

國立臺灣大學工學院土木工程學系



碩士論文

Department of Civil Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis

航測與電腦視覺之比較-以雙像立體觀測為例

Comparison between Aerial Photogrammetry and

Computer Vision with a Pair of Images

高佳瑋

Kao, Chia-Wei

指導教授：徐百輝 教授

Major Professor: Hsu, Pai-Hui

中華民國 105 年 1 月

Jan. 2016



國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書

航測與電腦視覺之比較-以雙像立體觀測為例
Comparison between Aerial Photogrammetry and
Computer Vision with a Pair of Images

本論文係高佳瑋君 (R02521114) 在國立臺灣大學土木工程學系碩士班完成之碩士學位論文，於民國 105 年 01 月 28 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

徐百輝

(指導教授)

邱式鴻

王聖鐸

徐百輝

邱式鴻

王聖鐸

系主任

呂良正

呂良正

(簽名)

致 謝

兩年多的碩士學業終於到達終點，在踏入人生新的旅程之前，首先想感謝徐百輝老師在這兩年多給我的指導與協助，當研究遇到瓶頸時，老師總是循循善誘的幫助我釐清思路、把一個又一個問題的結打開。感謝趙鍵哲老師與韓仁毓老師，在許多次的專題討論給予許多關於研究的建議。另外，要感謝口試委員邱式鴻老師以及王聖鐸老師，提供許多關於論文的寶貴意見，以改進不良之處。

謝謝陪我一起走過前兩年的學姊和同學們。謝謝琇蔓學姊帶我熟悉研究生活、找到自己做研究的步調，謝謝思嘉學姊和珮綺學姊提供珍貴的筆記讓我能有順利進行研究的工具，謝謝張瑋學姊適時的烏鐵問候和紓壓聊天，還要謝謝綺珮學姊整個學期的一起奮鬥。謝謝 213 的夥伴們：卉儀、慧娟、姿良、至培、于捷、翊雁、宗憲，雖然寫下這些感謝的現在，晚了你們一些，但謝謝曾經在研究室一起努力的你們，特別是卉儀，謝謝你總是陪著我一起煩惱程式、找問題、加班，慢熟的我如果沒有你，研究生活一定少了很多快樂，希望你一切順利。除了同學們，也要謝謝學弟妹們：謝謝涵蓁帶我去運動當健康的研究生，謝謝棟立幫了很多大大小小的忙。

最後，要感謝一直支持著我的家人和朋友們，謝謝爸、媽讓我在段時間能心無旁騖的完成學業，謝謝弟弟們這段期間的各種陪伴，因為有你們，才能成就這篇論文，謝謝你們。



摘要



科技的日新月異使得各技術領域間的界線愈趨模糊，以測量領域的攝影測量為例，隨著無人飛行載具（UAV）的發展，影像的方位解算與三維重建方法除了共線式、共面式，電腦視覺領域的 SfM（Structure from Motion）等方法也開始廣泛應用在搭載 GPS 等定位系統的無人飛行系統（UAS）拍攝的影像解算上，更常有針對電腦視覺與攝影測量進行比較的議題產生，然而大部份的議題討論由於兩個領域具有發展、目標、描述方式上的差異，多以理論或現有的商業軟體進行實驗探討，較少有針對兩個領域皆深入了解的分析。是以本研究以攝影測量常用的共線式方法與電腦視覺中基於核幾何/共面條件的必要矩陣方法，在相同條件下進行實驗並分析探討，以模擬之無人飛行系統拍攝像對為例，探討在不同控制點分佈與影像姿態旋轉的情況下，兩種方法解算的成果優劣及不同解算條件對兩種解算方法的影響。實驗結果顯示，地面控制點的分佈情況與影像姿態旋轉皆會影響共線式的解算成果，而地面控制點分佈情況對必要矩陣的解算成果沒有顯著影響。

關鍵字：共線式、必要矩陣、攝影測量、電腦視覺、方位解算。

Keywords：collinearity, essential matrix, photogrammetry, computer vision.

目 錄



中文摘要.....	iii
目錄.....	iv
圖目錄.....	vii
表目錄.....	ix
第一章 前言	1
1-1 研究動機與目的.....	1
1-2 研究流程.....	2
1-3 論文架構.....	3
第二章 文獻回顧	5
2-1 航空攝影測量與電腦視覺比較.....	5
2-2 UAS 攝影測量回顧.....	7
2-3 電腦視覺輔助攝影測量的應用.....	9
第三章 攝影測量方法	11
3-1 相機模型.....	11
3-2 方位解算方法.....	13
3-2-1 後方交會解算模式.....	13
3-2-2 前方交會解算模式.....	14
3-2-3 最小二乘法.....	15



第四章 電腦視覺方法	17
4-1 相機模型.....	17
4-1-1 基礎矩陣.....	19
4-1-2 必要矩陣.....	20
4-1-3 三維轉換.....	21
4-2 方位解算方法.....	24
4-2-1 八點法.....	24
4-2-2 特徵值分解.....	25
第五章 實驗與分析	27
5-1 實驗配置.....	27
5-2 控制點分佈.....	28
5-2-1 共線式解算成果.....	29
5-2-2 必要矩陣解算成果.....	32
5-2-3 綜合比較.....	35
5-3 影像旋轉.....	37
5-3-1 共線式解算成果.....	37
5-3-2 必要矩陣解算成果.....	43
5-3-3 綜合比較.....	49
第六章 結論與建議	53

參考文獻.....



圖目錄



圖 1-1 研究流程圖.....	3
圖 2-1 航空攝影測量示意圖.....	8
圖 2-6 定翼機與旋翼機 (Eisenbeiß, 2009)	9
圖 3-1 共線條件 (左) 與共面條件 (右)	11
圖 4-1 坐標系示意圖.....	17
圖 4-2 核幾何示意圖.....	17
圖 4-3 基礎矩陣.....	19
圖 4-4 必要矩陣.....	20
圖 4-5 相機坐標系的位移與旋轉.....	21
圖 4-6 次像初始投影矩陣的可能解 (Hartley and Zisserman, 2000)	23
圖 5-1 富士 FinePix S3 Pro.....	27
圖 5-2 控制點分佈圖.....	29
圖 5-3 控制點分佈解算檢核點坐標成果誤差分佈折線圖-共線式.....	31
圖 5-4 點位分佈解算檢核點坐標殘差分佈圖-共線式.....	32
圖 5-5 控制點分佈解算檢核點坐標成果誤差分佈折線圖-必要矩陣.....	34
圖 5-6 點位分佈解算檢核點坐標殘差分佈圖-必要矩陣.....	35
圖 5-7 檢核點坐標 RMSE 折線圖-控制點分佈.....	36
圖 5-8 單軸影像旋轉解算檢核點坐標成果誤差分佈折線圖-共線式.....	39
圖 5-9 單軸旋轉影像解算檢核點坐標殘差分佈圖-共線式.....	40
圖 5-10 多軸影像旋轉解算檢核點坐標成果誤差分佈折線圖-共線式.....	42
圖 5-11 多軸旋轉影像解算檢核點坐標殘差分佈圖-共線式.....	43
圖 5-12 單軸影像旋轉解算檢核點坐標成果誤差分佈折線圖-必要矩陣.....	45
圖 5-13 單軸旋轉影像解算檢核點坐標殘差分佈圖-必要矩陣.....	46
圖 5-14 多軸影像旋轉解算檢核點坐標成果誤差分佈折線圖-必要矩陣.....	48

圖 5-15 多軸旋轉影像解算檢核點坐標殘差分佈圖-必要矩陣.....	49
圖 5-16 RMSE 折線圖-影像旋轉.....	51
圖 5-17 RMSE 折線圖-影像旋轉（續）.....	52





表目錄

表 2-1 電腦視覺方法與攝影測量方法比較表.....	6
表 2-2 電腦視覺與攝影測量於方位解算方法比較表.....	6
表 2-3 求解條件要求與解算方法比較 (Cyganek and Siebert, 2009)	7
表 5-1 模擬 UAS 影像數據.....	27
表 5-2 控制點分佈解算檢核點坐標成果-共線式.....	30
表 5-3 控制點分佈解算檢核點坐標成果-必要矩陣.....	33
表 5-4 檢核點坐標 RMSE 比較表-控制點分佈.....	36
表 5-5 單軸旋轉影像解算檢核點坐標成果-共線式.....	38
表 5-6 多軸旋轉影像解算檢核點坐標成果-共線式.....	41
表 5-7 單軸旋轉影像解算檢核點坐標成果-必要矩陣.....	44
表 5-8 多軸旋轉影像解算檢核點坐標成果-必要矩陣.....	47
表 5-9 檢核點坐標 RMSE 比較表-影像旋轉.....	50
表 5-10 檢核點坐標 RMSE 比較表-影像旋轉(續).....	50

一、前言



1-1 研究動機與目的

自1983年影像辨識的議題首次在攝影測量 (photogrammetry) 領域出現，攝影測量與電腦視覺 (computer vision) 常被放在一起討論。因應不同的應用需求，兩個領域的專業術語、數學模型、及解算模式等常有所差異，容易受限於各自慣用的形式而難以彼此理解，此外，兩個領域群體的發展時間、大小皆有所差異，使兩者的關係無法拉近。

攝影測量的發展以製圖為目的，後逐漸發展為可對建物進行三維重建，為針對穩定度高的航照影像長期發展的數學模型，相較之下電腦視覺的目的則是獲得拍攝物體的三維視覺化，精度要求較低，因此電腦視覺更強調透過影像拍攝時，不同影像或影像與目標物體之間的相對關係，取得所需要的空間資訊，可藉由較少的約制條件與較大量的影像取得目標的三維空間資訊。

近年來，隨著科技的發展與進步，電腦視覺的技術也開始應用於攝影測量的解算，尤其使用於無人駕駛航空器系統 (Unmanned Aircraft Systems, UAS) /無人飛行載具 (Unmanned Aerial Vehicles, UAVs) 的航空攝影測量解算軟體，如: Pix4D、APS等。

相較於傳統的民航機，UAV具有機動性佳與低成本的優勢，整合定位系統 (GPS/IMU) 及感測設備 (光學相機、熱感測器或光達等) 的UAS也已廣泛地應用於航空攝影測量以進行地形圖測繪、正射影像製作、或是建物的三維重建。儘管UAS在獲取影像的部分與傳統載人之民航機相比有上述優勢，但囿於載重限制，其定位系統精度有限、且常搭載非量測型相機，此外飛行過程易受外在環境影響，導致相機拍攝影像時的內方位 (interior orientation) 參數無法與相機率定成果完全一致，風力的影響也易在影像拍攝時產生較大的旋轉角度。而傳統的航空攝影測量所使用的空中三角測量方法，奠基於航照影像拍攝過程中的高規格條件，如：近



乎垂直攝影的穩定像片拍攝、以高精度的量測型相機拍攝、及良好的方位起始值等等，由於共線式為非線性模型，線性化的過程需要良好的起始值，若以航測的空中三角測量法對UAS所拍攝的航照影像進行解算，無穩定的內方位與良好的方位起始值，則大幅增加內/外方位解算的繁複程度，若藉由電腦視覺方法的應用，可快速的取得影像的相對方位資訊，但精度較差。

結合電腦視覺與攝影測量的技術可應用於近景攝影測量(close-range photogrammetry)及UAS航拍影像的方位解算，本研究以模擬UAS雙像數據為例，針對地面控制點分佈及影像旋轉角度兩種變因，探討兩種方法對不同幾何條件的三維解算穩定程度及其方法上的差異。

1-2 研究流程

本研究的研究流程主要可以分為：資料取得、方位解算、成果分析三個部分，方位解算方法分為航空攝影測量方法與電腦視覺方法進行，其中，航空攝影測量以共線條件式(collinearity equation)進行後方交會取得方位參數，電腦視覺則以共面條件(coplanarity)中的必要矩陣(essential matrix)及基礎矩陣(fundamental matrix)分開討論，透過矩陣的解算求得相對方位再轉換至絕對坐標，流程圖如圖1-1所示。

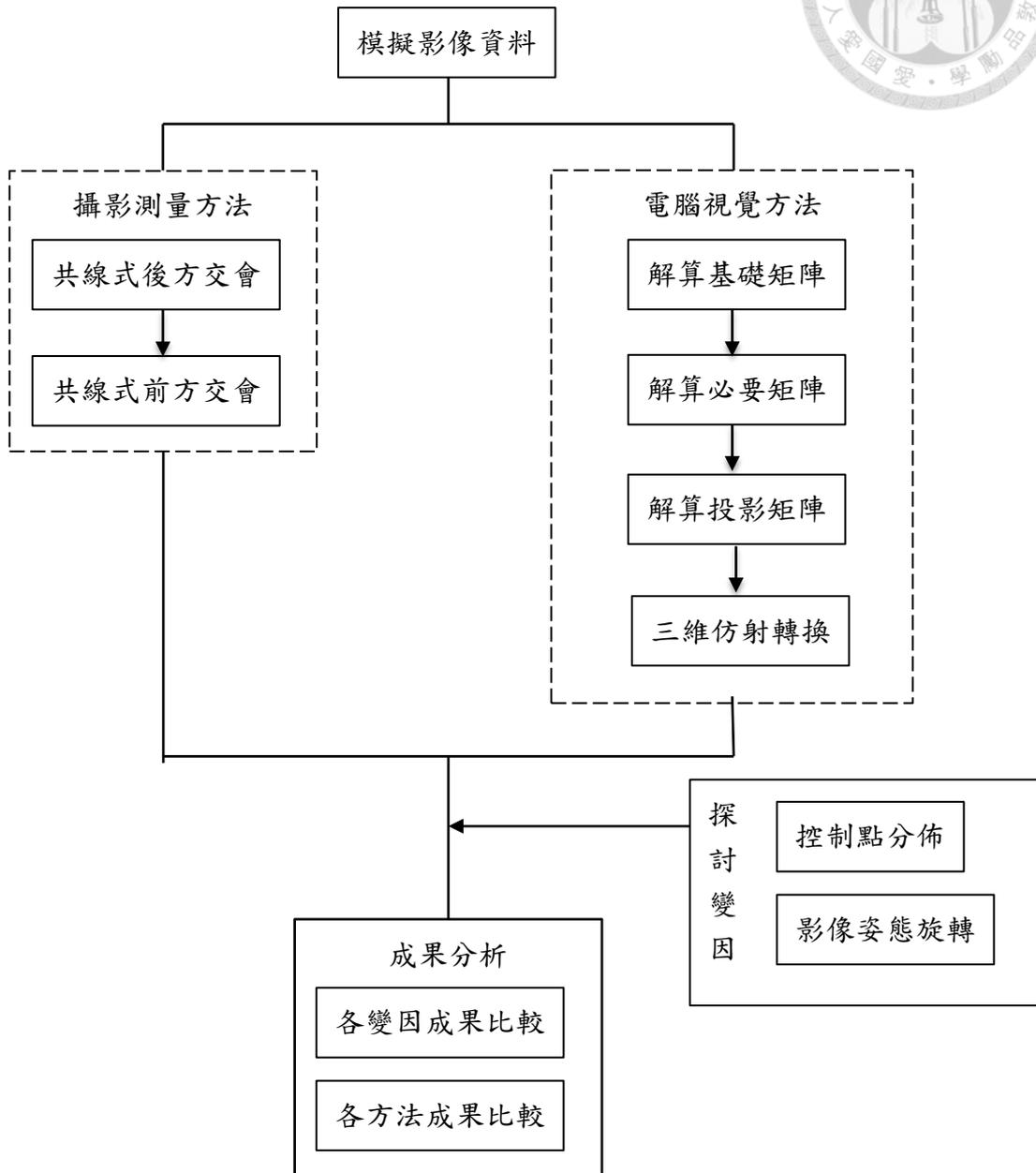


圖 1-1 研究流程圖

1-3 論文架構

第一章說明研究的動機與目的，並概述研究方法與流程。

第二章就航空攝影測量與電腦視覺差異、UAS 航空攝影測量及 SfM (Structure

from Motion) 於航空攝影測量應用三部分進行本研究相關的參考文獻回顧。

第三章針對研究方法中的航空攝影測量部分進行闡述，說明航空攝影測量部分使用到的物理模型、數學方法及詳細解算模式。

第四章闡述電腦視覺方法的原理、數學模式與兩者進行三維重建的方法。

第五章為實驗與分析，以 UAS 模擬資料進行，模擬資料又以地面控制點數量、影像旋轉角度與影像重疊率為變因，分析上述變因對於兩種解算方式的三維重建成果影響，並討論兩種方法的差異。

第六章整合本次研究成果，說明本研究的結論與建議。



二、文獻回顧

在 UAS 應用於航空攝影測量的方法中，過去在空間資訊領域較常使用傳統航空攝影測量的共線條件或共面條件的解算方法，而傳統航空攝影測量所使用的民航機與 UAS 具有不同的特性，在解算方位資訊時設定的解算條件也會不同，可能因此產生繁複的解算過程。不同於空間資訊領域的航空攝影測量所使用的分法，資訊工程領域中重建影像三維資訊的電腦視覺領域中，常用的數學方法為 Structure from Motion (SfM)，在電腦視覺領域多針對近物或場景的重建，相較於絕對坐標更重視影像相對關係。為探討兩種方法理論的差異與對 UAS 解算的適用性，本章節首先針對空間資訊領域中的航空攝影測量及資訊工程領域的電腦視覺進行回顧，進而討論 UAS 的特性與近年來電腦視覺方法在航空攝影測量解算上的應用。

2-1 航空攝影測量與電腦視覺的比較

Hartley 與 Mundy 在 1993 年的研究中，針對航空攝影測量與電腦視覺的應用層面與理論進行比較與分析，在研究報告中提到：航空攝影測量的主要目標是達到高精度的成果，其成果常用於製圖，影像在拍攝時必須平穩，且要求相機的內方位參數率定精度佳，並透過精密的地面測量盡可能取得精確的地面控制點作為影像間的關聯，其解算模型為非線性。電腦視覺的中心目標為達到與人體視覺相當的影像資料萃取與辨識能力，技術上的目標主要可分為物件辨識、導航與物件建模三個部分，物件建模又以立體像對及 SfM 概念為最常用的方式。其異同可整理如表 1-1，兩者具有程序及方法上的差異，但研究內容及目標相似。在整體方法中，電腦視覺以效率為出發點，將數學模型以線性方式表示，由於不需經過迭代，相較於航空攝影測量的嚴謹的非線性解算過程具有較低的複雜程度，也因此導致電腦視覺的解算成果精度比航空攝影測量成果精度較差，三維重建部分航空攝影測量是以光束法直接求解絕對坐標，電腦視覺在解算模型坐標後，以三維坐標轉換方法進行對位。

表2-1 電腦視覺方法與航空攝影測量方法比較表。

	成果精度	數學模型	三維重建
電腦視覺	低	線性	以坐標轉換方法進行對位
航空攝影測量	高	非線性	以光束法直接求解絕對坐標

Zhang與Yao在2008年以數學模式進行討論，針對傳統航空攝影測量的後方交會、相對方位及絕對方位分析（統整如表2-2）。在後方交會部分，航空攝影測量多使用共線條件式，至少需要六個地面控制點，並配合已率定相機資訊，輔以高精度外方位初始值，以進行非線性的迭代解算；電腦視覺則以齊次坐標表示坐標轉換的數學式，可以線性方法解算，此外，由於電腦視覺的轉換過程為像平面與物空間的直接轉換，也可在內方位參數未知的情況下進行後續解算。相對方位的部分，航空攝影測量使用共線條件式或共面條件式進行求解，電腦視覺可以基礎矩陣（fundamental matrix, F-matrix）或必要矩陣（essential matrix, E-matrix）計算影像間的空間相對關係。最後，在絕對方位的定位，航空攝影測量透過計算透視中心在空間中的絕對位置，將相對模型轉換到物空間坐標系，電腦視覺則以坐標轉換方法將相機坐標系的各點位轉換至物空間坐標系。

表2-2 電腦視覺與航空攝影測量於方位解算方法比較表。

	後方交會	相對方位	絕對方位
電腦視覺	直接線性轉換	必要/基礎矩陣	模型轉換
航空攝影測量	共線條件式	共線/共面條件式	模型轉換

Cyganek與Siebert（2009）針對不同方法的解算條件討論（表2-3），需要的先知資訊由多至少分別為空中三角法、必要矩陣方法與基礎矩陣方法。空中三角法由於為非線性數學模式，需要迭代初始值以提高解算成果精度，需要外方位參數作為初始值，而地面控制資訊與相機率定資訊為求解必要資訊；必要矩陣方法為



