

國立臺灣大學理學院物理研究所

碩士論文

Department of Physics

College of Science

National Taiwan University

Master Thesis



短顆粒鍊在垂直振動場下的水平運動行為

The Horizontal Motion of a Short Granular Chain under
Vertical Vibrations

研究生：黃柏嘉

Po-Chia Huang

指導教授：蔡日強博士、黃仲仁、陳義裕 博士

Advisor: Jih-Chiang Tsai, Jung-Ren Huang,

Yih-Yuh Chen, Ph.D.

中華民國 105 年 8 月

August 2016



國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書

短顆粒鍊在垂直振動場下的水平運動行為
The horizontal motion of a short granular chain under
vertical vibrations

本論文係黃柏嘉君 (r03222077) 在國立臺灣大學物理學系、所完成之碩士學位論文，於民國 105 年 7 月 14 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

_____	陳美裕 (簽名)
(指導教授)	黃仲文
_____	蔡日強
_____	_____
_____	_____

誌謝



在研讀碩士的兩年中，我受到了許多人的幫助。感謝蔡日強博士指引我的研究方向，並教導我如何仔細地打磨物理思路。感謝黃仲仁博士教導我對數據細節的要求，以及如何處理這些實驗數據。感謝一路上實驗室的夥伴們，不論是面對物理的討論、實驗中的互相幫助，亦或是閒暇之餘的娛樂，都帶給我許多收穫。最後，要感謝我的家人對我一路走來的堅定支持，使我得以順利的完成學業。

研究生 黃柏嘉 僅誌於

中央研究院物理所、國立台灣大學物理所

中華民國一零五年八月

中文摘要



我們將短顆粒鍊置於可讓其作繞行與垂直運動的準二維環形軌道中，施加垂直振動場於其上，同時以兩台正交的攝影機側錄顆粒鍊的運動。我們發現，短顆粒鍊在垂直振動場下的水平運動與其形狀有密切的關聯：當顆粒鍊在震動週期中維持棒狀均勻地直上直下時，其位移為緩慢的隨機漫步；當顆粒鍊在震動週期中一端翹起時，其會沿著翹起端的方向以定速前行；而當顆粒鍊在震動週期中兩端皆翹起時，其運動為超擴散運動，且其週期與週期間的運動有相當程度的關聯性。此外，顆粒鍊三形態的水平運動特性隨著實驗控制參數的改變大致相同。

關建字：顆粒鍊、(垂直)振動系統、運動形態的行為轉變、隨機漫步

Abstract



We put a short granular chain in a quasi-2D circular channel and apply a vertical sinusoidal vibration on it. We set up 2 side-viewing cameras with orthogonal orientation to record the motion of the chain and discover that the horizontal motion of a short granular chain is closely related with its shape in vibrating cycles. When the chain keeps rod-like shape during vibration cycles, it behaves like small step random walk; when one of the ends rises up during vibration cycles, the chain moves ballistically; when both of the ends rise up, the chain behaves as a larger step random walk, but its horizontal motions of adjacent vibration cycles are related. Moreover, the character of the horizontal motion of 3 states keep consistent while the control parameters change.

Key words : granular chain 、 (vertical) vibration 、 transition 、 random walk

目錄



論文口試委員審定書	ii
誌謝	iii
中文摘要	iv
ABSTRACT	v
目錄	vi
圖片錄目	ix
表格錄目	x
符號說明	xi
CHAPTER 1 緒論	1
1.1 隨機漫步介紹	1
1.2 歷史回顧	2
1.3 結構安排說明	7
CHAPTER 2 實驗架設與影像分析	9
2.1 實驗架設	9
2.1.1 系統設置	10
2.1.2 影像錄製	11
2.2 顆粒鍊定位	13
2.2.1 顆粒鍊的位置及位移	13
2.2.2 影像尺度量測	14
2.2.3 攝影重疊區域的銜接	16
2.2.4 空間精確度討論	17



2.3	形態 (STATE) 及區段 (INTERVAL) 定義	19
2.3.1	形態 (State) 定義	19
2.3.2	區段 (Interval) 定義	21
2.3.3	顆粒鍊行為概述	21
CHAPTER 3 水平運動與形態之關聯		24
3.1	基本分析	24
3.1.1	顆粒鍊軌跡 (Trajectories)	24
3.1.2	位移分佈直方圖 (Histogram)	25
3.1.3	方均位移 (Mean Square Displacement, MSD)	25
3.2	形態 0 的研究	27
3.2.1	顆粒鍊軌跡	27
3.2.2	位移分佈	28
3.2.3	方均位移	29
3.3	形態 1 的研究	31
3.3.1	顆粒鍊軌跡	31
3.3.2	位移分佈	32
3.3.3	方均位移	34
3.4	形態 2 的研究	35
3.4.1	顆粒鍊軌跡	35
3.4.2	位移分佈	36
3.4.3	方均位移	37
3.5	其他分析	38
3.5.1	位移延滯圖 (Lag plot)	38
3.5.2	位移與顆粒鍊兩端高度差關聯探討	40
3.5.3	位移—時距之散佈圖 (Scatter Plot)	42



3.6	小結.....	45
CHAPTER 4 控制參數的角色及其他評估.....		48
4.1	振動強度 (Γ)	48
4.1.1	Γ 對形態區段長度的影響.....	48
4.1.2	Γ 對位移分佈的影響.....	51
4.1.3	Γ 對方均位移的影響.....	52
4.2	顆粒數 (N)	53
4.2.1	顆粒數對形態分佈的影響.....	54
4.2.2	顆粒數對位移分佈的影響.....	55
4.2.3	顆粒數對方均位移的影響.....	57
4.3	系統不對稱性的影響評估.....	58
4.3.1	基板水平的影響評估.....	58
4.3.2	顆粒鍊的不對稱性.....	59
4.4	小結.....	60
CHAPTER 5 結果與討論.....		63
參考資料.....		64
附錄.....		66
附錄一 h_{cut} 對形態判定的影響.....		66
附錄二 線上附錄.....		67

