rho \delta^3}\right)$ 、 $O\left(\frac{2\tau_0 \delta}{\rho L^2}\right)$  等 5 種不同的尺度型式。則各項尺度大小為

$$O\left(\frac{2\mu_d U / \rho L^2}{\mu_d U / \rho \delta^2}\right) = O\left(\frac{2\delta^2}{L^2}\right) \ll O(1), \quad O\left(\frac{2\mu_c U^2 / \rho L \delta}{\mu_c U^2 / \rho \delta^3}\right) = O\left(\frac{2\delta^2}{L^2}\right) \ll O(1) \quad (2-102)$$

$$O\left(\frac{2\tau_0 \delta / \rho L^2}{\mu_d U / \rho \delta^2}\right) = O\left(\frac{2\delta^3 \tau_0}{\mu_d U L^2}\right) \ll O(1), \quad O\left(\frac{\mu_d U / \rho \delta^2}{\mu_c U^2 / \rho \delta^3}\right) = O\left(\frac{\mu_d \delta}{\mu_c U}\right) = O(1) \quad (2-103)$$

故可知剪應力項內的最大階尺度項為  $\frac{\mu_d}{\rho} \frac{\partial^2 v_{xs}}{\partial y^2}$  以及  $\frac{\mu_c}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^2 \right]$ 。則此時方程式

內各項分別與壓力梯度項比較尺度大小。

$$\frac{\frac{\partial v_{xs}}{\partial t}}{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}} = O\left(\frac{U^2 / L}{g D \cos \theta / L}\right) = O\left(\frac{U^2}{g D \cos \theta}\right) = O(0.5) \neq O \quad (2-104)$$

$$\frac{\frac{\mu_d}{\rho} \frac{\partial^2 v_{xs}}{\partial y^2}}{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}} = O\left(\frac{\mu_d U / \rho \delta^2}{g D \cos \theta / L}\right) = O\left(\frac{\mu_d U L}{\rho g D \delta^2 \cos \theta}\right) = O(4.1) \neq O \quad (2-105)$$

$$\frac{g \sin \theta}{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}} = O\left(\frac{g \sin \theta n}{g D \cos \theta / L}\right) = O\left(\frac{L \sin \theta}{D \cos \theta}\right) = O(3.5) \approx O(1) \quad (2-106)$$

對 y 軸動量方程式而言，由(2-98)式可知該剪應力項內共具有  $O\left(\frac{\tau_0}{\rho L}\right)$ 、

$O\left(\frac{\mu_d U}{\rho L \delta}\right)$ 、 $O\left(\frac{\mu_c U^2}{\rho L \delta^2}\right)$  等 3 種不同的尺度型式。則各項尺度大小為

$$O\left(\frac{\tau_0 / \rho L}{\mu_d U / \rho L \delta}\right) = O\left(\frac{\tau_0 \delta}{\mu_d U}\right) = O(1) \quad O\left(\frac{\mu_d U / \rho L \delta}{\mu_c U^2 / \rho L \delta^2}\right) = O\left(\frac{\mu_d \delta}{\mu_c U}\right) = O(1) \quad (2-107)$$

故可知剪應力項內各項的尺度等大，因此保留剪應力項內各項。則此時方程式內各項分別與壓力梯度項比較尺度大小。

$$\frac{\frac{\partial v_s}{\partial t}}{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}} = O\left(\frac{U^2 \delta / L^2}{g D \cos \theta / \delta}\right) = O\left(\frac{U^2 \delta^2}{g D L^2 \cos \theta}\right) \ll O(1) \quad (2-108)$$

$$\frac{\frac{\mu_d}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_{ys}}{\partial y^2}\right)}{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}} = O\left(\frac{\mu_d U / \rho L \delta}{g D \cos \theta / \delta}\right) = O\left(\frac{\mu_d U}{\rho g L D \cos \theta}\right) \ll O(1) \quad (2-109)$$

$$\frac{g \cos \theta}{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}} = O\left(\frac{g \cos \theta s}{g D \cos \theta / \delta}\right) = O(0.0) \quad (2-110)$$

由(2-108)~(2-110)式可知，重力項尺度雖然小於壓力梯度項尺度，但還是遠大於慣性力以及剪應力尺度項，故在此仍先將重力項留下。

則透過以上的尺度分析，將動量方程式的微小項省略並加上(2-96)式的連續方程式後，即可得強剪層控制方程式。

$$\frac{\partial v_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} = 0 \quad (2-111)$$

$$\frac{\partial v_{xs}}{\partial t} + v_{xs} \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} + v_{ys} \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_d}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_{xs}}{\partial y^2}\right) + \frac{\mu_c}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left(\frac{\partial v_{xs}}{\partial y}\right)^2 \right] + g \sin \theta \quad (2-112)$$



$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \cos \theta \quad (2-113)$$

則此時統整在長波理論下尺度分析後的全流深、弱剪層、強剪層控制方程式，如下表 2-7 所示

表 2-7 長波理論下尺度分析後的控制方程式

		$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$
全流深方程 式		$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) + g \sin \theta$ $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \cos \theta$
		$\frac{\partial v_{xp}}{\partial x} + \frac{\partial v_{yp}}{\partial y} = 0$
弱剪層方程 式		$\frac{\partial v_{xp}}{\partial t} + v_{xp} \frac{\partial v_{xp}}{\partial x} + v_{yp} \frac{\partial v_{xp}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{G}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + g \sin \theta$ $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \cos \theta$
		$\frac{\partial v_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} = 0$
強剪層方程 式		$\frac{\partial v_{xs}}{\partial t} + v_{xs} \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} + v_{ys} \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_d}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_{xs}}{\partial y^2} \right) + \frac{\mu_c}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^2 \right] + g \sin \theta$ $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \cos \theta$



## 2.6.7 邊界條件

在控制方程式尺度分析完後，在此為運用 2.6.1、2.6.3、2.6.4 節所定義的各項尺度大小，重新估計自由表面、弱強剪層交界面、底床邊界等三個部分之邊界條件；省略尺度較小項在邊界條件內的影響，並重新整理邊界條件。

### 2.6.7.1 自由表面

自由表面處的邊界條件包含了土石流體的運動邊界條件以及動力邊界條件兩部分。在此首先針對(2-36)式中的運動邊界條件進行尺度分析

$$v_y = \frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{at} \quad = h \quad \text{xyt} \quad (2-114)$$

$$o\left(\frac{UD}{L}\right) \quad o\left(\frac{UD}{L}\right) \quad o\left(\frac{UD}{L}\right) \quad o\left(\frac{UD}{L}\right)$$

由(2-114)式可知，KBC 中各項尺度等大並且所有項都應該保留。同樣的尺度分析 DBC 各項，代入各項尺度大小並估計(2-42)、(2-43)式內各項的影響。其中由(2-71)

式可知  $\Delta = O\left(\frac{\tau_0}{2G}\right)$ 。

$$\Sigma_x = -p \frac{\partial h}{\partial x} + 2G \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} - G \frac{\partial u_x}{\partial y} + G \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0 \quad \text{at} \quad = h \quad \text{yx} \quad t \quad (2-115)$$

$$o\left(\frac{\rho g D^2 c \circ \theta}{L}\right) \quad o\left(\frac{D\tau_0}{L}\right) \quad o\left(\frac{L\tau_0}{2D}\right) \quad o\left(\frac{D\tau_0}{2L}\right)$$

$$\Sigma_y = G \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + G \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + p - 2G \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad \text{at} \quad = h \quad \text{yx} \quad t \quad (2-116)$$

$$o\left(\frac{\tau_0}{2}\right) \quad o\left(\frac{D^2\tau_0}{2L^2}\right) \quad o(\rho g D c \circ \theta) \quad o(\tau_0)$$

對(2-115)式而言，分別以  $-p \frac{\partial h}{\partial x}$  之尺度與其它項進行比較

$$\frac{2G \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x}}{-p \frac{\partial h}{\partial x}} = O\left(\frac{D\tau_0/L}{\rho g D^2 c \circ \theta / L}\right) = O\left(\frac{\tau_0}{\rho g D c \circ \theta}\right) \ll O(1) \quad (2-117)$$

$$\frac{G \frac{\partial u_x}{\partial y}}{-p \frac{\partial h}{\partial x}} = O\left(\frac{L\tau_0/2D}{\rho g D^2 c \circ \theta / L}\right) = O\left(\frac{L^2\tau_0}{2\rho g D^3 c \circ \theta}\right) = O(1) \quad (2-118)$$



$$\frac{G \frac{\partial u_y}{\partial x}}{-p \frac{\partial h}{\partial x}} = O\left(\frac{D\tau_0/2L}{\rho g D^2 \cos\theta/L}\right) = O\left(\frac{\tau_0}{2\rho g D \cos\theta}\right) \ll O(1) \quad (2-119)$$

對(2-116)式而言，分別以  $p$  之尺度與其它項進行比較

$$\frac{G \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x}}{p} = O\left(\frac{\tau_0/2}{\rho g D \cos\theta}\right) = O\left(\frac{\tau_0}{\rho g D \cos\theta}\right) \ll O(1) \quad (2-120)$$

$$\frac{G \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x}}{p} = O\left(\frac{D^2\tau_0/2L^2}{\rho g D \cos\theta}\right) = O\left(\frac{D\tau_0}{\rho g L^2 \cos\theta}\right) \ll O(1) \quad (2-121)$$

$$\frac{2G \frac{\partial u_y}{\partial y}}{p} = O\left(\frac{\tau_0}{\rho g D \cos\theta}\right) = O\left(\frac{\tau_0}{\rho g D \cos\theta}\right) \ll O(1) \quad (2-122)$$

則此時忽略微小項的影響後，(2-115)、(2-116)式整理為

$$p \frac{\partial h}{\partial x} + G \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 \quad \text{at } = \text{hyx} \quad (2-123)$$

$$p = 0 \quad \text{at } = \text{hyx} \quad (2-124)$$

(2-124)式表達了在自由表面處，壓力大小為等於零的；因此將(2-124)式之結果代回(2-123)式可得

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 \quad \text{at } = \text{hyx} \quad (2-125)$$

其中  $\frac{\partial u_x}{\partial y}$  即為彈性剪應變  $e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$  中的最大階尺度項；因此在忽略微小項

$\frac{\partial u_y}{\partial x}$  的影響後，(2-125)式事實上也表示了自由表面處彈性剪應變  $e_{xy}$  以及剪應力

$\tau_{xy}$  為等於零。

### 2.6.7.2 弱剪層與強剪層交界面

由 2.5.2 可知，弱強剪層交界面的邊界條件包含了運動與動力性質連續以及作用剪應力的大小等於降伏應力兩部分。對於性質連續的關係式(2-44)式而言，由於各項尺度大小皆一樣，故在此為進行剪應力的大小等於降伏應力之關係式進行尺



度分析。首先對(2-46)式之弱剪層部分而言

$$\begin{aligned} \tau_0^2 = & \underbrace{2G^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2}_{o\left(\frac{\tau_0^2}{2}\right)} + \underbrace{2G^2 \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2}_{o\left(\frac{\tau_0^2}{2}\right)} + \underbrace{G^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2}_{o\left(\frac{L^2 \tau_0^2}{4D^2}\right)} \\ & + \underbrace{G^2 \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2}_{o\left(\frac{D^2 \tau_0^2}{4L^2}\right)} + \underbrace{2G^2 \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x}}_{o\left(\frac{\tau_0^2}{2}\right)} \quad \text{at } y = B + \delta \end{aligned} \quad (2-126)$$

由(2-126)式可知共具有  $O\left(\frac{\tau_0^2}{2}\right)$ 、 $O\left(\frac{L^2 \tau_0^2}{4D^2}\right)$ 、 $O\left(\frac{D^2 \tau_0^2}{4L^2}\right)$  等 3 種不同的尺度型式。

則各項尺度大小為

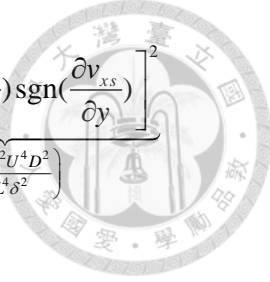
$$O\left(\frac{\tau_0^2/2}{L^2 \tau_0^2 / 4D^2}\right) = O\left(\frac{2D^2}{L^2}\right) \ll O(1), \quad O\left(\frac{D^2 \tau_0^2 / 4L^2}{L^2 \tau_0^2 / 4D^2}\right) = O\left(\frac{D^4}{L^4}\right) \ll O(1) \quad (2-127)$$

則忽略微小項，(2-126)式整理為

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\tau_0}{G} \quad \text{at } y = B + \delta \quad (2-128)$$

由(2-128)式可知，交界面處的降伏應力大小將對弱剪層土石流產生大小為  $\frac{\tau_0}{G}$  的彈性剪應變  $e_{xy}$ ；並且由 2.6.1 節之參數尺度可以知道，該彈性剪應變事實上為一微小之值並且趨近於零。

而對強剪層部分而言，在此先估計長波理論下剪應力張量大小的最大階尺度項。展開(2-12)式中的剪應力張量大小  $|\tau_{ij}|$ ；其中剪應變率張量的大小  $|\dot{e}_{ij}|$  如(2-95)式所示。