線性方法，不需迭代初始值，可直接藉由已知的地面控制資訊及率定相機資訊解算方位參數；基礎矩陣為必要矩陣與內參數矩陣所結合的矩陣，將內參數亦視為未知數求解。

表 2-3 求解條件要求與解算方法比較 (Cyganek and Siebert, 2009)。

	先知資訊	解算方法
航空攝影測量	地面控制資訊 率定相機資訊 外方位初始值	空中三角測量
電腦視覺	地面控制資訊 率定相機資訊 地面控制資訊	必要矩陣方法 基礎矩陣方法

Granshaw 與 Fraser 在 2015 年的文章中提到：儘管航空攝影測量與電腦視覺的方位模型是相同的，但電腦視覺的解算方法是線性，與航空攝影測量非線性的算法有著根本的區別。

上述各個研究針對數學模型及解算方法具有精辟的比較，唯在實驗部分多用商用軟體進行，無法清楚探討個別條件變動對兩種方法產生的影響。

2-2 UAS 攝影測量回顧

航空攝影測量為測量領域中發展已久的空間資訊獲取方法之一，以飛機拍攝序列式影像後，透過對影像重疊部分的觀測，配合全球衛星定位與慣性導航測得的拍攝站瞬時位置與姿態參數，能有效的使用數學模型重建影像的三維空間資訊並提供後續應用（圖2-1）。在航空攝影測量中，影像為應用於地圖繪製或三維模型建置，在拍攝時必須平穩以達到垂直影像的條件，即透鏡光軸垂直地表、任一傾角小於3度且連續影像的相對傾角小於5度（Graham and Koh, 2002）。且要求相機的內方位參數率定精度佳，以取得高精度的成果，有鑒於此，航照影像必須近



乎垂直拍攝，以得到近似垂直影像，並透過精密的地面測量盡可能取得精確的地面控制點作為影像間的關聯（Hartley and Mundy，1993）。

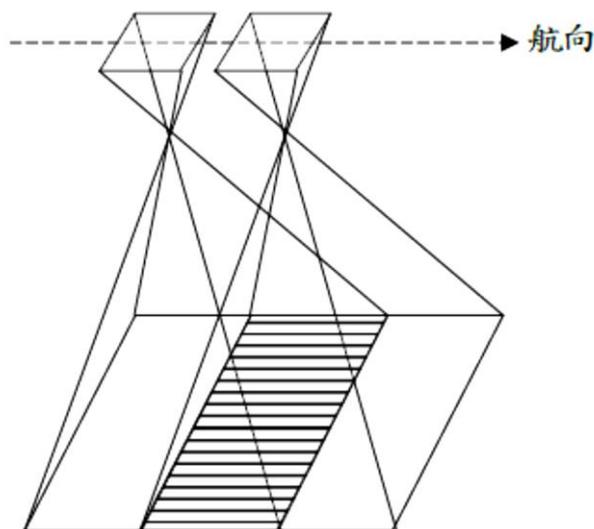


圖2-1 航空攝影測量示意圖。

無人飛行系統（UAS）定義為可遙控、半自動或自動的飛行器，廣義的 UAS 包含風箏、飛船、遙控飛機等。相較於一般飛機，UAS 具有較好的機動性，透過裝載攝影裝置後應用於攝影測量，發展出 UAS 攝影測量，並大量應用於傳統航空攝影測量與地面攝影測量（Eisenbeiß，2009）。

依據其飛行特性，UAS 載具可略分為定翼機(fixed wing)及旋翼機(rotary wing)（圖 2-6）。定翼機的飛行穩定性較佳，但需要較大的起飛空間，且搭載相機時，無法定點拍攝；旋翼機在飛行時，易受空氣流動影響穩定度，但可垂直起降與在空中停懸拍攝（Mayr，2013；謝幸宜，2011；Eisenbeiß，2009）。



圖2-6 定翼機與旋翼機（Eisenbeiß，2009）。



與使用民航機的傳統航空攝影測量比較，UAS的時效性與機動性較佳，經費成本較低，且拍攝作業較不受天氣影響（例如：雲層遮蔽）；但其引擎動力較低，穩定性也較差，因此限制了乘載重量與飛行高度，常搭配精度較低的GPS、INS及非量測型相機。非量測型相機的穩定度較差，因此應用於航空攝影測量時，若以一般航測作業方式，可能會因內方位參數的變動影響後續解算，必須透過率定取得像機的內方位資訊及附加參數後，在空三平差解算前改正取像系統誤差，以維持幾何的共線條件式（collinearity condition equation），或使用自率光束法，將附加參數視為帶權觀測量，於空三平差過程中同時求解（Mikhail et al., 2001），較一般航空攝影測量具有更繁複的計算。

2-3 電腦視覺輔助攝影測量的應用

鄭傑文（2007）的研究中，引入電腦視覺的概念，透過解算必要矩陣與基礎矩陣重建核影像，以初始值的方式將成果應用於航空攝影測量方法，分別使用共線條件與共面條件重建核影像，針對不同的控制點精度、觀測量精度、控制點分布、高程變動進行比較，發現透過必要矩陣進行核影像重建可以有效減少解算過程的複雜程度，且成果與航空攝影測量方法解算成果相近。在應用上雖可有效降低重建核影像時的解算複雜程度，仍需透過相當的控制點資訊以及方位參數的初始值設定才可以進行後續解算，對於提高整體解算效率的能力有限，亦較無法應用於UAS航照影像的應用上。

此外，Zhang與Yao在2008年的研究提出：針對電腦視覺的研究中，許多實驗都以理想的數據進行，而非實際包含誤差的影像資料，有鑒於此，雖可由實驗成果了解理想情形下的三維重建情況，仍無法有效顯示電腦視覺領域的方法於實際應用上的解算情形。

近年來SfM於航空攝影測量的應用：蕭震洋等人（2011）研究中，使用SfM方法，配合多角度拍攝的UAS影像進行三維重建，可有效評估國道崩塌的土方量，



能迅速、有效的量化地形高程變化；Westoby等人於2012年以SfM方法應用於近景攝影的高解析度影像地面三維資訊重建，並與地面鐳射掃描儀成果比較，指出SfM方法對於以製圖為目的的近景攝影測量是有效率且經濟實惠的方法；而Dowling與Gallant在2013年的研究以UAV為載具拍攝航空影像建立高解析度數值高程模型，以SfM方法為基礎可產製符合需求之數值高程模型；Ryan等人在2015年以UAS航空攝影測量配合SfM方法監測格陵蘭冰川崩塌與位移，透過SfM可有效解算冰川地形的數值高程模型並分析其崩塌、位移情況。然以上研究所進行的實驗多將SfM應用於近景攝影測量，或以商用軟體進行解算。

考量傳統航空攝影測量方法的解算複雜度、UAS航空攝影測量的特性，及過去將SfM應用於攝影測量的情況，本研究針對傳統攝影測量常用的共線式方法與SfM方法對UAS加入誤差後的模擬數據進行測試，探討在不同點位分佈條件與影像旋轉條件下兩種方法的特性。



三、攝影測量方法

3-1 相機模型

常用的航空攝影測量的數學模型為共線條件及共面條件，基於光線直線前進的物理特性，共線條件運用相機透視中心、像點與物點位於相同直線的特性（圖3-1左），由已知的內方位參數/相機資訊、地面控制點坐標及其投影於影像上的像點坐標，輔以定位系統獲取的外方位參數初始值，精確求取相機透視中心的外方位參數；共面條件則以兩張影像組成的像對作為考量，以兩張影像拍攝時的透視中心與地面點位於相同平面為基礎，描述兩張影像的相對關係並對三維資訊進行重建（圖3-1右），本研究以共線條件作為攝影測量的解算基礎。

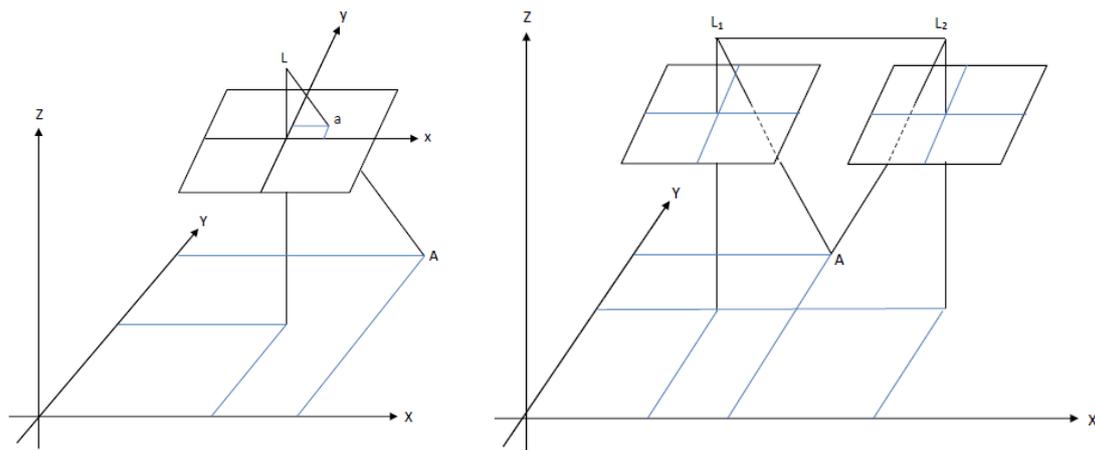


圖3-1 共線條件（左）與共面條件（右）。

航空攝影測量中共線條件為影像拍攝時的相機透視中心、地面點及其投影在影像上的位置成一直線，即拍攝影像時的光束路徑，透過此約束條件，進行後方交會與前方交會解算，以取得地面與影像之間的投影資訊進而重建影像的三維資訊。

共線條件的原理為藉由描述物空間與影像平面的轉換關係，配合不同的已知條件進行解算，物空間與影像平面的關係，包含對各個空間直角坐標軸的平移與旋轉共六個變化量，常以 X_L 、 Y_L 、 Z_L 表示相機透視中心位置，即相對於空間坐標系原點的平移量， ω 、 φ 、 κ 分別表示以X軸、Y軸、Z軸為旋轉軸的旋轉角度，將影像平面坐標以 x 、 y 表示，像主點坐標以 x_0 、 y_0 表示，物空間坐標以 X 、 Y 、 Z 表示，兩者關係可列關係式如式3-1，其中， M 矩陣為物空間轉換到像平面的旋轉矩陣（式3-2）， M_ω 、 M_φ 、 M_κ 則分別為對三個軸旋轉的旋轉矩陣（式3-3）。

$$\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ -f \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} X - X_L \\ Y - Y_L \\ Z - Z_L \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_\kappa \mathbf{M}_\varphi \mathbf{M}_\omega = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \kappa & \cos \omega \sin \kappa + \sin \omega \sin \varphi \cos \kappa & \sin \omega \sin \kappa - \cos \omega \sin \varphi \cos \kappa \\ -\cos \varphi \sin \kappa & \cos \omega \cos \kappa - \sin \omega \sin \varphi \sin \kappa & \sin \omega \cos \kappa + \cos \omega \sin \varphi \sin \kappa \\ \sin \varphi & -\sin \omega \cos \varphi & \cos \omega \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

$$\mathbf{M}_\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

$$\mathbf{M}_\kappa = \begin{bmatrix} \cos \kappa & \sin \kappa & 0 \\ -\sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

將關係式3-1矩陣中的各列向量分別展開並合併統整後，可得一組非線性方程式，即共線條件方程式（式3-4、式3-5），式中 $m_{11} \sim m_{33}$ 為旋轉矩陣 M 的組成元素， x 、 y 為投影點影像坐標， x_0 、 y_0 為像主點坐標， X 、 Y 、 Z 為物空間點坐標， X_L 、 Y_L 、 Z_L 為透視中心位置坐標，將不同已知條件代入式中進行最小二乘平差迭代求解，可應用於方位解算求得目標參數。



$$x - x_0 = -f \frac{m_{11}(X - X_L) + m_{12}(Y - Y_L) + m_{13}(Z - Z_L)}{m_{31}(X - X_L) + m_{32}(Y - Y_L) + m_{33}(Z - Z_L)} \quad (3-4)$$

$$y - y_0 = -f \frac{m_{21}(X - X_L) + m_{22}(Y - Y_L) + m_{23}(Z - Z_L)}{m_{31}(X - X_L) + m_{32}(Y - Y_L) + m_{33}(Z - Z_L)} \quad (3-5)$$

3-2 方位解算方法

以攝影測量方法進行三維重建，可分為後方交會與前方交會兩個階段，在雙像模型中，求解方位資訊的後方交會以單張影像進行，取得方位資訊後以前方交會可重建三維點位坐標。

3-2-1 後方交會解算模式

後方交會是由已知的地面控制資訊求得影像拍攝時的方位資訊，目標為解算影像的外方位參數，包含三個位置參數： X_L 、 Y_L 、 Z_L 及三個姿態參數： ω 、 ϕ 、 κ 。將共線方程式透過泰勒（Taylor's）級數轉換將方程式線性化，再以最小二乘平差法迭代以求得目標參數，在迭代過程中，目標參數的初始值亦為必要解算條件。

後方交會中，未知的目標參數為外方位參數，即透視中心的位置參數 X_L 、 Y_L 、 Z_L 與旋轉矩陣元素 $m_{11} \sim m_{33}$ 中的三個姿態參數 ω 、 ϕ 、 κ ，以地面控制點的物空間坐標 X 、 Y 、 Z 及控制點的影像投影坐標 x 、 y 為觀測量，每組觀測量可列出兩條觀測方程式（式3-6、3-7），是以每張影像需要至少三個已知的控制點資訊，方可列出足以求得唯一目標參數解的六條觀測方程式。

$$F_1 = x + f \frac{m_{11}(X - X_L) + m_{12}(Y - Y_L) + m_{13}(Z - Z_L)}{m_{31}(X - X_L) + m_{32}(Y - Y_L) + m_{33}(Z - Z_L)} = 0 \quad (3-6)$$

$$F_2 = y + f \frac{m_{21}(X - X_L) + m_{22}(Y - Y_L) + m_{23}(Z - Z_L)}{m_{31}(X - X_L) + m_{32}(Y - Y_L) + m_{33}(Z - Z_L)} = 0 \quad (3-7)$$

解算過程中，由於共線條件式為非線性方程式，先以泰勒級數進行線性化並將觀測方程式以平差模式表示（式3-8）。



$$\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\Delta = \mathbf{f} \quad (3-8)$$

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{A}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}^T \quad (3-9)$$

$$\Delta = (\mathbf{B}^T\mathbf{Q}_e^{-1}\mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T\mathbf{Q}_e^{-1}\mathbf{f} = (\mathbf{B}^T\mathbf{W}_w\mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T\mathbf{W}_w\mathbf{f} \quad (3-10)$$

式3-8中， \mathbf{f} 為零與平差前各初始值代入觀測方程式 F_1 、 F_2 後的差值， \mathbf{A} 為觀測量誤差係數矩陣，即方程式對觀測量 x 、 y 、 X 、 Y 、 Z 偏微分得到的係數矩陣， \mathbf{v} 為觀測值改正量， \mathbf{B} 為目標參數的係數矩陣， Δ 代表目標參數的改正量，即 ΔX_L 、 ΔY_L 、 ΔZ_L 、 $\Delta\omega$ 、 $\Delta\phi$ 、 $\Delta\kappa$ 。令 \mathbf{W} 為以觀測量誤差平方倒數為權的權矩陣，與觀測量係數矩陣 \mathbf{A} 相乘後為誤差矩陣 \mathbf{Q}_e ，代入式3-10可求得目標參數改正量 Δ ，將目標參數與改正量 Δ 迭代更新以得到最小二乘法平差後的最佳解。

3-2-2 前方交會解算模式

前方交會目標為重建影像像對重疊區域在三維空間的資訊，目的為解算目標像點在物空間的三維坐標 X 、 Y 、 Z ，將後方交會求得的像對影像方位參數 X_{L1} 、 Y_{L1} 、 Z_{L1} 、 X_{L2} 、 Y_{L2} 、 Z_{L2} 、 ω_1 、 ϕ_1 、 κ_1 、 ω_2 、 ϕ_2 、 κ_2 與影像坐標 x 、 y 視為觀測量，每組像點可列出四條觀測方程式（式3-11~3-14）。

$$F_{l1} = x_l + f \frac{m_{l11}(X - X_{L1}) + m_{l12}(Y - Y_{L1}) + m_{l13}(Z - Z_{L1})}{m_{l31}(X - X_{L1}) + m_{l32}(Y - Y_{L1}) + m_{l33}(Z - Z_{L1})} = 0 \quad (3-11)$$

$$F_{l2} = y_l + f \frac{m_{l21}(X - X_{L1}) + m_{l22}(Y - Y_{L1}) + m_{l23}(Z - Z_{L1})}{m_{l31}(X - X_{L1}) + m_{l32}(Y - Y_{L1}) + m_{l33}(Z - Z_{L1})} = 0 \quad (3-12)$$

$$F_{r1} = x_r + f \frac{m_{r11}(X - X_{L2}) + m_{r12}(Y - Y_{L2}) + m_{r13}(Z - Z_{L2})}{m_{r31}(X - X_{L2}) + m_{r32}(Y - Y_{L2}) + m_{r33}(Z - Z_{L2})} = 0 \quad (3-13)$$

$$F_{r2} = y_r + f \frac{m_{r21}(X - X_{L2}) + m_{r22}(Y - Y_{L2}) + m_{r23}(Z - Z_{L2})}{m_{r31}(X - X_{L2}) + m_{r32}(Y - Y_{L2}) + m_{r33}(Z - Z_{L2})} = 0 \quad (3-14)$$

透過泰勒級數線性化後，各組觀測方程式統整為平差模式如式3-15，並由式3-16與式3-17可求得目標空間坐標。



$$\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\Delta = \mathbf{f} \quad (3-15)$$

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{A}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}^T \quad (3-16)$$

$$\Delta = (\mathbf{B}^T\mathbf{Q}_e^{-1}\mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T\mathbf{Q}_e^{-1}\mathbf{f} = (\mathbf{B}^T\mathbf{W}_w\mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T\mathbf{W}_w\mathbf{f} \quad (3-17)$$

式3-15中， \mathbf{f} 為零與平差前各初始值代入觀測方程式 F_{11} 、 F_{12} 、 F_{r1} 、 F_{r2} 後的差值， \mathbf{A} 為觀測量誤差係數矩陣，即方程式對觀測量：像對外方位參數與影像坐標偏微分得到的係數矩陣， \mathbf{v} 為觀測值改正量， \mathbf{B} 為目標參數的係數矩陣， Δ 代表目標參數的改正量，即 ΔX 、 ΔY 、 ΔZ 。令 \mathbf{W} 為以觀測量誤差平方倒數為權的權矩陣，與觀測量係數矩陣 \mathbf{A} 相乘後為誤差矩陣 \mathbf{Q}_e ，代入式3-17可求得目標參數改正量 Δ ，將目標參數與改正量 Δ 迭代更新以得到最小二乘法平差後的最佳解。

3-2-3 最小二乘法

在測量過程中，觀測量必須符合幾何約制的數學關係，但在實際狀況下，觀測量會因為誤差的影響不符合預期，為使其達到合理的幾何約制條件，需透過平差模式對觀測量進行平差，而攝影測量中常使用最小二乘法平差。

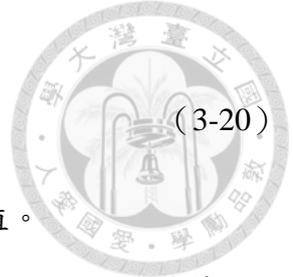
最小二乘法最早始於 18 世紀晚期，觀測量的殘差平方和最小時，觀測量最符合理想的幾何狀態。設對觀測量觀測 n 次殘差為 v ，則最小二乘法可列式：

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 \rightarrow \text{minimum} \quad (3-18)$$

令觀測量的最或是值為 m ，實測觀測量為 z ，殘差為最或是值與觀測量的差異量，在觀測量等權的情況下，最或是值與觀測量代入式 3-18 為：

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = (m - z_1)^2 + (m - z_2)^2 + \dots + (m - z_n)^2 \rightarrow \text{minimum} \quad (3-19)$$

