國立臺灣大學理學院數學所
碩士論文
Department of Mathematics
College of Science
National Taiwan University
Master Thesis

阿波羅尼斯、牛頓和丹德林的橢圓

Ellipses of Apollonius, Newton, and Dandelin

沈貽婷
Yi-Ting Shen

指導教授：張海潮 教授
Advisor Professor : Hai-Chau Chang

中華民國 104 年 7 月
July 2015

謝辭

首先，我要先在這裡感謝我最親愛的家人們，我的母親—曾淑惠女士和我的父親—沈光輝先生以及我的妹妹菀琳，還有家庭新成員妞妞，因為有你們的陪伴和扶持，才能造就了現在的我。感謝我親愛的外祖父—曾占奎先生和外祖母曾李玉秋女士，兩位長者對我的關愛實在無以回報，我相信兩位直到現在仍在默默的保佑我，只能在此致上我對您們的敬愛。感謝我的阿姨們以及舅舅，還有其他家族的成員們，我何其有幸能夠擁有你們的無條件支持，家族聚會時的歡笑和溫暖我會一直銘記在心。

這篇論文之所以能完成，最要感謝的就是我的指導老師—也是我的人生導師—張海潮教授。在教授身上我深刻的感受到何謂大師風範，您對中學數學教育的熱忱令人敬佩。此外很榮幸能有機會擔任教授的通識課程助教和合作出書，真的非常感謝教授對我的提攜。

我也要感謝國小導師陳美琳女士和劉美琪女士、國中數學老師鄭釧鋒先生、高中數學老師許秀聰女士和實習期間指導老師蘇麗敏女士、大學時期的朱樺教授和研究所時期的劉豐哲教授。包括指導老師張海潮教授，您們都是我人生不同階段的榜樣，在我成為老師的路上帶給我各種形式的幫助和影響，期許我自己也成為一個能夠啟發學生的好老師。

另外感謝我身邊的各位好友們：國小的六年同窗、舞團美女們、國中的吃飯團、高中的小良們、大學和研究所時期認識的朋友們還有實習期間的夥伴們。我所給予的總是比不上我所獲得的，僅在此表達我的謝意。

阿波羅尼斯、牛頓和丹德林的橢圓

研究生：沈貽婷 指導教授：張海潮

摘要

本論文共三章：第一章說明古希臘時期數學家阿波羅尼斯對於圓錐曲線所做的探討，其中一個重要的結論就是橢圓的共軛直徑基本定理。第二章解釋牛頓如何利用共軛直徑基本定理，證明出「向心力和距離平方成反比」此一命題。第三章介紹比利時數學家丹德林提出的圓錐模型，呈現出橢圓焦點和準線在圓錐模型中的意義，我們因此可以計算出圓錐曲線的離心率，進而了解日晷晷影的軌跡。

Ellipses of Apollonius, Newton, and Dandelin

Student : Yi-Ting Shen Advisor : Hai-Chau Chang

Abstract

This thesis consists of three chapters. In chapter one, we review the work of conic sections by Greek mathematician Apollonius, and the theorem on conjugate diameters of ellipse. In chapter two, we explain Newton's proof of "the centripetal force is inversely proportional to the square of distance". In the proof, the above mentioned theorem on conjugate diameters played an important role. In chapter three, we introduce the conic modeling by Dandelin, a Belgian mathematician, which shows the geometrical meaning of the focus and the directrix of ellipse. We then calculate the eccentricity of conic sections by Dandelin's modeling and classify the locus of the sundial shadow.

目　錄

緒論

牛頓(Isaac Newton，1643－1727)劃時代的科學巨著《自然哲學之數學原理》(*Principia*，以下簡稱《原理》)結合了幾何學與力學，將克卜勒(Johannes Kepler，1571－1630)三大行星運動定律中的橢圓律和面積律，根據圓錐曲線性質證明出向心力與距離平方成反比。此書出版的原因起因於 1684 年，哈雷(Edmond Halley，1656－1742)與另外兩位同是英國皇家學會成員的胡克(Robert Hooke，1635－1703)和雷恩(Christopher Wren，1632－1723)的一場討論中，胡克聲稱他已完全解決克卜勒的橢圓律和引力與距離平方成反比的關聯，但證明還未公開發表因此內容必須保密。哈雷不願接受胡克的說辭，轉而向牛頓訴說此事，牛頓回應他早在四年前便已解決此問題，但不知將其放在何處。後來經哈雷請求後，牛頓花了三個月時間重新寫出，並因此激發許多靈感，進而完成了《原理》一書。(見註1)在牛頓之前已有許多科學家也有類似的猜想，卻只有牛頓完成了嚴謹的證明，而在他的證明內容中不難看出：牛頓之所以成功的原因之一是他對於圓錐曲線性質的深刻了解。我們之後將會在本論文的第二章詳細說明牛頓在《原理》中如何利用橢圓的幾何性質協助發現引力與距離的平方成反比。

其實早在古希臘時期，數學家們對於圓錐曲線已有相當的認識，代表作是阿波羅尼斯(Apollonius，262BC－190BC，以下簡稱阿氏)所著的《圓錐曲線論》(*Conic Sections*)。在還沒有代數符號和坐標系統的情況下，阿氏僅以歐式幾何的基礎探討出圓錐曲線的各種性質。到了 17 世紀科學革命時期，承襲自文藝復興時期的浪潮，當時的數學家們都將阿氏對圓錐曲線的研究成果視為必修的教材(見註2)。

《圓錐曲線論》最原始的版本部份早已失傳，當時的讀者讀的是從阿拉伯文譯為拉丁文的版本。這些原本以為只是單純的數學知識竟意外地在將近兩千年後提供給牛頓解釋克卜勒理論的幾何基礎。有一個故事是這樣的，當天文學家哈雷

將他所蒐集的一個阿氏著作的阿拉伯文版本以拉丁文出版時，牛頓曾讚許哈雷此舉「尤其重要，原因是本書的內容是幾何分析學」(見註 3)。

因為牽涉到大量的幾何知識，在以前的年代又難以製作實體教具，對於大部分的人來說圓錐曲線的內容實在太過艱澀難懂。直到 1822 年，比利時數學家丹德林(Germinal Pierre Dandelin，1794－1847)以正圓錐模型和截面中間塞進兩個內切球的方式(稱為 Dandelin Spheres)，以比較簡單、直觀的方式重新詮釋圓錐曲線，總結了圓錐曲線的發展。

原本阿氏的圓錐曲線內容中，並沒有從幾何的角度來定義圓錐曲線的焦點，只是以代數的關係來規範焦點的位置並發現光學性質(見註 4)，因此無法明確地看到焦點在圓錐理論中的重要性。但從 Dandelin Spheres 中可以很清楚的了解圓錐曲線焦點在幾何上的意涵，也能明確的發現圓錐曲線上的每一點和焦點之間存在的不變量(以橢圓為例，橢圓上每一點和兩焦點的距離和為一定值)。此一發現將原來立體的模型轉化成在平面上從焦點出發所建構的圓錐曲線圖形。目前中學數學關於圓錐曲線的教學，就是以 Dandelin Spheres 的內容為基礎。

以下是本論文內容的初步介紹：本論文第一章根據美國數學史家克萊因(Morris Kline，1908－1992)《古今數學思想》(*Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*)的內容，仔細的介紹阿氏如何發現圓錐曲線共軛直徑的概念及相關的不變量。本論文所討論的圓錐曲線僅以橢圓說明。

值得注意的是阿氏並沒有討論任意一對共軛直徑的相關性質，而只是針對截出橢圓時，所得到一組特定共軛直徑之相關性質。本論文一個主要的目的便是將阿氏的立體幾何方法推廣，以得出任何一對共軛直徑的相關性質，見本論文第一章第四節說明。

另外要提醒讀者的是阿氏將圓錐定義為一底圓與圓外一點 A (與圓不在同一平面)連出的無限多條生成線所構成。如圖 1，阿氏先在底圓所在的平面定一直線 ℓ，通過 ℓ 取另一平面(稱為截面)與圓錐交出一橢圓。底圓中有一條唯一的直徑 $\overline{BC}$ 與 ℓ 垂直，此直徑的的兩個端點 B 、 C 與 A 連出的三角形稱為軸三角形，軸三角形與截面所交出的線段會是橢圓的一條直徑 $\overline{PP'}$ (即通過橢圓中心 G 的弦)。

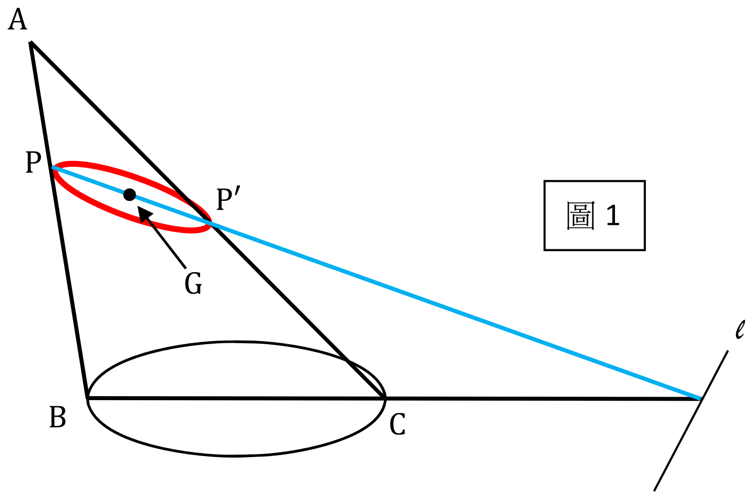


圖 1

阿氏接著再探討橢圓上所有與 ℓ 平行的弦與這條直徑 $\overline{PP'}$ 的關係，最後得到這組平行弦與直徑 $\overline{PP'}$ 的不變量。這組平行弦中恰有一條過橢圓中心 G 的直徑 $\overline{KK'}$，稱為直徑 $\overline{PP'}$ 的共軛直徑，如圖 2。

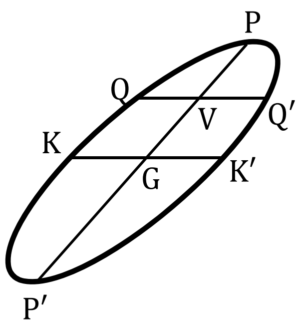


圖 2

以圖 2 為例，任取橢圓中一條和共軛直徑 $\overline{KK'}$ 平行的弦 $\overline{QQ'}$，$\overline{QQ'}$ 也會和 ℓ 平行， $\overline{QQ'}$ 和 $\overline{PP'}$ 的交點為 V ，阿氏發現 $\frac{\overline{QV}^2}{\overline{PV}\cdot\overline{P'V}}$ 為一定值，本論文中將此性質稱為「共軛直徑基本定理」。

本論文第一章第一節先從正圓錐與一斜截面所截出的橢圓開始，如圖 3，此時 $\overline{PP'}$ 即為橢圓長軸，ℓ 會與短軸平行，因此短軸即為長軸的共軛直徑。現在任選一與短軸平行的弦 $\overline{QQ'}$，將 $\overline{QQ'}$ 和 $\overline{PP'}$ 的交點定為 V，利用過 V 且與底圓平行的面也會和正圓錐截出一正圓，再藉由基本的幾何性質，可以證明在此情形下的「共軛直徑基本定理」，這個結論等價於現今橢圓坐標化後得到的標準式，詳細內容見本論文第一章第一節證明 7。