圖片錄目



Figure 1-1 線性梯度場下顆粒鍊行為實驗示意圖.....	3
Figure 1-2 顆粒鍊形態轉換示意圖.....	4
Figure 2-1 實驗架設示意圖.....	9
Figure 2-2 實驗對象及儀器圖.....	11
Figure 2-3 攝影機及其架設示意圖.....	12
Figure 2-4 顆粒鍊定位示意圖.....	14
Figure 2-5 影像尺度測量示意圖.....	15
Figure 2-6 顆粒鍊銜接示意圖.....	17
Figure 2-7 像素與實際移動位移映射圖.....	18
Figure 2-8 顆粒鍊長度變化圖.....	19
Figure 2-9 顆粒鍊形態示意圖.....	20
Figure 2-10 區段定義示意圖.....	21
Figure 3-1 顆粒鍊型態與水平運動軌跡圖.....	24
Figure 3-2 不同形態位移分佈直方圖.....	25
Figure 3-3 形態 2 方均根位移圖.....	26
Figure 3-4 形態 0 軌跡圖.....	28
Figure 3-5 形態 0 的位移分佈圖.....	29
Figure 3-6 形態 0 方均位移圖.....	30
Figure 3-7 形態 1 軌跡圖.....	32
Figure 3-8 形態 1 的位移分佈圖.....	33
Figure 3-9 形態 1 的方均位移.....	34
Figure 3-10 形態 2 軌跡圖.....	35
Figure 3-11 形態 2 的位移分佈圖.....	36




Figure 3-12 形態 2 方均位移圖.....	37
Figure 3-13 形態的位移延滯圖.....	39
Figure 3-14 形態 1 與形態 2 顆粒鍊頭尾高度差與位移散佈圖.....	41
Figure 3-15 區段之位移—時距散佈圖.....	43
Figure 3-16 形態 2 的步伐散佈圖.....	44
Figure 4-1 顆粒鍊形態分布隨 Γ 的變化.....	49
Figure 4-2 三個形態區段不同 Γ 長度分佈圖.....	50
Figure 4-3 三形態不同 Γ 的位移分佈圖.....	51
Figure 4-4 方均位移隨 Γ 的變化.....	52
Figure 4-5 顆粒鍊形態分布隨 Γ 的變化.....	54
Figure 4-6 形態位移分佈隨著 N 的變化.....	56
Figure 4-7 三個形態方均位移隨著顆粒數的變化.....	57
Figure 4-8 振動台的不對稱性評估.....	59
Figure 4-9 顆粒鍊的不對稱性評估.....	60
Appendix 1 h_{cut} 對形態判定的影響.....	66

表格錄目

表 3-1 不同 t_L 所得到的區段數目.....	27
------------------------------	----

符號說明



d	顆粒鍊的金屬球直徑，約為 2.4mm
s	顆粒鍊相鄰兩顆金屬球的距離， $s \leq 0.55\text{mm}$
N	顆粒鍊的金屬珠顆數，本論文中 N 為 5–8
g	重力加速度，本論文中為定值： $g=9.8\text{m/s}^2$
f	振動台基板的震動頻率，本論文中為定值： $f=25\text{Hz}$
Γ	無因次震動加速度，為振動台的峰值加速度除上重力加速度
A_0	底板震動振幅
fps	frame per second，為攝影機每秒拍攝的幀數
h_{cut}	形態判斷的閾值，我們所選用的 $h_{cut} = d/4$ 。
$x(t)$	顆粒鍊質心在時間 t 時所在的位置，單位為 mm
Δt	時間間隔，在本論文中，以震動週期 (cycles) 為單位。
r	壓克力軌道半徑，為 112.3mm
θ	顆粒鍊質心和軌道圓心連線與參考點的夾角，同時有紀錄顆粒鍊的環繞數 (winding number)
Δh_n	顆粒鍊第 n 顆金屬球與顆粒鍊中心的高度差
t_L	計算方均位移時，用以統計的區段持續時間下限
α	方均位移在雙對數作標用直線擬合的斜率： $\text{MSD} \propto \Delta t^\alpha$
R	相關係數 (Correlation coefficient)
n	形態 2 區段平滑化 (smoothing) 的跨度 (span)





Chapter 1 緒論

在這篇論文中，我們將短顆粒鍊置於施加垂直振動場的環形軌道上，發現其水平運動為無序地隨機漫步 (Random Walk)。而再進一步透過外加的側拍攝影機同步紀錄顆粒鍊在振動週期中的形狀後，我們發現顆粒鍊的水平運動與其形狀有密切的關聯。我們觀察顆粒鍊長時間的統計行為，並依據形狀來研究顆粒鍊的水平運動。並透過研究顆粒鍊水平運動的軌跡 (Trajectories)，位移分佈以及方均位移 (Mean Square Displacement, MSD) 等參數來描述水平運動的特性。我們同時比較不同形態間這些參數的改變，以進一步了解水平運動與形態之間的關聯性。

1.1 隨機漫步介紹

隨機漫步 (Random walk) 在物理學中是一門重要且應用廣泛的的領域。該領域的發展開始於西元 1828 年，Robert Brown 在透過顯微鏡研究水面上花粉的運動時，發現到這些花粉在做隨機運動。這種花粉的隨機運動便因此被命名為布朗運動 (Brownian Motion) (Brown, 1828)，隨後在 1905 年時，Albert Einstein 依據流體分子的熱擾動提出了解釋布朗運動的模型 (Einstein, 1905)。巧合的是，Karl Pearson 於同一年 Nature 期刊上提出了隨機漫步這個概念 (Pearson, 1905)，他用這個辭彙來描述一個簡單的模型：一物體在每一個固定的時間間格中依某任意方向移動一固定距離。在這之後，許多數學家與物理學家投入隨機漫步的研究。而現今，隨機漫步這個辭彙在物理學上泛指一物體的運動軌跡由一系列隨機步伐 (step) 所構成，其中每一步前進的方向是隨機的，步伐大小可為定值，也可為隨機數值 (Li, Nørrelykke, & Cox, 2008)。

一描述隨機漫步的常見指標為方均位移 (MSD) 隨時間增加的趨勢 (Metzler & Klafter, 2000)： $\langle \Delta x(t)^2 \rangle \sim Kt^\alpha$ ，其中 $\Delta x(t)$ 為物體在時間 t 與時間 0 的位移， K

為常數。布朗運動的方均位移其 α 值等於 1，稱為標準擴散 (Normal Diffusion)。當系統的方均位移 α 值大於 1 時，稱為超擴散現象 (Superdiffusion)，最早於西元 1926 年 Richardson 於研究大氣紊流時所觀察到 (Richardson, 1926)。另外，當系統的方均位移 α 值小於 1 時，則稱為次擴散現象 (Subdiffusion)。解釋次擴散現象的重要數學模型為連續隨機漫步 (Continuous Time Random Walk)，是由 Montroll 和 Scher 在研究非晶形半導體的暫態光電流的運送時所提出 (Scher & Montroll, 1975)。

