

國立臺灣大學工學院應用力學研究所

博士論文



Graduate Institute of Applied Mechanics

College of Engineering

National Taiwan University

Doctoral Dissertation

含多共線或平行裂縫的彈性介質受均勻平面應力波作
用之破壞力學分析

Fracture Mechanics Analysis of Elastic Media Containing
Multiple collinear or parallel Cracks under a Uniform
Plane Stress Wave

黃士銘

Shih-Ming Huang

指導教授：吳光鐘 博士

Advisor: Kuang-Chong Wu, Ph. D.

中華民國 一百零四 年 一月

January, 2015

致謝



本論文得以順利完成，首先要感謝我的指導教授吳光鐘老師。吳老師在我課程學習與博士研究期間給予我許多幫助，在吳老師的指導下，讓我領略進階力學的奧妙與解析的手段。在遇到艱澀的研究難題時，吳老師總以大師級的手法提出解決方向，並悉心培養我獨立思考與研究的能力，除研究外，吳老師在我人生遇到困境時，提供我的幫助與體諒，在畢業前的此時，對於過往滿懷感謝。

承蒙馬劍清教授、陳東陽教授、趙振綱教授、郭茂坤教授、張正憲教授與陳世豪教授給予的寶貴意見，使得本論文更加的完備。特別要感謝張正憲教授對我的關心、教誨與論文呈現的寶貴意見，郭茂坤教授對於我的提問給予莫大的幫助，馬劍清教授與陳東陽教授對於我的研究肯定給予我相當的信心，趙振綱教授與陳世豪教授在論文初稿上逐字逐頁的校正，讓我深刻感受到研究前輩的研究精神，在此獻上最深的感謝。

漫長的應用力學研究所博士修業過程，要感謝許多的老師、所上職員、學長、學弟與學妹，感謝陳國慶教授與翁宗賢教授等課程指導老師的細心指導，讓我在各領域的學識得到成長，感謝世豪、玉清、宗堯、杰穎、冠榮與皇德學長給予的鼓勵與幫助，讓我得以順利解決課業與研究的挑戰，感謝民瑜、裕昇、渝婷與宜璇等同期修課的同學，讓我知道如何砥礪自己並激發潛能，最後感謝許多研究室同仁。

最後我要感謝我的父親，父親給予我人生的支持與鼓勵，讓我得以順利完成學業，感謝我的母親，母親給予我最偉大的愛，讓我領略人生意義，感謝秀珊對我的包容與體諒，讓我知道如何待人，感謝大阿姨、小舅與小阿姨的幫助，讓我減少後顧之憂，感謝我的摯友鈺容讓我成長並在我遇到困難給予鼓勵，僅以此文獻給我的父母親，希望父親能健康長在，希望母親能安心。

摘要



本文分析含共線或平行多裂縫之彈性體，受到平面應力波作用下，各個裂縫尖端之應力強度因子的時間變化。分析方法係將裂縫視為連續分佈的差排 (continuous distribution of dislocations)，利用單一差排的動態基本解，建立連結差排密度及動態載重的積分方程式。求解時先將該積分方程式對時間作 Laplace 轉換，以 Gauss-Chebyshev 積分法則求解轉換域之應力強度因子，再利用數值方法將之逆轉回時間域。

本文的算例包含：單、雙與三裂縫於不同排列的應力強度因子，其中，單裂縫於等向性材料受縱波作用的應力強度因子、共線雙裂縫於等向性材料受縱波作用的應力強度因子、單裂縫於正交性材料受平面波作用的應力強度因子、平行裂縫於等向性材料受縱波作用的應力強度因子與現有的文獻比對一致，並得知對於分析裂縫問題本法擁有高精準度與便利性。

有關等向性介質，由算例結果可得以下結論：(1)單裂縫的第一型應力強度因子的峰值是發生於另一尖端的繞射表面波抵達該尖端之瞬時，但波松比(Poisson's ratio)大於 0.48 時則不然；(2)對於共線等長雙裂縫，其內裂縫尖端的應力強度因子峰值會隨內尖端距離減小而增大，(3)平行等長雙裂縫的第一型應力強度因子峰值隨兩裂縫的垂直距離變小而降低。對於正交性介質之結論如下：(1)平行裂縫的 E_1 值越大，應力強度因子越早發生，(2)對於平行不等長雙裂縫，受到入射波作用的裂縫越長，未受入射波作用的裂縫尖端第一型應力強度因子會越小。

關鍵字：共線裂縫、平行裂縫、動態應力強度因子、暫態彈性動力學、第一型裂縫、第二型裂縫、差排法

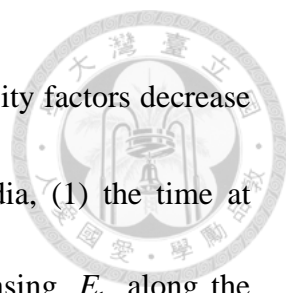
Abstract



An analysis is presented for an array of collinear or non-collinear multiple cracks subject to a uniform plane stress wave in an isotropic or an orthotropic material. An integral equation for the problem is established by modeling the cracks as distributions of dislocations and using a dynamic fundamental solution of a discrete dislocation. The integral equation is solved by Gaussian-Chebyshev integration quadrature in the Laplace transform domain first and the solution is then inverted to obtain the dynamic stress intensity factors in the time domain.

Numerical examples include: one, two or three collinear or non-collinear cracks for several configurations. Comparisons of the present results with the existing results, in cases when they are available, show the present method is highly accurate and useful for assessing structural integrity of elastic media under dynamic loading in the presence of cracks.

Several conclusions can be drawn from the numerical results. For isotropic media, (1) for a single crack, the peak mode I stress intensity at either tip occurs at the arrival time of the Rayleigh surface emitted from the other tip unless Poisson's ratio is greater than 0.48; (2) for two collinear cracks of equal length, the peak stress intensity factors at the inner tips increase with decreasing distance between the inner tips of the cracks.; (3)



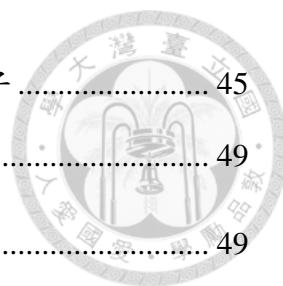
for two parallel cracks of equal length, the peak mode I stress intensity factors decrease with decreasing distance between the cracks. For orthotropic media, (1) the time at which the peak stress intensity factor occurs decreases with increasing E_1 along the crack line; (2) for two parallel cracks of unequal lengths, the peak mode I stress intensity factors decrease with increasing length of crack that is first struck by the stress wave.

Keywords: collinear cracks, non-collinear cracks, dynamic stress intensity factor, transient elastodynamic, mode I crack, mode II crack, dislocation method

目錄



致謝	I
摘要	II
Abstract.....	III
目錄	V
圖表目錄.....	VIII
第一章 緒論	1
1.1 研究動機與文獻回顧	1
1.2 研究內容	3
第二章 應力強度因子於共線裂縫的數學模型	6
2.1 二維彈性動力學的 Stroh 公式	6
2.2 以差排基本解推導裂縫面上的積分方程式	10
2.3 共線裂縫積分方程式之數值解法	16
2.4 動態應力強度因子	19
第三章 共線裂縫於等向性介質的應力強度因子	22
3.1 等向性介質 \mathbf{U} 的推導	22
3.2 待定函數的矩陣方程式與 $\tilde{\mathbf{K}}$ 的求解	25
3.3 數值結果	28
3.3.1 收斂性測試	28
3.3.2 斜入射縱波作用於單裂縫的應力強度因子	32
3.3.3 單裂縫於不同波松比的應力強度因子	37
3.3.4 等長共線雙裂縫於不同裂縫間距的應力強度因子	38
3.3.5 不等長共線雙裂縫於同裂縫間距的應力強度因子	42



3.3.6	等長共線三裂縫於不同裂縫間距的應力強度因子	45
第四章	共線裂縫於正交性介質的應力強度因子	49
4.1	正交性介質 $\tilde{\mathbf{L}}$ 之推導與分析	49
4.2	待定函數的矩陣方程式與 $\tilde{\mathbf{K}}$ 的求解	56
4.3	數值結果	58
4.3.1	收斂性測試	59
4.3.2	不同 Laplace 轉換法求單裂縫於等向性介質的應力強度因子	61
4.3.3	單裂縫於正交性材料與立方材料的應力強度因子	63
4.3.4	斜入射平面波作用於單裂縫的應力強度因子	67
4.3.5	等長共線三裂縫於不同 E_1 的應力強度因子	69
第五章	平行裂縫於等向性介質的應力強度因子	71
5.1	平行裂縫的線性代數方程式	71
5.2	待定函數的矩陣方程式	73
5.3	數值結果	83
5.3.1	數值參數測試	83
5.3.2	裂縫中心重疊、平行、等長雙裂縫	87
5.3.3	裂縫中心不重疊、平行且等長的雙裂縫	92
5.3.4	裂縫中心重疊、平行且等長的三裂縫	95
第六章	平行裂縫於正交性介質的應力強度因子	98
6.1	波前曲面圖	98
6.2	$\tilde{\mathbf{V}}$ 與 Laplace 轉換域應力強度因子 $\tilde{\mathbf{K}}$ 的求解	100
6.3	數值結果	103
6.3.1	方法驗證	104
6.3.2	平行、不等長雙裂縫	106

6.3.3 不對稱、平行三裂縫	111
第七章 結論與建議	114
7.1 結論	114
7.2 建議	117
參考文獻	118



圖表目錄



圖 1.1	差排法示意圖	5
圖 1.2	共線裂縫與平行裂縫示意圖	5
圖 1.3	裂縫破壞型式	5
圖 2.1	(2.37)位移 \mathbf{u} 在 (y_1, y_2) 平面的積分路徑	12
圖 2.2	(2.37)位移 \mathbf{u} 在 w 複數平面的積分路徑	12
圖 2.3	由 Burgers 向量 β 差排引起之波面所造成的位移	14
圖 3.1	單裂縫示意圖	28
圖 3.2	單裂縫受垂直入射縱波之應力強度因子 ($N_s = 90$ 與 $N = 120$)	29
圖 3.3	單裂縫受垂直入射縱波之應力強度因子 ($N_s = 90$ 與 $N = 180$)	29
圖 3.4	單裂縫受垂直入射縱波之應力強度因子 ($N_s = 90$ 與 $N = 230$)	30
圖 3.5	單裂縫受垂直入射縱波之應力強度因子 ($N = 230$ 與 $N_s = 50$)	30
圖 3.6	單裂縫受垂直入射縱波之應力強度因子 ($N = 180$ 與 $N_s = 150$)	31
圖 3.7	單裂縫受垂直入射縱波之應力強度因子 ($N = 350$ 與 $N_s = 150$)	31
圖 3.8	斜入射縱波作用於單裂縫，裂縫尖端 $x_1 = -a$ 的應力強度因子 K'_I	32
圖 3.9	斜入射縱波作用於單裂縫，裂縫尖端 $x_1 = a$ 的應力強度因子 K'_I	33
圖 3.10	斜入射縱波作用於單裂縫，裂縫尖端 $x_1 = -a$ 的應力強度因子 K'_{II}	33
圖 3.11	斜入射縱波作用於單裂縫，裂縫尖端 $x_1 = a$ 的應力強度因子 K'_{II}	34
圖 3.12	垂直入射縱波作用於單裂縫或半無限長裂縫，裂縫尖端的應力強度因子 K'_I	36
圖 3.13	垂直入射橫波作用於單裂縫或半無限長裂縫，裂縫尖端的應力強度因子 K'_{II}	36
圖 3.14	單裂縫於波松比 $\nu = 0$ 與 0.35 之應力強度因子 K'_I	37

圖 3.15	單裂縫於波松比 $\nu = 0.48$ 與 0.49 之應力強度因子 K'_I	38
圖 3.16	共線雙裂縫示意圖	39
圖 3.17	等長雙共線與間距 $\delta_D/2a = 0.5$ 之應力強度因子 K'_I	40
圖 3.18	等長雙共線與不同間距 δ_D ，裂縫尖端 A 應力強度因子 K'_I	40
圖 3.19	等長雙共線與不同間距 δ_D ，裂縫尖端 B 應力強度因子 K'_I	41
圖 3.20	等長雙共線與不同間距 δ_D ，裂縫尖端 A 應力強度因子 K'_{II}	41
圖 3.21	等長雙共線與不同間距 δ_D ，裂縫尖端 B 應力強度因子 K'_{II}	42
圖 3.22	不等長雙共線裂縫與等裂縫中心間距，裂縫尖端 B 的應力強度因子 K'_I	42
圖 3.23	不等長雙共線裂縫與等裂縫中心間距，裂縫尖端 C 的應力強度因子 K'_I	43
圖 3.24	不等長雙共線裂縫與等裂縫中心間距，裂縫尖端 B 的應力強度因子 K'_{II}	43
圖 3.25	不等長雙共線裂縫與等裂縫中心間距，裂縫尖端 C 應力的強度因子 K'_{II}	44
圖 3.26	共線三裂縫示意圖	46
圖 3.27	等長三共線裂縫與裂縫間距 $\delta_D/2a = 0.5$ 的應力強度因子 K'_I	47
圖 3.28	等長三共線裂縫與裂縫間距 $\delta_D/2a = 1.5$ 的應力強度因子 K'_I	47
圖 3.29	等長三共線裂縫與裂縫間距 $\delta_D/2a = 0.5$ 的應力強度因子 K'_{II}	48
圖 3.30	等長三共線裂縫與裂縫間距 $\delta_D/2a = 1.5$ 的應力強度因子 K'_{II}	48
表 4.1	正交性材料的工程彈性常數	58
圖 4.1	等長共線裂縫示意圖	59
圖 4.2	等長共線雙裂縫於環氧硼 I 的應力強度因子 $K'_I (N_G = 100)$	59
圖 4.3	等長共線雙裂縫於環氧硼 I 的應力強度因子 $K'_I (N_G = 300)$	60
圖 4.4	等長共線雙裂縫於環氧硼 I 的應力強度因子 $K'_I (N_G = 500)$	60

圖 4.5	單裂縫示意圖	61
圖 4.6	以數值與解析 Laplace 轉換法求得的等向性材料應力強度因子 K'_I	62
圖 4.7	以數值與解析 Laplace 轉換法求得的等向性材料應力強度因子 K''_II	62
圖 4.8	單裂縫於環氧硼 I 的應力強度因子 K'_I 與 K''_II	63
圖 4.9	單裂縫於環氧硼 II 的應力強度因子 K'_I 與 K''_II	63
圖 4.10	單裂縫於玻璃纖維的應力強度因子 K'_I 與 K''_II	64
圖 4.11	單裂縫於石墨纖維的應力強度因子 K'_I 與 K''_II	64
圖 4.12	單裂縫於銅聚酯薄膜的應力強度因子 K'_I 與 K''_II	64
圖 4.13	單裂縫於鈹的應力強度因子 K'_I 與 K''_II	65
圖 4.14	單裂縫於砷化鎵的應力強度因子 K'_I 與 K''_II	65
圖 4.15	單裂縫於不同 E_1 的應力強度因子 K'_I	66
圖 4.16	單裂縫於不同 E_1 的應力強度因子 K''_II	67
圖 4.17	斜入射縱波作用於單裂縫，裂縫尖端 $x_1 = -a$ 的應力強度因子 K'_I	68
圖 4.18	斜入射縱波作用於單裂縫，裂縫尖端 $x_1 = a$ 的應力強度因子 K'_I	68
圖 4.19	等長共線三裂縫示意圖	69
圖 4.20	等長三共線裂縫於工程彈性常數比 $E_1/E_2 = 0.1$ 的應力強度因子 K'_I 與 K''_II	70
圖 4.21	等長三共線裂縫於工程彈性常數比 $E_1/E_2 = 1.0$ 的應力強度因子 K'_I 與 K''_II	70
圖 4.22	等長三共線裂縫於工程彈性常數比 $E_1/E_2 = 10$ 的應力強度因子 K'_I 與 K''_II	70
圖 5.1	裂縫中心重疊、平行、等長雙裂縫示意圖	84
圖 5.2	裂縫中心重疊、平行且等長的雙裂縫，裂縫尖端 A 的應力強度因子 K'_I (不 同 N_M)	84
圖 5.3	裂縫中心重疊、平行且等長的雙裂縫，裂縫尖端 A 的應力強度因子 K'_I (不	

同 N)	85
圖 5.4 裂縫中心重疊、平行且等長的雙裂縫，裂縫尖端 A 的應力強度因子 K'_I (不同 M_β)	85
圖 5.5 裂縫中心重疊、平行且等長的雙裂縫，裂縫尖端 A 的應力強度因子 K'_I (不同 M_β)	86
圖 5.6 垂直入射橫波作用於單裂縫，裂縫尖端的應力強度因子 K'_{II} (不同 N_M) ..	87
圖 5.7 裂縫中心重疊、平行且等長的雙裂縫，裂縫尖端 A 的應力強度因子 K'_I (不同 δ_h)	88
圖 5.8 裂縫中心重疊、平行且等長的雙裂縫，裂縫尖端 B 的應力強度因子 K'_I (不同 δ_h)	88
圖 5.9 裂縫中心重疊、平行且等長的雙裂縫，裂縫尖端 A、B 與靜態的應力強度因子 K'_I ($\delta_h/a = 2.0$)	89
圖 5.10 裂縫中心重疊、平行且等長的雙裂縫，裂縫尖端 A、B 與靜態的應力強度因子 K'_I ($\delta_h/a = 1.0$)	89
圖 5.11 裂縫中心重疊、平行且等長的雙裂縫，裂縫尖端 A、B 與靜態的應力強度因子 K'_I ($\delta_h/a = 0.2$)	90
圖 5.12 裂縫中心重疊、平行、等長雙裂縫，裂縫尖端 A、B 與靜態的應力強度因子 K'_{II} ($\delta_h/a = 2.0$)	90
圖 5.13 裂縫中心重疊、平行、等長雙裂縫，裂縫尖端 A、B 與靜態的應力強度因子 K'_{II} ($\delta_h/a = 1.0$)	91
圖 5.14 裂縫中心不重疊、平行且等長的雙裂縫示意圖	92
圖 5.15 裂縫中心不重疊、平行且等長的雙裂縫，上裂縫的應力強度因子 K'_I (不同 δ_b/a)	93



圖 5.16 裂縫中心不重疊、平行且等長的雙裂縫，下裂縫的應力強度因子 K'_I (不同 δ_b/a)	93
圖 5.17 裂縫中心不重疊、平行且等長的雙裂縫，上裂縫的應力強度因子 K'_{II} (不同 δ_b/a)	93
圖 5.18 裂縫中心不重疊、平行且等長的雙裂縫，下裂縫的應力強度因子 K'_{II} (不同 δ_b/a)	94
圖 5.19 裂縫中心重疊、平行且等長的三裂縫示意圖	96
圖 5.20 裂縫中心重疊、平行且等長的三裂縫，裂縫尖端 A、B 與 C 的應力強度因子 K'_I	96
圖 5.21 裂縫中心重疊、平行且等長的三裂縫，裂縫尖端 A、B 與 C 的應力強度因子 K'_{II}	97
圖 6.1 以數值與解析 V 求平行且等長的雙裂縫，裂縫尖端 A 的應力強度因子 K'_I (不同 δ_h)	104
圖 6.2 以數值與解析 V 求平行且等長的雙裂縫，裂縫尖端 B 的應力強度因子 K'_I (不同 δ_h)	105
圖 6.3 以數值與解析 L 求等長共線雙裂縫、鉸，裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 K'_I	105
圖 6.4 以數值與解析 L 求等長共線雙裂縫、鉸，裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 K'_{II}	106
圖 6.5 鉸的波前曲面圖	107
圖 6.6 裂縫中心重疊、平行、不等長雙裂縫示意圖	108
圖 6.7 裂縫中心重疊、平行、不等長雙裂縫，裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 K'_I	108
圖 6.8 裂縫中心重疊、平行且不等長雙裂縫，裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 K'_{II}	109

圖 6.9	裂縫中心不重疊、平行、不等長雙裂縫示意圖	109
圖 6.10	裂縫中心不重疊、平行且不等長雙裂縫，裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 K'_I	110
圖 6.11	裂縫中心不重疊、平行且不等長雙裂縫，裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 K'_{II}	110
圖 6.12	不對稱、平行三裂縫示意圖	112
圖 6.13	不對稱、平行三裂縫，裂縫尖端 C、F、B 與 E 的應力強度因子 K'_I	112
圖 6.14	不對稱、平行三裂縫，裂縫尖端 A、D、B 與 E 的應力強度因子 K'_{II} ..	113
圖 6.15	不對稱、平行雙與三裂縫，裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 K'_{II}	113

第一章 緒論




1.1 研究動機與文獻回顧

當彈性體受到載重時，裂縫尖端會產生奇異應力場，破壞力學中以應力強度因子(stress intensity factor)來描述此應力場。而此應力場之強度取決於應力強度因子(stress intensity factor)的大小，故應力強度因子是評估結構安全性的重要參數。應力強度因子的值會隨材料性質、幾何形狀及載重形式而改變。靜態載重相關研究成果頗豐且已彙集成冊，但動態載重方面，因所牽涉之數學極為繁雜，成果相對稀少。

對於均質(homogenous)、等向性(isotropic)的二維無限彈性體，其內裂縫在平面彈性波(plane elastic wave)作用的動態應力強度因子，Freund [1]以 Wiener-Hopf 技術解得半無限長裂縫的動態應力強度因子。Thau 與 Lu [2]進一步討論有限長裂縫問題，以 Wiener-Hopf 技術求得裂縫尖端第三次繞射前之精準應力強度因子，該解顯示受壓力波(pressure wave)的動態應力強度因子峰值較靜態值多 30%，受剪力波(shear wave)作用時則多 20%。為求多次繞射波之應力強度因子，Sih、Embley 與 Ravera [3]以積分轉換法(integral transform method)，計算正向與剪曳引(traction)力作用下的有限長單裂縫問題。Itou [4]利用[3]之積分轉換法，計算雙共線裂縫之應力強度因子。類似的雙共線裂縫問題，Zhang 與 Achenbach [5]，Wen、Aliabadi 與 Rooke [6]則利用邊界積分方程式(boundary integral equation)法，計算動態應力強度因子。

對於正交性(orthotropic)材料的暫態裂縫問題，Wu [7]利用 Stroh-like 形式推導無邊界、正交性材料、斜入射平面波作用於半無限長裂縫的動態應力強度因子，結果顯示解的形式與 Wiener-Hopf 分解有關。Zhang [8]以邊界積分方程式法，探討正交性材料在暫態情況下的單裂縫問題，並計算第一型與第二型硼-環氧樹脂



(Boron-epoxy)、玻璃纖維(glass fiber)、石墨纖維(graphite fiber)、鋼聚酯薄膜(steel-mylar)與鈹(beryllium)的動態應力強度因子。Das [9]利用 Laplace 與 Fourier 積分轉換法，將裂縫的積分方程式降階為積分-微分方程式(integro-differential equation)，於頻率域求解方程式，時域的玻璃纖維則以數值反 Laplace 轉換求得。Shindo、Narita 與 Ozawa [10]利用 Laplace 轉換，將暫態問題降階為 Laplace 轉換域的第二型 Fredholm 積分方程式，並計算正交性壓電陶瓷材料的第一型應力強度因子。Rubio-Gonzalez [11]以 Laplace 和 Fourier 轉換與 Wiener-Hopf 技術求解運動方程式的位移解，並計算正交性材料與單裂縫的第一型的動態應力強度因子。

前面提及的暫態問題僅針對共線裂縫，對於平行裂縫的暫態問題則很少被研究與討論，Takakuda、Takizawa、Koizumi 與 Shibuya [12]推導裂縫群的暫態邊界值問題(transient dynamic boundary value problem)，並計算平行雙裂縫的第三型動態應力強度因子。對於平行雙裂縫於無限彈性板的問題，Itou [13]以 Fourier-Laplace 轉換推導裂縫的方程式，利用函數級數將平行裂縫面上的位移展開，以 Schmidt 法求函數級數的未知係數，並計算垂直入射壓力波作用於等長平行雙裂縫的動態應力強度因子。Itou [14]以 Itou [13]的方法，求非均質黏結層與兩個不同彈性半平面的第一與第二型動態應力強度因子。Zhou、Guo 與 Wu [15]計算非對稱與平行裂縫於壓電材料的第三型應力強度因子。平行裂縫於時間-諧和(time-harmonic)應力波作用的應力強度因子，於 Itou 與 Haliding [16]、Ma、Wu 與 Zhou [17]、Itou [18]等研究中計算並討論。

對於靜態的裂縫問題，差排(dislocation)法(圖 1.1)是相當好用的分析方式，此法以疊加原理，將曳引力 t 作用於含裂縫的彈性體分成兩部分，第一部分：曳引力 t 作用且無裂縫彈性體，將假想曳引力 t_c 分布於原裂縫面上，並由此部分求得假想曳引力 t_c 。第二部分：為滿足裂縫面上無曳引力狀態，將第一部分求得的假想曳引力 t_c 插入含裂縫的彈性體並將裂縫視為連續分布的差排。兩部分疊加即為原始問題，由於第一部分問題無裂縫，因此，原問題的應力強度因子可由第二部分的



應力強度因子求得，依此建立差排與裂縫面上曳引力的關係式，此關係式為積分方程式，且可由 Gauss-Chebyshev 積分將其離散化為線性代數方程組再進行求解 (Erdogan、Gupta 與 Cook [19])。

Cochard 與 Madariaga [20] 考慮反平面(anti-plane)動態問題，以積分轉換方法導得動態分布差排共線位置之曳引力的積分表示式。該積分表示式包含一空間-時間之摺合(convolution)積分項及另一與波傳導之阻尼(damping)相關之項，且積分項具有與靜態差排相同之 Cauchy 奇異性。近期，Wu 與 Chen [21] 利用 Cochard 與 Madariaga [20] 推導的積分方程式，探討共線裂縫於水平剪力波作用下的動態應力強度因子。Ayatollahi 與 Monfared [22] 亦利用差排法討論任意裂縫，但其所得之積分方程式未將阻尼項正確的納入。Wu、Huang 與 Chen [23] 以 Wu 與 Chen [21] 為基礎，建立平面問題之差排密度與曳引力的積分方程式，並計算三共線裂縫的第一型動態應力強度因子。Wu、Hou 與 Huang [24] 將 Wu 與 Chen [21] 的積分方程式擴展至平行裂縫問題，並計算平行裂縫的第三型裂縫動態應力強度因子。

上述的研究成果皆未針對正交性材料於共線或平行裂縫的暫態問題進行討論與研究，本文以 Wu [7]、Wu [25] 與 Ting [26] 提及的 Stroh 形式建立裂縫的積分方程式，利用 Wu 與 Chen [21]、Wu、Hou 與 Huang [24] 提及的差排法，計算共線或平行裂縫於等向性或正交性材料的暫態應力強度因子，上述之共線裂縫與平行裂縫如圖 1.2 所示。

1.2 研究內容

本文首先推導動態差排的基本解，再利用所得的基本解構建裂縫問題的空間-時間積分方程式，式中包含與繞射相關項 L (對於共線裂縫) 與 V (對於平行裂縫)，而其轉換域的形式 U (對於共線裂縫) 與 \tilde{V} (對於平行裂縫) 為本文重點解析之矩陣。求解時先將該積分方程式對時間作 Laplace 轉換，以 Gauss-Chebyshev 積分法則求

解轉換域之應力強度因子，再利用數值方法將之逆轉回時間域。研究成果之計算與討論包含等向性材料與正交性材料於共線裂縫與平行裂縫的第一型與第二型動態應力強度因子， K_I 與 K_{II} ，如圖 1.3。



本文各章內容簡述如下：

第一章：裂縫動態問題的研究動機與文獻簡介。

第二章：以六維特徵值問題推導 L ，建立共線裂縫的積分方程式，以差排密度(由待定函數與平方根奇異性表示)與 Gauss-Chebyshev 積分法則推導 Laplace 轉換域的應力強度因子，引入數值反 Laplace 轉換法推導時域應力強度因子。

第三章：利用 Bessel 函數推導等向性材料、共線裂縫 L 的 Laplace 轉換型式 U ，建立求解待定函數的矩陣方程式，計算共線裂縫於等向性介質的應力強度因子。

第四章：以 Gauss 積分推導正交性材料、共線裂縫 L 的 Laplace 轉換型式 U ，分析、討論 U 於慢剪力波存在時，其形式的改變與特性，計算共線裂縫於正交性介質的應力強度因子。

第五章：建立等向性材料、平行裂縫的積分方程式，以四維特徵值問題推導等向性材料、平行裂縫 V 的解析形式，利用 Gauss 積分推導 V 的 Laplace 轉換型式 \tilde{V} ，計算平行裂縫於等向性介質的應力強度因子。

第六章：介紹波前曲面圖，以四維特徵值問題求正交性材料、平行裂縫 V 的數值解，利用 Gauss 積分推導 V 的 Laplace 轉換型式 \tilde{V} ，計算平行裂縫於正交性介質的應力強度因子。

第七章：結論與建議。

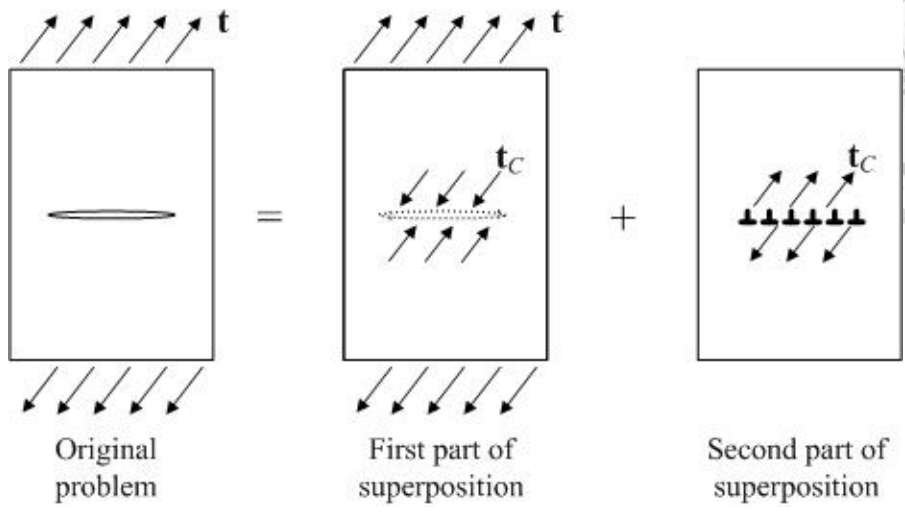


圖 1.1 差排法示意圖

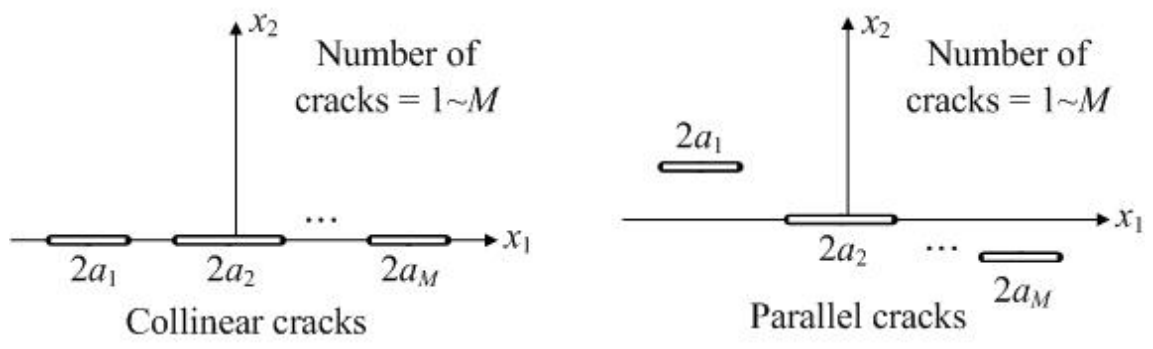


圖 1.2 共線裂縫與平行裂縫示意圖

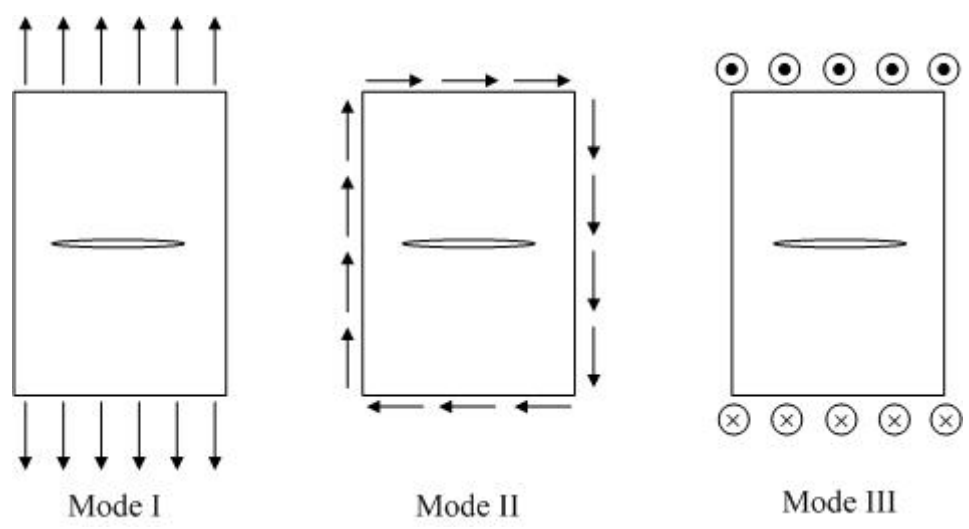


圖 1.3 裂縫破壞型式



第二章 應力強度因子於共線裂縫的數學模型

一般求解彈性動力學問題常用積分轉換法，但其過程繁複。對於自相似 (self-similar) 動態問題，Wu [25] 提出以六維特徵值問題的特徵值與特徵向量來表示的通解形式。因無須使用積分轉換，故求解過程相對簡便。本章第 1 節簡介二維彈性動力學對應之特徵值問題，第 2 節利用 Wu [25] 提出的位移場建立差排解之共線裂縫積分方程式，第 3 節以 Laplace 轉換與 Erdogan、Gupta 與 Cook [19] 提出的數值方法求解裂縫於 Laplace 轉換域的差排分佈，第 4 節以差排與動態應力強度因子的關係式推導 Laplace 轉換域動態應力強度因子，再以數值方法推導時域動態應力強度因子。

2.1 二維彈性動力學的 Stroh 公式

在二維平面變形 (two-dimensional plane deformations) 的狀態下，相對於卡氏座標系 (x_1, x_2, x_3) ，應力 σ_{ij} 與位移 u_j 均與 x_3 無關， $(i, j = 1, 2, 3)$ 。根據彈性動力學，運動方程式 (equation of motion) 可表示為：

$$\mathbf{t}_{1,1} + \mathbf{t}_{2,2} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

(2.1) 中， $\mathbf{t}_1 = (\sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{31})^T$ 、 $\mathbf{t}_2 = (\sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{32})^T$ 、 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ 、 t 為時間、 ρ 為質量密度 (mass density)，下標逗號定義為對其座標偏微分。材料組成律 (constitutive law)，即應力與應變之關係式為：

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l} \quad (2.2)$$

(2.2) 式 C_{ijkl} 為材料的彈性常數 (elastic constants)，由 (2.2) 可得：

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= \mathbf{Q}\mathbf{u}_{,1} + \mathbf{R}\mathbf{u}_{,2} \\ \mathbf{t}_2 &= \mathbf{R}^T \mathbf{u}_{,1} + \mathbf{T}\mathbf{u}_{,2} \end{aligned} \quad (2.3)$$



(2.3)式之 \mathbf{Q} 、 \mathbf{R} 、 \mathbf{T} 與彈性常數 C_{ijkl} 有關，其關係式為：

$$Q_{ij} = C_{i1j1}, R_{ik} = C_{i1j2}, T_{ik} = C_{i2j2} \quad (2.4)$$

利用 Ting [26]提出之規則，將(2.4)以矩陣表示為：

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{16} & C_{15} \\ C_{16} & C_{66} & C_{56} \\ C_{15} & C_{56} & C_{55} \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} C_{16} & C_{12} & C_{14} \\ C_{66} & C_{26} & C_{46} \\ C_{56} & C_{25} & C_{45} \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} C_{66} & C_{26} & C_{46} \\ C_{26} & C_{22} & C_{24} \\ C_{46} & C_{24} & C_{44} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Wu [25]提及，自相似問題系指該問題的位移為時間 t 與空間 \mathbf{x} 的齊次函數 (homogenous function)，一函數 $f(x_1, x_2, t)$ 如可表為 $t^n f(x_1/t, x_2/t)$ 則稱之 n 階齊次函數。物理系統如不包含特徵長度與特徵時間則可以自相似問題討論之，如無窮域介質 (unbounded media) 或半無窮平面 (Lamb's problem) 受一脈衝線 (impulsive line) 力作用等問題，此類系統不具描述特徵長度或特徵時間的自變數。對於自相似問題，位移 $\mathbf{u}(x_1, x_2, t)$ 如只與 $y_i = x_i/t$ ($i=1,2$) 有關，則位移可假設為 $\mathbf{u}(x_1, x_2, t) = \mathbf{u}(y_1, y_2)$ ，Wu [25]提出運動方程式(2.1)之位移解可表為：

$$\mathbf{u}(y_1, y_2) = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^3 \int_{\infty}^{w_k} f_k(w) \mathbf{a}_k(w) dw \right] \quad (2.6)$$

(2.6)中， $w_k = y_1 + p_k(w_k) y_2$ ($k=1,2,3$ ， $\operatorname{Im}[p_k(w_k)] \geq 0$ ， $\operatorname{Im}[\cdot]$ 為複數函數的虛部)、 $\operatorname{Re}[\cdot]$ 為複數函數的實部、 $f_k(w)$ 為任意函數 (arbitrary function)。將(2.6)代入(2.3)可得如下之對應應力場表示式：

$$\mathbf{t}_1(x_1, x_2, t) = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^3 f_k(w_k) \left(\rho w_k^2 \frac{\partial w_k}{\partial x_1} \mathbf{a}_k(w_k) - p_k(w_k) \frac{\partial w_k}{\partial x_1} \mathbf{b}_k(w_k) \right) \right] \quad (2.7)$$

$$\mathbf{t}_2(x_1, x_2, t) = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^3 f_k(w_k) \frac{\partial w_k}{\partial x_1} \mathbf{b}_k(w_k) \right] \quad (2.8)$$

其中：



$$\mathbf{b}_k(w) = (\mathbf{R}^T + p_k(w)\mathbf{T})\mathbf{a}_k(w) \quad (2.9)$$

(2.6)中之 p_k 及 \mathbf{a}_k 滿足下列方程式：

$$\left[\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p^2\mathbf{T} - \rho w^2\mathbf{I} \right] \mathbf{a}(w) = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

其中 \mathbf{I} 為單位矩陣(identity matrix)。為得非零解(nontrivial solution)，(2.10)須滿足：

$$\det \left[\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p^2\mathbf{T} - \rho w^2\mathbf{I} \right] = 0 \quad (2.11)$$

(2.11)式 $\det[\cdot]$ 為行列式(determinant)，(2.11)為 p 的六次方程式，且 p 的解可能為實數或共軛複數(complex conjugate)。 p_k 、 \mathbf{a}_k 及 \mathbf{b}_k 亦可由下列之六維特徵值問題求得

$$\hat{\mathbf{N}}\hat{\xi} = p\hat{\xi} \quad (2.12)$$

(2.12)中：

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{N}} &= \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{N}}_1 & \hat{\mathbf{N}}_2 \\ \hat{\mathbf{N}}_3 & \hat{\mathbf{N}}_1^T \end{pmatrix}, \hat{\xi} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \\ \hat{\mathbf{N}}_1 &= -\hat{\mathbf{T}}^{-1}\hat{\mathbf{R}}^T, \hat{\mathbf{N}}_2 = -\hat{\mathbf{T}}^{-1}, \hat{\mathbf{N}}_3 = \hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{T}}^{-1}\hat{\mathbf{R}}^T - \hat{\mathbf{Q}} \\ \hat{\mathbf{Q}} &= \mathbf{Q} - \rho y_1^2\mathbf{I}, \hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} - \rho y_1 y_2\mathbf{I}, \hat{\mathbf{T}} = \mathbf{T} - \rho y_2^2\mathbf{I} \end{aligned}$$

其中向量 $\hat{\mathbf{b}}_k(y_1, y_2)$ 與 $\mathbf{b}_k(w_k)$ 之關係式為：

$$\hat{\mathbf{b}}_k(y_1, y_2) = (\hat{\mathbf{R}} + p_k\hat{\mathbf{T}})\mathbf{a}_k(w_k) = \mathbf{b}_k(w_k) - \rho w_k y_2 \mathbf{a}_k(w_k) \quad (2.13)$$

方程式(2.12)形式與 Stroh 公式於穩態運動(steady-state motion)下的形式相同。(2.12)

之 p 與 $\hat{\xi}$ 代表 $\hat{\mathbf{N}}$ 的特徵值與右特徵向量(right eigenvector)，由於 $\hat{\mathbf{N}}_2$ 與 $\hat{\mathbf{N}}_3$ 為對稱矩陣(symmetric matrix)，因此 $\hat{\mathbf{N}}$ 的左特徵向量(left eigenvector)可定義為：

$$\hat{\mathbf{N}}^T \hat{\eta} = p\hat{\eta} \quad (2.14)$$

(2.14)式 $\hat{\eta} = (\hat{\mathbf{b}}, a)^T$ 。由(2.12)與(2.14)可得：

$$(p_i - p_j) \hat{\eta}_i^T \hat{\xi}_j = 0 \quad (2.15)$$



如(2.15)之特徵值 p_i 與 p_j 不同(即 $i \neq j$)， $\hat{\mathbf{N}}$ 之左與右特徵值的正交(orthogonality)

關係可由(2.15)得：

$$\frac{1}{\hat{\gamma}_i} \hat{\boldsymbol{\eta}}_i^T \hat{\boldsymbol{\xi}}_j = \mathbf{a}_i^T \hat{\mathbf{b}}_j + \hat{\mathbf{b}}_i^T \mathbf{a}_j = \delta_{ij}, \quad (2.16)$$

(2.16)中， $\hat{\gamma}_k(y_1, y_2) = 2\mathbf{a}_k^T(w_k) \hat{\mathbf{b}}_k(y_1, y_2)$ ， δ_{ij} 為 Kronecker δ 。令 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 與 $\boldsymbol{\gamma}$ 為：

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3], \quad \hat{\mathbf{B}} = [\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{b}}_2, \hat{\mathbf{b}}_3], \quad \hat{\boldsymbol{\gamma}} = \text{diag} \left[\frac{1}{\sqrt{\hat{\gamma}_1}}, \frac{1}{\sqrt{\hat{\gamma}_2}}, \frac{1}{\sqrt{\hat{\gamma}_3}} \right] \quad (2.17)$$

再令 \mathbf{W}_1 與 \mathbf{W}_2 為：

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\xi}_1 & \hat{\xi}_2 & \hat{\xi}_3 & \bar{\xi}_1 & \bar{\xi}_2 & \bar{\xi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \bar{\mathbf{A}} \\ \hat{\mathbf{B}} & \bar{\hat{\mathbf{B}}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} \hat{\eta}_1 & \hat{\eta}_2 & \hat{\eta}_3 & \bar{\eta}_1 & \bar{\eta}_2 & \bar{\eta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}} & \bar{\hat{\mathbf{B}}} \\ \mathbf{A} & \bar{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

由(2.16)、(2.17)與(2.18)得：

$$\mathbf{W}_2^T \mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\gamma}} \hat{\mathbf{B}}^T & \hat{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{A}^T \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}} \bar{\hat{\mathbf{B}}}^T & \hat{\boldsymbol{\gamma}} \bar{\mathbf{A}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \hat{\boldsymbol{\gamma}} & \bar{\mathbf{A}} \hat{\boldsymbol{\gamma}} \\ \hat{\mathbf{B}} \hat{\boldsymbol{\gamma}} & \bar{\hat{\mathbf{B}}} \hat{\boldsymbol{\gamma}} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

由(2.19)可知 $\mathbf{W}_2^T = \mathbf{W}_1^{-1}$ ，並將(2.19)改寫為：

$$\mathbf{W}_1 \mathbf{W}_2^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \boldsymbol{\gamma} & \bar{\mathbf{A}} \boldsymbol{\gamma} \\ \hat{\mathbf{B}} \boldsymbol{\gamma} & \bar{\hat{\mathbf{B}}} \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} \hat{\mathbf{B}}^T & \boldsymbol{\gamma} \mathbf{A}^T \\ \boldsymbol{\gamma} \bar{\hat{\mathbf{B}}}^T & \boldsymbol{\gamma} \bar{\mathbf{A}}^T \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

展開(2.20)可得：

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\gamma}^2 \hat{\mathbf{B}}^T + \bar{\mathbf{A}} \hat{\boldsymbol{\gamma}}^2 \bar{\mathbf{B}}^T = \mathbf{I}, \quad \hat{\mathbf{B}} \hat{\boldsymbol{\gamma}}^2 \hat{\mathbf{B}}^T + \bar{\hat{\mathbf{B}}} \hat{\boldsymbol{\gamma}}^2 \bar{\hat{\mathbf{B}}}^T = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

由(2.13)可知，當 $y_2 = 0$ ， $\hat{\mathbf{b}}_k(y_1, 0) = \mathbf{b}_k(y_1)$ ，對(2.21)取實部可得 $y_2 = 0$ 時：

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\gamma}^2 \mathbf{B}^T = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - i\mathbf{S}), \quad \mathbf{B} \boldsymbol{\gamma}^2 \mathbf{B}^T = \frac{i}{2} \mathbf{L} \quad (2.22)$$

(2.22)式 \mathbf{L} 亦可寫為：

$$\mathbf{L}(y_1) = -2i \sum_{k=1}^3 \frac{1}{\gamma_k(y_1)} \mathbf{b}_k(y_1) \mathbf{b}_k^T(y_1) \quad (2.23)$$

由(2.22)得：



$$\mathbf{AB}^{-1} = \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}^2\mathbf{B}^T (\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma}^2\mathbf{B}^T)^{-1} = -(\mathbf{S}\mathbf{L}^{-1} + i\mathbf{L}^{-1}) \quad (2.24)$$

(2.24)中 \mathbf{S} 與 \mathbf{L} 為實數矩陣，並由(2.24)可得：

$$\mathbf{L}(y_1) = -(\text{Im}[\mathbf{AB}]^{-1})^{-1} \quad (2.25)$$

2.2 以差排基本解推導裂縫面上的積分方程式

考慮一於無限域中 Burgers 向量為 $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$ 之差排，其中 β_1 為滑動刃差排(glide edge dislocation)、 β_2 為爬升刃差排(climb edge dislocation)而 β_3 為螺旋差排(screw dislocation)。若滑移面(slip plane)坐落於 $x_1 < 0$ 與 $x_2 = 0$ 且差排是在 $t = 0$ 時瞬間產生，則曳引力 \mathbf{t}_2 的連續條件與延滑移面的位移跳躍條件(jump condition)可表示為：

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_2^+(x_1, t) - \mathbf{t}_2^-(x_1, t) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{u}^+(x_1, t) - \mathbf{u}^-(x_1, t) &= -H(x_1)H(t)\boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (2.26)$$

(2.26)中，上標“+”與“-”代表 $x_2 \rightarrow 0$ 與 $x_2 \rightarrow 0^+$ 與 $x_2 \rightarrow 0^-$ 、 $H(\cdot)$ 為單位步階函數(Heaviside step function)。將(2.3)、(2.6)與(2.9)代入(2.26)，於 $t > 0$ 時：

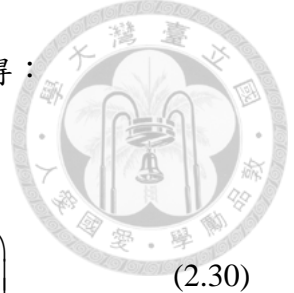
$$\begin{aligned} 2\text{Re} \left[\sum_{k=1}^3 (f_k^+(y_1) - f_k^-(y_1)) \mathbf{b}_k(y_1) \right] &= \mathbf{0} \\ 2\text{Re} \left[\sum_{k=1}^3 (f_k^+(y_1) - f_k^-(y_1)) \mathbf{a}_k(y_1) \right] &= -\delta(y_1)\boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (2.27)$$

(2.27)中， $\delta(\cdot)$ 為單位脈衝函數(Dirac delta function)。由(2.16)可知，當 $y_2 = 0$ 時：

$$\mathbf{a}_i^T(y_1)\mathbf{b}_j(y_1) + \mathbf{b}_j^T(y_1)\mathbf{a}_i(y_1) = 0, \quad i \neq j \quad (2.28)$$

將正交關係式(2.28)代入(2.27)可得：

$$f_k^+(y_1) - f_k^-(y_1) = -\frac{\delta(y_1)}{\gamma_k(y_1)} \mathbf{b}_k^T \boldsymbol{\beta} \quad (2.29)$$



由於 $w = y_1 + py_2$ ，並考慮 $p_k = k_1 + ik_2$ ，(k_1 、 k_2 為常數)，可推得：

$$\begin{aligned} \lim_{x_2 \rightarrow 0^{\pm}} \frac{1}{w} &= \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{1}{(y_1 + k_1 y_2) \pm ik_2 y_2} = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{(y_1 + k_1 y_2) \mp ik_2 y_2}{(y_1 + k_1 y_2)^2 + (k_2 y_2)^2} \\ &= \lim_{x_2 \rightarrow 0} \left(\frac{y_1 + k_1 y_2}{(y_1 + k_1 y_2)^2 + (k_2 y_2)^2} \mp i \frac{k_2 y_2}{(y_1 + k_1 y_2)^2 + (k_2 y_2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{y_1} \mp i \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{k_2 y_2}{y_1^2 + (k_2 y_2)^2} = \frac{1}{y_1} \mp i\pi\delta(y_1) \end{aligned} \quad (2.30)$$

(2.30)之推導已利用單位脈衝函數 $\delta(y_1)$ 之特性為：

$$\delta(y_1) = \frac{1}{\pi} \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{k_2 y_2}{y_1^2 + k_2 (s y_2)^2} \quad (2.31)$$