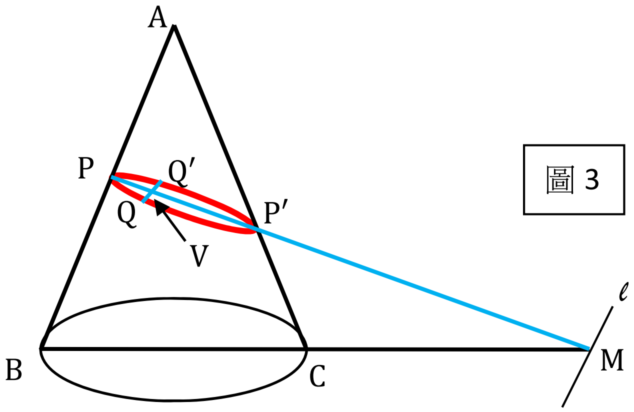


圖 3

本論文第一章第二節仿阿氏將第一節的內容推廣到一般化的斜圓錐。如圖 4 中，$\overline{QQ'}$ 和 $\overline{PP'}$ 的交點 V 因為不管 $\overline{QQ'}$ 如何選擇都會是 $\overline{QQ'}$ 的中點(詳見本論文第一章第二節證明 8)，因此可知 $\overline{PP'}$ 必過橢圓的中心，所以 $\overline{PP'}$ 是一條橢圓的直徑。當 V 為橢圓中心時，此時的 $\overline{QQ'}$就是 $\overline{PP'}$ 的共軛直徑。阿氏在斜圓錐情形下得到的結論會從橢圓長短軸調整成橢圓的這一組特定的共軛直徑，對這一組共軛直徑，阿氏證明了「共軛直徑基本定理」，這個性質亦等價於在某一組斜角坐標下，橢圓滿足的方程式(方法同第一章第一節證明 7)。

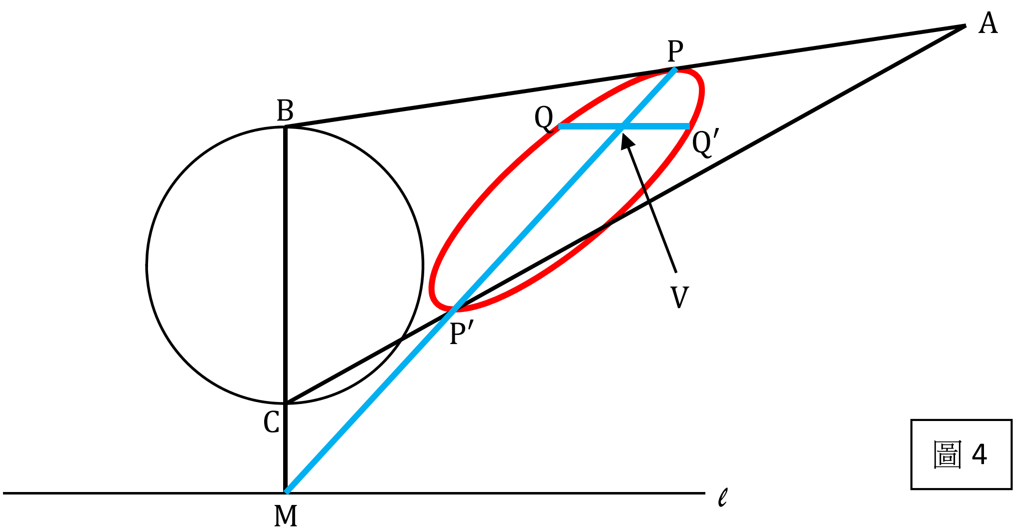


圖 4

由於阿氏的工作並沒有先定義互為共軛直徑的意義，所以我們在本論文第一章第三節補充提出共軛直徑的基本定義，即將橢圓中和一條特定直徑兩端點切線互相平行的直徑，定義為原特定直徑的共軛直徑，再以現代將正圓伸縮成橢圓的觀點補充說明橢圓共軛直徑的定義和三個基本性質，分別是「與一條直徑的共軛直徑平行的弦會被該直徑平分」、「所有與原直徑平行的弦中點連線即為共軛直徑，且共軛直徑端的兩條切線會與原直徑平行」(因此共軛直徑的關係是互相的)和「兩共軛直徑的兩組切線所圍的平行四邊形面積等於長、短軸之積」，這些也是牛頓在《原理》一書中使用到的圓錐曲線性質。本節利用線性代數伸縮變換討論共軛直徑，獨立於阿氏的工作。此外，共軛直徑基本定理亦可由伸縮變換證明(見第三節)，但下文中我們仍選擇以類似阿氏的立體幾何方法證明此一基本定理。

在熟悉橢圓共軛直徑性質後，本論文的第一章第四節，如圖 5，則是從橢圓任意的一組共軛直徑出發，其中一條直徑為 $\overline{PP'}$ ，選取橢圓中一條與 $\overline{PP'}$ 的共軛直徑平行的弦 $\overline{QQ'}$。將橢圓和橢圓外一點 A 所連出的無限多條線生成斜橢圓錐記為 $\mathcal{C}$ 。隨意延長 $\overline{PP'}$ 至一點 M ，過 M 作平行於 $\overline{QQ'}$ 之直線定為 ℓ 。延伸軸三角形 $\Delta APP'$ 所在的平面，在平面中(因此平面含 $\overline{PP'}$ 所以也含 M)取過 M 並垂直於 ℓ 的線段 $\overline{BC}$ ， $\overline{BC}$ 和 ℓ 所構成的平面會截斜橢圓錐於一橢圓(將此橢圓稱為底橢圓)。

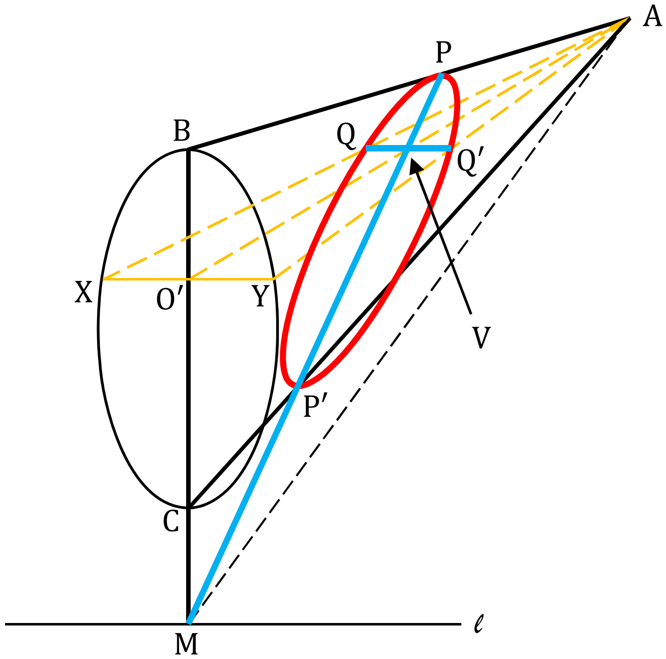


圖 5

我們先證明底橢圓與 $\overline{\mathrm{BC}}$ 共軛的直徑會垂直 $\overline{\mathrm{BC}}$，需要先作 $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ 和 $\overrightarrow{\mathrm{AQ'}}$ 在底橢圓中的交點為 X 和 Y ，$\overline{\mathrm{XY}}$ 會與 $\overline{\mathrm{QQ'}}$ 平行，因此 $\overline{\mathrm{XY}}$ 也會平行於 ℓ 、垂直於 $\overline{\mathrm{BC}}$ 。根據第一節的結論可知 $\overline{\mathrm{BC}}$ 是底橢圓的長軸或短軸(證明見第一章第二節證明 10)，過 V 且與底橢圓平行的面也會和斜圓錐截出一橢圓，利用與第二節類似的方法(阿氏用斜圓錐，此處推廣到斜橢圓錐 $\mathcal{C}$)，一樣能證明出 $\frac{\overline{\mathrm{QV}}^2}{\mathrm{PV}\cdot\mathrm{P'V}}$ 為一定值，即共軛直徑基本定理對於任意一組共軛直徑恆成立。

在第二章將藉由第一章所得到的幾何工具詳述牛頓是如何從行星繞太陽的面積律和橢圓律推導出「向心力(向著太陽的力)與距離(行星到太陽的距離)平方成反比」。牛頓先在《原理》第一卷第二章證明了面積律和向心力的等價關係，此處不再贅述(見註 5)。

牛頓在《原理》的第一卷第三章命題 11 問題 6 中證明了從橢圓律推得向心力平方反比規律，在牛頓的證明中，我們發現牛頓很自然的使用了《圓錐曲線論》中的結論，例如共軛直徑基本定理，這些事實也反映出牛頓對阿氏的工作非常熟悉。

我們在下面這段文章中先行簡介牛頓的證明過程，詳細內容請見本論文第二章。如圖 6，牛頓先在命題 6 確定行星運行軌道若是服從面積律和橢圓律的話，向心力或向心加速度會正比於 $\frac{\overline{QR}}{SP^2\cdot QT^2}$ (證明見本論文第二章 p.21)，其中 S 代表太陽，位於橢圓軌道的其中一個焦點， P 為行星在軌道上原本的位置， Q 為行星經過一小段時間 Δt 後移動到的位置，$\overline{SP}$ 就是行星到太陽的距離，在 P 點對橢圓的切線上找到一點 R 使得 $\overline{QR}$ 平行 $\overline{SP}$ ，在 $\overline{SP}$ 上一點 T 使得 $\overline{QT}$ 垂直 $\overline{SP}$ 於 T 。因此要是「向心力與距離平方成反比」這項猜測是對的，只需要證明 $\frac{\overline{QR}}{QT^2}$ 這個比值在 Δt 趨近於 0 時是個與 P 位置無關的常數即可。