1.2 歷史回顧

此論文的研究起源為西元 2014 年實驗室的一項專題 (Lin et al., 2014)：我們將短顆粒鍊放在一維金屬軌道上，在軌道一端固定的情況下，在另一端給予固定強度的垂直式簡諧震盪 (Harmonic Oscillation)，如此，我們便製造出一維的線性梯度場，如 Figure 1-1 (a) 所示。我們研究顆粒鍊在這樣的線性梯度場下的運動行為，發現若是改變顆粒鍊在軌道上的初始位置，使其從固定端慢慢移動至振動端時，顆粒鍊的運動行為會在軌道上某個位置發生轉變，會由原先緩慢的往固定端爬行轉變成快速往振動端移動，如 Figure 1-1 (b) 所示。此現象會隨著振動強度的改變而改變，以顆粒鍊顆粒數等於 8，振動頻率為 25Hz 為例，當振動端振動強度小於 1.65g，g 為重力加速度，此時，顆粒鍊的運動行為只會有往固定端爬行的行為；而當振動端的振動強度大於 1.65g 時，顆粒鍊會在軌道上振動強度約為 1.65g 處發生運動行為轉變，在振動場小於 1.65g 處，顆粒鍊會往固定端緩慢爬行，而在振動場大於 1.65g 處，顆粒鍊會往振動端快速移動。

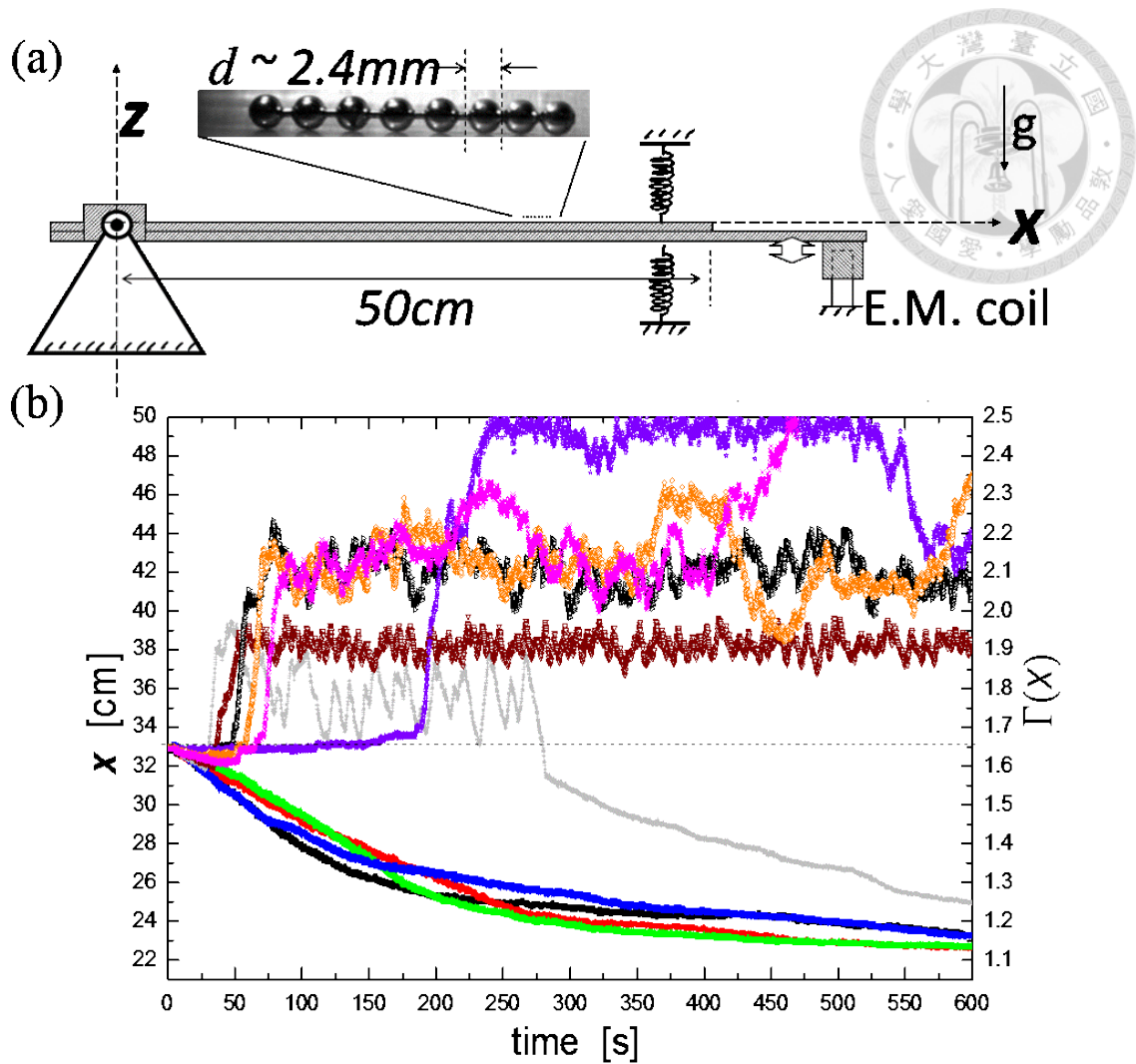


Figure 1-1 線性梯度場下顆粒鍊行為實驗示意圖

(a) 為 W.T. Lin、Y.C. Sun、C.C. Chang、Y.C. Lin、C.W. Peng、W.T. Juan 以及 J.C. Tsai 研究團隊在 2014 所進行顆粒鍊在線性梯度場下的運動行為的實驗架設(Lin et al., 2014)。軌道一端為固定端，另一端以小型振動台施加正弦波於其上。(b) 為在某一典型震動強度下的數次實驗的顆粒鍊軌跡。顆粒鍊皆由 33cm 處開始實驗。

這個現象激起我們進一步研究其成因的興趣。為了簡化現象，我們將顆粒鍊放在壓克力製作的水平軌道上，並對軌道施加均勻的振動場。我們改變振動強度，並透過外加的側邊拍攝攝影機來觀察顆粒鍊的運動行為(Sun et al., 2016)。我們設計兩種不同的軌道，一是短直軌道，一是環形軌道，分別觀察顆粒鍊在

振動週期內的微觀行為以及長時間運動的統計行為，Figure 1-2 (a) 即為實驗所使用的短直軌道示意圖所示。

我們發現，隨著振動強度逐漸增加，顆粒鍊在振動過程中的彎曲程度也會逐漸增加，亦即顆粒鍊會由均勻直上直下的形態 0 轉變成一端翹起的形態 1 或是頭尾兩端同時翹起的形態 2。而且同時，在足夠強的振動場下，顆粒鍊會在這些不同的形態中做自發性的形態轉變，如 Figure 1-2 (b)、(c) 所示。以顆粒數為 8，振動頻率為 25Hz 為例，顆粒鍊的形態轉變區間所對應到的振動強度約為 1.65g—1.70g，當振動程度小於 1.65g 時，顆粒鍊會長時間處於以形態 0，而當振動強度曾增加至 1.65g 時，形態 1 及形態 2 出現的比例會增加，同時顆粒鍊也會在三種形態做轉變。這可以解釋在我們之前的實驗中，顆粒鍊在一維梯度場下的所觀察到的現象。