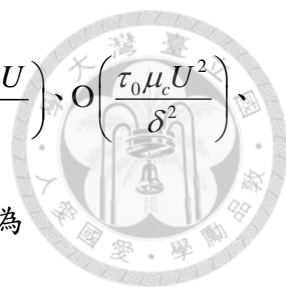


$$\begin{aligned}
|\tau_{ij}|^2 &= 2\tau_0^2 \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]^2}_{o\left(\frac{2\tau_0^2 D^2}{L^2}\right)} + 2\mu_d^2 \underbrace{\left[ \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right]^2}_{o\left(\frac{2\mu_d^2 U^2}{L^2}\right)} + 2\mu_c^2 \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]^2}_{o\left(\frac{2\mu_c^2 U^4 D^2}{L^4 \delta^2}\right)} \\
&+ 4\tau_0 \mu_d \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \left[ \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right]}_{o\left(\frac{4\tau_0 \mu_d U D^2}{L^3}\right)} \\
&+ 4\tau_0 \mu_c \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]}_{o\left(\frac{4\tau_0 \mu_c U^2 D^2}{L^3 \delta}\right)} \\
&+ 4\mu_d \mu_c \underbrace{\left[ \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right] \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]}_{o\left(\frac{4\mu_d \mu_c U^3}{L^2 \delta}\right)} + 2\tau_0^2 \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]^2}_{o\left(\frac{2\tau_0^2 D^2}{L^2}\right)} \\
&+ 2\mu_d^2 \underbrace{\left[ \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right]^2}_{o\left(\frac{2\mu_d^2 U^2}{L^2}\right)} + 2\mu_c^2 \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]^2}_{o\left(\frac{2\mu_c^2 U^4 D^2}{L^4 \delta^2}\right)} + 4\tau_0 \mu_d \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \left[ \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right]}_{o\left(\frac{4\tau_0 \mu_d U D^2}{L^3}\right)} \\
&+ 4\tau_0 \mu_c \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]}_{o\left(\frac{4\tau_0 \mu_c U^2 D^2}{L^3 \delta}\right)} \\
&+ 4\mu_d \mu_c \underbrace{\left[ \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right] \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]}_{o\left(\frac{4\mu_d \mu_c U^3}{L^2 \delta}\right)} \\
&+ \tau_0^2 + \mu_d^2 \underbrace{\left[ \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right]^2}_{o\left(\frac{\mu_d^2 U^2}{\delta^2}\right)} + \mu_c^2 \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]^2}_{o\left(\frac{\mu_c^2 U^4}{\delta^4}\right)} + \tau_0 \mu_d \underbrace{\left[ \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right]}_{o\left(\frac{\tau_0 \mu_d U}{\delta}\right)} \\
&+ \tau_0 \mu_c \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]}_{o\left(\frac{\tau_0 \mu_c U^2}{\delta^2}\right)} + 2\mu_d \mu_c \underbrace{\left[ \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right] \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]}_{o\left(\frac{\mu_d \mu_c U^3}{\delta^3}\right)}
\end{aligned}$$

(2-129)

由(2-129)式可知共具有  $O\left(\frac{2\tau_0^2 D^2}{L^2}\right)$ 、 $O\left(\frac{2\mu_d^2 U^2}{L^2}\right)$ 、 $O\left(\frac{2\mu_c^2 U^4 D^2}{L^4 \delta^2}\right)$ 、 $O\left(\frac{4\tau_0 \mu_d U D^2}{L^3}\right)$ 、





$$O\left(\frac{4\tau_0\mu_c U^2 D^2}{L^3 \delta}\right), O\left(\frac{4\mu_d \mu_c U^3}{L^2 \delta}\right), O\left(\frac{\mu_d^2 U^2}{\delta^2}\right), O\left(\frac{\mu_c^2 U^4}{\delta^4}\right), O\left(\frac{\tau_0 \mu_d U}{\delta}\right), O\left(\frac{\tau_0 \mu_c U^2}{\delta^2}\right),$$

$$O\left(\frac{2\mu_d \mu_c U^3}{\delta^3}\right) \text{ 等 11 種不同的尺度型式。則各項尺度大小的比較為}$$

$$O\left(\frac{2\tau_0^2 D^2 / L^2}{2\mu_d^2 U^2 / L^2}\right) = O\left(\frac{\tau_0^2 D^2}{\mu_d^2 U^2}\right) \gg O(1), O\left(\frac{2\tau_0^2 D^2 / L^2}{2\mu_c^2 U^4 D^2 / L^4 \delta^2}\right) = O\left(\frac{L^2 \delta^2 \tau_0^2}{\mu_c^2 U^4}\right) \gg O(1)$$

(2-130)

$$O\left(\frac{2\tau_0^2 D^2 / L^2}{4\tau_0 \mu_d U D^2 / L^3}\right) = O\left(\frac{\tau_0 L}{2\mu_d U}\right) \gg O(1), O\left(\frac{2\tau_0^2 D^2 / L^2}{4\tau_0 \mu_c U^2 D^2 / L^3 \delta}\right) = O\left(\frac{\tau_0 L \delta}{2\mu_c U^2}\right) \gg O(1)$$

(2-131)

$$O\left(\frac{2\tau_0^2 D^2 / L^2}{4\mu_d \mu_c U^3 / L^2 \delta}\right) = O\left(\frac{\tau_0^2 D^2 \delta}{2\mu_d \mu_c U^3}\right) \gg O(1), O\left(\frac{2\tau_0^2 D^2 / L^2}{\mu_d^2 U^2 / \delta^2}\right) = O\left(\frac{2\tau_0^2 D^2 \delta^2}{L^2 \mu_d^2 U^2}\right) \ll O(1)$$

(2-132)

$$O\left(\frac{\mu_d^2 U^2 / \delta^2}{\mu_c^2 U^4 / \delta^4}\right) = O\left(\frac{\mu_d^2 \delta^2}{\mu_c^2 U^2}\right) = O(1), O\left(\frac{\mu_d^2 U^2 / \delta^2}{\tau_0 \mu_d U / \delta}\right) = O\left(\frac{\mu_d U}{\tau_0 \delta}\right) = O(1)$$

(2-133)

$$O\left(\frac{\mu_d^2 U^2 / \delta^2}{\tau_0 \mu_c U^2 / \delta^2}\right) = O\left(\frac{\mu_d^2}{\tau_0 \mu_c}\right) = O(1), O\left(\frac{\mu_d^2 U^2 / \delta^2}{2\mu_d \mu_c U^3 / \delta^3}\right) = O\left(\frac{\mu_d \delta}{2\mu_c U}\right) = O(1)$$

(2-134)

則此時忽略微小項的影響並重新整理(2-129)式

$$|\tau_{ij}|^2 = \tau_0^2 + \underbrace{\mu_d^2 \left[ \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right]^2}_{O\left(\frac{\mu_d^2 U^2}{\delta^2}\right)} + \underbrace{\mu_c^2 \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]^2}_{O\left(\frac{\mu_c^2 U^4}{\delta^4}\right)} + \tau_0 \mu_d \left[ \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right]$$

$$+ \tau_0 \mu_c \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] + 2\mu_d \mu_c \underbrace{\left[ \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right] \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]}_{O\left(\frac{2\mu_d \mu_c U^3}{\delta^3}\right)}$$

(2-135)

由(2-34)與(2-95)式可知，(2-128)式中等號右邊的六項事實上即為剪應力項  $\tau_{xy}^2$  的展

開；因此重新整理(2-135)式為

$$|\tau_{i,j}| = \tau_x \quad (2-136)$$

(2-136)式表達了在長波理論下的強剪層運動中，剪應力 $\tau_{xy}$ 為土石流的最大階剪應力尺度項，並且在弱強剪層交界面時該剪應力之大小即等於降伏應力之值，記為

$$|\tau_{i,j}| = \tau_{xy} = \tau \quad \text{at} \quad z = B + \delta \quad (2-137)$$

其中由(2-135)式與(2-137)式可以知道，當弱強剪層交界面的剪應力等於降伏應力

時，(2-135)式中等號右邊的倒數前五項將等於零，也就是指剪應變率 $\frac{\partial v_{xy}}{\partial y} = 0$ 。

### 2.6.7.3 底床

對於底床邊界之尺度分析而言，其結果與(2-48)式相同，記為

$$v_{is} = 0 \quad \text{at} \quad z = B + x \quad (2-138)$$

## 第三章 方程式正規化與整理



在第二章中，我們定義了本研究中土石流的本構關係式、控制方程式、邊界條件以及現場土石流的幾何與運動等各項尺度。因此在本章節中，為運用 2.6.1、2.6.3、2.6.4 節所定義的各項尺度，將第二章中的各項方程式與邊界條件進行無因次化。其中各項土石流參數之尺度與其相對應的無因次參數間之轉換關係記為

$$(x, y) = (L, D) (x^*, y^*) \quad (3-1)$$

$$(v_x, v_y, t, p, \tau_{ij}) = \left( U, \frac{UD}{L}, \frac{L}{U}, \rho g D \cos \theta, \tau_0 \right) (v_x^*, v_y^*, t^*, p^*, \tau_{ij}^*) \quad (3-2)$$

$$(u_x, u_y) = (\Delta, \mathbf{D}) (u_x^*, u_y^*) \quad (3-3)$$

其中上標星號(asterisk)代表與該土石流參數相對應的無因次化型式。

### 3.1 本構關係式正規化

由 2.3 節所示，本研究的本構關係式為以降伏應力將土石流運動分層，其包含了強剪層區域的剪應力與剪應變率間的關係，以及弱剪層區域的剪應力與剪應變間的關係；以下為分開討論兩層流域內剪應力方程式正規化後的型式。

#### 3.1.1 弱剪層本構關係式

將(2-7)式中弱剪層剪應力與剪應變之間的關係式以二維卡式座標展開，並且以(3-1)、(3-2)、(3-3)式所列之無因次型式無因次化該關係式。

$$\begin{cases} \tau_{xx} = 2G\Delta \frac{\partial u_x^*}{\partial x^*} \\ \tau_{yy} = 2G\Delta \frac{\partial u_y^*}{\partial y^*} \end{cases}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{GL\Delta}{D} \frac{\partial u_x^*}{\partial y^*} + \frac{GD\Delta}{L} \frac{\partial u_y^*}{\partial x^*} \quad (3-4)$$

#### 3.1.2 強剪層本構關係式

在此先正規化強剪層剪應變率張量以及剪應變率張量大小，再將省略微小項後的剪應變率張量以及剪應變率張量大小代入強剪層本構關係式中，並且以(3-1)、(3-2)、(3-3)式所列之無因次型式無因次化該關係式；由(2-8)式可知。

$$\dot{e}_{xx} = \frac{U}{L} \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*}, \quad \dot{e}_{yy} = \frac{U}{L} \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*}, \quad \dot{e}_{xy} = \dot{e}_{yx} = \frac{U}{\delta} \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} + \frac{U\delta}{L^2} \frac{\partial v_y^*}{\partial x^*} \quad (3-5)$$

$$\begin{aligned} |\dot{e}_{ij}| = & \left[ \frac{2U^2}{L^2} \left( \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} \right)^2 + \frac{2U^2}{L^2} \left( \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} \right)^2 + \frac{U^2}{\delta^2} \left( \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{U^2\delta^2}{L^4} \left( \frac{\partial v_y^*}{\partial x^*} \right)^2 + \frac{2U^2}{L^2} \left( \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} \frac{\partial v_y^*}{\partial x^*} \right) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (3-6)$$

由上式可知忽略微小項的影響後  $\dot{e}_{xy} = \frac{U}{\delta} \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*}$  且  $|\dot{e}_{ij}| = \left[ \left( \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{U}{\delta} \left| \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} \right|$ ，故對於

強剪層土石流運動而言，其剪應變率之尺度將與土石流之流速尺度以及強剪層厚度尺度有關，記為  $|\dot{e}_{ij}| = O\left(\frac{U}{\delta}\right)$ 。則此時將化簡過後的(3-5)、(3-6)式代入(2-26)、(2-27)

式後，正規化該強剪層剪應力關係式

$$\begin{aligned} \tau_{xx} = & \frac{2\tau_0\delta}{L} \left[ \left( \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} \right) \text{sgn} \left( \frac{\partial v_x^*}{\partial y} \right) \right] + \frac{2\mu_d U}{L} \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} \\ & + \frac{2\mu_c U^2}{L\delta} \left[ \left( \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} \right) \left( \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} \right) \text{sgn} \left( \frac{\partial v_x^*}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (3-7)$$

$$\begin{aligned} \tau_{yy} = & \frac{2\tau_0}{L} \left[ \left( \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} \right) \text{sgn} \left( \frac{\partial v_x^*}{\partial y} \right) \right] + \frac{2\mu_d U}{L} \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} \\ & + \frac{2\mu_c U^2}{L\delta} \left[ \left( \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} \right) \left( \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} \right) \text{sgn} \left( \frac{\partial v_x^*}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (3-8)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_0 + \frac{\mu_d U}{\delta} \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} + \frac{\mu_c U}{\delta^2} \left[ \left( \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} \right) \left( \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} \right) \text{sgn} \left( \frac{\partial v_x^*}{\partial y} \right) \right] \quad (3-9)$$

## 3.2 控制方程式正規化

首先針對控制方程式進行正規化處理，包含全流深控制方程式、弱剪層控制方程式、強剪層控制方程式；並在過程中依序分析得到各項無因次參數，作為處理之後控制方程式以及邊界條件正規化的參考。而為了方程式之簡潔，從此開始將無因次化後各項參數的上標星號(asterisk)省略。



### 3.2.1 全流深控制方程式

由(3-1)、(3-2)式所列之無因次型式，將(2-12)、(2-13)、(2-14)式之方程式無因次化。

$$\frac{U}{L} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = 0 \quad (3-10)$$

$$\frac{U^2}{L} \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{gD \cos \theta}{L} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\tau_0}{\rho D} \left( \frac{D}{L} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) + g \sin \theta \quad (3-11)$$

$$\frac{U^2 D}{L^2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = -g \cos \theta \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\tau_0}{\rho D} \left( \frac{D}{L} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) - g \cos \theta \quad (3-12)$$