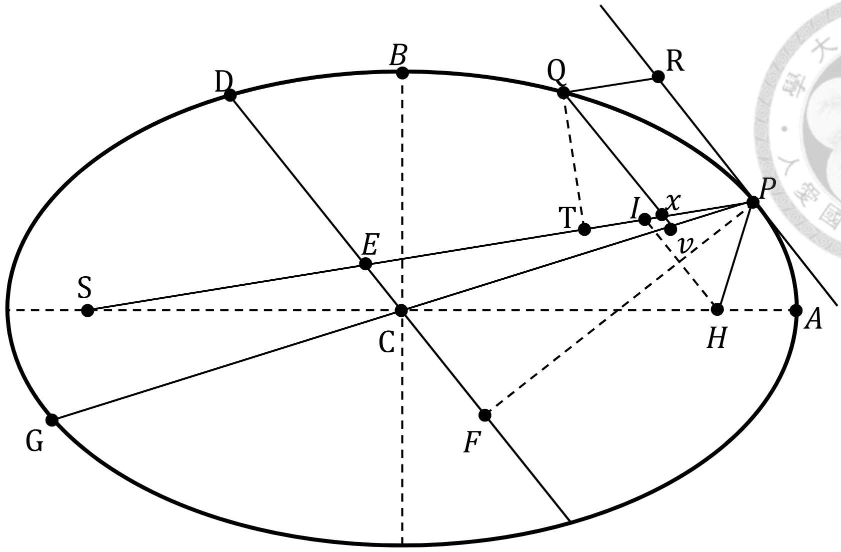


圖 6

牛頓先根據相似形定理把 $\overline{QR}$ 轉換成 $\frac{\overline{Pv}\cdot a}{\overline{PC}}$ ，式中 C 為橢圓中心， $\overline{PC}$ 為橢圓的一半徑，$\overline{Qv}$ 平行 P 點切線 $\overline{PR}$ 並交 $\overline{PC}$ 於 v ， a 為橢圓半長軸長。牛頓再把 $\overline{QT}^2$ 轉換成 $\frac{\overline{Qx}^2\cdot b^2}{\overline{CD}^2}$ ，式中 D 為 $\overline{PC}$ 的共軛直徑一端點， $\overline{Qv}$ 交 $\overline{PS}$ 於 x ， b 為橢圓半短軸長。轉換的過程中會用到第一章第三節的「兩共軛直徑的兩組切線所圍的平行四邊形面積等於 $4ab$ 」以及第一章所提的共軛直徑基本定理。最後再利用極限逼近的方法證明出 $\frac{\overline{QR}}{\overline{QT}^2}$ 的極限為一常數，與 P 點位置無關，進而證明了「向心力與距離平方成反比」這個苦惱當時眾多科學家的難題。

本論文第三章第一節先解釋 Dandelin Spheres 的內容，不但藉由圓錐模型更清楚的說明圓錐曲線上各點與焦點之間的關係，也就是目前中學數學教材中二次曲線的定義式，並具體的呈現出圓錐曲線焦點位置、準線位置及離心率的意義。

第三章第二節再應用 Dandelin Spheres 的結論推導地平式日晷的晷針軌跡，因為太陽光照射到地球的向量會形成一個圓錐，而日晷的晷面(或是地平面)相當於一個截平面，因此晷針針尖形成的軌跡會是一種圓錐曲線，受到當日太陽直射地球緯度和日晷所在地的緯度影響，可以從這兩個數據計算日晷晷針形成軌跡的離心率，並以此來決定軌跡究竟是拋物線、橢圓還是雙曲線。

註 1：

參考自霍金(Stephen William Hawking，1942－)為《原理》寫的導讀《牛頓生平與著作》，大塊文化。

註 2：

"The mathematicians of the 17^{th} century all read Apollonius." *Apollonius and Conic Sections*, David Dennis and Susan Addington。

註 3：

原文是"In 1705, when Halley published a Latin translation of a newly discovered Arabic version of a treatise by Apollonius, Newton declared that "this treatise is yet the more valuable in that it is a geometrical analysis."" *Never at Rest*, Richard S. Westfall。

註 4：

原文為：「橢圓和雙曲線的焦點(Apollonius 沒有焦點這個詞)定義為(長)軸 $\overline{\mathrm{AA'}}$ 上那樣的兩點 F 及 F′，它們使 $\overline{\mathrm{AF}}\cdot\overline{\mathrm{FA'}}=\overline{\mathrm{AF'}}\cdot\overline{\mathrm{F'A'}}=2p\cdot\overline{\mathrm{AA'}}/4$。Apollonius 對橢圓和雙曲線證明：圓錐線上一點 P 與焦點相連的兩線 $\overline{\mathrm{PF}}$ 及 $\overline{\mathrm{PF'}}$ 與 P 處的切線交於等角，且焦距 $\overline{\mathrm{PF}}$ 與 $\overline{\mathrm{PF'}}$ 之和(對橢圓的情形)等於 $\overline{\mathrm{AA'}}$，焦距之差等於 $\overline{\mathrm{AA'}}$ (對雙曲線的情形)。」。節錄自《古今數學思想》(*Mathematical Thought From Ancient to Modern Times)*第一冊 p.109, Morris Kline。

註 5：

參考自《以數理分析克卜勒三大行星律—牛頓的萬有引力》(碩士論文)，侯以修，臺灣大學數學研究所。

第一章　阿波羅尼斯探討圓錐曲線

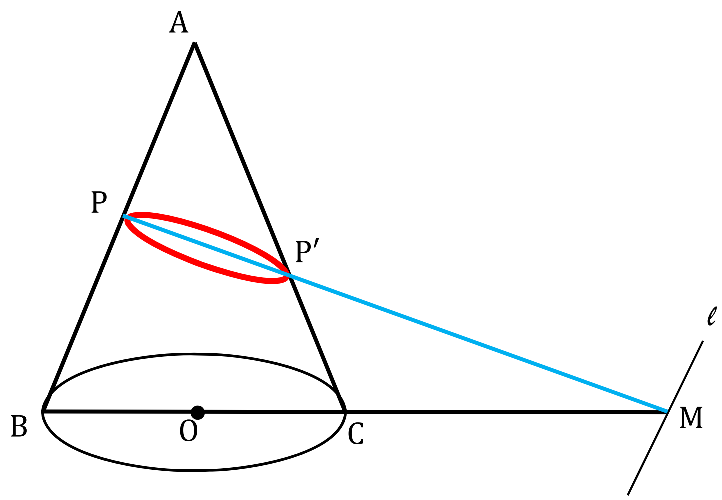
阿氏用另一種觀點來延伸解釋「圓錐」，原本圓錐曲線都是由正圓錐被一平面所截而成，這種新的圓錐的定義不但讓阿氏探討的範圍擴充到斜圓錐，還讓他首先發現雙曲線應該是雙支的。

定義 1　給定一圓，圓心為 O ，圓所在平面為 E 。給定 E 外一點 A ， A 與圓上動點 P 連線即為生成線，這些生成線所構成的曲面即為圓錐。

這樣的定義方式得到的圓錐大部分會是傾斜的，稱為斜圓錐；只有在 $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ 垂直於平面 E 時，生成線形成的曲面才會是正圓錐。

第一節　正圓錐

現有一根據定義 1 所定的正圓錐，一平面截此正圓錐的圖形為一橢圓記為 Γ ，將此截面與 E 的交線定為 ℓ，圓心 O 在 ℓ 上的垂點定為 M ， $\overline{\mathrm{OM}}$ 交圓於 C ， $\overline{\mathrm{BC}}$ 為圓上一直徑，因為 $\overleftrightarrow{AB}$ 和 $\overleftrightarrow{AC}$ 都是生成線，設截面交 $\overleftrightarrow{AB}$ 、 $\overleftrightarrow{AC}$ 於 P 和 P′，如圖。Apollonius 將 ΔABC 稱為軸三角形， P 、 P′ 皆在軸三角形上(以下簡稱軸三角形所在的平面為軸三角形平面)。



證明 1　P 、 P' 和 M 三點共線。

因為 M 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上，M 會與軸三角形共平面；又 M 在 ℓ 上，所以 M 也落在截面上。可推得 M 會位在軸三角形平面與截面的交線，也就是 $\overleftrightarrow{PP'}$ 上，得證。

上述的結論是因為軸三角形平面與截面不平行或重合，因此交線是唯一的一條。

證明 2　$\overline{AM}$ 垂直於 ℓ。

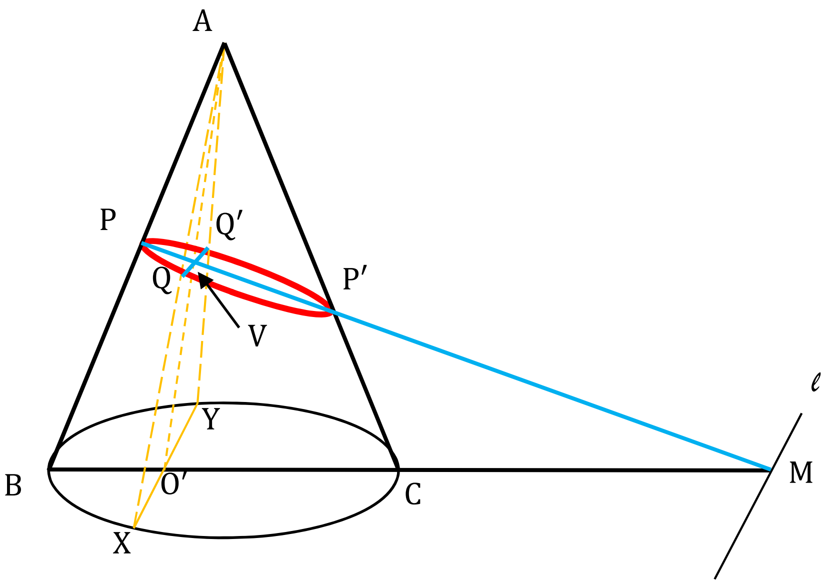
$\overline{AO}$ 垂直 $\overline{BC}$ 於 O ，又 $\overleftrightarrow{BC}$ 垂直 ℓ 於 M ，根據三垂線定理可知 $\overline{AM}$ 垂直於 ℓ。

利用證明 2 可以再更進一步發現 $\overline{PP'}$ 也會垂直於 ℓ。

證明 3　$\overline{PP'}$ 與 ℓ 垂直。

軸三角形平面上能找到兩不平行向量 $\overrightarrow{AM}$ 和 $\overrightarrow{BM}$ 都與 ℓ 垂直，可知軸三角形平面與 ℓ 垂直，又 $\overline{PP'}$ 也在軸三角形平面上，因此得證。

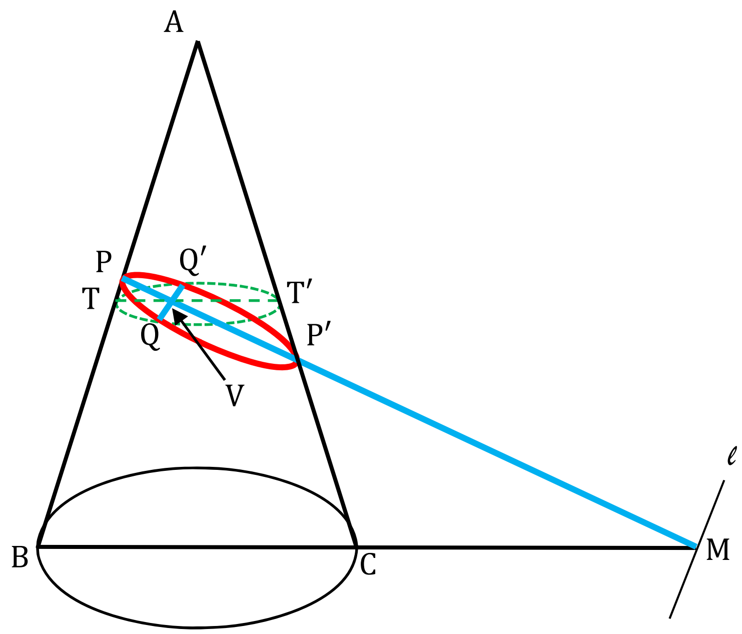
在 Γ 上作一條平行於 ℓ 的弦 $\overline{QQ'}$，$\overline{QQ'}$ 交 $\overline{PP'}$ 於 V，如圖，由證明 3 可知 $\overline{QQ'}$ 垂直於 $\overline{PP'}$ 。