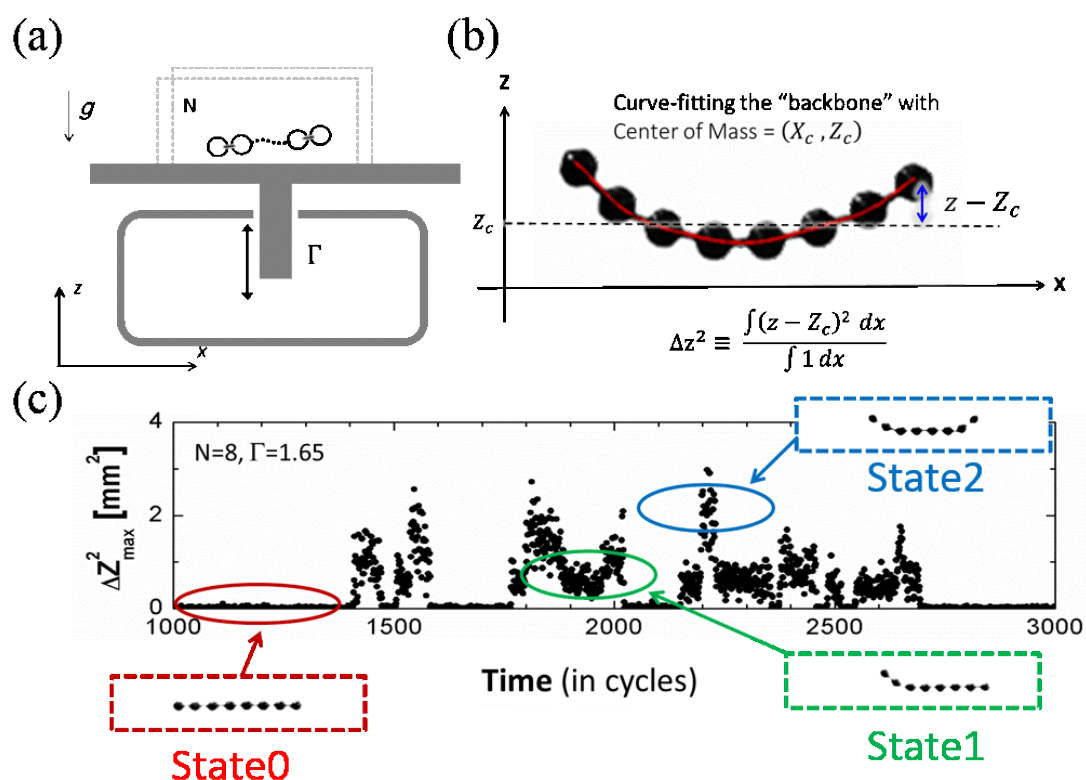


Figure 1-2 顆粒鍊形態轉換示意圖

(a) 為 Y.C. Sun、H.T. Fei、P.C. Huang、W.T. Juan、J.R. Huang 以及 J.C. Tsai 研究團隊在 2016 所進行顆粒鍊在垂直震動場下的形態變化的

短直軌道實驗架設(Sun et al., 2016)。(b) 為顆粒鍊彎曲程度的定義，紅色曲線為顆粒鍊以曲線擬合的結果，並以此計算顆粒鍊的 Δz^2 。計算公式如圖所示。(c) 為 $N=8$ 、 $\Gamma=1.65$ ， Δz^2 隨時間的變化，不同形態會對應到不同的 Δz^2 值。



而在過往的文獻中，已有許多人研究過顆粒材料在垂直振動場下的水平運動行為。Kevin Safford、Yacov Kantor、Mehran 及 Arshad Kudrolli 的研究團隊以顆粒鍊模擬聚合物的行為(Safford, Kantor, Kardar, & Kudrolli, 2009)：他們將一條顆粒數從 1 到 1024 的顆粒鍊放在鋪有一層金屬小球的平面上，施加一垂直振動場並觀察顆粒鍊的行為，同時用有機聚合物數值模型與實驗作比較。他們依據顆粒鍊首尾兩端的平均偏折角度來為特徵長度 (persistent length) 下定義，並得到顆粒鍊的特徵長度約為 9.5 倍的小球直徑。他們也透過攝影機研究顆粒鍊質心的運動，並計算其方均位移，發現長顆粒鍊在粗表面上為標準擴散，且其擴散速度隨著顆粒數越多而越慢。

KuanHua Chen、Y.C. Chou 及 Kiwing To 的研究團隊也以顆粒材料模擬驅動蛋白 (kinesin) 的表現行為(Chen, Chou, & To, 2013)。他們將一條長顆粒鍊置於棘齒表面的壓克力軌道上，並在顆粒鍊尾端以細線繫上負重，施加垂直振動場於系統。棘齒的兩斜面並不對稱，所以顆粒鍊在振動場會以固定速率沿著斜面斜率較小側移動。他們發現顆粒鍊的負重能力大致隨著長度成正比，但其移動速度基本上不隨長度而改變。只有當顆粒鍊短到會在振動週期中整條顆粒鍊離開基板時，其速度才會偏離定值。而顆粒鍊的移動速度隨振動強度的變化可分為三個明顯的區段：在振動強度介於 1.8g—3g 的區間內，顆粒鍊的速度會快速的增加；在大於 3g 時會趨近於一定值，在小於 1.8g 時，顆粒鍊幾乎沒有往前移動的趨勢。

V. Yadav 及 A. Kudrolli 的團隊則把顆粒數為 2—5 的許多顆粒鍊放在鋪有一層小球的水平圓盤上，施加垂直振動場，並觀察顆粒鍊的擴散現象隨著容積比

(volume fraction) 不同的變化(Yadav & Kudrolli, 2012)。他們將顆粒鍊用直線擬合，並將顆粒鍊的擴散依擬合出來的直線區分為平移擴散及轉動擴散，分別對應到顆粒鍊沿著直線移動及垂直直線移動。他們發現，平移擴散常數及轉動擴散常數兩者都會隨著顆粒數增加或是容積比的增加而減少。