利用(2.29)與(2.30)得：

$$f_k(w_k) = \frac{1}{2\pi i w_k \gamma_k} \mathbf{b}_k^T(w_k) \boldsymbol{\beta} \quad (2.32)$$

將(2.32)代入(2.6)式，得如下之位移 \mathbf{u} 解：

$$\mathbf{u}(y_1, y_2) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[\sum_{k=1}^3 \int_{\infty}^{w_k} \frac{1}{w \gamma_k(w)} \mathbf{a}_k(w) \mathbf{b}_k^T(w) dw \right] \boldsymbol{\beta} \quad (2.33)$$

對於上半平面($x_2 > 0$)，(2.33)之積分路徑可取為由 A 點($y_1 \rightarrow \infty, y_2 = c$)開始，E 點結束，如圖 2.1 所示，圖 2.1 之 B 與 D 為相交波面(wave surface)的兩點， w 於 B 與 D 之外皆為實數，而 w 於 B 與 D 之間為正虛部的複數。若 $c < \hat{c}_k$ (\hat{c}_k 為沿 x_2 方向之平面波波速)， $y_2 = c$ 上幾個代表點 A、B、C、D 與 E 於複數 w 平面的對應點如圖 2.2 所示。

由於 w 、 $\mathbf{a}_k(w)$ 與 $\mathbf{b}_k(w)$ 在 B、D 之外皆為實數，對於 E 點而言，積分路徑可延伸至 $y_1 \rightarrow -\infty$ 或 $w_k \rightarrow -\infty$ 而不影響(2.33)的積分值，即：

$$\mathbf{u}(y_1, y_2) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[\sum_{k=1}^3 \int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{w \gamma_k(w)} \mathbf{a}_k(w) \mathbf{b}_k^T(w) dw \right] \boldsymbol{\beta} \quad (2.34)$$

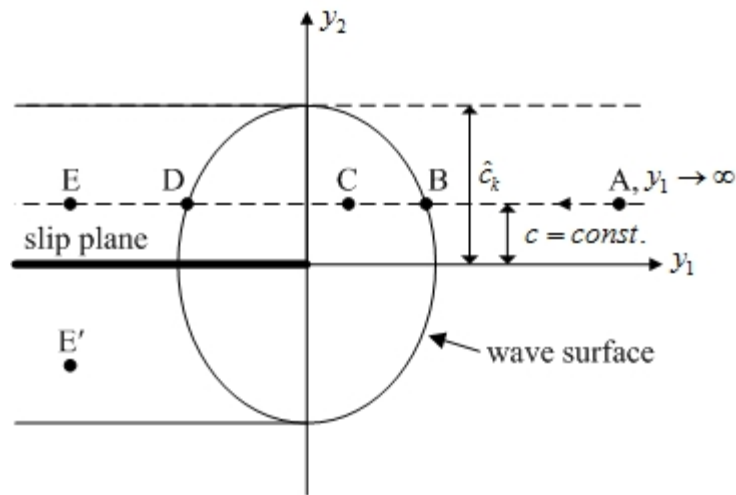


圖 2.1 (2.37)位移 \mathbf{u} 在 (y_1, y_2) 平面的積分路徑

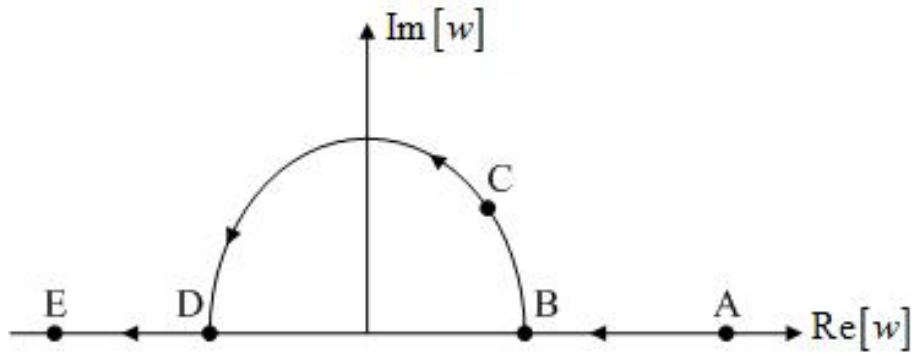


圖 2.2 (2.37)位移 \mathbf{u} 在 w 複數平面的積分路徑

根據 Cauchy 積分定理，(2.34)的積分路徑可由 w 複數平面上之半徑為無限長的上半圓取代(即 $w = Re^{i\theta}$ 且 $R \rightarrow \infty$ 、 $0 < \theta < \pi$)，且積分值不變，因此將(2.34)改寫為：

$$\mathbf{u}(y_1, y_2) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^3 \int_0^{\pi} \frac{1}{2\mathbf{a}_k^T (Re^{i\theta}) \mathbf{b}_k (Re^{i\theta})} \mathbf{a}_k (Re^{i\theta}) \mathbf{b}_k^T (Re^{i\theta}) d\theta \right] \boldsymbol{\beta} \quad (2.35)$$

當 $|w| \rightarrow \infty$ 時，(2.10)可改寫為[7]：

$$p^2 \mathbf{T} \mathbf{a} = \rho w^2 \mathbf{a}, \quad \mathbf{T} \hat{\mathbf{d}}_k = \rho \hat{c}_k \hat{\mathbf{d}}_k^T, \quad \hat{\mathbf{d}}_j^T \hat{\mathbf{d}}_k = \delta_{ij} \quad (2.36)$$

(2.36)中， $\hat{\mathbf{d}}_k$ 為極化向量(polarization vector) δ_{ij} 為 Kronecker δ 。由(2.36)可觀察得：



$$\mathbf{a}_k = \hat{\mathbf{d}}_k, \quad p_k = \pm w/\hat{c}_k, \quad |w| \rightarrow \infty \quad (2.37)$$

(2.37)式“+”與“-”代表 $x_2 > 0$ 與 $x_2 < 0$ 。由(2.9)與(2.37)可得：

$$\mathbf{b}_k = \rho \hat{c}_k w \hat{\mathbf{d}}_k, \quad |w| \rightarrow \infty \quad (2.38)$$

由(2.37)與(2.38)得：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{w\gamma_k(w)} \mathbf{a}_k(w) \mathbf{b}_k^T(w) dw = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{d}}_k \hat{\mathbf{d}}_k^T \quad (2.39)$$

另一方面，若 $y_2 > \hat{c}_k$ ，則所對應之 w 皆為實數，故：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{w\gamma_k(w)} \mathbf{a}_k(w) \mathbf{b}_k^T(w) dw = \mathbf{0} \quad (2.40)$$

(2.39)與(2.40)可合併為：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{w\gamma_k(w)} \mathbf{a}_k(w) \mathbf{b}_k^T(w) dw = \frac{1}{2} H(\hat{c}_k - y_2) \hat{\mathbf{d}}_k \hat{\mathbf{d}}_k^T \quad (2.41)$$

將(2.41)代入(2.34)得：

$$\mathbf{u}(y_1, y_2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 H(\hat{c}_k - y_2) H(-y_1) \hat{\mathbf{d}}_k \hat{\mathbf{d}}_k^T \boldsymbol{\beta} \quad (2.42)$$

對於下半平面($x_2 < 0$)，(2.34)的積分路徑與圖 2.2 所示類似，但因所對應之 w 之虛數部為負，故路徑可改為半徑為無限長的下半圓取代(即 $w = Re^{i\theta}$ 且 $R \rightarrow \infty$ 、 $0 < \theta < -\pi$)而不影響其積分值。經由上述相同步驟可得：

$$\mathbf{u}(y_1, y_2) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 H(\hat{c}_k + y_2) H(-y_1) \hat{\mathbf{d}}_k \hat{\mathbf{d}}_k^T \boldsymbol{\beta} \quad (2.43)$$

綜合上述可知：波面(w_c)內之位移為(2.33)，而波面(w_c)外之位移為(2.42)與(2.43)，對於上述之位移以等向性介質與平面問題(平面應變或平面應力)說明位移(2.42)與(2.43)，如圖 2.3：

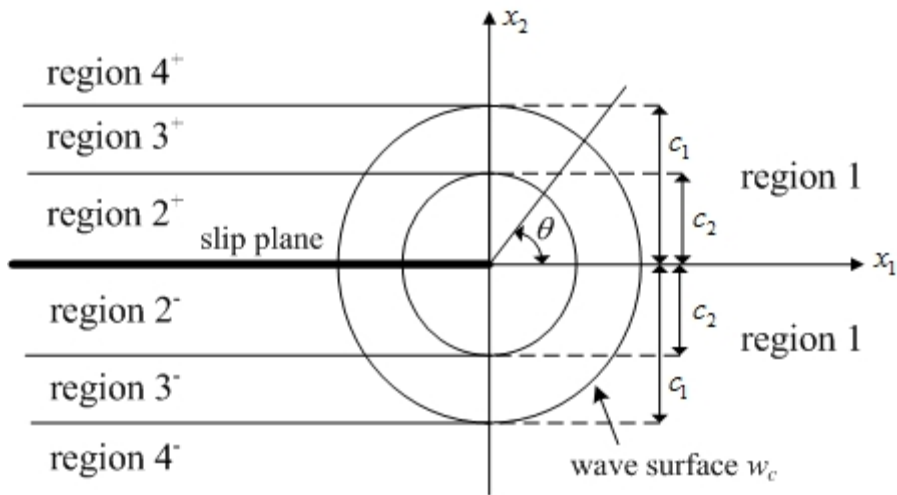


圖 2.3 由 Burgers 向量 β 差排引起之波面所造成的位移

圖 2.3 中，波面外之區域 1 ($-\pi/2 < \theta < \pi/2$) 的位移 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ，區域 2^+ ($0 < |y_2| < c_2$)、 3^+ ($c_2 < |y_2| < c_1$) 與 4^+ ($|y_2| > c_1$) 為平面波離開滑移面產生之位移，其中，區域 4^+ 的位移 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ，區域 3^+ 的位移 \mathbf{u} 為：

$$\mathbf{u} = \pm \frac{1}{2} \hat{\mathbf{d}}_1 \hat{\mathbf{d}}_1^T \boldsymbol{\beta}$$

區域 2^+ 的位移 \mathbf{u} 為：

$$\mathbf{u} = \pm \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{d}}_1 \hat{\mathbf{d}}_1^T + \hat{\mathbf{d}}_2 \hat{\mathbf{d}}_2^T) \boldsymbol{\beta} = \pm \frac{\boldsymbol{\beta}}{2}$$

將位移(2.33)與(2.41)代入曳引力-位移關係式(2.3)可得：

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_2(x_1, x_2, t) = & -\frac{\rho}{2} \sum_{k=1}^3 \delta\left(t - \frac{|x_2|}{\hat{c}_k}\right) H(-x_1) \hat{c}_k \hat{\mathbf{d}}_k \hat{\mathbf{d}}_k^T \boldsymbol{\beta} \\ & + \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[\sum_{k=1}^3 \frac{1}{w_k \gamma_k(w_k)} \frac{\partial w_k}{\partial x_1} \mathbf{b}_k(w_k) \mathbf{b}_k^T(w_k) \right] \boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (2.44)$$

(2.44)中，等號右邊第一項為離開滑移面之平面波所產生之曳引力，第二項則為差排產生之體波(bulk wave)。 (2.44)式 $\partial w / \partial x_1$ 為：

$$\frac{\partial w_k}{\partial x_1} = \frac{1}{t - p'_k(w_k) x_2} \quad (2.45)$$



(2.45)之 $p'_k(w_k)$ 為 $p_k(w_k)$ 對 w_k 微分，將(2.10)對 w 微分，並左乘 \mathbf{a}_k^T 、右乘 \mathbf{a}_k 且利用

(2.9)， $p'_k(w_k)$ 可得：

$$p'_k(w_k) = \rho w_k \frac{\mathbf{a}_k^T(w_k) \mathbf{a}_k(w_k)}{\mathbf{a}_k^T(w_k) \mathbf{b}_k(w_k)} \quad (2.46)$$

藉由(2.46)可將(2.45)改寫為：

$$\frac{\partial w_k}{\partial x_1} = \frac{\gamma_k(w_k)}{t \hat{\gamma}_k(w_k)} \quad (2.47)$$

(2.47)中：

$$\hat{\gamma}_k(w_k) = 2\mathbf{a}_k^T(w_k) \hat{\mathbf{b}}_k(w_k), \quad \hat{\mathbf{b}}_k(w_k) = \mathbf{b}_k - \rho w_k y_2 \mathbf{a}_k(w_k) \quad (2.48)$$

當 $x_2 \rightarrow 0$ ， $w_k = y_1$ ，利用(2.23)、(2.47)與(2.48)將(2.44)改寫為：

$$\mathbf{t}_2(x_1, t) = -\frac{1}{2} \delta(t - \varepsilon_t) H(-x_1) (\rho \mathbf{T})^{1/2} \boldsymbol{\beta} + \frac{1}{2\pi x_1} \text{Re}[\mathbf{L}(y_1)] \boldsymbol{\beta} \quad (2.49)$$

(2.49)中， ε_t 為一趨近於零的正數，且：

$$(\rho \mathbf{T})^{1/2} = \sum_{k=1}^3 \rho \hat{\mathbf{c}}_k \hat{\mathbf{d}}_k \hat{\mathbf{d}}_k^T \quad (2.50)$$

根據差排法，裂縫上下面之相對位移可利用裂縫面上之連續分佈的差排密度

(dislocation density) $\boldsymbol{\alpha}(\xi_1, \tau) = (\alpha_1(\xi_1, \tau), \alpha_2(\xi_1, \tau), \alpha_3(\xi_1, \tau))^T$ 、 $-\infty < \xi_1 < \infty$ 、 $0 < \tau < t$

來表示。Burgers 向量 $\boldsymbol{\beta}(x_1, t) = \Delta \mathbf{u}$ 與差排密度之關係可表示為：

$$\Delta \mathbf{u}(x_1, t) = \boldsymbol{\beta}(x_1, t) = \int_{x_1}^{\infty} \int_0^t \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}(\xi_1, \tau)}{\partial \tau} d\tau d\xi_1 \quad (2.51)$$

將(2.51)代入(2.49)，並利用疊加原理可得裂縫面上的積分方程式為：

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_2(x_1, t) = & -\frac{1}{2} (\rho \mathbf{T})^{1/2} \int_{x_1}^{\infty} \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}(\xi_1, t)}{\partial t} d\xi_1 \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x_1 - \xi_1} \int_0^t \text{Re} \left[\mathbf{L} \left(\frac{x_1 - \xi_1}{t - \tau} \right) \right] \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}(\xi_1, \tau)}{\partial \tau} d\tau d\xi_1 \end{aligned} \quad (2.52)$$

(2.52)等號右式第二項為時間-空間之摺合積分(convolution integral)。



2.3 共線裂縫積分方程式之數值解法

考慮坐落於 $|x_1 - b_i| \leq a_i$, ($i=1, \dots, M$, b 為裂縫中心座標、 a 為裂縫半長)、 $x_2 = 0$ 之 M 條共線裂縫。將位於第 i 個裂縫上之點的座標 x_1 表為 $x_1 = b_i + a_i x$, $|x| \leq 1$, (2.52)

可改寫如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_2(b_i + a_i x, t) = & -\frac{a_i}{2} (\rho \mathbf{T})^{1/2} \int_x^1 \frac{\partial \mathbf{a}(b_i + a_i \xi, t)}{\partial t} d\xi \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^M \int_{-1}^1 \frac{a_j}{b_i + a_i x - b_j - a_j \xi} \int_0^t \operatorname{Re} \left[\mathbf{L} \left(\frac{b_i + a_i x - b_j - a_j \xi}{t - \tau} \right) \right] \frac{\partial \mathbf{a}(b_j + a_j \xi, \tau)}{\partial \tau} d\tau d\xi \end{aligned} \quad (2.53)$$

(2.53) 中， $\xi_1 = b_i + a_i \xi$, $|\xi| \leq 1$ 。由(2.51)，各裂縫閉合的條件(closure condition)可表示為：

$$\int_{-1}^1 \mathbf{a}(b_i + a_i \xi, t) d\xi = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (2.54)$$

對(2.53)取 Laplace 對 t 轉換得：

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{t}}_2(b_i + a_i x, s) = & -\frac{a_i s}{2} (\rho \mathbf{T})^{1/2} \int_x^1 \tilde{\mathbf{a}}(b_i + a_i \xi, s) d\xi \\ & + \frac{C_{66}}{2\pi} \sum_{j=1}^M \int_{-1}^1 \frac{\mathbf{U}(s | b_i + a_i x - b_j - a_j \xi | / c)}{b_i + a_i x - b_j - a_j \xi} \tilde{\mathbf{a}}(b_j + a_j \xi, s) a_j d\xi \end{aligned} \quad (2.55)$$

(2.55) 中 Laplace 轉換之定義為 $(\tilde{\mathbf{t}}_2, \tilde{\mathbf{a}}) = \int_0^\infty (\mathbf{t}_2, \mathbf{a}) e^{-st} dt$ 、 c 為波速、 \mathbf{U} 為：

$$\mathbf{U}(z) = s \int_0^\infty \operatorname{Re}[\mathbf{L}(z)] e^{-st} dt \quad (2.56)$$

(2.56) 中， \mathbf{U} 的形式在第三與第四章中推導與討論。當 $x_1 \rightarrow \xi_1$ ($b_i + a_i x \rightarrow b_i + a_i \xi$)，積分方程式(2.55)具有奇異性，即 \mathbf{a} 於 $\xi_1 = b_j \pm a_j$ 具有平方根奇異性(square-root singularity)並表示為：



$$\tilde{\mathbf{a}}(b_j + a_j \xi, s) = \frac{\tilde{\mathbf{\Omega}}_j(\xi, s)}{a_j \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (2.57)$$

(2.57)中， $\tilde{\mathbf{\Omega}}_j = (\tilde{G}_j, \tilde{F}_j)^T$ ，其中 \tilde{G}_j 與 \tilde{F}_j 為待定函數且 $\xi = \pm 1$ 為有限。將(2.57)代入(2.55)可得：

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{t}}_2(b_i + a_i x, s) = & -\frac{s}{2}(\rho \mathbf{T})^{1/2} \int_x^1 \frac{\tilde{\mathbf{\Omega}}_i(\xi, s)}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^M \int_{-1}^1 \frac{\mathbf{U}(s|b_i + a_i x - b_j - a_j \xi|/c)}{b_i + a_i x - b_j - a_j \xi} \frac{\tilde{\mathbf{\Omega}}_j(\xi, s)}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi \end{aligned} \quad (2.58)$$

對於積分方程式(2.58)，Erdogan、Gupta 與 Cook [19]以 N 階 Gauss-Chebyshev 積分法則求解，此法先將(2.58)等號右邊第二項以 Gauss-Chebyshev 積分法則近似為：

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathbf{U}(s|x_1 - (b_j + a_j \xi^{(k)})|/c)}{b_i + a_i x - b_j - a_j \xi} \frac{\tilde{\mathbf{\Omega}}_j(\xi, s)}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi = \frac{\pi}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\mathbf{U}(s|x_1 - (b_j + a_j \xi^{(k)})|/c)}{x_1 - (b_j + a_j \xi^{(k)})} \tilde{\mathbf{\Omega}}_j(\xi, s) \quad (2.59)$$

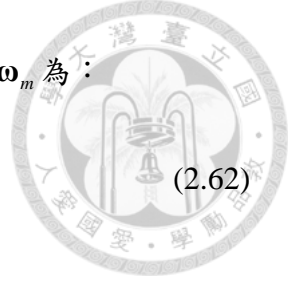
(2.59)中， π/N 為權函數 (weighting function)、積分點 $\xi^{(k)} = \cos(\varphi^{(k)})$ ，其中 $\varphi^{(k)} = (k-1/2)\pi/N$ 。(2.59)之任意 x_1 僅於區間 $|x_1 - b_j| > a_j$ 有效或 $x_1 = b_j + a_j x^{(\ell)}$ ($x^{(\ell)} = \cos(\theta^{(\ell)})$) 有效區間為 $|x_1 - b_j| < a_j$ ，其中 $\theta^{(\ell)} = \ell\pi/N$ 、 $\ell = 1, 2, \dots, N-1$ 。(2.58)

等號右邊第一項於區間 $|\xi_1 - b_j| \leq a_j$ 之求解，須將 $\tilde{G}_i(\xi, s)$ 與 $\tilde{F}_i(\xi, s)$ 以 Chebyshev 多項式展開為：

$$\tilde{\mathbf{\Omega}}_i(\xi, s) = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{\omega}_m T_m(\xi) \quad (2.60)$$

(2.60)中 $\mathbf{\omega}_m = (g_m, f_m)^T$ ，其中 g_m 與 f_m 為待定常數， $T_m(\cdot)$ 為 m 階第一型 Chebyshev 多項式：

$$T_m(\xi) = \cos(m \cos^{-1} \xi) \quad (2.61)$$



利用第一型 Chebyshev 多項式的正交條件，得(2.60)之待定常數 ω_m 為：

$$\omega_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{\Omega}_i(\xi^{(k)}, s), \quad \omega_m = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \cos(m\varphi^{(k)}) \tilde{\Omega}_i(\xi^{(k)}, s) \quad (2.62)$$

其中 Chebyshev 多項式之正交條件為：

$$\sum_{k=1}^N T_i(\xi_k) T_j(\xi_k) = \begin{cases} N, & i = j = 0 \\ N\delta_{ij}/2, & i = j \neq 0 \end{cases} \quad (2.63)$$

將待定常數 ω_m (2.62) 代入(2.60)可得：

$$\tilde{\Omega}_i(\xi, s) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{N-1} \cos(m\varphi^{(k)}) T_m(\xi) \right) \tilde{\Omega}_i(\xi^{(k)}, s) \quad (2.64)$$

將(2.64)代入(2.58)等號右邊第一項之積分式：

$$\int_x^1 \frac{\tilde{\Omega}_i(\xi, s)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\theta + 2 \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\cos(m\varphi^{(k)}) \sin(m\theta)}{m} \right) \tilde{\Omega}_i(\xi^{(k)}, s) \quad (2.65)$$

(2.65)之 $\theta = \cos^{-1} x$ ，且推導使用的特性為：

$$\begin{aligned} \int_x^1 \frac{T_m(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi &= \theta, \quad m = 0 \\ &= \frac{\sin(m\theta)}{m}, \quad m \neq 0 \end{aligned}$$


將(2.57)代入裂縫尖端位移連續條件(2.54)：

$$\sum_{k=1}^N \tilde{\Omega}_i(\xi^{(k)}, s) = 0 \quad (2.66)$$

將(2.66)代入(2.65)可得：

$$\int_x^1 \frac{\tilde{\Omega}_i(\xi, s)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\cos(m\varphi^{(k)}) \sin(m\theta)}{m} \tilde{\Omega}_i(\xi^{(k)}, s) \quad (2.67)$$

將(2.59)、(2.67)與 $x_1 = b_i + a_i x^{(l)}$ 代入(2.58)可得：



$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_i^{(\ell)} = & -\frac{s(\rho\mathbf{T})^{1/2}}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\cos(m\varphi^{(k)}) \sin(m\theta^{(\ell)})}{m} \tilde{\Omega}_i^{(k)} \\ & + \frac{C_{66}}{2N} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \frac{\mathbf{U}\left(s\left|b_i + a_i x^{(\ell)} - (b_j + a_j \xi^{(k)})\right|/c\right)}{b_i + a_i x^{(\ell)} - (b_j + a_j \xi^{(k)})} \tilde{\Omega}_j^{(k)} \end{aligned} \quad (2.68)$$

(2.68)中：

$$\tilde{\Phi}_i^{(\ell)} = \tilde{\mathbf{t}}_2(b_i + a_i x^{(\ell)}, s), \quad \tilde{\Omega}_i^{(k)} = \tilde{\Omega}_i(\xi^{(k)}, s), \quad i=1 \sim M \quad (2.69)$$

$$\xi^{(k)} = \cos(\varphi^{(k)}), \quad \varphi^{(k)} = (k-1/2)\pi/N, \quad k=1, 2, \dots, N \quad (2.70)$$

$$x^{(\ell)} = \cos(\theta^{(\ell)}), \quad \theta^{(\ell)} = \ell\pi/N, \quad \ell=1, 2, \dots, N-1 \quad (2.71)$$

(2.68)只有 $N-1$ 條 $\tilde{\Omega}_i^{(k)}$ 方程式，因此需加入裂縫的閉合條件，將(2.69)代入(2.66)：

$$\sum_{k=1}^N \tilde{\Omega}_i^{(k)} = \mathbf{0}, \quad i=1, 2, \dots, M \quad (2.72)$$

(2.68)與(2.72)為積分方程式(2.58)之 N 階 Gauss-Chebyshev 積分法則，即共線裂縫積分方程式(2.58)降為 N 階線性代數方程式(2.68)與(2.72)。

2.4 動態應力強度因子

裂縫開口位移與動態應力強度因子之關係為(Wu [27])：

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Delta \mathbf{u} = 2\sqrt{\frac{2r}{\pi}} \mathbf{L}^{-1}(0) \mathbf{K} \quad (2.73)$$

(2.73)中， r 為計算點到裂縫尖端的距離、 $\mathbf{K} = (K_{II}, K_I, K_{III})^T$ 。由(2.51)與(2.73)可

得 $x_1 = b_i \pm a_i$ 之動態應力強度因子與差排密度關係為：

$$\tilde{\mathbf{K}}(b_i \pm a_i, s) = \pm \mathbf{L}(0) \sqrt{\frac{\pi r}{2}} \lim_{r \rightarrow 0} \tilde{\mathbf{u}}(r, s) \quad (2.74)$$

將(2.57)代入(2.74)可得：



$$\tilde{\mathbf{K}}(b_i \pm a_i, s) = \frac{\pm \mathbf{L}(0)}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a_i}} \tilde{\Omega}_i(\pm 1, s) \quad (2.75)$$

(2.64)代入(2.75)可得：

$$\tilde{\mathbf{K}}(b_i \pm a_i, s) = \frac{\pm \mathbf{L}(0)}{2N} \sqrt{\frac{\pi}{a_i}} \sum_{k=1}^N \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{N-1} (\pm 1)^m \cos(m\varphi^{(k)}) \right) \tilde{\Omega}_i(\xi^{(k)}, s) \quad (2.76)$$

由於餘弦(cosine)級數總和特性為：

$$\sum_{m=1}^{N-1} \cos(m\varphi^{(k)}) = \frac{1}{2} \left[(-1)^{k+1} \cot \frac{\varphi^{(k)}}{2} - 1 \right]$$

$$\sum_{m=1}^{N-1} (-1)^m \cos(m\varphi^{(k)}) = -\frac{1}{2} \left[(-1)^N (-1)^{k+1} \tan \frac{\varphi^{(k)}}{2} + 1 \right]$$

因此(2.76)可表示為：

$$\tilde{\mathbf{K}}(b_i + a_i, s) = \frac{\mathbf{L}(0)}{2N} \sqrt{\frac{\pi}{a_i}} \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \tilde{\Omega}_i^{(k)} \cot \frac{\varphi^{(k)}}{2}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}(b_i - a_i, s) = (-1)^N \frac{\mathbf{L}(0)}{2N} \sqrt{\frac{\pi}{a_i}} \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \tilde{\Omega}_i^{(k)} \tan \frac{\varphi^{(k)}}{2} \quad (2.77)$$

(2.77)為裂縫尖端 $x_1 = b_i \pm a_i$ 於 Laplace 轉換域的應力強度因子，其中待定函數 $\tilde{\Omega}_i^{(k)}$ 可由 2.3 節方程組(2.68)與(2.72)求得。時域應力強度因子 $\mathbf{K}(b_i \pm a_i, t)$ 由轉換域應力強度因子(2.77)及反轉換求得，而轉換域應力強度因子 $\tilde{\mathbf{K}}(b_i \pm a_i, s)$ 非固定形式的函數，因此需以數值反 Laplace 轉換求 $\mathbf{K}(b_i \pm a_i, t)$ 。本文引入兩種數值反 Laplace 轉換，Miller 與 Guy [28]提出的數值反 Laplace 轉換為：

$$\mathbf{K}(b_i \pm a_i, t) = \sum_{n=0}^{N_M} M_n J_n^{(0, M_\beta)} (2e^{-M_\delta t} - 1) \quad (2.78)$$

(2.78)式 N_M 、 M_β 與 M_δ 為可調整參數， $J_n^{(i, j)}(\cdot)$ 為 Jacobi 多項式，常數 M_n 可由下式求得：

$$\tilde{\mathbf{K}}(b_i \pm a_i, (M_\beta + 1 + k)M_\delta) = \frac{1}{M_\delta} \sum_{n=0}^k \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(k+M_\beta+1)}{\Gamma(k-n+1)\Gamma(k+M_\beta+n+2)} M_n \quad (2.79)$$

(2.79)中， $k=0,1,\dots$ 、 $\Gamma(\cdot)$ 為 Gamma 函數。Durbin [29]提出數值反 Laplace 轉換

為：

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(b_i \pm a_i, t) &= \frac{e^{s_0 t}}{T} \operatorname{Re} \left[\tilde{\mathbf{K}}(b_i \pm a_i, s_0) \right] \\ &+ \frac{2e^{s_0 t}}{T} \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^{N_s} \tilde{\mathbf{K}}(b_i \pm a_i, s_k) e^{ik\frac{2\pi t}{T}} \right] \end{aligned} \quad (2.80)$$

(2.80)中， $s_k = s_0 + ik2\pi/T$ ， $k=0,1,2,\dots,N_s$ ， N_s 、 s_0 與 T 為可調整參數，數值法

(2.80)的誤差會隨係數 $\exp(s_0 T)/T$ 放大，所以 $s_0 T$ 越大時，必須增加 N_s 使精度增

加。

第三章 共線裂縫於等向性介質的應力強度因子

第二章推導共線裂縫的積分方程式，以 Laplace 轉換積分方程式得(2.55)，式中 U 與材料性質有關，因此，本章第 1 節以第二章介紹的特徵值問題(2.11)求 L ，並推導 U ，第 2 節將線性代數方程式(2.68)與(2.72)整理為矩陣式，並推導 Laplace 轉換域的應力強度因子，第 3 節計算單裂縫、雙與三共線裂縫在等向性介質的第一型與第二型應力強度因子並討論其數值結果。

3.1 等向性介質 U 的推導

對於等向性介質、二維平面問題，非零彈性常數為： $C_{11} = C_{22} = \lambda + 2\mu$ 、 $C_{66} = \mu$ 、 $C_{12} = \lambda$ (λ 與 μ 為 Lamé 常數)，將彈性常數代入六維特徵值問題(2.11)且考慮進平面(in plane)問題可得：

$$\det \begin{bmatrix} C_{11} - \rho w^2 + C_{66} p^2 & p(C_{11} - C_{66}) \\ p(C_{11} - C_{66}) & C_{66} - \rho w^2 + C_{11} p^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.1)$$

由(3.1)可得特徵值為：

$$p_k(w) = \sqrt{(w/c_k)^2 - 1}, \quad k = 1, 2 \quad (3.2)$$

(3.2) 中， $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ 、 $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ 為縱波(longitudinal wave)波速與橫波(transverse wave)波速，將(3.2)代入(2.10)可得特徵向量為：

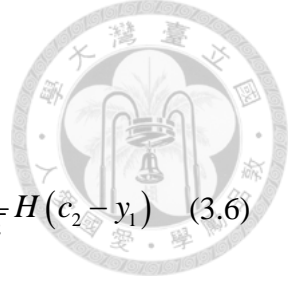
$$\mathbf{a}_1(w) = (1, p_1(w))^T, \quad \mathbf{a}_2(w) = (-p_2(w), 1)^T \quad (3.3)$$

將(3.3)代入(2.9)：

$$\mathbf{b}_1(w) = \mu(2p_1(w), p_2^2(w) - 1)^T, \quad \mathbf{b}_2(w) = \mu(1 - p_2^2(w), 2p_2(w))^T \quad (3.4)$$

將(3.4)代入(2.23)得 L ：

$$L_{11}(y_1) = -i\mu \frac{4p_1 p_2 + (1 - p_2^2)^2}{(1 + p_2^2)p_2}, \quad L_{22}(y_1) = -i\mu \frac{4p_1 p_2 + (p_2^2 - 1)^2}{(1 + p_2^2)p_1} \quad (3.5)$$



L 中 $L_{12}(y_1) = L_{21}(y_1) = 0$ 。取(3.5)實部可得：

$$\frac{\operatorname{Re}[L_{11}(y_1)]}{\mu} = \frac{4\sqrt{1-(y_1/c_1)^2}}{(y_1/c_2)^2} H(c_1 - y_1) - \frac{(2-(y_1/c_2)^2)^2}{(y_1/c_2)^2 \sqrt{1-(y_1/c_2)^2}} H(c_2 - y_1) \quad (3.6)$$

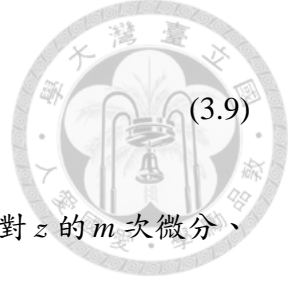
$$\frac{\operatorname{Re}[L_{22}(y_1)]}{\mu} = \frac{4\sqrt{1-(y_1/c_2)^2}}{(y_1/c_2)^2} H(c_2 - y_1) - \frac{(2-(y_1/c_2)^2)^2}{(y_1/c_2)^2 \sqrt{1-(y_1/c_1)^2}} H(c_1 - y_1) \quad (3.7)$$

為求 U 需得 L 的 Laplace 轉換形式，因此將(3.6)等號右邊第一項取 Laplace 對 t 轉換：

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{4\sqrt{1-(y/c_1)^2}}{(y/c_2)^2} H(c_1 - y) e^{-st} dt \\ &= \frac{4}{\kappa_1^2} \int_{t_1}^{\infty} (t/t_1) \sqrt{(t/t_1)^2 - 1} e^{-st} dt \\ &= \frac{4}{\kappa_1^2} t_1 \int_1^{\infty} t' \sqrt{(t')^2 - 1} e^{-st_1 t'} dt' = -\frac{4}{\kappa_1^2} t_1 \frac{d}{d(st_1)} \left(\frac{K_1(st_1)}{st_1} \right) \\ &= \frac{4}{\kappa_1^2} \frac{K_2(st_1)}{s} \end{aligned} \quad (3.8)$$

將(3.6)等號右邊第二項對取 Laplace 對 t 轉換：

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{[2-(y/c_2)^2]^2}{(y/c_2)^2 \sqrt{1-(y/c_2)^2}} H(c_2 - y) e^{-st} dt \\ &= \int_{t_2}^{\infty} \frac{4(t/t_2)^3 - 4(t/t_2) + 1/(t/t_2)}{\sqrt{(t/t_2)^2 - 1}} e^{-st} dt = t_2 \int_1^{\infty} \left(4t'^3 - 4t' + \frac{1}{t'} \right) \frac{1}{\sqrt{t'^2 - 1}} e^{-st_2 t'} dt' \\ &= t_2 \left[-4K_0^{(3)}(st_2) + 4K_0^{(1)}(st_2) + \int_{st_2}^{\infty} K_0(\eta) d\eta \right] \\ &= t_2 \left[4 \left(\frac{K_2(st_2)}{st_2} + K_1(st_2) \right) - 4K_1(st_2) + \int_{st_2}^{\infty} K_0(\eta) d\eta \right] \end{aligned}$$



$$= t_2 \left(4 \frac{K_2(st_2)}{st_2} + \int_{st_2}^{\infty} K_0(\eta) d\eta \right) \quad (3.9)$$

(3.8)與(3.9)中， $t_i = |x_1 - \xi_1|/c_i$ 、 $\kappa_1 = c_1/c_2$ 、 $K_n^{(m)}(z)$ 上標 (m) 表示對 z 的 m 次微分、

$K_n(\cdot)$ 為 n 階第二類修正 Bessel 函數(modified Bessel function)：

$$K_n(z) = \frac{z^n \sqrt{\pi}}{2^n \Gamma(n+1/2)} \int_1^{\infty} (t^2-1)^{n-\frac{1}{2}} e^{-zt} dt, \quad K_0(z) = \int_1^{\infty} (t^2-1)^{-\frac{1}{2}} e^{-zt} dt$$

將(3.8)與(3.9)代入(2.56)，得：

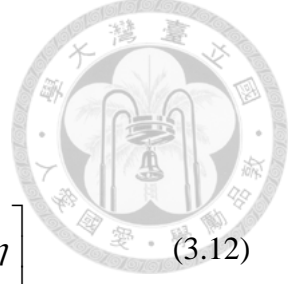
$$U_{11} \left(\frac{s|x_1 - \xi_1|}{c_2} \right) = \frac{4}{\kappa_1^2} K_2 \left(\frac{st_2}{\kappa_1} \right) - 4K_2(st_2) - st_2 \int_{st_2}^{\infty} K_0(\eta) d\eta \quad (3.10)$$

U_{22} 亦可以同樣的步驟求得，將(3.7)等號右邊第一項取 Laplace 對轉換：

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{4\sqrt{1-(y/c_2)^2}}{(y/c_2)^2} H(c_2-y) e^{-st} dt \\ &= 4 \int_{t_2}^{\infty} \frac{t}{t_2} \sqrt{\left(\frac{t}{t_2}\right)^2 - 1} e^{-st} dt = -4t_2 \frac{d}{d(st_2)} \frac{K_1(st_2)}{st_2} \\ &= 4 \frac{K_2(st_2)}{s} \end{aligned} \quad (3.11)$$

將(3.7)等號右邊第二項取 Laplace 對轉換：

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{\left[2-(y/c_2)^2\right]^2}{(y/c_2)^2 \sqrt{1-(y/c_1)^2}} H(c_1-y) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{\kappa_1^2} \int_{t_1}^{\infty} \frac{4(t/t_1)^3 - 4(t_2/t)^2 (t/t_1)^3 + (t_2/t)^4 (t/t_1)^3}{\sqrt{(t/t_1)^2 - 1}} e^{-st} dt \\ &= t_2 \kappa_1 \int_1^{\infty} \left(\frac{4t'^3}{\kappa_1^4} - \frac{4t'}{\kappa_1^2} + \frac{1}{t'} \right) \frac{1}{\sqrt{t'^2 - 1}} e^{-st't'} dt' \\ &= t_2 \kappa_1 \left(-\frac{4}{\kappa_1^4} K_0^{(3)}(st_1) + \frac{4}{\kappa_1^2} K_0^{(1)}(st_1) + \int_{st_1}^{\infty} K_0(s\eta) d\eta \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= t_2 \kappa_1 \left[\frac{4}{\kappa_1^4} \left(\frac{K_2(st_1)}{st_1} + K_1(st_1) \right) - \frac{4}{\kappa_1^2} K_1(st_1) + \int_{st_1}^{\infty} K_0(\eta) d\eta \right] \\
&= t_2 \left[\frac{4}{\kappa_1^2} \frac{K_2(st_2/\kappa_1)}{st_2} + \frac{4}{\kappa_1} \left(\frac{1}{\kappa_1^2} - 1 \right) K_1 \left(\frac{st_2}{\kappa_1} \right) + \kappa_1 \int_{st_2/\kappa_1}^{\infty} K_0(\eta) d\eta \right]
\end{aligned} \tag{3.12}$$

將(3.11)與(3.12)代入(2.56)：

$$U_{22} \left(\frac{s|x_1 - \xi_1|}{c_1} \right) = 4 \left(K_2(\kappa_1 st_1) - \frac{K_2(st_1)}{\kappa_1^2} \right) + 4st_1 \left(1 - \frac{1}{\kappa_1^2} \right) K_1(st_1) - \kappa_1^2 st_1 \int_{st_1}^{\infty} K_0(\eta) d\eta \tag{3.13}$$

3.2 待定函數的矩陣方程式與 $\tilde{\mathbf{K}}$ 的求解

2.3 節已推得差排密度的 N 階線性代數方程式(2.68)與(2.72)，由於 $L_{12}(y_1) = L_{21}(y_1) = 0$ ，因此 \tilde{G}_i 與 \tilde{F}_i 為非耦合(uncouple)問題，即 \tilde{G}_i 與 \tilde{F}_i 可分開求解。考慮垂直入射之縱波 $\sigma_{22} = -P$ ，並將(3.13)代入(2.68)與(2.72)可整理 $\tilde{F}_i^{(k)}$ 的矩陣方程式為：

$$\frac{1}{s} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_1^{(\ell)} \\ \bar{\mathbf{P}}_2^{(\ell)} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{P}}_M^{(\ell)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{D}}_{\ell k}^{11} & \hat{\mathbf{D}}_{\ell k}^{12} & \cdots & \hat{\mathbf{D}}_{\ell k}^{1M} \\ \hat{\mathbf{D}}_{\ell k}^{21} & \hat{\mathbf{D}}_{\ell k}^{22} & \cdots & \hat{\mathbf{D}}_{\ell k}^{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathbf{D}}_{\ell k}^{M1} & \hat{\mathbf{D}}_{\ell k}^{M2} & \cdots & \hat{\mathbf{D}}_{\ell k}^{MM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_1^{(k)} \\ \tilde{\mathbf{F}}_2^{(k)} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{F}}_M^{(k)} \end{Bmatrix} \tag{3.14}$$

(3.14)中：

$$\bar{\mathbf{P}}_i^{(\ell)} = \left(\tilde{P}_i^{(1)}, \tilde{P}_i^{(2)}, \dots, \tilde{P}_i^{(N-1)}, 0 \right)^T, \quad \tilde{\mathbf{F}}_i^{(k)} = \left(\tilde{F}_i^{(1)}, \tilde{F}_i^{(2)}, \dots, \tilde{F}_i^{(N)} \right) \tag{3.15}$$

$$\tilde{P}_i^{(\ell)} = \tilde{P} \left(b_i + a_i x^{(\ell)} \right), \quad \tilde{F}_i^{(k)} = \tilde{F}_i \left(\xi^{(k)}, s \right) \tag{3.16}$$



$$\hat{\mathbf{D}}_{\ell k}^{ij} = \begin{bmatrix} D_{11}^{ij} & D_{12}^{ij} & \cdots & D_{1N}^{ij} \\ C_{21}^{ij} & C_{22}^{ij} & \cdots & D_{2N}^{ij} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{N-1,1}^{ij} & D_{N-1,2}^{ij} & \cdots & D_{N-1,N}^{ij} \\ \delta_{ij} & \delta_{ij} & \cdots & \delta_{ij} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$D_{\ell k}^{ij} = \frac{s\mu\kappa_1^2}{Nc_1} \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\cos(m\varphi^{(k)})\sin(m\theta^{(\ell)})}{m} + \frac{\mu}{2N} \frac{U_{22}\left(s\left|b_i + a_i x^{(\ell)} - (b_j + a_j \xi^{(k)})\right|/c_1\right)}{(b_j + a_j \xi^{(k)}) - (b_i + a_i x^{(\ell)})} \delta_{ij} \quad (3.18)$$

由矩陣方程式(3.14)可計算 $\tilde{F}_i^{(k)}$ ，將 $\tilde{F}_i^{(k)}$ 代入(2.77)得轉換域應力強度因子 \tilde{K}_I 為：

$$\begin{aligned} \tilde{K}_I(b_i + a_i, s) &= \frac{\mu}{1-\nu} \frac{1}{2N} \sqrt{\frac{\pi}{a_i}} \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \tilde{F}_i^{(k)} \cot \frac{\varphi^{(k)}}{2} \\ \tilde{K}_I(b_i - a_i, s) &= \frac{\mu}{1-\nu} \frac{(-1)^N}{2N} \sqrt{\frac{\pi}{a_i}} \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \tilde{F}_i^{(k)} \tan \frac{\varphi^{(k)}}{2} \end{aligned} \quad (3.19)$$

(3.19)的推導已利用(3.7)之關係式：

$$L_{22}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} L_{22}(y_1) = \mu \left(4 \left(\frac{c_2}{y_1} \right)^2 - 2 - 4 \left(\frac{c_2}{y_1} \right)^2 - 2 \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 + 4 \right) = 2\mu \left(\frac{\kappa_1^2 - 1}{\kappa_1^2} \right) = \frac{\mu}{1-\nu} \quad (3.20)$$

對於 $\tilde{G}_i^{(k)}$ 的矩陣方程式，以垂直入射之橫波 $\sigma_{21} = -Q$ ，並將(3.10)代入(2.68)與

(2.72)可得：

$$\frac{1}{s} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{Q}}_1^{(\ell)} \\ \bar{\mathbf{Q}}_2^{(\ell)} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{Q}}_M^{(\ell)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_{\ell k}^{11} & \hat{\mathbf{C}}_{\ell k}^{12} & \cdots & \hat{\mathbf{C}}_{\ell k}^{1M} \\ \hat{\mathbf{C}}_{\ell k}^{21} & \hat{\mathbf{C}}_{\ell k}^{22} & \cdots & \hat{\mathbf{C}}_{\ell k}^{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathbf{C}}_{\ell k}^{M1} & \hat{\mathbf{C}}_{\ell k}^{M2} & \cdots & \hat{\mathbf{C}}_{\ell k}^{MM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_1^{(k)} \\ \tilde{\mathbf{G}}_2^{(k)} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{G}}_M^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

(3.21)中：

$$\bar{\mathbf{Q}}_i^{(\ell)} = (\tilde{Q}_i^{(1)}, \tilde{Q}_i^{(2)}, \dots, \tilde{Q}_i^{(N-1)}, 0)^T, \quad \tilde{\mathbf{G}}_i^{(k)} = (\tilde{G}_i^{(1)}, \tilde{G}_i^{(2)}, \dots, \tilde{G}_i^{(N)}) \quad (3.22)$$



$$\tilde{Q}_i^{(\ell)} = \tilde{Q}(b_i + a_i x^{(\ell)}), \tilde{G}_i^{(k)} = \tilde{G}_i(\xi^{(k)}, s) \quad (3.23)$$

$$\hat{C}_{lk}^{ij} = \begin{bmatrix} C_{11}^{ij} & C_{12}^{ij} & \cdots & C_{1N}^{ij} \\ C_{21}^{ij} & C_{22}^{ij} & \cdots & C_{2N}^{ij} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N-1,1}^{ij} & C_{N-1,2}^{ij} & \cdots & C_{N-1,N}^{ij} \\ \delta_{ij} & \delta_{ij} & \cdots & \delta_{ij} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$C_{lk}^{ij} = \frac{s\mu}{Nc_2} \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\cos(m\varphi^{(k)}) \sin(m\theta^{(\ell)})}{m} + \frac{\mu}{2N} \frac{U_{11}\left(s|b_i + a_i x^{(\ell)} - (b_j + a_j \xi^{(k)})|/c_2\right)}{b_j + a_j \xi^{(k)} - (b_i + a_i x^{(\ell)})} \delta_{ij} \quad (3.25)$$

由矩陣方程式(3.21)可計算 $\tilde{G}_i^{(k)}$ ，將 $\tilde{G}_i^{(k)}$ 代入(2.77)得轉換域應力強度因子 \tilde{K}_{II} 為：

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{II}(b_i + a_i, s) &= \frac{\mu}{1-\nu} \frac{1}{2N} \sqrt{\frac{\pi}{a_i}} \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \tilde{G}_i^{(k)} \cot \frac{\varphi^{(k)}}{2} \\ \tilde{K}_{II}(b_i - a_i, s) &= \frac{\mu}{1-\nu} \frac{(-1)^N}{2N} \sqrt{\frac{\pi}{a_i}} \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \tilde{G}_i^{(k)} \tan \frac{\varphi^{(k)}}{2} \end{aligned} \quad (3.26)$$

(3.26)的推導已利用(3.6)之關係式：

$$L_{11}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} L_{11}(y_1) = \mu \left(4 \left(\frac{c_2}{y_1} \right)^2 - 2 \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 - 4 \left(\frac{c_2}{y_1} \right)^2 - 2 + 4 \right) = \frac{\mu}{1-\nu} \quad (3.27)$$

矩陣方程式(3.14)與(3.21)考慮的平面波為垂直入射，若平面波以波速 c 延方向 $\mathbf{n} = (\cos \phi, -\sin \phi)^T$ 入射(如圖 3.1)，且於 $t = 0$ 作用於裂縫尖端 $x_1 = b_i - a_i$ ，則斜入射之平面波可表示為：

$$\sigma = -P(\phi) H \left(x_1 - (b_i - a_i) + \frac{ct}{\cos \phi} \right) = -P(\phi) H \left(t - \left(1 - \frac{x_1}{b_i - a_i} \right) \frac{(b_i - a_i) \cos \phi}{c} \right) \quad (3.28)$$

由 Wu [7] 可得(3.28)中 $P(\phi) = P(\lambda + 2\mu \sin^2 \phi) / \rho c_1^2$ ，對(3.28)取 Laplace 對 t 轉換：



$$\tilde{\sigma} = -\frac{\tilde{P}(\phi)}{s} \exp\left(-s\left(1 - \frac{x_1}{b_i - a_i}\right) \frac{(b_i - a_i) \cos \phi}{c_1}\right) \quad (3.29)$$

對於斜入射平面波之問題，可將(3.14)與(3.21)的 \tilde{P}/s 與 \tilde{Q}/s 以(3.29)替代，則可求斜入射平面波之待定函數 $\tilde{F}_i^{(k)}$ 與 $\tilde{G}_i^{(k)}$ ，代入(3.19)與(3.26)可得轉換域之應力強度子。

3.3 數值結果

本節利用 3.2 節介紹的數值方法求轉換域 $\tilde{\mathbf{K}}$ ，再以數值反 Laplace 轉換(2.80)求時域 \mathbf{K} ，以 Durbin [29]建議參數 $S_0 = 0.4$ 與 $T = 20$ 與收斂性測試得到的參數 $N = 180$ 與 $N_s = 90$ 計算平面應變(plane strain)、單裂縫、雙共線裂縫與三共線裂縫於縱波與橫波作用下的應力強度因子。