證明 4　V 為 $\overline{QQ'}$ 中點。

在此將原本的圓稱作底圓，作 $\overrightarrow{AQ}$ 交底圓於 X、$\overrightarrow{AQ'}$ 交底圓於 Y，$\overline{XY}$ 為 ΔAXY 與底面 E 之交線。$\overrightarrow{QQ'}$ 位於 ΔAXY 上，ℓ 位於 E 上，又 $\overrightarrow{QQ'}$ 平行於 ℓ，所以 $\overrightarrow{QQ'}$ 是 ΔAXY 和 E 的共同向量，也就是說 ΔAXY 和 E 之交線 $\overline{XY}$ 會和 $\overrightarrow{QQ'}$ 同向。因為 $\overline{XY}$ 與 $\overline{QQ'}$ 和 ℓ 都平行，所以 $\overline{XY}$ 也會垂直於 $\overline{BC}$，又因為 $\overline{BC}$ 是底圓的直徑，因此 $\overline{XY}$ 是底圓上一條被 $\overline{BC}$ 垂直平分的弦。再看 $\overrightarrow{AV}$ 交底圓於 O′，因為 $\overrightarrow{AV}$ 在軸三角形平面上，可知 O′ 會落在 $\overline{BC}$ 上。又 $\overrightarrow{AV}$ 也在 ΔAXY 上，所以 O′ 也會再 $\overline{XY}$ 上，因此 O′ 是 X 和 Y 的中點。因 $\overline{QQ'}$ 平行 $\overline{XY}$，$\overrightarrow{AV}$ 交 $\overline{XY}$ 於 O′，而 O′ 是 X 和 Y 的中點，推得 V 為 $\overline{QQ'}$ 中點。

過 V 作一平行於 $\overline{BC}$ 之 $\overline{TT'}$，$\overline{TT'}$ 分別交 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 於 T 和 T′，如圖。



證明 5　Q、Q′、T 和 T′ 四點共圓。

因為 $\overline{QQ'}$ 與 ℓ 平行、$\overline{TT'}$ 平行 $\overline{BC}$，可知 Q、Q′、T 和 T′ 四點皆與 V 位於同一平行於 E 的平面上，此平面同樣截圓錐於一圓，因此 Q、Q′、T 和 T′ 四點都落在此圓上，亦即四點共圓。

根據圓冪性質，可得：

$$\overline{QV}\cdot\overline{Q'V}=\overline{TV}\cdot\overline{T'V}$$

由證明 4 可知 $\overline{QV}=\overline{Q'V}$ ，因此將上式轉換為：

$$\overline{QV}^2=\overline{TV}\cdot\overline{T'V}$$

證明 6　$\frac{\overline{QV}^2}{\overline{PV}\cdot\overline{P'V}}$ 為一定值。(正圓錐所截橢圓的共軛直徑基本定理)

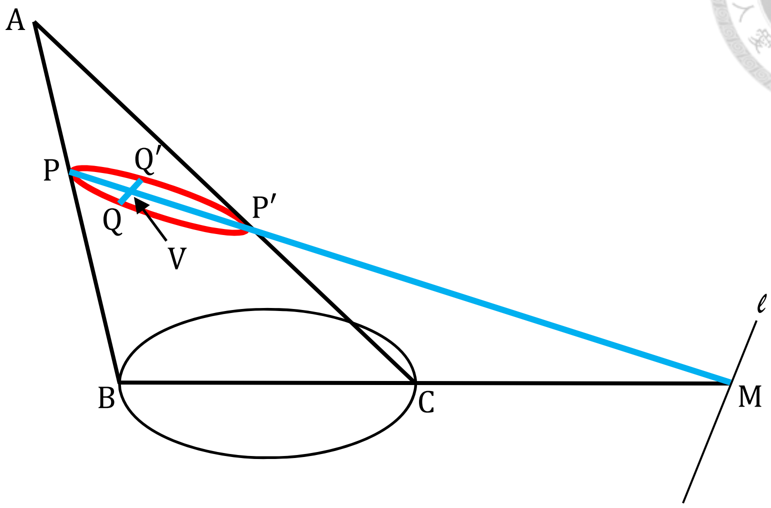
因為 $\Delta PTV \sim \Delta PBM$ ，可知 $\overline{TV}=\overline{PV}\cdot\frac{\overline{BM}}{\overline{PM}}$ ，同理因為 $\Delta P'T'V\sim\Delta P'CM$ ，可知 $\overline{T'V}=\overline{P'V}\cdot\frac{\overline{CM}}{\overline{P'M}}$，因此 $\overline{QV}^2=\overline{TV}\cdot\overline{T'V}=\overline{PV}\cdot\overline{P'V}\cdot\frac{\overline{BM}\cdot\overline{CM}}{\overline{PM}\cdot\overline{P'M}}$，推得 $\frac{\overline{QV}^2}{\overline{PV}\cdot\overline{P'V}}=\frac{\overline{BM}\cdot\overline{CM}}{\overline{PM}\cdot\overline{P'M}}=$ 定值 。

由證明 6 可知， $\frac{\overline{QV}^2}{\overline{PV}\cdot\overline{P'V}}$ 對所有與 ℓ 平行的弦 $\overline{QQ'}$ 來說為一定值，不受 $\overline{QQ'}$ 位置影響，我們稱此比例為橢圓的一個共軛不變量 γ 。在正圓錐的情況下，根據證明 3 和證明 4 能推得 $\overline{QQ'}$ 被 $\overline{PP'}$ 垂直平分，因此從對稱性可看出 $\overline{PP'}$即橢圓之長軸，而共軛直徑 $\overline{KK'}$ 即短軸。實際上，證明 6 得到的結論跟現今橢圓坐標化後得到的方程式型式是等價的。

證明 7　利用證明 6 推導橢圓坐標化後得到的方程式。

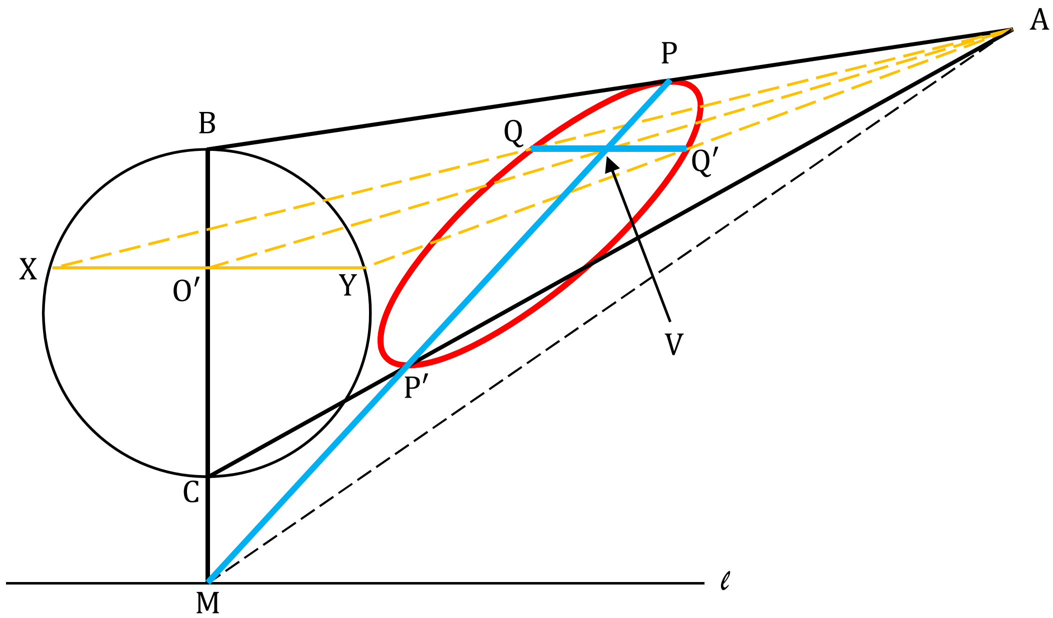
若 $\frac{\overline{QV}^2}{\overline{PV}\cdot\overline{P'V}}$ 為一定值 k，令 P 為原點，$\overrightarrow{PP'}$ 為 x 軸方向，$\overline{PP'}=2a$ ，$\overline{PV}=x$ ，$\overline{QV}=\overline{Q'V}=\mathrm{y}$ ，證明 6 的結果可換成 $y^2=kx(2a-x)=-kx^2+2akx$ ，經移項得到 $y^2+k(x-a)^2=ka^2$ ，同除以 ka^2 後變成 $\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{ka^2}=1$ 。當 V 為 $\overline{PP'}$ 中點 G 時亦為橢圓的中心，此時 $\overline{QQ'}$ 為共軛直徑 $\overline{KK'}$ ， $\overline{KG}=\overline{K'G}=$ 半短軸長 b ，因此 $\mathrm{k}=\frac{\overline{KG}^2}{\overline{PG}\cdot\overline{P'G}}=\frac{b^2}{a^2}$ ，代入前述方程式便會得到以 $(a,0)$ 為中心的橢圓標準式：$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 。

在 $\overrightarrow{AO}$ 不垂直於平面 E 但 $\overline{AM}$ 垂直於 ℓ 時，如下圖，此類斜圓錐仍可適用第一節的內容。



第二節　斜圓錐

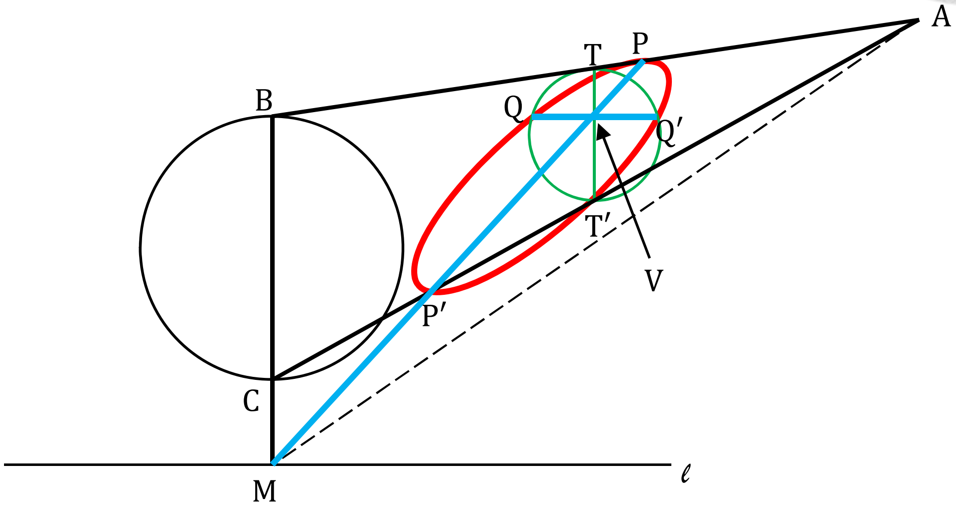
在 $\overrightarrow{AO}$ 不垂直於平面 E 時，生成線形成的曲面便是斜圓錐，跟正圓錐比較，最大的差異是軸三角形所在的平面不一定跟平面 E 垂直，因此第一節的證明 2 不一定會成立。注意到只要 $\overline{AM}$ 不垂直於 ℓ，軸三角形平面就不會跟平面 E 垂直。所以在一般斜圓錐情形下，$\overline{PP'}$ 可能不平行於 $\overline{BC}$，所以也不會與 ℓ 垂直，$\overline{QQ'}$ 與 $\overline{PP'}$ 之間也未必是垂直的關係。我們同樣將 $\overline{QQ'}$ 和 $\overline{PP'}$ 的交點定為 V，如下圖。