則此時將各方向的動量方程式之各項尺度，同除以該方向動量方程式的壓力梯度項之尺度並重新整理為

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (3-13)$$

$$\frac{U^2}{gD \cos \theta} \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{L \tau_0}{\rho g D^2 \cos \theta} \left( \frac{D}{L} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) + \frac{L}{D} \tan \theta \quad (3-14)$$

$$\frac{U^2 D}{L^2 g \cos \theta} \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\tau_0}{\rho g D \cos \theta} \left( \frac{D}{L} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) - 1 \quad (3-15)$$

在此使用無因次參數  $\beta = \frac{U^2}{gD \cos \theta}$ 、 $S = \frac{L}{D} \tan \theta$ 、 $\varepsilon_1 = \frac{D}{L}$ ，並定義無因次參數

$A_1 = \frac{L \tau_0}{\rho g D^2 \cos \theta}$  整理(3-14)式、(3-15)式。其中  $\beta$  為與福祿數有關之無因次參數，

定義為類福祿數， $S$  則與土石流的流長與流寬尺度之比值，以及底床坡度有關之無因次參數，定義為坡度參數， $\varepsilon_1$  則是土石流的流深與流長尺度之比值，在本研究之長波理論下，其代表為一微小參數。

$$\beta \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + A_1 \left( \varepsilon_1 \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) + S \quad (3-16)$$

$$\beta \varepsilon_1^2 \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon_1 A_1 \left( \varepsilon_1 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) - 1 \quad (3-17)$$

而為了瞭解(3-16)、(3-17)式中各項作用力的尺度的大小，在此運用 2.6.1 節所定義的土石流各項尺度大小進行上式中各無因次參數的尺度估計；如下表 3-1 所示



表 3-1 無因次參數之尺度估計(一)

無因次參數	尺度估計
$\beta$	$\beta = \frac{U^2}{gD \cos \theta} = \frac{1}{\cos 10} \times \left( \frac{5}{\sqrt{9.81 \times 10}} \right)^2 = 0.52 \approx O(1)$
$S$	$S = \frac{L}{D} \tan \theta = \frac{100}{5} \times \tan 10 = 3.53 \approx O(1)$
$A_1$	$A_1 = \frac{L\tau_0}{\rho g D^2 \cos \theta} = \frac{100 \times 1000}{1000 \times 9.81 \times 5^2 \times \cos 10} = 0.41 \approx O(1)$
微小參數 1	$\varepsilon_1 = \frac{D}{L} = \frac{5}{100} = 0.05 \ll O(1)$

運用表 3-1 所列之尺度省略(3-16)、(3-17)式中的微小項影響後，再與(3-13)式整理即可得正規化後的土石流全流深控制方程式，記為

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (3-18)$$

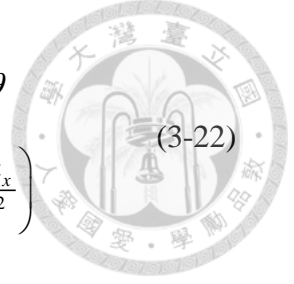
$$\beta \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \alpha S \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + S \quad (3-19)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - 1 \quad (3-20)$$

### 3.2.2 弱剪層控制方程式

如同 3.1.1 節之作法，我們將(3-1)、(3-2)式中所列之無因次型式，代入到(2-18)、(2-19)、(2-20)式中並無因次化該方程式。其中下標  $p$  代表弱剪層部分，下標  $s$  代表強剪層部分。

$$\frac{U}{L} \left( \frac{\partial v_{x,p}}{\partial x} + \frac{\partial v_{y,p}}{\partial y} \right) = 0 \quad (3-$$



$$\frac{U^2}{L} \left( \frac{\partial v_{xp}}{\partial t} + v_{xp} \frac{\partial v_{xp}}{\partial x} + v_{yp} \frac{\partial v_{xp}}{\partial y} \right) = -\frac{gD \cos \theta}{L} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \theta + \frac{GL\Delta}{\rho D^2} \left( \frac{D^2}{L^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \quad (3-22)$$

$$\frac{U^2 D}{L^2} \left( \frac{\partial v_{yp}}{\partial t} + v_{xp} \frac{\partial v_{yp}}{\partial x} + v_{yp} \frac{\partial v_{yp}}{\partial y} \right) = -g \cos \theta \frac{\partial p}{\partial y} - g \cos \theta + \frac{G\Delta}{\rho D} \left( \frac{D^2}{L^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) \quad (3-23)$$

將各方向的動量方程式之各項尺度，同除以該方向動量方程式的壓力項之尺度並重新整理。其中由 2.6.4 節所定義之彈性剪應變量之尺度可知  $\Delta = O\left(\frac{\tau_0}{2G}\right)$ 。

$$\frac{\partial v_{xp}}{\partial x} + \frac{\partial v_{yp}}{\partial y} = 0 \quad (3-24)$$

$$\frac{U^2}{gD \cos \theta} \left( \frac{\partial v_{xp}}{\partial t} + v_{xp} \frac{\partial v_{xp}}{\partial x} + v_{yp} \frac{\partial v_{xp}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{L}{D} \tan \theta + \frac{L^2 \tau_0}{2\rho g D^3 \cos \theta} \left( \frac{D^2}{L^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \quad (3-25)$$

$$\frac{U^2 D}{L^2 g \cos \theta} \left( \frac{\partial v_{yp}}{\partial t} + v_{xp} \frac{\partial v_{yp}}{\partial x} + v_{yp} \frac{\partial v_{yp}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - 1 + \frac{\tau_0}{2\rho g D \cos \theta} \left( \frac{D^2}{L^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) \quad (3-26)$$

此時定義無因次參數  $A_2 = \frac{L^2 \tau_0}{2\rho g D^3 \cos \theta}$ 、 $\varepsilon_2 = \frac{\tau_0}{2\rho g D \cos \theta}$  並與 3.1.1 節所定義之各項無因次參數整理(3-25)、(3-26)式

$$\beta \left( \frac{\partial v_{xp}}{\partial t} + v_{xp} \frac{\partial v_{xp}}{\partial x} + v_{yp} \frac{\partial v_{xp}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + A_2 \left( \varepsilon_1^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + S \quad (3-27)$$

$$\beta \varepsilon_1^2 \left( \frac{\partial v_{yp}}{\partial t} + v_{xp} \frac{\partial v_{yp}}{\partial x} + v_{yp} \frac{\partial v_{yp}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon_2 \left( \varepsilon_1^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) - 1 \quad (3-28)$$

則運用表 3-1 所列之尺度以及下表 3-2 所估計的無因次參數  $A_2$ 、 $\varepsilon_2$  之大小，省略(3-27)、(3-28)式中的微小項影響後，再與(3-24)式整理即可得正規化後的土石流弱剪層控制方程式，記為



$$\frac{\partial v_{x,p}}{\partial x} + \frac{\partial v_{y,p}}{\partial y} = 0 \quad (3-29)$$

$$\beta \left( \frac{\partial v_{x,p}}{\partial t} + v_{x,p} \frac{\partial v_{x,p}}{\partial x} + v_{y,p} \frac{\partial v_{x,p}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + A_2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + S \quad (3-30)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - 1 \quad (3-31)$$

表 3-2 無因次參數之尺度估計(二)

無因次參數	尺度估計
$A_2$	$A_2 = \frac{L^2 \tau_0}{2\rho g D^3 \cos \theta} = \frac{100^2 \times 1000}{2 \times 1000 \times 9.81 \times 5^3 \times \cos 10} = 4.14 \approx O(1)$
微小參數 2	$\varepsilon_2 = \frac{\tau_0}{2\rho g D \cos \theta} = \frac{1000}{2 \times 1000 \times 9.81 \times 5 \times \cos 10} = 0.01 \ll O(1)$

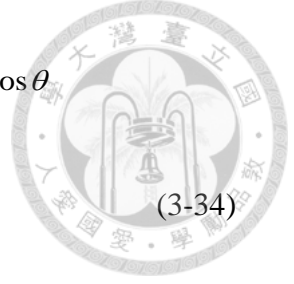
### 3.2.3 強剪層控制方程式

同樣的，我們將(3-1)、(3-2)式中所列之無因次型式，代入到(2-23)、(2-24)、(2-25)式中並無因次化該方程式。其中剪應變率和剪應變率張量的大小如 3.1.2 節所示。

$$\frac{U}{L} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) = 0 \quad (3-32)$$

$$\begin{aligned} & \frac{U^2}{L} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial t} + v_{xs} \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} + v_{ys} \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) = -\frac{gD \cos \theta}{L} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \theta \\ & + \frac{2\tau_0 \delta}{\rho L^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \text{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] + \frac{2\mu_d U}{\rho L^2} \frac{\partial^2 v_{xs}}{\partial x^2} \\ & + \frac{2\mu_c U^2}{\rho L^2 \delta} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \text{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \\ & + \frac{\mu_d U}{\rho \delta^2} \frac{\partial^2 v_{xs}}{\partial y^{*2}} + \frac{\mu_c U^2}{\rho \delta^3} \frac{\partial}{\partial y^*} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \text{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (3-33)$$





$$\begin{aligned}
\frac{U^2 D}{L^2} \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial t} + v_{xs} \frac{\partial v_{ys}}{\partial x} + v_{ys} \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) &= -\frac{g D \cos \theta}{\delta} \frac{\partial p}{\partial y} - g \cos \theta \\
&+ \frac{\mu_d U}{\rho L \delta} \frac{\partial^2 v_{xs}}{\partial x \partial y} + \frac{\mu_c U^2}{\rho L \delta^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \\
&+ \frac{2\tau_0}{\rho L} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \\
&+ \frac{2\mu_d U}{\rho L \delta} \frac{\partial^2 v_{ys}}{\partial y^2} + \frac{2\mu_c U^2}{\rho L \delta^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3-34}$$

將各方向的動量方程式之各項尺度，同除以該方向動量方程式的壓力項之尺度並重新整理為

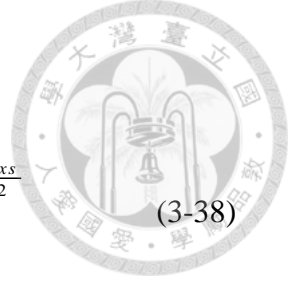
$$\frac{\partial v_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} = 0 \tag{3-35}$$

$$\begin{aligned}
\frac{U^2}{g D \cos \theta} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial t} + v_{xs} \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} + v_{ys} \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{L}{D} \tan \theta \\
&+ \frac{2\tau_0 \delta}{\rho g D L \cos \theta} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] + \frac{2\mu_d U}{\rho g D L \cos \theta} \frac{\partial^2 v_{xs}}{\partial x^2} \\
&+ \frac{2\mu_c U^2}{\rho g D L \delta \cos \theta} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \\
&+ \frac{\mu_d U L}{\rho g D \delta^2 \cos \theta} \frac{\partial^2 v_{xs}}{\partial y^2} + \frac{\mu_c U^2 L}{\rho g D \delta^3 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3-36}$$

$$\begin{aligned}
\frac{U^2 \delta}{g L^2 \cos \theta} \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial t} + v_{xs} \frac{\partial v_{ys}}{\partial x} + v_{ys} \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\delta}{D} \\
&+ \frac{\mu_d U}{\rho g D L \cos \theta} \frac{\partial^2 v_{xs}}{\partial x \partial y} + \frac{\mu_c U^2}{\rho g D L \delta \cos \theta} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \\
&+ \frac{2\tau_0 \delta}{\rho g D L \cos \theta} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] + \frac{2\mu_d U}{\rho g D L \cos \theta} \frac{\partial^2 v_{ys}}{\partial y^2} \\
&+ \frac{2\mu_c U^2}{\rho g D L \delta \cos \theta} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3-37}$$

此時定義無因次參數  $\alpha_d = \frac{\mu_d U L}{\rho g D \delta^2 \cos \theta}$ 、 $\alpha_c = \frac{\mu_c U^2 L}{\rho g D \delta^3 \cos \theta}$ 、 $\varepsilon_3 = \frac{\delta}{D}$ 、 $\varepsilon_4 = \frac{\delta}{L}$ ，並

與 3.2.1 節所定義之各項無因次參數，整理(3-36)、(3-37)式。其中  $\alpha_d$ 、 $\alpha_c$  分別為與動力黏滯度以及紊亂-離散參數有關的無因次參數， $\varepsilon_3$  為土石流的強剪層流深與全流深尺度之比值， $\varepsilon_4$  為土石流的強剪層流深與流長尺度之比值；由 2.6.3 節所定義之強剪層厚度尺度可知， $\varepsilon_3$ 、 $\varepsilon_4$  之值皆為一微小參數。



$$\begin{aligned}
& \beta \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial t} + v_{xs} \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} + v_{ys} \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + S \\
& + 2A_1 \varepsilon \varepsilon_3 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] + 2\alpha_d \varepsilon_1^2 \varepsilon_3^2 \frac{\partial^2 v_{xs}}{\partial x^2} \\
& + 2\alpha_c \varepsilon_1^2 \varepsilon_3^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \\
& + \alpha_d \frac{\partial^2 v_{xs}}{\partial y^2} + \alpha_c \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \\
& \beta \varepsilon_1 \varepsilon_4 \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial t} + v_{xs} \frac{\partial v_{ys}}{\partial x} + v_{ys} \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \varepsilon_3 \\
& + \alpha_d \varepsilon_1^2 \varepsilon_3^2 \frac{\partial^2 v_{xs}}{\partial x \partial y} + \alpha_c \varepsilon_1^2 \varepsilon_3^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \\
& + 2A_1 \varepsilon \varepsilon_3 \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] + 2\alpha_d \varepsilon_1^2 \varepsilon_3^2 \frac{\partial^2 v_{ys}}{\partial y^2} \\
& + 2\alpha_c \varepsilon_1^2 \varepsilon_3^2 \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3-38}$$