3.3.1 收斂性測試

由上述可知，求應力強度因子需使用 N 階 Gauss-Chebyshev 積分法則與 N_s 項級數，因此需針對參數 N 與 N_s 進行探討並得到適合的 N 與 N_s ，考慮垂直入射($\phi = 0^\circ$)縱波作用於長 $2a$ 的單裂縫(圖 3.1)，以參數 $S_0 = 0.4$ 、 $T = 20$ 、 $N_s = 90$ 、 $N = 120$ 、 180 、 230 計算波松比 $\nu = 0.25$ 之應力強度因子並與 Thau 與 Lu [2]比較如圖 3.2~3.4：

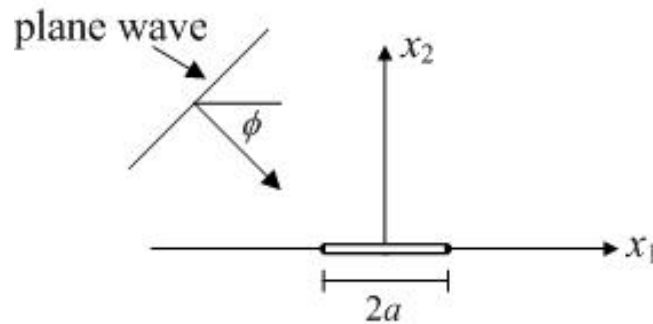


圖 3.1 單裂縫示意圖

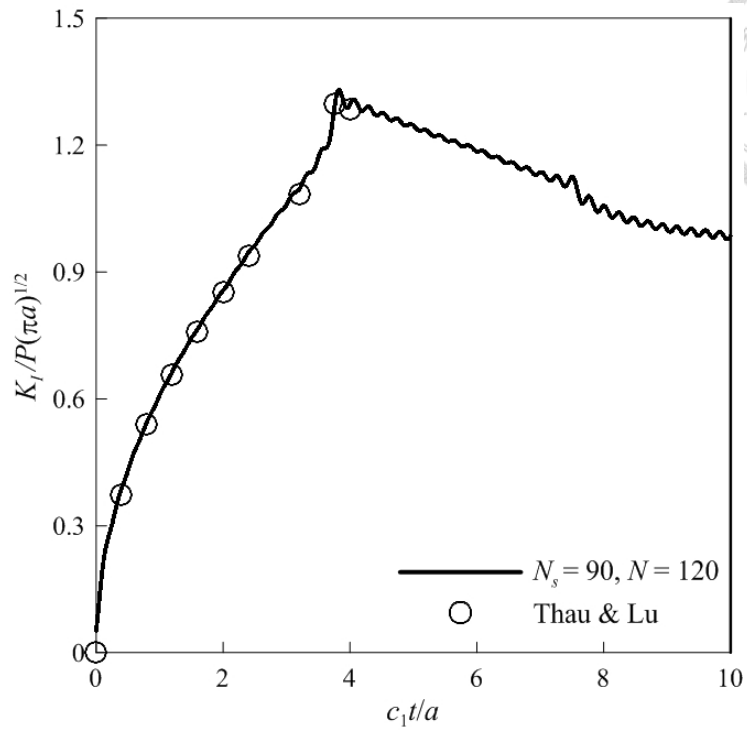


圖 3.2 單裂縫受垂直入射縱波之應力強度因子($N_s = 90$ 與 $N = 120$)

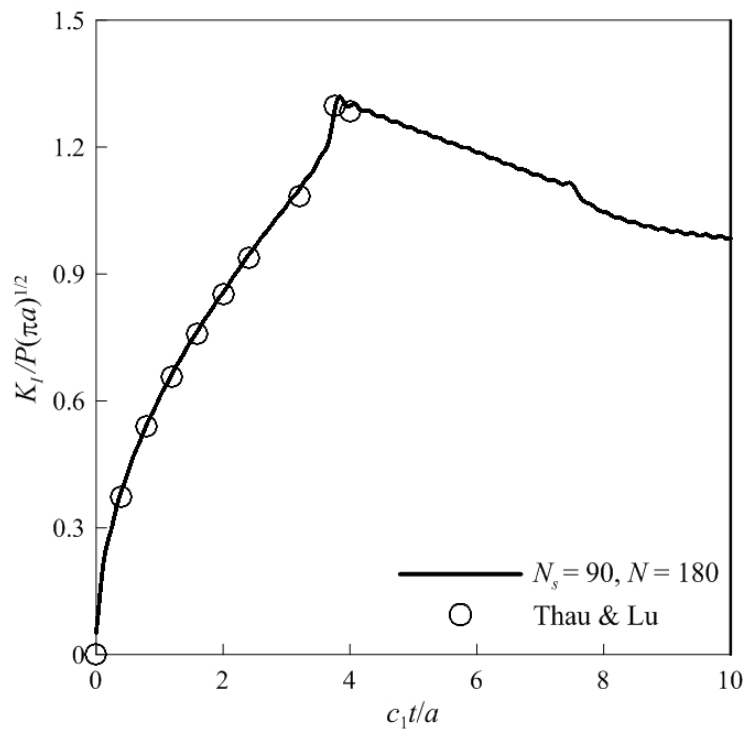


圖 3.3 單裂縫受垂直入射縱波之應力強度因子($N_s = 90$ 與 $N = 180$)

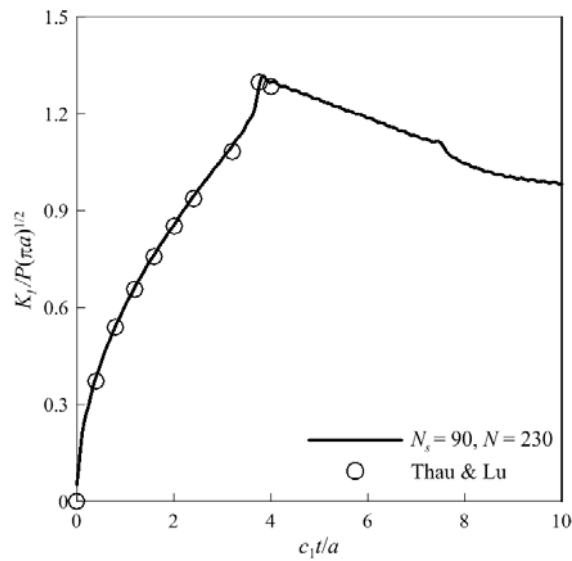


圖 3.4 單裂縫受垂直入射縱波之應力強度因子($N_s = 90$ 與 $N = 230$)

為方便討論，令 $K'_I = K_I / P\sqrt{\pi a}$ 、 $t' = c_1 t / a$ 。由圖 3.2~3.4 可得：固定 $N_s = 90$ 、 N 取 180 與 230 的應力強度因子 K'_I 一致，且與 Thau 與 Lu [2] 計算的應力強度因子 K'_I 吻合，而 N 取 120 時， K'_I 於 $t' = 3.6 \sim 10$ 出現鋸齒狀。由於 N 取 180 與 230 的 K'_I 一致，所以固定 $N = 180$ 、 N_s 取 50 與 230，計算單裂縫受垂直入射縱波之應力強度因子 K'_I ，如圖 3.5~3.6：

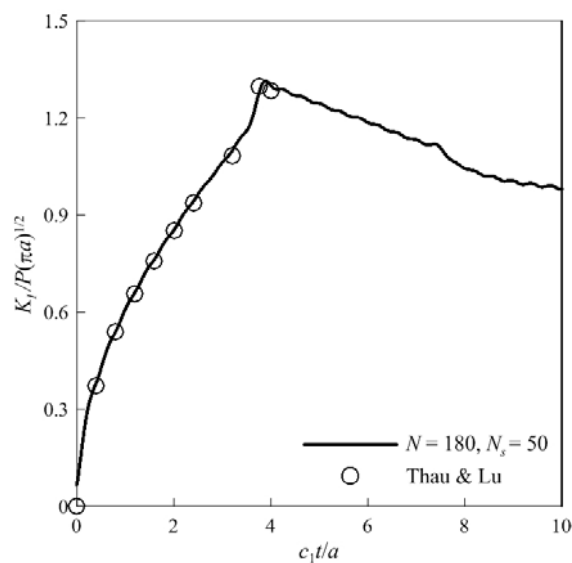


圖 3.5 單裂縫受垂直入射縱波之應力強度因子($N = 230$ 與 $N_s = 50$)



由圖 3.5 與 3.6 可知：圖 3.5，取 $N=180$ 與 $N_s=50$ 時，應力強度因子 K_I' 於 $t'=4 \sim 10$ 有連續的小波紋，代表計算 K_I' 需使用 50 項以上的 N_s 。圖 3.6，取 $N=180$ 與 $N_s=150$ 時， K_I' 於 $t'=3.6 \sim 10$ 有較大的鋸齒狀，為探討此問題，以 $N_s=180$ 與 $N=350$ 計算單裂縫受垂直入射縱波之 K_I' 如圖 3.7：

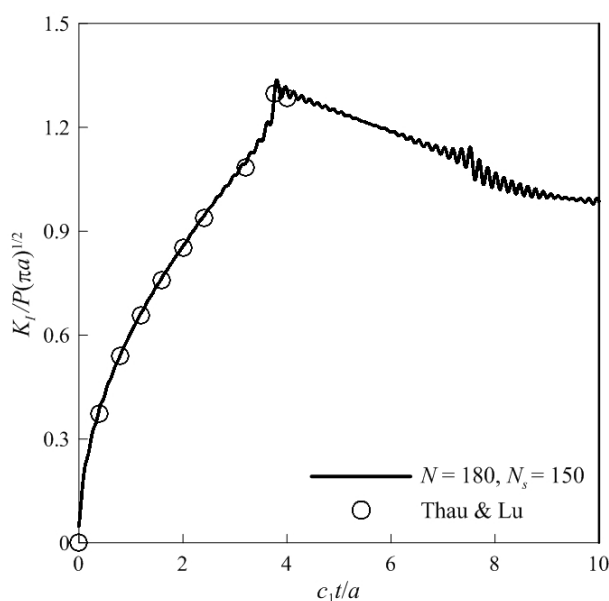


圖 3.6 單裂縫受垂直入射縱波之應力強度因子($N=180$ 與 $N_s=150$)

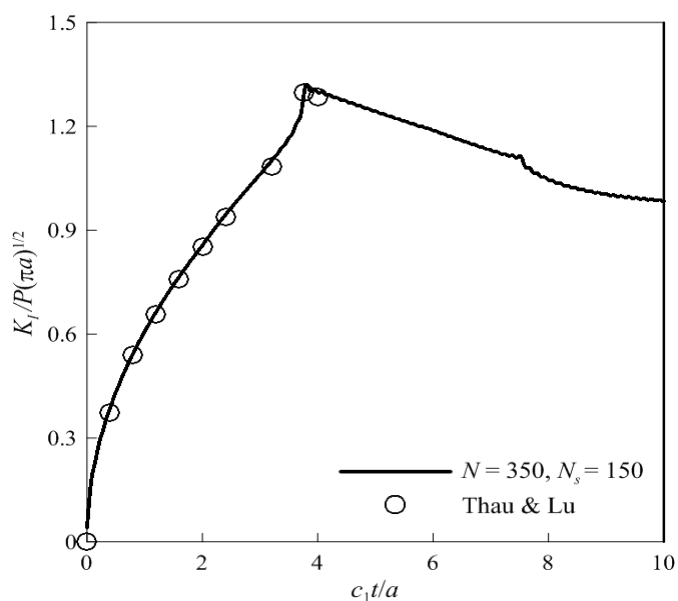


圖 3.7 單裂縫受垂直入射縱波之應力強度因子($N=350$ 與 $N_s=150$)

由圖 3.6~3.7 計算可知：當 N_s 增加， N 也需增加使計算精度增加。比較圖 3.3 與圖 3.7 得： K'_I 於 $t'=6\sim 10$ 時，圖 3.7 的 K'_I 較圖 3.3 平滑。由上述計算可得結論：利用 Durbin [29] 數值反 Laplace 轉換計算 K'_I 需搭配適合的 N_s 與 N ，較多項的 N_s 與 N 合適組合可得較好的計算結果，但計算時間過長，因此本章之數值計算以 $N=180$ 與 $N_s=90$ 做為計算參數。

3.3.2 斜入射縱波作用於單裂縫的應力強度因子

考慮單裂縫問題如圖 3.1，當縱波以方向 $\mathbf{n} = (\cos \phi, -\sin \phi)^T$ 入射，且於 $t=0$ 作用於 $x_1 = -a$ ，入射波形式可由 (3.29) 得 $\tilde{\sigma} = -\tilde{P}(\phi) \exp(-s(1+x_1/a)a \cos \phi/c_1)/s$ ，以入射角 $\phi = 90^\circ$ 、 77.3° 、 60° 與波松比 $\nu = 0.25$ ，計算裂縫尖端 $x_1 = \pm a$ 的應力強度因子 $K'_I = K_I/P(\phi)\sqrt{\pi a}$ 與 $K'_{II} = K_{II}/P(\phi)\sqrt{\pi a}$ 並與 Thau 與 Lu [2] 比較如圖 3.8~3.11：

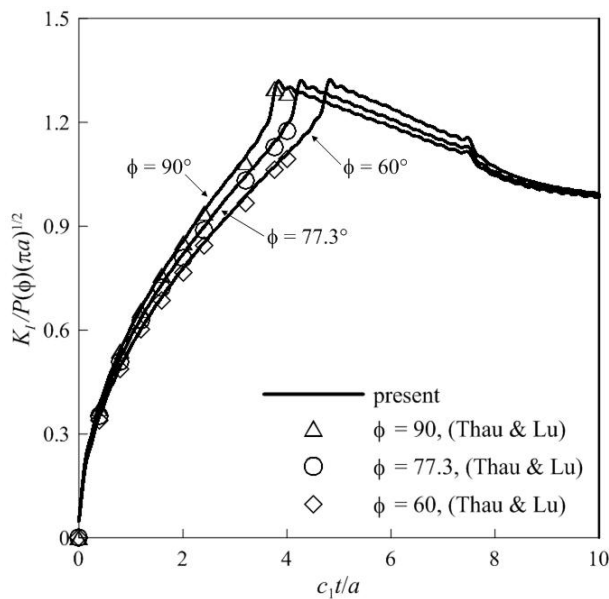


圖 3.8 斜入射縱波作用於單裂縫，裂縫尖端 $x_1 = -a$ 的應力強度因子 K'_I

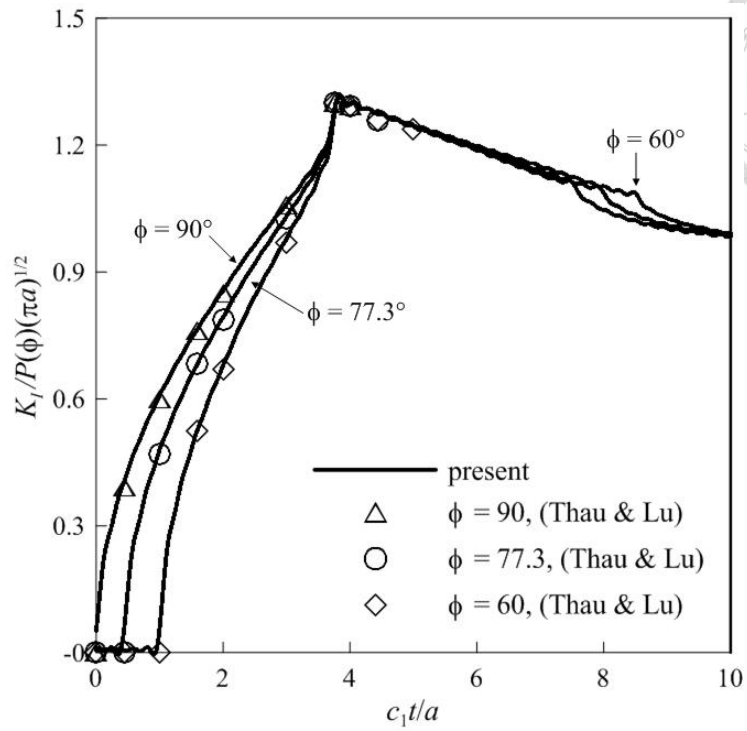


圖 3.9 斜入射縱波作用於單裂縫，裂縫尖端 $x_1 = a$ 的應力強度因子 K_I'

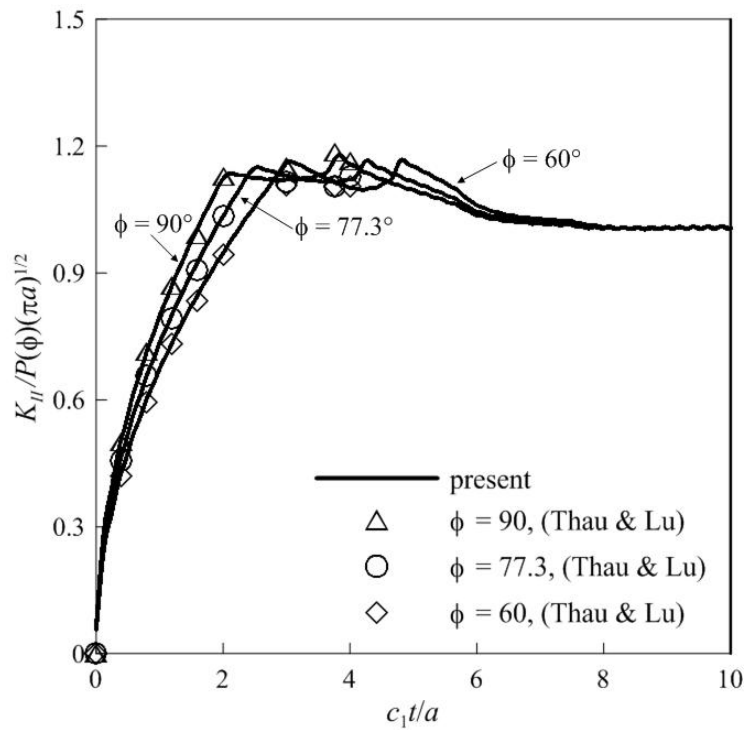


圖 3.10 斜入射縱波作用於單裂縫，裂縫尖端 $x_1 = -a$ 的應力強度因子 K_{II}'

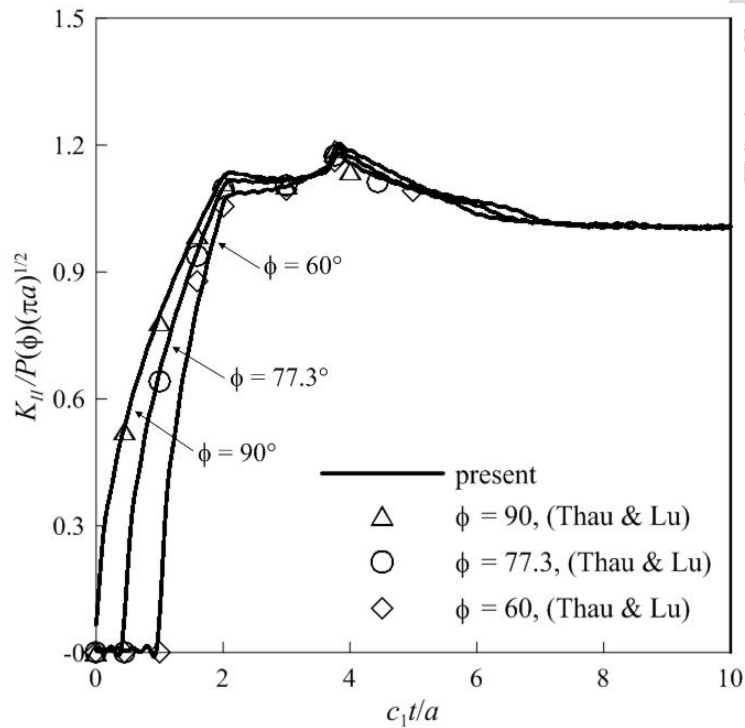


圖 3.11 斜入射縱波作用於單裂縫，裂縫尖端 $x_1 = a$ 的應力強度因子 K_{II}'

由圖 3.8~3.11 可知，本文計算之應力強度因子 K_I' 與 K_{II}' 與 Thau 與 Lu [2] 符合。

其中，圖 3.8 與 3.9 為 K_I' 的歷時反應，其結果顯示：以不同入射角 ϕ 計算之應力強度因子 K_I' 的峰值皆為 1.32，且發生於表面波由 $x_1 = \pm a$ 到達 $x_1 = \mp a$ ，其對應之時間為 $t' = c_1 t / a = 3.77 + 2 \cos \phi$ 與 $t' = 3.77$ 對於 $x_1 = -a$ 與 $x_1 = a$ 。表面波一次反射(表面波由 $x_1 = \mp a$ 到 $x_1 = \pm a$ 再反射回 $x_1 = \mp a$)可發現 K_I' 的第二個折點，其對應之時間為 $t' = 7.54$ 與 $t' = 7.54 + 2 \cos \phi$ 對於 $x_1 = -a$ 與 $x_1 = a$ ，當入射角 ϕ 越小，第二個折點的 K_I' 越大。

圖 3.10~3.11 為 K_{II}' 的歷時反應(圖中 $\phi = 90^\circ$ 為垂直入射橫波，且以其靜態值無因次化應力強度因子)。結果顯示：當縱波由 $x_1 = \pm a$ 到 $x_1 = \mp a$ ，應力強度因子 K_{II}'

產生折點，此時應力強度因子的斜率絕對值降低，並於表面波抵達時產生應力強度因子 K'_{II} 的極值。裂縫尖端 $x_1 = a$ 的應力強度因子 K'_{II} 峰值為 1.17，裂縫尖端 $x_1 = -a$ 的應力強度因子 K'_{II} 峰值隨入射角 ϕ 減少而緩慢增加，其峰值為 1.20、1.19 與 1.18 對於入射角為 $\phi = 60^\circ$ 、 77.3° 與 90° 。

考慮波松比 $\nu = 0.25$ 的單裂縫問題如圖 3.1，計算裂縫受垂直入射 ($\phi = 90^\circ$) 縱波 $-P$ 的應力強度因子 $K'_I = K_I / P\sqrt{\pi a}$ 與裂縫受垂直入射 ($\phi = 90^\circ$) 橫波 $-Q$ 的應力強度因子 $K'_{II} = K_{II} / Q\sqrt{\pi a}$ ，並與同條件但裂縫為半無限長裂縫之結果 (Wu [7]) 比較如圖 3.12 與 3.13。

圖 3.12 為波松比 $\nu = 0.25$ 等向性介質包含單裂縫或半無限長裂縫受垂直入射縱波 $-P$ ，裂縫尖端的應力強度因子 K'_I ，結果顯示：(1) 當縱波由單裂縫的裂縫尖端 $x_1 = \pm a$ 到 $x_1 = \mp a$ 時 ($c_1 t/a = t_p$)，單裂縫與半無限長裂縫的裂縫尖端應力強度因子一致，但 $c_1 t/a = t_p \sim t_s$ 時，縱波的影響使單裂縫裂縫尖端應力強度因子增加，即縱波由裂縫尖端 $x_1 = \pm a$ 到 $x_1 = \mp a$ 使應力強度因子 K'_I 上升。(2) 當橫波由單裂縫的裂縫尖端 $x_1 = \pm a$ 到 $x_1 = \mp a$ 時 ($c_1 t/a = t_s$)，單裂縫之裂縫尖端應力強度因子 K'_I 較半無限長裂縫之裂縫尖端應力強度因子 K'_I 大，即縱波與橫波由裂縫尖端 $x_1 = \pm a$ 到 $x_1 = \mp a$ 皆使應力強度因子 K'_I 上升。(3) 當表面波由單裂縫的裂縫尖端 $x_1 = \pm a$ 到 $x_1 = \mp a$ 時 ($c_1 t/a = t_R$)，單裂縫之裂縫尖端應力強度因子 K'_I 達到峰值。(4) 圖 3.12 中之 $2t_R$ 為表面波一次反射的時間點，由前述可知，在此時間點可發現第二個折點。

圖 3.13 為波松比 $\nu = 0.25$ 等向性介質包含單裂縫或半無限長裂縫受垂直入射橫波 $-Q$ ，裂縫尖端的應力強度因子 K'_{II} ，結果顯示：(1) 當縱波由單裂縫的裂縫尖端 $x_1 = \pm a$ 到 $x_1 = \mp a$ 時 ($c_1 t/a = t_p$)，單裂縫之裂縫尖端應力強度因子 K'_{II} 開始下降，半無限長裂縫之裂縫尖端應力強度因子 K'_{II} 持續上升。

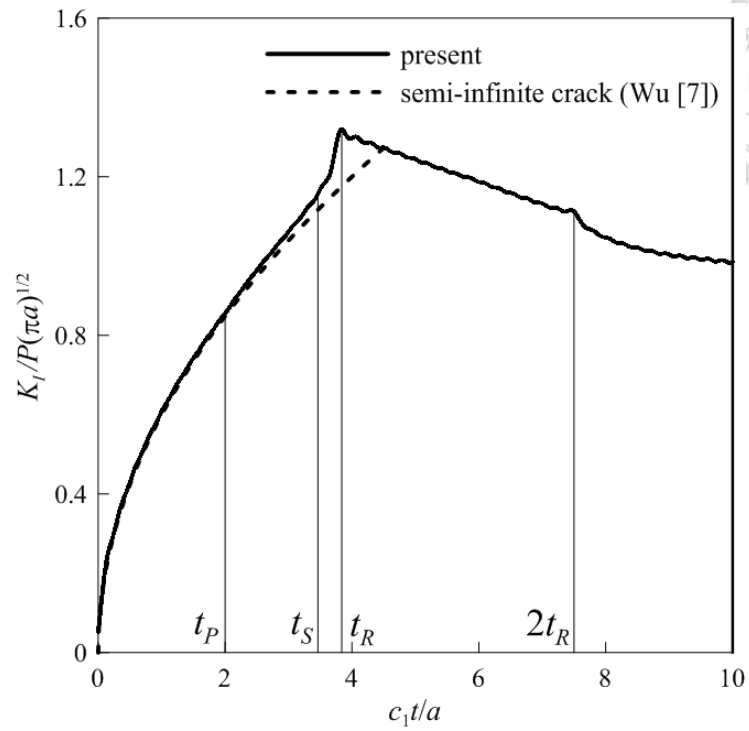


圖 3.12 垂直入射縱波作用於單裂縫或半無限長裂縫，裂縫尖端的應力強度因子 K_I'

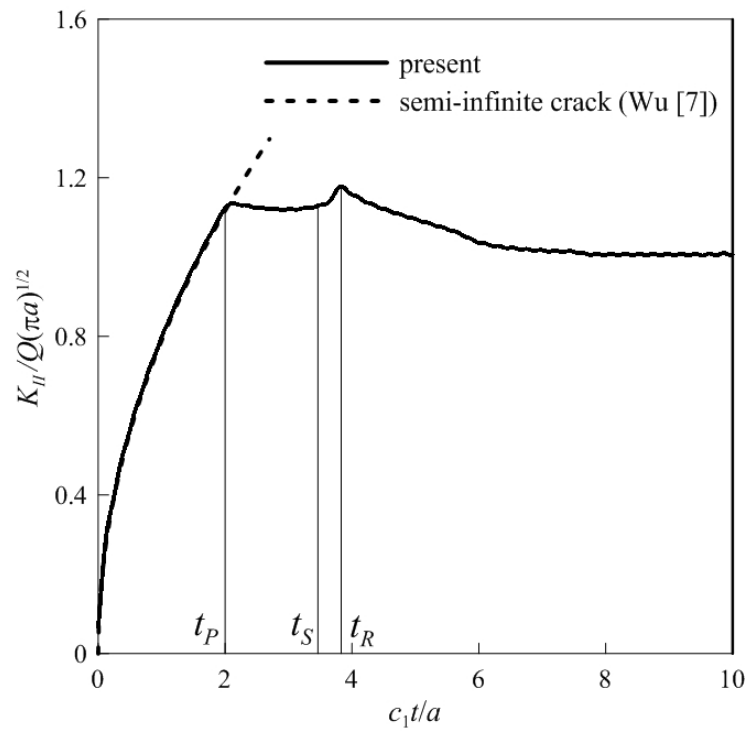


圖 3.13 垂直入射橫波作用於單裂縫或半無限長裂縫，裂縫尖端的應力強度因子 K_{II}'



3.3.3 單裂縫於不同波松比的應力強度因子

考慮單裂縫(圖 3.1)受垂直入射($\phi = 0^\circ$)的縱波 $-P$ ，以波松比 $\nu = 0、0.35、0.48$ 與 0.49 ，計算裂縫尖端的應力強度因子 $K'_I = K_I/P\sqrt{\pi a}$ ，如圖 3.14~3.15。其中， $\nu = 0.48$ 與 0.49 以 $N = 350$ 、 $N_s = 100$ 、 $S_0 = 1/8$ 與 $T = 40$ 做為計算參數。

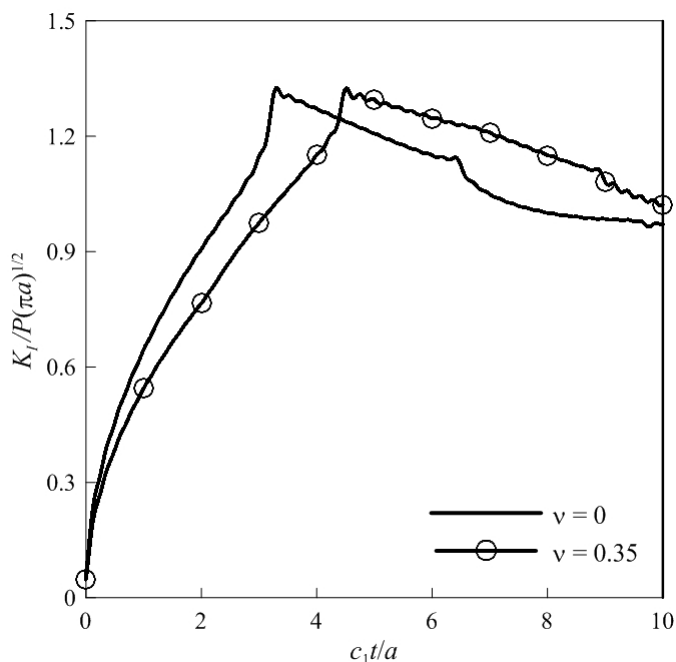


圖 3.14 單裂縫於波松比 $\nu = 0$ 與 0.35 之應力強度因子 K'_I

比較圖 3.14 與圖 3.15 可得： ν 為 $0、0.35$ 與 0.48 時，應力強度因子 K'_I 峰值為 $1.33、1.32$ 與 1.37 ，對應之時間 $t' = c_1 t / a = 3.31、3.31、4.52$ 與 14.88 ，其時間點為表面波由 $x_1 = \pm a$ 到 $x_1 = \mp a$ 。當 ν 為 0.49 時，應力強度因子 K'_I 峰值為 1.40 ，發生於表面波一次反射之時間 $t' = 21.63$ 。當首次表面波由另尖端抵達時， ν 為 0 與 0.35 (縱波兩次繞射時間較表面波一次繞射時間慢)之 K'_I 開始下降，但 ν 為 0.48 與 0.49 (縱波兩次繞射時間較表面波一次繞射時間快)之 K'_I 持續增加。當 ν 越趨近於 0.5 ，體積模數(bulk modulus)越大，縱波波速 c_1 越快，表面波波速與橫波波速 c_2 的比值越



接近 1，因此可知表面波由另尖端抵達時，較慢的縱波波速($\nu=0$ 與 0.35)之應力強度因子 K'_I 為峰值點，但較快的縱波波速($\nu=0.48$ 與 0.49)於表面波由另尖端抵達時，應力強度因子 K'_I 仍持續上升。

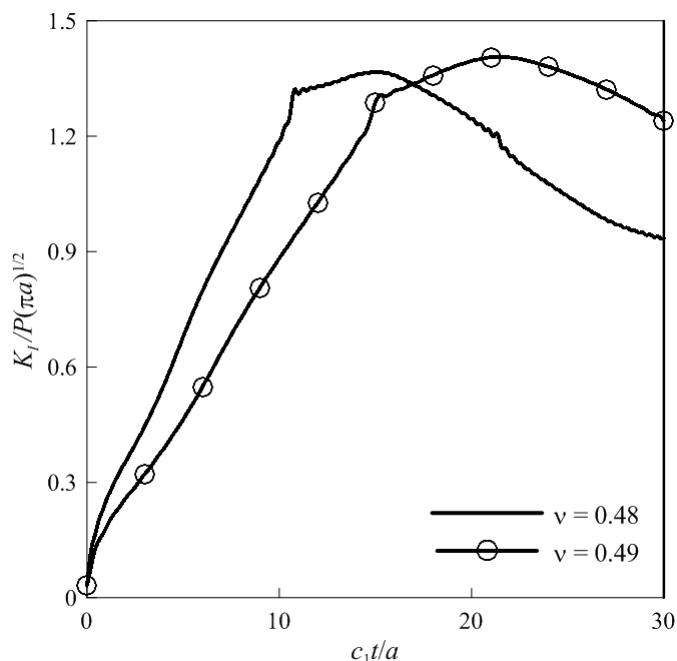


圖 3.15 單裂縫於波松比 $\nu = 0.48$ 與 0.49 之應力強度因子 K'_I

3.3.4 等長共線雙裂縫於不同裂縫間距的應力強度因子

考慮共線雙裂縫，裂縫長為 $2a_1$ 與 $2a_2$ ，內裂縫尖端之間距為 δ_D ，如圖 3.16。以等長裂縫 $a_1 = a_2 = a$ ，不同裂縫間距 $\delta_D / 2a = 0.2$ 、0.5 與 1.5，波松比 $\nu = 0.29$ ，計算垂直入射縱波 $-P$ 的應力強度因子 $K'_I = K_I / P\sqrt{\pi a}$ 與垂直入射橫波 $-Q$ 的應力強度因子 $K'_II = K_{II} / Q\sqrt{\pi a}$ ，如圖 3.17~3.21：

圖 3.17 為等長共線雙裂縫與間距 $\delta_D / 2a = 0.5$ ，裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 K'_I ，Itou [4] 計算的應力強度因子也繪於圖中，結果顯示本文之計算結果與 Itou [4] 之趨勢吻合。圖 3.18 為外裂縫尖端 A 於等長共線雙裂縫與不同間距 $\delta_D / 2a$ 之應力



強度因子 K'_I ，其峰值為 1.30~1.31，其對應之時間為第一折點(表面波由裂縫尖端 B 到尖端 A)對於 $\delta_D/2a=0.5$ 、1.5，而 $\delta_D/2a=0.2$ 之應力強度因子 K'_I 峰值發生於第二折點。圖 3.19 為內裂縫尖端 B 於等長共線雙裂縫與不同間距 $\delta_D/2a$ 之應力強度因子 K'_I ，其峰值為 1.58、1.34 與 1.30 對於 $\delta_D/2a=0.2$ ，0.5 與 1.5，其對應之時間為表面波由尖端 A 到尖端 B 對於 $\delta_D/2a=0.5$ 與 1.5，而 $\delta_D/2a=0.2$ 之應力強度因子 K'_I 於表面波由尖端 A 到尖端 B 後仍持續上升，並於 $t'=c_1a/t=5.52$ 產生峰值。

圖 3.20 為外裂縫尖端 A 於等長共線雙裂縫與不同間距 $\delta_D/2a$ 之應力強度因子 K'_{II} ，其峰值為 1.31、1.23 與 1.15 對於 $\delta_D/2a=0.2$ 、0.5 與 1.5，其對應之時間為表面波由裂縫尖端 C 到尖端 A 對於 $\delta_D/2a=0.2$ 、0.5，而 $\delta_D/2a=1.5$ 之 K'_{II} 峰值發生於表面波由尖端 B 到尖端 A。圖 3.21 為內裂縫尖端 B 於等長共線雙裂縫與不同間距 $\delta_D/2a$ 之 K'_{II} ，其峰值為 1.47、1.28 與 1.17 對於 $\delta_D/2a=0.2$ ，0.5 與 1.5，其對應之時間為表面波由尖端 A 到尖端 B。由上述討論可觀察得：等長共線雙裂縫於兩裂縫越接近時，尖端 B 的 K'_I 與 K'_{II} 峰值越大，內裂縫尖端之間距的改變對於尖端 A 之應力強度因子 K'_I 峰值影響小，但尖端 A 的應力強度因子 K'_{II} ，隨內裂縫尖端間距越近而增大。

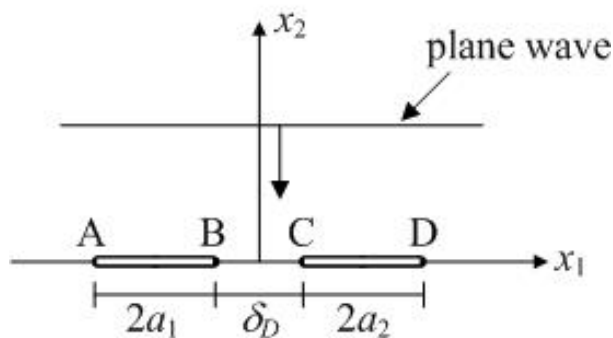


圖 3.16 共線雙裂縫示意圖

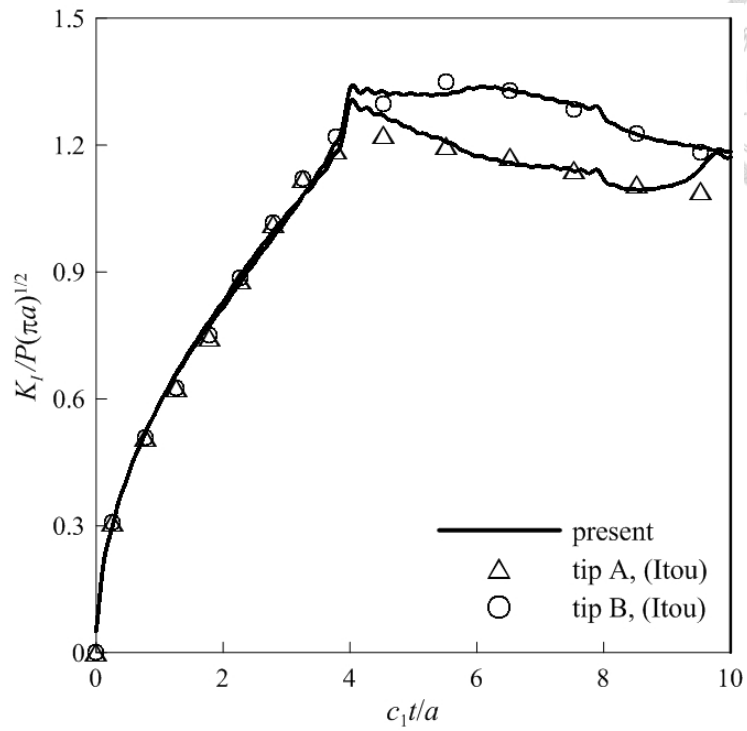
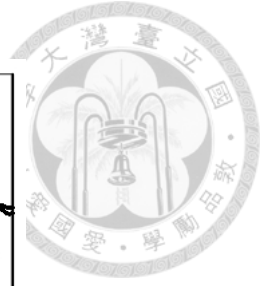


圖 3.17 等長雙共線與間距 $\delta_D/2a = 0.5$ 之應力強度因子 K_I'

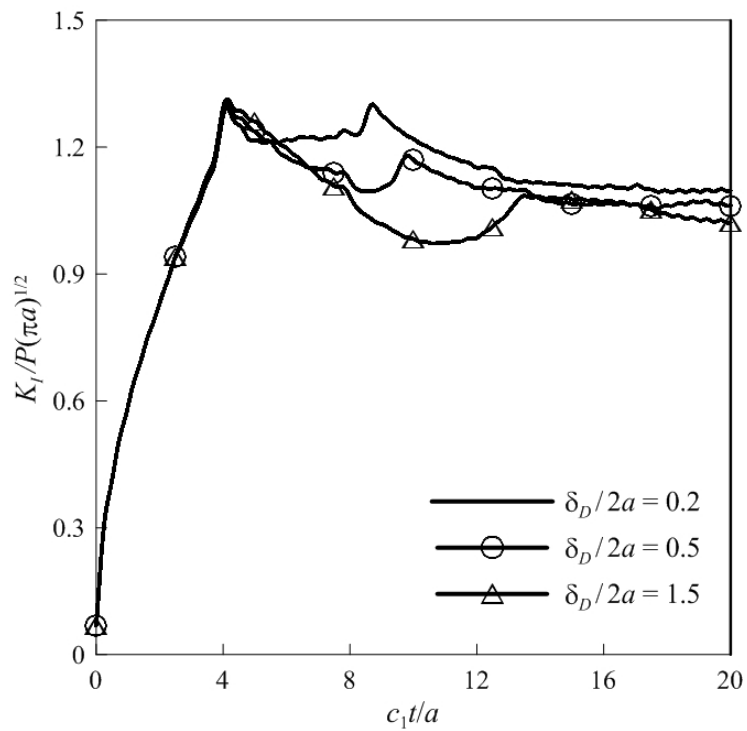


圖 3.18 等長雙共線與不同間距 δ_D ，裂縫尖端 A 應力強度因子 K_I'

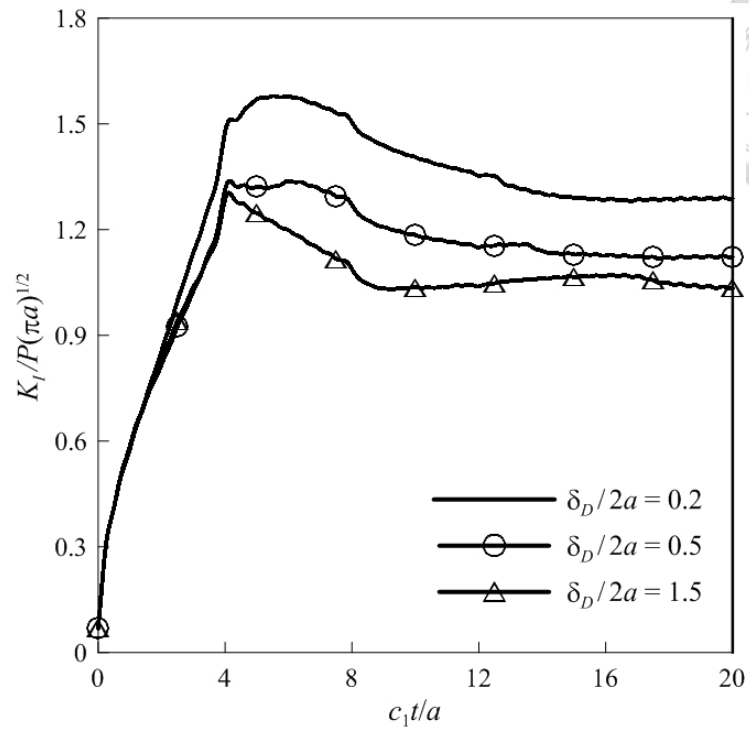
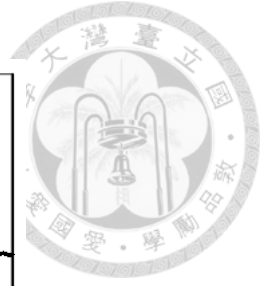


圖 3.19 等長雙共線與不同間距 δ_D ，裂縫尖端 B 應力強度因子 K_I'

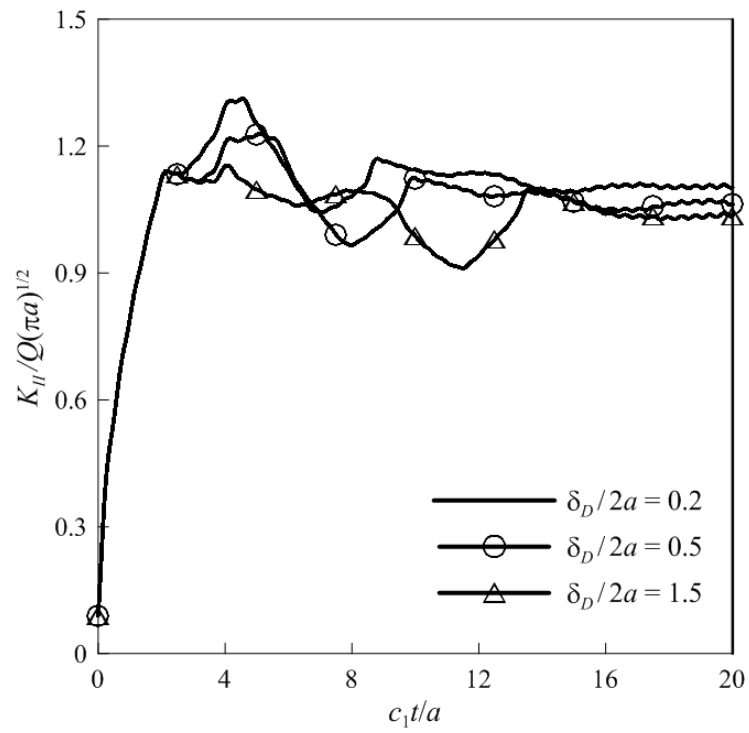


圖 3.20 等長雙共線與不同間距 δ_D ，裂縫尖端 A 應力強度因子 K_{II}'

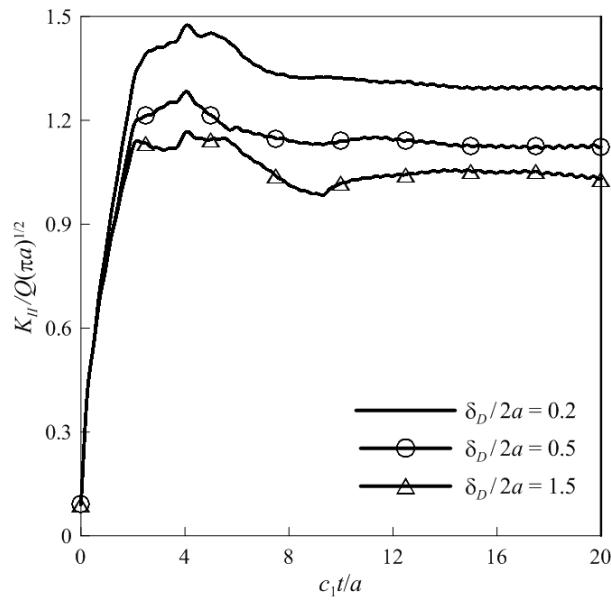


圖 3.21 等長雙共線與不同間距 δ_D ，裂縫尖端 B 應力強度因子 K_{II}'

3.3.5 不等長共線雙裂縫於同裂縫間距的應力強度因子

考慮共線雙裂縫，如圖 3.16，以等裂縫中心間距 $(b_2 - b_1)/a = 5$ ，固定裂縫長 a_1 使裂縫長比 $a_2/a_1 = 1.0$ 、 1.5 與 2.0 ，波松比 $\nu = 0.29$ ，計算垂直入射縱波 $-P$ 與垂直入射橫波 $-Q$ 的應力強度因子，如圖 3.22~3.25：

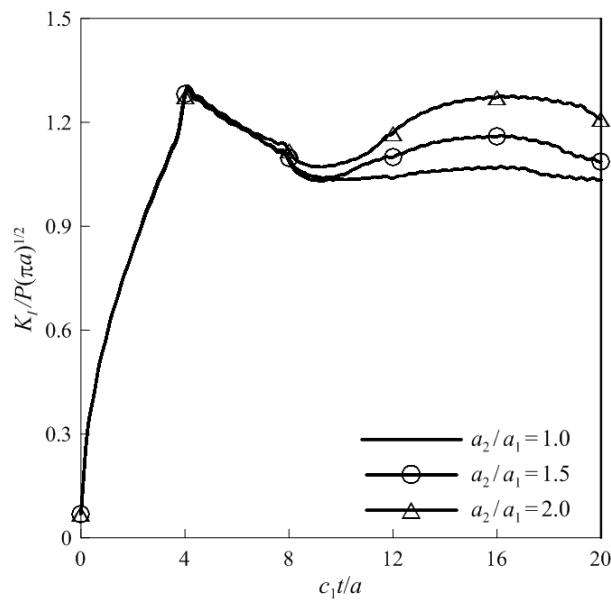


圖 3.22 不等長雙共線裂縫與等裂縫中心間距，裂縫尖端 B 的應力強度因子 K_I'

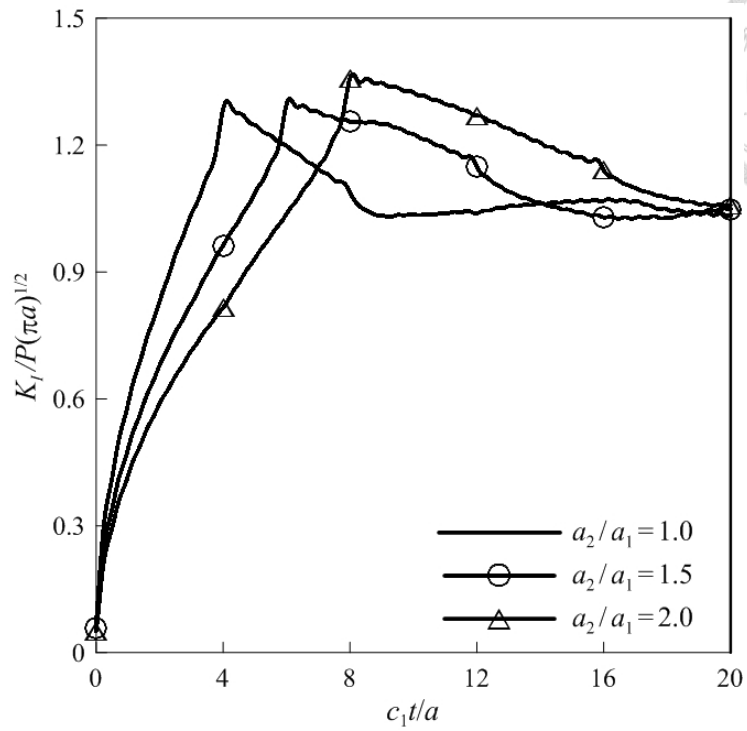


圖 3.23 不等長雙共線裂縫與等裂縫中心間距，裂縫尖端 C 的應力強度因子 K_I'