證明 8　在斜圓錐的情形下，V 仍為 $\overline{QQ'}$ 中點。

證明過程同證明 4。

同樣再過 V 作一平行於 $\overline{BC}$ 之 $\overline{TT'}$，$\overline{TT'}$ 分別交 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 於 T 和 T′，如圖。



由於 Q、Q′、T 和 T′ 仍與 V 點位於同一平行於底圓的面上，因此四點仍共圓，$\overline{QV}^2 = \overline{TV} \cdot \overline{T'V}$ 也還是成立。

證明 9　$\frac{\overline{QV}^2}{\overline{PV} \cdot \overline{P'V}}$ 為一定值。(斜圓錐所截橢圓的共軛直徑基本定理)

證明過程同證明 6。

需要注意的是，$\overline{PP'}$ 不會是橢圓的長軸，但當 V 為 $\overline{PP'}$ 中點 G 時，G 就是橢圓的中心，同時也是此時的平行弦 $\overline{KK'}$ 中點，$\overline{PP'}$ 和 $\overline{KK'}$ 都是橢圓的直徑(橢圓所有過中心的弦都稱為直徑。我們將 $\overline{KK'}$ 稱為 $\overline{PP'}$ 的共軛直徑。前一節的長軸和短軸就是共軛直徑的特例，事實上，橢圓直徑的共軛關係是互相的，當橢圓的兩條直徑是共軛關係且互相垂直時，此兩條直徑只有可能是長軸和短軸。

證明 10　橢圓的直徑和共軛直徑之間互相垂直時，此兩條直徑即為長軸和短軸。

根據證明 9 可知給定一組共軛直徑可以得到不變量 $\frac{\overline{QV}^2}{\overline{PV} \cdot \overline{P'V}}$，當兩條共軛直徑之間互相垂直時，根據證明 7 的內容便可得知此時兩條直徑即為長軸和短軸。

第三節　以線性變換的縮放補充共軛直徑的定義及基本性質

1.圓的共軛直徑

對一個圓來說，給定一條直徑，直徑的兩端點的兩條切線與此直徑垂直(所以這兩條切線會互相平行)，且與兩條切線平行的弦皆會被此直徑平分，如果剛好與切線平行的弦通過圓心，則此弦也是圓的一條直徑，這兩條直徑之間的關係互為彼此的共軛直徑。

另一方面，如果給定一條直徑，所有與此直徑平行弦的中點會連成一條直線，且此直線因為也過圓心因此也是圓的另一條直徑，這兩條直徑一樣會互相垂直且互為對方的共軛直徑。

由於兩條共軛直徑端點的兩組切線互相垂直，很容易便可看出這兩組切線所圍出的面積是定值，此定值其實就是圓直徑長度的平方。

2.橢圓的共軛直徑

換到橢圓的情形時，想像把圓的鉛垂方向不變，水平方向拉長某個倍數，則原本互相垂直的兩條直徑之間的角度就可能不會再保持垂直，但是不會影響直線與橢圓之間的切線關係和兩條直線之間的平分關係和平行關係，簡單的說就是原本直徑的兩端點切線在圓的情形一定會與直徑垂直，伸縮後直徑會變成橢圓上的一條直徑，切線仍然是橢圓的切線，直徑兩端點的切線還是維持互相平行，而與這兩條切線平行的弦也都會被此直徑平分，當此平行弦過直徑中點即橢圓中心時，此一過中心的平行弦便是原本直徑的共軛直徑。

同理，給定橢圓的一條直徑，將所有與直徑平行的弦中點連線。我們已經知道伸縮前，在圓的情形時這是一條與原本直徑端點切線平行的直徑，而這條直徑

的切線也和原直徑互相平行。伸縮後這條直線與原本直徑端點切線保持互相平行且通過橢圓中心，因此也會是橢圓中原直徑的的共軛直徑，只是兩條共軛直徑之間的關係不一定會互相垂直。(根據證明 10，兩條直徑分別是長短軸時才會互相垂直。)

而橢圓共軛直徑的兩組平行切線所圍成的平行四邊形，伸縮前後的面積比例一樣會是固定的，根據前述已知伸縮前的面積是定值，所以伸縮後的面積仍然會是定值，此定值即為長軸長乘以短軸長。

另外，橢圓的直徑和其共軛直徑的平行弦，還原成伸縮前圓的情形時，會是圓的一條直徑和被此直徑垂直平分的弦。由於在圓的情形下，可根據相似直角三角形的關係知道，弦長一半的平方除以直徑被此弦所截割的兩條線段長之積的值，不受平行弦位置影響皆為定值 1。因此從圓伸縮成橢圓後，對於這組平行弦伸縮的比例固定，由此推得共軛直徑基本定理。

總結橢圓共軛直徑的基本性質如下：

ⅰ.直徑兩端點的切線會互相平行，且所有與切線平行的弦會被此直徑平分，當平行弦過中心時即為共軛直徑。

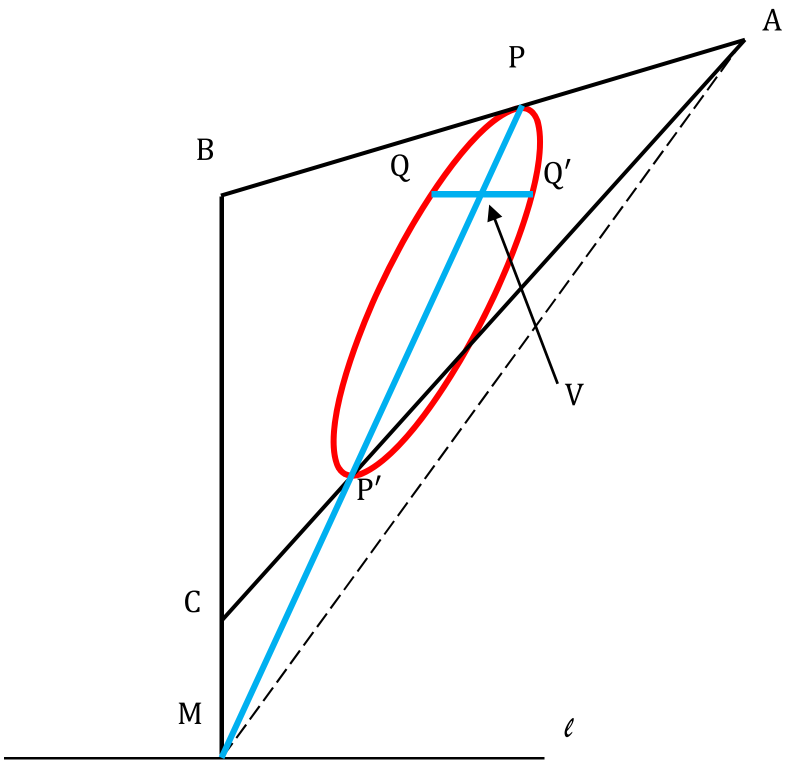
ⅱ.給定一直徑，所有與直徑平行的弦的中點會連成共軛直徑，且此直徑的共軛直徑兩端點的切線會與原直徑平行。

ⅲ.一組共軛直徑的兩組平行切線所圍成的平行四邊形面積是定值，此定值為長軸長乘以短軸長。

第四節　橢圓的共軛直徑

前兩節是討論圓錐與截面所交出的橢圓得到共軛直徑基本定理；本節則是假設現有一橢圓、任意一條直徑和一條與此直徑的共軛直徑平行的弦，在沒有斜圓錐和截面的情況下，仍然可以證明出共軛直徑基本定理。

首先，現有一橢圓 Γ 和直徑 $\overline{PP'}$ 和一條與此直徑的共軛直徑平行的弦 $\overline{QQ'}$，在橢圓所在平面外找一點當作 A，A 和橢圓 Γ 上各點連線形成生成線，$\overrightarrow{AP}$ 和 $\overrightarrow{AP'}$ 形成軸三角形平面，將 $\overline{PP'}$ 延長取一點 M，過 M 作平行於 $\overline{QQ'}$ 之直線即為 ℓ，可以在軸三角形平面上找到過 M 且與 ℓ 垂直之直線，令此直線與 $\overrightarrow{AP}$ 交於 B，與 $\overrightarrow{AP'}$ 交於 C。