除了研究顆粒鍊在粗表面上的水平運動行為外，近來也有許多實驗是透過給予顆粒材料結構上的不對稱性，使其在垂直振動場下有一固定的移動方向，這些有固定移動方向的物質又被稱為是自走性物體 (self-propelled particles)。如 Arshad Kudrolli、Geoffroy Lummy、Dmitri Volfson 及 Lev S. Tsimring 的研究團隊將許多自走性短棒放在被施予簡諧震盪的圓盤上，觀察這些短棒的群聚行為 (collective motion) (Kudrolli, Lumay, Volfson, & Tsimring, 2008)。或是 Arshad Kudrolli 的研究中，將自走性短顆粒鍊放在被施加簡諧震盪且表面鋪有一層小球的圓盤上，以研究這些顆粒鍊的擴散現象(Kudrolli, 2010)。短顆粒鍊一端繫上重物，也就是其在平行軸方向，有結構上的不對稱性。這導致其平行軸方向的方均位移在觀察時間足夠長的情況下會 $\propto \Delta t^2$ ；而其垂直軸方向的方均位移則 $\propto \Delta t$ 。但顆粒鍊整體的方均位移仍大致 $\propto \Delta t$ ，且隨著系統的容積比增加，由顆粒鍊會由標準擴散轉變為次擴散。

Julien Deseigne 及 Hugues Chaté 的研究團隊同樣研究自走性物體，但他們改為選擇外表具有對稱性的圓盤結構取代不對稱的短棒或是顆粒鍊(Deseigne, Dauchot, & Chaté, 2010)、(Deseigne, Leonard, Dauchot, & Chate, 2012)。他們將許多自走性圓盤置於花瓣狀的玻璃盤上，施加簡諧震盪於其上，並觀察圓盤的群聚現象隨著容積比的改變。

以上許多研究團隊的實驗雖然也都是研究顆粒材料在垂直振動場下的水平運動行為，但與我們的實驗與其不同之處在於，我們並沒有刻意外加不對稱性給系統，不論是基板的不對稱性或是顆粒鍊的不對稱性。

1.3 結構安排說明

此論文的第二章為實驗的設置以及影像分析的方式，同時也為顆粒鍊的形態下定義。第三章則是研究顆粒鍊形態所對應到的水平運動行為，我會先簡單概述用以討論水平運動的方法，並在之後的節數使用這些方法來仔細研究各個形態的差異。在第四章中，我會研究形態的水平運動特性隨著外部條件不同而產生的改變。最後第五章為結論。



Chapter 2 實驗架設與影像分析



2.1 實驗架設

本論文所使用的實驗架設同我們在 2016 Physics Review Letter 工作中所使用的(Sun et al., 2016)。為了研究短顆粒鍊在震動場下的表現，我們將短顆粒鍊置於固定於震動床上的環形軌道中，並透過攝影機錄製長時間的影像，架設如 Figure 2-1 所示。軌道的寬度僅略寬於顆粒球直徑，所以顆粒鍊的運動將被限制在此準二維 (quasi-2D) 系統中。我將在 2.1.1 仔細介紹整個實驗的架設，而在 2.1.2 介紹攝影機錄製影像的方法。

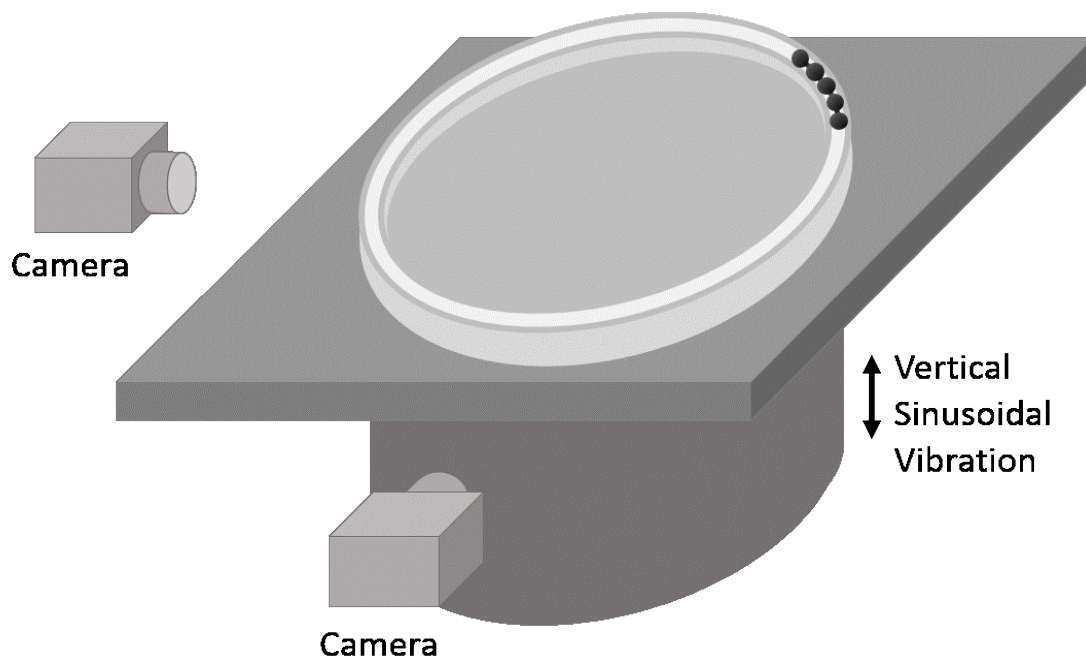


Figure 2-1 實驗架設示意圖

我們在垂直振動台上加裝一環形壓克力軌道，置入顆粒數為 5–8 的短鍊。同時，架設兩台攝影機側拍顆粒鍊的運動以獲得顆粒鍊的水平運動與其形狀的資訊。



2.1.1 系統設置

我所使用的短顆粒鍊是從市售的金屬長鍊自行剪取實驗所需要的長度，如 Figure 2-2 (a) 所示。2-2 (b) 則為金屬鍊的結構示意圖，金屬球直徑 d 約為 2.4mm，兩金屬球之間有短棒相連，此短棒限制金屬球之間的距離 $s \leq 0.55\text{mm}$ 。在剪裁金屬短鍊時，為使殘留在金屬球內的短棒部份盡可能的少，我將顆粒鍊拉至最長距離在予以剪裁。在此實驗中，顆粒鍊長度 N 為 5—8 顆。

短顆粒鍊所運行的環形軌道由壓克力製作而成，如 Figure 2-2 (c) 所示，軌道的內側的半徑為 110.8mm，外側的半徑為 113.8mm，軌道寬略大於一個金屬球，為 3mm。所以我使用內側半徑與外測半徑的平均，112.3mm 作為軌道半徑 r 。軌道壁同樣由透明壓克力製作而成，是為了能使用攝影機錄製金屬鍊的運動。而使用環形軌道的設計是為了近似無限長直軌道。