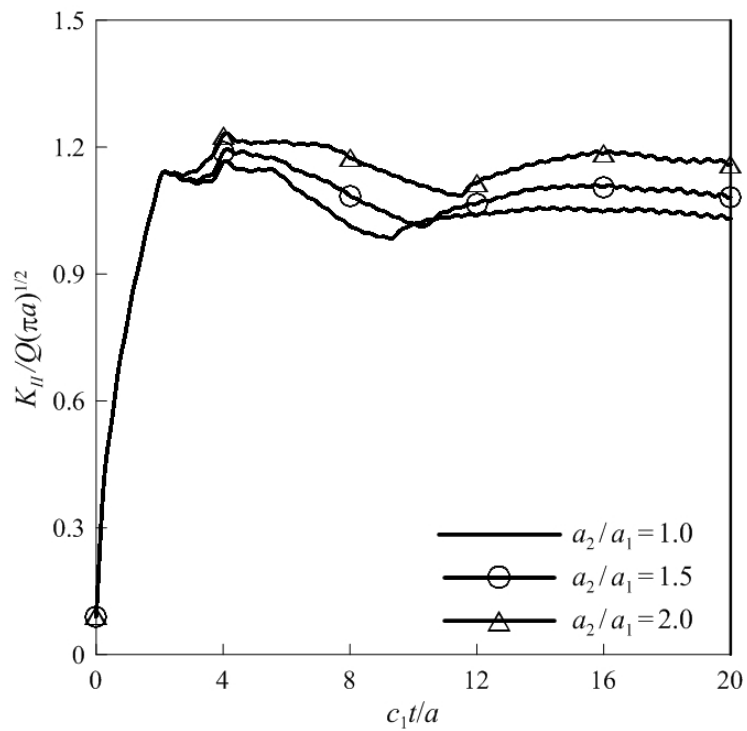


圖 3.24 不等長雙共線裂縫與等裂縫中心間距，裂縫尖端 B 的應力強度因子 K_{II}'

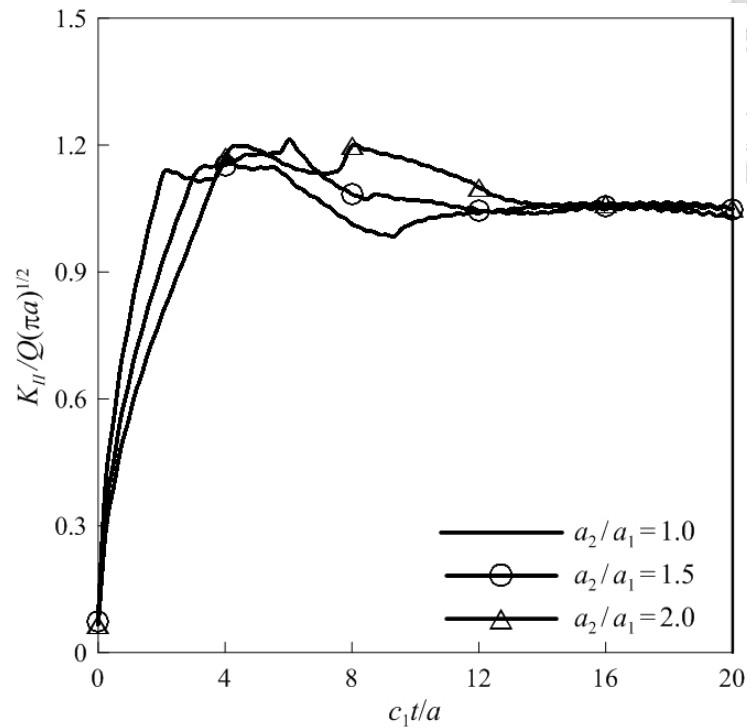
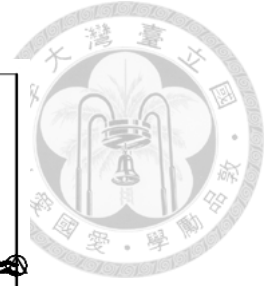


圖 3.25 不等長雙共線裂縫與等裂縫中心間距，裂縫尖端 C 應力的強度因子 K_{II}'

圖 3.22 為裂縫中心等距與不同裂縫長比 a_2/a_1 (a_1 固定)，裂縫尖端 B 的應力強度因子 K_I' ，結果顯示：應力強度因子 K_I' 峰值為 1.29~1.30，且對應之時間點皆為表面波由裂縫尖端 A 抵達尖端 B 之時間點。當 $t' = c_1 t / a > 10$ ，最大動態應力強度因子較單裂縫的靜態值高出 7%、16% 與 28% 對於 $a_2/a_1 = 1.0$ 、1.5 與 2.0，即裂縫尖端 B 與 C 的間距越長、裂縫尖端 B 的動態應力強度因子於長時間時越接近單裂縫的靜態值。圖 3.23 為裂縫中心等距與不同裂縫長比 a_2/a_1 (a_1 固定)，裂縫尖端 C 的應力強度因子 K_I' ， K_I' 峰值為 1.30、1.31 與 1.36 對於 $a_2/a_1 = 1.0$ 、1.5 與 2.0，由於 a_2 增加，表面波由裂縫尖端 D 到尖端 C 所需時間亦增加，使 K_I' 峰值越晚發生。依計算可得：對於不等長共線雙裂縫與固定裂縫中心間距，其內裂縫尖端 B 與 C 的應力強度因子 K_I' 峰值為 1.29~1.31，但裂縫長比 $a_2/a_1 = 2.0$ 時，裂縫尖端 C 之 K_I'



峰值為 1.36。

圖 3.24 為裂縫中心等距與不同裂縫長比 a_2/a_1 (a_1 固定)，裂縫尖端 B 的應力強度因子 K'_{II} ，應力強度因子 K'_{II} 峰值為 1.17、1.19 與 1.23 對於 $a_2/a_1=1.0$ 、1.5 與 2.0， K'_{II} 峰值隨 a_2/a_1 增加而緩慢增加，其峰值發生的時間點皆為表面波由裂縫尖端 A 到達尖端 B 的時間點。圖 3.25 為裂縫中心等距與不同裂縫長比 a_2/a_1 (a_1 固定)，裂縫尖端 C 的應力強度因子 K'_{II} ， K'_{II} 峰值為 1.17、1.21 與 1.20 對於 $a_2/a_1=1.0$ 、1.5 與 2.0，其峰值亦發生於表面波由裂縫尖端 D 到尖端 C 的時間點。當時 $t'=20$ 時，動態應力強度因子皆趨近於單裂縫的靜態解，其值為 1.03 對於 $a_2/a_1=1.0$ 、1.05 對於 $a_2/a_1=1.5$ 與 2.0。

3.3.6 等長共線三裂縫於不同裂縫間距的應力強度因子

考慮共線三裂縫，裂縫長皆為 $2a$ ，裂縫尖端與鄰近尖端間距為 δ_D ，如圖 3.26。以不同裂縫間距 $\delta_D/2a=0.5$ 與 1.5，波松比 $\nu=0.29$ ，計算垂直入射縱波 $-P$ 的應力強度因子與垂直入射橫波 $-Q$ 的應力強度因子， $K'_I = K_I/P\sqrt{\pi a}$ 與 $K'_{II} = K_{II}/Q\sqrt{\pi a}$ 如圖 3.27~3.30。

圖 3.27 為等長共線三裂縫於裂縫間距 $\delta_D/2a=0.5$ 的應力強度因子 K'_I ，其峰值為 1.30、1.34 與 1.37 對於裂縫尖端 A、B 與 C，裂縫尖端 A 之 K'_I 峰值發生於表面波由裂縫尖端 B 到尖端 A，其第二個折點為表面波由裂縫尖端 D 到尖端 A，裂縫尖端 B 之 K'_I 峰值發生於表面波由裂縫尖端 A 到尖端 B，裂縫尖端 C 之 K'_I 峰值發生於表面波由裂縫尖端 F 到尖端 C。圖 3.28 為等長共線三裂縫與裂縫間距

$\delta_D/2a=1.5$ 的應力強度因子 K'_I ， K'_I 峰值發生於表面波由裂縫尖端 B 到 A、由裂縫尖端 A 到 B、由裂縫尖端 D 到 C 對於裂縫尖端 A、B 與 C，其峰值為 1.30~1.31，即裂縫尖端與尖端的間距為 $\delta_D/2a=1.5$ 時，各尖端的最大應力強度因子變化不大。

圖 3.29 為等長共線三裂縫與裂縫間距 $\delta_D/2a=0.5$ 的應力強度因子 K'_{II} ，其峰值為 1.23、1.28 與 1.35 對於裂縫尖端 A、B 與 C，裂縫尖端 A 之 K'_{II} 峰值發生於縱波由裂縫尖端 D 到尖端 A，裂縫尖端 B 之 K'_{II} 峰值發生於表面波由裂縫尖端 A 到尖端 B，裂縫尖端 C 之 K'_{II} 峰值發生於縱波由裂縫尖端 F 到尖端 C，圖 3.30 為等長共線三裂縫與裂縫間距 $\delta_D/2a=1.5$ 的應力強度因子 K'_{II} ， K'_{II} 峰值發生於表面波由裂縫尖端 B 到 A、由裂縫尖端 A 到 B、由裂縫尖端 D 到 C 對於裂縫尖端 A、B 與 C，其峰值為 1.15、1.17 與 1.17 對於裂縫尖端 A、B 與 C。由上述計算可得結論：對於等長共線三裂縫，當表面波由同裂縫的左(右)尖端出發到右(左)尖端 $t' = c_1 a / t = 2c_1 / c_R$ 時，可觀察得應力強度因子極值，但裂縫尖端與鄰近裂縫尖端的間距越近時，應力強度因子的峰值可能發生於 $t' > 2c_1 / c_R$ 。

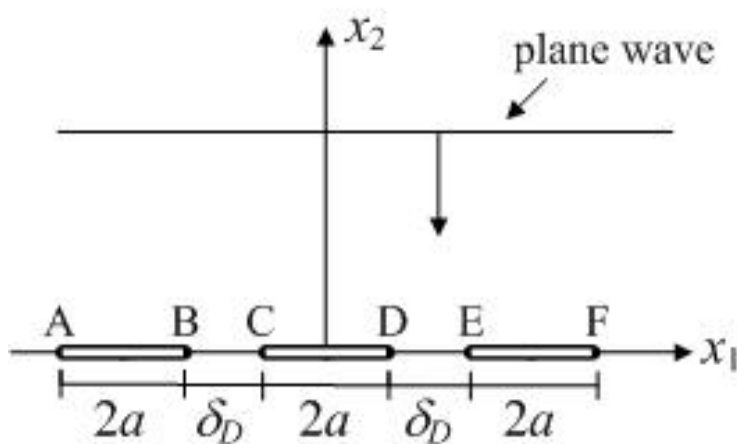


圖 3.26 共線三裂縫示意圖

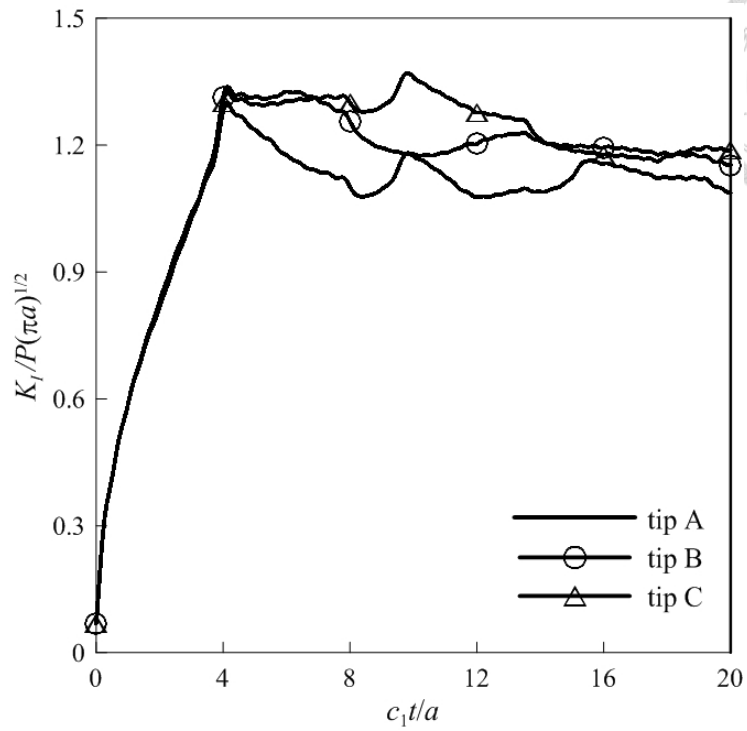
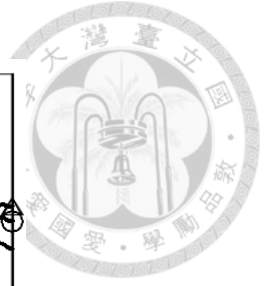


圖 3.27 等長三共線裂縫與裂縫間距 $\delta_D/2a = 0.5$ 的應力強度因子 K_I'

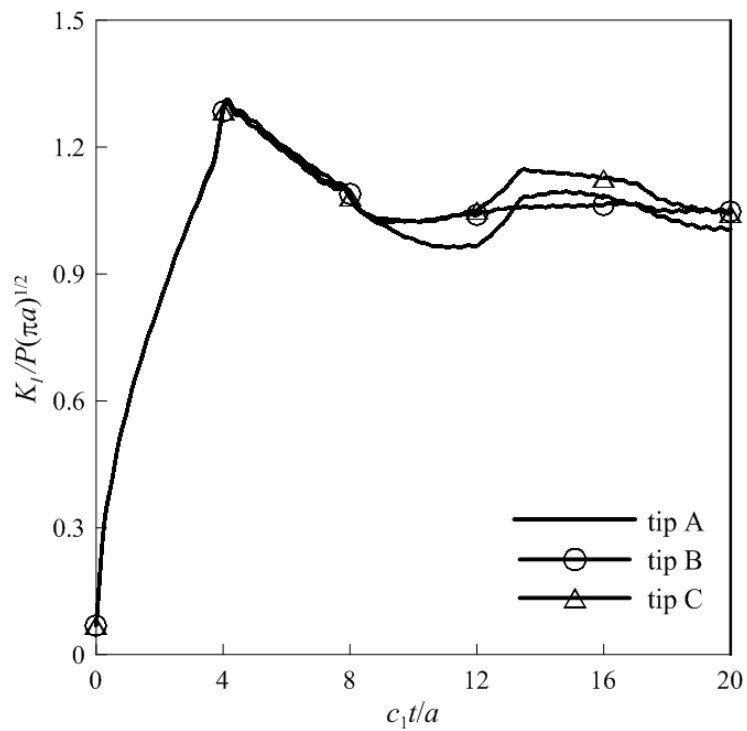


圖 3.28 等長三共線裂縫與裂縫間距 $\delta_D/2a = 1.5$ 的應力強度因子 K_I'

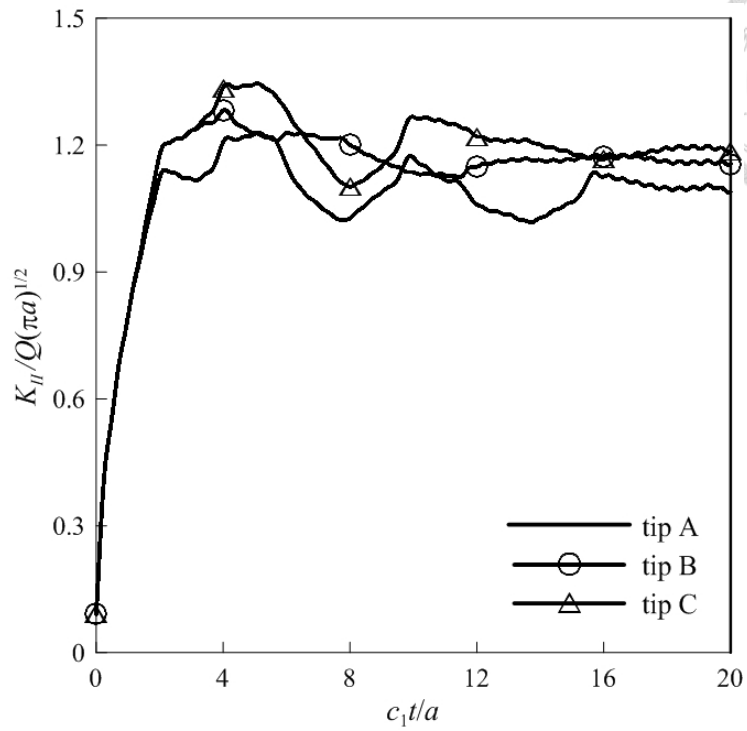
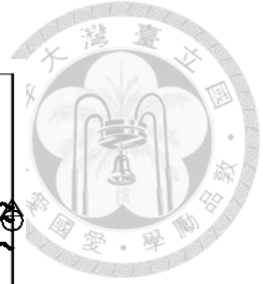


圖 3.29 等長三共線裂縫與裂縫間距 $\delta_D/2a = 0.5$ 的應力強度因子 K'_{II}

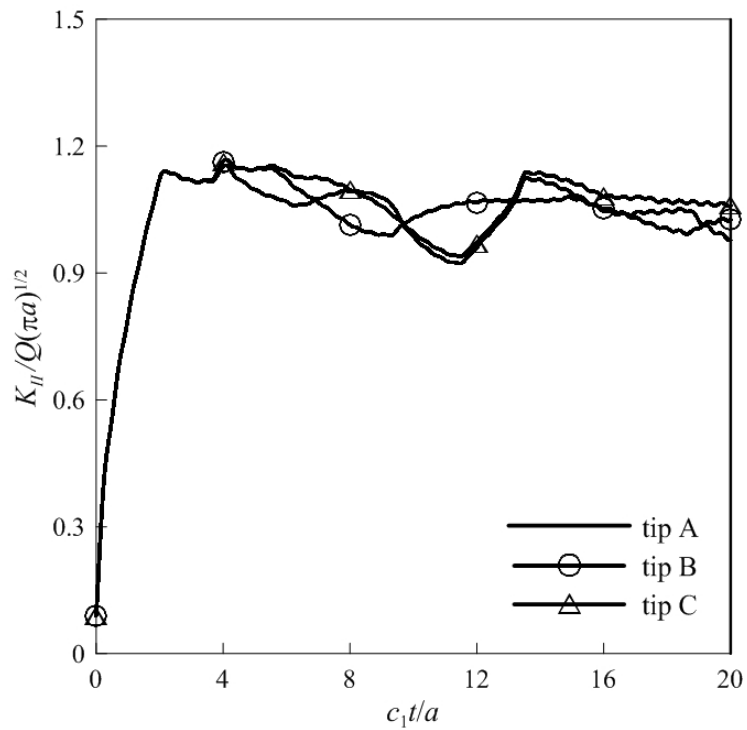


圖 3.30 等長三共線裂縫與裂縫間距 $\delta_D/2a = 1.5$ 的應力強度因子 K'_{II}

第四章 共線裂縫於正交性介質的應力強度因子

第三章已討論共線裂縫於等向性介質的應力強度因子，對於共線裂縫於正交性介質的問題，其待函數的矩陣方程式與(3.14)、(3.21)一致，只需導得正交性介質 $\tilde{\mathbf{L}}$ ，則可計算共線裂縫於正交性介質的應力強度因子。本章第 1 節推導與討論正交性介質的 $\tilde{\mathbf{L}}$ ，第 2 節利用(3.14)~(3.26)計算 $\tilde{\mathbf{K}}$ ，第 3 節計算單裂縫、共線雙裂縫與共線三裂縫在不同正交性介質的應力強度因子並討論其數值結果。

4.1 正交性介質 $\tilde{\mathbf{L}}$ 之推導與分析

當正交性材料的對稱面與座標軸重疊時，對於進平面問題的非零彈性常數為：

C_{11} 、 C_{22} 、 C_{66} 、 C_{12} ，將彈性常數代入六維特徵值問題(2.10)可得：

$$\begin{bmatrix} C_{11}^* + C_{66}p^2 & (C_{12} + C_{66})p \\ (C_{12} + C_{66})p & C_{66}^* + C_{22}p^2 \end{bmatrix} \mathbf{a}(w) = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

(4.1)式 $C_{ij}^* = C_{ij} - \rho w^2 \delta_{ij}$ ，由(4.1)得 p 的四次方程式：

$$C_{22}C_{66}p^4 + [C_{11}^*C_{22} + C_{66}C_{66}^* - (C_{12} + C_{66})^2]p^2 + C_{11}^*C_{66}^* = 0 \quad (4.2)$$

(4.2)為 p^2 的二次方程式，由(4.2)可得 $p_1(y_1)$ 與 $p_2(y_1)$ 關係式：

$$p_1^2(y_1) + p_2^2(y_1) = -\frac{C_{11}^*C_{22} + C_{66}C_{66}^* - (C_{12} + C_{66})^2}{C_{22}C_{66}} \quad (4.3)$$

$$p_1^2(y_1)p_2^2(y_1) = \frac{C_{11}^*C_{66}^*}{C_{22}C_{66}}$$

令 $l_d = l_b^2 - 4l_a l_c$ ，其中 $l_a = C_{22}C_{66}$ 、 $l_b = C_{11}^*C_{22} + C_{66}C_{66}^* - (C_{12} + C_{66})^2$ 、 $l_c = C_{11}^*C_{66}^*$ ，

p_1 與 p_2 的特性可分類為(Wu [25])：

(1) $l_d < 0$ 時， l_c 必大於 0： $p_1 = k_1 + ik_2$ 、 $p_2 = -k_1 + ik_2$ ，其中 $k_1 > 0$ 、 $k_2 > 0$ 。



(2) $l_d > 0$ 、 $l_b > 0$ 與 $l_c > 0$ 時： $p_1 = ik_1$ 、 $p_2 = ik_2$ ，其中 $k_1 > 0$ 、 $k_2 > 0$ 。

(3) $l_c < 0$ 時， l_d 必小於0： $p_1 = ik_1$ 、 $p_2 = k_2$ ，其中 $k_1 > 0$ 。

(4) $l_d < 0$ 、 $l_b < 0$ 與 $l_c > 0$ 時： $p_1 = k_1$ 、 $p_2 = k_2$ 。

上述之 k_1 與 k_2 為實數。複數解情況(1)與(2)時，可得 $p_1 + p_2$ 與 $p_1 p_2$ 為：

$$\begin{aligned} p_1(y_1) + p_2(y_1) &= i\sqrt{Y(y_1)/C_{22}C_{66}} \\ p_1(y_1)p_2(y_1) &= -\sqrt{C_{11}^*C_{66}^*/C_{22}C_{66}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

(4.4)中：

$$Y(y_1) = \left(\sqrt{C_{11}^*C_{22}} + \sqrt{C_{66}C_{66}^*} \right)^2 - (C_{12} + C_{66})^2 \quad (4.5)$$

特徵向量 $\mathbf{a}_\alpha(y_1)$ 可由(4.1)選為：

$$\mathbf{a}_\alpha(y_1) = \left(-(C_{66}^* + C_{22}p_\alpha^2), (C_{12} + C_{66})p_\alpha \right)^T, \quad \alpha = 1, 2 \quad (4.6)$$

(4.6)代入(2.9)：

$$\mathbf{b}_\alpha(y_1) = \left(C_{66}(\rho y_1^2 - C_{22}p_\alpha^2 + C_{12})p_\alpha, C_{22}C_{66}p_\alpha^2 - C_{12}C_{66}^* \right)^T, \quad \alpha = 1, 2 \quad (4.7)$$

將(4.6)與(4.7)代入(2.17)得 \mathbf{A} 與 \mathbf{B} ，再將 \mathbf{A} 與 \mathbf{B} 代入(2.25)且利用(4.3)與(4.4)得 \mathbf{L} 為 (Ting [26])：

$$\sqrt{C_{22}C_{66}^*}L_{11}(y_1) = \sqrt{C_{66}C_{11}^*}L_{22}(y_1) = \frac{X}{\sqrt{Y}}, \quad L_{12}(y_1) = L_{21}(y_1) = 0 \quad (4.8)$$

(4.8)中：

$$\begin{aligned} X &= (C_{11}^*C_{22} - C_{12}^2)\sqrt{C_{66}^*C_{66}} - \rho y_1^2 C_{66}\sqrt{C_{11}^*C_{22}} \\ Y &= \left(\sqrt{C_{11}^*C_{22}} + \sqrt{C_{66}^*C_{66}} \right)^2 - (C_{12} + C_{66})^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

將(4.9)代入(4.8)得(Dongye 與 Ting [30])：

$$\mathcal{G}_2 \sqrt{\frac{C_{22}}{C_{66}}} L_{11}(y_1) = \mathcal{G}_1 \sqrt{\frac{C_{11}}{C_{66}}} L_{22}(y_1) = \frac{Q}{\sqrt{Y}} \quad (4.10)$$

(4.10)中：



$$\begin{aligned}
Q &= g_2 (g_1^2 C_{11} C_{22} - C_{12}^2) - (1 - g_2^2) g_1 C_{66} \sqrt{C_{11} C_{22}} \\
Y &= (g_1 \sqrt{C_{11} C_{22}} + g_2 C_{66})^2 - (C_{12} + C_{66})^2 \\
g_\alpha &= \sqrt{1 - (y_1/c_\alpha)^2} = \sqrt{1 - (t_\alpha/t)^2}, \quad \alpha = 1, 2
\end{aligned} \tag{4.11}$$

由(4.10)與(4.11)可知， $L_{11}(y_1)$ 的奇異點為 $y_1 = c_2$ 與 $Y(y_1) = 0$ ，而 $L_{22}(y_1)$ 的奇異點為 $y_1 = c_1$ 與 $Y(y_1) = 0$ 。由於 $L_{11}(y_1)$ 與 $L_{22}(y_1)$ 難以直接求得Laplace轉換的解析解，因此以數值 Laplace 轉換求 \tilde{L}_{11} 與 \tilde{L}_{22} ，考慮 $Y(y_1) \neq 0$ 的情況，將(4.10)的 L_{11} 取 Laplace 對 t 轉換：

$$\begin{aligned}
\text{Re}[\tilde{L}_{11}(y_1)] &= \int_0^\infty \text{Re}[L_{11}(y_1)] e^{-st} dt = \int_{t_1}^\infty L_{11}(y_1) e^{-st} dt \\
&= t_1 \int_1^\infty L_{11}(y_1/t_1) e^{-st} dt
\end{aligned} \tag{4.12}$$

(4.12)之 $L_{11}(y_1/t_1)$ 可由(4.10)表為：

$$L_{11}\left(\frac{y_1}{t_1}\right) = \sqrt{\frac{C_{66}}{C_{22}}} \left(f_1''(t) - \text{Re} \left[\frac{f_2''(t)}{\hat{g}_2(t)} \right] \right) \tag{4.13}$$

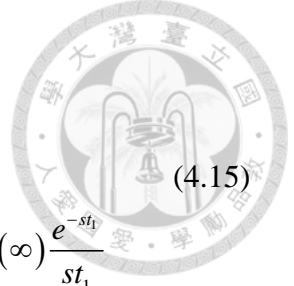
(4.13)中：

$$\begin{aligned}
f_1''(t) &= (\hat{g}_1^2(t) C_{11} C_{22} - C_{12}^2) \text{Re} \left[\frac{1}{\sqrt{Y}} \right], \quad \hat{g}_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}} \\
f_2''(t) &= \frac{\hat{g}_1(t)}{\sqrt{Y}} (1 - \hat{g}_2^2(t)) C_{66} \sqrt{C_{11} C_{22}}, \quad \hat{g}_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{\kappa_1}{t}\right)^2}
\end{aligned}$$

將(4.13)代入(4.12)：

$$\text{Re}[\tilde{L}_{11}(y_1)] = t_2 \frac{C_{66}}{\sqrt{C_{11} C_{22}}} (F_1'' + F_2'' + F_3'') \tag{4.14}$$

(4.14)中：



$$F_1'' = \int_1^\infty \left[f_1''(t) - \operatorname{Re} \left[\frac{f_2''(t) - f_2''(\kappa_1)}{\sqrt{1 - (\kappa_1/t)^2}} \right] - f_1''(\infty) \right] e^{-st_1 t} dt$$

$$F_2'' = - \int_1^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{t f_2''(\kappa_1)}{\sqrt{t^2 - \kappa_1^2}} \right] e^{-st_1 t} dt, \quad F_3'' = \int_1^\infty f_1''(\infty) e^{-st_1 t} dt = f_1''(\infty) \frac{e^{-st_1}}{st_1} \quad (4.15)$$

F_1'' 中， $-f_2''(\kappa_1)$ 是為了避開奇異點，使數值積分不會發散， $-f_1''(\infty)$ 是為了使數值積分收斂變快。 F_2'' 之奇異點為 $t = \kappa_1 = c_1/c_2 > 1$ ，因此 F_2'' 的積分需分段積分，並以變數變換得：

$$F_2'' = 2f_2''(\kappa_1) \left[\int_0^{\sqrt{\kappa_1-1}} \operatorname{Im} \left[\frac{\kappa_1 - u^2}{\sqrt{2\kappa_1 - u^2}} \right] e^{-st_1(\kappa_1 - u^2)} du - \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{u^2 + \kappa_1}{\sqrt{u^2 + 2\kappa_1}} \right] e^{-st_1(u^2 + \kappa_1)} du \right] \quad (4.16)$$

由上述推導可知， L_{11} 的 Laplace 轉換可藉由(4.14)~(4.16)與 Gauss 積分求得。

當 $Y(c_s) = 0$ ，繪圖可觀察 $c_s < y_1 < c_2$ 時 $\operatorname{Re}[L_{11}(y_1)] = 0$ ，其中 c_s 為慢剪力波(slow shear)波速，因此將(4.10)之 L_{11} 取 Laplace 對 t 轉換得：

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\tilde{L}_{11}(y_1)] &= \left(\int_0^{t_2} \operatorname{Re}[L_{11}(y_1)] e^{-st} dt + \int_{t_s}^\infty \operatorname{Re}[L_{11}(y_1)] e^{-st} dt \right) \\ &= t_1 \left(\int_1^{\kappa_1} \operatorname{Re}[L_{11}(y_1/t_1)] e^{-st_1 t} dt + \int_{\kappa_2}^\infty \operatorname{Re}[L_{11}(y_1/t_1)] e^{-st_1 t} dt \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

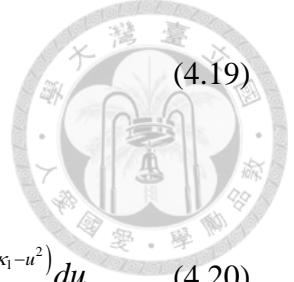
(4.17) 中， $t_s = x_1/c_s$ 、 $\kappa_2 = c_1/c_s$ 。將(4.14)代入(4.17)：

$$\operatorname{Re}[\tilde{L}_{11}(y_1)] = t_2 \frac{C_{66}}{\sqrt{C_{11}C_{22}}} (G_1'' + G_2'' + G_3'') \quad (4.18)$$

(4.18) 中：

$$G_1'' = \int_1^{\kappa_1} \left(f_1''(t) - \operatorname{Re} \left[\frac{t f_2''(t)}{\sqrt{t^2 - \kappa_1^2}} \right] \right) e^{-st_1 t} dt, \quad G_2'' = \int_{\kappa_2}^\infty \left(f_1''(t) - \operatorname{Re} \left[\frac{t f_2''(t)}{\sqrt{t^2 - \kappa_1^2}} \right] - f_1''(\infty) \right) e^{-st_1 t} dt$$

$$G_3'' = \int_{\kappa_2}^\infty f_1''(\infty) e^{-st_1 t} dt = f_1''(\infty) \frac{e^{-st_1}}{st_1}$$



(4.19)

(4.19)式 G_1'' 可由變數變換得：

$$G_1'' = 2 \int_0^{\sqrt{\kappa_1-1}} u \left[f_1''(\kappa_1 - u^2) - \text{Im} \left[\frac{(\kappa_1 - u^2) f_2''(\kappa_1 - u^2)}{u \sqrt{2\kappa_1 - u^2}} \right] \right] e^{-st_1(\kappa_1 - u^2)} du \quad (4.20)$$

以上述相同的步驟求 $\tilde{L}_{22}(y_1)$ ，考慮 $Y(y_1) \neq 0$ ，將(4.10)的 L_{22} 取 Laplace 對 t 轉

換得：

$$\begin{aligned} \text{Re}[\tilde{L}_{22}(y_1)] &= \int_0^\infty \text{Re}[L_{22}(y_1)] e^{-st} dt = \int_{t_1}^\infty L_{22}(y_1) e^{-st_1 t} dt \\ &= t_1 \int_1^\infty L_{22}(y_1/t_1) e^{-st_1 t} dt \end{aligned} \quad (4.21)$$

(4.21)中， $L_{22}(y_1/t_1)$ 可由(4.10)表為：

$$L_{22}\left(\frac{y_1}{t_1}\right) = \sqrt{\frac{C_{66}}{C_{11}}} \left(\frac{f_1'(t)}{\hat{\mathcal{G}}_1(t)} - f_2''(t) \right) \quad (4.22)$$

(4.22)中：

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= (\hat{\mathcal{G}}_1^2(t) C_{11} C_{22} - C_{12}^2) \text{Re} \left[\frac{\hat{\mathcal{G}}_2}{\sqrt{Y}} \right], \quad \hat{\mathcal{G}}_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}} \\ f_2''(t) &= (1 - \hat{\mathcal{G}}_2^2(t)) C_{66} \sqrt{C_{11} C_{22}} \text{Re} \left[\frac{1}{\sqrt{Y}} \right], \quad \hat{\mathcal{G}}_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{\kappa_1}{t}\right)^2} \end{aligned}$$

將(4.22)代入(4.21)：

$$\text{Re}[\tilde{L}_{22}(y_1)] = t_2 \frac{C_{66}}{C_{11}} (F_1' + F_2'' + F_3') \quad (4.23)$$

(4.23)中：

$$\begin{aligned} F_1' &= \int_1^\infty \left[\frac{f_1'(t) - f_1'(1)/t}{\sqrt{1 - (1/t)^2}} - f_2''(t) - f_1'(\infty) \right] e^{-st_1 t} dt \\ F_2'' &= \int_1^\infty \frac{f_2''(1)}{\sqrt{t^2 - 1}} e^{-st_1 t} dt = f_2''(1) K_0(st_1), \quad F_3' = \int_1^\infty f_1'(\infty) e^{-st_1 t} dt = f_1'(\infty) \frac{e^{-st_1}}{st_1} \end{aligned} \quad (4.24)$$

由上述推導可知， L_{22} 的 Laplace 轉換可藉由(4.22)~(4.24)與 Gauss 積分求得。



當 $Y(c_s)=0$ ，經繪圖亦可觀察於 $c_s < y_1 < c_2$ 時 $\text{Re}[L_{22}(y_1)]=0$ 。將(4.10)之 L_{22} 取

Laplace 對 t 轉換得：

$$\begin{aligned}\text{Re}[\tilde{L}_{22}(y_1)] &= \left(\int_0^{t_2} \text{Re}[L_{22}(y_1)] e^{-st} dt + \int_{t_s}^{\infty} \text{Re}[L_{22}(y_1)] e^{-st} dt \right) \\ &= t_1 \left(\int_1^{\kappa_1} \text{Re}[L_{22}(y_1/t_1)] e^{-st_1 t} dt + \int_{\kappa_2}^{\infty} \text{Re}[L_{22}(y_1/t_1)] e^{-st_1 t} dt \right)\end{aligned}\quad (4.25)$$

將(4.23)代入(4.25)：

$$\text{Re}[\tilde{L}_{22}(y_1)] = t_2 \frac{C_{66}}{C_{11}} (G_1^I + G_2^I + G_3^I) \quad (4.26)$$

(4.26)中：

$$\begin{aligned}G_1^I &= \int_1^{\kappa_1} \left(\frac{t f_1^I(t)}{\sqrt{t^2-1}} - f_2^I(t) \right) e^{-st_1 t} dt \\ G_2^I &= \int_{\kappa_2}^{\infty} \left(\frac{f_1^I(t)}{\hat{g}_1(t)} - f_2^I(t) - f_1^I(\infty) \right) e^{-st_1 t} dt \\ G_3^I &= \int_{\kappa_2}^{\infty} f_1^I(\infty) e^{-st_1 t} dt = f_1^I(\infty) \frac{e^{-st_1 \kappa_2}}{st_1}\end{aligned}\quad (4.27)$$

(4.27)式 G_1^I 可由變數變換得：

$$G_1^I = 2 \int_0^{\sqrt{\kappa_1-1}} \left[\frac{(u^2+1) f_1^I(u^2+1)}{\sqrt{u^2+2}} - u f_2^I(u^2+1) \right] e^{-st_1(u^2+1)} du \quad (4.28)$$

若慢剪力波存在，其波速須滿足 $Y(c_s)=0$ ，並由 Payton [31] 提出關係式：

$$\frac{c_s}{c_2} = \frac{1}{\kappa_3-1} \sqrt{\gamma_P (\kappa_3+1) - 2\kappa_3 (\kappa_1+1) + 2\sqrt{\kappa_3 (1+\kappa_1\kappa_3 - \gamma_P) (\kappa_1+\kappa_3 - \gamma_P)}} \quad (4.29)$$

(4.29)中：

$$\kappa_1 = \frac{C_{11}}{C_{66}}, \quad \kappa_3 = \frac{C_{22}}{C_{66}}, \quad \gamma_P = 1 + \kappa_1 \kappa_3 - \left(\frac{C_{12}}{C_{66}} + 1 \right)^2 \quad (4.30)$$

對於立方材料(cubic material) $\kappa_1 = \kappa_3$ ，(4.29)可改寫為：



$$\frac{c_s}{c_2} = \frac{1}{\kappa_1 - 1} \sqrt{(\kappa_1 + 1)(\gamma_P - 2\kappa_1) + 2 \left(\frac{C_{12}}{C_{66}} + 1 \right) \sqrt{\kappa_1(2\kappa_1 - \gamma_P)}} \quad (4.31)$$

如 c_s 存在(即 c_s 為實數)，(4.31)須滿足(4.32)與(4.33)：

$$2\kappa_1 - \gamma_P = \left(\frac{C_{12} - C_{11}}{C_{66}} + 2 \right) \frac{C_{11} + C_{12}}{C_{66}} > 0 \quad (4.32)$$

$$(\kappa_1 + 1)(\gamma_P - 2\kappa_1) + 2 \left(\frac{C_{12}}{C_{66}} + 1 \right) \sqrt{\kappa_1(2\kappa_1 - \gamma_P)} > 0 \quad (4.33)$$

為滿足(4.32)不等式，得：

$$A_p > 1, \quad A_p = 2C_{66}/(C_{11} - C_{12}) \quad (4.34)$$

(4.34)式 A_p 為異向性因子(anisotropy factor)。為證明不等式(4.33)於(4.34)滿足時成

立，將(4.33)改寫為：

$$2 \left(\frac{C_{12}}{C_{66}} + 1 \right) \sqrt{\kappa_1} - (\kappa_1 + 1) \sqrt{(2\kappa_1 - \gamma_P)} > 0 \quad (4.35)$$

考慮：

$$\begin{aligned} & \left[2 \left(\frac{C_{12}}{C_{66}} + 1 \right) \sqrt{\kappa_1} - (\kappa_1 + 1) \sqrt{(2\kappa_1 - \gamma_P)} \right] \left[2 \left(\frac{C_{12}}{C_{66}} + 1 \right) \sqrt{\kappa_1} + (\kappa_1 + 1) \sqrt{(2\kappa_1 - \gamma_P)} \right] \\ &= 4 \left(\frac{C_{12}}{C_{66}} + 1 \right)^2 \frac{C_{11}}{C_{66}} - \left(1 + \frac{C_{11}}{C_{66}} \right)^2 \left[\left(1 + \frac{C_{12}}{C_{66}} \right)^2 - \left(\frac{C_{11}}{C_{66}} - 1 \right)^2 \right] \\ &= - \left(\frac{C_{11}}{C_{66}} - 1 \right)^2 \left(1 + \frac{C_{12}}{C_{66}} \right)^2 + \left(1 + \frac{C_{11}}{C_{66}} \right)^2 \left(\frac{C_{11}}{C_{66}} - 1 \right)^2 \\ &= \left(\frac{C_{11}}{C_{66}} - 1 \right)^2 \left(\left(1 + \frac{C_{11}}{C_{66}} \right)^2 - \left(1 + \frac{C_{12}}{C_{66}} \right)^2 \right) \\ &= \left(\frac{C_{11}}{C_{66}} - 1 \right)^2 \left(\frac{C_{11} + C_{22}}{C_{66}} + 2 \right) \left(\frac{C_{11} - C_{12}}{C_{66}} \right) > 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

當 $A_p > 1$ 即 $2\kappa_1 - \gamma_P > 0$ ，(4.36)中 $\left[2(C_{12}/C_{66} + 1)\sqrt{\kappa_1} + (\kappa_1 + 1)\sqrt{(2\kappa_1 - \gamma_P)} \right] > 0$ ，則

不等式(4.33)與(4.35)成立，即立方材料的 c_s 存在條件為 $A_p > 1$ 。



4.2 待定函數的矩陣方程式與 $\tilde{\mathbf{K}}$ 的求解

共線裂縫於正交性介質，其待定函數 $\tilde{F}_i^{(k)}$ 與 $\tilde{G}_i^{(k)}$ 的矩陣方程式與3.2節的(3.14)

與(3.21)形式一致，只需利用(2.56)將(3.18)與(3.25)改寫為：

$$D_{lk}^{ij} = \frac{s\sqrt{C_{22}C_{66}}}{Nc_2} \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\cos(m\varphi^{(k)})\sin(m\theta^{(\ell)})}{m} + \frac{C_{66}}{2N} \frac{U_{22} \left(s \left| b_i + a_i x^{(\ell)} - (b_j + a_j \xi^{(k)}) \right| / c_2 \right)}{(b_j + a_j \xi^{(k)}) - (b_i + a_i x^{(\ell)})} \delta_{ij} \quad (4.37)$$

$$C_{lk}^{ij} = \frac{sC_{66}}{Nc_2} \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\cos(m\varphi^{(k)})\sin(m\theta^{(\ell)})}{m} + \frac{C_{66}}{2N} \frac{U_{11} \left(s \left| b_i + a_i x^{(\ell)} - (b_j + a_j \xi^{(k)}) \right| / c_2 \right)}{b_j + a_j \xi^{(k)} - (b_i + a_i x^{(\ell)})} \delta_{ij} \quad (4.38)$$

(4.37)與(4.38)的 U_{22} 與 U_{11} ，本文考慮：(1) $Y \neq 0$ 、(2) $Y = 0$ 兩種情況。當情況(1)時，

將(4.14)與(4.23)代入(2.56)得 U_{22} 與 U_{11} 為：

$$U_{22} = \frac{st_2}{C_{11}} (F_1^I + F_2^I + F_3^I) \quad (4.39)$$

$$U_{11} = \frac{st_2}{\sqrt{C_{11}C_{22}}} (F_1^{II} + F_2^{II} + F_3^{II}) \quad (4.40)$$

(4.39)與(4.40)中， F_k^I 與 F_k^{II} ($k=1\sim 3$)已推得為(4.24)與(4.15)。情況(2)時，將(4.18)

與(4.26)代入(2.56)得 U_{22} 與 U_{11} 為：

$$U_{22} = \frac{st_2}{C_{11}} (G_1^I + G_2^I + G_3^I) \quad (4.41)$$

$$U_{11} = \frac{st_2}{\sqrt{C_{11}C_{22}}} (G_1^{II} + G_2^{II} + G_3^{II}) \quad (4.42)$$

(4.41)與(4.42)中， G_k^I 與 G_k^{II} ($k=1\sim 3$)已推得為(4.27)與(4.19)。



將(4.37)、情況(1)的 U_{22} (4.39)與情況(2)的 U_{22} (4.41)代入矩陣方程式(3.14)，可求得共線裂縫於正交性介質的待定函數 $\tilde{F}_i^{(k)}$ ，再將 $\tilde{F}_i^{(k)}$ 代入(2.77)得 Laplace 轉換域之第一型應力強度因子：

$$\begin{aligned}\tilde{K}_I(b_i + a_i, s) &= \frac{L_{22}(0)}{2N} \sqrt{\frac{\pi}{a_i}} \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \tilde{F}_i^{(k)} \cot \frac{\varphi^{(k)}}{2} \\ \tilde{K}_I(b_i - a_i, s) &= \frac{(-1)^N L_{22}(0)}{2N} \sqrt{\frac{\pi}{a_i}} \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \tilde{F}_i^{(k)} \tan \frac{\varphi^{(k)}}{2}\end{aligned}\quad (4.43)$$

以相同的步驟，將(4.38)、情況(1)的 U_{11} (4.40)與情況(2)的 U_{11} (4.42)代入矩陣方程式(3.21)，並求得共線裂縫於正交性介質的待定函數 $\tilde{G}_i^{(k)}$ ，再將 $\tilde{G}_i^{(k)}$ 代入(2.77)得 Laplace 轉換域之第二型應力強度因子：

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{II}(b_i + a_i, s) &= \frac{L_{11}(0)}{2N} \sqrt{\frac{\pi}{a_i}} \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \tilde{G}_i^{(k)} \cot \frac{\varphi^{(k)}}{2} \\ \tilde{K}_{II}(b_i - a_i, s) &= \frac{(-1)^N L_{11}(0)}{2N} \sqrt{\frac{\pi}{a_i}} \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \tilde{G}_i^{(k)} \tan \frac{\varphi^{(k)}}{2}\end{aligned}\quad (4.44)$$

上述考慮皆為垂直入射平面波，若平面波以方向 $\mathbf{n} = (\cos \phi, -\sin \phi)^T$ 入射(ϕ 為入射方向與 x_1 軸的夾角)，且於 $t=0$ 抵達 $x_1 = b_i - a_i$ ，則斜入射之平面波可表為：

$$\mathbf{t}_2 = -\mathbf{t}(\phi) H \left(x_1 - (b_i - a_i) + \frac{c(\phi)t}{\cos \phi} \right) = -\mathbf{t}(\phi) H \left(t - \left(1 - \frac{x_1}{b_i - a_i} \right) \frac{(b_i - a_i) \cos \phi}{c(\phi)} \right) \quad (4.45)$$

(4.45)的 $c(\phi)$ 可由 Christoffel 方程式求得：

$$\left[\mathbf{Q} \cos^2 \theta - (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) \cos \theta \sin \theta + \mathbf{T} \sin^2 \theta \right] \mathbf{d} = \rho c^2(\phi) \mathbf{d} \quad (4.46)$$

(4.45)的 $\mathbf{t}(\phi)$ 由 Wu [7]得：

$$\mathbf{t}(\phi) = (Q(\phi), P(\phi))^T = \frac{P}{\rho c^2(\phi)} (\mathbf{R}^T \cos \phi - \mathbf{T} \sin \phi) \mathbf{d} \quad (4.47)$$



(4.47)之 \mathbf{d} 可由(4.46)求得。(3.14)與(3.21)為垂直入射縱與橫波的待定函數矩陣方程式，將(3.14)與(3.21)的 \tilde{P}/s 與 \tilde{Q}/s 以(4.45)取代，則可求斜入射平面波之待定函數 $\tilde{F}_i^{(k)}$ 與 $\tilde{G}_i^{(k)}$ ，再由(4.43)與(4.44)求斜入射平面波的 Laplace 轉換域應力強度因子。

4.3 數值結果

本節利用 4.2 節介紹的數值方法與(4.43)、(4.44)求 Laplace 轉換域 $\tilde{\mathbf{K}}$ ，再以數值反 Laplace 轉換(2.80)求時域 \mathbf{K} ，由收斂性測試得到參數 $S_0 = 0.4$ 、 $T = 20$ 、 $N = 180$ 、 $N_s = 90$ 與 Gauss 積分點 $N_G = 300$ ，以 Zhang [8]與 Brantley [32]提及的材料參數(表 4.1)計算單裂縫、共線雙裂縫與等長共線三裂縫於平面波作用下的應力強度因子。

Material	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}
Boron epoxy I	224.06	12.69	4.43	0.256
Boron epoxy II	55.16	170.65	4.83	0.036
Glass fiber	38.27	9.17	3.72	0.28
Graphite fiber	173.75	6.89	3.79	0.28
Steel mylar	181.21	28.30	6.20	0.44
Beryllium	293.19	339.84	112.40	0.24

表 4.1 正交性材料的工程彈性常數

對於廣義平面應力，彈性常數矩陣 C_{ij} 與工程彈性常數的關係式為：

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \end{bmatrix}, \nu_{12}E_2 = \nu_{21}E_1 \quad (4.48)$$

利用表 4.1 與(4.48)可求得正交性材料的彈性常數 C_{ij} 。



4.3.1 收斂性測試

本章以 Gauss 積分求 L_{11} 與 L_{22} 的數值 Laplace 轉換，因此需針對 Gauss 積分點數 N_G 進行探討以得到適合的 N_G ，以等長 $2a$ 雙裂縫、裂縫與裂縫中心距 $4a$ ，如圖 4.1，考慮材料環氧硼 I，並由 3.3.1 節得到的參數 $N = 180$ 、 $N_s = 90$ 與 $N_G = 100$ 、300、500，計算垂直入射縱波 $-P$ 的應力強度因子 $K'_I = K_I / P\sqrt{\pi a}$ 並與半無限長裂縫的應力強度因子(Wu [7])比較如圖 4.2~4.4：