在統計學中，方程式的一階偏微分為零時，原方程式會有最小值，將式 3-19 對最或是值偏微分：



$$\frac{d(\sum v^2)}{dm} = 2(m - z_1) + 2(m - z_2) + \cdots + 2(m - z_n) = 0 \quad (3-20)$$

對觀測量 z 為等權觀測的情況下，最或是值為各次觀測量平均值。

若個觀測量具有不同權重，最小二乘法列式加入權重後為式 3-21，將殘差以最或是值與觀測量代入得式 3-22，則最或是值 m 為加權後平均。

$$\sum_{i=1}^n w_i v_i^2 = w_1 v_1^2 + w_2 v_2^2 + \cdots + w_n v_n^2 \rightarrow \text{minimum} \quad (3-21)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i v_i^2 = w_1 (m - z_1)^2 + w_2 (m - z_2)^2 + \cdots + w_n (m - z_n)^2 \rightarrow \text{minimum} \quad (3-22)$$

第四章 電腦視覺方法



4-1 相機模型

影像資料可以透過三角測量重建三維空間,透過兩台相機同時拍攝一個場景,可以得到立體像對,此時兩台相機的特性與兩者之間的關係可以藉由核幾何(epipolar geometry)描述。

以簡單針孔成像系統說明單張影像的獲取與幾何特性,單像成像模型的坐標系統可以分為世界坐標系統(world coordinate system,以W表示)、相機坐標系統(camera coordinate system,以C表示)。由圖4-1, O_C 為相機的成像焦點(focal point),與 X_C 、 Y_C 、 Z_C 共同定義相機坐標系, Π 為成像平面,相機坐標系與世界坐標系的關係可藉旋轉矩陣 \mathbf{R} 及位移向量 \mathbf{t} , O_C 沿 Z_C 在成像平面上的投影為主點,在成像平面上坐標寫為 o (o_x, o_y), O_C 與主點的距離為相機焦距。

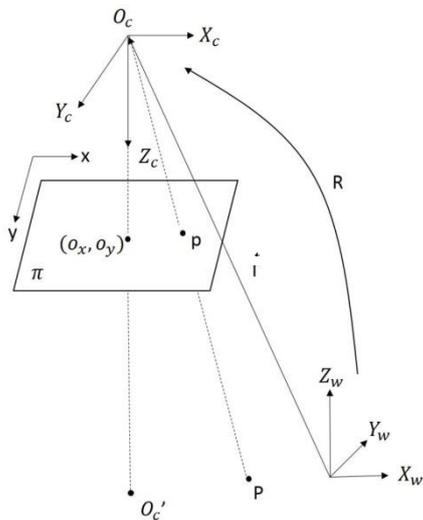


圖 4-1 坐標系示意圖。

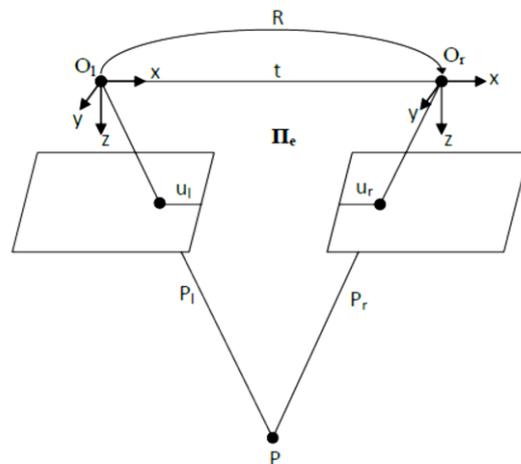


圖 4-2 核幾何示意圖。

在影像的幾何關係中,基線為像對透視中心的連線,核面為包含物點及基線的面,即攝影測量中共面條件的基礎,核線為核面與像面交會的直線,而核極則是基線與像面的交點,若基線與像面沒有相交,核極位於無窮遠處。圖4-2中, Π_e 為核面, u_l 、 u_r 分別為左右像上的核線,核極為左右透視中心投影在彼此影像

上的位置，P 點為一成像於左右兩像的物點，P 點坐標可使用以左像透視中心 O_l 為原點的向量 P_l 與以右像透視中心 O_r 為原點的向量 P_r 表示，此時，以 O_l 、 O_r 為原點的坐標系為相機坐標系，以光軸為 Z 軸方向，定義 X、Y 軸與影像 X、Y 軸方向平行。

三維重建的數學模型如式 4-1，式中 x 、 y 為影像坐標，以齊次坐標表示具有尺度為 1， f_x 、 f_y 為以像元長度與寬度表示的焦距， o_x 、 o_y 為像主點坐標，加上尺度因子組成內參數矩陣 M_{in} ， R 與 t 分別為旋轉矩陣與位移向量，加上尺度因子為外參數矩陣 M_{ex} ，由內、外參數矩陣可推得投影矩陣 M 並依此進行三維重建，根據相機率定與否，可分別以必要矩陣（essential matrix）及基礎矩陣（fundamental matrix）進行解算。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & o_x & 0 \\ 0 & f_y & o_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = M_{in} M_{ex} P = MP \quad (4-1)$$

物理模型中，立體像對的轉換關係可以由必要矩陣與基礎矩陣表示，必要矩陣用於描述像對間相機坐標系間的轉換，基礎矩陣為描述像對間影像平面坐標之間的轉換矩陣，針對內方位參數的已知與否可使用必要矩陣或基礎矩陣進行方位解算，本研究考量 UAS 攝影測量於實務上常以率定後相機進行取像，以基礎矩陣配合必要矩陣進行解算。



4-1-1 基礎矩陣

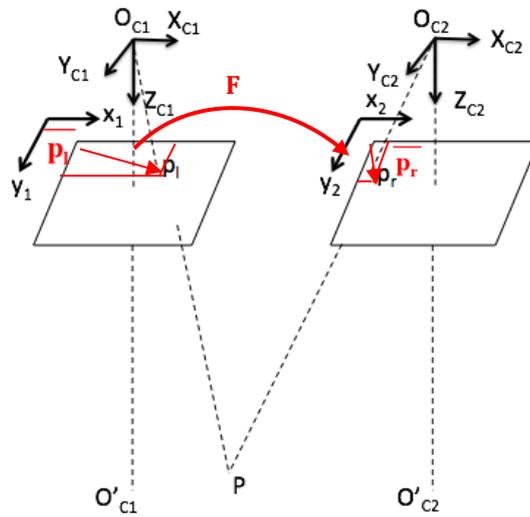


圖 4-3 基礎矩陣。

在未率定的相機中，基於核面幾何的原理，影像坐標之間的關係可以基礎矩陣描述。圖 4-3 中， x_1 、 y_1 形成左像影像坐標系， x_2 、 y_2 形成右像影像坐標系， $\overline{\mathbf{p}}_l$ 、 $\overline{\mathbf{p}}_r$ 為共軛像點在左、右兩像上的影像坐標向量，基礎矩陣 \mathbf{F} 為將左像影像坐標轉換至右像影像坐標的轉換矩陣，立體像對的關係可以基礎矩陣 \mathbf{F} 描述核線約制 (epipolar constraint)。

令觀測兩張影像的共軛像點齊次坐標 $\overline{\mathbf{p}}_l$ 、 $\overline{\mathbf{p}}_r$ (式 4-2)，對左像任意點 $\overline{\mathbf{p}}_l$ 可列核線方程式 \mathbf{l} (式 4-3)，每一組像點又可列一條觀測方程式 (式 4-4)，將核線方程式右側像點以核面左核 (epipole) \mathbf{e}_l 取代 (式 4-5)，式 4-5 為齊次系統 (homogeneous system)，其中 \mathbf{F} 矩陣為齊次矩陣具有八個獨立比率，且受 $|\mathbf{F}| = 0$ 條件約制降低一個自由度，故自由度為 7，可由觀測八組共軛像點坐標後使用八點法 (Longuet-Higgins, 1981) 以直接線性求解。

$$\overline{\mathbf{p}}_l = \begin{bmatrix} x_l \\ y_l \\ 1 \end{bmatrix} \quad \overline{\mathbf{p}}_r = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4-2)$$



$$\mathbf{l} = \mathbf{F}\mathbf{p}_i \quad (4-3)$$

$$\overline{\mathbf{p}}_r^T \mathbf{F}\mathbf{p}_i = 0 \quad (4-4)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{e}_i = 0 \quad (4-5)$$

在相機未率定的條件下，可由基礎矩陣推得左右兩像的核並解算影像與物空間的轉換矩陣；本研究以相機內方位已知的條件下，使用基礎矩陣推算必要矩陣後進行後續三維重建。

4-1-2 必要矩陣

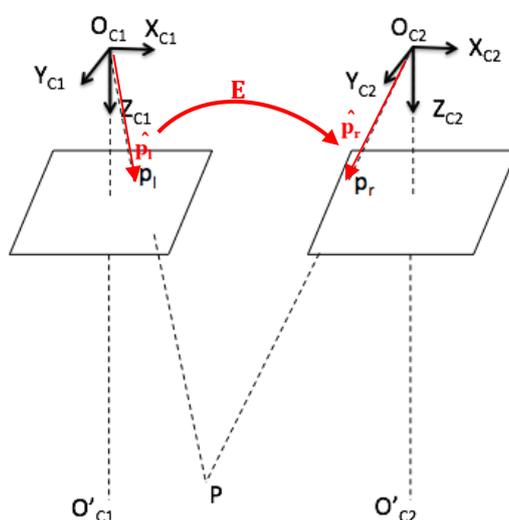


圖 4-4 必要矩陣。

相機參數已知的情況，可以必要矩陣描述兩個相機坐標系的關係（圖 4-4），圖中 O_{C1} 與 O_{C2} 表示像對的兩個成像透視中心，形成相機坐標系坐標軸 X_{C1} 、 X_{C2} 與影像移動方向平行以影像移動方向為正， Z_{C1} 、 Z_{C2} 軸為光線行進方向， Y_{C1} 、 Y_{C2} 為垂直 X_{C1} 、 Z_{C1} 與 X_{C2} 、 Z_{C2} 的坐標軸， p_l 與 p_r 為共軛像點， $\hat{\mathbf{p}}_l$ 、 $\hat{\mathbf{p}}_r$ 為兩點分別在兩相機坐標系的三維坐標向量，將左像相機坐標轉換至右像相機坐標的矩陣為必要矩陣 \mathbf{E} 。

相機模型中，影像坐標 $\overline{\mathbf{p}}$ 與相機坐標 $\hat{\mathbf{p}}$ 可透過相機的內參數矩陣 \mathbf{M}_{in} 進行轉換（式 4-6），內參數矩陣為焦距 f 、像主點坐標 o_x 、 o_y 組成之 3×3 矩陣（式 4-7），



必要矩陣 \mathbf{E} 為像對的相機坐標轉換矩陣，設共軛像點的相機坐標 $\hat{\mathbf{p}}_l$ 、 $\hat{\mathbf{p}}_r$ ，則可列關係式如式 4-8。

$$\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{M}_{in} \hat{\mathbf{p}} \quad (4-6)$$

$$\mathbf{M}_{in} = \begin{bmatrix} f & 0 & o_x \\ 0 & f & o_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-7)$$

$$\hat{\mathbf{p}}_r^T \mathbf{E} \hat{\mathbf{p}}_l = 0 \quad (4-8)$$

將影像坐標 $\bar{\mathbf{p}}_l$ 、 $\bar{\mathbf{p}}_r$ 以相機坐標代入式 4-4 為式 4-9，其中 \mathbf{M}_{inr} 與 \mathbf{M}_{inl} 分別代表左右兩像的內參數矩陣，在以相同相機取景的條件下兩者相等，故具備已知的相機參數資訊，便可由基礎矩陣推得必要矩陣（式 4-10）。

$$\bar{\mathbf{p}}_r^T \mathbf{F} \bar{\mathbf{p}}_l = (\mathbf{M}_{inr} \hat{\mathbf{p}}_r)^T \mathbf{F} (\mathbf{M}_{inl} \hat{\mathbf{p}}_l) = \hat{\mathbf{p}}_r^T \mathbf{E} \hat{\mathbf{p}}_l = 0 \quad (4-9)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{M}_{inr}^T \mathbf{F} \mathbf{M}_{inl} \quad (4-10)$$

4-1-3 三維轉換

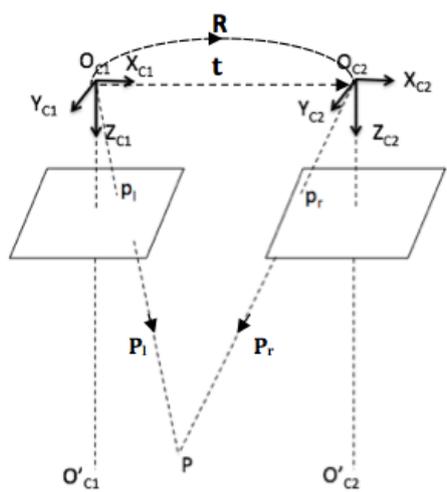


圖 4-5 相機坐標系的位移與旋轉。

作為相機坐標系的轉換矩陣，必要矩陣中包含兩張影像之間的位移向量與旋轉矩陣（圖 4-5），令 \mathbf{P}_l 、 \mathbf{P}_r 為點 \mathbf{P} 在兩個相機坐標系中的坐標向量，由位移向量



\mathbf{t} 與旋轉矩陣 \mathbf{R} 可互相轉換 (式 4-11) , 而 \mathbf{P}_l 、 \mathbf{P}_r 與 \mathbf{t} 共面且 \mathbf{P}_l 為 \mathbf{t} 與 \mathbf{P}_r 的和 , 根據向量定理可列式 4-12。

$$\mathbf{P}_r = \mathbf{R}(\mathbf{P}_l - \mathbf{t}) \quad (4-11)$$

$$(\mathbf{P}_l - \mathbf{t}) \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{P}_l) = 0 \quad (4-12)$$

括弧內分別展開 :

$$\mathbf{P}_l - \mathbf{t} = (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{P}_r)^T = \mathbf{P}_r^T \mathbf{R} \quad (4-13)$$

$$\mathbf{t} \times \mathbf{P}_l = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ X_{Pl} & Y_{Pl} & Z_{Pl} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -t_3 Y_{Pl} + t_2 Z_{Pl} \\ t_3 X_{Pl} - t_1 Z_{Pl} \\ -t_2 X_{Pl} + t_1 Y_{Pl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -t_3 & t_2 \\ t_3 & 0 & -t_1 \\ -t_2 & t_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{Pl} \\ Y_{Pl} \\ Z_{Pl} \end{bmatrix} = [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{P}_l \quad (4-14)$$

將式 4-13 與 4-14 代回式 4-12 得關係式 :

$$\mathbf{P}_r^T \mathbf{R} [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{P}_l = \mathbf{P}_r^T \mathbf{E} \mathbf{P}_l = 0 \quad (4-15)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{R} [\mathbf{t}]_{\times} \quad (4-16)$$

\mathbf{E} 矩陣即為 \mathbf{t} 向量與 \mathbf{R} 矩陣的外積矩陣 , 故 \mathbf{E} 矩陣與 \mathbf{t} 向量內積 $\mathbf{E}\mathbf{t} = 0$, 即 \mathbf{t} 向量為 \mathbf{E} 矩陣的核 (kernel) 或零空間 (null space) , 可透過奇異值分解 (singular value decomposition, SVD) 求得。令 \mathbf{E} 矩陣的 SVD 為式 4-17 , 並將 \mathbf{E} 矩陣分解為無視正負號的兩個矩陣 \mathbf{S} 、 $\tilde{\mathbf{R}}$ (式 4-18)。

$$\mathbf{E} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{V}^T \quad (4-17)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{S} \tilde{\mathbf{R}} \quad (4-18)$$

其中 \mathbf{S} 為斜對稱矩陣且具有與 \mathbf{E} 矩陣相同的左零空間 (left null space) , 可寫為 :

$$\mathbf{S} = \mathbf{U} \mathbf{Z} \mathbf{U}^T \quad (4-19)$$



$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-20)$$

而 $\tilde{\mathbf{R}}$ 與 \mathbf{E} 矩陣有相同的零空間，且包含一個旋轉矩陣 \mathbf{X} ，可將 \mathbf{E} 矩陣分解為：

$$\mathbf{E} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{V}^T = \mathbf{S}\tilde{\mathbf{R}} = (\mathbf{U}\mathbf{Z}\mathbf{U}^T)(\mathbf{U}\mathbf{X}\mathbf{V}^T) = \mathbf{U}(\mathbf{Z}\mathbf{X})\mathbf{V}^T \quad (4-21)$$

故 $\mathbf{Z}\mathbf{X} = \text{diag}(1, 1, 0)$ ，設一矩陣 \mathbf{W} 如式 4-22， $\mathbf{X} = \mathbf{W}$ or \mathbf{W}^T ，則：

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-22)$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^T \text{ or } \mathbf{U}\mathbf{W}^T\mathbf{V}^T \quad (4-23)$$

若 \mathbf{S} 為包含尺度的 $[\mathbf{t}]$ ，以 $\|\mathbf{t}\| = 1$ 作為相機基線的簡單正規方法，則 \mathbf{S} 的 Frobenius

範數為 $\sqrt{2}$ ，此外，由於 $\mathbf{S}\mathbf{t} = 0$ ， \mathbf{t} 為 \mathbf{U} 的第三行向量 (\mathbf{u}_3)，但 \mathbf{E} 矩陣正負號未

定， \mathbf{t} 向量正負號也未定，設首張影像的投影矩陣 $\mathbf{P} = [\mathbf{I}|\mathbf{0}]$ ，第二張影像的投影矩

陣 \mathbf{P}' 有四種可能：

$$\mathbf{P}' = [\mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^T | +\mathbf{u}_3] \text{ or } \mathbf{P}' = [\mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^T | -\mathbf{u}_3] \text{ or } \mathbf{P}' = [\mathbf{U}\mathbf{W}^T\mathbf{V}^T | +\mathbf{u}_3] \text{ or } \mathbf{P}' = [\mathbf{U}\mathbf{W}^T\mathbf{V}^T | -\mathbf{u}_3] \quad (4-24)$$

代入任意共軛像點於上述四種可能投影矩陣，判斷是否可重建三維點於兩相機前方 (圖 4-6(a))，可重建點位於相機前方者為第二張影像的初始投影矩陣。

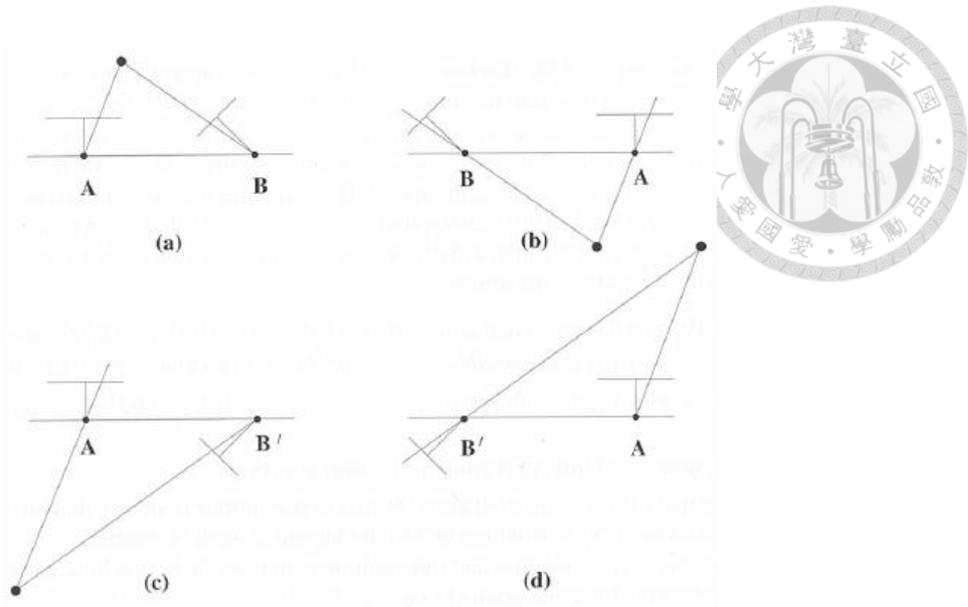


圖 4-6 次像初始投影矩陣的可能解 (Hartley and Zisserman, 2000)。

藉由初始投影矩陣，兩張影像可建立影像的模型三維資訊，設影像上一組共軛像點的模型坐標為 \mathbf{K}_M ，世界坐標為 \mathbf{K}_W ，兩坐標可以三維仿射矩陣 \mathbf{A} 轉換：

$$\mathbf{K}_W = \mathbf{A}\mathbf{K}_M \quad (4-25)$$

透過至少五個已知的地面控制點，可計算仿射矩陣，或以抽樣性一致 (RANSAC) 方法擬合，求得兩張影像的投影矩陣 $\tilde{\mathbf{P}}$ 、 $\tilde{\mathbf{P}}'$ ：