本實驗所使用的震動台為振儀科技 VS-1000VH，如 Figure 2-2 (d)，此震動台內部為電磁式馬達，可操作的位移範圍為 -12.5mm—12.5mm，頻率範圍則為 1—2400Hz。我在此論文中所使用的震動場皆為正弦波，並定義垂直振動強度 Γ 為最大加速度除上重力加速度，也就是：
$$\Gamma = \frac{A_0 \cdot (2\pi f)^2}{g}$$
。 A_0 是振動台振動振幅， f 是正弦波的頻率， g 是重力加速度。在此論文中，重力加速度設為定值：9.8m/s²。

我們同時在震動台上加裝 PCB Piezotronics 型號 J353B34 加速規，其靈敏度為 97.4mV/g。加速規會將震動台即時的加速度回傳給震動台控制器，使控制器能隨時調整輸出的電訊號以維持訊號的穩定。

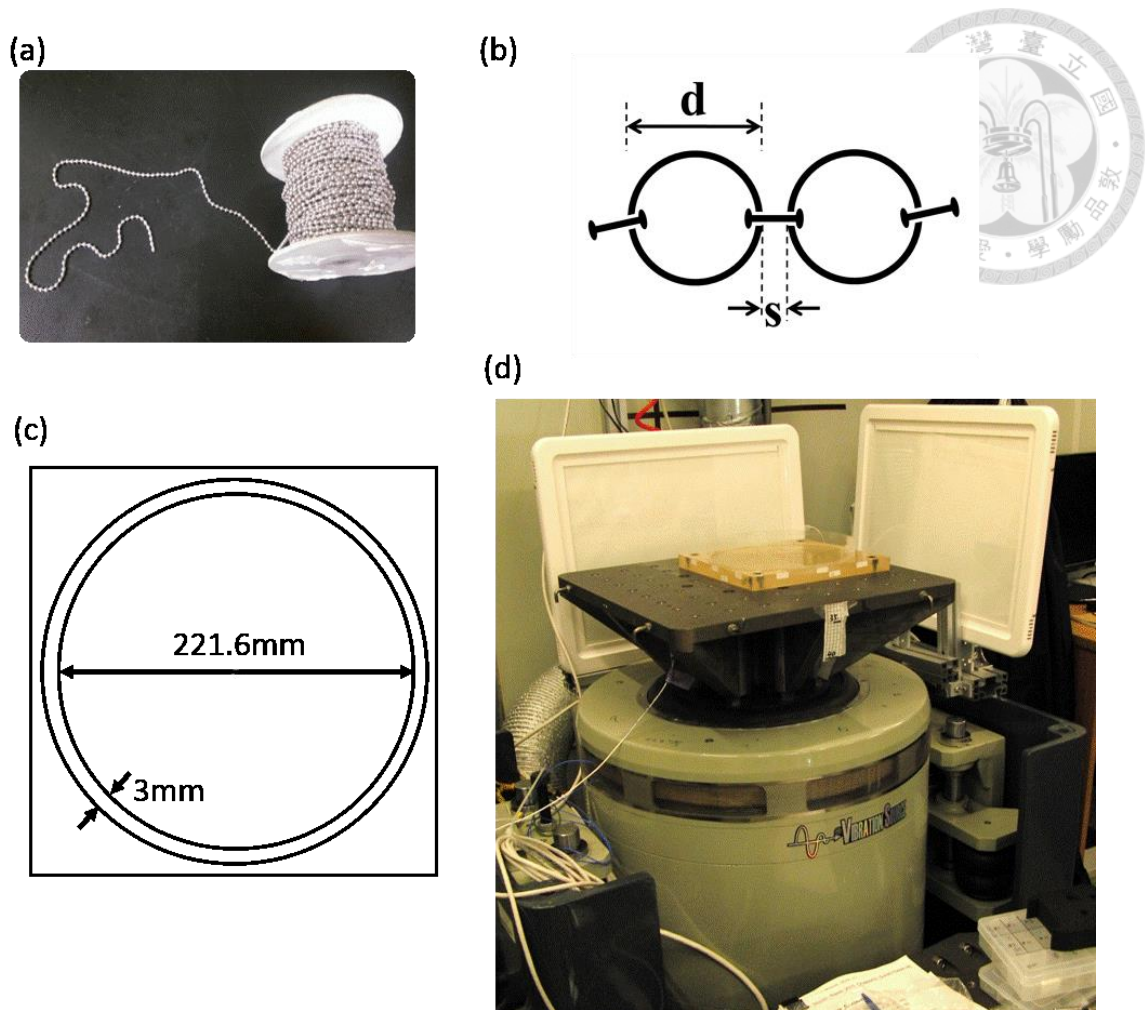


Figure 2-2 實驗對象及儀器圖

(a) 為實驗所使用的顆粒鍊圖。(b) 為顆粒鍊的結構示意圖，金屬小球的半徑 d 約為 2.4mm。兩金屬球間有可活動的短棒相連，此短棒限制兩金屬球間的距離 $s \leq 0.55\text{mm}$ 。(c) 為實驗所用壓克力軌道簡圖，軌道內側直徑為 221.6mm，軌道間距為 3mm，略大於金屬小球直徑。軌道壁同樣由壓克力製作而成，是為了能在側邊用攝影機拍攝顆粒鍊影像。(d) 為實驗所用振動台，是振儀科技 VS1000VH。此振動台內部為電磁式馬達，可操作的位移範圍為 -12.5mm—12.5mm，頻率範圍則為 1—2400Hz。

2.1.2 影像錄製

攝影機的架設如 Figure 2-3 (a) 所示，兩攝影機與環形軌道中心連線成直

角。所使用的兩台攝影機皆為 Phantom High Speed Cameras V7.3，如 Figure 2-3 (b) 所示。兩攝影機距離軌道約為 660mm，解析度皆為 800×600 像素，內部的感光元件大小為 $17.6\text{mm} \times 13.2\text{mm}$ ，內部記憶體大小為 4GB。在實驗中，我所使用的像素為 800×80 ，在此像素底下，攝影機最高每秒可錄製 41000 幀影像。兩台攝影機使用外部訊號驅動，以達到同步影像的目的。本論文中，攝影機拍攝頻率固定為 25fps，曝光時間為 $1/25\text{s}$ ，同時，所使用的時間單位為一個震動床的震動周期，即 0.04s 。