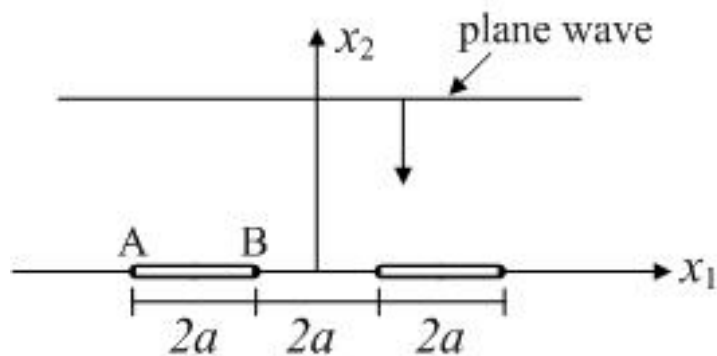


圖 4.1 等長共線裂縫示意圖

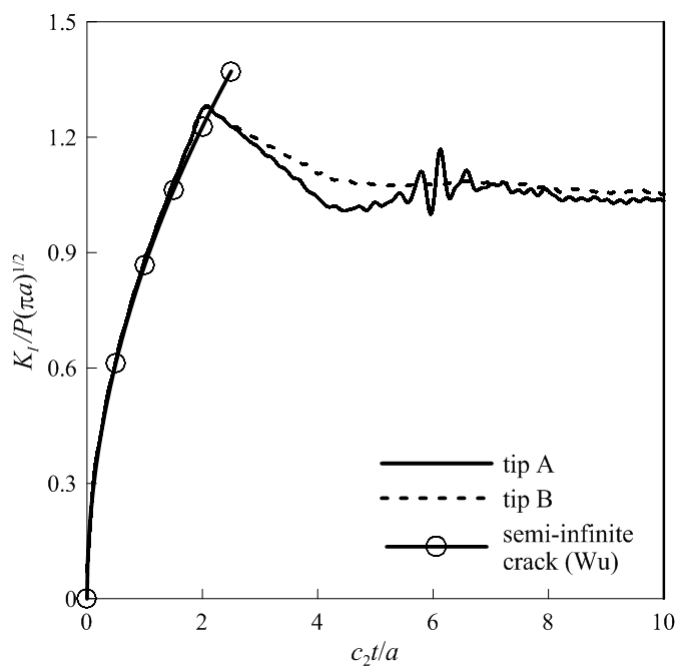


圖 4.2 等長共線雙裂縫於環氧硼 I 的應力強度因子 K'_I ($N_G = 100$)

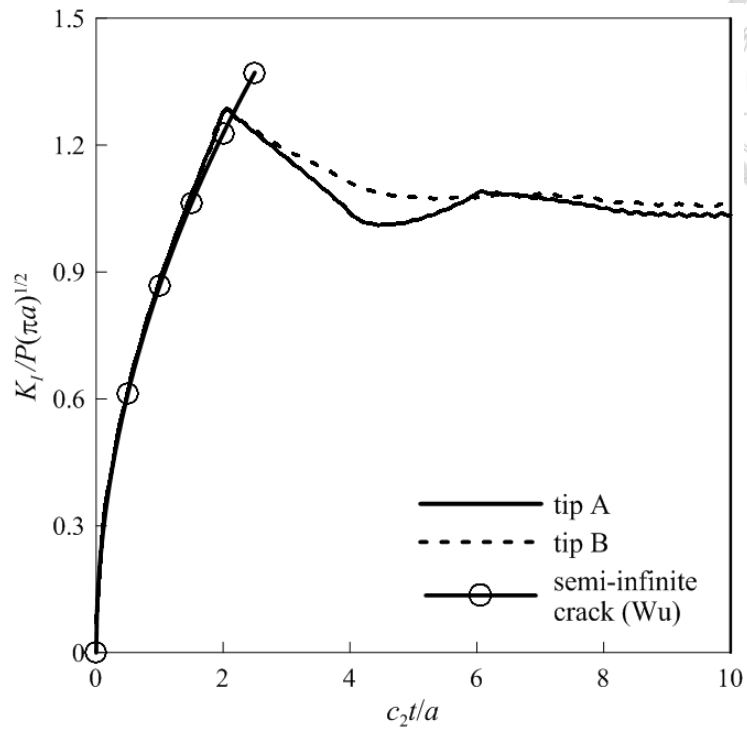


圖 4.3 等長共線雙裂縫於環氧硼 I 的應力強度因子 K_I' ($N_G = 300$)

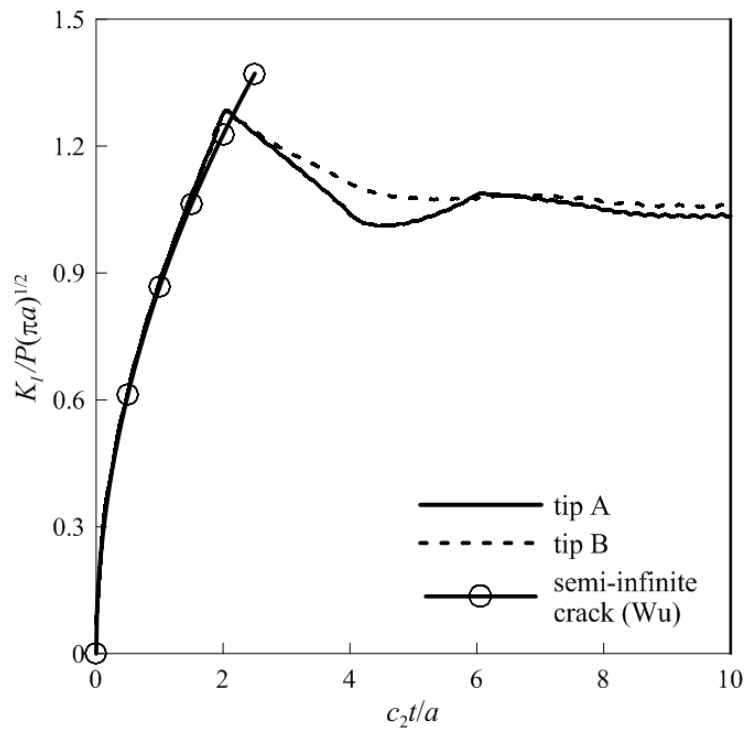


圖 4.4 等長共線雙裂縫於環氧硼 I 的應力強度因子 K_I' ($N_G = 500$)

由圖 4.2~4.4 可觀察得：裂縫尖端產生的縱波未互相作用前，共線雙裂縫的應力強度因子 K'_I 與半無限長裂縫的 K'_I 相同，共線雙裂縫於表面波由裂縫尖端 A 與 B 到達 B 與 A 時發生應力強度因子的極值。表面波由另一尖端抵達後， K'_I 開始下降， $t' = c_2 a / t = 2 \sim 4$ 時之 K'_I 下降幅度，裂縫尖端 A 較裂縫尖端 B 大，當 $t' > 6$ 應力強度因子 K'_I 趨於穩態。Gauss 積分點 $N_G = 100$ 時，應力強度因子出現不規則跳動，而 $N_G = 300$ 與 500 得較好結果，經比較得 Gauss 積分點 $N_G = 300$ 可得收斂結果。

4.3.2 不同 Laplace 轉換法求單裂縫於等向性介質的應力強度因子

為證明 4.1 節以 Gauss 積分法可得正確的應力強度因子，以單裂縫於等向性介質，如圖 4.5，考慮波松比 $\nu = 0.25$ ，計算垂直入射 ($\phi = 90^\circ$) 縱波 $-P$ 的應力強度因子 $K'_I = K_I / P \sqrt{\pi a}$ 與入射橫波 $-Q$ 的 $K'_{II} = K_{II} / Q \sqrt{\pi a}$ ，並與第三章(Bessel 函數)計算得的應力強度因子、Wu [7] 半無限長裂縫比較如圖 4.6~4.7：

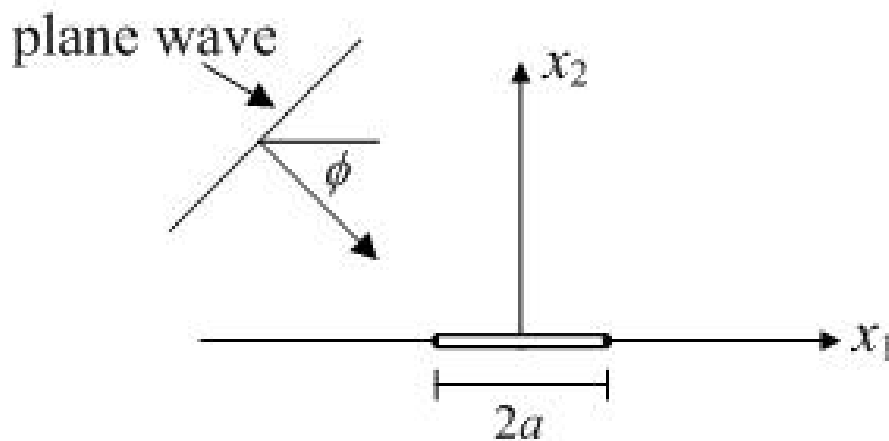


圖 4.5 單裂縫示意圖

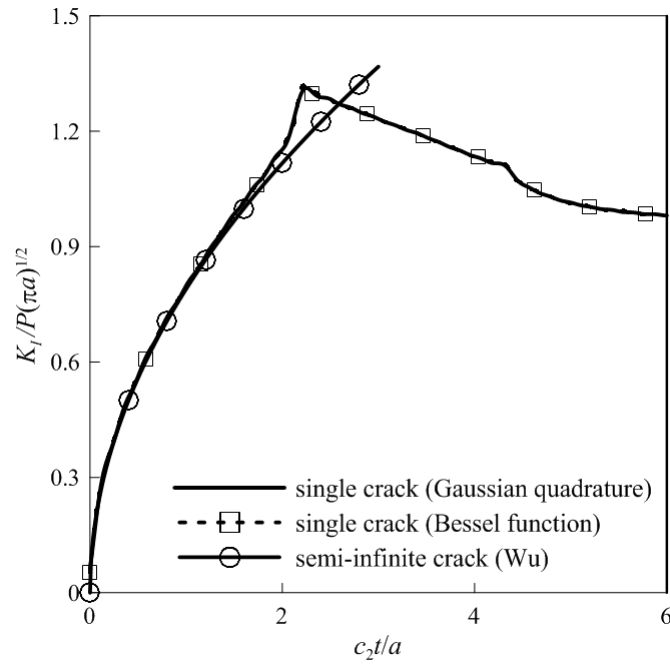
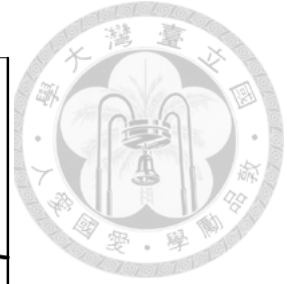


圖 4.6 以數值與解析 Laplace 轉換法求得的等向性材料應力強度因子 K_I'

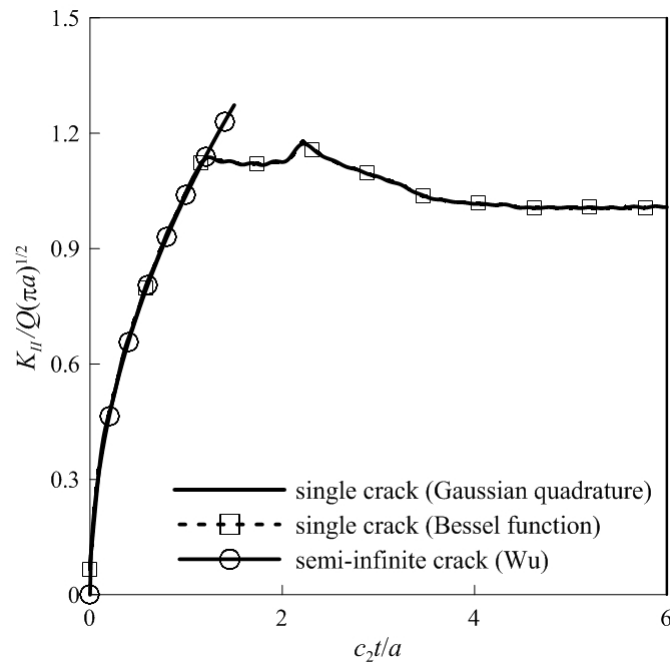


圖 4.7 以數值與解析 Laplace 轉換法求得的等向性材料應力強度因子 K_{II}'

圖 4.6 與 4.7 中，實線為 Gauss 積分求得的應力強度因子，虛線為 Bessel 函數求得的應力強度因子，結果顯示：以 Gauss 積分求得的應力強度因子與 Bessel 函數求得的應力強度因子一致，且於尖端產生的縱波未相互影響前，應力強度因子



與 Wu [7] 半無限裂縫一致。

4.3.3 單裂縫於正交性材料與立方材料的應力強度因子

考慮單裂縫，如圖 4.5，以表 4.1 工程彈性常數與砷化鎵的彈性常數 $C_{11} = C_{22} = 118.8$ 、 $C_{12} = 53.8$ 、 $C_{13} = 59.4$ GPa，計算垂直入射 ($\phi = 90^\circ$) 縱波 $-P$ 與入射橫波 $-Q$ 的應力強度因子 $K'_I = K_I / P\sqrt{\pi a}$ 與 $K'_{II} = K_{II} / Q\sqrt{\pi a}$ ，並與 Wu [7]、Zhang [8] 比較如圖 4.8~4.14：

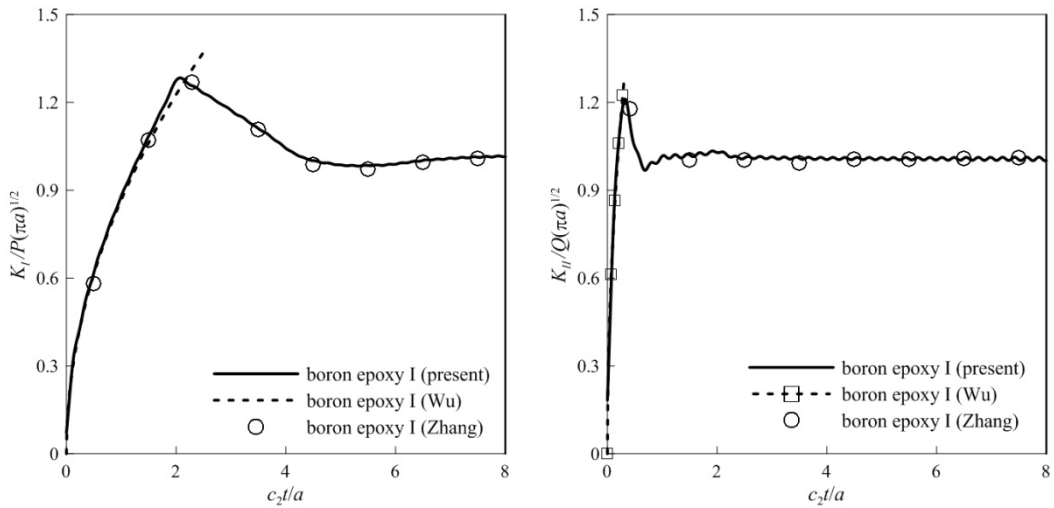


圖 4.8 單裂縫於環氧硼 I 的應力強度因子 K'_I 與 K'_{II}

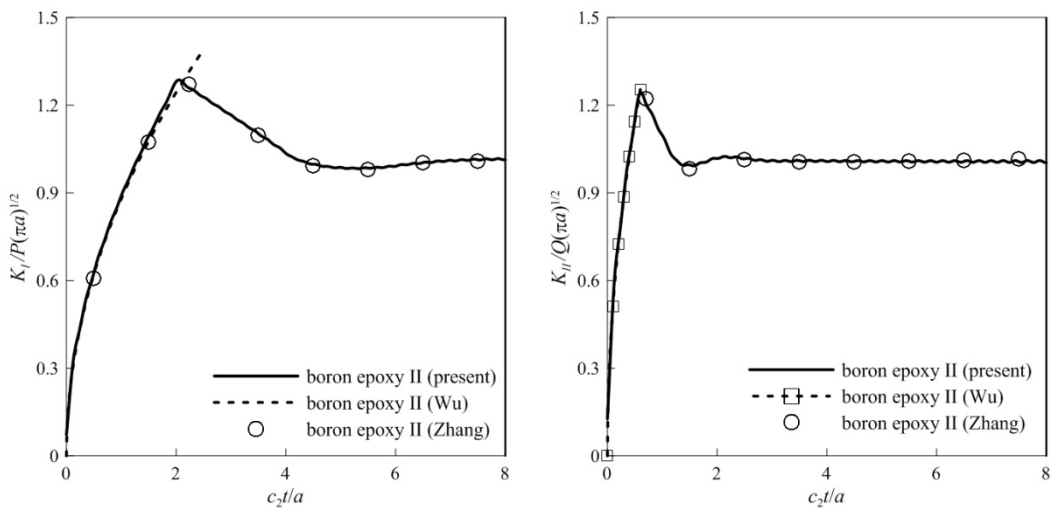


圖 4.9 單裂縫於環氧硼 II 的應力強度因子 K'_I 與 K'_{II}

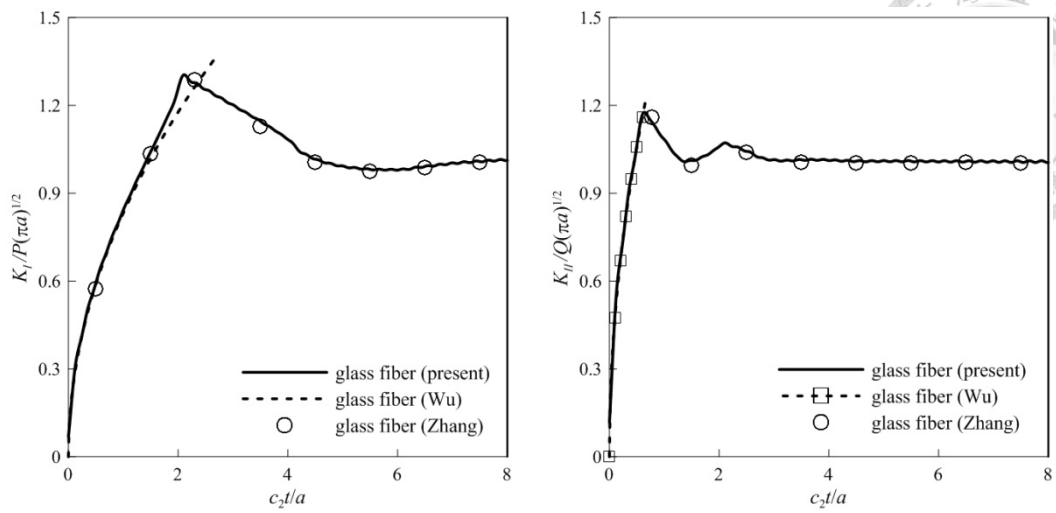


圖 4.10 單裂縫於玻璃纖維的應力強度因子 K'_I 與 K'_{II}

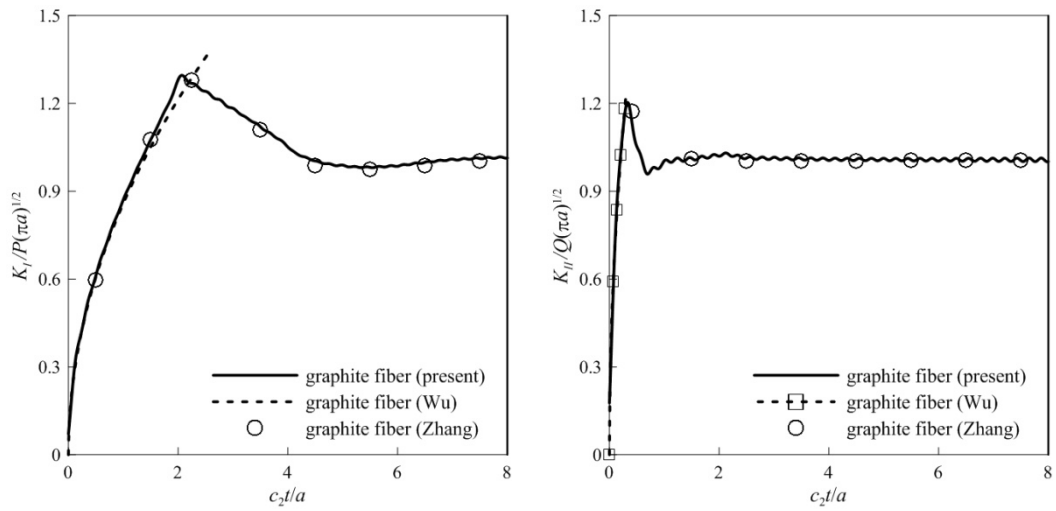


圖 4.11 單裂縫於石墨纖維的應力強度因子 K'_I 與 K'_{II}

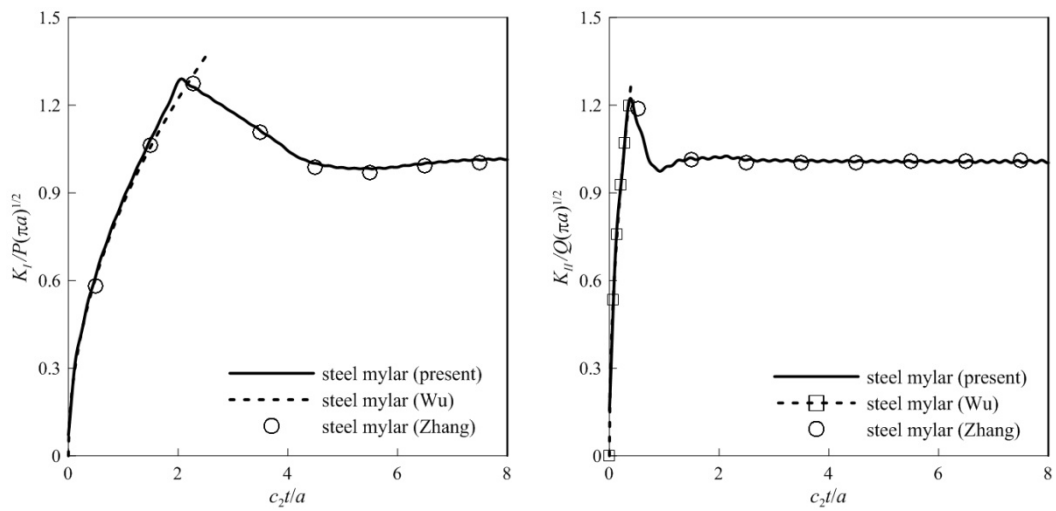


圖 4.12 單裂縫於鋼聚酯薄膜的應力強度因子 K'_I 與 K'_{II}

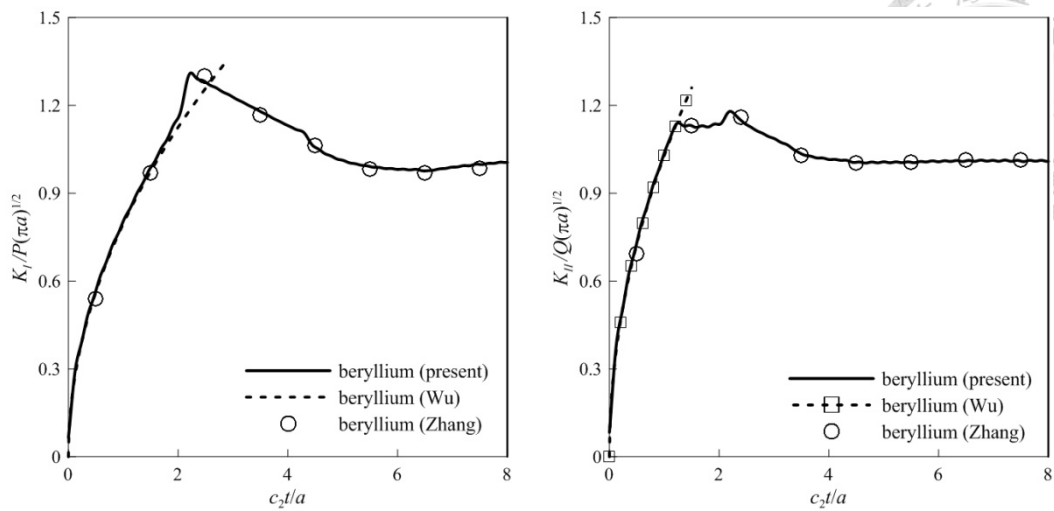


圖 4.13 單裂縫於鈹的應力強度因子 K'_I 與 K'_{II}

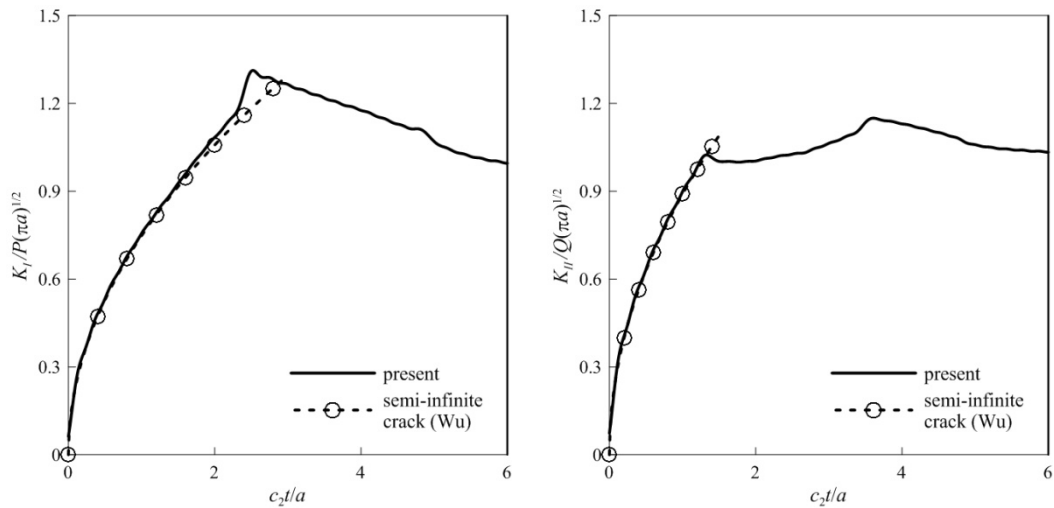


圖 4.14 單裂縫於砷化鎂的應力強度因子 K'_I 與 K'_{II}

圖 4.8~4.13 為單裂縫於正交性介質(無慢剪力波)的應力強度因子 K'_I 與 K'_{II} ，結果顯示：本文計算結果與半無限常裂縫 Wu [7] 與有限長單裂縫 Zhang [8] 吻合。 K'_I 的峰值皆發生於表面波由裂縫尖端 $x_1 = \pm a$ 到達 $x_1 = \mp a$ ，且峰值較靜態值高出 28~31%。對於正交性材料(表 4.1)，鈹的 K'_{II} 峰值發生於表面波由一尖端出發抵達另一尖端時，其餘正交性材料的 K'_{II} 峰值發生於縱波由一尖端抵達另一尖端時，而其值為 1.18~1.24。圖 4.14 為立方材料砷化鎂(慢剪力波存在)的應力強度因子，結



果顯示：裂縫產生的縱波影響前，應力強度因子與 Wu [7]一致，當表面波由裂縫尖端 $x_1 = \pm a$ 抵達尖端 $x_1 = \mp a$ 產生峰值，其 K'_I 與 K'_{II} 峰值為 1.31 與 1.14。

針對工程彈性常數變化之討論，以 $E_1 = 1.44692$ 、 14.4692 與 144.692 、固定 $E_2 = 14.4692$ 、 $G_{12} = 5.8565$ 、 $\nu_{12} = 0.21002$ ，計算單裂縫於垂直入射縱波 $-P$ 與橫波 $-Q$ 的應力強度因子 $K'_I = K_I / P\sqrt{\pi a}$ 與 $K'_{II} = K_{II} / Q\sqrt{\pi a}$ ，如圖 4.15 與 4.16。

圖 4.15 為固定 E_2 、 G_{12} 、 ν_{12} 與不同 E_1 的應力強度因子 K'_I ，結果顯示：應力強度因子峰值皆發生於表面波由一尖端抵達另一尖端之時間點。圖 4.16 為固定 E_2 、 G_{12} 、 ν_{12} 與不同 E_1 的應力強度因子 K'_{II} ，結果顯示：應力強度因子峰值發生於表面波由一尖端到達另一尖端時，對於 $E_1/E_2 = 0.1$ 、 1.0 。對於 $E_1/E_2 = 10$ ，應力強度因子峰值發生於縱波由一尖端到達另一尖端。由上述討論可知： E_1 越大，縱波越快，應力強度因子峰值越早發生。

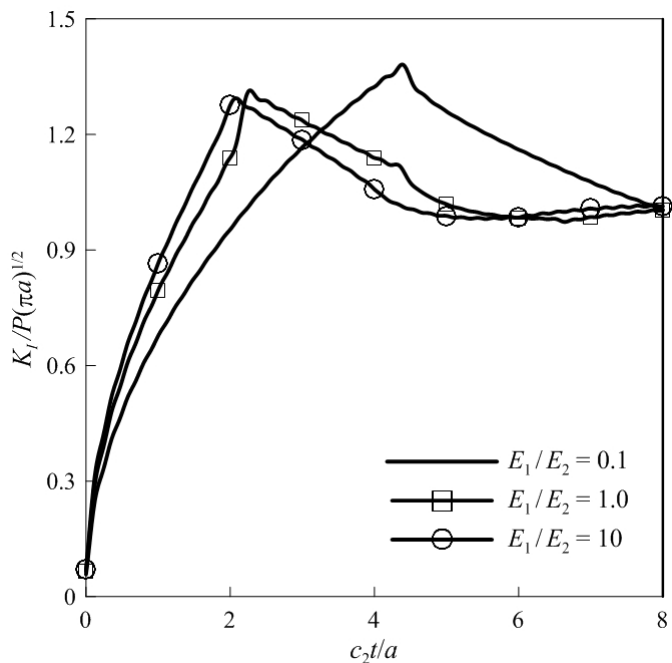


圖 4.15 單裂縫於不同 E_1 的應力強度因子 K'_I

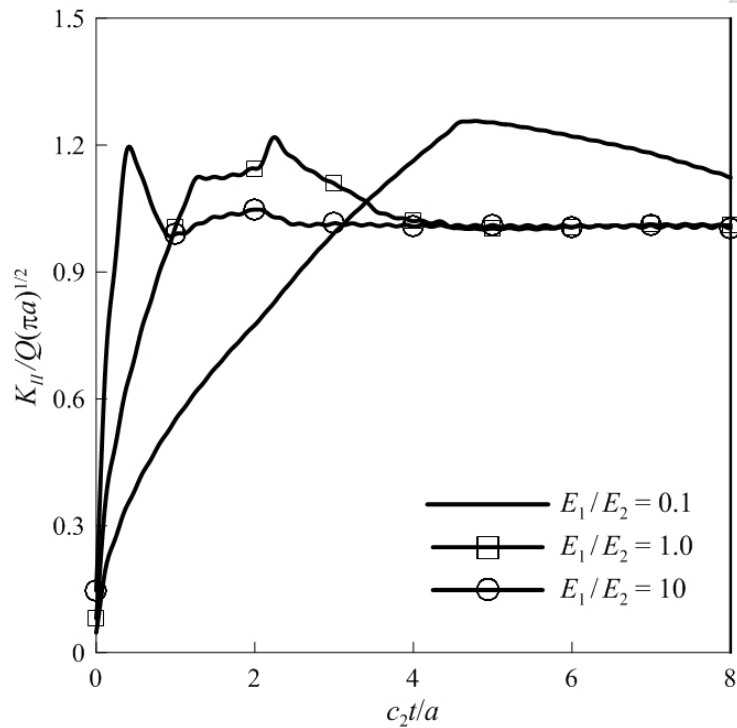
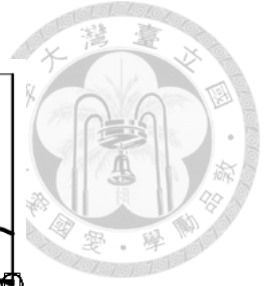


圖 4.16 單裂縫於不同 E_1 的應力強度因子 K_{II}'

4.3.4 斜入射平面波作用於單裂縫的應力強度因子

考慮單裂縫，如圖 4.5，平面波以方向 $\mathbf{n} = (\cos \phi, -\sin \phi)^T$ 入射，且於 $t=0$ 作用於 $x_1 = -a$ ，其形式由(4.45)得 $\sigma = -P(\phi)H(t - a_1(1 + x_1/a_1)\cos \phi/c(\phi))$ ，以不同入射角 $\phi = 30^\circ$ 、 60° ，材料為環氧硼 II，計算裂縫尖端 $x_1 = \pm a$ 的應力強度因子 $K_I' = K_I/P(\phi)\sqrt{\pi a}$ ，並與 Wu [7]比較如圖 4.17~4.18。

由圖 4.17 與 4.18 可觀察得：當裂縫尖端 $x_1 = -a$ 產生的縱波未影響裂縫尖端 $x_1 = a$ 前，應力強度因子 K_I' 與 Wu [7]半無限長裂縫的應力強度因子 K_I' 一致，且 K_I' 峰值皆發生於表面波由尖端 $x_1 = \pm a$ 到 $x_1 = \mp a$ 時，入射角 $\phi = 30^\circ$ 與 60° 的應力強度因子峰值為 1.28~1.29。

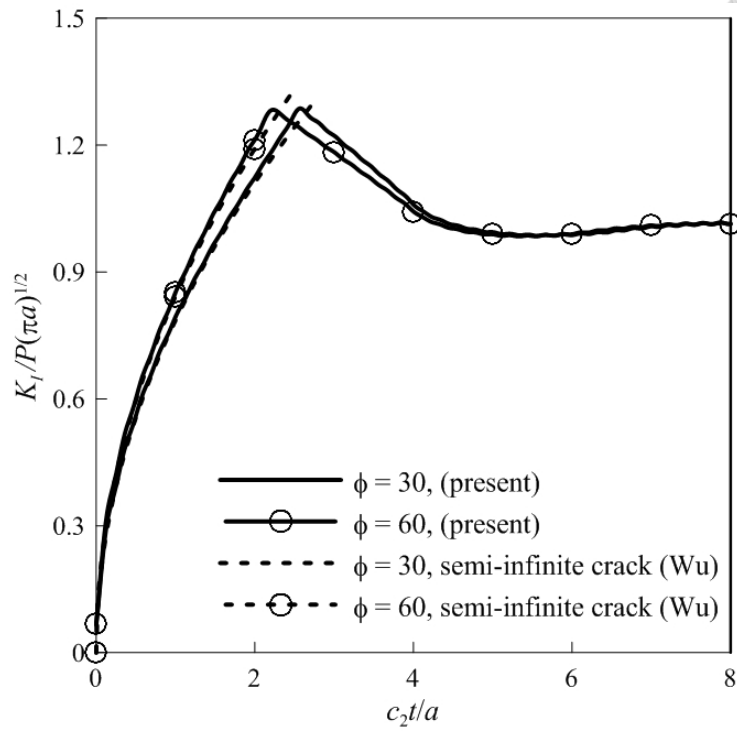


圖 4.17 斜入射縱波作用於單裂縫，裂縫尖端 $x_1 = -a$ 的應力強度因子 K_I'

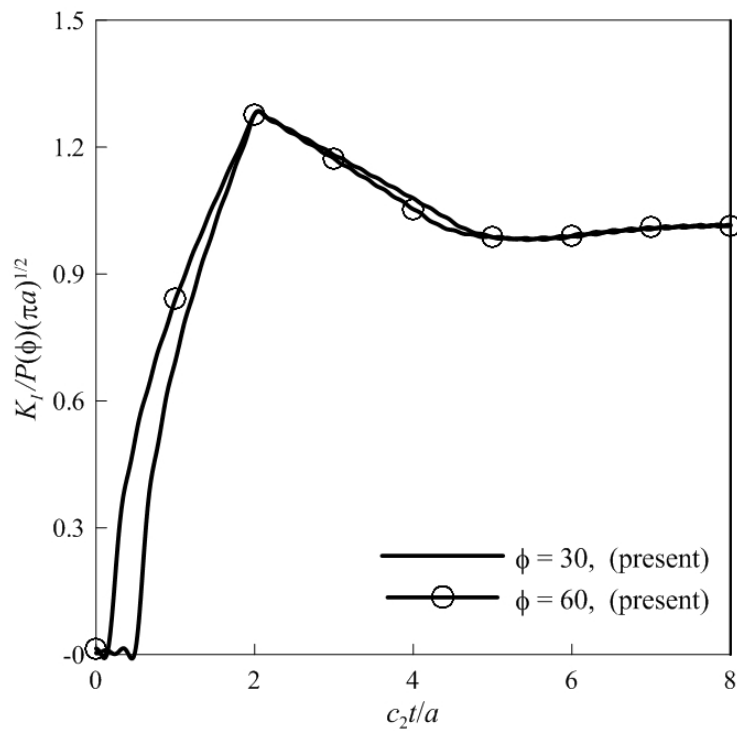


圖 4.18 斜入射縱波作用於單裂縫，裂縫尖端 $x_1 = a$ 的應力強度因子 K_I'



4.3.5 等長共線三裂縫於不同 E_1 的應力強度因子

考慮共線三裂縫，裂縫長皆為 $2a$ ，裂縫中心與中心距皆為 $4a$ ，如圖 4.19。以工程彈性常數比 $E_1/E_2 = 0.1$ 、 1.0 、 2.0 並固定 $E_2 = 14.4692$ 、 $G_{12} = 5.8565$ 、 $\nu_{12} = 0.21002$ ，計算垂直入射縱波 $-P$ 與橫波 $-Q$ 的應力強度因子 $K'_I = K_I/P\sqrt{\pi a}$ 與 $K'_{II} = K_{II}/Q\sqrt{\pi a}$ ，如圖 4.20~4.22：

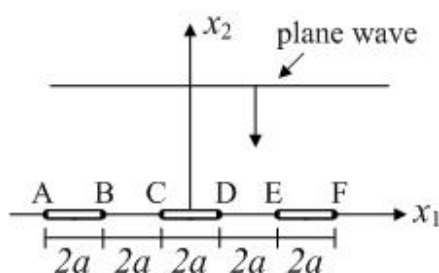


圖 4.19 等長共線三裂縫示意圖

圖 4.20~4.22 為裂縫尖端 A、B 與 C 於不同 E_1 的應力強度因子 K'_I 與 K'_{II} ，結果顯示： K'_I 與 K'_{II} 峰值皆發生於表面波由尖端 B 到 A、A 到 B、D 到 C 對於裂縫尖端 A、B、C，但工程彈性常數比為 $E_1/E_2 = 10$ 時，應力強度因子 K'_{II} 峰值發生於縱波由尖端 B 到 A、A 到 B、D 到 C 對於裂縫尖端 A、B、C。工程彈性常數比為 $E_1/E_2 = 0.1$ 時，各裂縫尖端的應力強度因子 K'_I 峰值為 1.38~1.39、 K'_{II} 峰值為 1.23~1.24。工程彈性常數比 $E_1/E_2 = 1.0$ 時，各裂縫尖端的應力強度因子 K'_I 峰值為 1.30~1.31，但 K'_{II} 峰值為 1.22、1.27 與 1.27 對於裂縫尖端 A、B 與 C。工程彈性常數比為 $E_1/E_2 = 10$ 時，各裂縫尖端的應力強度因子 K'_I 峰值為 1.28~1.29，而 K'_{II} 峰值皆為 1.20。由上述計算可得：除工程彈性常數比為 $E_1/E_2 = 1.0$ 外，應力強度因子 K'_{II} 峰值於裂縫尖端 B 與 C 較 A 高 0.05 外，其餘計算例的各尖端應力強度因子 K'_I 與 K'_{II} 僅有 0.01 的差距。

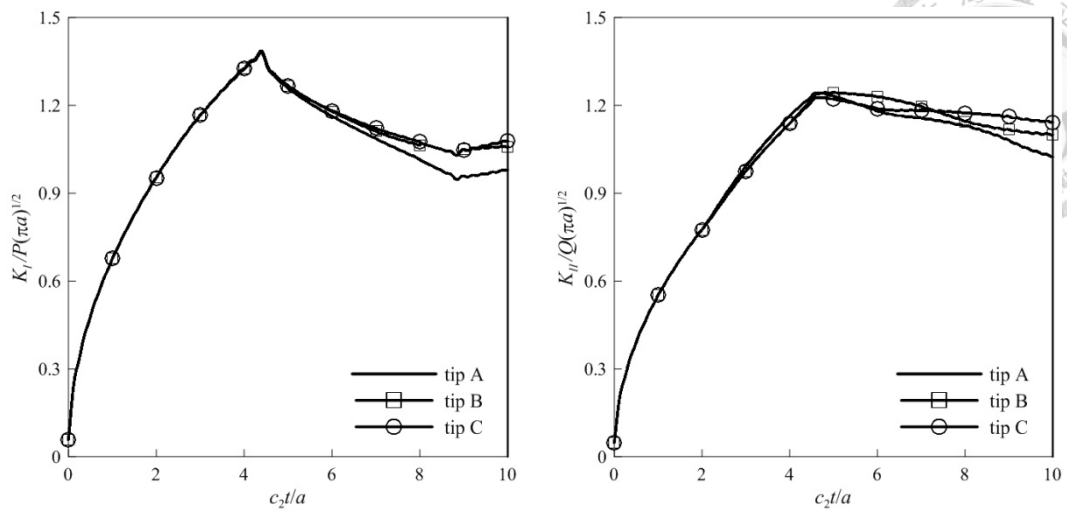


圖 4.20 等長三共線裂縫於工程彈性常數比 $E_1/E_2 = 0.1$ 的應力強度因子 K_I' 與 K_{II}'

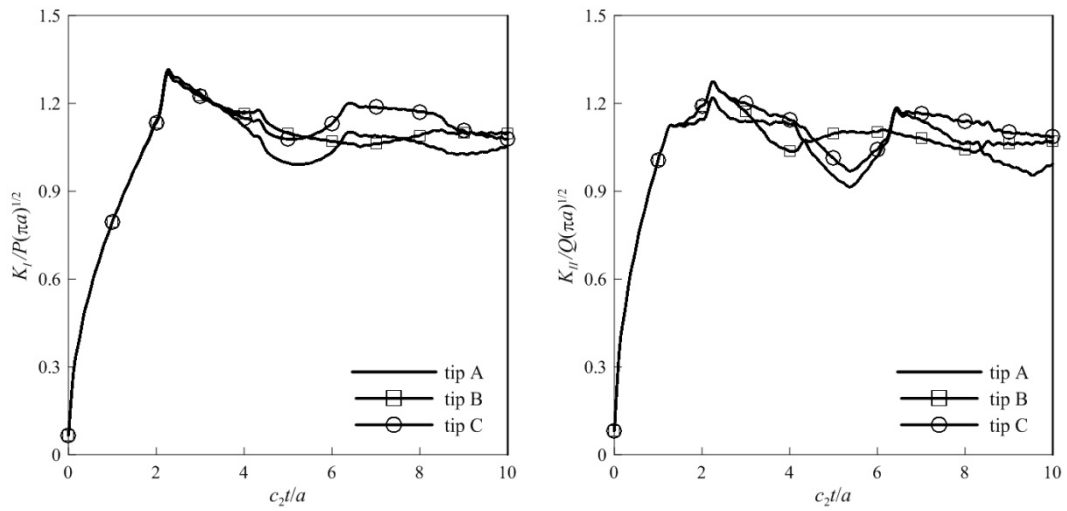


圖 4.21 等長三共線裂縫於工程彈性常數比 $E_1/E_2 = 1.0$ 的應力強度因子 K_I' 與 K_{II}'

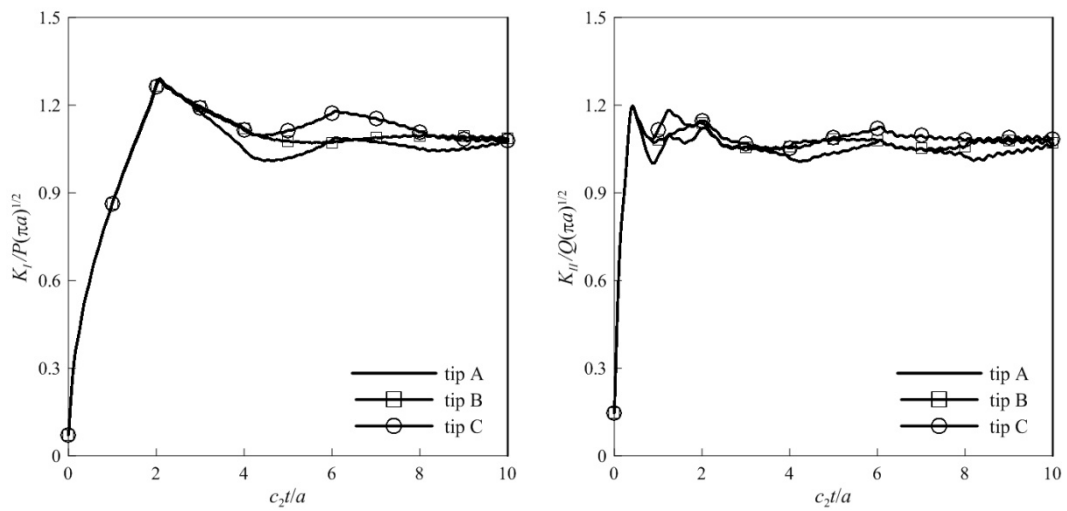


圖 4.22 等長三共線裂縫於工程彈性常數比 $E_1/E_2 = 10$ 的應力強度因子 K_I' 與 K_{II}'

第五章 平行裂縫於等向性介質的應力強度因子

本章將第二章的共線裂縫積分方程式擴展至平行裂縫積分方程式，5.1 節利用數值法 Gauss-Chebyshev 積分法則將平行裂縫積分方程式降階為線性代數方程式，5.2 節推導平行裂縫於等向性介質的 $\hat{\gamma}_k(w_k)$ 、 $\mathbf{b}_k(w_k)\mathbf{b}_k^T(w_k)$ ，利用第四章提及的 Gauss 積分求平行裂縫於等向性介質 \mathbf{V} 的數值 Laplace 轉換，並將耦合的待定函數線性代數方程式整理為矩陣方程式，5.3 節利用 Miller 與 Guy [28] 反 Laplace 計算雙與三平行共線裂縫於等向性介質的第一型與第二型動態應力強度因子 K_I 與 K_{II} ，並討論其數值結果。

5.1 平行裂縫的線性代數方程式

2.1 節中已導得共線裂縫積分方程式，本節將推導平行裂縫的積分方程式，再以 2.3 節介紹的 N 階 Gauss-Chebyshev 積分法則將積分方程式降階為線性代數方程式。對於平行裂縫，若第一個裂縫坐落於 $|x_1 - b| \leq a$ 與 $x_2 = h$ ，則 Burger 向量與差排密度之關係式可由(2.51)表為：

$$\Delta \mathbf{u}(x_1, h, t) = \boldsymbol{\beta}(x_1, h, t) = \int_{x_1}^{b+a} \int_0^t \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}(\xi_1, h, \tau)}{\partial \tau} d\tau d\xi_1 \quad (5.1)$$

考慮裂縫受垂直入射的平面波 $\mathbf{t}_2(x_1, x_2, t)$ 作用，並將(5.1)代入(2.44)且利用(2.47)可得：

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_2(x_1, x_2, t) = & -\frac{(\rho \mathbf{T})^{1/2}}{2} \int_{x_1}^{b+a} \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}(\xi_1, h, t - |x_2 - h|/\hat{c}_k)}{\partial t} d\xi_1 H\left(t - \frac{|x_2 - h|}{\hat{c}_k}\right) H(a - |x_1 - b|) \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{b-a}^{b+a} \frac{1}{r'} \int_0^t \mathbf{V}(r', \theta', t') \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}(\xi_1, h, \tau)}{\partial \tau} d\tau d\xi_1 \end{aligned} \quad (5.2)$$



(5.2) 中， $r' = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - h)^2}$ 、 $\theta' = \tan^{-1}((x_2 - h)/(x_1 - \xi_1))$ 、 $t' = t - \tau$ ， \mathbf{V} 為：

$$\mathbf{V}(r', \theta', t') = \text{Im} \left[\sum_{k=1}^2 \frac{1}{\hat{\gamma}_k(w_k)} \frac{1}{\cos \theta' + p_k(w_k) \sin \theta'} \mathbf{b}_k(w_k) \mathbf{b}_k^T(w_k) \right] \quad (5.3)$$

對(5.2)取 Laplace 對 t 轉換得：

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{t}}_2(x_1, x_2, t) = & -\frac{s}{2}(\rho\mathbf{T})^{1/2} e^{\frac{-|x_2-h|}{\hat{c}_k}} \int_{x_1}^{b+a} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\xi_1, h, s) d\xi_1 H(a - |x_1 - b|) \\ & + \frac{s}{\pi} \int_{b-a}^{b+a} \frac{1}{r'} \tilde{\mathbf{V}}(r', \theta', s) \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\xi_1, h, s) d\tau d\xi_1 \end{aligned} \quad (5.4)$$

如 M 條平行裂縫坐落於 $|x_1 - b_j| \leq a_j$ 、 $x_2 = h_j$ ， $(j=1, \dots, M)$ ，並利用疊加原理與(5.4)

得積分方程式：

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{t}}_2(x_1, x_2, s) = & -\frac{s}{2}(\rho\mathbf{T})^{1/2} \sum_{j=1}^M e^{\frac{-|x_2-h_j|}{\hat{c}_k}} \int_{x_1}^{b+a_j} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\xi_1, h_j, s) d\xi_1 H(a_j - |x_1 - b_j|) \\ & + \frac{s}{\pi} \sum_{j=1}^M \int_{b_j-a_j}^{b_j+a_j} \frac{1}{r'} \tilde{\mathbf{V}}(r'_j, \theta'_j, s) \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\xi_1, h_j, s) d\xi_1 \end{aligned} \quad (5.5)$$

引入於 $\xi_1 = b_j \pm a_j$ 具有平方根奇異性的差排密度 $\boldsymbol{\alpha}$ ，其形式為：

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(b_j + a_j \xi, h_j, s) = \frac{\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_j(\xi, s)}{a_j \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (5.6)$$

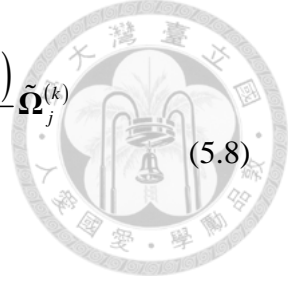
(5.6) 中， $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_j = (\tilde{G}_j, \tilde{F}_j)^T$ ，其中 \tilde{G}_j 與 \tilde{F}_j 為待定函數並於 $\xi = \pm 1$ 之值為有限，令