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1} \quad (4-26)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}' = \mathbf{P}'\mathbf{A}^{-1} \quad (4-27)$$

最後，投影矩陣 $\tilde{\mathbf{P}}$ 、 $\tilde{\mathbf{P}}'$ 為世界坐標系投影至影像的轉換矩陣，可解算影像像點投影至世界坐標系的物空間坐標，亦即重建影像內容的實際空間資訊。

4-2 方位解算方法

電腦視覺的重建方法中，主要以直接線性方法解算包含方位的基礎矩陣及必要矩陣，對位移向量與旋轉矩陣的萃取則以奇異值分解後取得，故於本章節詳述兩種方法。

4-2-1 八點法



在 4-1-1 節中提到關於基礎矩陣的解算方法有許多，其中以七點法及八點法最常見，由於基礎矩陣自由度為七，至少需透過七組共軛像點進行求解，稱為七點法，然七點法求得的解可能為一組或三組，相較之下八點法可求得唯一解且透過正規化最佳化解算成果。

八點法為 Longuet-Higgins 在 1981 年提出的直接線性解算方法，顧名思義為透過八組共軛像點的觀測量求解的直接線性方法，以基礎矩陣 \mathbf{F} 為例，觀測八組共軛像點可列出八條觀測方程式（式 4-28），將方程式中共軛像點坐標與基礎矩陣以元素形式展開（式 4-29、4-30），並將觀測方程組統整為矩陣形式（式 4-31），配合基礎矩陣具有 $|\mathbf{F}| = 0$ 的特性作為約制條件，並設定基礎矩陣中任一元素作為公尺度（common ratio）以求得基礎矩陣，若增加觀測量則可以最小二乘方法進行平差。

$$\overline{\mathbf{p}}_{ri}^T \overline{\mathbf{F}} \overline{\mathbf{p}}_{li} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (4-28)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad \overline{\mathbf{p}}_{ri} = \begin{bmatrix} x_{ri} \\ y_{ri} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \overline{\mathbf{p}}_{li} = \begin{bmatrix} x_{li} \\ y_{li} \\ 1 \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (4-29)$$

$$\overline{\mathbf{p}}_{ri}^T \overline{\mathbf{F}} \overline{\mathbf{p}}_{li} = x_{li}x_{ri}f_{11} + y_{li}x_{ri}f_{12} + x_{ri}f_{13} + x_{li}y_{ri}f_{21} + y_{li}y_{ri}f_{22} + y_{ri}f_{23} + x_{li}f_{31} + y_{li}f_{32} + f_{33} = 0 \quad (4-30)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_{l1}x_{r1} & y_{l1}x_{r1} & x_{r1} & x_{l1}y_{r1} & y_{l1}y_{r1} & y_{r1} & x_{l1} & y_{l1} & 1 \\ x_{l2}x_{r2} & y_{l2}x_{r2} & x_{r2} & x_{l2}y_{r2} & y_{l2}y_{r2} & y_{r2} & x_{l2} & y_{l2} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{l8}x_{r8} & y_{l8}x_{r8} & x_{r8} & x_{l8}y_{r8} & y_{l8}y_{r8} & y_{r8} & x_{l8} & y_{l8} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \\ f_{31} \\ f_{32} \\ f_{33} \end{bmatrix} = 0 \quad (4-31)$$

4-2-2 奇異值分解

奇異值分解是可以三個觀點描述的數學方法：1. 將相關變數轉換為不相關的變數以了解原始參數之間的個別關係。2. 對參數間的變動大小進行判識與排序的數學方法。3. 透過辨識最大變異參數，可以最小維度得到最佳的原始參數估計值。因此，奇異值分解為對資料進行降階的方法。

以線性代數為基礎，奇異值分解可將任意矩陣 $\mathbf{A}_{m \times n}$ 分解為三個矩陣：正交矩陣 \mathbf{U} 、斜對角矩陣 \mathbf{S} 與正交矩陣 \mathbf{V} 的轉置矩陣（式4-32）。

$$\mathbf{A} = \mathbf{USV}^T$$

(4-32)

其中，

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I} \quad (4-33)$$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I} \quad (4-34)$$

而 \mathbf{U} 的行向量為 $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ 的單範正交（orthonormal）特徵向量， \mathbf{V} 的行向量為 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 的單範正交特徵向量， \mathbf{S} 是由 \mathbf{U} 、 \mathbf{V} 解算出來的特徵值平方根組成的斜對角矩陣，由大至小下降排列。根據奇異值分解的特性， \mathbf{U} 、 \mathbf{V} 矩陣中對應至最小特徵值的行向量分別為 \mathbf{A} 的左右零空間，是以4-1-2節中，位移向量可由必要矩陣進行奇異值分解後的矩陣求得。



五、實驗與分析

5-1 實驗配置

考慮共線式方法與基於共面式的必要矩陣方法之間的解算過程，首先以地面控制資料為變因，探討不同的選點情況對兩種方法的三維解算成果影響，再針對影像不同軸向的旋轉情形，比較兩種解算方法受旋轉角度的影響情況，分析兩種方法的優勢與不足。

本研究實驗以 UAS 航空攝影測量模擬數據進行，實驗數據參考 UAS 攝影測量實際運作情形，以 100 公尺為航高，消費型相機的參數參考富士 FinePix S3 Pro 相機（圖 5-1）的資料設定，包含像幅大小及像元大小，焦距設定為 28 公釐，故比例尺為 28/100000，影像設定為重疊率百分之六十，檢核點與控制點數量各自設定為 10 點（表 5-1）。

表 5-1 模擬 UAS 影像數據。



圖 5-1 富士 FinePix S3 Pro。

航高 (m)		100
像幅大小 (mm)	長 (x)	23
	寬 (y)	15.5
像元大小 (mm)	長 (x)	0.0076
	寬 (y)	0.0077
焦距 (mm)		28
比例尺		1/3571.429
重疊率		60%

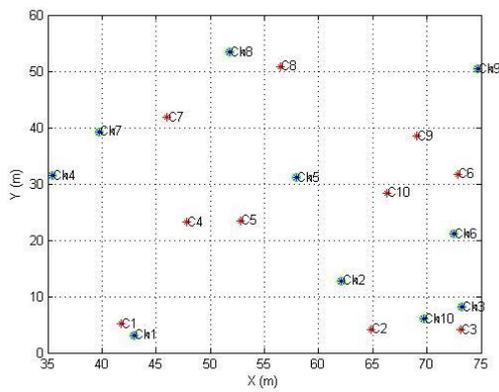
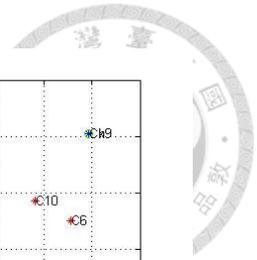
模擬數據以共線式進行，依序為地面控制點產製、外方位參數設置、控制點投影產製像點，並對像點加入 0.32 公釐的隨機誤差，以檢核點解算成果進行分析。

在控制點分佈實驗中，假設外方位參數為沒有旋轉的兩張影像，將影像重疊

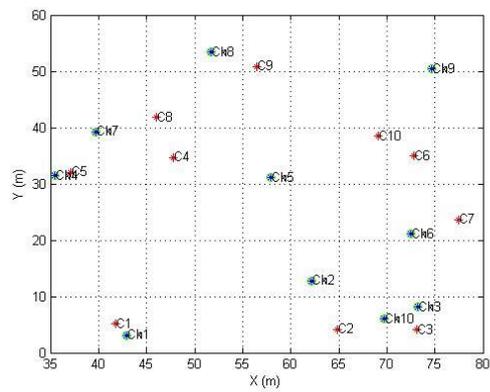
部分分為九個區塊，以點位均勻分佈於重疊區域、分散於重疊區域邊緣、集中於重疊區域中心及集中於重疊區域下半部的四種分佈情況作為變因進行討論，探討影像平行時，使用兩種方法所產生的成果差異；在影像旋轉的實驗，以均勻分佈的地面控制點坐標作為已知資訊、外方位參數作為變因，考量航空攝影測量拍攝時的角度在製圖規範上為 5 度以內，而 UAS 影像具有旋轉角度較大的特性，因此設計影像在旋轉角度為 10 度的情況下，兩種方法是否仍能順利解算方位及還原三維點位資訊，並分別探討不同旋轉軸解算成果的影響。

5-2 控制點分佈

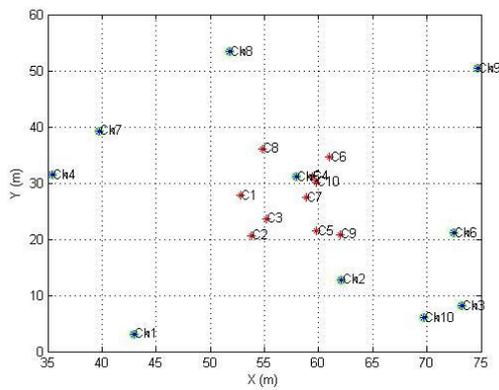
在雙像控制點佈設中，以重疊區域的控制點分佈情況進行討論，將影像重疊區域以九宮格劃分，分成：均勻分佈、邊緣分佈、中心分佈與集中於影像下半部四種情況，各設定 10 個控制點與 10 個檢核點。圖 5-2 中，紅色點位為地面控制點的平面分佈位置，藍色點位為檢核點平面分佈位置，點位平面坐標以隨機亂數根據不同區域產生，高程坐標為平均 20 公尺的隨機亂數正值，均勻分佈為各區至少 1 個控制點，邊緣分佈為將控制點控制在重疊區域的外圍，中心分佈將控制點點位集中在中心，集中分佈則是控制點均位於最下面的三個區塊，以上述配置探討地面控制點集中與否對三維點坐標解算成果的影響。



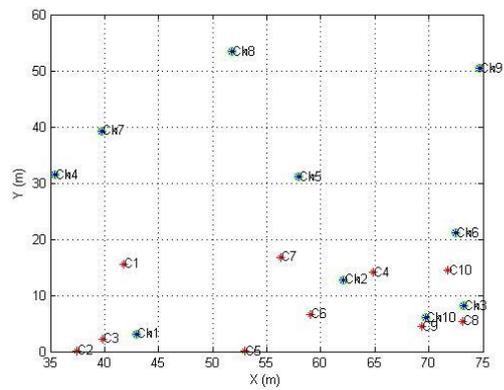
(a)



(b)



(c)



(d)

圖 5-2 控制點分佈圖 (a) 均勻分佈 (b) 邊緣分佈

(c) 中心分佈 (d) 集中分佈。

5-2-1 共線式解算成果

在不同的地面控制點分佈情況，共線式解算成果與模擬檢核點位真值的殘差如表 5-2，以 X、Y、Z 三個方向在各種分佈情況討論，四種控制點分佈的情況對解算成果產生的差異不大，若以均方根誤差 (RMSE) 比較，均勻分佈的 RMSE 為四種分佈情形中最小的，控制點集中於中心區域所解算檢核點的 RMSE 最大，接著是控制點集中重疊區域下方的情況解算之檢核點 RMSE，最小的 RMSE 則是均勻分佈的情況，可知地面控制點集中在愈小的區塊會使共線式的三維解算成果愈差。

表 5-2 控制點分佈解算檢核點坐標成果-共線式。(單位：公尺)

ID	均勻分佈			邊緣分佈			中心分佈			集中分佈		
	dX	dY	dZ	dX	dY	dZ	dX	dY	dZ	dX	dY	dZ
Pt_001	-1.576	-1.038	-4.338	-1.718	-0.410	-4.365	-1.933	-0.746	-13.787	-2.551	-1.583	-6.217
Pt_002	-0.791	0.225	2.512	-1.140	-1.669	-3.120	-1.969	-2.748	-2.699	-0.078	1.907	11.049
Pt_003	0.819	-0.566	0.501	0.610	-0.264	1.448	3.812	-2.108	-11.024	0.244	-2.775	-8.022
Pt_004	-1.012	1.243	-4.047	-1.734	1.016	-5.303	-0.371	1.114	1.127	0.880	0.784	-1.482
Pt_005	-0.325	-0.527	-2.057	-0.569	-0.878	-4.090	-0.908	-1.387	-1.301	0.613	-1.539	2.465
Pt_006	-0.878	-0.004	2.154	-0.833	0.025	2.839	0.641	-0.239	-2.933	-1.129	-1.468	-4.845
Pt_007	-1.884	-0.071	-4.632	-3.306	-0.152	-8.284	-1.874	-2.183	2.880	2.166	-1.670	2.848
Pt_008	0.483	-2.753	4.277	0.421	-2.430	3.684	0.317	-4.924	13.235	1.594	-4.168	3.918
Pt_009	-1.198	-1.046	4.855	-0.845	-1.338	5.740	-1.718	-2.817	8.997	-0.581	-2.902	2.488
Pt_010	0.409	1.408	-0.083	0.412	0.637	-2.341	1.873	-1.245	-10.021	-0.380	1.453	0.632
Average	0.937	0.888	2.946	1.159	0.882	4.121	1.542	1.951	6.800	1.022	2.025	4.396
RMSE	1.052	1.180	3.376	1.437	1.138	4.521	1.833	2.330	8.338	1.293	2.229	5.356
	2.152			2.817			5.109			3.431		

將表 5-2 成果以折線圖呈現 (圖 5-3)，以討論解算成果的殘差分佈趨勢，由三個坐標軸方向的殘差分佈折線圖可知：在控制點分佈為均勻分佈與邊緣分佈的情況下，殘差分佈趨勢較接近。由於模擬的點位資料中，均勻分佈的點位與邊緣分佈的點位差異僅為中心區域地面控制點，以共線式解算且經過平差的區域較接近，而控制點中心分佈與集中分佈的情況，後方交會的解算點位皆集中於小區域，因此殘差分佈的區間較大。以 RMSE 圖作為比較，受強制符合平差影響，控制點分佈愈集中的情況，解算成果愈差。

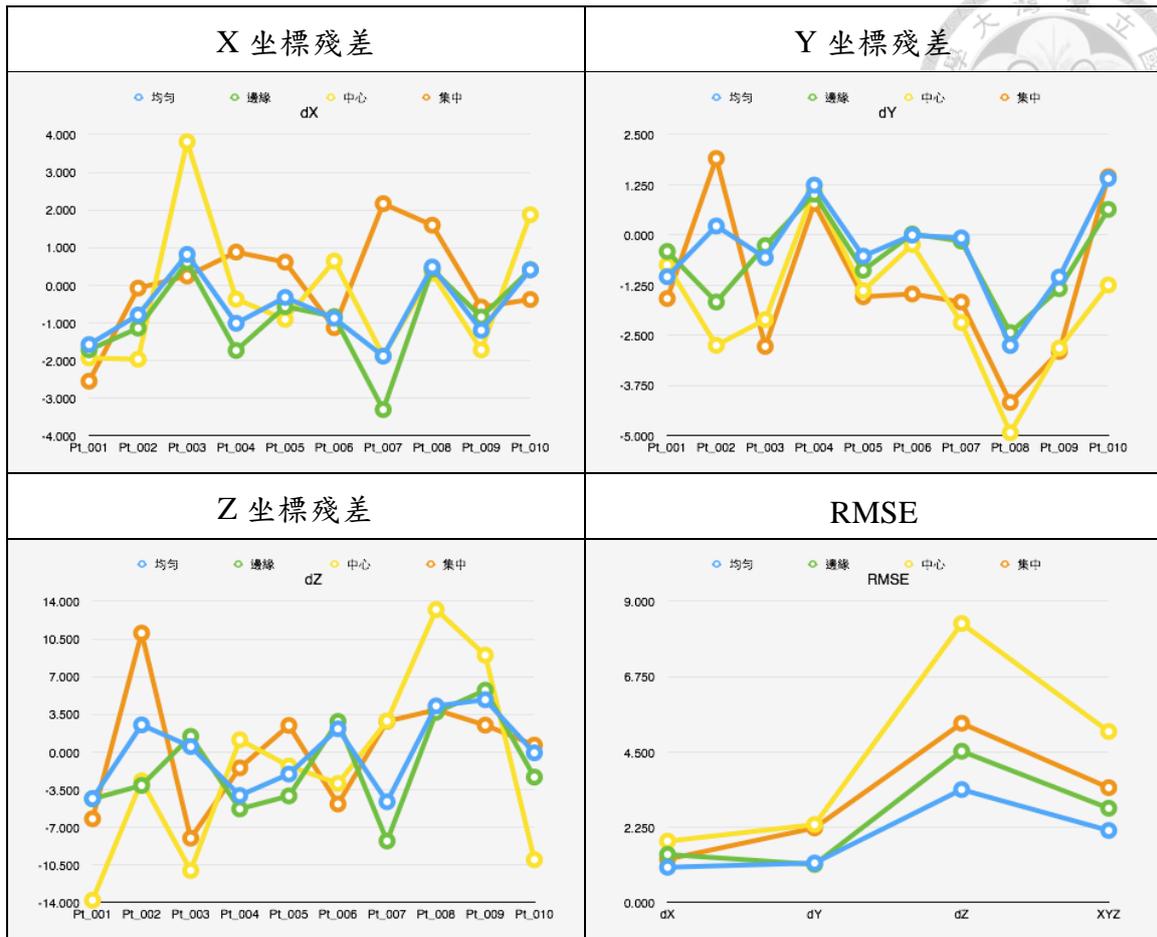


圖 5-3 控制點分佈解算檢核點坐標成果誤差分佈折線圖-共線式。(單位：公尺)

根據殘差分佈情形繪製殘差分佈圖(圖 5-4)，橫軸與縱軸分別為 X、Y 方向，以向量表示平面誤差，圓形大小表示高程方向誤差，以 2 倍放大 Z 方向殘差誤差量作為半徑繪製而成，圖中以均勻分佈點位的解算檢核點誤差分佈較小且分佈情況較平均，而集中在特定區域的控制點分佈情形可以清楚了解控制點分佈與誤差分佈的影響，在控制點分佈在中心時，離重疊區域邊緣較近的檢核點較容易有較大的平面與高程誤差，點位集中於重疊區域下半部的解算成果，以重疊區域上半部的檢核點具有較大的平面誤差，下半部有較大的高程誤差。