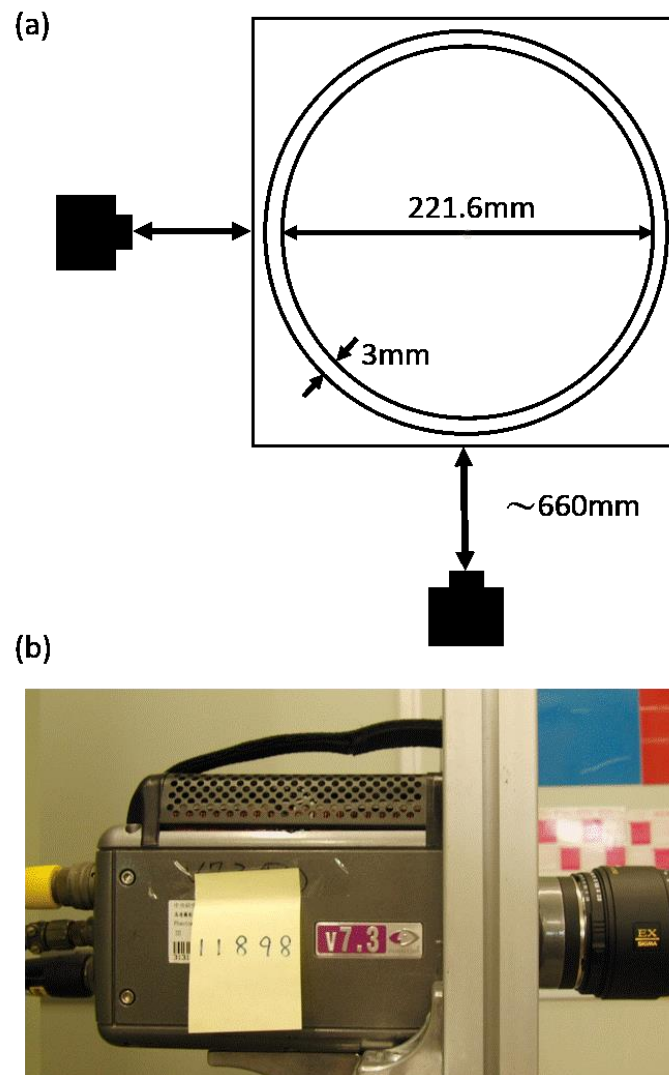


Figure 2-3 攝影機及其架設示意圖

(a) 為攝影機的架設示意圖，兩攝影機與環形軌道圓心連線成直角，同時，鏡頭離軌道大約 660mm。攝影機高度也調至與軌道同平面。

(b) 為攝影機圖，實驗中所使用的攝影機為兩台皆為 Phantom High

Speed Cameras V7.3，解析度為 800×600 像素，內部的感光元件大小為 17.6mm×13.2mm，內部記憶體大小為 4GB。



2.2 顆粒鍊定位

在使用兩台攝影機同時拍攝顆粒鍊後，我可以透過比對兩台攝影機的影像來得到顆粒鍊在軌道上的位置。顆粒鍊位置的時間單位為振動週期。

2.2.1 顆粒鍊的位置及位移

Figure 2-4 (a) 為顆粒鍊的定位示意圖，一號及二號攝影機及其所能拍攝到的軌道範圍分別以紅色、藍色標示。我以軌道上的一個定點作為座標 θ 的參考點，所以顆粒鍊的位置為 $x = r \cdot \theta$ ，顆粒鍊的位移則為 $\Delta x = r \cdot \Delta\theta$ ，其中 r 為軌道半徑，112.3mm。同時， θ 有記錄顆粒鍊的環繞數 (winding number)。

如 Figure 2-4 (a) 所示意，每台攝影機可同時記錄到軌道離攝影機最近的一側與離攝影機最遠的一側，所以我可以據此將軌道分成四個部分。而透過比較顆粒鍊在兩台攝影機上的位置，我可以確認顆粒鍊位於軌道四個部分中的哪一個部分，以 Figure 2-4 (b)、(c) 為例：(b)、(c) 分別為一號及二號攝影機在某一個時間點所拍攝到的影像，所以影像的左側對應到面像軌道的左方。而顆粒鍊位於一號攝影機視野的左方與二號攝影機視野的右方表示顆粒鍊位於軌道遠離二號攝影機的一側，位置大致如 (a) 所示。