$x_1 = b_i + a_i x$ 、 $x_2 = h_i$ 與 $\xi_1 = b_j + a_j \xi$ ，且將(5.6)代入(5.5)可得：

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{t}}_2(b_i + a_i x, h_i, s) = & -\frac{s}{2}(\rho\mathbf{T})^{1/2} \sum_{j=1}^M e^{\frac{-|h_i-h_j|}{\hat{c}_k}} \int_{\frac{b_j-b_j+a_j x}{a_j}}^1 \frac{\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_j(\xi, s)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi H(a_j - |a_i x + b_i - b_j|) \\ & + \frac{s}{\pi} \sum_{j=1}^M \int_{-1}^1 \frac{1}{r'} \tilde{\mathbf{V}}(r'_j, \theta'_j, s) \frac{\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_j(\xi, s)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \end{aligned} \quad (5.7)$$

以(2.59)~(2.68)推導步驟可將(5.7)降階為 N 階 Gauss-Chebyshev 積分法則：

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_i^{(\ell)} = & -\frac{s(\rho\mathbf{T})^{1/2}}{N} \sum_{j=1}^M e^{\frac{-|h_i-h_j|}{\hat{c}_k}} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\cos(m\varphi^{(k)}) \sin(m\chi_{ij}^{(\ell)})}{m} \tilde{\Omega}_j^{(k)} \\ & + \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \frac{1}{r_{ij}^{\ell k}} \tilde{\mathbf{V}}(r_{ij}^{\ell k}, \theta_{ij}^{\ell k}, s) \tilde{\Omega}_j^{(k)} \end{aligned} \quad (5.8)$$



(5.8)中：

$$\tilde{\Phi}_i^{(\ell)} = \tilde{\mathbf{t}}_2(b_i + a_i x^{(\ell)}, h_i, s), \quad \tilde{\Omega}_i^{(k)} = \tilde{\Omega}_i(\xi^{(k)}, s), \quad i=1 \sim M \quad (5.9)$$

$$\xi^{(k)} = \cos(\varphi^{(k)}), \quad \varphi^{(k)} = (k-1/2)\pi/N, \quad k=1, 2, \dots, N \quad (5.10)$$

$$x^{(\ell)} = \cos(\psi^{(\ell)}), \quad \psi^{(\ell)} = \ell\pi/N, \quad \ell=1, 2, \dots, N-1 \quad (5.11)$$

$$\chi_{ij}^{(\ell)} = \cos^{-1}\left(\frac{b_i - b_j + a_i x^{(\ell)}}{a_j}\right) H\left(a_j - |a_i x^{(\ell)} + b_i - b_j|\right) \quad (5.12)$$

$$r_{ij}^{\ell k} = \sqrt{(b_i + a_i x^{(\ell)} - b_j - a_j \xi^{(k)})^2 + (h_i - h_j)^2} \quad (5.13)$$

$$\theta_{ij}^{\ell k} = \tan^{-1}\left(\frac{h_i - h_j}{b_i + a_i x^{(\ell)} - b_j - a_j \xi^{(k)}}\right) \quad (5.14)$$

將(5.6)代入(5.1)可得裂縫閉合條件為

$$\sum_{k=1}^N \tilde{\Omega}_i^{(k)} = \mathbf{0}, \quad i=1, 2, \dots, M \quad (5.15)$$

方程式(5.8)與(5.15)為平行裂縫問題的線性代數方程式。

5.2 待定函數的矩陣方程式

5.1 節已推得 N 階線性代數方程式(5.8)與(5.15)，(5.8)中的未知 $\tilde{\mathbf{V}}$ 將由本節導得。對於平行裂縫、等向性介質與進平面問題，由 $w_k = y_1 + p_k(w_k)y_2$ 與(3.2)聯立可得：



$$w_k = \frac{y_1 + y_2 \sqrt{(y/c_k)^2 - 1}}{1 - (y_2/c_k)^2} \quad (5.16)$$

(5.16)式 $y = y_1^2 + y_2^2$ ，利用 $w_k = y_1 + p_k(w_k)y_2$ 與(5.16)可得：

$$p_k = \frac{\sqrt{(y/c_k)^2 - 1} + y_1 y_2 / c_k^2}{1 - (y_2/c_k)^2} \quad (5.17)$$

(5.3)式 $\hat{\gamma}_k(w_k)$ 的推導需使用 $\mathbf{a}_k^T(w_k)\mathbf{a}_k(w_k)$ 與 $\mathbf{a}_k^T(w_k)\mathbf{b}_k(w_k)$ ，由導得的(3.3)得：

$$\mathbf{a}_k^T(w_k)\mathbf{a}_k(w_k) = 1 + p_k^2(w_k) = (w_k/c_k)^2 \quad (5.18)$$

由(3.3)與(3.4)可導得：

$$\mathbf{a}_k^T(w_k)\mathbf{b}_k(w_k) = \mu(1 + p_k^2(w_k))p_k(w_k) = \mu(w_k/c_k)^2 \sqrt{(w_k/c_k)^2 - 1} \quad (5.19)$$

將(5.18)與(5.19)代入(2.48)並利用(5.17)得：

$$\hat{\gamma}_k(w_k) = 2\mu(w_k/c_k)^2 \sqrt{(y/c_k)^2 - 1} \quad (5.20)$$

$\mathbf{b}_k(w_k)\mathbf{b}_k^T(w_k)$ 可由(3.4)得：

$$\mathbf{b}_1(w_1)\mathbf{b}_1^T(w_1) = \mu^2 \begin{bmatrix} 4p_1^2(w_1) & 2p_1(w_1)(p_2^2(w_1)-1) \\ 2p_1(w_1)(p_2^2(w_1)-1) & (p_2^2(w_1)-1)^2 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

$$\mathbf{b}_2(w_2)\mathbf{b}_2^T(w_2) = \mu^2 \begin{bmatrix} (1-p_2^2(w_2))^2 & 2p_2(w_2)(1-p_2^2(w_2)) \\ 2p_2(w_2)(1-p_2^2(w_2)) & 4p_2^2(w_2) \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

將(5.20)~(5.22)代入(5.3)可導得：

$$\frac{1}{\pi r} \mathbf{V}(r, \theta, t) = \frac{1}{\pi} \mathbf{Im} \begin{bmatrix} V_G^{\prime\prime}(r, \theta, t) & V_{GF}(r, \theta, t) \\ V_{GF}(r, \theta, t) & V_F^{\prime}(r, \theta, t) \end{bmatrix} = \frac{\mu}{2\pi} \begin{bmatrix} i_{G_1}^{\prime\prime} + i_{G_2}^{\prime\prime} & i_{F_1}^{\prime\prime} + i_{F_2}^{\prime\prime} \\ i_{G_1}^{\prime} + i_{G_2}^{\prime} & i_{F_1}^{\prime} + i_{F_2}^{\prime} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

(5.23)中：

$$i_{F_1}^{\prime} = \frac{1}{c_1 t} \mathbf{Im} \left[\frac{[(w_1/c_2)^2 - 2]^2}{(w_1/c_1)(w_1/c_2)^2 \sqrt{(y/c_1)^2 - 1}} \right] \quad (5.24)$$



$$i_{F_2}^I = \frac{1}{c_1 t} \operatorname{Im} \left[\frac{4 \left((w_2/c_2)^2 - 1 \right)}{(w_2/c_1)(w_2/c_2)^2 \sqrt{(y/c_2)^2 - 1}} \right] \quad (5.25)$$

$$i_{G_1}^{II} = \frac{1}{c_1 t} \operatorname{Im} \left[\frac{4 \left[(w_1/c_1)^2 - 1 \right]}{(w_1/c_1)(w_1/c_2)^2 \sqrt{(y/c_1)^2 - 1}} \right] \quad (5.26)$$

$$i_{G_2}^{II} = \frac{1}{c_1 t} \operatorname{Im} \left[\frac{\left[(w_2/c_2)^2 - 2 \right]^2}{(w_2/c_1)(w_2/c_2)^2 \sqrt{(y/c_2)^2 - 1}} \right] \quad (5.27)$$

$$i_{G_1}^I = i_{F_1}^{II} = \frac{1}{c_1 t} \operatorname{Im} \left[\frac{2 \left[(w_1/c_2)^2 - 2 \right] \sqrt{(w_1/c_1)^2 - 1}}{(w_1/c_1)(w_1/c_2)^2 \sqrt{(y/c_1)^2 - 1}} \right] \quad (5.28)$$

$$i_{G_2}^I = i_{F_2}^{II} = \frac{1}{c_1 t} \operatorname{Im} \left[\frac{2 \left[2 - (w_2/c_2)^2 \right] \sqrt{(w_2/c_2)^2 - 1}}{(w_2/c_1)(w_2/c_2)^2 \sqrt{(y/c_2)^2 - 1}} \right] \quad (5.29)$$

由(5.20)與(5.23)~(5.29)可知， \mathbf{V} 的奇異形式取決於 \hat{y}_i 。由於 $i_{G_1}^I + i_{G_2}^I = i_{F_1}^{II} + i_{F_2}^{II} \neq 0$ ，

所以方程式(5.8)的 \tilde{G}_i 與 \tilde{F}_i 為耦合問題，考慮垂直入射平面波 $\mathbf{t}_2 = (-Q, -P)^T$ ，並將

(5.23)~(5.29)代入(5.8)可得：

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{Q}_i^{(\ell)}}{\mu s} &= \frac{s\kappa_1/c_1}{N} \sum_{j=1}^M e^{\frac{-|h-h_j|s}{c_2}} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\cos(m\varphi^{(k)}) \sin(m\chi_{ij}^{(\ell)})}{m} \tilde{G}_j^{(k)} \\ &\quad - \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \frac{1}{r_{ij}^{\ell k}} \left(\tilde{V}_G^{II} (r_{ij}^{\ell k}, \theta_{ij}^{\ell k}) \tilde{G}_j^{(k)} + \tilde{V}_{GF} (r_{ij}^{\ell k}, \theta_{ij}^{\ell k}) \tilde{F}_j^{(k)} \right) \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{P}_i^{(\ell)}}{\mu s} &= \frac{s\kappa_1^2/c_1}{N} \sum_{j=1}^M e^{\frac{-|h-h_j|s}{c_1}} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\cos(m\varphi^{(k)}) \sin(m\chi_{ij}^{(\ell)})}{m} \tilde{F}_j^{(k)} \\ &\quad - \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \frac{1}{r_{ij}^{\ell k}} \left(\tilde{V}_{GF} (r_{ij}^{\ell k}, \theta_{ij}^{\ell k}) \tilde{G}_j^{(k)} + \tilde{V}_F^I (r_{ij}^{\ell k}, \theta_{ij}^{\ell k}) \tilde{F}_j^{(k)} \right) \end{aligned} \quad (5.31)$$

(5.30)與(5.31)中， \tilde{V}_G^{II} 、 \tilde{V}_{GF} 與 \tilde{V}_F^I 為 V_G^{II} 、 V_{GF} 與 V_F^I 的 Laplace 對 t 轉換， \tilde{V}_G^{II} 、 \tilde{V}_{GF} 與

\tilde{V}_F^I 可藉由(5.24)~(5.29)的 Laplace 對 t 轉換與(5.23)決定之。首先，令 $t_i = r/c_i$ 並利用

(5.24)與第四章介紹的數值 Laplace 轉換法可得：



$$I_{F_1}^I = \int_0^t i_{F_1}^I e^{-st} dt = \int_0^t \operatorname{Re} \left[\frac{f_{F_1}(\theta, t)}{\sqrt{t^2 - 1}} \right] e^{-st} dt = -\frac{t_1}{r} (\bar{F}_1^I + \bar{F}_2^I + \bar{F}_3^I) \quad (5.32)$$

(5.32) 中：

$$f_{F_1}(\theta, t) = \frac{1}{\kappa_1^2} (\bar{w}(\theta, t)/t)^{-3} \left[(\kappa_1 \bar{w}(\theta, t)/t)^2 - 2 \right]^2 \quad (5.33)$$

$$\bar{F}_1^I = \int_1^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{f_{F_1}(\theta, t) - f_{F_1}(\theta, 1)}{\sqrt{t^2 - 1}} - g_{F_1}(\theta, t) \right] e^{-st_1} dt, \quad \bar{F}_2^I = \operatorname{Re} [f_{F_1}(\theta, 1)] K_0(st_1) \quad (5.34)$$

$$\bar{F}_3^I = \int_1^\infty \operatorname{Re} [g_{F_1}(\theta, t)] e^{-st_1} dt = \frac{e^{-st_1}}{\kappa_1^2} \left[\frac{8 + 8st_1 + 3(st_1)^2}{(st_1)^3} \cos 3\theta + \frac{3 - 4\kappa_1^2}{st_1} \cos \theta \right] \quad (5.35)$$

(5.33) 中：

$$\bar{w}(\theta, t) = \left[\cos \theta + \sin \theta \sqrt{(1/t)^2 - 1} \right] / \left[1 - (\sin \theta/t)^2 \right] \quad (5.36)$$

利用 Taylor 展開(5.36)可導得：

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{w}(\theta, t) &= \left[\cos \theta + i \left(1 - \frac{1}{2} t^2 \right) \sin \theta \right] \left[1 + \left(\frac{\sin \theta}{t} \right)^2 \right] = e^{i\theta} \left(1 + \frac{\bar{h}(\theta)}{t^2} \right) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{w}^2(\theta, t) &= e^{2i\theta} \left(1 + \frac{2\bar{h}(\theta)}{t^2} \right), \quad \bar{h}(\theta) = \left(\sin \theta - \frac{ie^{-i\theta}}{2} \right) \sin \theta \end{aligned} \quad (5.37)$$

(5.35)之 $g_{F_1}(\theta, t)$ 可由(5.37)與 Taylor 展開得：

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [g_{F_1}(\theta, t)] &= \operatorname{Re} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_{F_1}(\theta, t)}{t \sqrt{1 - (1/t)^2}} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{4t^2}{\kappa_1^2 e^{3i\theta}} \left(1 - \frac{\kappa_1^2 e^{2i\theta}}{t^2} \right) \left(1 + \frac{1}{2t^2} \right) \left(1 - \frac{3\bar{h}(\theta)}{t^2} \right) \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{4t^2}{\kappa_1^2 e^{3i\theta}} \left[1 + \left(\frac{1}{2} - 3\bar{h}(\theta) - \kappa_1^2 e^{2i\theta} \right) \frac{1}{t^2} \right] \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{4t^2}{\kappa_1^2} \left\{ e^{-3i\theta} + \left[\frac{e^{-3i\theta}}{2} - 3 \left(e^{-3i\theta} \sin^2 \theta - \frac{i}{2} e^{-4i\theta} \sin \theta \right) - \kappa_1^2 e^{-i\theta} \right] \frac{1}{t^2} \right\} \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{\kappa_1^2} \left(t^2 \cos 3\theta - \kappa_1^2 \cos \theta - 3 \sin^2 \theta \cos 3\theta + \frac{3}{2} \sin \theta \sin 4\theta + \frac{1}{2} \cos 3\theta \right) \\
&= \frac{1}{\kappa_1^2} \left[(4t^2 - 1) \cos 3\theta + (3 - 4\kappa_1^2) \cos \theta \right] \tag{5.38}
\end{aligned}$$

以相同的步驟，對(5.25)取 Laplace 對 t 轉換得：

$$I_{F_2}^I = \int_0^t i_{F_2}^I e^{-st} dt = \int_1^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{f_{F_2}(\theta, t)}{\sqrt{t^2 - 1}} \right] e^{-st_2 t} dt = -\frac{t_2}{r} (\bar{F}_4^I + \bar{F}_5^I + \bar{F}_6^I) \tag{5.39}$$

(5.39)中：

$$f_{F_2}(\theta, t) = 4(\bar{w}(\theta, t)/t)^{-3} \left[(\bar{w}(\theta, t)/t)^2 - 1 \right] \tag{5.40}$$

$$\bar{F}_4^I = \int_1^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{f_{F_2}(\theta, t) - f_{F_2}(\theta, 1)}{\sqrt{t^2 - 1}} - g_{F_2}(\theta, t) \right] e^{-st_2 t} dt, \quad \bar{F}_5^I = \operatorname{Re} [f_{F_2}(\theta, 1)] K_0(st_2) \tag{5.41}$$

$$\bar{F}_6^I = \int_1^\infty \operatorname{Re} [g_{F_2}(\theta, t)] e^{-st_2 t} dt = e^{-st_2} \left[\frac{\cos \theta}{st_2} - \frac{8 + 8st_2 + 3(st_2)^2}{(st_2)^3} \cos 3\theta \right] \tag{5.42}$$

(5.42)之 $g_{F_2}(\theta, t)$ 可由(5.37)與 Taylor 展開得：

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} [g_{F_2}(\theta, t)] &= \operatorname{Re} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_{F_2}(\theta, t)}{t\sqrt{1 - (1/t)^2}} \right] \\
&= -\operatorname{Re} \left[\frac{4t^2}{e^{3i\theta}} \left(1 - \frac{e^{2i\theta}}{t^2} \right) \left(1 + \frac{1}{2t^2} \right) \left(1 - \frac{3\bar{h}(\theta)}{t^2} \right) \right] \\
&= -\operatorname{Re} \left[\frac{4t^2}{e^{3i\theta}} \left[1 + \left(\frac{1}{2} - 3\bar{h}(\theta) - e^{2i\theta} \right) \frac{1}{t^2} \right] \right] \\
&= -4 \operatorname{Re} \left[t^2 \left\{ e^{-3i\theta} + \frac{1}{t^2} \left[\frac{e^{-3i\theta}}{2} - 3 \left(e^{-3i\theta} \sin^2 \theta - \frac{i \sin \theta}{2} e^{-4i\theta} \right) - e^{-i\theta} \right] \right\} \right] \\
&= -4 \left(t^2 \cos 3\theta + \frac{1}{2} \cos 3\theta - 3 \sin^2 \theta \cos 3\theta + \frac{3}{2} \sin \theta \sin 4\theta - \cos \theta \right) \\
&= \cos \theta - 4 \left(t^2 - \frac{1}{4} \right) \cos 3\theta \tag{5.43}
\end{aligned}$$



(5.26)取 Laplace 對 t 轉換得：

$$I_{G_1}'' = \int_0^t i_{G_1}'' e^{-st} dt = -\frac{t_1}{r} \int_1^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{f_{G_1}(\theta, t)}{\sqrt{t^2 - 1}} \right] e^{-st_1 t} dt = -\frac{t_1}{r} (\bar{F}_1'' + \bar{F}_2'' + \bar{F}_3'') \quad (5.44)$$

(5.44)中：

$$f_{G_1}(\theta, t) = \frac{4}{\kappa_1^2} (\bar{w}(\theta, t)/t)^{-3} \left[(\bar{w}(\theta, t)/t)^2 - 1 \right] \quad (5.45)$$

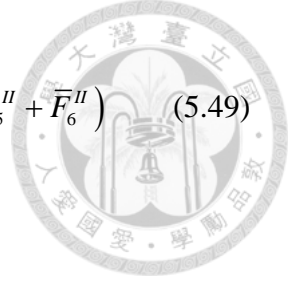
$$\bar{F}_1'' = \int_1^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{f_{G_1}(\theta, t) - f_{G_1}(\theta, 1)}{\sqrt{t^2 - 1}} - g_{G_1}(\theta, t) \right] e^{-st_1 t} dt, \quad \bar{F}_2'' = \operatorname{Re} [f_{G_1}(\theta, 1)] K_0(st_1) \quad (5.46)$$

$$\bar{F}_3'' = \int_1^\infty \operatorname{Re} [g_{G_1}(\theta, t)] e^{-st_1 t} dt = \frac{e^{-st_1}}{\kappa_1^2} \left[\frac{\cos \theta}{st_1} - \frac{8 + 8st_1 + 3(st_1)^2}{(st_1)^3} \cos 3\theta \right] \quad (5.47)$$

(5.47)之 $g_{G_1}(\theta, t)$ 可由(5.37)與 Taylor 展開得：

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [g_{G_1}(\theta, t)] &= \operatorname{Re} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_{G_1}(\theta, t)}{t \sqrt{1 - (1/t)^2}} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{4}{\kappa_1^2 e^{3i\theta}} \left(\frac{e^{2i\theta}}{t^2} - 1 \right) \left(1 + \frac{1}{2t^2} \right) \left(1 - \frac{3\bar{h}(\theta)}{t^2} \right) \right] \\ &= -\operatorname{Re} \left[\frac{4t^2}{\kappa_1^2 e^{3i\theta}} \left[1 + \left(\frac{1}{2} - 3h(\theta) - e^{2i\theta} \right) \frac{1}{t^2} \right] \right] \\ &= -\operatorname{Re} \left[\frac{4t^2}{\kappa_1^2} \left\{ e^{-3i\theta} + \left[\frac{e^{-3i\theta}}{2} - 3 \left(e^{-3i\theta} \sin^2 \theta - \frac{i}{2} e^{-4i\theta} \sin \theta \right) - e^{-i\theta} \right] \frac{1}{t^2} \right\} \right] \\ &= -\frac{4}{\kappa_1^2} \left(t^2 \cos 3\theta - \cos \theta - 3 \sin^2 \theta \cos 3\theta + \frac{3}{2} \sin \theta \sin 4\theta + \frac{1}{2} \cos 3\theta \right) \\ &= \frac{1}{\kappa_1^2} \left[\cos \theta - 4 \left(t^2 - \frac{1}{4} \right) \cos 3\theta \right] \quad (5.48) \end{aligned}$$

以相同的步驟，對(5.27)取 Laplace 對 t 轉換得：



$$I_{G_2}^{\prime\prime} = \int_0^t i_{G_2}^{\prime\prime} e^{-st} dt = -\frac{t_2}{r} \int_1^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{f_{G_2}(\theta, t)}{\sqrt{t^2 - 1}} \right] e^{-st_2 t} dt = -\frac{t_2}{r} (\bar{F}_4^{\prime\prime} + \bar{F}_5^{\prime\prime} + \bar{F}_6^{\prime\prime}) \quad (5.49)$$

(5.49)中：

$$f_{G_2}(\theta, t) = (\bar{w}(\theta, t)/t)^{-3} \left[(\bar{w}(\theta, t)/t)^2 - 2 \right]^2 \quad (5.50)$$

$$\bar{F}_4^{\prime\prime} = \int_1^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{f_{G_2}(\theta, t) - f_{G_2}(\theta, 1)}{\sqrt{t^2 - 1}} - g_{G_2}(\theta, t) \right] e^{-st_2 t} dt, \quad \bar{F}_5^{\prime\prime} = \operatorname{Re} [f_{G_2}(\theta, 1)] K_0(st_2) \quad (5.51)$$

$$\bar{F}_6^{\prime\prime} = \int_1^{\infty} \operatorname{Re} [g_{G_2}(\theta, t)] e^{-st_2 t} dt = e^{-st_2} \left[\frac{8 + 8st_2 + 3(st_2)^2}{(st_2)^3} \cos 3\theta - \frac{\cos \theta}{st_2} \right] \quad (5.52)$$

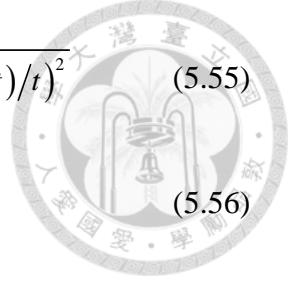
(5.52)之 $g_{G_2}(\theta, t)$ 可由(5.37)與 Taylor 展開得：

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [g_{G_2}(\theta, t)] &= \operatorname{Re} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_{G_2}(\theta, t)}{t \sqrt{1 - (1/t)^2}} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{4t^2}{e^{3i\theta}} \left(1 - \frac{e^{2i\theta}}{t^2} \right) \left(1 + \frac{1}{2t^2} \right) \left(1 - \frac{3\bar{h}(\theta)}{t^2} \right) \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{4t^2}{e^{3i\theta}} \left[1 + \frac{1}{t^2} \left(\frac{1}{2} - 3\bar{h}(\theta) - e^{2i\theta} \right) \right] \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{4t^2}{e^{3i\theta}} \left\{ 1 + \frac{1}{t^2} \left[\frac{1}{2} - 3 \left(\sin^2 \theta - \frac{i \sin \theta}{2} e^{-i\theta} \right) - e^{2i\theta} \right] \right\} \right] \\ &= 4 \left(t^2 \cos 3\theta + \frac{1}{2} \cos 3\theta - 3 \sin^2 \theta \cos 3\theta + \frac{3}{2} \sin \theta \sin 4\theta - \cos \theta \right) \\ &= 4 \left(t^2 - \frac{1}{4} \right) \cos 3\theta - \cos \theta \quad (5.53) \end{aligned}$$

(5.28)取 Laplace 對 t 轉換得：

$$I_{G_1}^I = I_{F_1}^{\prime\prime} = \int_0^t i_{G_1}^I e^{-st} dt = \frac{t_1}{r} \int_1^{\infty} \operatorname{Im} \left[\frac{f_{GF_1}(\theta, t)}{\sqrt{t^2 - 1}} \right] e^{-st_1 t} dt = \frac{t_1}{r} (\bar{F}_1^{GF} + \bar{F}_2^{GF} + \bar{F}_3^{GF}) \quad (5.54)$$

(5.54)中：



$$f_{GF_1}(\theta, t) = \frac{2}{\kappa_1^2} (\bar{w}(\theta, t)/t)^{-3} \left[(\kappa_1 \bar{w}(\theta, t)/t)^2 - 2 \right] \sqrt{1 - (\bar{w}(\theta, t)/t)^2} \quad (5.55)$$

$$\bar{F}_1^{GF} = \int_1^\infty \text{Im} \left[\frac{f_{GF_1}(\theta, t) - f_{GF_1}(\theta, 1)}{\sqrt{t^2 - 1}} - g_{GF_1}(\theta, t) \right] e^{-st_1} dt \quad (5.56)$$

$$\bar{F}_2^{GF} = \text{Im} [f_{GF_1}(\theta, 1)] K_0(st_1) \quad (5.57)$$

$$\bar{F}_3^{GF} = \int_1^\infty \text{Im} [g_{GF_1}(\theta, t)] e^{-st_1} dt = \frac{e^{-st_1}}{\kappa_1^2} \left[\frac{8 + 8st_1 + 3(st_1)^2}{(st_1)^3} \sin 3\theta - \frac{2\kappa_1^2 - 1}{st_1} \sin \theta \right] \quad (5.58)$$

(5.58)之 $g_{GF_1}(\theta, t)$ 可由(5.37)與 Taylor 展開得：

$$\begin{aligned} \text{Im} [g_{GF_1}(\theta, t)] &= \text{Im} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_{GF_1}(\theta, t)}{t \sqrt{1 - (1/t)^2}} \right] \\ &= -\text{Im} \left[\frac{2t^2}{\kappa_1^2 e^{3i\theta}} \left(1 - \frac{3\bar{h}(\theta)}{t^2} \right) \left(2 - \frac{\kappa_1^2 e^{2i\theta}}{t^2} \right) \left(1 - \frac{e^{2i\theta}}{2t^2} \right) \left(1 + \frac{1}{2t^2} \right) \right] \\ &= -\text{Im} \left[\frac{4t^2}{\kappa_1^2 e^{3i\theta}} \left(1 + \frac{1}{2t^2} - \frac{e^{2i\theta}}{2t^2} - \frac{\kappa_1^2 e^{2i\theta}}{2t^2} - \frac{3\bar{h}(\theta)}{t^2} \right) \right] \\ &= -\text{Im} \left[\frac{4t^2}{\kappa_1^2 e^{3i\theta}} \left\{ 1 + \left[\frac{1}{2} - 3\bar{h}(\theta) - \frac{(1 + \kappa_1^2)}{2} e^{2i\theta} \right] \frac{1}{t^2} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{\kappa_1^2} \left[4 \left(t^2 - \frac{1}{4} \right) \sin 3\theta - (2\kappa_1^2 - 1) \sin \theta \right] \quad (5.59) \end{aligned}$$

以相同的步驟，對(5.29)取 Laplace 對換得：

$$I_{G_2}^I = I_{E_2}^H = \int_0^t i_{G_2}^I e^{-st} dt = \frac{t_2}{r} \int_1^\infty \text{Im} \left[\frac{f_{GF_2}(\theta, t)}{\sqrt{t^2 - 1}} \right] e^{-st_2} dt = \frac{t_2}{r} (\bar{F}_4^{GF} + \bar{F}_5^{GF} + \bar{F}_6^{GF}) \quad (5.60)$$

(5.60)中：

$$f_{GF_2}(\theta, t) = 2(\bar{w}(\theta, t)/t)^{-3} (2 - \bar{w}^2(\theta, t)/t^2) \sqrt{1 - (\bar{w}(\theta, t)/t)^2} \quad (5.61)$$



$$\bar{F}_4^{GF} = \int_1^\infty \text{Im} \left[\frac{f_{GF_2}(\theta, t) - f_{GF_2}(\theta, 1)}{\sqrt{t^2 - 1}} - g_{GF_2}(\theta, t) \right] e^{-st_2 t} dt \quad (5.62)$$

$$\bar{F}_5^{GF} = \text{Im} [f_{GF_2}(\theta, 1)] K_0(st_2) \quad (5.63)$$

$$\bar{F}_6^{GF} = \int_1^\infty \text{Im} [g_{GF_2}(\theta, t)] e^{-st_2 t} dt = e^{-st_2} \left[\frac{\sin \theta}{st_2} - \frac{8 + 8st_2 + 3(st_2)^2}{(st_2)^3} \sin 3\theta \right] \quad (5.64)$$

(5.64)之 $g_{GF_2}(\theta, t)$ 可由(5.37)與 Taylor 展開得：

$$\begin{aligned} \text{Im} [g_{GF_2}(\theta, t)] &= \text{Im} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_{GF_2}(\theta, t)}{t \sqrt{1 - (1/t)^2}} \right] \\ &= \text{Im} \left[\frac{2t^2}{e^{3i\theta}} \left(2 - \frac{e^{2i\theta}}{t^2} \right) \left(1 - \frac{e^{2i\theta}}{2t^2} \right) \left(1 - \frac{3h(\theta)}{t^2} \right) \left(1 + \frac{1}{2t^2} \right) \right] \\ &= \text{Im} \left[\frac{4t^2}{e^{3i\theta}} \left[1 + \left(\frac{1}{2} - 3h(\theta) - e^{2i\theta} \right) \frac{1}{t^2} \right] \right] \\ &= \sin \theta - 4 \left(t^2 - \frac{1}{4} \right) \sin 3\theta \end{aligned} \quad (5.65)$$

將(5.32)~(5.65)代入(5.23)可得 $\tilde{V}_F^I(r, \theta, t)$ 、 $\tilde{V}_G^II(r, \theta, t)$ 與 $\tilde{V}_{GF}(r, \theta, t)$ 為：

$$\frac{1}{\pi r} \tilde{\mathbf{V}}(r, \theta, s) = \frac{1}{\pi} \begin{bmatrix} \tilde{V}_G^II(r, \theta, s) & \tilde{V}_{GF}(r, \theta, s) \\ \tilde{V}_{GF}(r, \theta, s) & \tilde{V}_F^I(r, \theta, s) \end{bmatrix} = \frac{\mu}{2\pi} \begin{bmatrix} I_{G_1}^II + I_{G_2}^II & I_{F_1}^II + I_{F_2}^II \\ I_{G_1}^I + I_{G_2}^I & I_{F_1}^I + I_{F_2}^I \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

將(5.35)與(5.42)代入(5.66)、(5.47)與(5.52)代入(5.66)、(5.58)與(5.64)代入(5.66)，並

利用終值定理(final value theorem)與 Taylor 展開得：

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s\beta_2}{\pi} \tilde{V}_F^I(r, \theta, s) = -\frac{\mu}{2\pi} \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{t_1}{r} \bar{F}_3^I + \frac{t_2}{r} \bar{F}_6^I \right) = \frac{\beta_2}{2\pi} \frac{\mu}{1-\nu} \frac{x_1(x_1^2 + 3x_2^2)}{r^4} \quad (5.67)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s\beta_2}{\pi} \tilde{V}_G^II(r, \theta, s) = -\frac{\mu}{2\pi} \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{t_1}{r} \bar{F}_3^II + \frac{t_2}{r} \bar{F}_6^II \right) = \frac{\beta_2}{2\pi} \frac{\mu}{1-\nu} \frac{x_1(x_1^2 - x_2^2)}{r^4} \quad (5.68)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s\beta_2}{\pi} \tilde{V}_{GF}(r, \theta, s) = \frac{\mu}{2\pi} \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{t_1}{r} \bar{F}_3^{GF} + \frac{t_2}{r} \bar{F}_6^{GF} \right) = \frac{\beta_2}{2\pi} \frac{\mu}{1-\nu} \frac{x_2(x_1^2 - x_2^2)}{r^4} \quad (5.69)$$

(5.67)~(5.69)為靜態差排所產生的應力(Weertman [33])。聯立裂縫閉合條件(5.15)與線性代數方程式(5.30)、(5.31)可得平行裂縫問題的待定函數 \tilde{G}_i 與 \tilde{F}_i 之矩陣方程式：

$$\frac{1}{s} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{Q}}_1^{(\ell)} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{Q}}_M^{(\ell)} \\ \bar{\mathbf{P}}_1^{(\ell)} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{P}}_M^{(\ell)} \end{Bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_{\ell k}^{11} & \cdots & \bar{\mathbf{C}}_{\ell k}^{1M} & \bar{\mathbf{E}}_{\ell k}^{11} & \cdots & \bar{\mathbf{E}}_{\ell k}^{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{C}}_{\ell k}^{M1} & \cdots & \bar{\mathbf{C}}_{\ell k}^{MM} & \bar{\mathbf{E}}_{\ell k}^{M1} & \cdots & \bar{\mathbf{E}}_{\ell k}^{MM} \\ \bar{\mathbf{E}}_{\ell k}^{11} & \cdots & \bar{\mathbf{E}}_{\ell k}^{1M} & \bar{\mathbf{D}}_{\ell k}^{11} & \cdots & \bar{\mathbf{D}}_{\ell k}^{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{E}}_{\ell k}^{M1} & \cdots & \bar{\mathbf{E}}_{\ell k}^{MM} & \bar{\mathbf{D}}_{\ell k}^{M1} & \cdots & \bar{\mathbf{D}}_{\ell k}^{MM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_1^{(k)} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{G}}_M^{(k)} \\ \tilde{\mathbf{F}}_1^{(k)} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{F}}_M^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (5.70)$$

(5.70)中：

$$\bar{\mathbf{C}}_{\ell k}^{ij} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11}^{ij} & \cdots & \bar{C}_{1N}^{ij} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{C}_{N-1,1}^{ij} & \cdots & \bar{C}_{N-1,N}^{ij} \\ \delta_{ij} & \cdots & \delta_{ij} \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_{\ell k}^{ij} = \frac{s\kappa_1/c_1}{N} \sum_{j=1}^M e^{\frac{-|h_i-h_j|s}{c_2}} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\cos(m\varphi^{(k)}) \sin(m\chi_{ij}^{(\ell)})}{m} - \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \frac{1}{r_{ij}^{\ell k}} \tilde{V}_G^{\text{II}}(r_{ij}^{\ell k}, \theta_{ij}^{\ell k}, s) \quad (5.71)$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{\ell k}^{ij} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{11}^{ij} & \cdots & \bar{E}_{1N}^{ij} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{E}_{N-1,1}^{ij} & \cdots & \bar{E}_{N-1,N}^{ij} \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{E}_{\ell k}^{ij} = -\frac{1}{2N} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \frac{1}{r_{ij}^{\ell k}} \tilde{V}_{GF}(r_{ij}^{\ell k}, \theta_{ij}^{\ell k}, s) \quad (5.72)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_{\ell k}^{ij} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{11}^{ij} & \cdots & \bar{D}_{1N}^{ij} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{D}_{N-1,1}^{ij} & \cdots & \bar{D}_{N-1,N}^{ij} \\ \delta_{ij} & \cdots & \delta_{ij} \end{bmatrix}, \quad \bar{D}_{\ell k}^{ij} = \frac{s\kappa_1^2/c_1}{N} \sum_{j=1}^M e^{\frac{-|h_i-h_j|s}{c_1}} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\cos(m\varphi^{(k)}) \sin(m\chi_{ij}^{(\ell)})}{m} - \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \frac{1}{r_{ij}^{\ell k}} \tilde{V}_F^{\text{I}}(r_{ij}^{\ell k}, \theta_{ij}^{\ell k}, s) \quad (5.73)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_i^{(\ell)} = (\tilde{Q}_i^{(1)}, \tilde{Q}_i^{(2)}, \dots, \tilde{Q}_i^{(N-1)}, 0)^T, \quad \tilde{\mathbf{G}}_i^{(k)} = (\tilde{G}_i^{(1)}, \tilde{G}_i^{(2)}, \dots, \tilde{G}_i^{(N)}) \quad (5.74)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_i^{(\ell)} = (\tilde{P}_i^{(1)}, \tilde{P}_i^{(2)}, \dots, \tilde{P}_i^{(N-1)}, 0)^T, \quad \tilde{\mathbf{F}}_i^{(k)} = (\tilde{F}_i^{(1)}, \tilde{F}_i^{(2)}, \dots, \tilde{F}_i^{(N)}) \quad (5.75)$$



由矩陣方程式(5.70)可求得 $\tilde{F}_i^{(k)}$ 與 $\tilde{G}_i^{(k)}$ ，將 $\tilde{F}_i^{(k)}$ 與 $\tilde{G}_i^{(k)}$ 代入(3.19)與(3.26)得 Laplace 轉換域第一型與第二型應力強度因子。

5.3 數值結果

本節利用 5.2 節介紹的待定函數矩陣方程式(5.70)與(3.19)、(3.26)求 Laplace 轉換域的應力強度因子 $\tilde{\mathbf{K}}$ ，再以 Miller 與 Guy [28]提出的反數值 Laplace 轉換(2.78)與(2.79)求時域應力強度因子 \mathbf{K} ，由收斂性測試得到參數 $M_\beta = -0.3$ 、 $M_\delta = -0.15$ 、 $N_M = 7$ (第一型應力強度因子)、 $N_M = 16$ (第二型應力強度因子)、 $N = 14$ 與 Gauss 積分點 $N_G = 300$ ，計算平面應力(plane stress)、波松比 $\nu = 0.25$ 、雙與三平行裂縫於縱波與橫波作用的應力強度因子。

5.3.1 數值參數測試

Miller 與 Guy [28]指出使用(2.78)與(2.79)時， $-0.5 \leq M_\beta \leq 5.0$ 與 $0.05 \leq M_\delta \leq 2.0$ 為 M_β 與 M_δ 的合適範圍，考慮裂縫中心重疊、平行且等長的雙裂縫， $\delta_h/a = 2.0$ 、 $a_1 = a_2 = a$ 、 $b_1 = b_2 = 0$ 、垂直入射縱波 $\mathbf{t}_2 = (0, -P)^T$ 於 $t = 0$ 作用於 $x_2 = 0$ ，如圖 5.1。以 4.3.1 分析得的 Gauss 積分點數 $N_G = 300$ 、 $M_\beta = -0.3$ 、 $M_\delta = 0.15$ 、 $N = 14$ 、 $N_M = 7$ 、10 與 15，計算裂縫尖端 A 的應力強度因子 $K'_I = K_I/P\sqrt{\pi a}$ ，如圖 5.2。以 $N_G = 300$ 、 $M_\beta = -0.3$ 、 $M_\delta = 0.15$ 、 $N_M = 7$ 、 $N = 14$ 、20 與 50，計算裂縫尖端 A 的應力強度因子 $K'_I = K_I/P\sqrt{\pi a}$ ，如圖 5.3。以 $N_G = 300$ 、 $M_\delta = 0.15$ 、 $N_M = 7$ 、 $N = 14$ 、 $M_\beta = -0.3$ 、0.0 與 3.0，計算裂縫尖端 A 的應力強度因子 $K'_I = K_I/P\sqrt{\pi a}$ ，如圖 5.4。



以 $N_G = 300$ 、 $M_\beta = -0.3$ 、 $N_M = 7$ 、 $N = 14$ 、 $M_\delta = 0.05$ 、 0.15 與 1.5 ，計算裂縫尖

端 A 的應力強度因子 $K'_I = K_I / P\sqrt{\pi a}$ ，如圖 5.5。

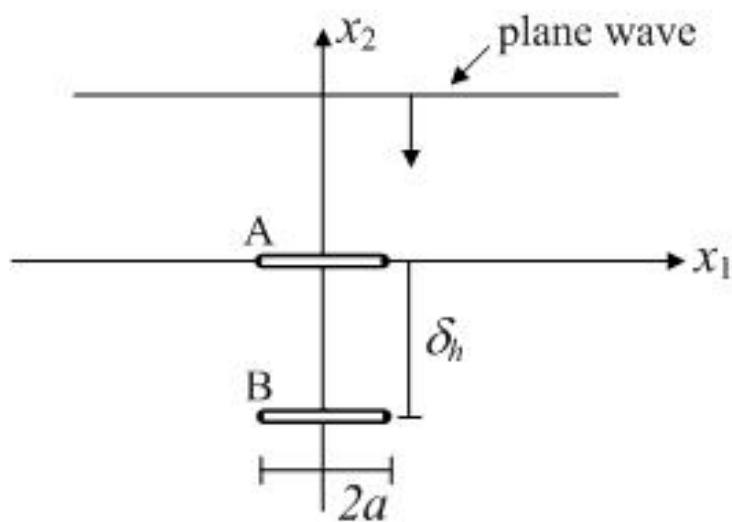


圖 5.1 裂縫中心重疊、平行、等長雙裂縫示意圖

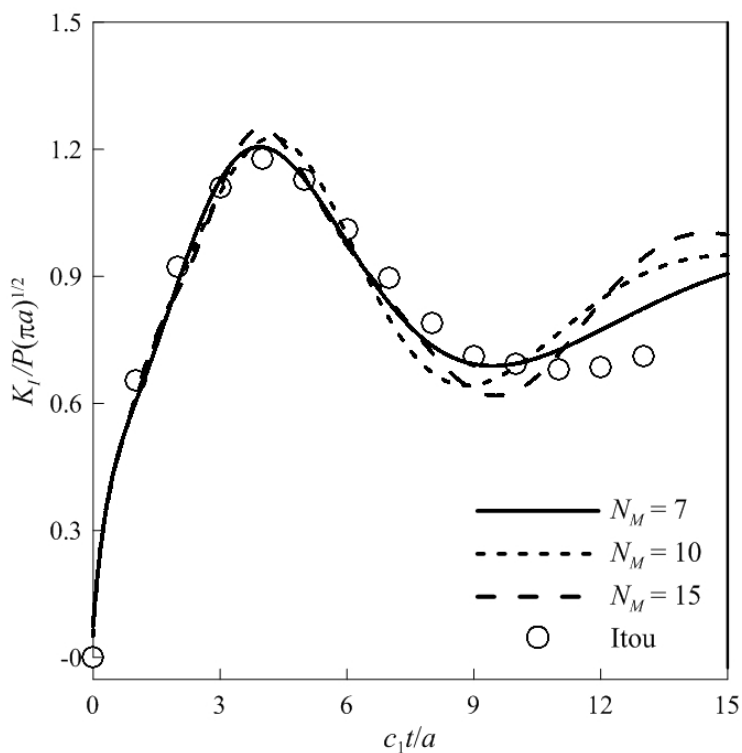


圖 5.2 裂縫中心重疊、平行且等長的雙裂縫，裂縫尖端 A 的應力強度因子 K'_I (不同 N_M)

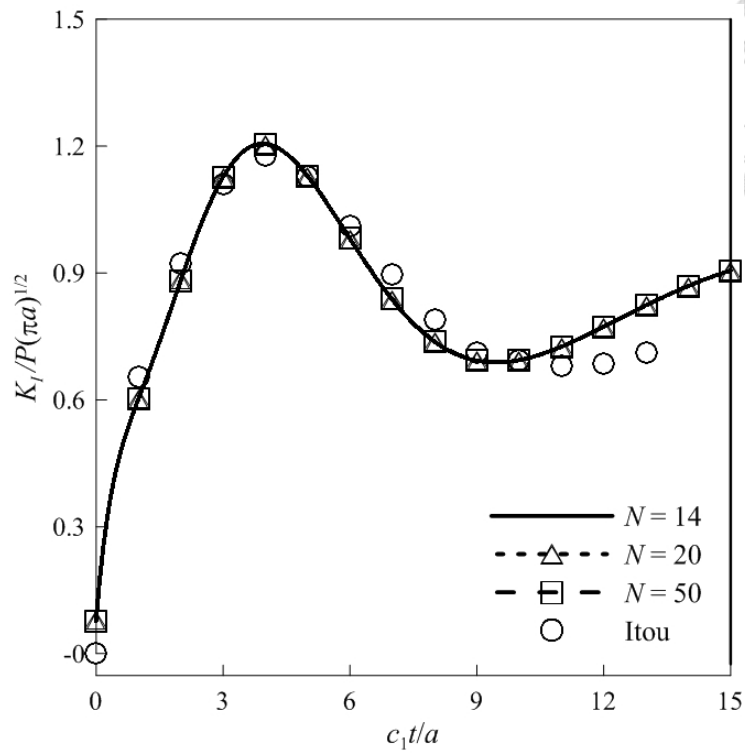


圖 5.3 裂縫中心重疊、平行且等長的雙裂縫，裂縫尖端 A 的應力強度因子 K_I' (不同 N)

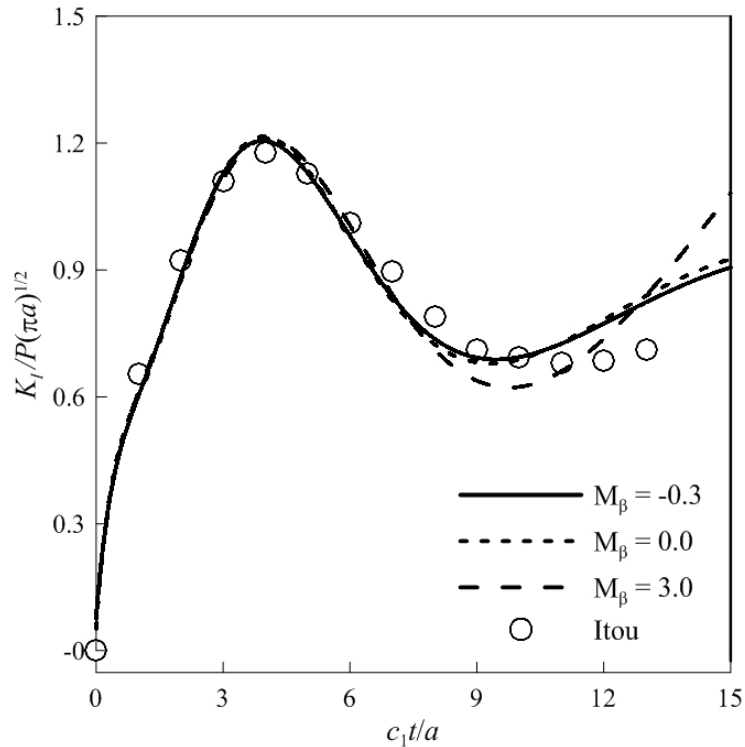


圖 5.4 裂縫中心重疊、平行且等長的雙裂縫，裂縫尖端 A 的應力強度因子 K_I' (不同 M_β)

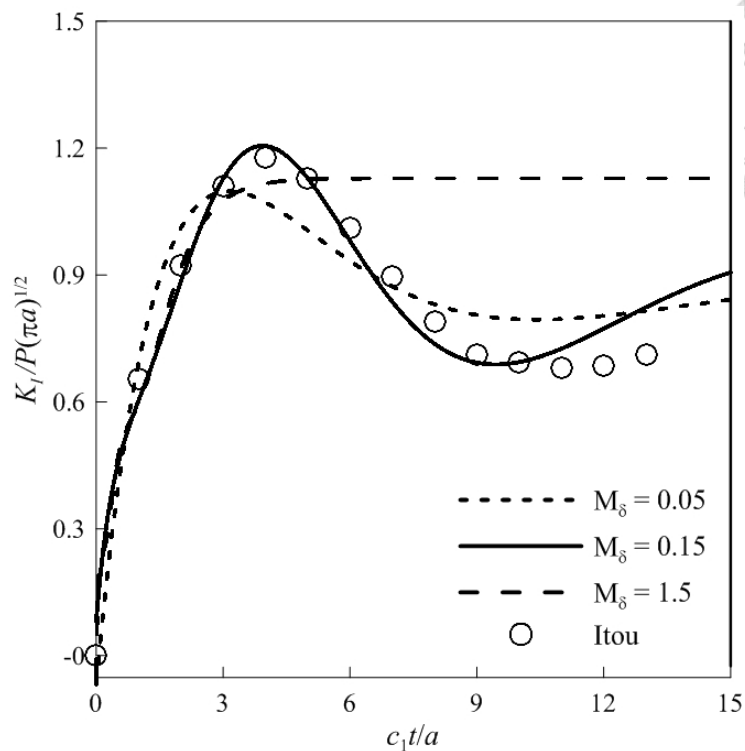


圖 5.5 裂縫中心重疊、平行且等長的雙裂縫，裂縫尖端 A 的應力強度因子 K_I' (不同 M_δ)

圖 5.2~5.5 為不同數值參數 (N_M 、 N 、 M_β 、 M_δ)、裂縫中心重疊、平行且等長的雙裂縫，裂縫尖端 A 的應力強度因子 K_I' ，並與 Itou [13] 比較之。圖 5.2 顯示：於 $t' = c_1 t / a < 7$ ，以 $N_M = 7$ 計算的應力強度因子 K_I' 與 Itou [13] 最吻合。並由圖 5.3 得 $N = 14$ 可計算得收斂結果。圖 5.4 顯示：於 $t' > 7$ ，以 $M_\beta = -0.3$ 計算的應力強度因子 K_I' 與 Itou [13] 最吻合。圖 5.5 顯示：以 $M_\delta = 0.15$ 計算的應力強度因子 K_I' 與 Itou [13] 最吻合。由 (2.78) 與 (2.79) 可知： M_β 、 M_δ 、 N_M 與 Laplace 轉換域應力強度因子 $\tilde{\mathbf{K}}(x_1, s_M)$ 有關 ($s_M = (M_\beta + 1 + k)M_\delta$)，其中， M_β 為 s_M 起點、 M_δ 為 s_M 的間距、 N_M 為 s_M 的點數。綜合上述討論可得結論：利用數值反 Laplace 轉換 (Miller 與 Guy [28]) 計算平行裂縫的應力強度因子須慎選 s_M ，不當的 s_M 會得到錯誤結果，且以