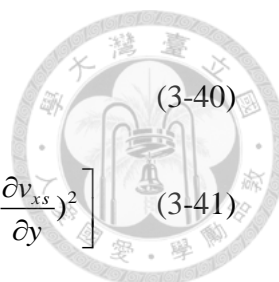
$$\begin{aligned}
& \beta \varepsilon_1 \varepsilon_4 \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial t} + v_{xs} \frac{\partial v_{ys}}{\partial x} + v_{ys} \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \varepsilon_3 \\
& + \alpha_d \varepsilon_1^2 \varepsilon_3^2 \frac{\partial^2 v_{xs}}{\partial x \partial y} + \alpha_c \varepsilon_1^2 \varepsilon_3^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \\
& + 2A_1 \varepsilon \varepsilon_3 \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] + 2\alpha_d \varepsilon_1^2 \varepsilon_3^2 \frac{\partial^2 v_{ys}}{\partial y^2} \\
& + 2\alpha_c \varepsilon_1^2 \varepsilon_3^2 \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3-39}$$

其中各項無因次參數之大小估計如下表 3-3 所示

表 3-3 無因次參數之尺度估計(三)

無因次參數	尺度估計
$\alpha_d$	$\alpha_d = \frac{\mu_d UL}{\rho g D \delta^2 \cos \theta} = \frac{48.5 \times 5 \times 100}{1000 \times 9.81 \times 5 \times 0.35^2 \times \cos 10} = 4.10 \approx O(1)$
$\alpha_c$	$\alpha_c = \frac{\mu_c U^2 L}{\rho g D \delta^3 \cos \theta} = \frac{2.24 \times 5^2 \times 100}{1000 \times 9.81 \times 5 \times 0.35^3 \times \cos 10} = 2.70 \approx O(1)$
微小參數 3	$\varepsilon_3 = \frac{\delta}{D} = \frac{0.35}{5} = 0.07 \ll O(1)$
微小參數 4	$\varepsilon_4 = \frac{\delta}{L} = \frac{0.35}{100} = 3.5 \times 10^{-3} \ll O(1)$

則運用表 3-1、表 3-3 所列之尺度省略(3-38)、(3-39)式中的微小項影響後，再與(3-35)式整理即可得正規化後的土石流強剪層控制方程式。



$$\frac{\partial v_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} = 0 \quad (3-40)$$

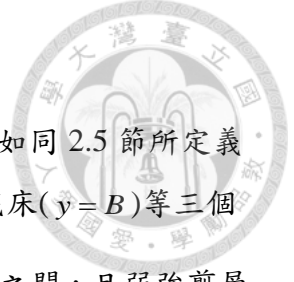
$$\beta \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial t} + v_{xs} \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} + v_{ys} \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + S + \alpha_d \frac{\partial^2 v_{xs}}{\partial y^2} + \alpha_c \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3-41)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial y} - \epsilon_3 \quad (3-42)$$

(3-42)式表達了對於厚度很薄的強剪層而言，其壓力隨 y 方向的變化值將很微小而趨近於零。則此時統整在長波理論下正規化後的全流深、弱剪層、強剪層控制方程式，如下表 3-4 所示

表 3-4 長波理論下正規化後的控制方程式

	$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$
全流深方程式	$\beta \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \alpha S \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + S$ $0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - 1$
	$\frac{\partial v_{xp}}{\partial x} + \frac{\partial v_{yp}}{\partial y} = 0$
弱剪層方程式	$\beta \left( \frac{\partial v_{xp}}{\partial t} + v_{xp} \frac{\partial v_{xp}}{\partial x} + v_{yp} \frac{\partial v_{xp}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + A_2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + S$ $0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - 1$
	$\frac{\partial v_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} = 0$
強剪層方程式	$\beta \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial t} + v_{xs} \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} + v_{ys} \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + S + \alpha_d \frac{\partial^2 v_{xs}}{\partial y^2} + \alpha_c \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^2 \right]$ $0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \epsilon_3$



### 3.3 邊界條件正規化

代入 3.1.1 節所定義的各項無因次參數並正規化邊界條件，如同 2.5 節所定義的，為包含了自由表面( $y=h$ )、弱強剪層交界面( $y=B+\delta$ )、底床( $y=B$ )等三個部份；其中由於  $h=O(D)$ ，故正規化後的  $y$  軸大小為介於  $\frac{B}{D} \sim 1$  之間，且弱強剪層交界面的位置為  $\frac{B+\delta}{D}$ 、底床位置為  $\frac{B}{D}$ 。

#### 3.3.1 自由表面

自由表面處的邊界條件包含了 KBC 以及 DBC 兩部分。對 KBC 而言

$$\frac{UD}{L}v_y = \frac{U\theta}{L}\frac{h}{\partial t} + \frac{UD\partial}{L^x}\frac{h}{\partial x} + \frac{U\theta}{L^y}\frac{h}{\partial y} \quad at = \quad (3-43)$$

由(3-43)式可知 KBC 內各項尺度互為等大，則保留所有項影響並整理(3-43)式為

$$v_y = \frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} \quad at = \quad (3-44)$$

而對 DBC 而言。其中由 2.6.4 節所定義之彈性剪應變量之尺度可知  $\Delta = O(\frac{\tau_0}{2G})$ 。

$$\Sigma_x = -\frac{\rho g D^2 \cos \theta}{L} p \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{D\tau_0}{L} \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{L\tau_0}{2D} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{D\tau_0}{2L} \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0 \quad at = \quad (3-45)$$

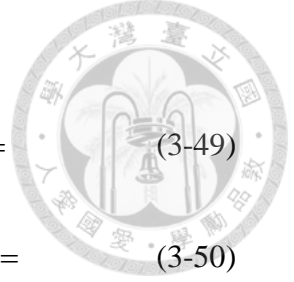
$$\Sigma_y = \frac{\tau_0}{2} \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{D^2\tau_0}{2L^2} \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \rho g D \cos \theta p - \tau_0 \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad at \quad y=1 \quad (3-46)$$

對(3-45)式而言，同除以  $-p \frac{\partial h}{\partial x}$  之尺度  $\frac{\rho g D^2 \cos \theta}{L}$ ；對(3-46)式而言，同除以  $p$  之尺

度  $\rho g D \cos \theta$

$$\Sigma_x = -p \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\tau_0}{\rho g D \cos \theta} \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{L^2 \tau_0}{2 \rho g D^3 \cos \theta} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\tau_0}{2 \rho g D \cos \theta} \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0 \quad at \quad y=1 \quad (3-47)$$

$$\Sigma_y = \frac{\tau_0}{2 \rho g D \cos \theta} \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{D\tau_0}{2L^2 \rho g \cos \theta} \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + p - \frac{\tau_0}{\rho g D \cos \theta} \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad at \quad y=1 \quad (3-48)$$



此時以 3.2 節所定義的各項無因次參數整理(3-47)、(3-48)式

$$\Sigma_x = -p \frac{\partial h}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} - A_2 \frac{\partial u_x}{\partial y} + \varepsilon_2 \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0 \quad at = \quad (3-49)$$

$$\Sigma_y = \varepsilon_2 \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2 \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + p - 2\varepsilon_2 \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad at = \quad (3-50)$$

運用表 3-1、表 3-2 所列之尺度省略(3-49)、(3-50)式中的微小項影響

$$p \frac{\partial h}{\partial x} + A_2 \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 \quad at = \quad (3-51)$$

$$p = 0 \quad at = \quad (3-52)$$

則將(3-52)式代回(3-51)式中可得正規化的自由表面彈性剪應變量  $e_{xy}$  為零之條件

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 \quad at = \quad (3-53)$$

而在彈性剪應變  $e_{xy}$  為零時，其剪應力  $\tau_{xy}$  也將等於零

$$\tau_{xy} = 0 \quad at = \quad (3-54)$$

### 3.3.2 弱剪層與強剪層界面

由於運動與動力性質連續條件的各項尺度大小皆一樣，故在此為正規化剪應力的大小等於降伏應力之關係式。對(2-39)式之弱剪層部分而言

$$\begin{aligned} \tau_0^2 = & \frac{\tau_0^2}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{\tau_0^2}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{L^2 \tau_0^2}{4D^2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 \\ & + \frac{D^2 \tau_0^2}{4L^2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \frac{\tau_0^2}{2} \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad at \quad y = \frac{B+\delta}{D} \end{aligned} \quad (3-55)$$

同除以尺度  $\tau_0^2$  並以 3.2 節所定義的各項無因次參數整理(3-54)式

$$1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial u_x}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \frac{\varepsilon_1^2}{4} \frac{\partial u_y}{\partial x} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad at \quad y = \frac{B+\delta}{D} \quad (3-56)$$

運用表 3-1 所列之尺度省略(3-56)式中的微小項影響並整理為

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = 2\varepsilon_1 \quad at \quad y = \frac{B+\delta}{D} \quad (3-57)$$

(3-57)式即為(2-121)式的正規化型式，其代表在界面處降伏應力造成的弱剪層剪應變為一微小之值並趨近於零。



對強剪層部分而言，正規化(2-8)式中的剪應力張量大小 $|\tau_{ij}|$ 並同除以尺度 $\tau_0^2$ ，藉此先估計長波理論下剪應力張量大小的最大階尺度項；其中剪應變率張量 $\dot{e}_{ij}$ 及其大小 $|\dot{e}_{ij}|$ 的正規化型式如 3.1.2 節所示。

$$\begin{aligned}
|\tau_{ij}|^2 = & \frac{2D^2}{L^2} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]^2 + \frac{2\mu_d^2 U^2}{\tau_0^2 L^2} \left[ \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right]^2 \\
& + \frac{2\mu_c^2 U^4 D^2}{\tau_0^2 L^4 \delta^2} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]^2 \\
& + \frac{4\mu_d U D^2}{\tau_0 L^3} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \left[ \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right] \\
& + \frac{4\mu_c U^2 D^2}{\tau_0 L^3 \delta} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \\
& + \frac{4\mu_d \mu_c U^3}{\tau_0^2 L^2 \delta} \left[ \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right] \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \\
& + \frac{2D^2}{L^2} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]^2 \\
& + \frac{2\mu_d^2 U^2}{\tau_0^2 L^2} \left[ \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right]^2 + \frac{2\mu_c^2 U^4 D^2}{\tau_0^2 L^4 \delta^2} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]^2 \\
& + \frac{4\mu_d U D^2}{\tau_0 L^3} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \left[ \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right] \\
& + \frac{4\mu_c U^2 D^2}{\tau_0 L^3 \delta} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \\
& + \frac{4\mu_d \mu_c U^3}{\tau_0^2 L^2 \delta} \left[ \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right] \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \\
& + 1 + \frac{\mu_d^2 U^2}{\tau_0^2 \delta^2} \left[ \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right]^2 + \frac{\mu_c^2 U^4}{\tau_0^2 \delta^4} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]^2 \\
& + \frac{\mu_d U}{\tau_0 \delta} \left[ \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right] + \frac{\mu_c U^2}{\tau_0 \delta^2} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \\
& + \frac{\mu_d \mu_c U^3}{\tau_0^2 \delta^3} \left[ \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right] \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3-58}$$

此時定義無因次參數 $\alpha_1 = \frac{\mu_d U D^2}{\tau_0 L \delta^2}$ 、 $\alpha_2 = \frac{\mu_c U^2 D^2}{\tau_0 L \delta^3}$ 、 $\alpha_3 = \frac{\mu_d U}{\tau_0 \delta}$ 、 $\alpha_4 = \frac{\mu_c U^2}{\tau_0 \delta^2}$ ，並與



3.2 節所定義之各項無因次參數整理(3-58)式

$$\begin{aligned}
|\tau_{ij}|^2 = & 2\varepsilon_1^2 \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]^2 + \alpha_1^2 \varepsilon_2^2 \left[ \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right]^2 \\
& + 2\alpha_2^2 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]^2 \\
& + 2\alpha_1 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \left[ \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right] \\
& + 2\alpha_2 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \\
& + 2\alpha_1 \alpha_2 \varepsilon_2^4 \left[ \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right] \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \\
& + 2\varepsilon_1^2 \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]^2 \\
& + 2\alpha_1^2 \varepsilon_2^4 \left[ \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right]^2 + 2\alpha_2^2 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^4 \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]^2 \\
& + 2\alpha_1 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \left[ \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right] \\
& + 2\alpha_2 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \\
& + 2\alpha_1 \alpha_2 \varepsilon_2^4 \left[ \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right] \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{ys}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \\
& + 1 + \alpha_3^2 \left[ \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right]^2 + \alpha_4^2 \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]^2 \\
& + \alpha_3 \left[ \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right] + \alpha_4 \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \\
& + \alpha_3 \alpha_4 \left[ \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right] \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]
\end{aligned}$$

(3-59)

其中各項無因次參數之大小估計如下表 3-4 所示

表 3-5 無因次參數之尺度估計(四)