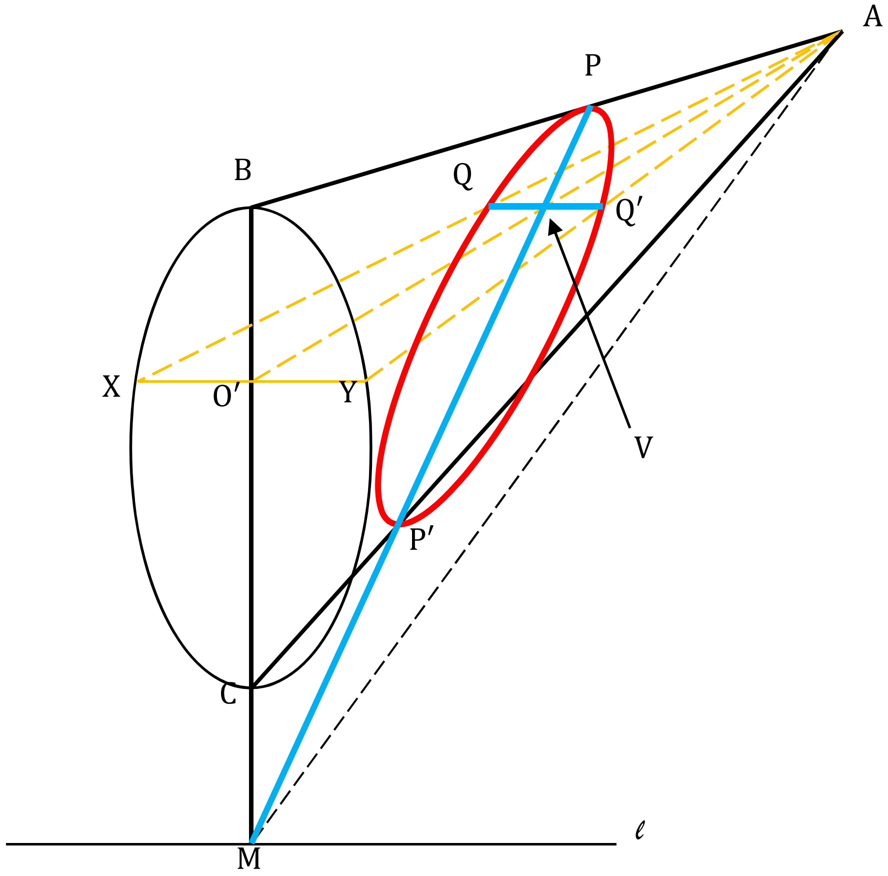


證明 11　在軸三角形平面上可以找到過 M 且與 ℓ 垂直之直線。

若軸三角形平面與 ℓ 垂直則可知 $\overline{PP'}$ 為橢圓長軸或短軸(根據證明 10)，由第一節

已知符合共軛直徑基本定理。若軸三角形平面不與ℓ垂直，則過 M 且與ℓ垂直的平面和軸三角形平面不可能平行，此兩平面必有一交線，此交線即為所求直線。

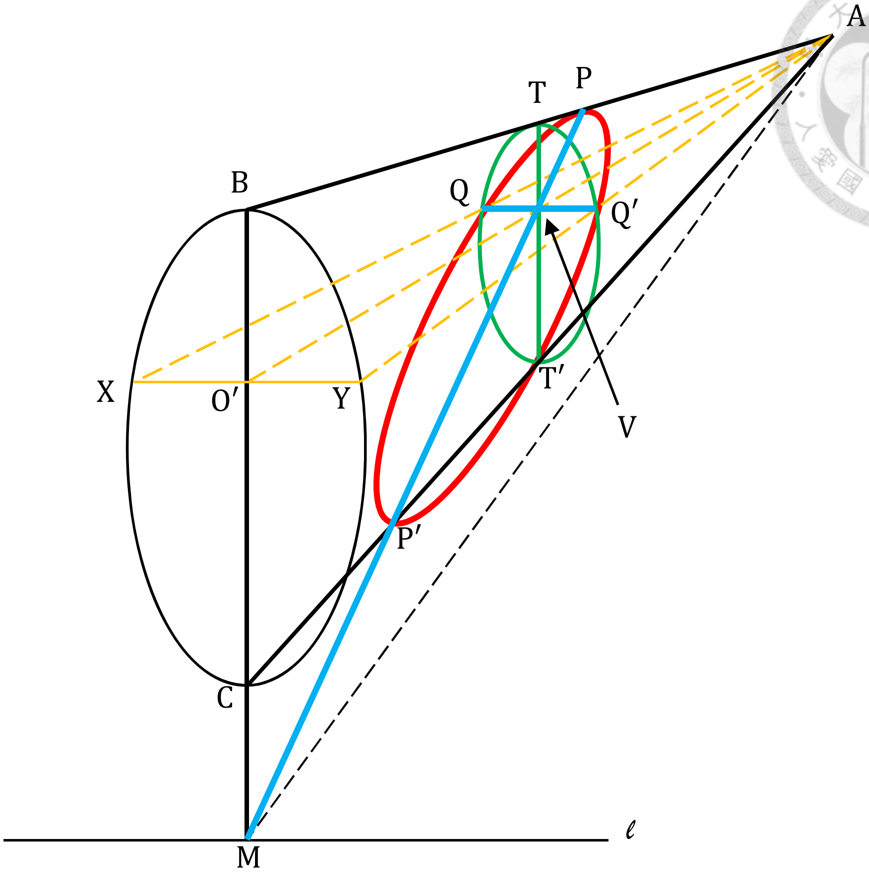
如圖，包含ℓ及$\overleftrightarrow{BC}$之平面我們將其當做底面，此底面會和斜圓錐截出一底橢圓Γ'，$\overline{BC}$會是此底橢圓的長軸或是短軸。



證明 12　$\overline{BC}$會是此底橢圓Γ'的長軸或是短軸。

同樣作$\overrightarrow{AQ}$交底橢圓於 X 、$\overrightarrow{AQ'}$交底橢圓於 Y，方法同證明 4 可知$\overline{XY}$被$\overline{BC}$垂直平分，再根據證明 10 的結論便可得證。

假設$\overline{PP'}$和$\overline{QQ'}$的交點為 V ，同樣再過 V 作一平行於$\overline{BC}$之$\overline{TT'}$，$\overline{TT'}$分別交$\overline{AB}$、$\overline{AC}$於 T 和 T′ ，如圖，Q 、 Q′ 、 T 和 T′ 四點都位在與底橢圓平行的平面上，且此平面同樣截斜圓錐於一個與底橢圓相似的橢圓Γ''。

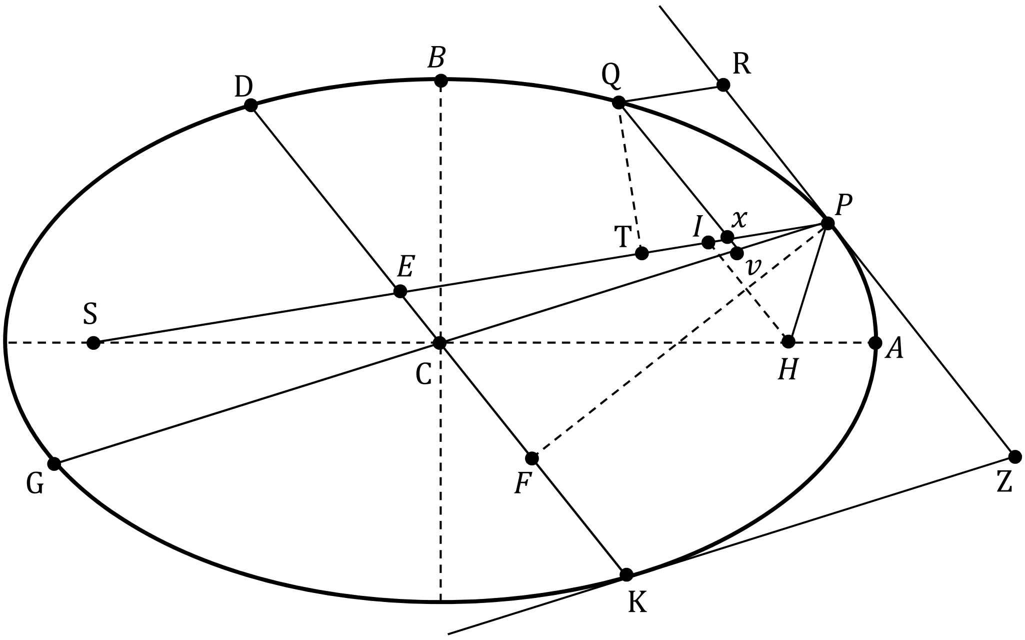


證明 13　　$\frac{\overline{QV}^2}{\overline{PV}\cdot\overline{P'V}}$ 為一定值。

根據證明 9 已知 $\frac{\overline{O'X}^2}{\overline{BO'}\cdot\overline{CO'}}$ 為一定值，又橢圓 Γ"與底橢圓相似，可推得 $\frac{\overline{QV}^2}{\overline{TV}\cdot\overline{T'V}}$ 也是一定值。因為 $\Delta PTV \sim \Delta PBM$ ，可知 $\overline{PV} = \overline{TV}\cdot\frac{\overline{PM}}{\overline{BM}}$ ，同理因為 $\Delta P'T'V \sim \Delta P'CM$ ，可知 $\overline{P'V} = \overline{T'V}\cdot\frac{\overline{P'M}}{\overline{CM}}$ ，因此得 $\frac{\overline{QV}^2}{\overline{PV}\cdot\overline{P'V}} = \overline{QV}^2/(\overline{TV}\cdot\frac{\overline{PM}}{\overline{BM}}\cdot\overline{T'V}\cdot\frac{\overline{P'M}}{\overline{CM}}) = \frac{\overline{QV}^2}{\overline{TV}\cdot\overline{T'V}}\cdot\frac{\overline{BM}\cdot\overline{CM}}{\overline{PM}\cdot\overline{P'M}} =$ 定值 。

第二章　　牛頓證明向心力與距離平方成反比

在此詳述牛頓在原理第一卷第三章如何證明命題 11：「物體沿橢圓運動，求指向橢圓焦點的向心力的規律。」



如圖，當行星沿著橢圓軌道運行到 P 點，在極小的時間 Δt 內依照慣性沿著切線方向維持原本的速度運行，但因為位在焦點 S 的太陽所給予的向心力的關係，讓行星在過了 Δt 後移動到了 Q 點。

根據牛頓第二定律可知向心力正比於向心加速度，因此原命題可以轉換成尋找向心加速度的規律。

因為行星在 P 點這一瞬間僅受向心力作用，我們在 P 點切線上取 R 點使得 $\overrightarrow{RQ}$ 與 $\overrightarrow{PS}$ 同向，再看位移 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}$，和泰勒展開式對照：$\overrightarrow{PR} = \mathrm{V} \cdot \Delta t$，$\overrightarrow{RQ} = \frac{1}{2}\mathrm{A} \cdot (\Delta t)^2$，其中 V 為速度，A 為加速度。因此向心加速度 A 大小 $= \frac{2\overline{RQ}}{(\Delta t)^2}$。

假設行星繞行太陽的週期為 p ，則根據面積律可知行星和太陽的連線在 Δt 的時間內所掃過的面積為 $\Delta t \cdot \frac{\pi ab}{p}$，其中 a 為橢圓軌道半長軸長，b 為半短軸長。則在極小時間內，這段掃過的面積可視為 ΔSPQ ，因此我們得到：

$$\Delta t \cdot \frac{\pi ab}{p} = \Delta SPQ = \frac{1}{2}\overline{SP} \cdot \overline{QT}$$

$$可得\ \Delta t = \frac{p}{\pi ab} \cdot \frac{1}{2}\overline{SP} \cdot \overline{QT}$$

其中 T 為 Q 在 $\overline{SP}$ 上的垂點，將上式代入計算向心加速度大小：

$$|A| = \frac{2\overline{RQ}}{(\Delta t)^2} = \frac{2\overline{RQ}}{\left(\frac{p}{\pi ab} \cdot \frac{1}{2}\overline{SP} \cdot \overline{QT}\right)^2} = \frac{8\pi^2 a^2 b^2}{p^2} \cdot \frac{\overline{RQ}}{\overline{SP}^2 \cdot \overline{QT}^2}$$

上式所得結果跟牛頓在命題 6 的推論：「向心力將反比於$\frac{\overline{SP}^2 \cdot \overline{QT}^2}{\overline{QR}}$」是一樣的。

自從克卜勒提出行星運行三大定律後，當時很多科學家們對於這個命題都曾做過一樣的猜測，因此牛頓在進行到目前的步驟，發現行星與太陽的距離 $\overline{SP}$ 的平方已經出現在推論中，接下來要做的事情只要證明出 $\frac{\overline{RQ}}{\overline{QT}^2}$ 不論 P 點在什麼位置都是定值，這個猜測就證明成功了！

接下來的步驟便是牛頓藉由各種橢圓已知的性質計算出 $\frac{\overline{RQ}}{\overline{QT}^2}$。牛頓先做出一條過 P 的橢圓直徑 $\overline{PG}$ 和 $\overline{PG}$ 的共軛直徑 $\overline{DK}$ (與 P 點切線平行的另外一條橢圓直徑)，$\overline{DK}$ 和 $\overline{SP}$ 的交點定為 E 。過 Q 作與 P 點切線平行的直線，此直線交 $\overline{SP}$ 於 x 、交 $\overline{PG}$ 於 v ，可注意到此時 $\overline{Qv}$ 即為橢圓中與 $\overline{DK}$ 平行的弦。