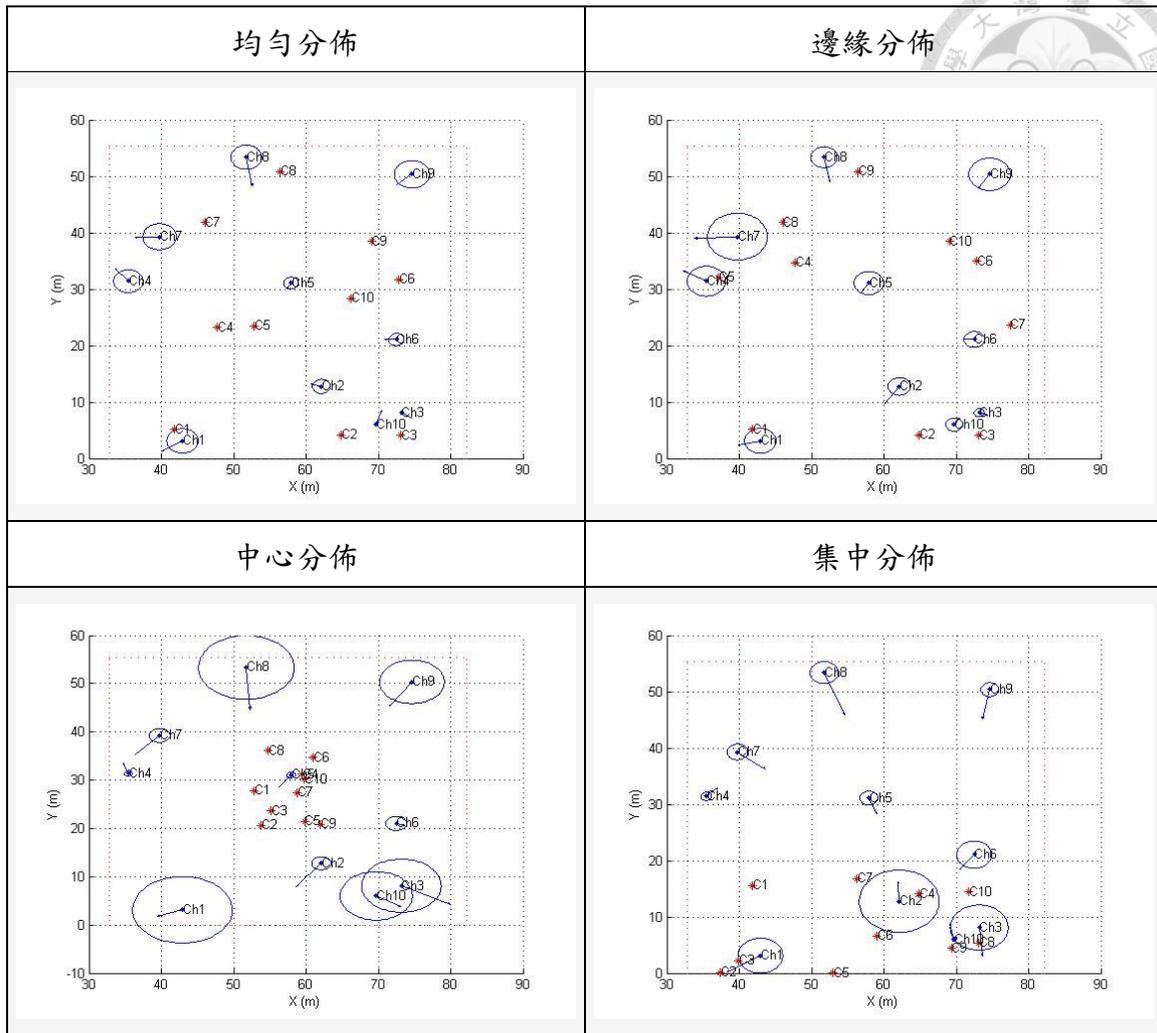


圖 5-4 點位分佈解算檢核點坐標殘差分佈圖-共線式。

5-2-2 必要矩陣解算成果

透過必要矩陣與三維仿射解算點位成果的殘差統整為表 5-3，在四捨五入捨去多餘小數點位後，不論控制點分佈集中與否，殘差值皆相同，在各個坐標軸方向的殘差皆一致，唯一有差異的邊緣分佈之 RMSE 為小數點的捨位的計算差異，可知點位分佈對於必要矩陣的解算成果幾乎不會造成影響。

表 5-3 控制點分佈檢核點坐標解算成果-必要矩陣。(單位：公尺)

ID	均勻分佈			邊緣分佈			中心分佈			集中分佈		
	dX	dY	dZ									
Pt_001	-1.432	-0.491	-2.503	-1.432	-0.491	-2.503	-1.432	-0.491	-2.503	-1.432	-0.491	-2.503
Pt_002	-0.258	2.063	9.326	-0.258	2.063	9.326	-0.258	2.063	9.326	-0.258	2.063	9.326
Pt_003	0.756	-0.470	0.143	0.756	-0.470	0.143	0.756	-0.470	0.143	0.756	-0.470	0.143
Pt_004	-0.172	1.830	-2.587	-0.172	1.830	-2.587	-0.172	1.830	-2.587	-0.172	1.830	-2.587
Pt_005	0.391	-0.161	1.487	0.391	-0.161	1.487	0.391	-0.161	1.487	0.391	-0.161	1.487
Pt_006	-0.629	0.155	1.309	-0.629	0.155	1.309	-0.629	0.155	1.309	-0.629	0.155	1.309
Pt_007	-0.113	0.250	-1.149	-0.113	0.250	-1.149	-0.113	0.250	-1.149	-0.113	0.250	-1.149
Pt_008	1.216	-2.032	3.495	1.216	-2.032	3.495	1.216	-2.032	3.495	1.216	-2.032	3.495
Pt_009	-0.433	-0.777	4.702	-0.433	-0.777	4.702	-0.433	-0.777	4.702	-0.433	-0.777	4.702
Pt_010	0.195	2.528	3.391	0.195	2.528	3.391	0.195	2.528	3.391	0.195	2.528	3.391
Average	0.560	1.076	3.009	0.560	1.076	3.009	0.560	1.076	3.009	0.560	1.076	3.009
RMSE	0.7060	1.3893	3.8862	0.7060	1.3893	3.8862	0.7060	1.3893	3.8862	0.7060	1.3893	3.8862
	2.417			2.417			2.417			2.417		

將殘差分佈情形以折線圖表示(圖 5-5)，可看出 X、Y 坐標方向的殘差量皆很小，以高程方向的殘差為最大，但各種情況下的殘差分佈情況皆相同，顯示控制點點位選取對必要矩陣的解算成果沒有顯著影響。在電腦視覺的方位解算中，著重於相對方位而非絕對方位且缺乏尺度，因此影像深度或模型高程可能產生較大的誤差，此外，考量必要矩陣方法的數學模式，在解算過程中，是以基礎矩陣所解算之必要矩陣作 SVD 後的成果為初始投影矩陣，並根據 RANSAC 模式以三維仿射至地面控制點進行絕對定位，在初始投影矩陣設定時，考量旋轉矩陣與位移向量的正負號依據為其數學上的特性，且投影後模型坐標至絕對坐標的仿射矩陣為以隨機樣本篩選除錯的附合矩陣，在控制點無誤差的情況下，皆以最多符合



點位的仿射矩陣為最佳矩陣，因此，在影像皆平行的情況下，點位分佈對必要矩陣解算成果影響極小。

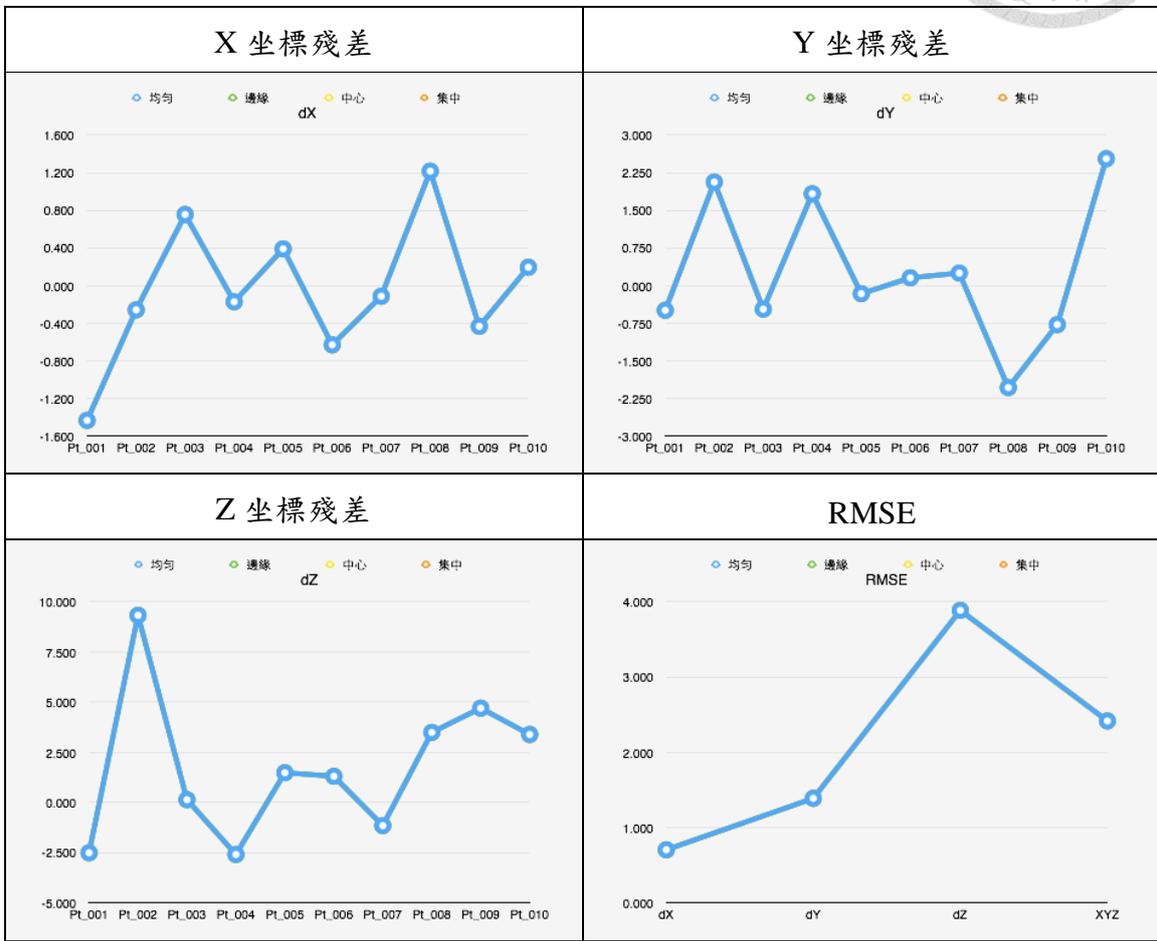


圖 5-5 控制點分佈解算檢核點坐標成果誤差分佈折線圖-必要矩陣。(單位：公尺)

以殘差分佈圖進行討論(圖 5-6)，可發現四種點位分佈方式解算之殘差分佈情況為均勻分佈於影像重疊區域，分佈情形一致，符合前述以 RANSAC 擬合三維仿射矩陣為使點位解算符合程度最高的矩陣。

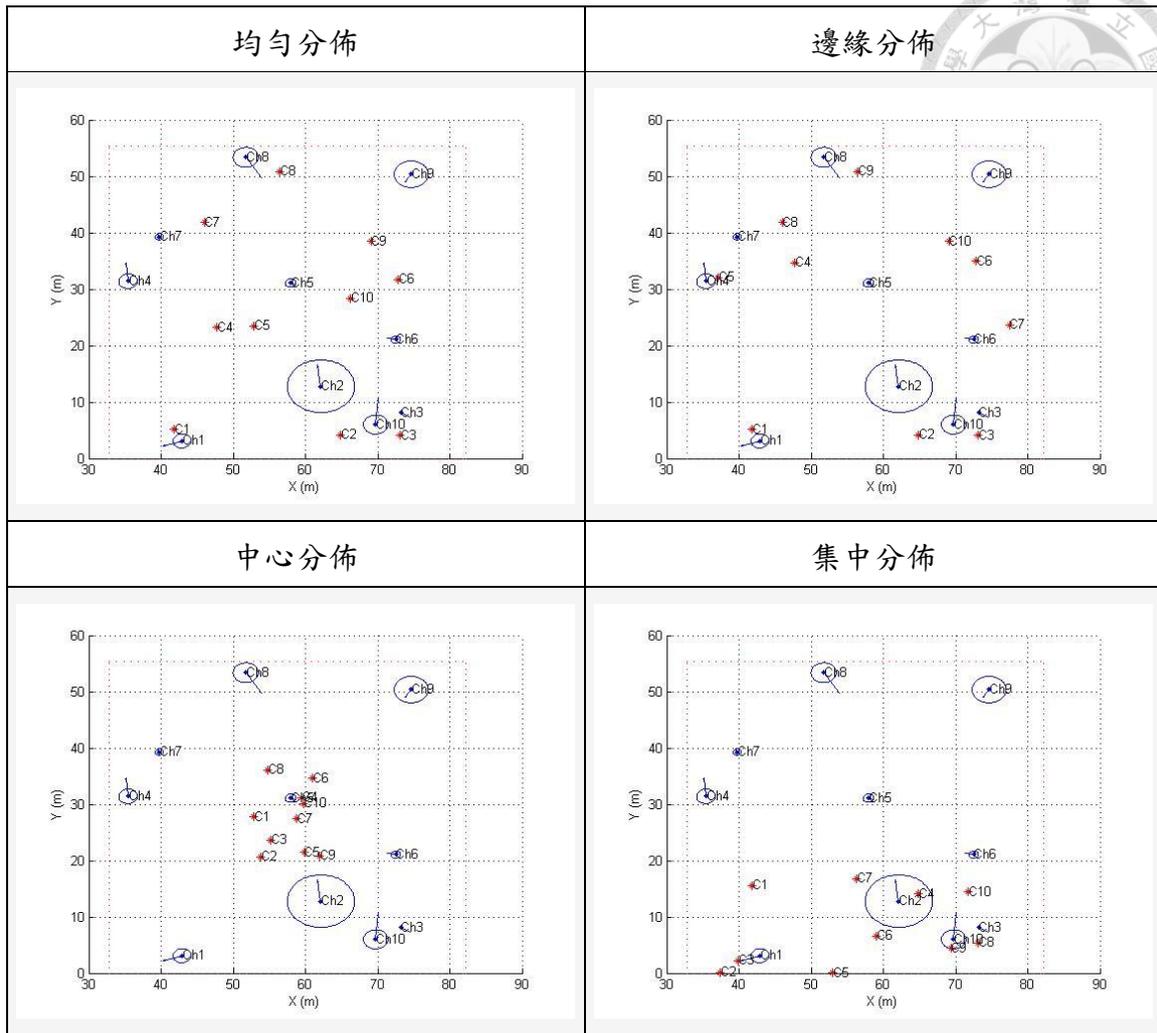


圖 5-6 點位分佈檢核點坐標解算殘差分佈圖-必要矩陣。

5-2-3 綜合比較

以 RMSE 討論共線式與必要矩陣結合三維仿射解算的成果 (表 5-4)，在點位分佈均勻和分佈於重疊區域邊緣的情況下，必要矩陣的解算成果在 x 方向有較好的成果，而高程的 RMSE 介於共線式解算的均勻分佈點位成果及邊緣分佈解算成果之間，顯示透過必要矩陣方法解算的三維點位成果較共線式在控制點分佈不均勻的情況下解算的成果，而點位分佈集中在中心與集中在重疊區域下半部的情況下，共線式的解算成果明顯變差，必要矩陣方法則不受影響。

表 5-4 檢核點坐標 RMSE 比較表-控制點分佈。(單位：公尺)

ID	均勻分佈		邊緣分佈		中心分佈		集中分佈	
	共線式	電腦視覺	共線式	電腦視覺	共線式	電腦視覺	共線式	電腦視覺
RMSE-X	1.052	0.706	1.437	0.706	1.833	0.706	1.293	0.706
RMSE-Y	1.180	1.389	1.138	1.389	2.330	1.389	2.229	1.389
RMSE-Z	3.376	3.886	4.521	3.886	8.338	3.886	5.356	3.886
RMSE	2.152	2.417	2.817	2.417	5.109	2.417	3.432	2.417

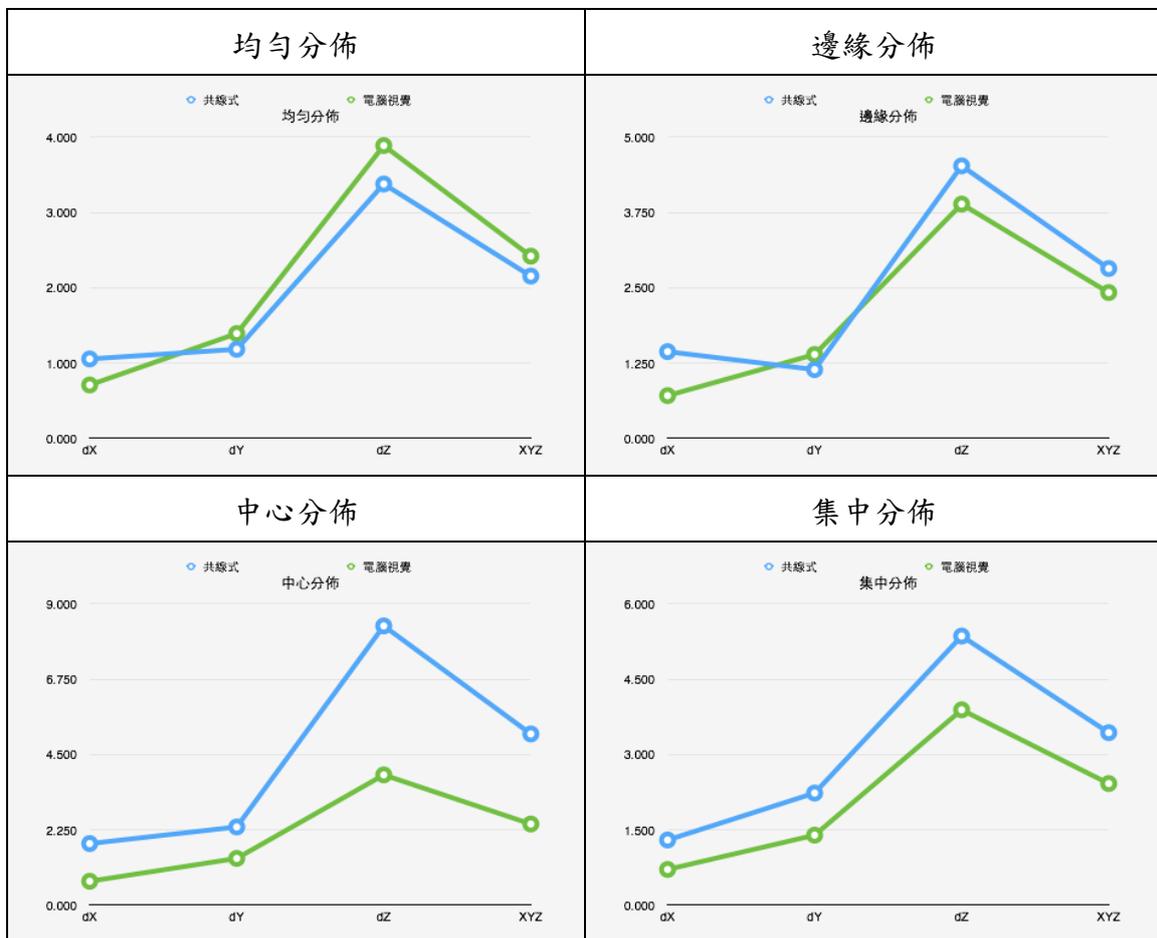


圖 5-7 檢核點坐標 RMSE 折線圖-控制點分佈。(單位：公尺)

將 RMSE 整理為折線圖分析 (圖 5-7)，在必要矩陣方法解算之 RMSE 沒有變動的情況下，可知不同點位分佈情況兩者的差異，其中必要矩陣的成果與均勻

分佈成果最為接近，差異最大的為中心分佈，亦驗證於共線式解算成果部分(5-2-1節)論及點位分佈對共線式解算成果影響的現象。



5-3 影像旋轉

傳統攝影測量在以製圖為目的實際拍攝時，仰賴民航機的飛航穩定性，要求拍攝影像時傾角不得超過 5 度，且影像的旋轉可能導致像對產生變形，拍攝時前傾或後傾的影像也會使物空間投影至影像上的點位移動，進而影響解算成果，然而以 UAS 進行拍攝的影像受到飛行穩定度的影響，拍攝時可能產生影像旋轉的情況，是以本實驗設定雙像像對的首張影像外方位姿態固定，第二張影像以不同的坐標軸為旋轉軸進行旋轉，旋轉量為 10 度，藉此分析在影像不平行的條件下，共線式與基於共面式的必要矩陣方法的誤差情形與解算差異。

5-3-1 共線式成果

針對影像旋轉中共線式的解算成果分為：以單一坐標軸為旋轉軸旋轉，及以多個不同方向坐標軸為旋轉軸旋轉，兩種組合進行討論與分析。

I. 單軸旋轉

以單一坐標軸為旋轉軸的影像旋轉分為對 X 軸、Y 軸與 Z 軸進行旋轉，以共線式解算後的檢核點殘差如表 5-5 所示，以殘差的平均值而言，以 Z 軸為旋轉軸的殘差略高於對 X 軸為旋轉軸旋轉影像與以 Y 軸旋轉影像的殘差，而 RMSE 的差異亦有相同的情形。

表 5-5 單軸旋轉影像解算檢核點坐標成果-共線式。(單位：公尺)