無因次參數	尺度估計
$\alpha_1$	$\alpha_1 = \frac{\mu_d U D^2}{\tau_0 L \delta^2} = \frac{48.5 \times 5 \times 5^2}{1000 \times 100 \times 0.35^2} = 0.49 \approx O(1)$
$\alpha_2$	$\alpha_2 = \frac{\mu_c U^2 D^2}{\tau_0 L \delta^3} = \frac{2.24 \times 5^2 \times 5^2}{1000 \times 100 \times 0.35^3} = 0.33 \approx O(1)$
$\alpha_3$	$\alpha_3 = \frac{\mu_d U}{\tau_0 \delta} = \frac{48.5 \times 5}{1000 \times 0.35} = 0.69 \approx O(1)$
$\alpha_4$	$\alpha_4 = \frac{\mu_c U^2}{\tau_0 \delta^2} = \frac{2.24 \times 5^2}{1000 \times 0.35^2} = 0.46 \approx O(1)$

則運用表 3-5 所列之尺度省略(3-59)式中的微小項影響並整理為

$$\begin{aligned} |\tau_{ij}|^2 = & 1 + \alpha_3^2 \left[ \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right]^2 + \alpha_4^2 \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \text{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right]^2 + \alpha_3 \left[ \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right] \\ & + \alpha_4 \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \text{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] + \alpha_3 \alpha_4 \left[ \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right] \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \text{sgn} \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) \right] \quad (3-60) \end{aligned}$$

由(2-27)與(2-88)式可知，(3-60)式中等號右邊的六項事實上即為剪應力項 $\tau_{xy}^2$ 的展開；因此重新整理(3-60)式為

$$|\tau_i| = \tau_x \quad (3-61)$$

由(3-61)式可知剪應力 $\tau_{xy}$ 為土石流的最大階剪應力尺度項，並且在弱強剪層界面時該剪應力之大小即等於降伏應力之值，記為

$$|\tau_i| = \tau_{xy} = 1 \quad \text{at} \quad y = \frac{B + \delta}{D} \quad (3-62)$$

並且由(3-60)式可知，當界面處的剪應力等於降伏應力時，剪應變率 $\frac{\partial v_{xs}}{\partial y} = 0$ 。

### 3.3.3 底床

對於底床邊界之正規化而言，其結果與(2-41)式相同，記為

$$v_{is} = 0 \quad \text{at} \quad z = B \quad (3-63)$$





### 3.4 穩態均勻流解

在前述章節中，定義了土石流的本構關係式、控制方程式、邊界條件、尺度，並且經過正規化的方式省略了方程式中微小項的影響，整理出了全流深方程式(3-18)~(3-20)式、弱剪層方程式(3-29)~(3-31)式、強剪層方程式(3-40)~(3-42)式以及3.3節之邊界條件。則本節開始為要求出在穩態均勻況下，土石流的各項變數在運動過程中的無因次解。欲求解之方程式以及邊界條件為整理如下

全流深方程式部分

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (3-64)$$

$$\beta \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + A_1 \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + S \quad (3-65)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - 1 \quad (3-66)$$

弱剪層方程式部分

$$\beta \left( \frac{\partial v_{x,p}}{\partial t} + v_{x,p} \frac{\partial v_{x,p}}{\partial x} + v_{y,p} \frac{\partial v_{x,p}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + A_2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial^2 y} + S \quad (3-67)$$

強剪層方程式部分

$$\beta \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial t} + v_{xs} \frac{\partial v_{xs}}{\partial x} + v_{ys} \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + S + \alpha_d \frac{\partial^2 v_{xs}}{\partial y^2} + \alpha_c \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3-68)$$

與第二章求解方式相同將弱強剪層的連續方程式以及y方向動量方程式，分別由全流深方程式的連續方程式和y方向動量方程式表達。求解過程使用之所有邊界條件為整理如下表3-6所示，其中在此先忽略底床高程之影響，並視其與座標x方向重合；即B=0且無因次化後的y介於0~1之間。

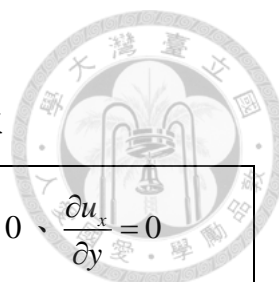


表 3-6 穩態均勻流下之正規化後邊界條件整理

自由表面 $y=1$	x 方向 DBC	$\tau_{yx} = 0$ 、 $\frac{\partial u_x}{\partial y} = 0$
	y 方向 DBC	$p = 0$
弱剪層與 強剪層交界面 $y = \frac{\delta}{D}$	速度連續	$v_{xp} = v_{xs}$ 、 $v_{yp} = v_{ys}$
	剪應力大小等於降伏應力	$\frac{\partial u_x}{\partial y} = 2\varepsilon_1$
	剪應變率等於零	$\frac{\partial v_{xs}}{\partial y} = 0$
底床 $y=0$	無滑移邊界條件	$v_{xs} = 0$ 、 $v_{ys} = 0$

### 3.4.1 全流深部分

則由方程式(3-64)、(3-65)、(3-66)式可知

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (3-69)$$

$$\beta \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + A_1 \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + S \quad (3-70)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - 1 \quad (3-71)$$

對於穩態均勻流況而言，其代表物理量將不隨著時間以及  $x$  方向空間座標發生變化，

即  $\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0$ 、 $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ 、 $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ ；而由連續方程式(3-69)式與無滑移邊界條件可知  $y$  方

向之速度  $v_y$  將在整個土石流運動中等於零。此時整理(3-70)、(3-71)式並加入表 3-5

之邊界條件



$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + A_1 \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + S \quad (3-72)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - 1 \quad (3-73)$$

$$p = 0, \tau_{yx} = 0 \quad \text{at} \quad y = 1 \quad (3-74)$$

由(3-73)與(3-74)式可知  $p = (1 - y)$ ，則此時重新整理(3-72)式為

$$0 = \frac{A_1}{S} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + 1 \quad (3-75)$$

$$\tau_{yx} = 0 \quad \text{at} \quad = \quad (3-76)$$

則(3-75)、(3-76)式即可求得土石流運動過程中的剪應力分佈，記為

$$\tau_{yx} = \frac{S}{A_1} (1 - y) \quad (3-78)$$

無因次參數  $\frac{A_1}{S}$  等於  $\frac{\tau_0}{\rho g D \sin \theta}$  為賓漢數，代表土石流體之降伏應力與土石流體元素所承受之底床剪應力之比值；則定義賓漢數為  $\alpha$  並整理(3-78)式後，即可得土石流運動過程中的剪應力分佈

$$\tau_{yx} = \frac{1}{\alpha} (1 - y) \quad (3-79)$$

而由(3-79)式可知，強剪層厚度與降伏應力之間的關係可表示為  $\frac{\delta}{D} = (1 - \alpha)$ 。

### 3.4.2 強剪層部分

同樣的在穩態均勻流假設下，省略方程式中(3-68)式中慣性力項以及壓力梯度項的影響，化簡方程式並與表 3-5 之邊界條件作整理。

$$0 = S + \alpha_d \frac{\partial^2 v_{xs}}{\partial y^2} + \alpha_c \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3-80)$$

$$\frac{\partial v_{xs}}{\partial y} = 0 \quad \text{at} \quad = \frac{\delta}{D} \quad v_{xs} = \quad \text{at} \quad = \quad (3-81)$$

則求解(3-80)式：

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \alpha_d \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) + \alpha_c \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^2 \right] = -S \quad (3-82)$$



$$\alpha_d \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) + \alpha_c \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^2 = -S \cdot y + C_1 \quad (3-83)$$

由(3-81)式之弱強剪層邊界條件可知  $C_1 = S \frac{\delta}{D}$ ，則代回(3-83)式

$$\alpha_c \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right)^2 + \alpha_d \left( \frac{\partial v_{xs}}{\partial y} \right) - S y \left( \frac{\delta}{D} - y \right) = 0 \quad (3-84)$$

根據一元二次方程式的解可知

$$\frac{\partial v_{xs}}{\partial y} = \frac{-\alpha_d \pm \sqrt{\alpha_d^2 + 4\alpha_c S \left( \frac{\delta}{D} - y \right)}}{2\alpha_c} \quad (3-85)$$

由剪應變率必為實數可知根號內不能為負值，因此(3-85)式僅適用在  $0 \leq y \leq \frac{\delta}{D}$  之範圍內，也就是指適用於強剪層區域中。則再對(3-85)式作積分

$$v_{xs} = -\frac{\alpha_d}{2\alpha_c} \cdot y \pm \left\{ -\frac{1}{12\alpha_c} \times \left[ \alpha_d^2 + 4\alpha_c S \left( \frac{\delta}{D} - y \right) \right]^{\frac{3}{2}} \right\} + C_2 \quad (3-86)$$

由強剪層速度必不為負值可知(3-86)式的加減號處為僅保留加號部分

$$v_{xs} = -\frac{\alpha_d}{2\alpha_c} \cdot y - \frac{1}{12\alpha_c} \times \left[ \alpha_d^2 + 4\alpha_c S \left( \frac{\delta}{D} - y \right) \right]^{\frac{3}{2}} + C_2 \quad (3-87)$$

由(3-81)式之無滑移邊界條件可知  $C_2 = \frac{1}{12S\alpha_c} \times \left[ \alpha_d^2 + 4\alpha_c S \left( \frac{\delta}{D} \right) \right]^{\frac{3}{2}}$ 。則將  $C_2$  代回

(3-87)式即可得強剪層  $x$  方向速度分佈

$$v_{xs} = -\frac{\alpha_d}{2\alpha_c} \cdot y + \frac{1}{12S\alpha_c} \times \left\{ \left[ \alpha_d^2 + 4\alpha_c S \left( \frac{\delta}{D} \right) \right]^{\frac{3}{2}} - \left[ \alpha_d^2 + 4\alpha_c S \left( \frac{\delta}{D} - y \right) \right]^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (3-88)$$

### 3.4.3 弱剪層部分

同樣的在穩態均勻流假設下，省略方程式(3-67)式中慣性力項以及壓力梯度項的影響，化簡方程式並與表 3-5 之邊界條件整理為

$$0 = A_2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + S \quad (3-89)$$



$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = 1 \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} = \varepsilon_1 \quad \text{at } y = \frac{\delta}{D} \quad (3-90)$$

則求解(3-89)式：

$$u_x = -\frac{S}{2A_2} \cdot y^2 + C_1 \cdot y + C_2, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{S}{A_2} \cdot y + C_1 \quad (3-91)$$

此時將(3-90)式之邊界條件代入(3-91)式中，並以賓漢數  $\alpha$  整理可得

$$C_1 = \frac{2\varepsilon_1}{\alpha}, \quad C_1 = \frac{2\varepsilon_1}{\alpha} \left( \alpha + \frac{\delta}{D} \right) \quad (3-92)$$

則將(3-92)式所得之  $C_1$  值分別代入(3-91)式可得兩種不同的剪應變方程式，記為

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{2\varepsilon_1}{\alpha} (1 - y) \quad (3-93)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = 2\varepsilon_1 + \frac{2\varepsilon_1}{\alpha} \left( \frac{\delta}{D} - y \right) \quad (3-94)$$

對(3-94)式代入自由表面邊界條件  $\frac{\partial u_x}{\partial y} = 0$  at  $y = 1$  可得

$$2\varepsilon_1 = \frac{2\varepsilon_1}{\alpha} \left( 1 + \frac{\delta}{D} \right) \quad (3-95)$$

(3-95)式事實上即為(3-79)式在交界面處剪應力等於降伏應力之情況得到的等式，3則再將(3-95)式代入(3-94)式中即可得出(3-94)式；因此無論使用自由表面的或是弱剪層交界面的應力邊界條件，其所得的彈性位移方程式都是相同的結果，差別只是(3-94)式是將(3-93)式中的與降伏應力等值的彈性剪應變量提出了而已。因此

在  $C_1 = \frac{2\varepsilon_1}{\alpha}$  時，可得彈性位移函數  $u_x$  以及彈性剪應變函數  $e_{xy}$

$$u_x = -\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \cdot y^2 + \frac{2\varepsilon_1}{\alpha} \cdot y + C_2 \quad (3-96)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{2\varepsilon_1}{\alpha} (1 - y) \quad (3-97)$$

在求出弱剪層彈性位移  $u_x$  之後，可藉由  $u_x$  的實質導函數以及穩態均勻流條件，判斷(3-96)式中積分常數  $C_2$  以及速度  $v_{xp}$ 。

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (3-98)$$

在穩態均勻流況以及無滑移邊界條件下， $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{du_x}{dt} \right) = 0$ 、 $\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$ 、 $v_y = 0$ 、



$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t}$ 。則左式整理為

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad u_x = C_3 t + f(y) \quad (3-99)$$

由(3-96)、(3-99)式可知， $-\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \cdot y^2 + \frac{2\varepsilon_1}{\alpha} \cdot y = f(y)$ 、 $C_2 = C_3 t$ ；因此事實上(3-96)式中的  $C_2$  是與時間有關，但不隨著  $y$  方向變化的積分常數。而對弱剪層速度而言，可運用彈性位移的實質導函數判斷

$$v_{xp} = \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \cdot y^2 + \frac{2\varepsilon_1}{\alpha} \cdot y + C_2 \right) = C_3 \quad (3-100)$$