牛頓一開始先證明 $\overline{PE}=\overline{AC}$ 。假設另一個焦點為 H ，從 H 作一平行於共軛直徑的線交 $\overline{SP}$ 於 I ，因為 $\overline{EC}$ 平行 $\overline{IH}$，又 $\overline{SC}=\overline{CH}$ ，可以得到 $\overline{SE}=\overline{EI}$ 。因為 $\overline{IH}$ 也跟 P 點切線互相平行，根據平行線內錯角相等和橢圓的光學性質可知 $\angle PIH=\angle RPI=\angle ZPH=\angle PHI$ ，所以 $\overline{PI}=\overline{PH}$ 。因此：

$$\overline{PE}=\overline{PI}+\overline{EI}=\frac{1}{2}(\overline{PH}+\overline{PI})+\frac{1}{2}(\overline{SE}+\overline{EI})=\frac{1}{2}(\overline{PH})+\frac{1}{2}(\overline{SI}+\overline{PI})$$

$$=\frac{1}{2}(\overline{PH}+\overline{SP})=\frac{1}{2}\cdot 2a=\overline{AC}$$

因為 $\Delta PEC\sim\Delta Pxv$ ，根據相似形成比例，可知 $\overline{QR}$： $\overline{Pv}=\overline{Px}$： $\overline{Pv}=\overline{PE}$： $\overline{PC}=\overline{AC}$：$\overline{PC}$ 。得到：

$$\overline{QR}=\frac{\overline{Pv}\cdot\overline{AC}}{\overline{PC}}\qquad ------(1)$$

再來作 P 點在 $\overline{DK}$ 上的垂點 F ，因為$\angle QxT=\angle \mathrm{RPE}=\angle \mathrm{PEF}$ ， ΔQxT 和 ΔPEF 會是相似的直角三角形，所以 $\overline{Qx}$： $\overline{QT}=\overline{PE}$： $\overline{PF}=\overline{AC}$：$\overline{PF}$ ，又因為 $\overline{PG}$ 和 $\overline{DK}$ 互為彼此的共軛直徑，根據第一章第三節的共軛直徑性質，可知 $\overline{PG}$ 和 $\overline{DK}$ 的兩組切線所圍成的平行四邊形面積等於橢圓長、短軸之積，因此平行四邊形 $PCKZ$ 的面積會等於 $\overline{AC}\cdot\overline{BC}$ ，即 $\overline{AC}\cdot\overline{BC}=\overline{CK}\cdot\overline{PF}=\overline{CD}\cdot\overline{PF}$，所以 $\overline{AC}$： $\overline{PF}=\overline{CD}$： $\overline{BC}$ ，可知 $\overline{Qx}$： $\overline{QT}=\overline{AC}$：$\overline{PF}=\overline{CD}$： $\overline{BC}$ ，因此：

$$\overline{QT}^2=\frac{\overline{Qx}^2\cdot\overline{BC}^2}{\overline{CD}^2}\qquad ------(2)$$

拿 (1) 和 (2) 相除：

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{QT}^2}=\frac{\overline{Pv}\cdot\overline{AC}}{\overline{PC}}\cdot\frac{\overline{CD}^2}{\overline{Qx}^2\cdot\overline{BC}^2}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}^2}\cdot\frac{\overline{CD}^2}{\overline{PC}}\cdot\frac{\overline{Pv}}{\overline{Qx}^2}$$

根據共軛直徑基本定理，

$$\frac{\overline{CD}^2}{\overline{PC}^2} = \frac{\overline{Qv}^2}{\overline{Pv}\cdot\overline{vG}} \text{，即 } \frac{\overline{CD}^2}{\overline{PC}}\cdot\frac{\overline{Pv}}{\overline{Qx}^2} = \frac{\overline{PC}\cdot\overline{Qv}^2}{\overline{vG}\cdot\overline{Qx}^2}$$

因此

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{QT}^2} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}^2}\cdot\frac{\overline{CD}^2}{\overline{PC}}\cdot\frac{\overline{Pv}}{\overline{Qx}^2} = \frac{a}{b^2}\cdot\frac{\overline{PC}\cdot\overline{Qv}^2}{\overline{vG}\cdot\overline{Qx}^2} = \frac{a}{b^2}\cdot\frac{\overline{PC}}{\overline{vG}}\cdot\frac{\overline{Qv}^2}{\overline{Qx}^2}$$

在 Δt 趨近於 0 時，v 點和 x 點和 P 都會相當接近，此時 $\overline{vG}$ 會相當於 $\overline{PG} = 2\overline{PC}$，而 $\overline{Qv}$ 也會相當於 $\overline{Qx}$，因此

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{QT}^2} = \frac{a}{b^2}\cdot\frac{\overline{PC}}{\overline{vG}}\cdot\frac{\overline{Qv}^2}{\overline{Qx}^2} \xrightarrow{\Delta t\text{ 趨近於 }0} \frac{a}{b^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{a}{2b^2}$$

即 $\frac{\overline{QR}}{\overline{QT}^2}$ 不管 P 點位置為何都是一個常數 $\frac{a}{2b^2}$。在牛頓的證明過程中，他先把 $\overline{QR}$ 乘上 $\frac{2b^2}{a}$ 也就是橢圓軌道的正交弦長 L，然後再證明在 Δt 趨近於 0 時，$\frac{L\cdot\overline{QR}}{\overline{QT}^2}$ 會趨近於 1，此命題便得證了。

回頭再來看向心加速度大小：

$$|A| = \frac{8\pi^2a^2b^2}{p^2}\cdot\frac{\overline{RQ}}{\overline{SP}^2\cdot\overline{QT}^2} \xrightarrow{\Delta t\text{ 趨近於 }0} \frac{8\pi^2a^2b^2}{p^2}\cdot\frac{a}{2b^2}\cdot\frac{1}{\overline{SP}^2} = \frac{4\pi^2a^3}{p^2}\cdot\frac{1}{\overline{SP}^2}$$

注意到對於不同的行星雖然橢圓軌道的半長軸長 a 和繞行太陽的週期 p 都不一樣，但根據克卜勒的週期律，a^3 和 p^2 會成正比，因此不同行星之間的向心加速度只有跟距離平方成反比。這個結論跟牛頓的萬有引力公式互相呼應，從引力公式中可以知道太陽對行星的引力只會跟距離平方成反比。

牛頓在《原理》的證明裡，使用到既深且廣的數學內容，並且步驟快速簡潔，因此對於大部份讀者來說難度相當高。例如向心力和距離平方成反比這個命題，共軛直徑基本定理的部份牛頓就直接使用在過程中。但正因牛頓本身擁有的深厚數學基礎，從哥白尼日心說開始，經過第谷測量數據和克卜勒的行星運動定律後，終於在牛頓的萬有引力提出後完整的說明了行星運行現象，也為後來的科學領域奠基了重要的基礎。

第三章　丹德林的圓錐模型——Dandelin Spheres

丹德林出生於 1794 年法國大革命時期，是個比利時軍事工程師。他曾參加過拿破崙政權青年志願軍，也參與過 1830 年比利時獨立革命。他 1822 年在比利時布魯塞爾皇家科學學院發表了一篇論文，以正圓錐模型和截面中間塞進兩個內切球的方式(稱為 Dandelin Spheres)，解釋圓錐曲線的焦點性質。

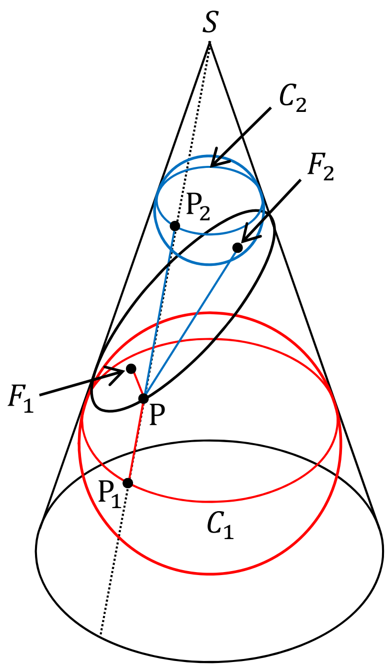
第一節　解釋 Dandelin Spheres 內容

以橢圓為例，橢圓上每一點到兩焦點的距離和會是一個定值。如下圖所示，丹德林在一正圓錐與一平面截出一橢圓 Γ 的模型中，找出兩個與圓錐與截面皆相切的球 B_1 和 B_2。這兩顆內切球分別與圓錐切於圓 C_1 和 C_2，並與截面切於點 F_1 和 F_2 (F_1 和 F_2即為橢圓 Γ 的兩焦點)。圓錐頂 S 和橢圓上任意一點 P 連成的射線 $\overrightarrow{SP}$，交圓 C_1 和 C_2 於點 P_1 和 P_2，從圓錐模型可以明顯看出對於所有點 P，$\overline{P_1P_2}$ 的長度都是一樣的。

由於 P_1 和 F_1都是 P 點對球 B_1 的切點，因此 $\overline{PP_1} = \overline{PF_1}$；同理，$P_2$ 和 F_2都是 P 點對球 B_2 的切點，因此 $\overline{PP_2} = \overline{PF_2}$。所以對於橢圓上任意一點 P，

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PP_1} + \overline{PP_2} = \overline{P_1P_2} = \text{定值}$$

即為從焦點出發的橢圓定義式。



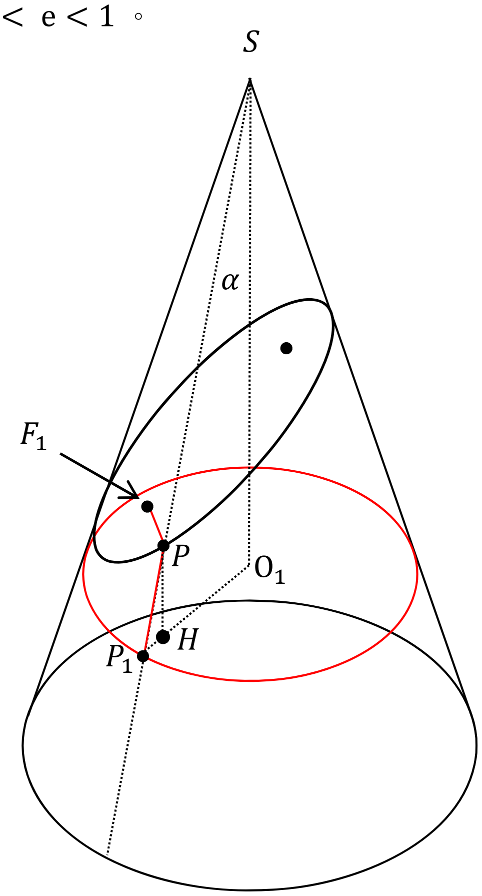
此外，丹德林的圓錐模型也可以呈現出橢圓的準線和離心率的意義。

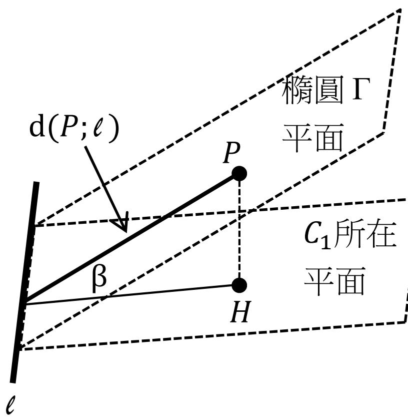
如下圖，令橢圓上點 P 到圓 C_1 所在平面垂點為 H，因為圓錐頂 S 和圓 C_1 圓心 O_1 的連線(稱為正圓錐的中心線)也垂直於圓 C_1 所在平面，所以 $\Delta SP_1O_1 \sim \Delta PP_1H$，因此 $\overline{PH}/\overline{PF_1} = \overline{PH}/\overline{PP_1} = \cos\alpha$，$\alpha$ 稱為正圓錐的圓錐角。另一方面，令橢圓 Γ 所在平面和圓 C_1 所在平面的交線為 ℓ，且兩平面的兩面角為 β，P 點到 ℓ 的距離 $\mathrm{d}(P;\ell)$，則 $\overline{PH}/\mathrm{d}(P;\ell) = \sin\beta$。