ID	RoX			RoY			RoZ		
	dX	dY	dZ	dX	dY	dZ	dX	dY	dZ
Pt_001	-1.506	-1.067	-5.158	-1.645	-1.736	-3.546	-1.382	-2.102	-6.314
Pt_002	1.576	-0.540	-3.059	-1.448	-0.016	3.940	1.152	-0.860	-2.200
Pt_003	-0.518	0.085	3.424	0.583	0.600	0.840	-1.244	0.750	4.952
Pt_004	-1.114	0.977	-0.251	-0.839	1.655	-4.101	-0.997	1.582	-0.048
Pt_005	-0.140	-0.474	-2.542	-0.471	1.071	-1.524	-0.922	1.036	-0.142
Pt_006	0.361	-0.258	-0.706	-0.455	-0.164	1.068	1.107	-0.559	-2.477
Pt_007	-1.860	0.261	-4.417	-1.811	1.569	-4.805	-2.045	1.507	-2.386
Pt_008	0.683	-2.409	3.527	0.940	-0.083	2.239	0.410	-0.544	4.353
Pt_009	0.628	-0.234	1.354	-0.704	-0.898	3.899	1.447	0.262	-0.213
Pt_010	0.260	0.866	0.217	0.028	0.110	0.901	0.284	-0.181	0.367
Average	0.865	0.717	2.465	0.892	0.790	2.686	1.099	0.938	2.345
RMSE	1.039	0.967	2.975	1.046	1.028	3.053	1.199	1.108	3.165
	1.903			1.955			2.056		

以折線圖呈現單軸旋轉影像解算的檢核點殘差成果(圖 5-8)，在坐標軸 X 方向與 Z 方向的殘差方佈情形，對 X 軸旋轉與對 Z 軸旋轉的影像的解算成果相似。因影像對 X 軸與 Z 軸旋轉時，皆會使像點的 Y 坐標與影像平行時產生差異，而對 Y 軸旋轉影像影響較大的為像點的 X 坐標，是以共線式解算後的殘差分佈以 X 與 Z 軸的單軸旋轉影像成果較相似。

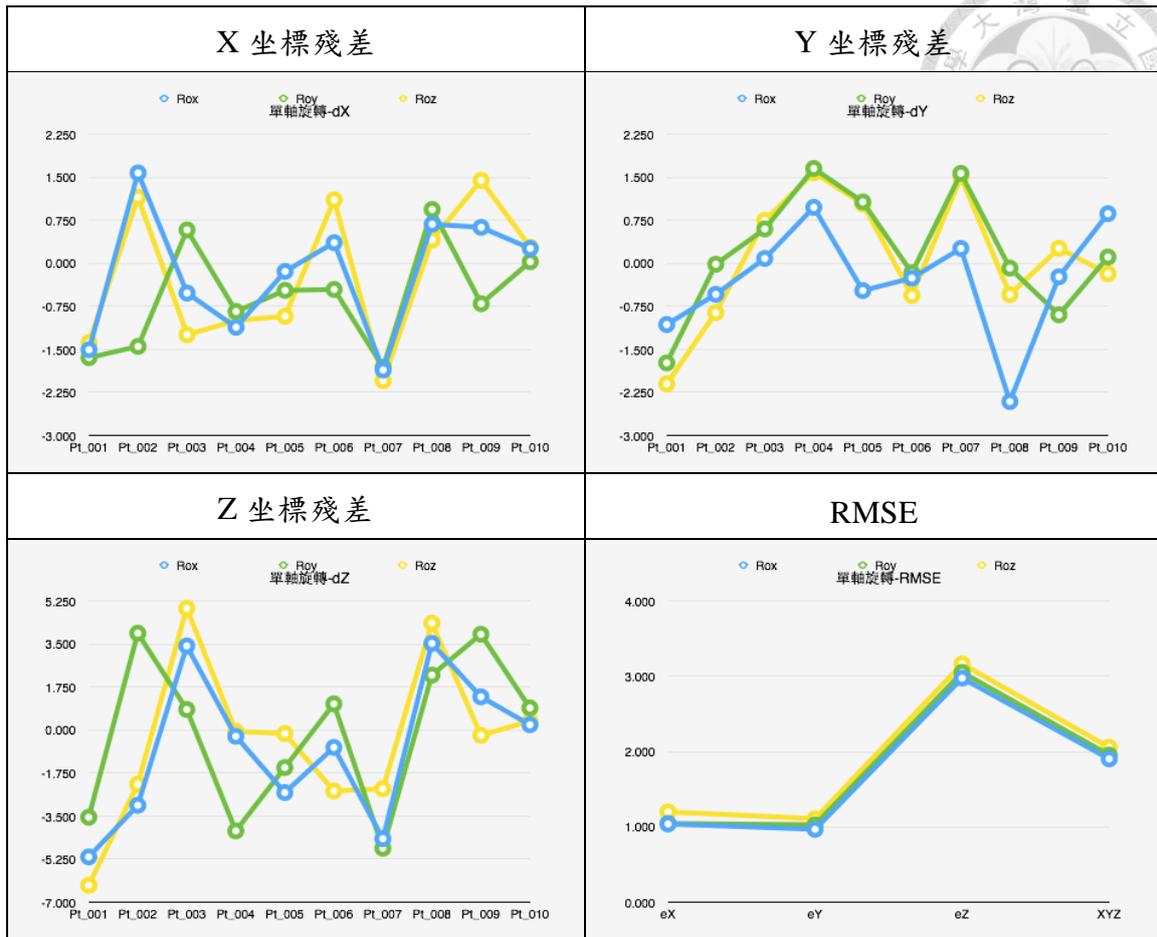


圖 5-8 單軸影像旋轉解算檢核點坐標成果誤差分佈折線圖-共線式。(單位：公尺)

在單軸影像旋轉的殘差分佈圖（圖 5-9）中可以發現：在對 X 軸旋轉影像的檢核點解算成果中，接近影像重疊區域左、右邊緣的檢核點誤差減少；對 Y 軸旋轉影像的檢核點解算成果，則以接近影像重疊區域上、下邊緣的檢核點誤差減少；而影像對 Z 軸旋轉的情況下，平面誤差在 X 方向有負向的增加、在 Y 方向有正向的增加。由於影像在對各軸旋轉時，影像上的點會產生位移，當對 X 軸或 Y 軸旋轉時，影像往上旋轉的部份點位會向像主點偏移，影像向下旋轉的部份則會由像主點輻射向外偏移，是以相對降低某些點位原有的誤差量，降低整體 RMSE 值；對 Z 軸旋轉時，點位會有向旋轉方向偏移的情形，也因此增加上述方向的誤差量，相對的也可能減少原本是反向的誤差。

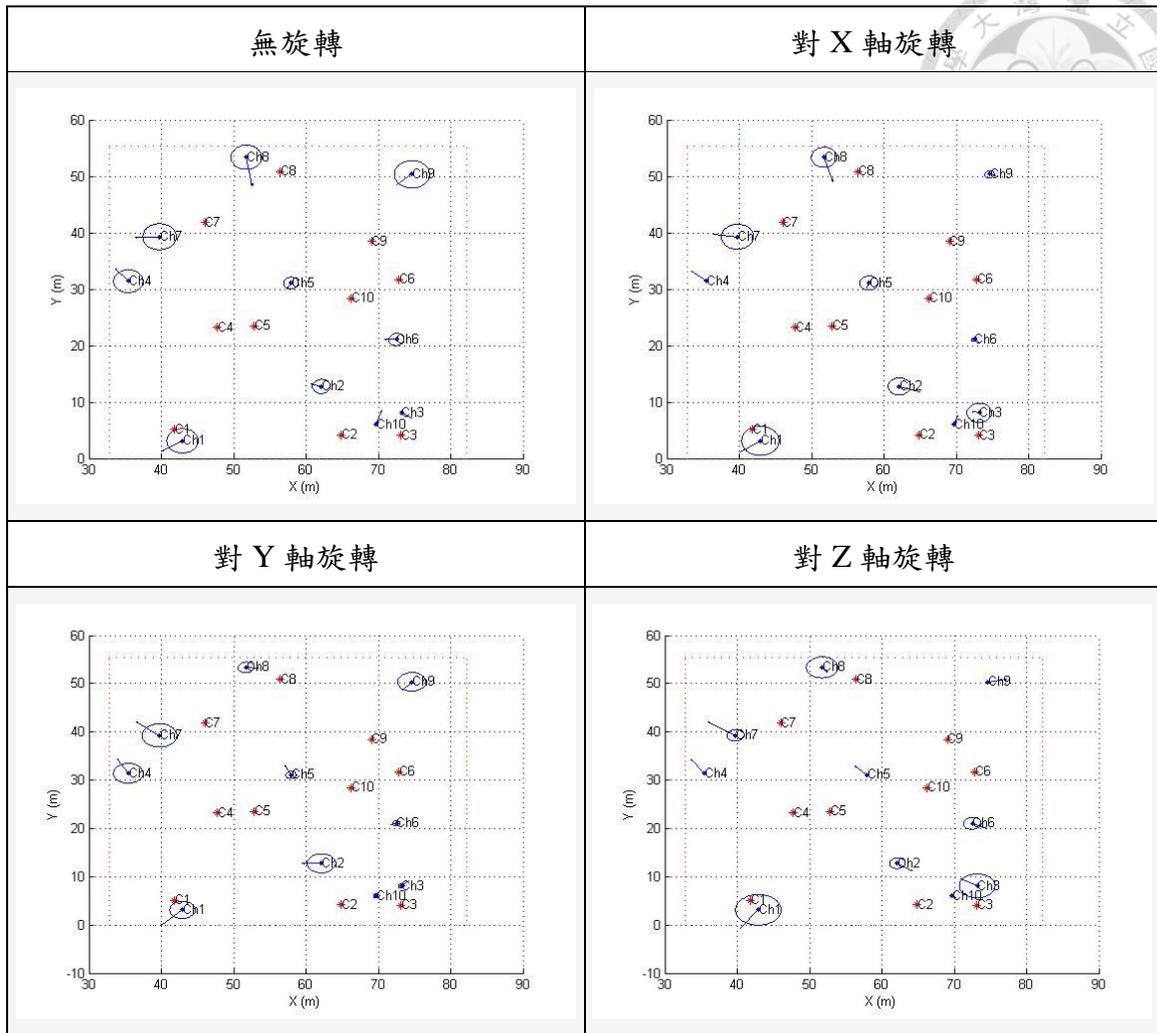


圖 5-9 單軸旋轉影像解算檢核點坐標殘差分佈圖-共線式。

II. 多軸旋轉

多軸旋轉可分為對兩個坐標軸進行旋轉的情況與對三個軸都有旋轉的情況，表 5-6 中，在兩軸旋轉的情況下，以殘差平均值與 RMSE 值討論，對 X、Z 軸旋轉與對 X、Y、Z 軸旋轉的值大小相似，對 Y、Z 軸旋轉則具有較大的殘差平均值與 RMSE 值，顯示對兩軸旋轉的情況下，以對 Y、Z 軸旋轉的檢核點解算成果較差，而對 X、Y 兩軸旋轉的解算成果有最小的殘差平均值與 RMSE，為多軸旋轉的檢核點解算成果中較佳的組合。

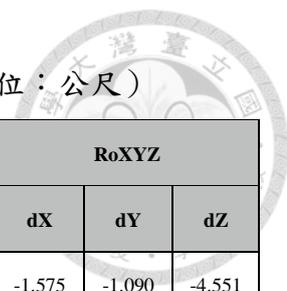


表 5-6 多軸旋轉影像解算檢核點坐標成果-共線式。(單位：公尺)

ID	RoXY			RoXZ			RoYZ			RoXYZ		
	dX	dY	dZ									
Pt_001	-1.514	-1.423	-5.077	-1.688	-1.145	-3.492	-1.283	-1.575	-6.968	-1.575	-1.090	-4.551
Pt_002	0.478	-1.036	-0.508	-1.480	0.906	3.910	1.546	-1.391	-2.948	-0.082	0.260	0.768
Pt_003	-0.230	0.799	2.780	1.231	-0.112	-0.485	-0.961	0.160	4.385	0.598	-0.195	0.975
Pt_004	-1.028	1.003	-1.282	-0.870	1.094	-3.025	-1.118	1.777	-0.769	-1.014	0.316	-2.412
Pt_005	-0.398	0.793	-1.656	-0.110	0.991	-2.616	-0.684	-0.448	-0.967	-0.095	-0.457	-2.638
Pt_006	0.588	-0.541	-1.244	-0.260	0.005	0.614	0.302	-0.534	-0.558	-0.461	-0.036	1.153
Pt_007	-1.881	1.486	-3.788	-1.755	1.610	-5.407	-2.037	0.209	-2.559	-1.785	0.119	-5.201
Pt_008	0.880	0.097	2.835	1.559	0.492	-0.357	0.122	-2.664	5.961	1.004	-1.911	2.209
Pt_009	0.664	-0.594	1.284	-0.782	-0.839	4.039	0.530	-0.536	1.493	-0.778	-1.003	4.034
Pt_010	-0.276	-0.142	1.388	-0.636	0.312	2.285	0.566	0.883	-0.448	-0.115	1.164	1.022
Average	0.794	0.791	2.184	1.037	0.751	2.623	0.915	1.018	2.706	0.751	0.655	2.496
RMSE	0.947	0.909	2.562	1.180	0.892	3.082	1.074	1.276	3.505	0.944	0.873	2.926
	1.662			1.974			2.241			1.845		

以折線圖分析殘差與 RMSE 的分佈趨勢 (圖 5-10)，在 X 坐標殘差與 Y 坐標殘差的部份，Pt_004 到 Pt_009 之間對 X、Z 軸旋轉與對 X、Y、Z 三軸旋轉的解算成果相似；高程部份四種旋轉情形的檢核點解算成果趨勢相似，但由 RMSE 可發現：對 Y、Z 軸旋轉的情形相較於其他的影像旋轉情形較差，在 Y 方向與 Z 方向皆有較大的 RMSE。

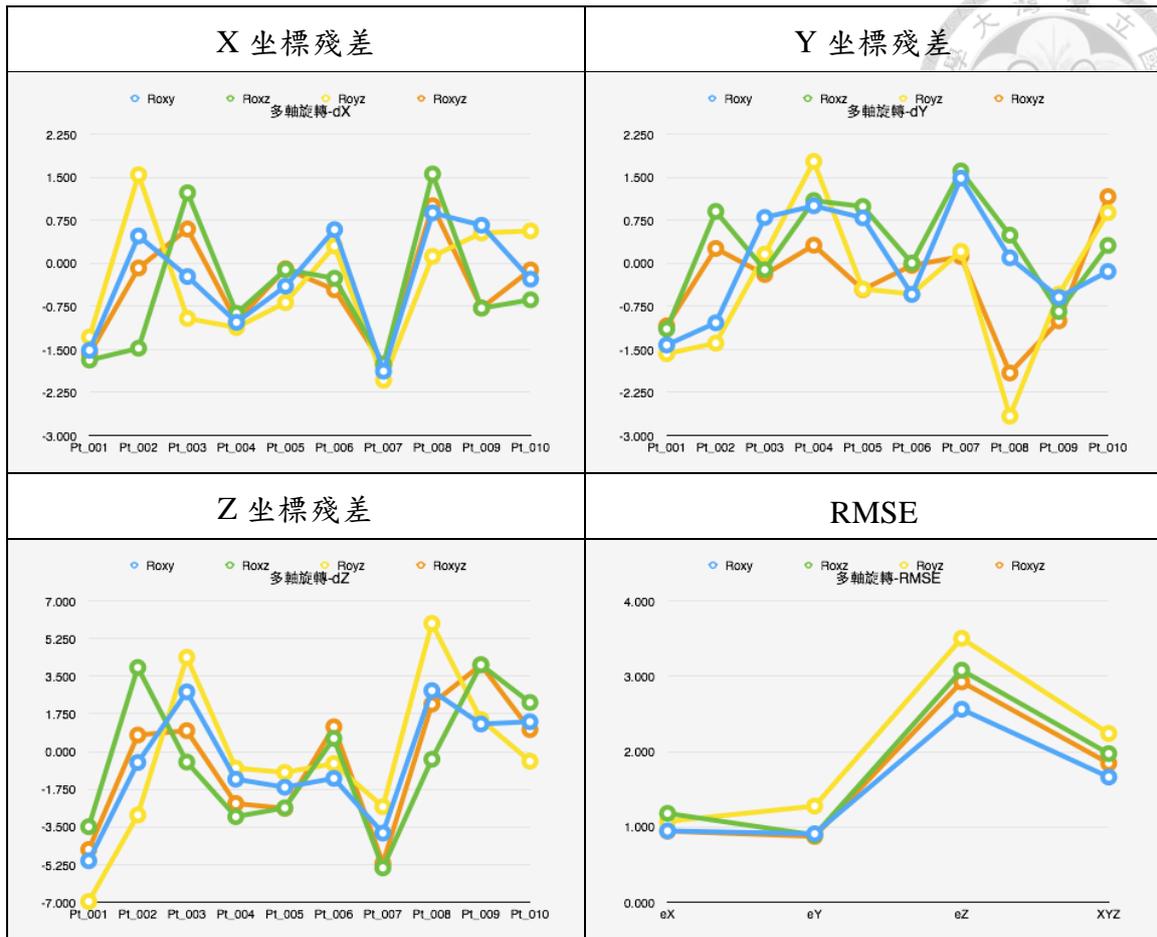


圖 5-10 多軸影像旋轉解算檢核點坐標成果誤差分佈折線圖-共線式。(單位:公尺)

由圖 5-11，對 X、Y 軸旋轉的情況中，兼具了對 X 軸旋轉與對 Y 軸旋轉所產生的誤差分佈情況，在對 X 軸旋轉與對 Y 軸旋轉影像的解算成果中，較大的誤差量在兩軸旋轉的情形下變的較小，對 X、Z 軸旋轉與對 Y、Z 軸旋轉的成果也有相同的改變，由於以不同軸為旋轉軸的旋轉，會使影像在不同方向產生變動，也因此根據旋轉的方向會有減少或增加誤差的效果，可能使解算成果比單一坐標軸為旋轉軸旋轉影像的成果好。

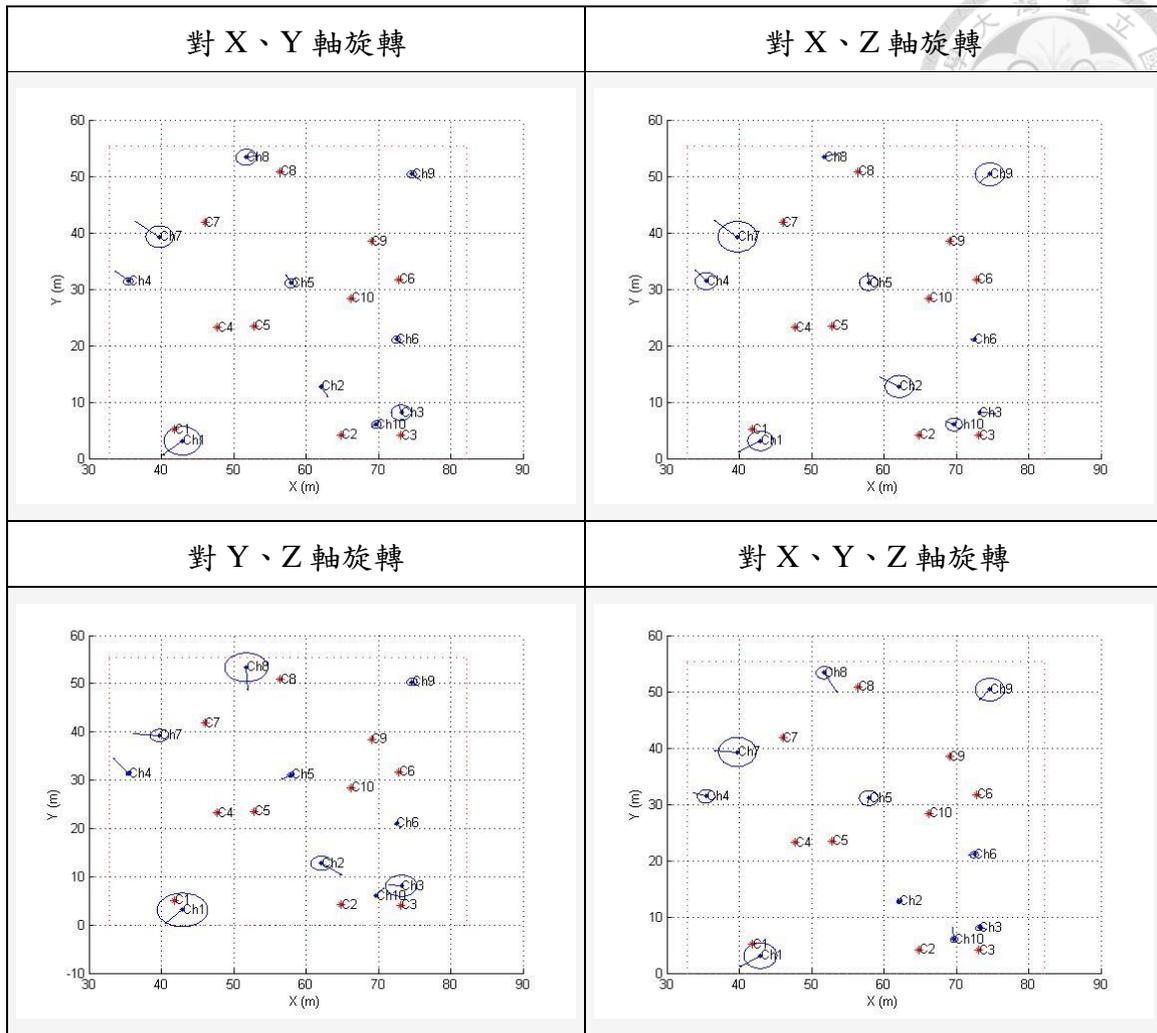


圖 5-11 多軸旋轉影像解算檢核點坐標殘差分佈圖-共線式。

5-3-2 必要矩陣解算成果

以必要矩陣方法解算的影像旋轉成果，以下分為單軸旋轉與多軸旋轉進行討論。

I. 單軸旋轉

單一坐標軸為旋轉軸的影像以必要矩陣解算成果如表 5-7，在三種旋轉情況下，平面誤差以檢核點的平均殘差值而言沒有顯著差異，高程部分的 Z 方向殘差以對 Z 軸旋轉的殘差量最大，以 RMSE 而言也有相同的現象。