因此由(3-100)式可知；在穩態均勻流況下，弱剪層速度事實上是一個與時間以及  $x$ 、 $y$  方向變化都無關的常數。故藉由弱強剪層交界面速度連續的條件可以知道，弱剪層速度即為  $v_{xp} = v_{xs} \left( \frac{\delta}{D} \right)$ ，記為

$$v_{xp} = v_{xs} \left( \frac{\delta}{D} \right) = -\frac{\alpha_d}{2\alpha_c} \cdot \frac{\delta}{D} + \frac{1}{12S\alpha_c} \times \left\{ \left[ \alpha_d^2 + 4\alpha_c S \left( \frac{\delta}{D} \right) \right]^{\frac{3}{2}} - \alpha_d^3 \right\} \quad (3-101)$$

### 3.4.4 穩態均勻流解之整理

全流深部分

$$p = (1 - y) \quad (3-102)$$

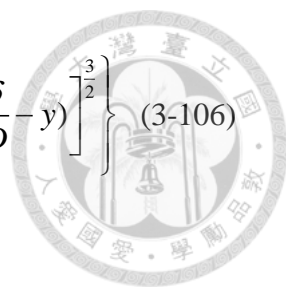
$$\tau_{yx} = \frac{1}{\alpha} (1 - y) \quad , \quad \frac{\delta}{D} = (1 - \alpha) \quad (3-103)$$

弱剪層部分

$$u_x = -\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \cdot y^2 + \frac{2\varepsilon_1}{\alpha} \cdot y + C_2 \quad (3-104)$$

$$v_{xp} = v_{xs} \left( \frac{\delta}{D} \right) = -\frac{\alpha_d}{2\alpha_c} \cdot \frac{\delta}{D} + \frac{1}{12S\alpha_c} \times \left\{ \left[ \alpha_d^2 + 4\alpha_c S \left( \frac{\delta}{D} \right) \right]^{\frac{3}{2}} - \alpha_d^3 \right\} \quad (3-105)$$

強剪層部分



$$v_{xs} = -\frac{\alpha_d}{2\alpha_c} \cdot y + \frac{1}{12S\alpha_c} \times \left\{ \left[ \alpha_d^2 + 4\alpha_c S \left( \frac{\delta}{D} \right) \right]^{\frac{3}{2}} - \left[ \alpha_d^2 + 4\alpha_c S \left( \frac{\delta}{D} - y \right) \right]^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (3-106)$$

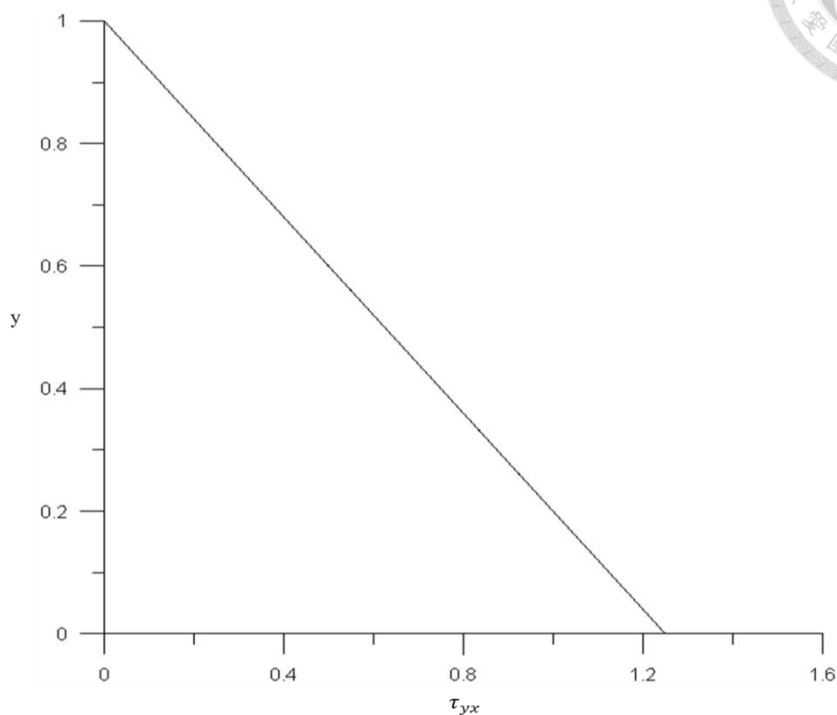


圖 3-1 穩態均勻流下剪應力分佈

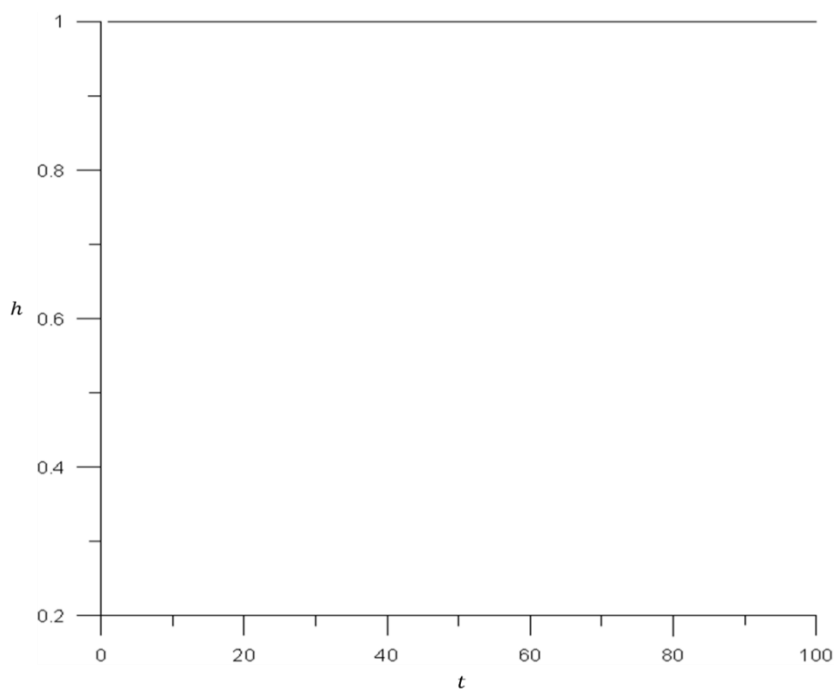


圖 3-2 穩態均勻流下全流深與時間關係

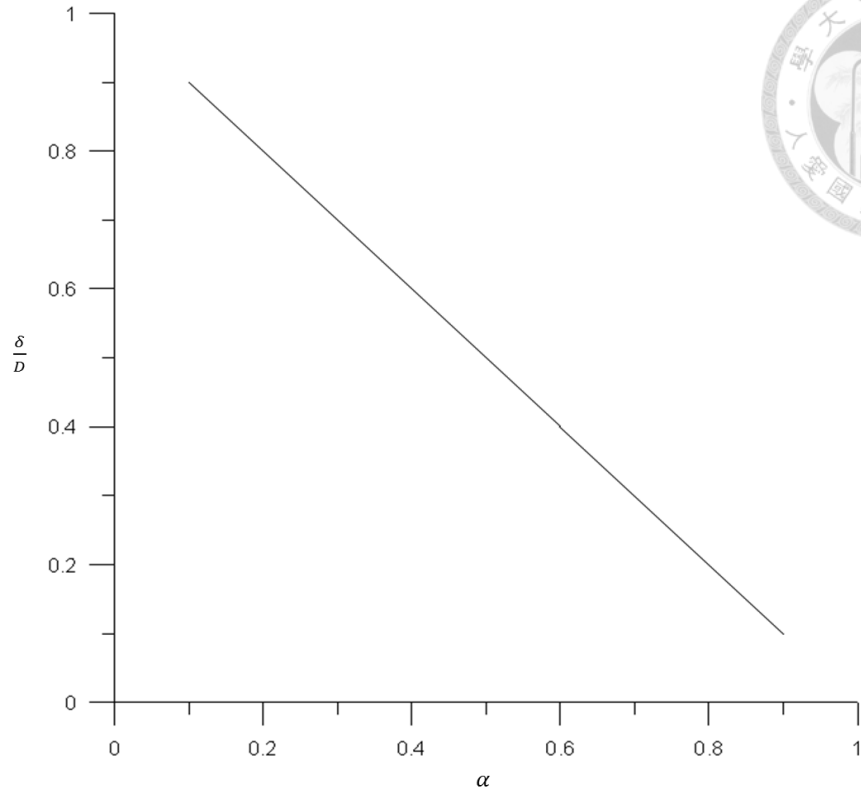


圖 3-3 穩態均勻流下弱強剪層厚度比值與賓漢數關係

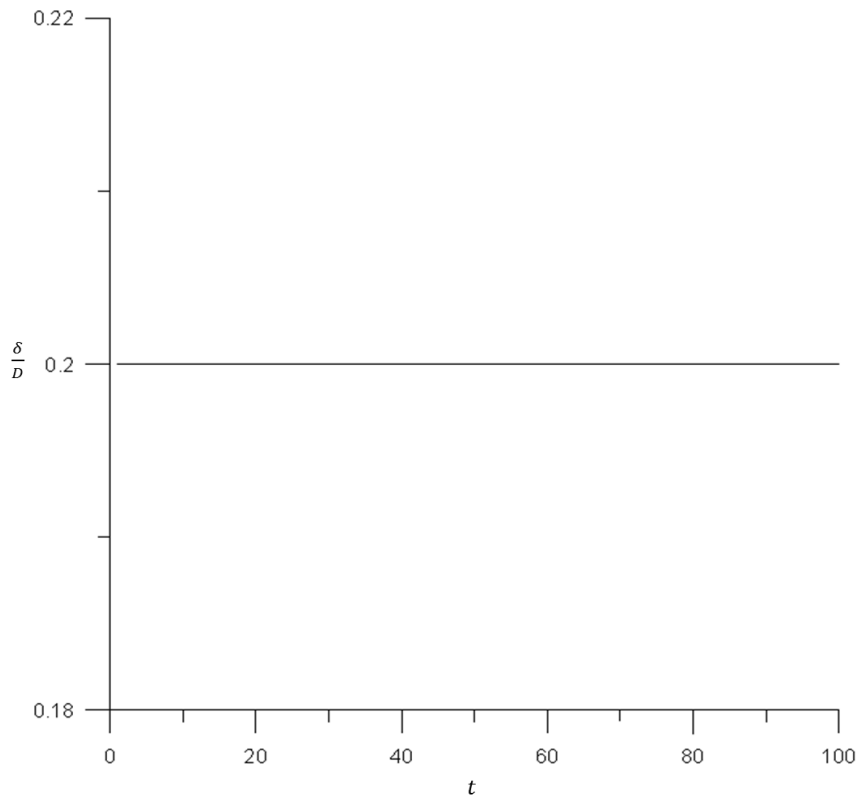


圖 3-4 穩態均勻流下弱強剪層厚度比值與時間關係( $\alpha = 0.8$ )



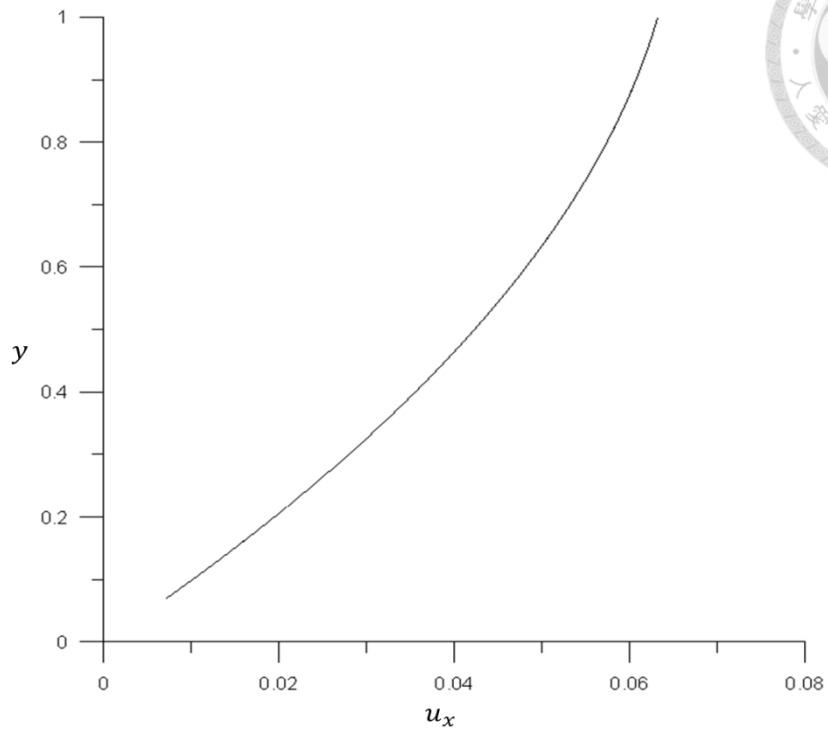


圖 3-5 穩態均勻流下彈性位移函數分佈( $C_2 = 0$ )

## 第四章 非穩態解



在 3.4 節中，求解了土石流在穩態均勻流況下的彈性位移函數( $u_x$ )、土石流速度( $v_x$ 、 $v_y$ )、剪應力分佈( $\tau_{yx}$ )以及壓力分佈( $p$ )等，則在本章節中為運用第二章所定義土石流運動的本構關係式、長波理論下的控制方程式、邊界條件；求解初始土石流體在底床上，從靜止受外力作用開始變形至啟動前一刻之非穩態解；進而將土石流的運動從初始土石流體靜止到啟動前一刻，到啟動後形成穩態均勻流況之整個過程描述。