$M_\beta = -0.3$ 、 $M_\delta = -0.15$ 、 $N_M = 7$ 、 $N = 14$ 與 $N_G = 300$ 可得好的應力強度因子 K'_I 。

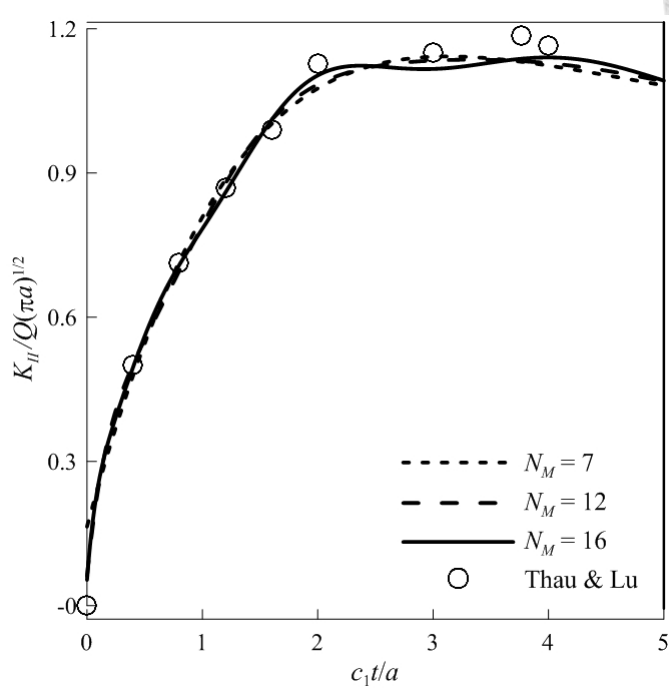
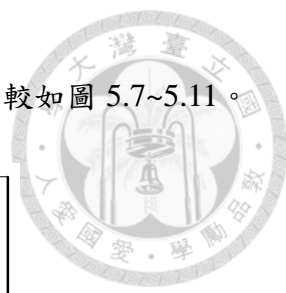


圖 5.6 垂直入射橫波作用於單裂縫，裂縫尖端的應力強度因子 K'_{II} (不同 N_M)

以 $N_G = 300$ 、 $M_\beta = -0.3$ 、 $M_\delta = -0.15$ 、 $N = 14$ 、 $N_M = 7$ 、12 與 16 計算平面應變、波松比 $\nu = 0.25$ 、垂直入射橫波 $\mathbf{t}_2 = (-Q, 0)^T$ 作用於單裂縫(圖 3.1)，裂縫尖端的應力強度因子 $K'_{II} = K_{II} / Q\sqrt{\pi a}$ 並與 Thau 與 Lu [2] 比較如圖 5.6。圖 5.6 顯示：以 $N_M = 16$ 計算應力強度因子 K'_{II} 可觀察得縱波與表面由裂縫尖端 $x_1 = \pm a$ 到達尖端 $x_1 = \mp a$ 的特徵。因此，以 $M_\beta = -0.3$ 、 $M_\delta = -0.15$ 、 $N_M = 16$ 、 $N = 14$ 與 $N_G = 300$ 作為後續計算應力強度因子 K'_{II} 的數值參數。

5.3.2 裂縫中心重疊、平行、等長雙裂縫

考慮裂縫中心重疊、平行且等長的雙裂縫，如圖 5.1，以 $\delta_h/a = 2.0$ 、1.0、0.2、 $a_1 = a_2 = a$ 、 $b_1 = b_2 = 0$ ，垂直入射縱波 $\mathbf{t}_2 = (0, -P)^T$ 於 $t = 0$ 作用於 $x_2 = 0$ ，計算裂



縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 $K'_1 = K_1 / P\sqrt{\pi a}$ ，並與 Itou [13] 比較如圖 5.7~5.11。

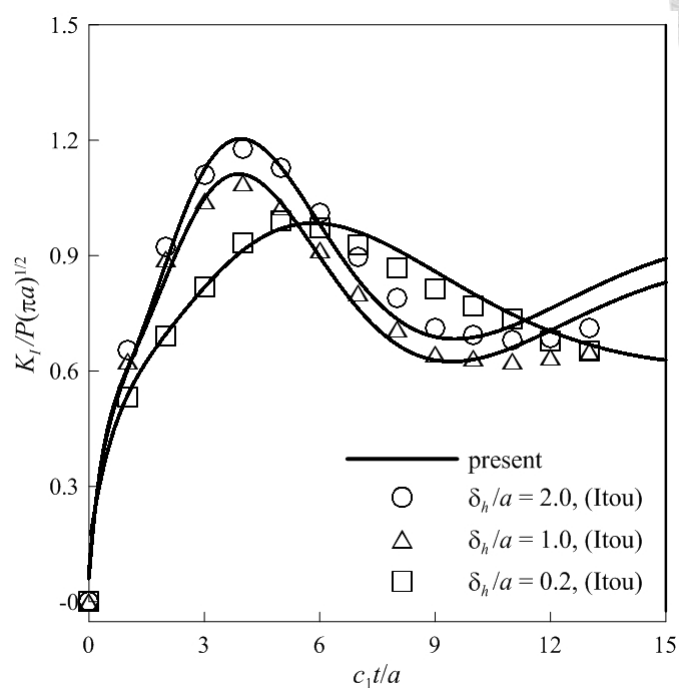


圖 5.7 裂縫中心重疊、平行且等長的雙裂縫，裂縫尖端 A 的應力強度因子 K'_1 (不同 δ_h)

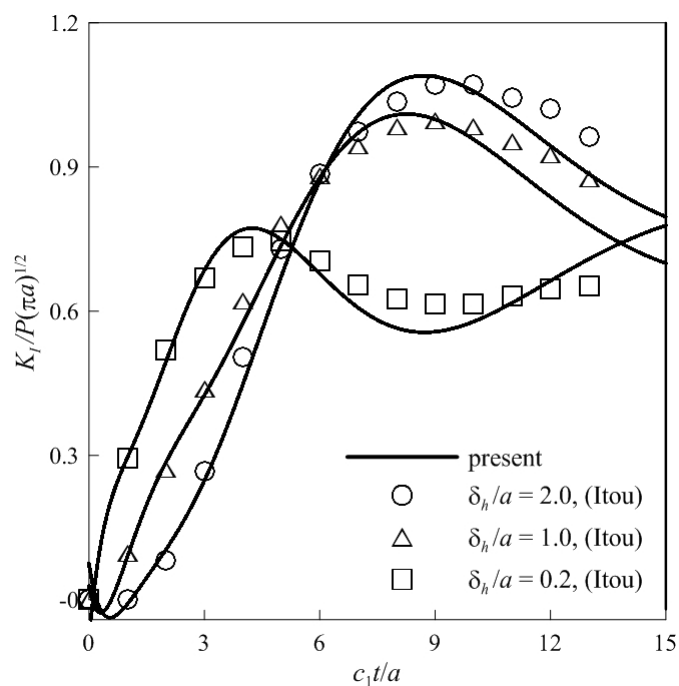


圖 5.8 裂縫中心重疊、平行且等長的雙裂縫，裂縫尖端 B 的應力強度因子 K'_1 (不同 δ_h)

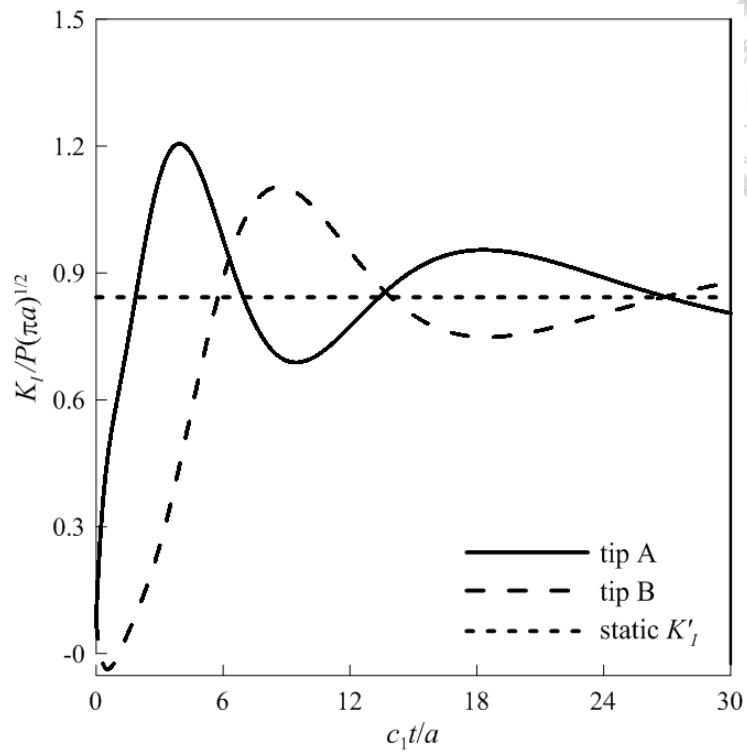


圖 5.9 裂縫中心重疊、平行且等長的雙裂縫，裂縫尖端 A、B 與靜態的應力強度因子 K'_I ($\delta_h/a = 2.0$)

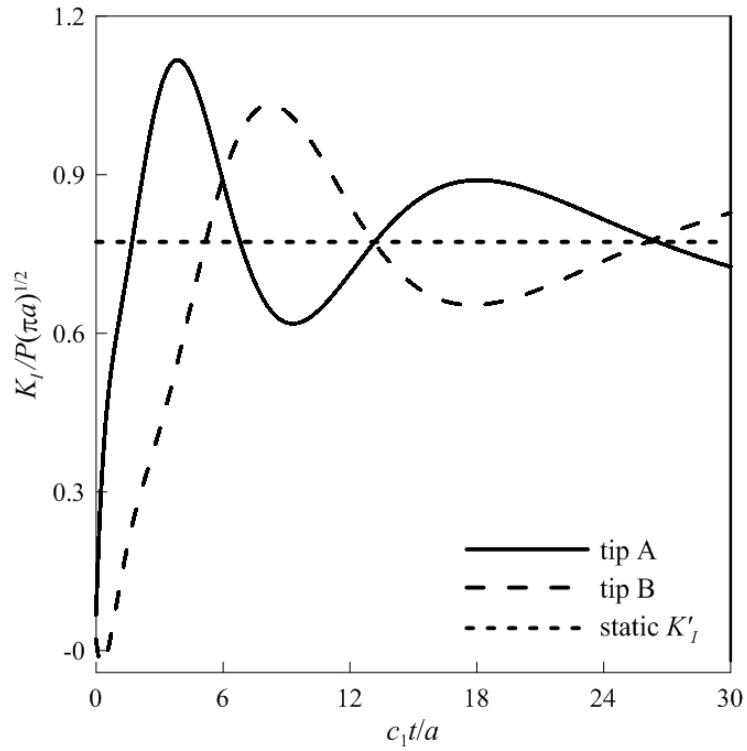


圖 5.10 裂縫中心重疊、平行且等長的雙裂縫，裂縫尖端 A、B 與靜態的應力強度因子 K'_I ($\delta_h/a = 1.0$)

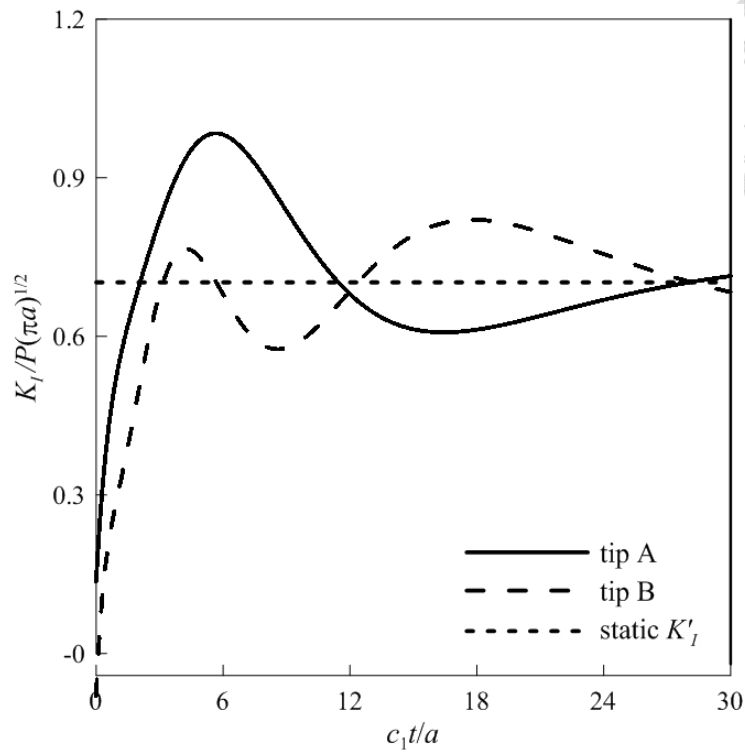


圖 5.11 裂縫中心重疊、平行且等長的雙裂縫，裂縫尖端 A、B 與靜態的應力強度因子 K'_I ($\delta_h/a = 0.2$)

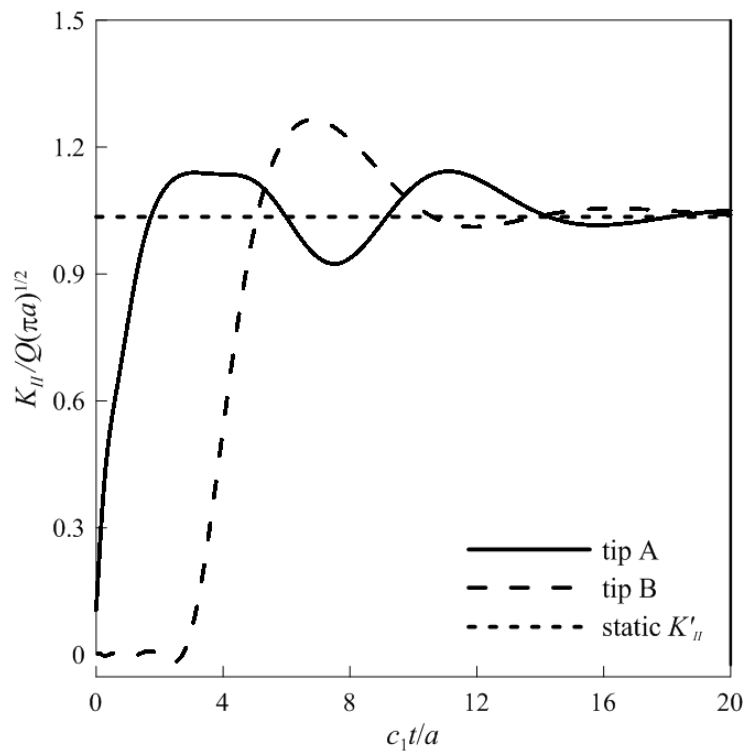


圖 5.12 裂縫中心重疊、平行、等長雙裂縫，裂縫尖端 A、B 與靜態的應力強度因子 K'_{II} ($\delta_h/a = 2.0$)

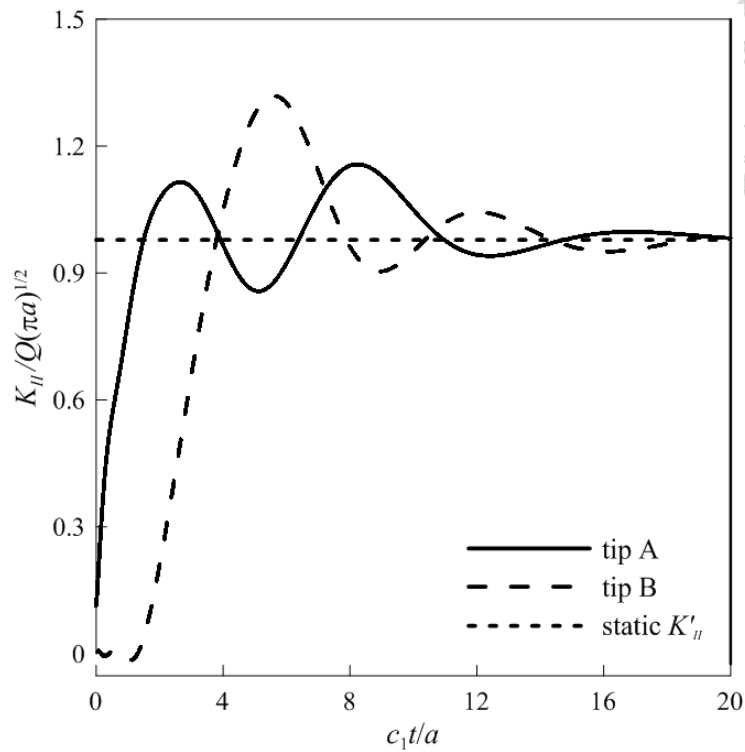


圖 5.13 裂縫中心重疊、平行、等長雙裂縫，裂縫尖端 A、B 與靜態的應力強度因子 K'_{II} ($\delta_h/a = 1.0$)

考慮裂縫中心重疊、平行、等長雙裂縫，如圖 5.1，以 $\delta_h/a = 2.0$ 、 1.0 ，垂直入射橫波 $\mathbf{t}_2 = (-Q, 0)^T$ 於 $t = 0$ 作用於 $x_2 = 0$ ，計算裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 $K'_{II} = K_{II} / Q\sqrt{\pi a}$ 如圖 5.12~5.13。

圖 5.7 與 5.8 為裂縫中心重疊、平行且等長的雙裂縫於 $\delta_h/a = 2.0$ 、 1.0 與 0.2 ，裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 K'_I ，結果顯示：於 $t' = c_1 t/a < 6$ ，計算結果與 Itou [13] 吻合。不同 δ_h/a ，裂縫尖端 A 的應力強度因子 K'_I 峰值皆大於裂縫尖端 B 的應力強度因子 K'_I 峰值。 δ_h/a 越大，裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 K'_I 也越大。入射縱波作用於上裂縫，裂縫尖端 A 產生繞射，當繞射波到達裂縫尖端 B 後，裂縫尖端 B 才有應力強度因子值。圖 5.9~5.11 為平行且等長的雙裂縫於 $\delta_h/a = 2.0$ 、 1.0 與 0.2 ，裂縫尖端 A、B 與靜態的應力強度因子 K'_I ，結果顯示：暫態應力強度因子

延靜態值振盪，當 $t' > 30$ ，暫態應力強度因子趨於靜態應力強度因子。對於裂縫尖端 A，暫態應力強度因子的峰值為靜態應力強度因子的 1.4 倍。

圖 5.12~5.13 為裂縫中心重疊、平行、等長雙裂縫於 $\delta_h/a = 2.0$ 與 1.0 ，裂縫尖端 A、B 與靜態的應力強度因子 K_{II}' ，結果顯示：暫態應力強度因子延靜態值振盪，當 $t' > 20$ ，暫態應力強度因子趨於靜態應力強度因子。

5.3.3 裂縫中心不重疊、平行且等長的雙裂縫

考慮裂縫中心不重疊、平行且等長的雙裂縫，如圖 5.14，以 $\delta_b/a = 1.0$ 、 2.0 、 4.0 、 $a_1 = a_2 = a$ 、 $(h_2 - h_1)/a = 2$ ，垂直入射縱波 $\mathbf{t}_2 = (0, -P)^T$ 於 $t = 0$ 作用於 $x_2 = 0$ ，計算裂縫尖端 A、B、C 與 D 的應力強度因子 $K_I' = K_I/P\sqrt{\pi a}$ ，如圖 5.15 與 5.16。垂直入射橫波 $\mathbf{t}_2 = (-Q, 0)^T$ 於 $t = 0$ 作用於 $x_2 = 0$ ，計算裂縫尖端 A、B、C 與 D 的應力強度因子 $K_{II}' = K_{II}/Q\sqrt{\pi a}$ ，如圖 5.17~5.18：

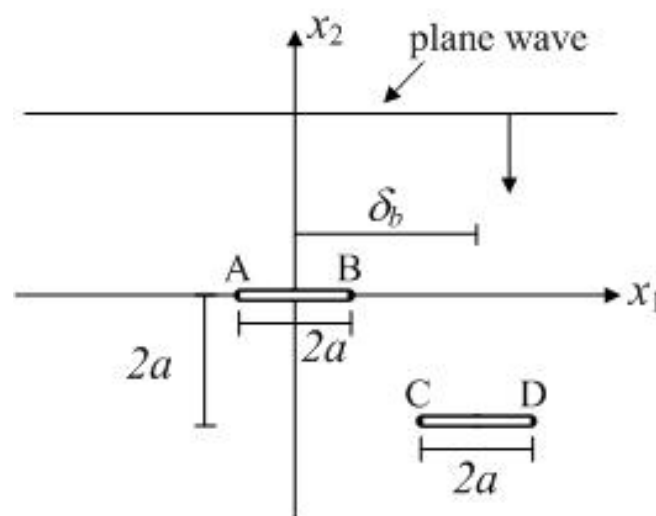


圖 5.14 裂縫中心不重疊、平行且等長的雙裂縫示意圖

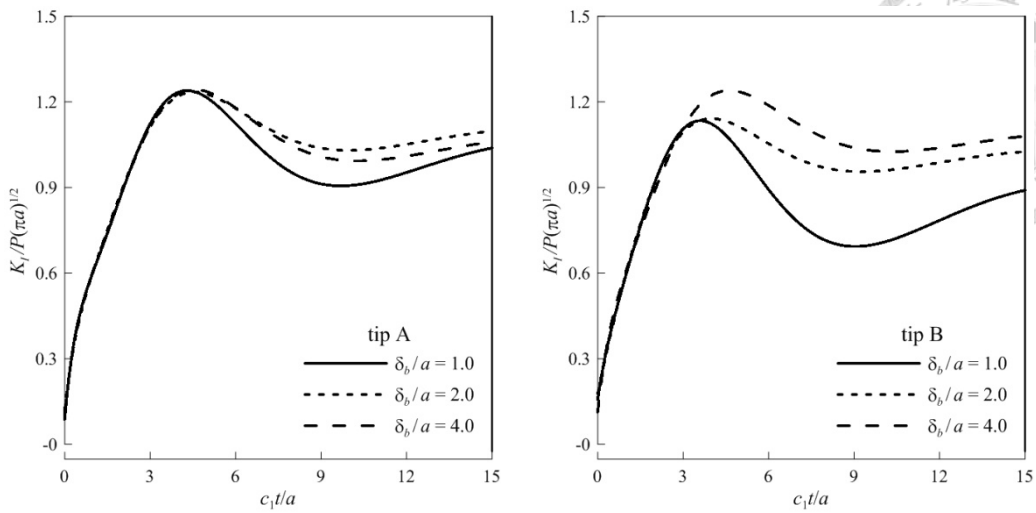


圖 5.15 裂縫中心不重疊、平行且等長的雙裂縫，上裂縫的應力強度因子 K_I' (不同 δ_b/a)

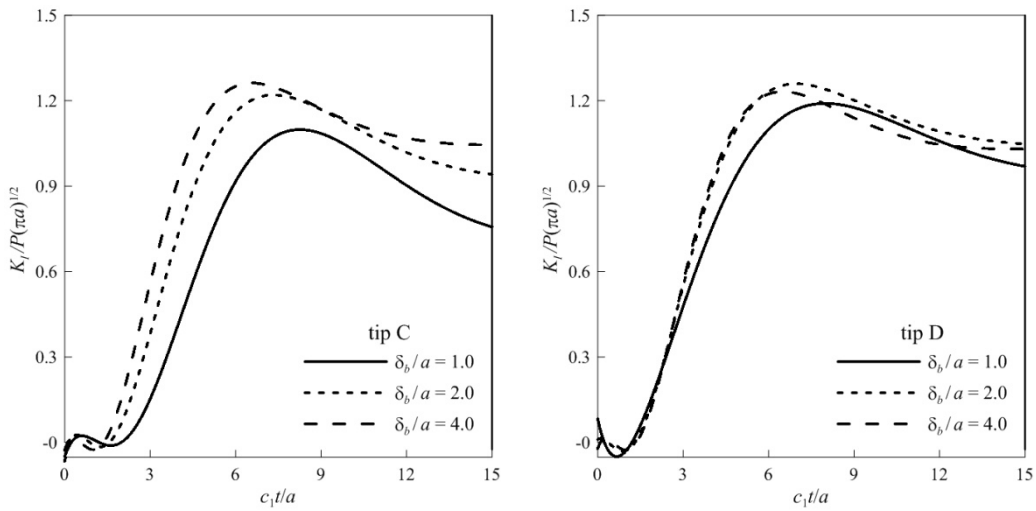


圖 5.16 裂縫中心不重疊、平行且等長的雙裂縫，下裂縫的應力強度因子 K_I' (不同 δ_b/a)

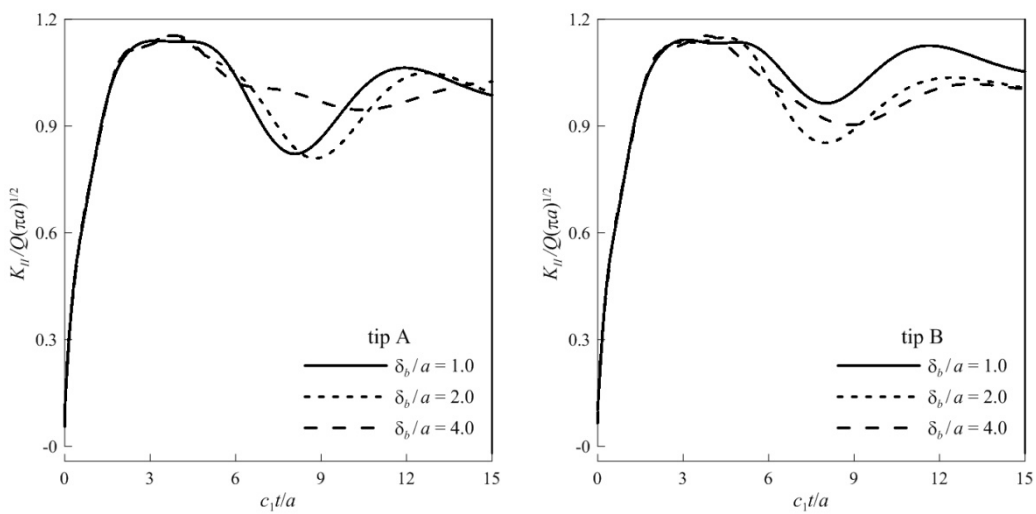


圖 5.17 裂縫中心不重疊、平行且等長的雙裂縫，上裂縫的應力強度因子 K_{II}' (不同 δ_b/a)

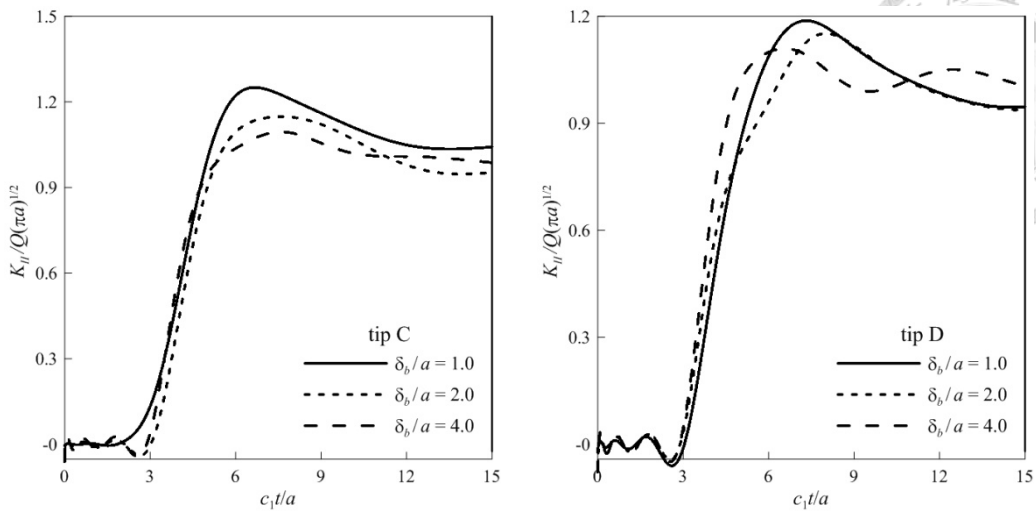


圖 5.18 裂縫中心不重疊、平行且等長的雙裂縫，下裂縫的應力強度因子 K'_{II} (不同 δ_b/a)

圖 5.15 與 5.16 為裂縫中心不重疊、平行且等長的雙裂縫、 $\delta_b/a=1.0$ 、2.0 與 4.0 (下裂縫不受入射波作用的範圍： $\delta_b/a=1.0$ 為半裂縫長、 $\delta_b/a=2.0$ 為裂縫尖端 C、 $\delta_b/a=4.0$ 為全裂縫)，裂縫尖端 A、B、C 與 D 的應力強度因子 K'_I ，結果顯示：對於不同 δ_b/a ，裂縫尖端 A 的應力強度因子 K'_I 峰值皆為 1.2。下裂縫被上裂縫半遮蔽($\delta_b/a=1.0$)與點遮蔽($\delta_b/a=2.0$)時，裂縫尖端 B 的應力強度因子 K'_I 峰值皆為 1.1，不遮蔽($\delta_b/a=2.0$)時，裂縫尖端 B 的應力強度因子 K'_I 峰值會增加至 1.24。下裂縫被上裂縫遮蔽越少(δ_b/a 越大)，裂縫尖端 C 的應力強度因子 K'_I 峰值越大，且越早發生。各尖端應力強度因子於 $t' = c_1t/a > 12$ 時，以 $\delta_b/a=1.0$ 計算之應力強度因子皆小於以 $\delta_b/a=2.0$ 與 4.0 計算之應力強度因子。

圖 5.17 與 5.18 為裂縫中心不重疊、平行且等長的雙裂縫、 $\delta_b/a=1.0$ 、2.0 與 4.0，裂縫尖端 A、B、C 與 D 的應力強度因子 K'_{II} ，結果顯示：不同 δ_b/a ，裂縫尖端 A 與 B(上裂縫)的應力強度因子 K'_{II} 峰值皆為 1.14~1.15。裂縫尖端 C 與 D(下裂



縫)的應力強度因子 K'_{II} 峰值，於 $\delta_b/a=1.0$ 時最大、 $\delta_b/a=2.0$ 時次之、 $\delta_b/a=4.0$ 時最小。

5.3.4 裂縫中心重疊、平行且等長的三裂縫

考慮裂縫中心重疊、平行且等長的三裂縫，裂縫間距 $2a$ ，如圖 5.19，考慮垂直入射縱波 $t_2 = (0, -P)^T$ 於 $t=0$ 作用於 $x_2=0$ ，計算裂縫尖端 A、B 與 C 的應力強度因子 $K'_I = K_I/P\sqrt{\pi a}$ ，並與同條件但雙裂縫(圖 5.1)的應力強度因子 K'_I 比較如圖

5.20。垂直入射橫波 $t_2 = (-Q, 0)^T$ 於 $t=0$ 作用於 $x_2=0$ ，計算裂縫尖端 A、B 與 C 的應力強度因子 $K'_{II} = K_{II}/Q\sqrt{\pi a}$ ，並與同條件但雙裂縫(圖 5.1)的應力強度因子 K'_{II} ，比較如圖 5.21。

圖 5.20 中，實線為裂縫中心重疊、平行且等長的三裂縫、等裂縫間距 $2a$ ，裂縫尖端 A、B 與 C 的應力強度因子 K'_I ，虛線為圖 5.1，縫中心重疊、平行且等長的雙裂縫、裂縫間距 $\delta_h/a=2.0$ ，裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 K'_I ，結果顯示：平行三裂縫於 $t'=c_1t/a < 8$ 時，由於裂縫尖端 C 的繞射波未抵達裂縫尖端 A，因此平行三裂縫與雙裂縫的上裂縫($x_2=0$)應力強度因子 K'_I 一致。相對於平行雙裂縫，平行三裂縫尖端 C 的繞射波影響使應力強度因子 K'_I 降低。對於平行三裂縫的應力強度因子 K'_I 峰值，裂縫尖端 A 大於 C 大於 B。

圖 5.21 中，實線為裂縫中心重疊、平行且等長的三裂縫、等裂縫間距 $2a$ ，裂縫尖端 A、B 與 C 的應力強度因子 K'_{II} ，虛線為圖 5.1，縫中心重疊、平行且等長的雙裂縫、裂縫間距 $\delta_h/a=2.0$ ，裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 K'_{II} ，結果顯示：



對於平行三裂縫的應力強度因子峰值，裂縫尖端 C 大於 B 大於 A。

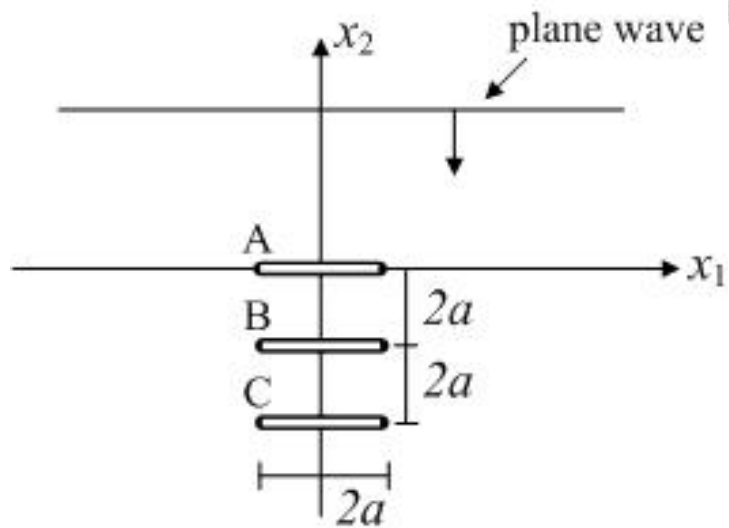


圖 5.19 裂縫中心重疊、平行且等長的三裂縫示意圖

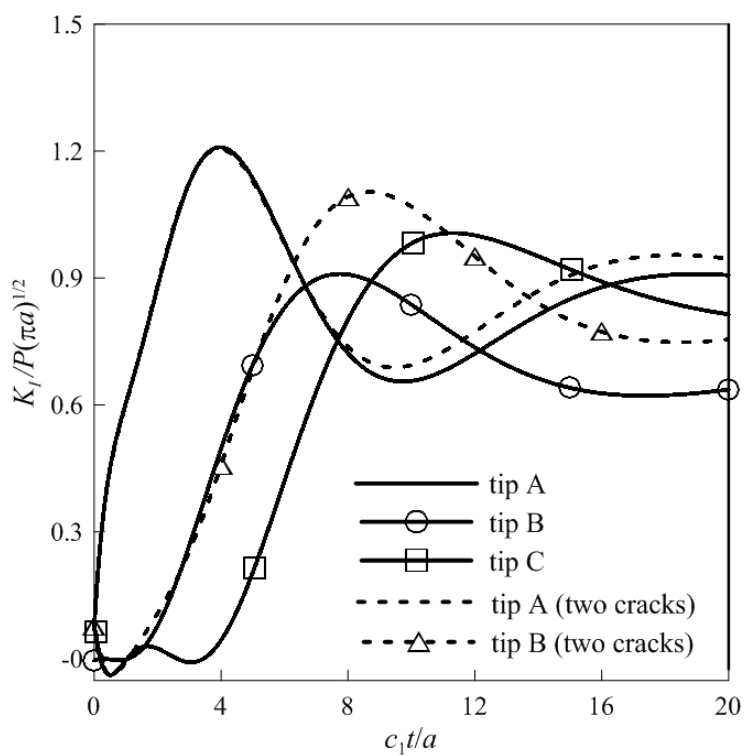


圖 5.20 裂縫中心重疊、平行且等長的三裂縫，裂縫尖端 A、B 與 C 的應力強度因子 K_I'

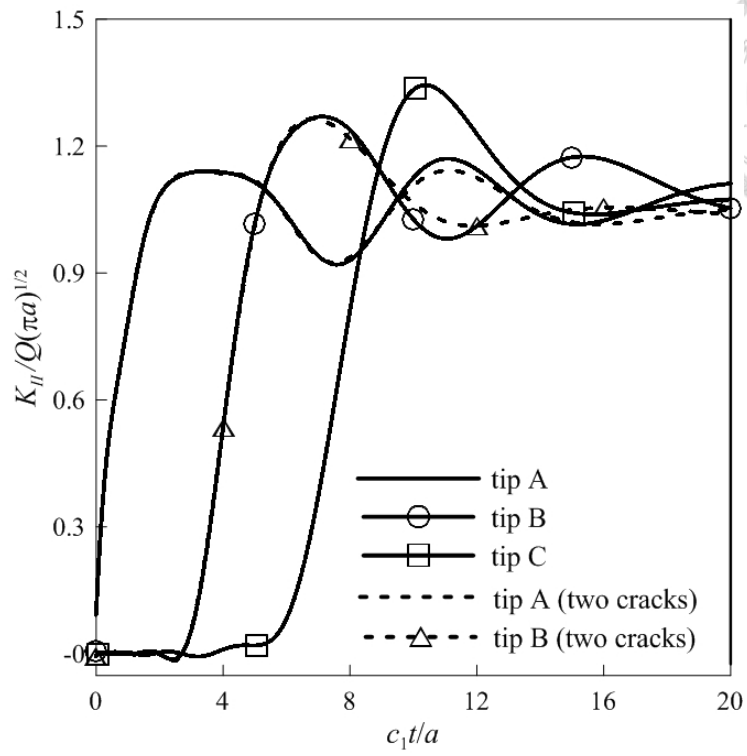


圖 5.21 裂縫中心重疊、平行且等長的三裂縫，裂縫尖端 A、B 與 C 的應力強度因子 K'_{II}

第六章 平行裂縫於正交性介質的應力強度因子

由於 $p(w)$ 在平行裂縫與正交性材料的型式複雜，所以難以導得 \mathbf{V} 的奇異解析型式，因此，本章以六維特徵值問題(2.12)求數值 p 、 \mathbf{a} 與 \mathbf{b} ，代入(5.3)得數值 \mathbf{V} ，並以 Gauss 積分求 \mathbf{V} 的數值 Laplace 轉換。由於正交性材料的波速 $c(\theta)$ 與 θ 有關，對於平行裂縫與進平面問題， $c(\theta)$ 需藉由波前曲面圖(wave front surface)分析，本章第 1 節介紹波前曲面圖的繪製方法，第 2 節推導數值 \mathbf{V} 的奇異形式(singular form)，並介紹 Laplace 轉換域應力強度因子 $\tilde{\mathbf{K}}$ 的求解方法，第 3 節利用 Miller 與 Guy [28] 反 Laplace 轉換計算雙與三平行裂縫於鈹的第一型與第二型應力強度因子 K_I 與 K_{II} 並討論其數值結果。

6.1 波前曲面圖

Wu [25]指出，為討論 p_α 的解(Chadwick 與 Smith [34])，令

$$p(\theta) = \tan \theta \quad (6.1)$$

將(6.1)代入(2.10)得：

$$\mathbf{Z}(\theta)\mathbf{a} = \rho(y_1 \cos \theta + y_2 \sin \theta)^2 \mathbf{a} \quad (6.2)$$

(6.2)中：

$$\mathbf{Z}(\theta) = \left[\mathbf{Q} \cos^2 \theta + (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) \sin \theta \cos \theta + \mathbf{T} \sin^2 \theta \right] \quad (6.3)$$

(6.3)之矩陣 $\mathbf{Z}(\theta)$ 與往 $(\cos \theta, \sin \theta)$ 傳播的平面波有關，依此可將(6.2)改寫為：

$$\mathbf{Z}(\theta)\mathbf{a}(\theta) = \rho c^2(\theta)\mathbf{a}(\theta) \quad (6.4)$$

(6.4)中， $\mathbf{a}(\theta)$ 為極化(polarization)向量、 $c(\theta)$ 為波速，利用 $w = y_1 + p(w)y_2$ 並比較



(6.2)與(6.4)可得：

$$w(\theta) = \frac{c(\theta)}{\cos \theta} \quad (6.5)$$

$$y_1 \cos \theta + y_2 \sin \theta = c(\theta) \quad (6.6)$$

方程式(6.6)建立的曲面亦滿足：

$$-y_1 \sin \theta + y_2 \cos \theta = c'(\theta) \quad (6.7)$$

聯立(6.6)與(6.7)得：

$$y_1 = c(\theta) \cos \theta - c'(\theta) \sin \theta \quad (6.8)$$

$$y_2 = c(\theta) \sin \theta + c'(\theta) \cos \theta$$

將 $\theta = 0 \sim 2\pi$ 代入(6.8)可繪製波前曲面。由(6.1)、(6.5)與(6.8)可得：

$$p'(w) = \frac{p'(\theta)}{w'(\theta)} = \frac{1}{y_2} \quad (6.9)$$

利用 $w = y_1 + p(w)y_2$ 與(6.9)得：

$$y_1 = w - \frac{p(w)}{p'(w)} \quad (6.10)$$

將(2.10)對 w 微分，並左乘 $\mathbf{a}^T(w)$ 得：

$$\mathbf{a}^T(w) \left[p'(w)(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + 2p(w)p'(w)\mathbf{T} - 2\rho w\mathbf{I} \right] \mathbf{a}(w) = \mathbf{0} \quad (6.11)$$

(6.11)式的推導已利用：

$$\mathbf{a}^T(w) \left[\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p^2\mathbf{T} - \rho w^2\mathbf{I} \right] = \mathbf{0}$$

將(2.9)代入(6.11)且利用純量轉置不變可得：

$$p'(w) = \rho w \frac{\mathbf{a}^T(w)\mathbf{a}(w)}{\mathbf{a}^T(w)\mathbf{b}(w)} \quad (6.12)$$

為求得(6.12)之 $p'(w)$ ，由(2.9)得：



$$p(w)\mathbf{a}(w) = -\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^T\mathbf{a}(w) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}(w) \quad (6.13)$$

將(6.13)代入(2.10)得：

$$(\mathbf{R}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^T - \mathbf{Q} + \rho w^2\mathbf{I})\mathbf{a} - \mathbf{R}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{b} = p\mathbf{b} \quad (6.14)$$

聯立(6.13)與(6.14)得：

$$\mathbf{N}\xi = p\xi \quad (6.15)$$

(6.15)中：

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_1^T \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

$$\mathbf{N}_1 = -\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^T, \quad \mathbf{N}_2 = -\mathbf{T}^{-1}, \quad \mathbf{N}_3 = \mathbf{R}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^T - \mathbf{Q} + \rho w^2\mathbf{I}$$

將不同 w 值代入(6.15)求得 $p(w)$ 、 $\mathbf{a}(w)$ 與 $\mathbf{b}(w)$ ，將 $p(w)$ 、 $\mathbf{a}(w)$ 與 $\mathbf{b}(w)$ 代入(6.12)

求得 $p'(w)$ ，利用(6.9)與(6.10)與求得的 $p(w)$ 與 $p'(w)$ 亦可繪製波前曲面圖。

6.2 $\tilde{\mathbf{V}}$ 與 Laplace 轉換域應力強度因子 $\tilde{\mathbf{K}}$ 的求解

使用 Gauss 積分求 \mathbf{V} 的 Laplace 轉換，須確定 \mathbf{V} 的奇異型式，首先，將(2.47)代入(5.3)可得：

$$\frac{1}{r}\mathbf{V}(r, \theta, t) = \text{Im} \left[\sum_{k=1}^2 \frac{1}{w_k \gamma_k(w_k)} \frac{\partial w_k}{\partial x_1} \mathbf{b}_k(w_k) \mathbf{b}_k^T(w_k) \right] \quad (6.17)$$

利用(2.47)與(2.48)可得 \mathbf{V} 於 $x_2 = 0$ 為：

$$\mathbf{V}(y_1) = -\text{Re} \left[i \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\gamma_k(y_1)} \mathbf{b}_k(y_1) \mathbf{b}_k^T(y_1) \right] = \text{Re} \left[\frac{\mathbf{L}(y_1)}{2} \right] \quad (6.18)$$

利用(2.45)得：

$$\zeta(t) = \frac{1}{\partial w / \partial x_1} = t - p'(w)x_2 \quad (6.19)$$



(6.19)對 t 微分：

$$d\zeta = dt - p''(w)x_2 dw \quad (6.20)$$

(6.20)之 dw 可由 $w = y_1 + p(w)y_2$ 推導得：

$$dw = -w dt / \zeta \quad (6.21)$$

將(6.21)代入(6.20)得：

$$\zeta \frac{d\zeta}{dt} = \zeta + p''(w)x_2 w \quad (6.22)$$

令 $\varpi(t) = \zeta^2(t)/2$ ：

$$\frac{d\varpi}{dt} = \zeta \frac{d\zeta}{dt} \quad (6.23)$$

(6.23)代入(6.22)得：

$$\frac{d\varpi}{dt} = \zeta + p''(w)x_2 w \quad (6.24)$$

由(5.23)~(5.29)可知，當 $y = c_1$ 或 $y = c_2$ ，即 $t = t_1$ 或 $t = t_2$ 時($t_i = r/c_i(\theta)$)， \mathbf{V} 分母為

0，由於 w_k 與 $\gamma_k(w_k)$ 不為0，由(6.19)可得 $t = t_i$ 時：

$$\zeta(t_i) = t_i - p'(w_i)x_2 = 0 \quad (6.25)$$

由(6.24)，並令 $t \rightarrow t_i + \varepsilon_1$ ，其中 ε_1 為趨近於零得正數：

$$\varpi(t_i + \varepsilon_1) = \varpi(t_i) + \varpi'(t_i)\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_1 d\varpi(t_i)}{dt} = p''(w_i)x_2 w_i \varepsilon_1 = \frac{\zeta^2(t_i + \varepsilon_1)}{2} \quad (6.26)$$

整理(6.26)可得：

$$\zeta(t_i + \varepsilon_1) = \sqrt{2p''(w_i)x_2 w_i \varepsilon_1} = \sqrt{p''(w_i)w_i c_i \sin \theta (t^2 - t_i^2)} \quad (6.27)$$

將(6.12)、(6.19)代入(6.27)得：

$$k_c(t_i) = \sqrt{p''(w_i)w_i c_i \sin \theta} = \left(t_i + \varepsilon_1 - \rho w_i \frac{\mathbf{a}^T(w_i)\mathbf{a}(w_i)}{\mathbf{a}^T(w_i)\mathbf{b}(w_i)} x_2 \right) / \sqrt{2t_i \varepsilon_1} \quad (6.28)$$



將(6.28)代入(6.17)，得 $t \rightarrow t_i$ 時：

$$\frac{1}{r} \mathbf{V}(r, \theta, t_i) = \text{Im} \left[\frac{\mathbf{b}_i(w_i) \mathbf{b}_i^T(w_i)}{k_c(t_i) w_i \gamma_i(w_i) \sqrt{t^2 - t_i^2}} \right] \quad (6.29)$$

(6.29)中， $w_i = c_i (\cos \theta + p_i(w_i) \sin \theta)$ 。由(5.23)~(5.29)可知， $y > c_1$ 時 \mathbf{V} 才有值，對

(6.17)取 Laplace 對 t 轉換：

$$\int_0^\infty \frac{1}{r} \mathbf{V}(r, \theta, t) e^{-st} dt = \int_0^\infty \text{Im} \left[\sum_{k=1}^2 \frac{\mathbf{b}_k(w_k) \mathbf{b}_k^T(w_k)}{t w_k \hat{\gamma}_k(w_k)} \right] H(c_1 - y) e^{-st} dt = \mathbf{f}_1^{nc} + \mathbf{f}_2^{nc} + \mathbf{f}_3^{nc} \quad (6.30)$$

(6.30)中：

$$\mathbf{f}_1^{nc} = \int_1^\infty \text{Im} \left[\sum_{k=1}^2 \frac{\mathbf{b}_k(\bar{w}_k) \mathbf{b}_k^T(\bar{w}_k)}{t \bar{w}_k \hat{\gamma}_k(\bar{w}_k)} - \mathbf{V}_S(r, \theta) - \mathbf{V}_\infty(r, \theta) \right] e^{-st} dt \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_2^{nc} &= \int_1^\infty \text{Im}[\mathbf{V}_S(r, \theta)] \\ &= \text{Im} \left[\frac{\mathbf{b}_1(\hat{w}_1) \mathbf{b}_1^T(\hat{w}_1)}{\hat{w}_1 \gamma_1(\hat{w}_1) k_1(1)} K_0(st_1) \right] + \text{Im} \left[\frac{\kappa_1 \mathbf{b}_2(\hat{w}_2/\kappa_1) \mathbf{b}_2^T(\hat{w}_2/\kappa_1)}{\hat{w}_2 \gamma_2(\hat{w}_2/\kappa_1) k_2(1)} K_0(st_2) \right] \\ &\quad - \text{Re} \left[\frac{\mathbf{b}_2(\hat{w}_2) \mathbf{b}_2^T(\hat{w}_2)}{\hat{w}_2 \gamma_2(\hat{w}_2) k_2(\kappa_1)} \int_0^{\sqrt{\kappa_1^2 - 1}} \frac{1}{\sqrt{\kappa_1^2 - u^2}} e^{-st_1 \sqrt{\kappa_1^2 - u^2}} du \right] \end{aligned} \quad (6.32)$$

$$\mathbf{f}_3^{nc} = \int_1^\infty \text{Im}[\mathbf{V}_\infty(r, \theta)] e^{-st} dt = \text{Im} \left[\mathbf{V}_\infty(r, \theta) \frac{e^{-st_1}}{s} \right] \quad (6.33)$$

(6.31)~(6.33)中：

$$\mathbf{V}_S(r, \theta) = \sum_{i=1}^{N_w} \frac{\mathbf{b}_i(\hat{w}_i) \mathbf{b}_i^T(\hat{w}_i)}{\hat{w}_i \gamma_i(\hat{w}_i) k_i(\hat{t}_i/t_1) \sqrt{t^2 - (\hat{t}_i/t_1)^2}} \quad (6.34)$$

$$\mathbf{V}_\infty(r, \theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^2 \frac{\mathbf{b}_k(\bar{w}_k) \mathbf{b}_k^T(\bar{w}_k)}{t \bar{w}_k \hat{\gamma}_k(\bar{w}_k)} \quad (6.35)$$

$$\bar{w}_k = w_k/t_1, \quad \hat{w}_i = (x_1 + p_i(\hat{w}_i) x_2)/t_1 \hat{t}_i, \quad \hat{t}_i = t_i + \varepsilon_1 \quad (6.36)$$