表 5-7 單軸旋轉影像解算檢核點坐標成果-必要矩陣。(單位：公尺)

ID	RoX			RoY			RoZ		
	eX	eY	eZ	eX	eY	eZ	eX	eY	eZ
Pt_001	-1.487	-1.183	-5.146	-1.628	-1.737	-3.483	-1.380	-2.084	-6.303
Pt_002	1.582	-0.730	-2.900	-1.435	-0.038	3.988	1.151	-0.845	-2.042
Pt_003	-0.526	0.083	3.428	0.572	0.473	0.959	-1.242	0.764	4.961
Pt_004	-0.955	1.119	0.440	-0.669	1.505	-3.385	-0.899	1.506	0.516
Pt_005	-0.141	-0.356	-2.327	-0.459	1.034	-1.487	-0.919	1.023	-0.046
Pt_006	0.355	-0.326	-0.711	-0.455	-0.216	1.075	1.110	-0.535	-2.500
Pt_007	-1.823	0.287	-4.257	-1.815	1.585	-4.854	-2.033	1.486	-2.248
Pt_008	0.682	-2.388	3.554	0.954	-0.163	2.429	0.416	-0.573	4.751
Pt_009	0.627	-0.230	1.384	-0.717	-0.905	3.963	1.454	0.280	-0.200
Pt_010	0.251	0.931	0.258	0.016	0.324	1.086	0.200	-0.089	0.843
Average	0.843	0.764	2.440	0.872	0.798	2.671	1.080	0.918	2.441
RMSE	1.015	1.007	2.924	1.031	1.004	3.002	1.188	1.089	3.216
	1.879			1.922			2.077		

依據殘差值與 RMSE 繪製誤差分佈折線圖 (圖 5-12)，對 Y 軸旋轉的檢核點解算成果在 Y 方向殘差與對 Z 軸旋轉解算之檢核點成果有相同趨勢，Z 方向殘差則以對 X 軸旋轉與對 Z 軸旋轉解算之檢核點成果相似。

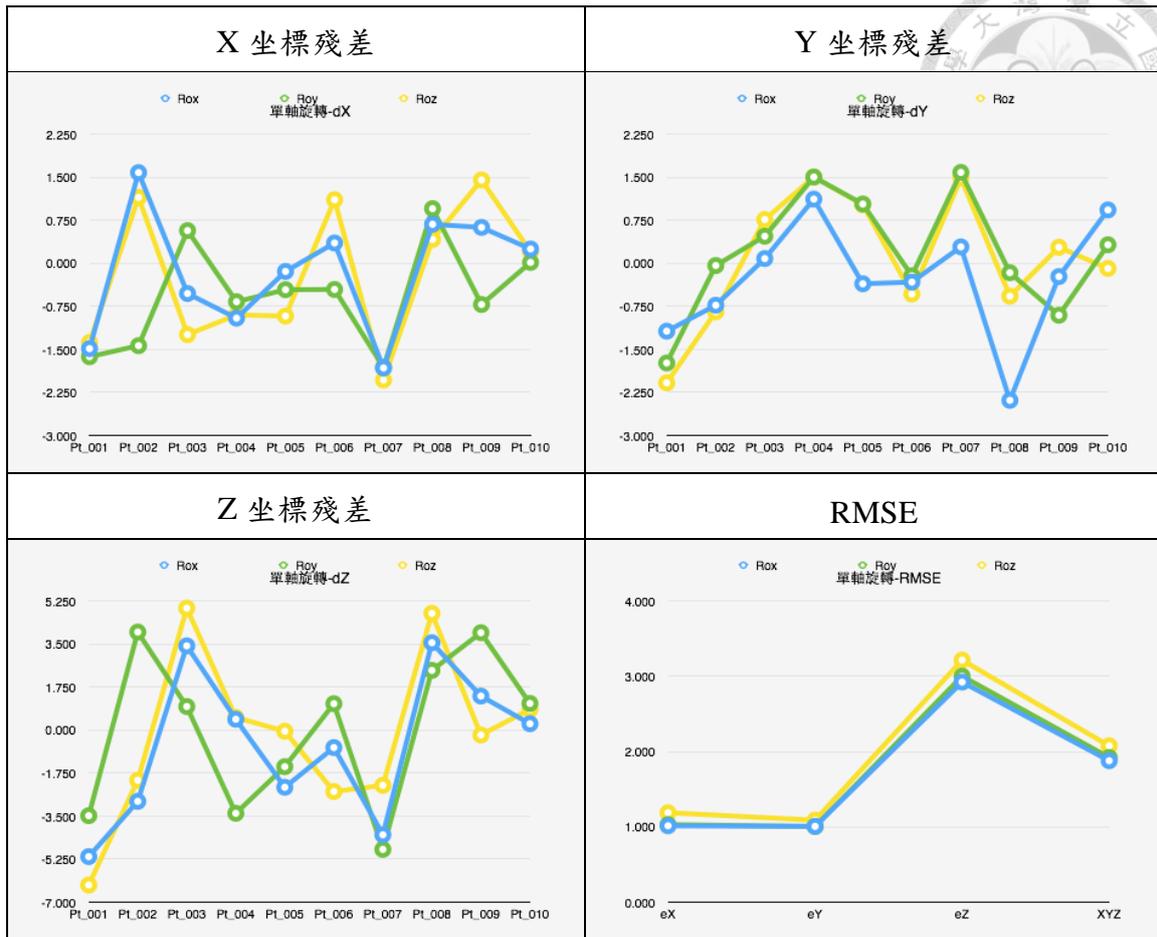


圖 5-12 單軸影像旋轉解算檢核點坐標成果誤差分佈折線圖-必要矩陣。

(單位：公尺)

在殘差分佈圖 (圖 5-13) 中，旋轉後影像解算檢核點成果較無旋轉的影像解算之檢核點成果好，在對 X 軸旋轉影像的檢核點解算成果中，接近中心的檢核點高程誤差增加，接近影像重疊區域左、右邊緣的檢核點誤差減少；對 Y 軸旋轉影像的檢核點解算成果，則以接近影像重疊區域上、下邊緣的檢核點高程誤差減少，平面誤差較偏向 X 方向；而影像對 Z 軸旋轉的情況下，平面誤差偏向左上方，即 X 方向減少、Y 方向增加，由於影像旋轉時會產生點位偏移的情形，也因此增加或減少原本的誤差。

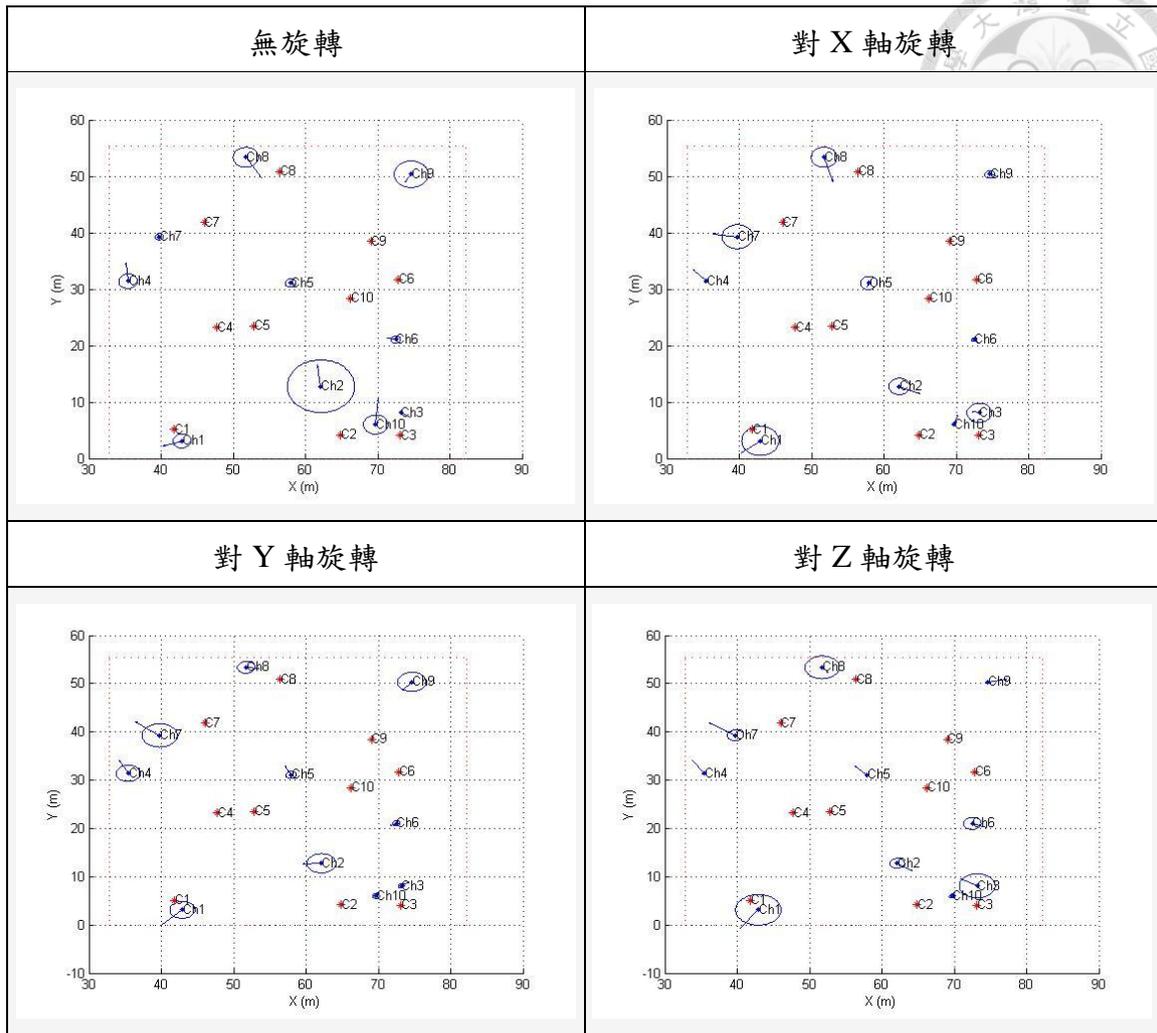


圖 5-13 單軸旋轉影像解算檢核點坐標殘差分佈圖-必要矩陣。

II. 多軸旋轉

多軸旋轉可分為對兩個坐標軸進行旋轉的情況與對三個軸都有旋轉的情況，以表 5-8 中進行討論，對 X、Y 軸旋轉影像解算檢核點成果與對 X、Y、Z 軸旋轉解算之成果相似，不論殘差的平均值及 RMSE 值都相當接近，而對 Y、Z 軸旋轉的影像解算檢核點成果最差，與表 5-7 的單軸旋轉成果對照後，發現旋轉軸的增加可能提升解算成果品質如：對 X、Y 軸旋轉及對 X、Y、Z 軸旋轉，亦可能降低解算成果品質如：對 Y、Z 軸旋轉。

表 5-8 多軸旋轉影像解算檢核點坐標成果-必要矩陣。(單位：公尺)

ID	RoXY			RoXZ			RoYZ			RoXYZ		
	eX	eY	eZ									
Pt_001	-1.491	-1.566	-5.222	-1.681	-1.181	-3.474	-1.262	-1.543	-6.884	-1.539	-1.318	-4.761
Pt_002	0.518	-1.132	-0.543	-1.438	0.736	4.049	1.532	-1.423	-2.856	0.081	-0.168	0.563
Pt_003	-0.133	0.541	2.594	1.226	-0.199	-0.467	-0.966	0.181	4.389	0.627	-0.273	0.893
Pt_004	-0.962	1.590	-0.383	-0.701	1.243	-2.070	-1.036	1.639	-0.463	-0.853	1.162	-0.989
Pt_005	-0.376	0.718	-1.691	-0.099	0.945	-2.602	-0.666	-0.410	-0.773	-0.150	-0.175	-2.310
Pt_006	0.605	-0.590	-1.305	-0.269	-0.069	0.651	0.296	-0.558	-0.576	-0.417	-0.176	1.049
Pt_007	-1.878	1.363	-3.902	-1.762	1.588	-5.449	-2.004	0.103	-2.473	-1.776	0.452	-4.778
Pt_008	0.942	-0.279	2.796	1.542	0.446	-0.109	0.124	-2.644	5.912	0.978	-1.796	2.288
Pt_009	0.652	-0.527	1.350	-0.790	-0.848	4.091	0.521	-0.496	1.558	-0.782	-0.992	4.080
Pt_010	-0.493	0.456	2.025	-0.679	0.603	2.516	0.558	0.910	-0.417	-0.134	1.229	1.079
Average	0.805	0.876	2.181	1.019	0.786	2.548	0.897	0.991	2.630	0.734	0.774	2.279
RMSE	0.950	0.992	2.607	1.163	0.907	3.049	1.053	1.252	3.459	0.918	0.958	2.776
	1.701			1.955			2.209			1.776		

以折線圖（圖 5-14）分析，在不同方向的殘差分佈上，有兩個一組相近的趨勢：在 X 方向殘差以對 X、Z 旋轉與對 X、Y、Z 旋轉相似；Y 方向殘差以對 X、Y 軸旋轉與對 X、Z 軸旋轉解算檢核點成果相似，對 Y、Z 軸旋轉與對 X、Y、Z 軸旋轉解算成果相似。Y 方向殘差而言，單獨對 Y 軸旋轉的情況與對 Z 軸旋轉解算成果相似，是以包含 X 軸的兩軸旋轉組合會有相似的殘差分佈趨勢，而由 RMSE 可知對 Y、Z 軸旋轉成果為多軸旋轉中最差的。

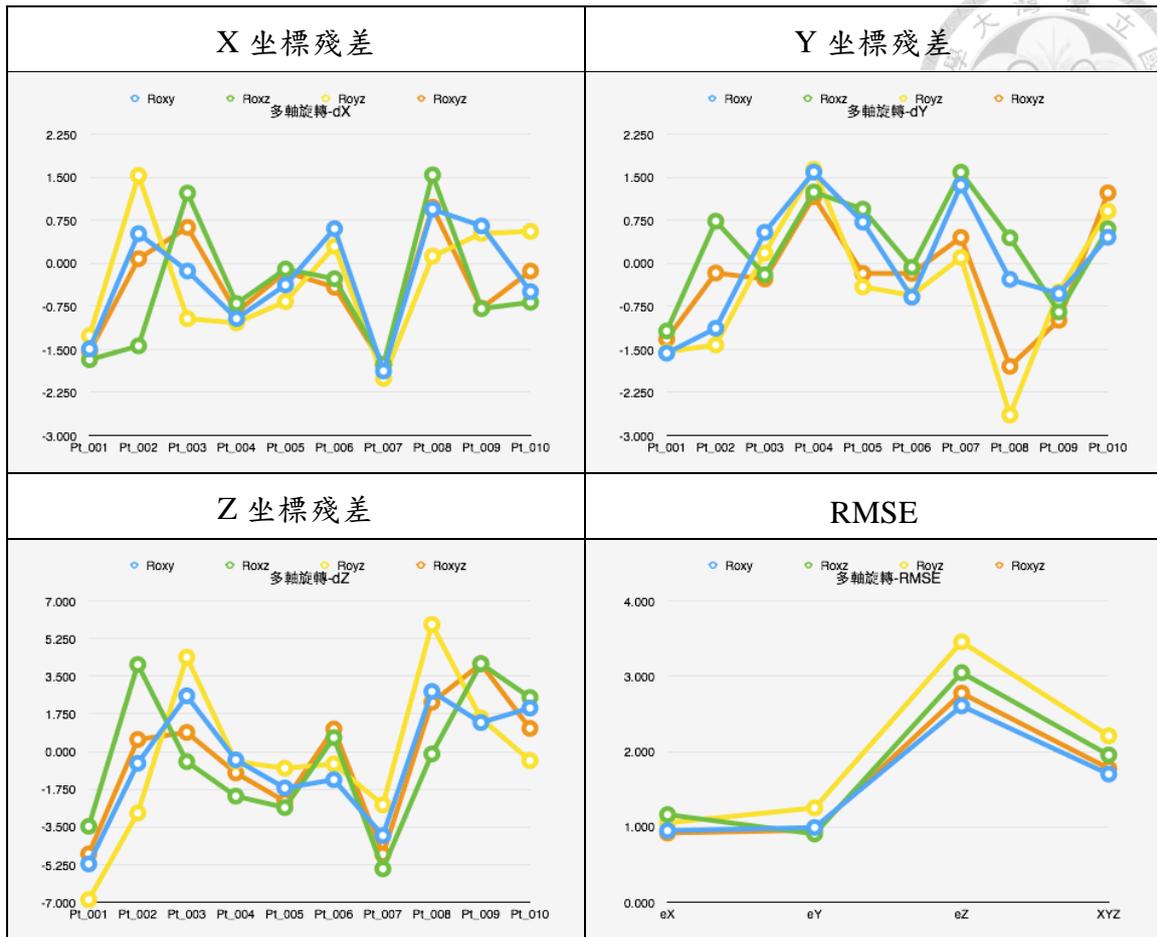


圖 5-14 多軸影像旋轉解算檢核點坐標成果誤差分佈折線圖-必要矩陣。

(單位：公尺)

由殘差分佈圖（圖 5-15），對三軸旋轉的成果與三組兩軸旋轉的成果比較，在高程殘差部份，對 X、Z 軸旋轉的檢核點成果與對 Y 軸解算成果相似，對 Y、Z 軸旋轉的檢核點解算成果則與對 X 軸的解算成果相似，但誤差量相較之下較大，最後，對 X、Y 軸旋轉的檢核點誤差分佈與對三軸旋轉相似，由圖中可知同時對 Y 軸與 Z 軸旋轉的情況下會有較大的誤差。