### 4.1 問題定義

對天然的土石流體體積堆積而成之壩體而言，其幾何尺寸多為流長方向尺度遠大於流深方向之尺度(呂明鴻，2010)，因此本研究為考慮一初始靜止且流長方向尺度  $x=O(L)$ ，遠大於流深方向尺度  $y=O(D)$  之土石流體，並分析該土石流體從靜止到啟動前一刻的非穩態運動行為；其中在此為忽略底床高程之影響，並視其為水平且與座標  $x$  方向重合。如下圖 4-1 所示

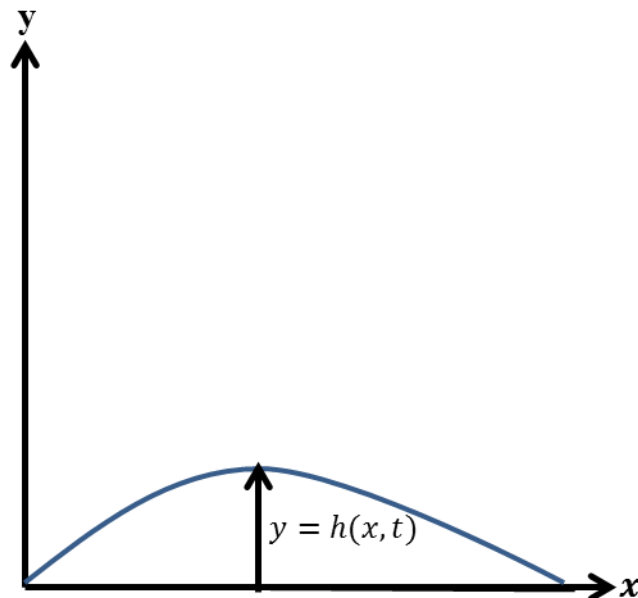


圖 4-1 靜止到啟動前一刻土石流體示意圖



對土石流運動而言，由於土石流體具有降伏應力，因此在土石流體受到的剪應力大於降伏應力而啟動後，由(2-7)式可知其將開始分成作用剪應力大於降伏應力之強剪層以及小於降伏應力之弱剪層兩部分；但對於從靜止開始受外力作用到啟動前一刻的土石流體而言，由於整層土石流體受到的剪應力都還未大於降伏應力，因此在該過程中強剪層並沒有形成，整層土石流體事實上皆還在弱剪層區域中。

## 4.2 控制方程式

由表 2-7 中，土石流在長波理論下的控制方程式可以知道，土石流體從靜止到啟動前一刻的行為可由全流深控制方程式部分，以及弱剪層控制方程式部分描述，而事實上土石流體在整個運動中都還未啟動，因此全流深部分與弱剪層部分其實是相同的。如下(4-1)~(4-6)式所示

全流深方程式部分

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (4-1)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \quad (4-2)$$

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \quad (4-3)$$

弱剪層方程式部分

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (4-4)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{G}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \quad (4-5)$$

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \quad (4-6)$$

而對靜止到啟動前一刻之問題而言，由於土石流體都還未開始流動，流速在整層



土石流體中是為零的；其運動速度僅與土石流體在變形前後的位置變化量隨時間的變化有關。如下速度在 Eulerian description 展開所示

$$v_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (4-7)$$

由(4-7)式可知，速度與局部的彈性位移隨時間的變化項以及流場流速所造成的對流項有關；因此在流速等於零時，其速度將僅與局部的彈性位移隨時間的變化有關，即

$$v_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} \quad (4-8)$$

而在流速為零時，整層土石流體的應變率皆為零，因此連續方程式中各項單位體積的線性變化率皆等於零，即

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (4-9)$$

並且在流速為零的情況下，速度在彈性位移函數以實質導函數(material derivative)展開時可化簡為

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \right) + v_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \right) + v_y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (4-10)$$

則此時以(4-8)、(4-9)、(4-10)式重新整理控制方程式(4-1)~(4-6)式。

全流深方程式部分

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \quad (4-11)$$

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \quad (4-12)$$

弱剪層方程式部分

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{G}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \quad (4-13)$$



### 4.3 邊界條件與初值條件

在整理完控制方程式後，從數學上可以知道總共需要彈性位移函數  $u_x$  在  $y$  方向兩個邊界條件、在時間  $t$  上兩個初值條件；壓力與剪應力在  $y$  方向各一個邊界條件；如下表 4-1 所示

表 4-1 土石流體從靜止到啟動前一刻非穩態解的邊界與初值條件

B.C	自由表面 $y = h(x, t)$	$x$ 方向 DBC	$\tau_{yx} = 0$ 、 $\frac{\partial u_x}{\partial y} = 0$
		$y$ 方向 DBC	$p = 0$
	底床 $y = 0$	無滑移邊界條件	$u_x = 0$
I.C	$t = 0$	$u_x = 0$	$\frac{\partial u_x}{\partial t} = 0$

### 4.4 求解非穩態解

求解的過程為先求出整層土石流體的壓力分佈，之後再代回(4-12)式中求解彈性位移函數  $u_x$ 。由方程式(4-12)式可知

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \quad (4-14)$$

$$p = 0 \quad \text{at} \quad = \quad (4-15)$$

由(4-14)與(4-15)式可知  $p = \rho g(h - y)$ ，則此時與表 4-1 之邊界與初值條件重新整理(4-13)式為

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = -g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{G}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \quad (4-16)$$



$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 & \text{at } y = h \\ u_x = 0 & \text{at } y = 0 \end{cases}, \begin{cases} u_x = 0 & \text{at } t = 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} = 0 & \text{at } t = 0 \end{cases} \quad (4-17)$$

由(4-16)、(4-17)式可知，控制方程式整理為一個非齊性的線性波動方程式；則此

時令  $u_x(y,t) = A(y,t) + B(t)$  且  $\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = g \frac{\partial h}{\partial x}$  使(4-16)式整理為齊性方程式，記為

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \quad (4-18)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial y} = 0 & \text{at } y = h \\ A = -B(t) & \text{at } y = 0 \end{cases}, \begin{cases} A = -B(0) & \text{at } t = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\partial B}{\partial t}(0) & \text{at } t = 0 \end{cases} \quad (4-19)$$

其中令  $a = \sqrt{\frac{\rho}{G}}$ 。而由(4-19)式可知將方程式轉為齊性之後邊界條件則形成非齊性，

故在此再令  $A(y,t) = W(y,t) + f(t)y + g(t)$  且  $W(y,t)$  具有齊性邊界條件  $W(0,t) = 0$ 、

$W(h,t) = 0$ ，整理(4-18)式之邊界條件

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial y}(h,t) = \frac{\partial W}{\partial y}(h,t) + f(t) = 0 & \text{at } y = h \\ A(0,t) = W(0,t) + g(t) = -B(t) & \text{at } y = 0 \end{cases} \quad (4-20)$$

代入  $W(y,t)$  之齊性邊界條件可得  $f(t) = 0$ 、 $g(t) = -B(t)$ ，其中

$$\begin{cases} u_x(y,t) = A(y,t) \\ A(y,t) = W(y,t) \end{cases} \quad (4-21)$$

則此時求解  $W(y,t)$  之齊性邊界條件的波動方程式後，再以特徵函數展開的方式求解  $u_x(y,t)$

#### 4.4.1 齊性邊界條件的波動方程解

由  $W(y,t)$  的齊性邊界條件的波動方程式可知

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \quad (4-22)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = h, \quad W = 0 \quad \text{at } y = 0 \quad (4-23)$$

令  $W(y,t) = Y(y)T(t)$  代回(4-21)式



$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{Y''}{Y} = -\lambda \quad (4-24)$$

$$Y'' + \lambda Y = 0 \quad (4-25)$$

$$Y'(h) = 0 \quad \text{at } t = \quad 、 Y(0) = 0 \quad \text{at } y = 0 \quad (4-26)$$

則此時求解(4-25)式，且可知其具有  $\lambda < 0$ 、 $\lambda = 0$ 、 $\lambda > 0$  三種可能

#### 4.4.1.1 $\lambda < 0$ 時

令  $\lambda = -k^2$  且  $k \neq 0$  代回(4-25)式中

$$Y'' - k^2 Y = 0 \quad (4-27)$$

$$Y = C_1 \cosh ky + C_2 \sinh ky \quad 、 Y' = C_1 k \sinh ky + C_2 k \cosh ky \quad (4-28)$$

$$\begin{cases} Y'(h) = 0 = C_2 k \cosh kh & \text{at } t = \\ Y(0) = 0 = C_1 & \text{at } y = 0 \end{cases} \quad (4-29)$$

由於  $k$ 、 $h$  都不等於零，故  $\cosh kh \neq 0$ ，因此  $C_1 = C_2 = 0$

#### 4.4.1.2 $\lambda = 0$ 時

令  $\lambda = 0$  代回(4-25)式中

$$Y'' = 0 \quad (4-30)$$

$$Y = C_1 y + C_2 \quad 、 Y' = C_1 \quad (4-31)$$

$$\begin{cases} Y'(h) = 0 = C_1 & \text{at } t = \\ Y(0) = 0 = C_2 & \text{at } y = \end{cases} \quad (4-32)$$

因此  $C_1 = C_2 = 0$

#### 4.4.1.3 $\lambda > 0$ 時

令  $\lambda = k^2$  且  $k \neq 0$  代回(4-25)式中

$$Y'' + k^2 Y = 0 \quad (4-33)$$

$$Y = C_1 \cos ky + C_2 \sin ky \quad 、 Y' = -C_1 k \sin ky + C_2 k \cos ky \quad (4-34)$$

$$\begin{cases} Y'(h) = 0 = C_2 k \cos kh & \text{at } t = \\ Y(0) = 0 = C_1 & \text{at } y = \end{cases} \quad (4-35)$$

當  $kh = \frac{2n-1}{2} \pi$  時  $\cos kh = 0$ ，因此  $C_1 = 0$ 、 $\lambda = \left(\frac{2n-1}{2h} \pi\right)^2$ 、 $Y = C_2 \sin\left(\frac{2n-1}{2h} \pi y\right)$  且

$n = 1, 2, 3, \dots$ 。



### 4.4.2 特徵函數展開法

此時使用特徵函數展開法，令  $W(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T(t) \sin\left(\frac{2n-1}{2h} \pi y\right)$  代回(4-16)式中；

而由(4-21)式可知  $u_x(y,t) = W(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T(t) \sin\left(\frac{2n-1}{2h} \pi y\right)$  並代回(4-16)式中。但由於

特徵函數中， $h$  也為一個與時間有關之變數，因此在代回求解  $\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$  時將產生無法求解的非線性偏微分方程式，故此時以 Laplace transform 的方式重新求解(4-16)。

### 4.4.3 Laplace transform

整理表 4-1 之邊界與初值條件與(4-13)式為

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = -g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{G}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \quad (4-36)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 & at = h \\ u_x = 0 & at = y \end{cases}, \begin{cases} u_x = 0 & at \neq \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} = 0 & at \neq \end{cases} \quad (4-37)$$

以 Laplace transform(4-36)、(4-37)式

$$L \left[ \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \right] = -L \left[ g \frac{\partial h}{\partial x} \right] + L \left[ \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right] \quad (4-38)$$

$$s^2 U_x(s) - s u_x(t=0) - u_x'(t=0) = -g \frac{\partial}{\partial x} H(s) + \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 U_x(s)}{\partial y^2} \quad (4-39)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U_x(s)}{\partial y} = 0 & at = h \\ U_x(s) = 0 & at = y = 0 \end{cases}, \begin{cases} u_x = 0 & at = t = 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} = 0 & at = t = 0 \end{cases} \quad (4-40)$$

整理(4-39)式，並令  $a = \sqrt{\frac{\rho}{G}}$

$$\frac{\partial^2 U_x(s)}{\partial y^2} - a^2 s U_x(s) = -a^2 g \frac{\partial H(s)}{\partial x} \quad (4-41)$$

代入(4-40)式之邊界條件求解(4-41)式

$$U_x(s) = \frac{g}{s^2} \frac{\partial H(s)}{\partial x} [\cosh(ays) - \tanh(ahs) \sinh(ays) - 1] \quad (4-42)$$





(4-42)式事實上即為非穩態靜止到啟動前一刻的彈性位移函數在  $s$  域的函數，對其做拉式逆轉換即可得彈性位移函數在  $t$  域的函數。在此為使用該  $s$  域函數直接求解(4-11)式中的剪應力  $s$  域函數，並逆轉換該剪應力  $s$  域函數後求解啟動條件。

#### 4.4.3.1 剪應力函數

先將(4-11)式作 Laplace transform，並代入(4-40)式之邊界與初值條件

$$\rho \left[ s^2 U_x(s) + g \frac{\partial H(s)}{\partial x} \right] = \frac{\partial \tau_{yx}(s)}{\partial y} \quad (4-43)$$

將(4-42)式之  $U_x(s)$  代回(4-43)式中，並整理 Laplace transform 後的表 4-1 的剪應力邊界條件

$$\rho g \frac{\partial H(s)}{\partial x} \cosh(ays) - \tanh(ahs) \sinh(ays) = \frac{\partial \tau_{yx}(s)}{\partial y} \quad (4-44)$$

$$\tau_{yx}(s) = 0 \quad \text{at} \quad y = h \quad (4-45)$$

求解(4-44)式即可得剪應力函數在  $s$  域之解

$$\tau_{yx}(s) = \frac{\rho g}{as} \frac{\partial H(s)}{\partial x} [\sinh(ays) - \tanh(ahs) \cosh(ays)] \quad (4-46)$$