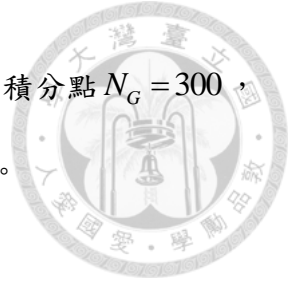
(6.31)中， $-\mathbf{V}_s(r, \theta)$ 是為了避開奇異點，使數值積分不會發散， $-\mathbf{V}_\infty(r, \theta)$ 是為了使數值積分收斂變快。 N_w 為角度 θ 與波曲面所交到的波數，慢剪力波不存在時，只有縱波與橫波，則 $N_w = 2$ ，慢剪力波存在時，有縱波、橫波與慢剪力波，則 $N_w = 3$ 。將(6.30)代入(5.66)得：

$$\frac{1}{r} \tilde{\mathbf{V}}(r, \theta, s) = \begin{bmatrix} \tilde{V}_G^{II}(r, \theta, s) & \tilde{V}_{GF}(r, \theta, s) \\ \tilde{V}_{GF}(r, \theta, s) & \tilde{V}_F^I(r, \theta, s) \end{bmatrix} = \mathbf{f}_1^{nc} + \mathbf{f}_2^{nc} + \mathbf{f}_3^{nc} \quad (6.37)$$

上述已導得計算平行裂縫問題所需之公式，以下將簡述求解流程。(1)決定裂縫坐落座標，並由(5.10)~(5.14)可得 r_{ij}^{lk} 與 θ_{ij}^{lk} 。(2)決定(6.31)~(6.32)的 Gauss 積分點可得 y_1 與 y_2 ，由六維特徵值問題(2.12)與 y_1 與 y_2 可求進平面問題的特徵值 p 與特徵向量 \mathbf{a} 與 $\hat{\mathbf{b}}$ ，利用 $w = y_1 + py_2$ 與(2.48)可求得 w 、 \mathbf{b} 、與 $\hat{\gamma}$ 。(3)由波前曲面與 θ_{ij}^{lk} 可決定正交性材料的波速 $c_i(\theta_{ij}^{lk})$ 與 $t_i = r/c_i(\theta_{ij}^{lk})$ 。(4)由(6.30)~(6.36)與求得的 w 、 \mathbf{b} 、 $\hat{\gamma}$ 、 t_i 可得平行裂縫於正交性介質與進平面問題的 $\tilde{V}_F^I(r_{ij}^{lk}, \theta_{ij}^{lk}, s)$ 、 $\tilde{V}_G^{II}(r_{ij}^{lk}, \theta_{ij}^{lk}, s)$ 與 $\tilde{V}_{GF}(r_{ij}^{lk}, \theta_{ij}^{lk}, s)$ 。平行裂縫於正交性介質，其待定函數 $\tilde{F}_i^{(k)}$ 與 $\tilde{G}_i^{(k)}$ 的矩陣方程式與5.2節導得的(5.70)形式一致，只需將計算之數值 $\tilde{V}_F^I(r_{ij}^{lk}, \theta_{ij}^{lk}, s)$ 、 $\tilde{V}_G^{II}(r_{ij}^{lk}, \theta_{ij}^{lk}, s)$ 與 $\tilde{V}_{GF}(r_{ij}^{lk}, \theta_{ij}^{lk}, s)$ 代入(5.71)~(5.73)，則可求平行裂縫於正交性介質的待定函數 $\tilde{F}_i^{(k)}$ 與 $\tilde{G}_i^{(k)}$ ，再以(4.43)與(4.44)計算得 Laplace 轉換域應力強度因子 $\tilde{\mathbf{K}}$ 。

6.3 數值結果

本節利用6.2節介紹的數值方法求 Laplace 轉換域 $\tilde{\mathbf{K}}$ ，再以(2.78)求時域應力強度因子 \mathbf{K} 。利用5.3節分析得參數 $M_\beta = -0.3$ 、 $M_\delta = -0.15$ 、 $N_M = 7$ (第一型應



力強度因子)、 $N_M = 16$ (第二型應力強度因子)、 $N = 14$ 與 Gauss 積分點 $N_G = 300$ ，計算鉞(表 4-1)於雙與三平行裂縫受平面波作用的應力強度因子。

6.3.1 方法驗證

為驗證本章介紹的方法(數值 V 求應力強度因子)正確，以本章介紹的方法求(1)圖 5.1，平行且等長的雙裂縫、裂縫間距 $\delta_h/a = 2.0$ 、 1.0 與 0.2 、等向性介質、平面應力、波松比 $\nu = 0.25$ 、垂直入射縱波 $\mathbf{t}_2 = (0, -P)^T$ 於 $t = 0$ 作用於 $x_2 = 0$ ，裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 $K'_I = K_I/P\sqrt{\pi a}$ ，並與第五章的結果(解析 V)比較如圖 6.1 與 6.2。(2)圖 4.1、共線等長雙裂縫，裂縫中心與中心距 $4a$ 、正交性材料鉞、垂直入射橫縱波 $-P$ 的應力強度因子 $K'_I = K_I/P\sqrt{\pi a}$ 與垂直入射橫波 $-Q$ 的應力強度因子 $K''_{II} = K_{II}/Q\sqrt{\pi a}$ ，並與第四章的結果(解析 L)比較如圖 6.3 與 6.4。

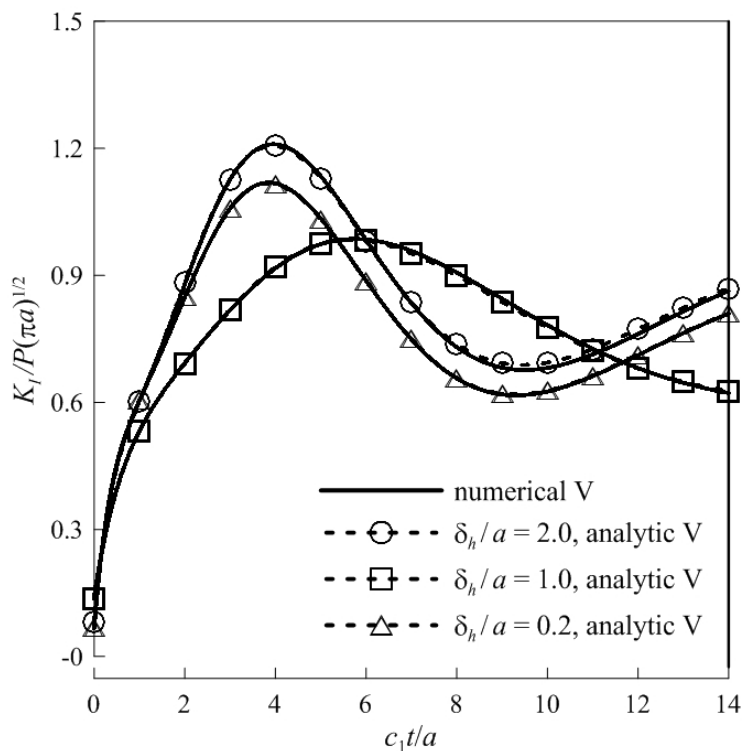


圖 6.1 以數值與解析 V 求平行且等長的雙裂縫，裂縫尖端 A 的應力強度因子 K'_I (不同 δ_h)

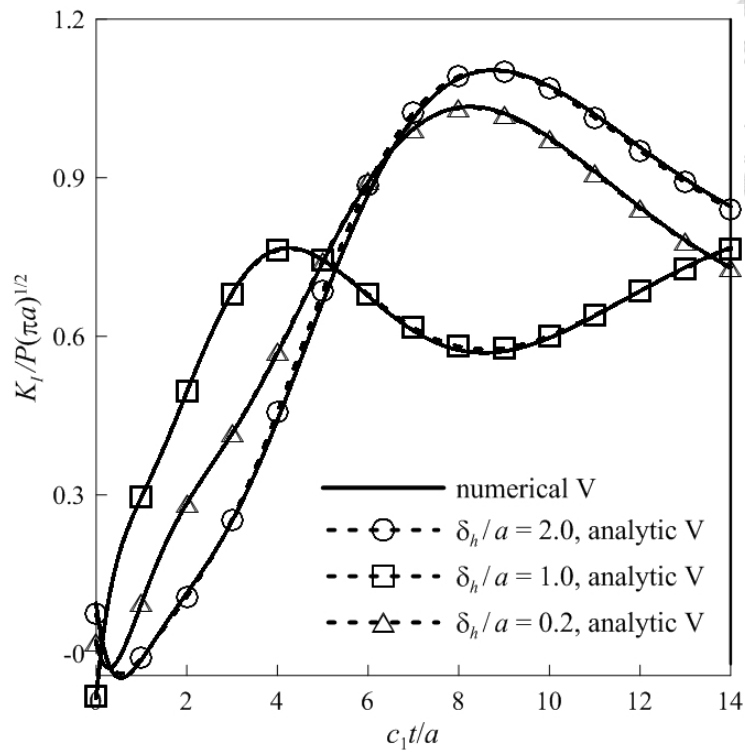


圖 6.2 以數值與解析 V 求平行且等長的雙裂縫，裂縫尖端 B 的應力強度因子 K_I' (不同 δ_h)

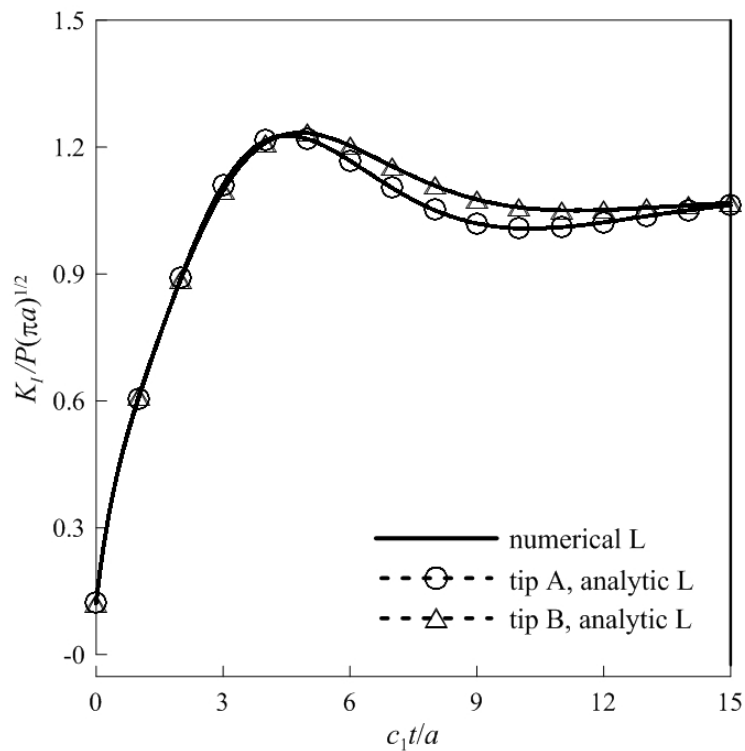


圖 6.3 以數值與解析 L 求等長共線雙裂縫、鉸，裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 K_I'

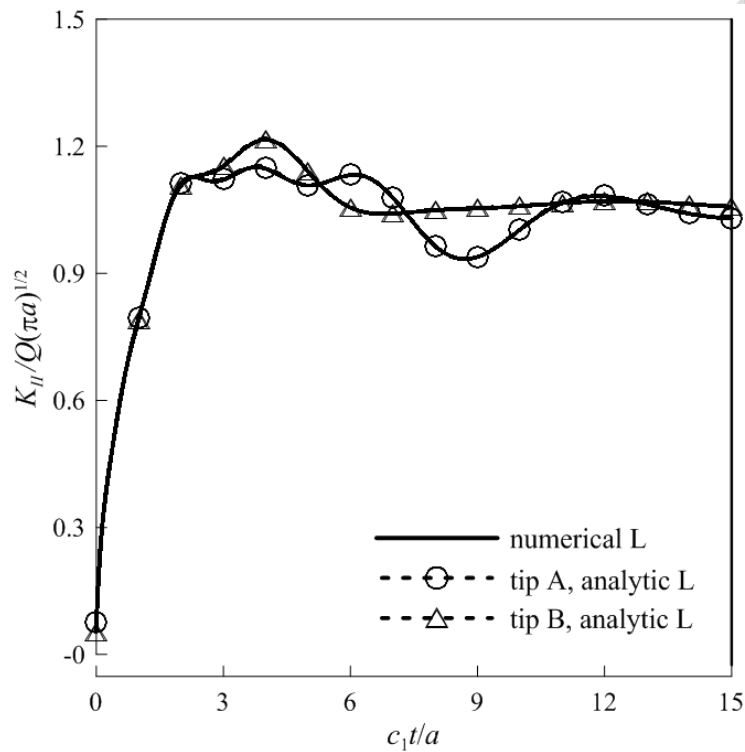


圖 6.4 以數值與解析 L 求等長共線雙裂縫、鉸，裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 K'_{II}

圖 6.1 與圖 6.2 中，實線為本章方法(數值法求 V)求得的應力強度因子 K'_I ，虛線為利用(5.23)~(5.29)解析 V 求得的應力強度因子 K'_I ，其中 $\delta_h/a = 1.0$ 與 0.2 時，數值法求 V 需利用較多的 Gauss 積分點 $N_G = 1000$ ，這是數值法求(6.34)、(6.35)與解析解間的差異所致。圖 6.3 與 6.4 中，實線為以本章方法(數值法求 L)求得的應力強度因子 K'_I 與 K'_{II} (由(6.18)可知，對於共線裂縫問題 $V(y_1) = \text{Re}[L(y_1)/2]$)，虛線為(4.10)解析 V 求得的應力強度因子 K'_I 與 K'_{II} 。結果顯示：以本章方法計算平行裂縫、等向性材料與共線裂縫、正交性材料的應力強度因子為準確的。

6.3.2 平行、不等長雙裂縫

對於正交性材料與平行裂縫問題，需先利用波前曲面圖進行分析，以(6.9)、



(6.10)、(6.12)與(6.15)求鉞的波前曲面圖，如圖 6.5：

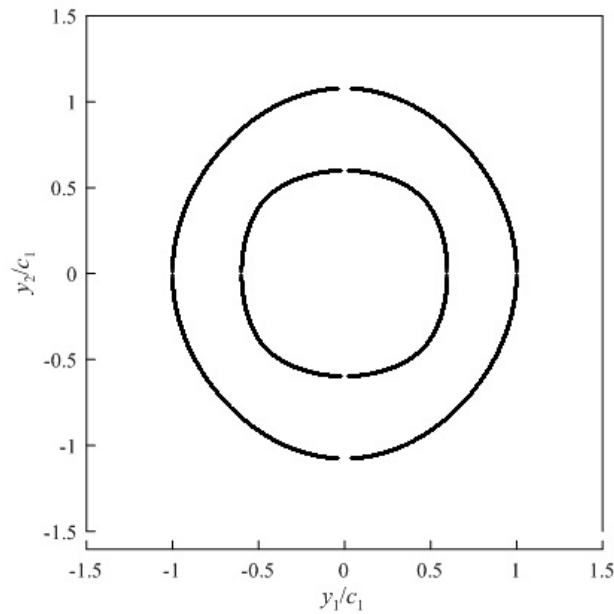


圖 6.5 鉞的波前曲面圖

由圖 6.5 可得任意 θ ， N_w 皆為 2。 $c(\theta)$ 值可藉由 $c(\theta) = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ 與 $\theta = \tan^{-1}(y_2/y_1)$ 求得。考慮考慮裂縫中心重疊、平行且不等長雙裂縫，如圖 6.6，考慮下裂縫長固定，以 $a_1/a = 1.5$ 、 2.0 ，垂直入射縱波 $\mathbf{t}_2 = (0, -P)^T$ 於 $t=0$ 作用於 $x_2=0$ ，計算裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 $K'_I = K_I/P\sqrt{\pi a}$ ，如圖 6.7。垂直入射橫波 $\mathbf{t}_2 = (-Q, 0)^T$ 於 $t=0$ 作用於 $x_2=0$ ，計算裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 $K'_{II} = K_{II}/Q\sqrt{\pi a}$ ，如圖 6.8。

圖 6.7 為裂縫中心重疊、平行且不等長雙裂縫、 $a_1/a = 1.5$ 、 2.0 (下裂縫長固定)，裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 K'_I ，結果顯示：越長的 a_1 使應力強度因子 K'_I 峰值越晚發生，裂縫尖端 A 的應力強度因子 K'_I 皆大於尖端 B 的應力強度因子 K'_I 。比較裂縫尖端 B 於 $a_1/a = 2.0$ 與 $a_1/a = 1.5$ 的應力強度因子可得： $a_1/a = 2.0$ 的應力



強度因子 K_I' 小於 $a_1/a=2.0$ 的應力強度因子 K_I' 。

圖 6.8 為裂縫中心重疊、平行且不等長雙裂縫、 $a_1/a=1.5$ 、 2.0 (下裂縫長固定)，裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 K_{II}' ，結果顯示：越長的 a_1 使應力強度因子 K_{II}' 峰值越晚發生。於 $a_1/a=1.5$ 、 2.0 ，裂縫尖端 A 的峰值皆為 1.1、尖端 B 皆為 1.3，即裂縫尖端 B 的應力強度因子 K_I' 峰值皆大於尖端 A 的應力強度因子 K_I' 峰值。

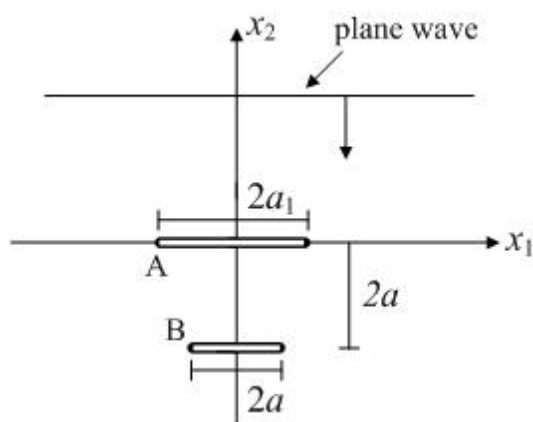


圖 6.6 裂縫中心重疊、平行、不等長雙裂縫示意圖

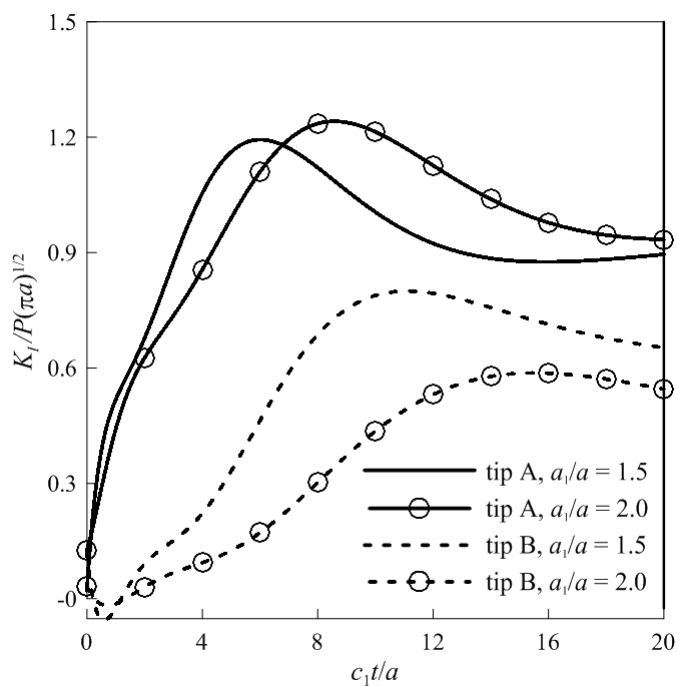


圖 6.7 裂縫中心重疊、平行、不等長雙裂縫，裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 K_I'

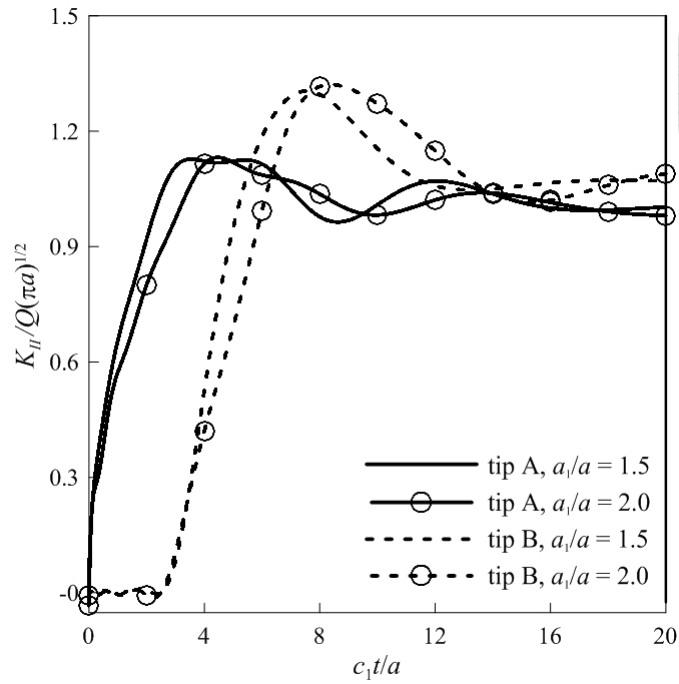


圖 6.8 裂縫中心重疊、平行且不等長雙裂縫，裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 K'_{II}

考慮考慮裂縫中心不重疊、平行且不等長雙裂縫，如圖 6.9，其中 $d_2 = a_2 = a_v$ ，考慮 $a_v/a = 1.5$ 與 2.0 (上裂縫長固定)，垂直入射縱波 $\mathbf{t}_2 = (0, -P)^T$ 於 $t=0$ 作用於 $x_2=0$ ，計算裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 $K'_I = K_I / P\sqrt{\pi a}$ ，如圖 6.10。垂直入射橫波 $\mathbf{t}_2 = (-Q, 0)^T$ 於 $t=0$ 作用於 $x_2=0$ ，計算裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 $K'_{II} = K_{II} / Q\sqrt{\pi a}$ ，如圖 6.11：

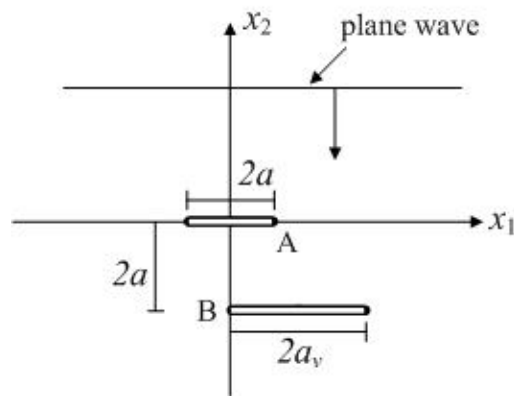


圖 6.9 裂縫中心不重疊、平行、不等長雙裂縫示意圖

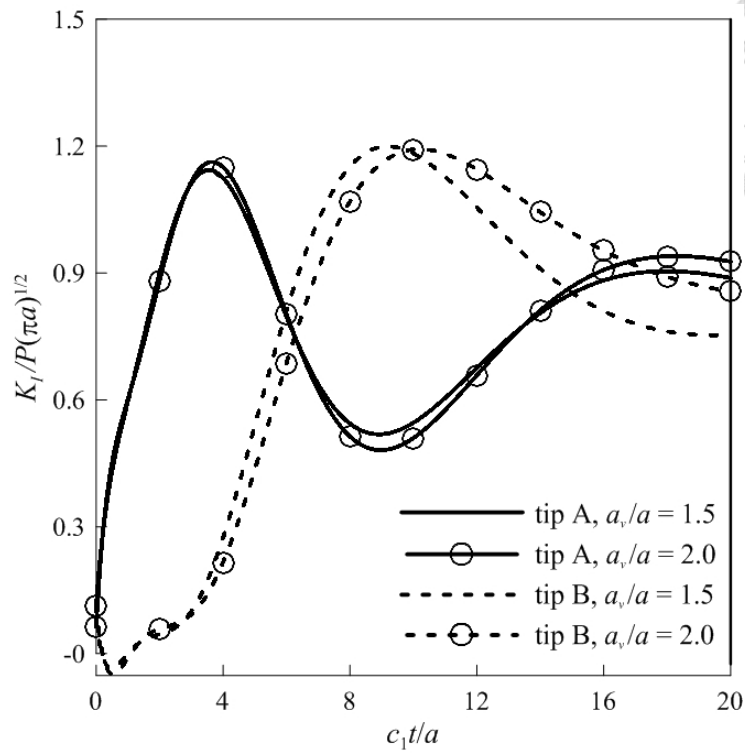


圖 6.10 裂縫中心不重疊、平行且不等長雙裂縫，裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 K'_I

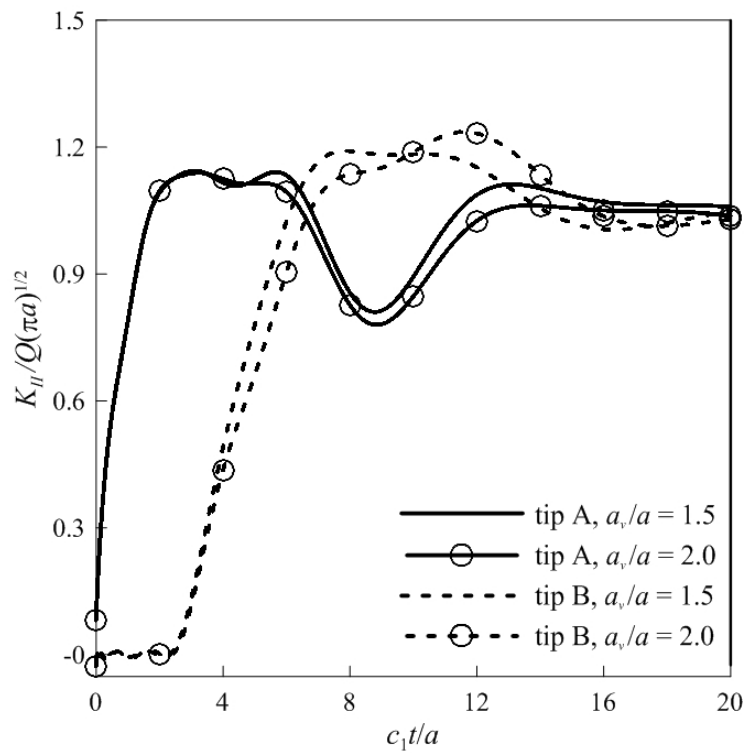


圖 6.11 裂縫中心不重疊、平行且不等長雙裂縫，裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 K'_{II}

圖 6.10 為裂縫中心不重疊、平行且不等長雙裂縫、 $a_v/a=1.5$ 、 2.0 (上裂縫長固定)，裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 K'_I ，結果顯示：對於 $a_v/a=1.5$ 與 2.0 之應力強度因子，小的 a_v 使裂縫尖端 B 的應力強度因子 K'_I 峰值越快發生，且 $a_v/a=1.5$ 與 2.0 兩者對於裂縫尖端 B 的 K'_I 峰值皆為 1.2 。 $a_v/a=1.5$ 與 2.0 兩情況對於裂縫尖端 A 的應力強度因子 K'_I 影響較小。圖 6.11 為裂縫中心不重疊、平行且不等長雙裂縫、 $a_v/a=1.5$ 、 2.0 (上裂縫長固定)，裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 K'_{II} ，結果顯示：裂縫尖端 B 的應力強度因子 K'_{II} 峰值發生的時間點 $a_v/a=1.5$ 早於 $a_v/a=2.0$ ，且 $a_v/a=1.5$ 與 2.0 兩情況對於裂縫尖端 B 的應力強度因子影響小。

6.3.3 不對稱、平行三裂縫

考慮不對稱、平行三裂縫，如圖 6.12，以 $b_1/a=2.0$ 、 $b_2/a=2.5$ ，垂直入射縱波 $t_2 = (0, -P)^T$ 於 $t=0$ 作用於 $x_2=0$ ，計算裂縫尖端 C、F、B 與 E 的應力強度因子 $K'_I = K_I/P\sqrt{\pi a}$ ，如圖 6.13。垂直入射橫波 $t_2 = (-Q, 0)^T$ 於 $t=0$ 作用於 $x_2=0$ ，計算裂縫尖端 A、D、B 與 E 的應力強度因子 $K'_{II} = K_{II}/Q\sqrt{\pi a}$ ，如圖 6.14。

圖 6.13 為不對稱、平行三裂縫，裂縫尖端 C、F、B 與 E 的應力強度因子 K'_I ，圖 6.14 為不對稱、平行三裂縫，裂縫尖端 A、D、B 與 E 的應力強度因子 K'_{II} 。本節考慮的三裂縫為非對稱問題，由圖 6.13 可明顯觀察得：於 $t' = c_1 t/a > 12$ ，不對稱參數 ($b_2 > b_1$) 使裂縫尖端 F 與 E 的應力強度因子 K'_I 增加(相對於裂縫尖端 C 與 B)。

若不考慮圖 6.12 的右上裂縫(尖端 D 與 F 構成的裂縫)，則圖 6.12 與圖 6.9 於 $a_v/a=2.0$ 之平行雙裂縫問題一致，對於兩者的比較，可分別計算兩者裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 K_{II}' 並比較得之，其結果如圖 6.15，圖中實線為不對稱、平行三裂縫、虛線為平行雙裂縫的應力強度因子，結果顯示：增加了右上裂縫(尖端 D 與尖端 F 構成的裂縫)使應力強度因子 K_{II}' 峰值增加。

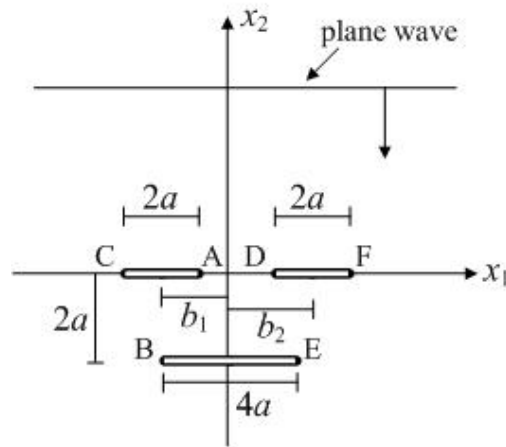


圖 6.12 不對稱、平行三裂縫示意圖

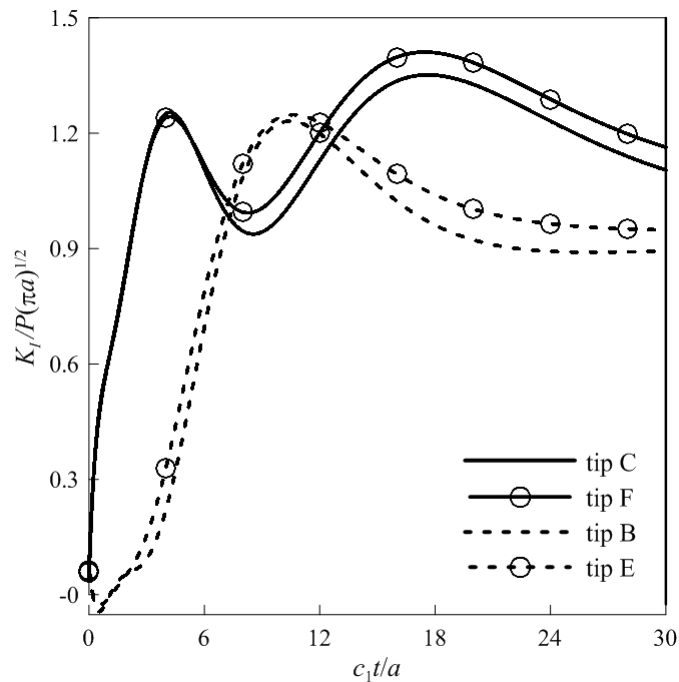


圖 6.13 不對稱、平行三裂縫，裂縫尖端 C、F、B 與 E 的應力強度因子 K_I'

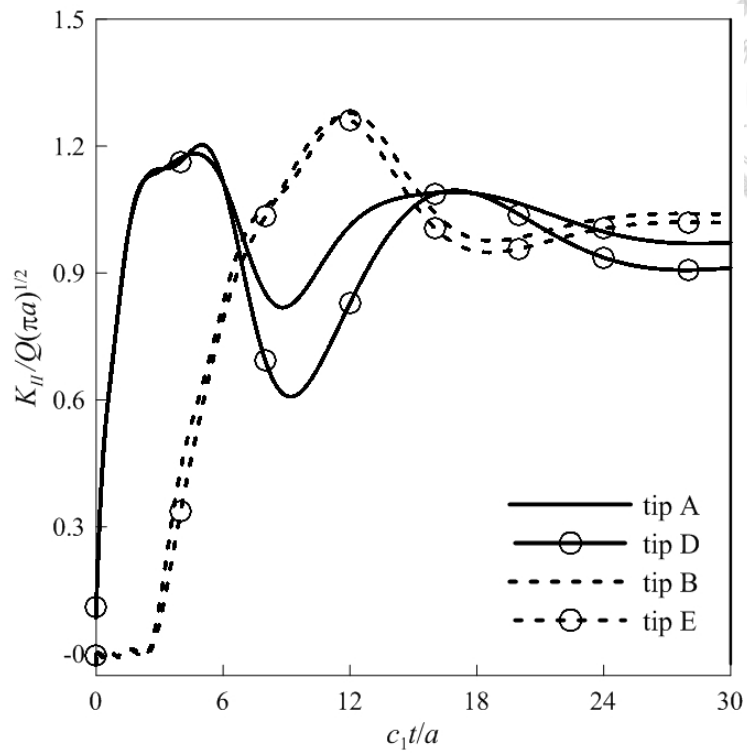


圖 6.14 不對稱、平行三裂縫，裂縫尖端 A、D、B 與 E 的應力強度因子 K'_{II}

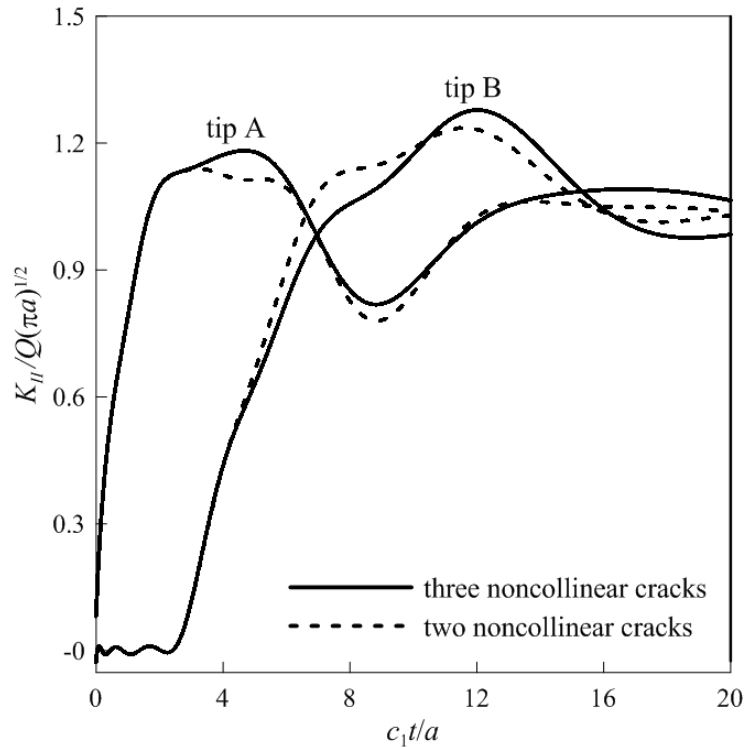


圖 6.15 不對稱、平行雙與三裂縫，裂縫尖端 A 與 B 的應力強度因子 K'_{II}

第七章 結論與建議



7.1 結論

本文以 Wu [25]提出的位移場通解與差排法建立裂縫面上曳引力與差排密度的積分方程式，再以疊加原理將積分方程式擴展至共線與平行裂縫問題，其方程式包含入射應力波之作用與各裂縫尖端產生的繞射波之相互關係，對於複雜的多次繞射波之相互關係，本文以簡易的六維特徵值問題的解描述之，此解可解析得共線裂縫於等向性或正交性介質與平行裂縫於等向性介質之奇異形式，難以解析出奇異形式的平行裂縫於正交性介質問題則以數值解求得。

由於本文利用 Laplace 轉換求解裂縫面上之曳引力與差排密度函數之積分方程式，因此需求得各裂縫尖端產生的繞射波之相互關係式 L 或 V 的 Laplace 轉換式，本文以 Bessel 函數求得共線裂縫於等向性介質之 U 解析形式，並以 Gauss 積分與積分技巧(避開離散點與快速收斂)求得共線裂縫於正交性介質 U 或平行裂縫於等向性介質與正交性介質 \tilde{V} 之數值 Laplace 轉換。藉由 Gauss-Chebyshev 積分法則求得 Laplace 轉換域的差排密度 \tilde{a} ，並透過應力強度因子與差排密度之關係式計算得轉換域之應力強度因子，最後以數值反轉換法求得應力強度因子之歷時反應。

所得的數值計算結果在單裂縫於等向性材料受縱波作用的應力強度因子、共線雙裂縫於等向性材料受縱波作用的應力強度因子、單裂縫於正交性材料受平面波作用的應力強度因子、平行裂縫於等向性材料受縱波作用的應力強度因子與現有的文獻比對結果一致，並得知本文的分析方式可系統化與有效的分析含多裂縫之彈性介質受均勻平面應力波作用問題，依本文之數學模型探討各式裂縫問題可得以下結論：



單裂縫與共線裂縫

1. 對於單裂縫於等向性介質受斜入射應力波問題，應力波入射角的改變很難使應力強度因子 K'_I 與 K'_{II} 峰值產生變化。
2. 單裂縫於不同波松比 ν 之等向性介質受垂直入射縱波的分析可得：縱波波速較慢時 ($\nu = 0, 0.35$)，表面波由右(左)尖端到達左(右)尖端後，應力強度因子開始下降，但縱波波速較快時 ($\nu = 0.48, 0.49$)，應力強度因子會持續上升。
3. 對於圖 3.14，等長共線雙裂縫於等向性介質受垂直入射應力波問題，當兩裂縫的內尖端間距越小時，內裂縫尖端的應力強度因子 K'_I 峰值越大，但外裂縫尖端的應力強度因子 K'_I 峰值影響較小，而內或外裂縫尖端的應力強度因子 K'_{II} 峰值皆隨兩裂縫內尖端之間距越小而增大。
4. 對於圖 3.24，等長共線三裂縫(各裂縫尖端與鄰近裂縫尖端等距)於等向性介質受斜入射應力波問題，當表面波由同裂縫的左(右)尖端出發到右(左)尖端時，可發現應力強度因子的極值，但各裂縫尖端與鄰近裂縫尖端的間距變小時，應力強度因子的極值會延後發生。
5. 對於有限長多裂縫於彈性介質受應力波作用問題，當其他裂縫尖端產生之繞射波影響前，應力強度因子與半無限裂縫的應力強度因子一致。
6. 正交性介質(環氧硼 I、II、玻璃纖維、石墨纖維、鋼聚酯與鈹)、單裂縫與橫波作用的問題，僅有鈹的應力強度因子 K'_{II} 峰值發生於表面波由裂縫的左(右)尖端出發到右(左)尖端時，而環氧硼 I、環氧硼 II、玻璃纖維、石墨纖維與鋼聚酯的應力強度因子 K'_I 峰值則發生於縱波由裂縫的左(右)尖端出發到達右(左)尖端時。
7. 正交性介質、單裂縫與單裂縫問題於固定工程彈性常數 E_2 、 G_{12} 、 ν_{12} 時，越大



的 E_1 使應力強度因子 K'_I 與 K'_{II} 峰值越早發生。

8. 分析等長共線三裂縫(各裂縫尖端與鄰近裂縫尖端等距)與固定工程彈性常數 E_2 、 G_{12} 、 ν_{12} 的正交性介質受垂直入射應力波指出，不同的工程彈性常數比 E_1/E_2 很難改變應力強度因子 K'_I 峰值。

平行裂縫

1. 對於等向性介質(平面應力、波松比 0.25)、裂縫中心重疊之平行與等長雙裂縫受垂直入射應力波(上裂縫受入射應力波作用，下裂縫不受入射應力波作用)問題，上裂縫尖端的應力強度因子 K'_I 峰值(於不同裂縫與裂縫的垂直間距)皆大於下裂縫尖端的應力強度因子 K'_I 峰值，且上裂縫尖端的暫態應力強度因子峰值為靜態值的 1.4 倍。
2. 由裂縫中心重疊、平行與等長雙裂縫問題觀察得：當時間 t' 大時，暫態應力強度因子延靜態應力強度因子振盪。
3. 探討裂縫中心不重疊(下裂縫受上裂縫點遮蔽與半遮蔽)、平行、等長雙裂縫(圖 5.14)於等向性介質受垂直入射應力波作用(應力波於起始時作用於上裂縫)可發現，比較下裂縫受上裂縫點遮蔽與半遮蔽情形，下裂縫受上裂縫遮蔽多(半遮蔽)時，裂縫尖端 B、C 與 D 的應力強度因子 K'_I 峰值會降低，但裂縫尖端 C 與 D 的應力強度因子 K'_{II} 會增加。
4. 分析裂縫中心重疊、平行且等長三裂縫(圖 5.19)於等向性介質受垂直入射應力波(應力波於起始時作用於上裂縫)指出，比較裂縫尖端 A、B 與 C 的應力強度因子峰值得：裂縫尖端 A 的 K'_I 最大，但 K'_{II} 最小，最小的 K'_I 峰值為裂縫尖端 B、



- 最大 K_{II}' 峰值的為裂縫尖端 C。
5. 對於圖 6.6，裂縫中心重疊、平行且不等長雙裂縫於鉸介質受垂直入射應力波(應力波於起始時作用於上裂縫)問題，當上裂縫較下裂縫長且下裂縫長固定 $2a$ 時，上裂縫增長使下裂縫尖端的應力強度因子 K_{II}' 峰值降低，且上裂縫長度越短，可越早觀察得應力強度因子峰值，
 6. 比對圖 6.12，裂縫中心不重疊、平行且不等長雙裂縫與不對稱的三裂縫與圖 6.9，裂縫中心不重疊、平行且不等長雙裂縫於鉸介質受垂直入射應力波問題可發現：增加的裂縫(尖端 D 與 F 構成的裂縫)使應力強度因子 K_{II}' 峰值增加。

數值方法

1. 利用 Durbin 反 Laplace 轉換法求時域應力強度因子，其方法對波到達的描述能力較佳，但需以較多的積分點得到收斂結果。
2. 以 Miller 與 Guy 提出的數值反 Laplace 轉換，此法利用較少的積分點求得結果，但對於波到達的描述能力較差。

7.2 建議

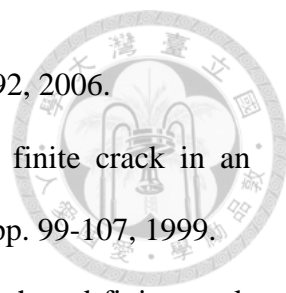
本文針對於平行裂縫於等向性與正交性介質進行分析，依本文的方法可延伸發展方向有：

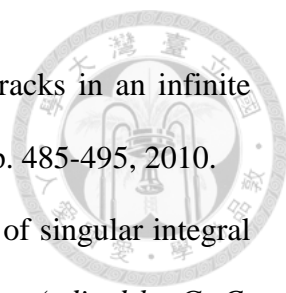
1. 本文僅考慮裂縫與材料對稱面平行，依續本文方法可發展裂縫與材料對稱面不行的裂縫問題。
2. 增加電場與磁場方程式可分析磁電彈性材料(magnetoelastic material)的裂縫問題。
3. 以不同介質分析複合層材料的裂縫問題。


參考文獻



- [1] L. B. Freund, "Dynamic fracture mechanics," *Cambridge University Press*, Cambridge, 1990.
- [2] S. A. Thau and T.H Lu, "Transient stress intensity factors for a finite crack in an elastic solid caused by a dilatational wave," *International Journal of Solid and Structure*, vol. 7, pp. 731-750, 1971.
- [3] G. C. Sih, G. T. Embley and R. S. Ravera, "Impact response of a finite crack in plane extension," *International Journal of Solid and Structure*, vol. 8, pp. 977-993, 1972.
- [4] S. Itou, "Transient analysis of stress waves around two coplanar Griffith cracks under impact load," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 13, pp. 349-356, 1980.
- [5] C. H. Zhang and J. D. Achenbach, "Time-domain boundary element analysis of dynamic near-tip fields for impact-loaded collinear cracks," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 32, no. 6, pp. 899-909, 1989.
- [6] P. H. Wen, M. H. Aliabadi and D. P. Rooke, "The influence of elastic waves on dynamic stress intensity factors (two-dimensional problems)," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 66, pp. 326-335, 1996.
- [7] K. C. Wu, "Diffraction of a plane stress wave by a semi-infinite crack in a general anisotropic elastic material," *Wave Motion*, vol. 40, pp. 359-372, 2004.
- [8] C. H. Zhang, "A 2-d time-domain BIEM for dynamic analysis of cracked orthotropic solids," *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, vol. 3, no. 3, pp. 381-398, 2002.
- [9] S. Das, "Elastodynamic response of a cracked orthotropic medium under impact

- 
- loading," *Computational Materials Science*, vol. 37, pp. 187-192, 2006.
- [10] Y. Shindo, F. Narita and E. Ozawa, "Impact response of a finite crack in an orthotropic piezoelectric ceramic," *Acta Mechanica*, vol. 137, pp. 99-107, 1999.
- [11] C. Rubio-Gonzalez, "Elastodynamic analysis of the finite punch and finite crack problems in orthotropic material," *International Journal of Fracture*, vol. 112, pp. 355-378, 2001.
- [12] K. Takakuda, Y. Takizawa, T. Koizumi and T. Shibuya, "Dynamic interactions between cracks (diffraction of SH waves being incident on Griffith cracks in an infinite body)," *Transactions of the JSME, A-50*, pp. 799-804, 1985.
- [13] S. Itou, "Dynamic stress intensity factors around two parallel cracks in an infinite elastic plate," *Acta Mechanica*, vol. 108, pp. 87-99, 1995.
- [14] S. Itou, "Dynamic stress intensity factors for two parallel interface cracks between a nonhomogeneous bonding layer and two dissimilar elastic half-planes subject to an impact load," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 47, pp. 2155-2163, 2010.
- [15] Z. C. Zhou, Y. Guo and L. Z. Wu, "The behavior of three parallel non-symmetric permeable mode-III cracks in a piezoelectric material plane," *Mechanics Research Communications*, vol. 36, pp. 690-698, 2009.
- [16] S. Itou and H. Haliding, "Dynamic stress intensity factors around three cracks in an infinite elastic plane subjected to time-harmonic stress waves," *International Journal of Fracture*, vol. 83, pp. 379-391, 1997.
- [17] L. Ma, L. Z. Wu and Z. G. Zhou, "Dynamic stress intensity factors around two parallel cracks in a functionally graded layer bonded to dissimilar half-planes subjected to anti-plane incident harmonic stress waves," *International Journal of Engineering Science*, vol. 42, pp. 187-202, 2004.

- 
- [18] S. Itou, "Dynamic stress intensity factors for three parallel cracks in an infinite plate subject to harmonic stress waves," *Engineering*, vol. 2, pp. 485-495, 2010.
- [19] F. Erdogan, G. D. Gupta and T. S. Cook, "Numerical solution of singular integral equations," *Methods of analysis and solutions of crack problems (edited by G. C. Sih)*, Leyden: Noordhoff, pp. 368-425, 1973.
- [20] A. Cochard and R. Madariaga, "Dynamic faulting under rate-dependent friction" *Pure and Applied Geophysics*, vol. 142, no. 3/4, pp. 419-445, 1994.
- [21] K. C. Wu and J. C. Chen, "Transient analysis of collinear cracks under anti-plane dynamic loading," *Engineering Procedia*, vol. 10, pp. 924-929, 2011.
- [22] M. Ayatollahi and M. M. Monfared, "Anti-plane transient analysis of planes with multiple cracks," *Mechanics of Materials*, vol. 50, pp. 36-46, 2012.
- [23] K.C. Wu, S. M. Huang and S. H. Chen, "Dynamic stress intensity factors of collinear cracks under a uniform tensile stress wave," *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, vol.93, no.2, pp. 133~148, 2013.
- [24] K.C. Wu, Y. L. Hou and S. M. Huang, "Transient analysis of multiple parallel cracks under anti-plane dynamic loading," *Mechanics of Materials*, vol. 81, pp. 56-61, 2015.
- [25] K.C Wu, "Extension of Stroh's formalism to self-similar problems in two-dimensional elastodynamics," *Proceeding of the Royal Society of London*, A456, pp. 869-890, 2000.
- [26] T. C. T. Ting, "Anisotropic elasticity – Theory and application," *Oxford University Press*, New York, 1996.
- [27] K. C. Wu, "On the crack-tip fields of dynamically propagating crack in an anisotropic elastic solid," *International Journal of Fracture*, vol. 41, pp. 253-266, 1989.

- 
- [28] M. K. Miller and W. T. Guy, "Numerical inversion of the Laplace transform by use of Jacobi polynomials," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 3, no. 4, pp. 624-635, 1966.
- [29] F. Durbin, "Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method," *The Computer Journal*, vol. 17, pp. 371-376, 1974.
- [30] C. Dongye and T. C. T. Ting, "Explicit expressions of Barnett-Lothe tensors and their associated tensors for orthotropic materials," *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 47, pp. 723-734, 1989.
- [31] R. G. Payton, "Elastic wave propagation in transversely isotropic media," *Martinus Nijhoff Publishers*, 1983.
- [32] W. A. Brantley, "Calculated elastic constants for stress problems associated with semiconductor devices," *Journal of Applied Physics*, vol. 44, pp. 534-535, 1973.
- [33] J. Weertman, "Dislocation based fracture mechanics," *Singapore: World Scientific*, 1996.
- [34] P. Chadwick and G. D. Smith, "Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials," *Advances in Applied Mechanics*, vol. 17, pp. 303-376, 1977.