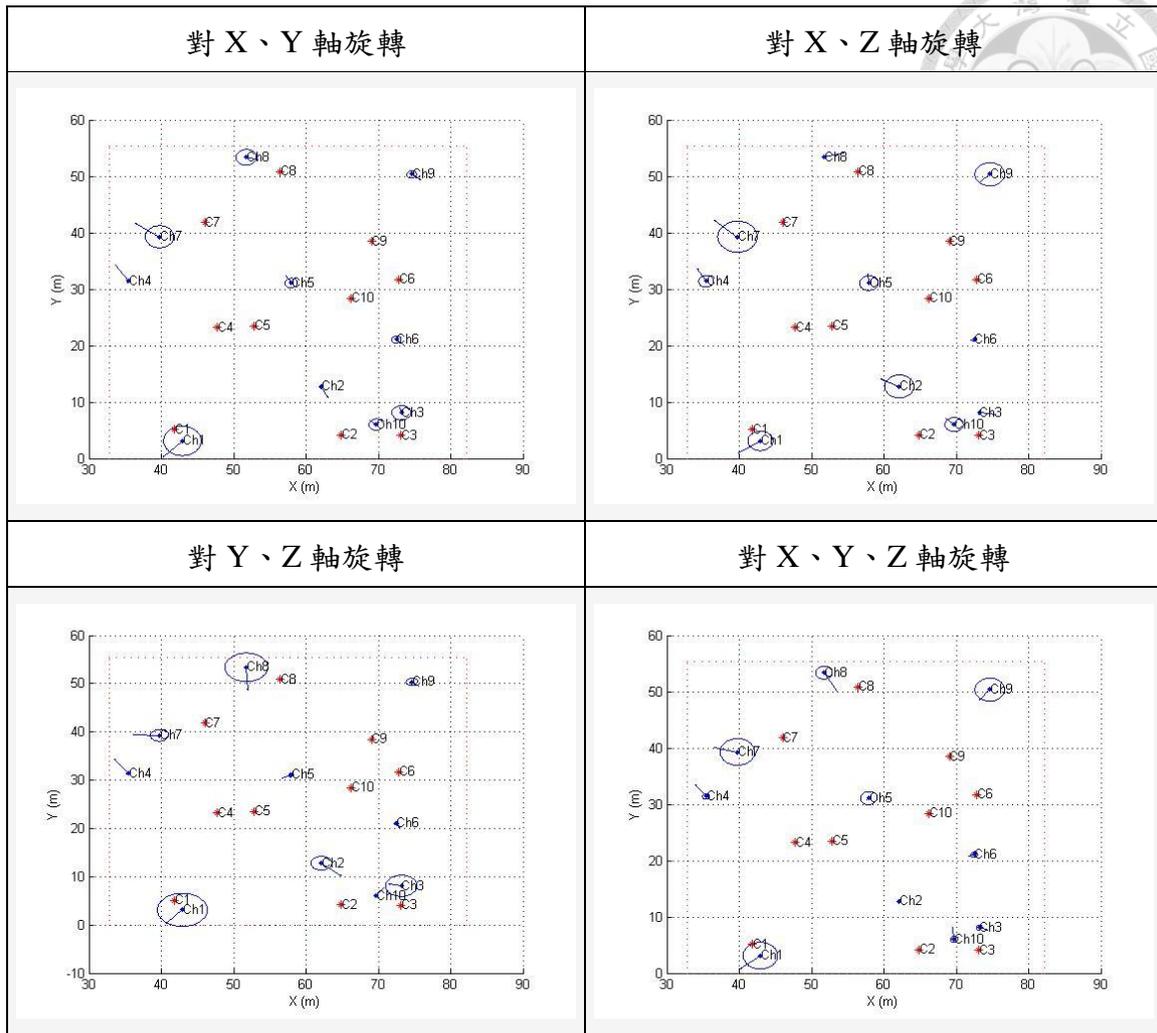


圖 5-15 多軸旋轉影像解算檢核點坐標殘差分佈圖-必要矩陣。

5-3-3 綜合比較

將共線式與必要矩陣方法對旋轉影像的解算成果以 RMSE 進行分析，根據表 5-9 與表 5-10，可發現不論是單軸旋轉的情況或是多軸旋轉的影像，兩種方法解算的檢核點成果都相似，考量到解算過程可能產生的合理誤差，僅能說明兩種方法都可適用於旋轉影像的解算。

表 5-9 檢核點坐標解算 RMSE 比較表-影像旋轉。(單位：公尺)

ID	RoX		RoY		RoZ	
	共線式	電腦視覺	共線式	電腦視覺	共線式	電腦視覺
RMSE-X	1.039	1.015	1.046	1.031	1.199	1.188
RMSE-Y	0.967	1.007	1.028	1.004	1.108	1.089
RMSE-Z	2.975	2.924	3.053	3.002	3.165	3.216
RMSE	1.903	1.879	1.955	1.922	2.056	2.077

表 5-10 檢核點坐標解算 RMSE 比較表-影像旋轉 (續)。(單位：公尺)

ID	RoXY		RoXZ		RoYZ		RoXYZ	
	共線式	電腦視覺	共線式	電腦視覺	共線式	電腦視覺	共線式	電腦視覺
RMSE-X	0.947	0.950	1.180	1.163	1.074	1.053	0.944	0.918
RMSE-Y	0.909	0.992	0.892	0.907	1.276	1.252	0.873	0.958
RMSE-Z	2.562	2.607	3.082	3.049	3.505	3.459	2.926	2.776
RMSE	1.662	1.701	1.974	1.955	2.241	2.209	1.845	1.776

繪製 RMSE 為折線圖 (圖 5-16、5-17)，可發現兩種方法的 RMSE 分佈情況相似，皆在高程方向有較高的 RMSE，雖然兩種方法在計算過程中有差異，共線式以直接定位的後方交會解算方位參數與前方交會求解檢核點坐標，必要矩陣方法以基礎矩陣及必要矩陣求解相對方位，再以三維仿射轉換進行絕對定位，但兩種方法在影像旋轉的情況下解算成果品質相近，且各種旋轉情況的解算成果沒有顯著差異。

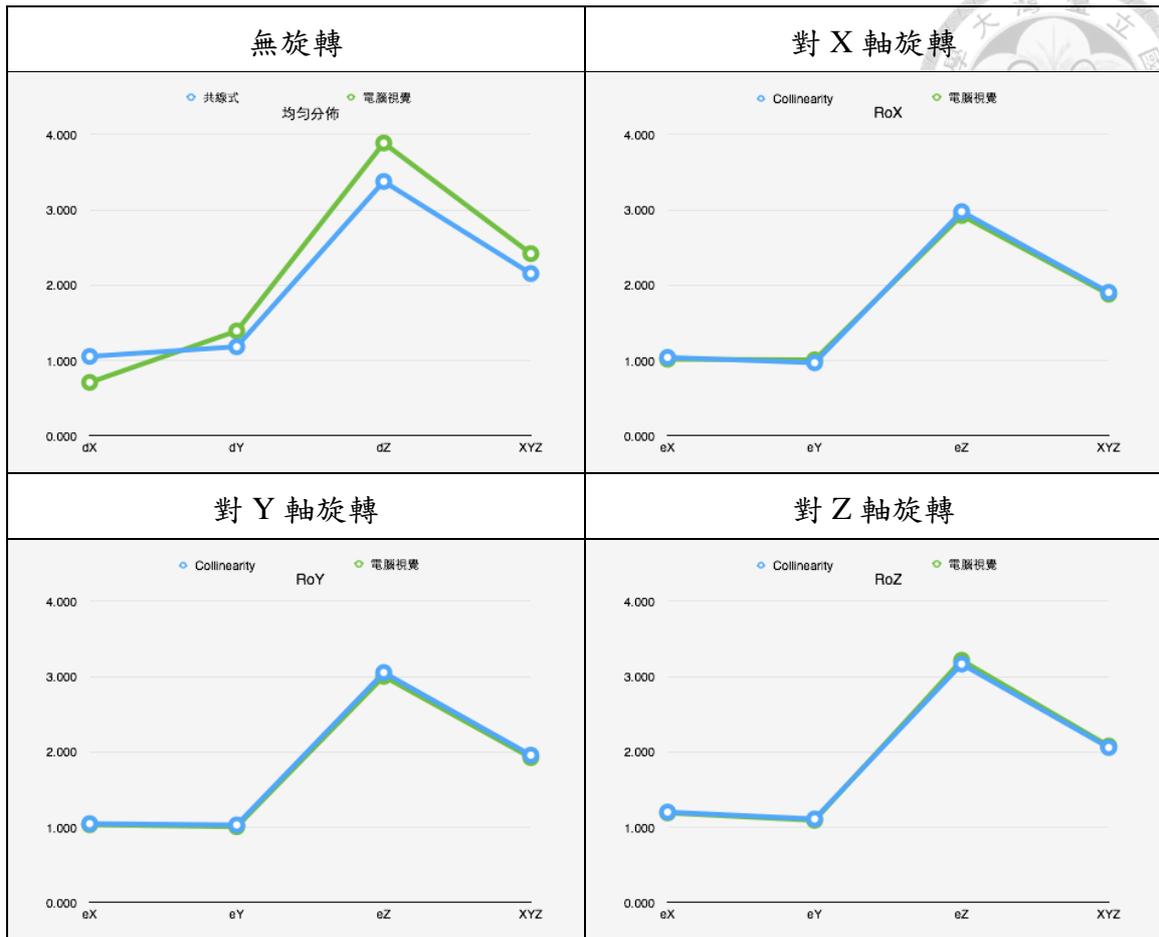


圖 5-16 檢核點坐標解算 RMSE 折線圖-影像旋轉。(單位：公尺)

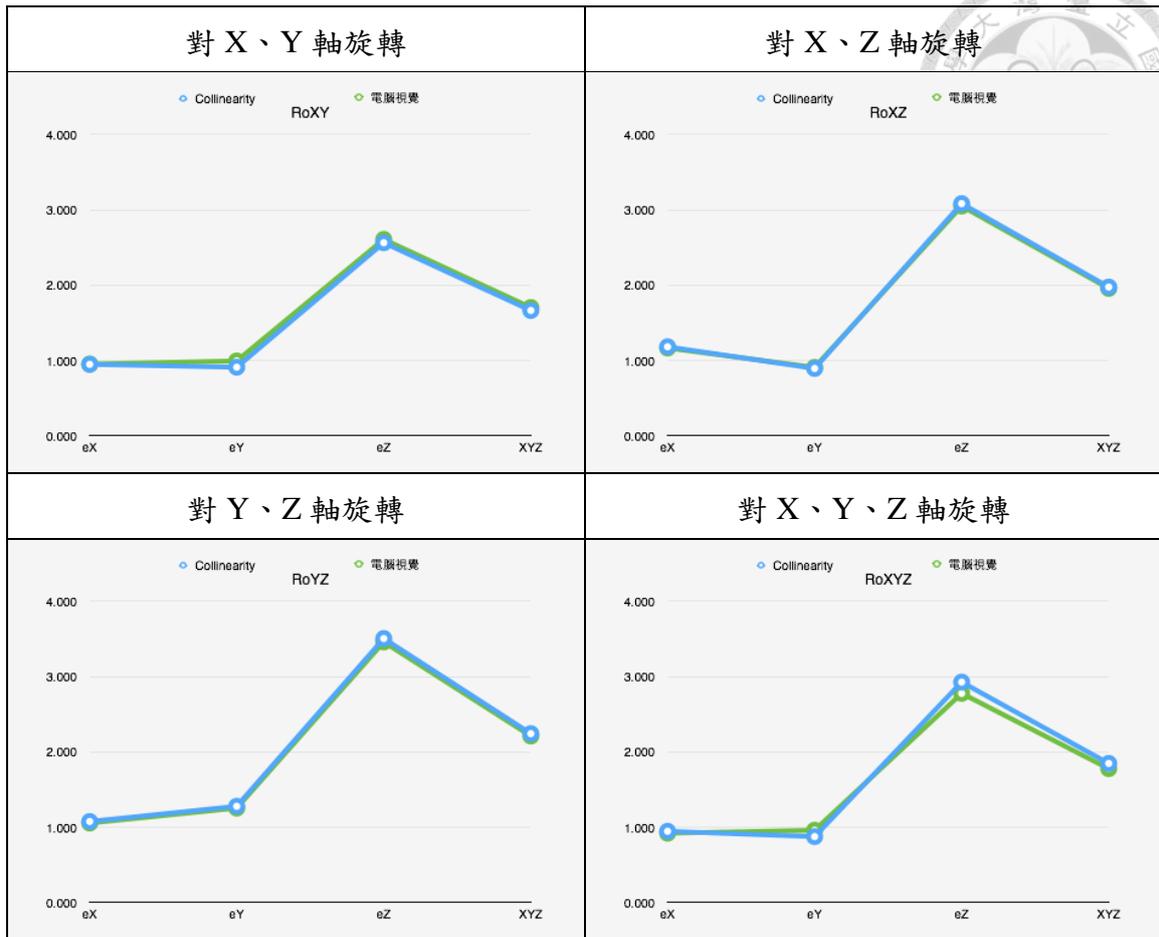


圖 5-17 檢核點坐標解算 RMSE 折線圖-影像旋轉 (續)。(單位：公尺)



六、結論與建議

本研究根據實際 UAS 航空攝影測量之影像特性，模擬一組立體像對，以共線式與必要矩陣進行方位解算，並以地面控制點分布與影像姿態旋轉作為變因，探討兩種影像解算方法的差異。由模擬實驗可歸納以下成果：

1. 地面控制點於影像重疊區域分布的情況，會影響共線式解算檢核點成果，點位分布愈均勻解算品質愈好。
2. 基於共面式的必要矩陣方法在各種地面控制點分佈情況的解算成果差異不大於 1 公釐，幾乎不受控制點分佈的位置影響。
3. 在控制點分佈均勻的情況下，共線式的解算成果比必要矩陣解算成果佳，其他控制點分佈情況則以必要矩陣成果較佳。
4. 影像對單一坐標軸為旋轉軸旋轉時，旋轉軸的差異對共線式具有相似的影響，而對多個坐標軸為旋轉軸旋轉時，則以對 X、Y 方向旋轉之影像解算成果較佳。
5. 必要矩陣方法在對單一坐標軸為旋轉軸旋轉時，不受旋轉軸差異影響，但多軸旋轉影像的成果為以對 X、Y 軸為旋轉軸旋轉之影像有最良好的解算成果。
6. 以共線式與必要矩陣方法解算姿態旋轉的影像，解算成果相似，在未加入 Z 軸旋轉的兩軸旋轉影像解算成果較好，其中又以共線式較佳。

對於本研究尚待改進之處，及未來可討論之議題，提出如下：

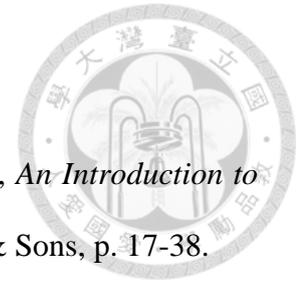
1. 本研究僅採用模擬影像及地面資料進行實驗，且假設地面控制點誤差極小，然而實際地表情形依據不同區域而有所差異，實際的地面控制資料也需要在解算過程中一併進行平差，因此後續可以實際資料進行解算與分析探討。
2. 本研究以雙像為例對攝影測量常用的共線式與電腦視覺領域基於核幾何的必要矩陣方法進行探討，而在空中攝影測量實際運作過程，應有大量的影像待求解，尤以 UAS 攝影測量為大宗，是以可將兩種方法以光束法平差對多張影

像進行求解後分析。

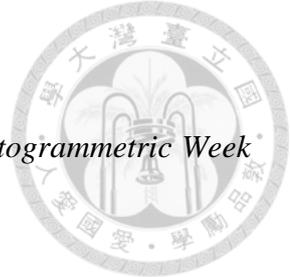
3. 本研究僅針對攝影測量中的共線式與電腦視覺的必要矩陣進行討論，但攝影測量中的共面式亦為常用方法，電腦視覺除必要矩陣外，可透過基礎矩陣方法或直接線性方法求解，亦可作為比較分析的議題。



參考文獻



- Cyganek, B. and J. P. Suebert, 2009. 2D and 3D Vision Formation, *An Introduction to 3D Computer Vision Techniques and Algorithms*, John Wiley & Sons, p. 17-38.
- Dowling, T. I. and J. C. Gallant, 2013. High Resolution DEMs from Unmanned Aerial Vehicles, *MODSIM 2013*, p. 1603-1609.
- Eisenbeiß, H., 2009. UAV Photogrammetry, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, pp. 203.
- Förstner, W., 2002. Computer Vision and Photogrammetry – Mutual Questions: Geometry, Statistics and Cognition, *International Symposium Photogrammetry meets Geoinformatics, 17. April 2002*.
- Fraser, C. S. and S. I. Granshaw, 2015. Computer Vision and Photogrammetry: Interaction or Interspection, *The Photogrammetric Record*, 30(149): 3-7.
- García-Gago, J., D. González-Aguilera, J. Gómez-Lahoz and J. I. San José-Alonso, 2014. A Photogrammetric and Computer Vision-Based Approach for Automated 3D Architectural Modeling and Its Typological Analysis, *Remote Sensing*, 2014, 6, 5671-5691.
- Hartley, R. and J.L. Mundy, 1993. The Relationship between Photogrammetry and Computer Vision, *SPIE93-photogrammetry*, p.92-105.
- Hartley, R., R. Gupta and T. Chang, 1992. Stereo from Uncalibrated Cameras, *IEEE Computer Vision and Pattern Recognition*, p.761-764.
- Longuet-Higgins, H. C., 1981. A Computer Algorithm for Reconstructing a Scene from Two Projections, *Nature*, vol. 293, p. 133-135.
- Mancini, F., M. Dubbini, M. Gattelli, F. Stecchi, S. Fabbri and G. Gabbianelli. 2013. Using Unmanned Aerial Vehicles (UAV) for High-Resolution Reconstruction of Topography: The Structure from Motion Approach on Coastal Environments, *Remote Sensing*, 2013,



5, 6880-6898.

Mayr, W., 2013. Unmanned Aerial Systems-for the Rest of Us, *Photogrammetric Week 2013*, p. 151-163.

Neitzel, F. and J. Klonowski, 2011. Mobile 3D Mapping with a Low-Cost UAV System, *International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, Vol. XXXVIII-1/C22, 2011*.

Ryan, J. C., A. L. Hubbard, J. E. Box, J. Todd, P. Christoffersen⁴, J. R. Carr, T. O. Holt, and N. Snooke, 2015. UAV Photogrammetry and Structure from Motion to Assess Calving Dynamics at Store Glacier, a Large Outlet Draining the Greenland Ice Sheet, *The Cryosphere*, 9, 1-11.

Sauerbier, M., E. Siegrist, H. Eisenbeiß and N. Demir, 2011. The Practical Application of UAV-Based Photogrammetry Under Economic Aspects, *International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, Volume XXXVIII-1/C22, 2011*.

Snavely, N., S. M. Seitz and R. Szeliski, 2007. Modeling the World from Internet Photo Collections, *Int J Computer Vis*, DOI 10.1007/s11263-007-0107-3.

Szeliski, R., 2010. Computer Vision: Algorithms and Applications, E-book's Web: <http://szeliski.org/Book/>.

Westoby, M. J., J. Brasington, N. F. Glasser, M. J. Hambrey and J. M. Reynolds, 2012. Structure-from-Motion Photogrammetry: A Low-Cost, Effective Tool for Geoscience Applications, *Geomorphology*, 179:300-314.

Zhang, Ch. and Wanqiang Yao, 2008. The Comparisons of 3D Analysis between Photogrammetry and Computer Vision, *ISPRS 2008 Congress, Vol. 37, Part B3b, Commission III*, Chen/Jiang/Förstner(Eds.), Beijing, China, pp. 33-36.

李昆霖，2001。基本矩陣之最佳化與歐幾里德重建，碩士論文，國立交通大學資



訊科學研究所，pp. 79。

李家欣，2007。多視點輔助定位系統，碩士論文，國立台灣科技大學機械工程系，pp. 77。

張柏仁，2005。基於視覺的智慧型指向系統，碩士論文，國立交通大學資訊科學研究所，pp. 44。

鄭張鎧，2003。透過兩個可自由旋轉及變焦的攝影機來重建歐幾里德空間，碩士論文，國立交通大學電機與控制工程研究所，pp. 55。

鄭傑文，2007。射影幾何於攝影測量之應用，碩士論文，國立台灣大學土木所，pp. 121。

賴文能、陳韋志，2010。淺談 2D 至 3D 視訊轉換技術，*影像與識別*，16(2):61-75。

謝幸宜，2011。以自率光束法提升四旋翼 UAV 航拍影像之定位精度，碩士論文，國立政治大學地政所，pp. 89。

蕭振洋、謝寶珊、冀樹勇，2011。應用非常規攝影量測評估國道 3 號 3.1 公里崩塌事件之土方量，*中華水土保持學報*，42(2): 120-130。