因此我們可以得到

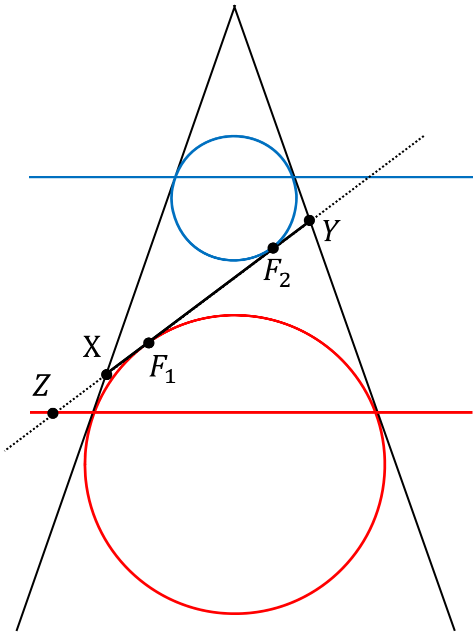
$$\frac{\overline{PF_1}}{\mathrm{d}(P;\ell)} = \frac{\overline{PH}/\mathrm{d}(P;\ell)}{\overline{PH}/\overline{PF_1}} = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} = \text{常數 } e$$

亦即 P 到焦點 F_1 之距離與 P 到線段 ℓ 之距離之比為一常數 e，我們將 ℓ 稱為橢圓的準線。當 $\beta = 0$，即截線是圓時，$e = 0$。而在橢圓的情形因為 $\alpha + \beta < 90°$，所以 $0 < e < 1$。



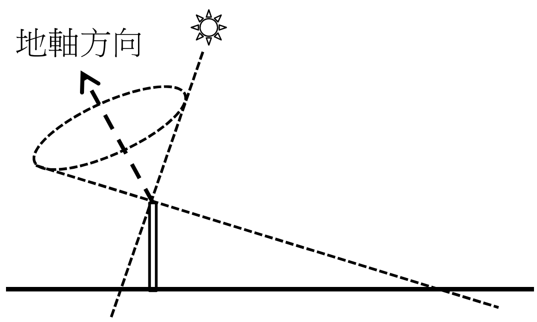


取一平面過橢圓焦點並與截平面垂直，而得一圓錐面之剖面圖如下：$\overline{XY} = 2a =$ 長軸，$\overline{F_1F_2} = 2c$，2c 為兩焦點之間距離。由上述討論知 $\overline{XF_1}/\overline{XZ} = e = \frac{a-c}{\overline{XZ}} = \frac{\overline{YF_1}}{\overline{YZ}} = \frac{a+c}{2a+\overline{XZ}}$，再由減比定理得 $e = \frac{(a+c)-(a-c)}{2a} = \frac{c}{a}$。因此前述的常數 e 即橢圓離心率之定義，而且相似的橢圓之間均有相同的離心率，正如所有的圓，離心率均為 0。(雙曲線的離心率會大於 1，拋物線的離心率為 1)



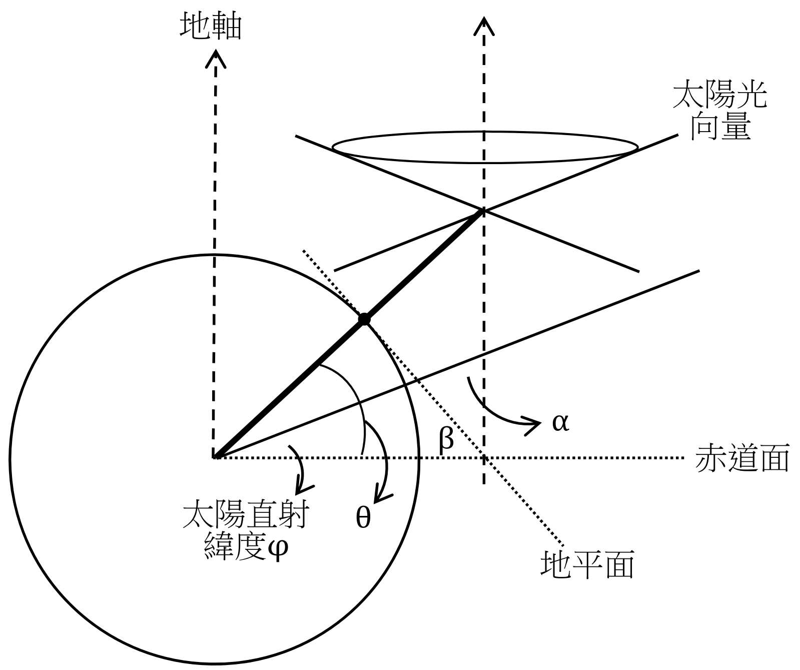
第二節　Dandelin Spheres 的應用

古人利用在地面上立一根竿子當作日晷，根據太陽照射竿子所造成的晷影來判斷時間，由於這種日晷的軌面與地平面平行，因此將之稱為地平式日晷。假設在同一天內，太陽直射地球的緯度都不改變，則因為地球自轉的關係，通過竿頂的太陽光向量一天中會圍成一個正圓錐。如下圖，



因為太陽直射地球的緯度不變，因此太陽光向量與地軸方向夾角固定(銳角部分即為上節的圓錐角)，此錐面之中心線會過竿頂並與地軸平行。而地平面就如同一個截面，與錐面截出一圓錐曲線，即一日中竿頂在晷影上的位置所構成的曲線(此曲線在地平面上)。我們可以藉由 Dandelin Spheres 中的圓錐角 α 和兩面角 β 來推算出圓錐曲線的離心率，進而瞭解竿頂在晷影上的位置所構成的曲線是圓、橢圓、拋物線還是雙曲線。

如下圖，假射有一天太陽直射地球北緯角度為 φ ，圓錐角 α 即為 $90° - φ$ 。對於位於北緯 θ 的某地來說，兩面角 β 即為地平面和赤道面的夾角，從圖中可看出 β 即為 $90° - θ$。因此離心率 $e = \frac{\sin β}{\cos α} = \frac{\cos θ}{\sin \varphi}$ ，可以以此判斷這一天在某地的竿頂晷影軌跡圖型。



舉例說明，夏至時太陽直射北緯 23.5° ，將竿立在北極，竿頂在北極地平面上移動的軌跡便是正圓。從 $e = \frac{\cos θ}{\sin \varphi} = \frac{\cos 90°}{\sin 23.5°} = 0$ 可以知道在北極的竿頂晷影的軌跡的確是正圓沒錯。

要是在夏至時將竿子逐漸南移，在 $90° - \varphi = 66.5° < \theta < 90°$ 時，$e = \frac{\cos\theta}{\sin\varphi} = \frac{\cos\theta}{\cos(90°-\varphi)} < \frac{\cos\theta}{\cos\theta} = 1$，在這段緯度範圍的地區軌跡為橢圓；剛好 $\theta = 90° - \varphi = 66.5°$ 時， $e = \frac{\cos\theta}{\sin\varphi} = \frac{\cos\theta}{\cos(90°-\varphi)} = \frac{\cos\theta}{\cos\theta} = 1$ ，在這特定緯度的地區軌跡剛好是拋物線；而當 $\theta < 90° - \varphi = 66.5°$ 時，軌跡就變成了雙曲線的其中一支。以位於北緯 25° 的臺北為例，則 $e = \frac{\cos\theta}{\sin\varphi} = \frac{\cos 25°}{\sin 23.5°} \fallingdotseq 2.27$ ，因此夏至時臺北的竿頂晷影軌跡為雙曲線的其中一支。

此外，在太陽直射北緯 23.5° 時，在赤道到南緯 66.5° 之間的地區，竿頂晷影軌跡也是雙曲線的其中一支；而剛好南緯 66.5° 的地區正午時可以在地平正北方向看到一瞬間的太陽以外，在南緯 66.5° 以上的地區夏至整天都看不到陽光，因此在地面上是看不到晷影的。

在太陽直射北緯 φ 時各地區的竿頂晷影軌跡，我們將結果整理如下：

(1) 緯度為北緯 90° 的地區，也就是在北極， $e = 0$ ，軌跡為一正圓。

(2) 緯度在北緯 θ ，且 $90° - \varphi < \theta < 90°$ 的地區， $0 < e < 1$ ，軌跡為一橢圓。

(3) 緯度在北緯 θ ，且 $\theta = 90° - \varphi$ 的地區， $e = 1$ ，軌跡為一拋物線。

(4) 緯度在北緯 θ 或南緯 θ ，且 $\theta < 90° - \varphi$ 的地區， $e > 1$ ，軌跡為一雙曲線的一支。

(5) 緯度在南緯 θ ，且 $\theta = 90° - \varphi$ 的地區，太陽只會在正午的一瞬間在地平面出現，沒有軌跡。

(6) 緯度在南緯 θ ，且 $90° - \varphi < \theta \leq 90°$ 的地區，進入永夜時期，完全看不到太陽，因此也沒有軌跡。

當太陽直射南半球的話，將上述結果南北對調即可。

參考文獻

1. 艾薩克・牛頓(2005)。自然哲學之數學原理(王克迪譯)，(霍金編・導讀)。大塊文化。(原著出版年：1687 年)

2. 莫里斯・克萊因(2002)。古今數學思想(張理京、張錦炎、江澤涵譯)。上海科學技術出版社。(原著出版年：1972 年)

3. 侯以修(2013)。以數理分析克卜勒三大行星律—牛頓的萬有引力(碩士論文)。臺灣大學數學研究所。

4. 王嘉慶(2007)。從刻卜勒到牛頓—分析牛頓的幾何論證(碩士論文)。臺灣大學數學研究所。

5. 張海潮、沈貽婷(2015)。古代天文學中的幾何方法。三民書局。

6. 鄭英豪(1999)。圓錐截痕與二次曲線：一個數學老師的無聊之舉。數學傳播，23(3)，21-33。

7. Richard S. Westfall(1980). *Never at Rest* , Cambridge University Press.

8. David Dennis and Susan Addington(2009). *Apollonius and Conic Sections*, from http://www.quadrivium.info/MathInt/MathIntentions.html

9. *Complete Dictionary of Scientific Biography*(2008), from http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830901069.html.