則對(4-46)式作 Inverse Laplace transform，求取運動過程中的剪應力分佈

$$\begin{aligned} L^{-1}[\tau_{yx}(s)] &= L^{-1} \left[ \frac{\rho g}{as} \frac{\partial H(s)}{\partial x} [\sinh(ays) - \tanh(ahs) \cosh(ays)] \right] \\ &= L^{-1} \left[ \frac{\rho g}{as} \frac{\partial H(s)}{\partial x} \left( \frac{e^{ays} - e^{-ays}}{2} - \frac{e^{ahs} - e^{-ahs}}{e^{ahs} + e^{-ahs}} \cdot \frac{e^{ays} + e^{-ays}}{2} \right) \right] \\ &= L^{-1} \left[ \frac{\rho g}{2a} \frac{1}{s} \cdot (e^{ays} - e^{-ays}) \frac{\partial H(s)}{\partial x} - \frac{\rho g}{2a} \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 - e^{-4ahs}} \cdot (e^{ays} + e^{-ays}) \right. \\ &\quad \left. + e^{-(4ah-ay)s} + e^{-(4ah+ay)s} - 2e^{-(2ah-ay)s} - 2e^{-(2ah+ay)s} \right) \frac{\partial H(s)}{\partial x} \Big] \\ &= \frac{\rho g}{2a} \int_0^t \left[ \frac{\partial h}{\partial x}(\tau + ay) \cdot u(\tau + ay) - \frac{\partial h}{\partial x}(\tau - ay) \cdot u(\tau - ay) - f(\tau) \right] \cdot d\tau \end{aligned} \quad (4-47)$$

其中  $u(\tau)$  為階梯函數(Unit step function)； $f(\tau)$  為(4-47)式中逆轉換所得的週期  $T = 4ah$  之週期函數，其以階梯函數與級數形式表達為

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} f(\tau + nT) \left[ u(\tau - nT) - u(\tau - (n+1)T) \right] \quad (4-48)$$



$$\begin{aligned}
f(\tau+nT) &= \frac{\partial h}{\partial x}(\tau+nT+ay) \cdot u(\tau+nT+ay) \\
&+ \frac{\partial h}{\partial x}(\tau+nT-ay) \cdot u(\tau+nT-ay) \\
&+ \frac{\partial h}{\partial x}(\tau+(n-1)T+ay) \cdot u(\tau+(n-1)T+ay) \\
&+ \frac{\partial h}{\partial x}(\tau+(n-1)T-ay) \cdot u(\tau+(n-1)T-ay) \\
&+ 2\frac{\partial h}{\partial x}\left(\tau+(n-\frac{1}{2})T+ay\right) \cdot u\left(\tau+(n-\frac{1}{2})T+ay\right) \\
&+ 2\frac{\partial h}{\partial x}\left(\tau+(n-\frac{1}{2})T-ay\right) \cdot u\left(\tau+(n-\frac{1}{2})T-ay\right)
\end{aligned} \tag{4-49}$$

將(4-48)、(4-49)式代入(4-47)式中積分，即可得剪應力函數

$$\begin{aligned}
\tau_{yx}(x, y, t) &= L^{-1}\left[\tau_{yx}(s)\right] \\
&= \frac{\rho g}{2a}\left[\frac{\partial h}{\partial x}(t+ay) - \frac{\partial h}{\partial x}(t-ay)\right] \\
&- \frac{\rho g}{2a}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\partial h}{\partial x}(t+nT+ay) \cdot u(t+nT+ay) + \frac{\partial h}{\partial x}(t+nT-ay) \cdot u(t+nT-ay)\right. \\
&+ \frac{\partial h}{\partial x}(t+(n-1)T+ay) \cdot u(t+(n-1)T+ay) + \frac{\partial h}{\partial x}(t+(n-1)T-ay) \cdot u(t+(n-1)T-ay) \\
&+ 2\frac{\partial h}{\partial x}\left(t+(n-\frac{1}{2})T+ay\right) \cdot u\left(t+(n-\frac{1}{2})T+ay\right) \\
&\left.+ 2\frac{\partial h}{\partial x}\left(t+(n-\frac{1}{2})T-ay\right) \cdot u\left(t+(n-\frac{1}{2})T-ay\right)\right] \cdot [u(t-nT) - u(t-(n+1)T)]
\end{aligned} \tag{4-50}$$

其中  $h$  代表土石流深度  $h$  在  $0 \sim t$  時刻之積分，記為  $\int_0^t h \cdot dt$ ；因此  $\frac{\partial h}{\partial x}$  事實上即為  $x$  方向的壓力梯度在  $0 \sim t$  時刻之積分。

#### 4.4.3.2 啟動條件

對一個初始靜止並且具有降伏應力的土石流體而言，其底部之剪應力一定要大於降伏應力，才能有強剪層的產生進而使整個土石流體開始流動；因此，在啟動前一刻時，底床的作用剪應力將剛好等於降伏應力，即

$$\tau_{yx} = \tau_0 \quad \text{at} \quad y=0, t=t_1 \tag{4-51}$$

其中  $t = t_1$  為啟動前一刻之時間。則將(4-51)式代入(4-50)式中，即可得到土石流體在啟動前一刻的啟動條件

$$\begin{aligned}
 \tau_0 = & -\frac{\rho g}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\partial h}{\partial x}(t_1 + nT) \cdot u(t_1 + nT) + \frac{\partial h}{\partial x}(t_1 + nT) \cdot u(t_1 + nT) \right. \\
 & + \frac{\partial h}{\partial x}(t_1 + (n-1)T) \cdot u(t_1 + (n-1)T) + \frac{\partial h}{\partial x}(t_1 + (n-1)T) \cdot u(t_1 + (n-1)T) \\
 & + 2 \frac{\partial h}{\partial x} \left( t_1 + (n - \frac{1}{2})T \right) \cdot u \left( t_1 + (n - \frac{1}{2})T \right) \\
 & \left. + 2 \frac{\partial h}{\partial x} \left( t_1 + (n - \frac{1}{2})T \right) \cdot u \left( t_1 + (n - \frac{1}{2})T \right) \right] \cdot [u(t_1 - nT) - u(t_1 - (n+1)T)]
 \end{aligned} \tag{4-52}$$

由(4-52)式可知，對於水平底床的靜止土石流體中的某個質點而言，啟動條件與本身的降伏應力以及該點的壓力梯度在  $0 \sim t$  時刻之積分有關。

## 第五章 結論與建議



### 5.1 結論

1. 在穩態均勻流的案例中，應用具有應力應變關係之彈性理論於弱剪層控制方程式內所求出的彈性位移函數  $u_x$ ，運用應力與應變之間的關係可以求出土石流在弱剪層內的剪應力分佈；而該剪應力分佈事實上也與全流深控制方程式（即未考慮弱剪層本構式）所求出之剪應力分佈相同。

2. 在穩態均勻流的案例中，所解出的彈性位移函數  $u_x = -\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \cdot y^2 + \frac{2\varepsilon_1}{\alpha} \cdot y + C_2$ ，可由穩態均勻流下之彈性位移函數的實質導函數展開，並進行常數  $C_2$  值之判斷

$$v_{xp} = \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + v_{xp} \frac{\partial u_x}{\partial x} + v_{yp} \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

由第三章的穩態均勻流條件可知  $\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$ 、 $v = 0$ ，故  $u = \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t}$ ；因此在穩

態條件  $\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0$  下可知  $\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0$ ， $u_x = C_3 t + f(y)$ ；故可看出第三章所求出的  $u_x$

中的  $C_2$  事實上即等於上式之  $C_3 t$ ，而  $-\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \cdot y^2 + \frac{2\varepsilon_1}{\alpha} \cdot y$  即等於上式之  $f(y)$ 。並

且由實質導函數  $v_{xp} = \frac{du_x}{dt}$  可知，弱剪層的速度事實上是一個與時間以及空間

都無關的常數，而該常數值可以從弱強剪層交界面速度連續的條件下得到；

即  $v_{xp} = v_{xs} \left(\frac{\delta}{D}\right)$ ，此結果與未考慮弱剪層本構關係式的賓漢流體模式(魏士超，

2012)，或者是 Julien and Lan 本構式(Di Federico, 1999)所求出的穩態均勻流解一樣。

3. 在非穩態靜止到啟動前一刻的案例中，非穩態解  $u_x(x, y, t)$ 、 $\tau_{yx}(x, y, t)$ ，是個與時間跟空間有關的函數，其可以求出在  $t \leq t_1$  內時之任何位置的彈性位移函數、剪應變函數以及剪應力函數。

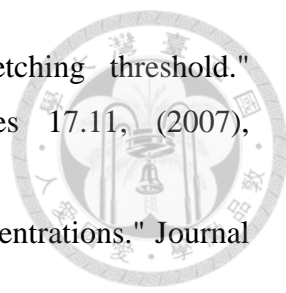
## 5.2 建議

1. 在求解第四章的靜止到啟動前一刻的分穩態線性波動方程式時，由於  $h$  是時間有關的函數，因此特徵函數法展開求解將會產生非線性的 O.D.E，故求解時最好是以 Laplace transform 的方式將方程式內所有的時間域轉換成  $s$  域後再進行求解
2. 第四章所求出的各項  $s$  域解皆可逆轉換成  $t$  域解，並且從轉換前型式可知轉換後將形成週期函數。

## 參考文獻



1. Bagnold, Ralph A. "Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear." *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. Vol. 225. No. 1160. The Royal Society, 1954.
2. Balmforth, N. J., and R. V. Craster. "A consistent thin-layer theory for Bingham plastics." *Journal of non-newtonian fluid mechanics* 84.1, (1999), vol. 84, pp. 65-81.
3. Balmforth, Neil J., and S. Mandre. "Dynamics of roll waves." *Journal of Fluid Mechanics* 514, (2004), vol. 514, pp. 1-33.
4. Coussot, Philippe. "Steady, laminar, flow of concentrated mud suspensions in open channel." *Journal of Hydraulic Research* 32.4, (1994), pp. 535-559.
5. Das, Braja, and Khaled Sobhan. *Principles of geotechnical engineering*. Cengage Learning, (2010).
6. Di Federico, Vittorio. "Free-surface flow of hyperconcentrations." *Fluid dynamics research* 24.1, (1999), pp. 23-36.
7. Dorier, Christopher, and John Tichy. "Behavior of a Bingham-like viscous fluid in lubrication flows." *Journal of non-newtonian fluid mechanics* 45.3, (1992), pp. 291-310.
8. Fusi, Lorenzo, Angiolo Farina, and Fabio Rosso. "Flow of a Bingham-like fluid in a finite channel of varying width: A two-scale approach." *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 177, (2012), pp. 76-88.
9. Fusi, Lorenzo, and Angiolo Farina. "A mathematical model for an upper convected Maxwell fluid with an elastic core: study of a limiting case." *International Journal of Engineering Science* 48.11, (2010), pp. 1263-1278.
10. Fusi, Lorenzo, and Angiolo Farina. "A mathematical model for Bingham-like fluids with visco-elastic core." *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP* 55.5, (2004), pp. 826-847.
11. Fusi, Lorenzo, and Angiolo Farina. "Pressure-driven flow of a rate-type fluid with stress threshold in an infinite channel." *International Journal of Non-Linear Mechanics* 46.8, (2011), pp. 991-1000.

- 
12. Farina, Angiolo, et al. "Modeling materials with a stretching threshold." *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 17.11, (2007), pp.1799-1847.
  13. Julien, Pierre Y., and Yongqiang Lan. "Rheology of hyperconcentrations." *Journal of Hydraulic Engineering* 117.3, (1991), pp. 346-353.
  14. López-Aguilar, J. Esteban, et al. "Numerical modelling of thixotropic and viscoelastoplastic materials in complex flows." *Rheologica Acta* 54.4,(2015), pp. 307-325.
  15. Mei, C. C., K-F. Liu, and M. Yuhi. "Mud Flow—Slow and Fast." *Geomorphological fluid mechanics*. Springer Berlin Heidelberg, (2001), pp. 548-577.
  16. Mei, Chiang C., and Masatoshi Yuhi. "Slow flow of a Bingham fluid in a shallow channel of finite width." *Journal of Fluid Mechanics* 431, (2001), pp. 135-159.
  17. Ng, Chiu-On, and Chiang C. Mei. "Roll waves on a shallow layer of mud modelled as a power-law fluid." *Journal of Fluid Mechanics* 263, (1994), pp. 151-184.
  18. Obrzud, R., and A. Truty. "The hardening soil model-a practical guidebook z soil.", (2012).
  19. Sadd, Martin H. *Elasticity: theory, applications, and numerics*. Academic Press, (2009).
  20. Wan, Zhaohin, Zhaoyin Wang, and P. Y. Julien. "Hyperconcentrated flow." , (1994).
  21. 「水土保持手冊」，台灣水土保持局及中華水土保持學會編印
  22. 詹錢登，「土石流概論」，科技，(2000)。
  23. 黃名村，「土石流災害範圍之數值模擬即利用微波偵測土石流之研究」，國立台灣大學土木工程學研究所博士論文，(2003)。
  24. 劉格非，「土石流的非線性不穩定性造成之波段流動現象」，休假研究報告，(2007)。
  25. 行政院農業委員會水土保持局，「土石流防災歷年成果專輯」，(2008)。
  26. 呂明鴻，「堰塞湖天然壩體形狀預測」，國立成功大學水利工程學研究所碩士論文，(2010)。
  27. 魏士超，「泥流經變化底床與變化河岸之不穩定性分析」，國立台灣大學土木工程學研究所碩士論文，(2012)。

28. 李光敦，「水文學」，五南圖書出版股份有限公司，(2012)。