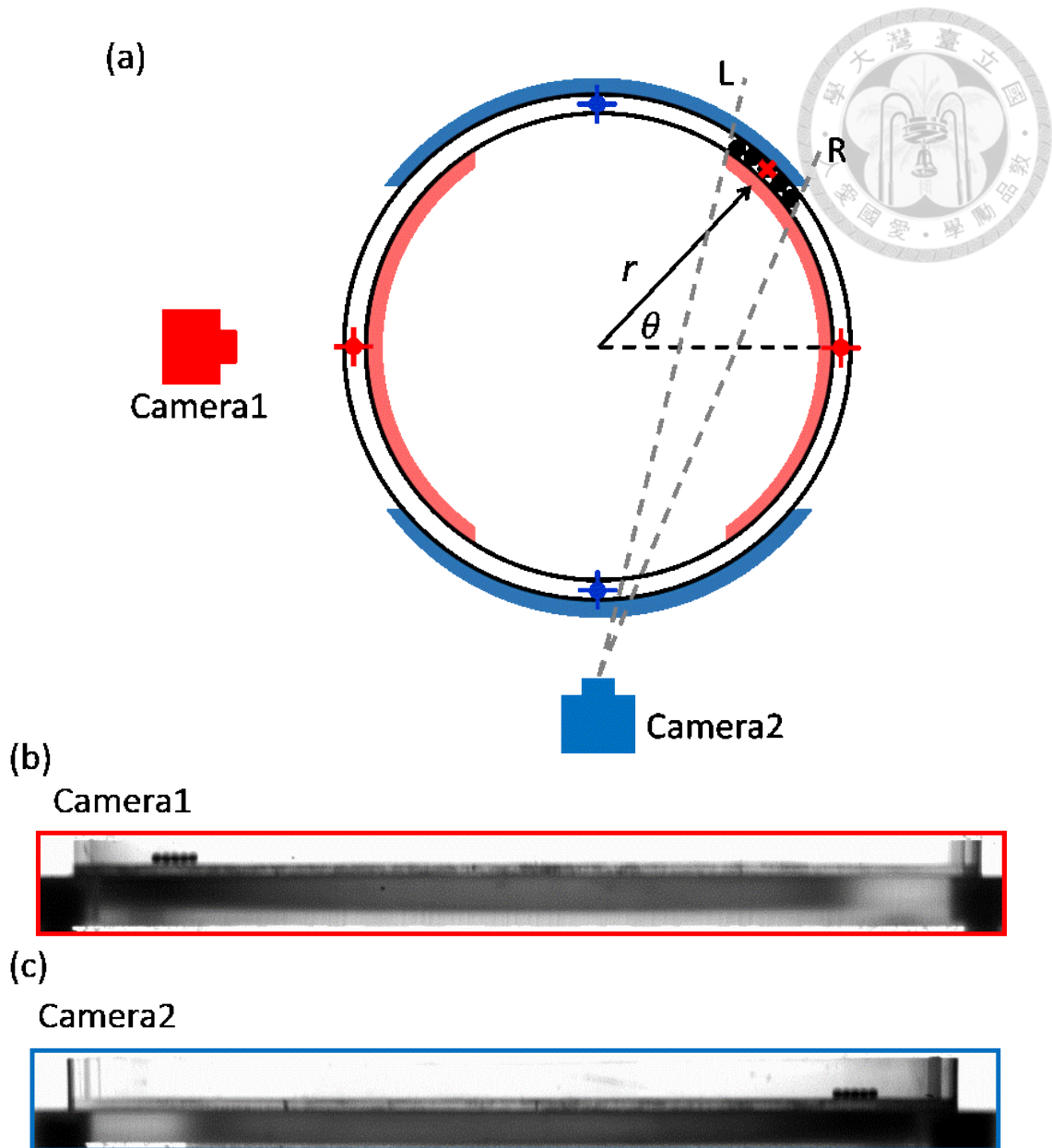


Figure 2-4 顆粒鍊定位示意圖

(a) 為顆粒鍊定位方法的示意圖，一、二號攝影機及其所能拍攝到的軌道部分標為紅、藍色。(b)、(c) 為一、二號攝影機在某個時間點所拍攝到的顆粒鍊影像。

2.2.2 影像尺度量測

在確認顆粒鍊位於軌道的哪一部分後，我可以透過量測影像的尺度來精確定位顆粒鍊的 θ 值，並得出顆粒鍊位置對時間的函數 $x(t)$ 。Figure 2-5 為影像尺

度測量的說明圖：Figure 2-5 (a) 我先將環形軌道標上 4 個等分環的標的，再將黑色透明方格紙貼在環形軌道內，方格紙的間格為 5.25mm，如 Figure 2-5 (b) 所示，並據此量出影像上每一點與標的的距離，進一步推算出這些點與作標參考點之間的弧度差。將此步驟對 4 個標的重複四次，再依據標的物彼此相距 90° 的關係，便能得到環形軌道上所有位置與其所對應到的影像像素的映射關係。

顆粒鍊質心的定義方式為攝影機影像上珠鍊的左極限像素與右極限像素的平均，如 Figure 2-5 (a) 與 2-5 (c) 所示，虛線 L 及虛線 R 分別代表攝影機所看到顆粒鍊的左極限與右極限。所以我先將左極限與右極限的像素作標取平均後，在映射回與參考點的弧度差，如此便能得到顆粒鍊的位置。但因為顆粒鍊所在位置與方格紙黏貼處仍有一小段距離，為此，我對得到的位置作了幾盒光學上的修正，詳見 Online Appendix。

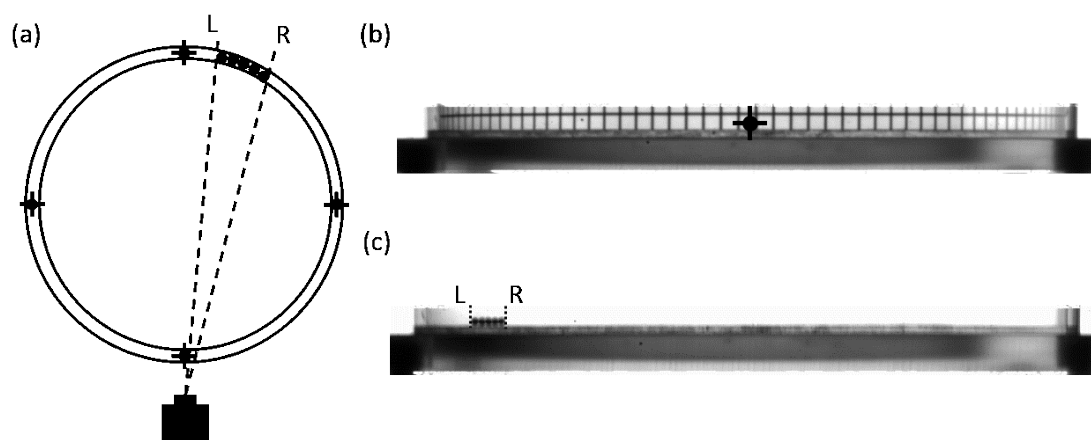


Figure 2-5 影像尺度測量示意圖

(a) – (c) 為影像尺度量測的示意圖。(a) 及 (b) 上的標的圖案代表我作在環形軌道上的標示，這四個標的四等分整個環形軌道。(a) 及 (c) 的虛線 L 及 R 表示攝影機看到珠鍊的左極限及右極限。(b) 則是黑色方格紙插在環形軌道內的攝影圖，格線間距為 5.25mm。



2.2.3 攝影重疊區域的銜接

在將軌道分成四個部分並分別得到顆粒鍊質心對時間的函數後，我便將這些片段依時間順序加以銜接。而在顆粒鍊從一台攝影機的視野換到另一台的過程中，兩台攝影機有同時記錄到顆粒鍊位置的重疊部分。但兩台攝影機所看到的顆粒鍊在映射回軌道位置時，會產生誤差，這會讓顆粒鍊的軌跡多出一個原本不存在的跳躍，如 Figure 2-6 所示。Figure 2-6 為顆粒鍊銜接的示意圖，為了減少位置上的一個突然的跳躍對位移的影響，我將重疊部分顆粒鍊的位置 $x(t)$ 以兩攝影機所記錄位置作線性內差：

$$\omega_1 = \frac{x_1(t_f) - x_1(t)}{x_1(t_f) - x_1(t_i)}, \quad \omega_2 = \frac{x_2(t) - x_1(t_i)}{x_2(t_f) - x_1(t_i)}, \quad t \in [t_i, t_f]$$

$$x(t) = \frac{\omega_1 x_1(t) + \omega_2 x_2(t)}{\omega_1 + \omega_2}$$

其中 t_i 、 t_f 為重疊部分開始與結束的時間，而記錄顆粒鍊的攝影機由 C1 換至 C2，所以 x_1 、 x_2 為 C1、C2 攝影機所記錄的顆粒鍊位置， ω_1 、 ω_2 為 x_1 、 x_2 在線性內差中所佔有的權重。所以 x_1 在線性內差中所佔的比例會逐漸減少，直到完全由 x_2 取代為止。兩攝影機的軌跡差落在 $\pm 2\text{mm}$ 內。

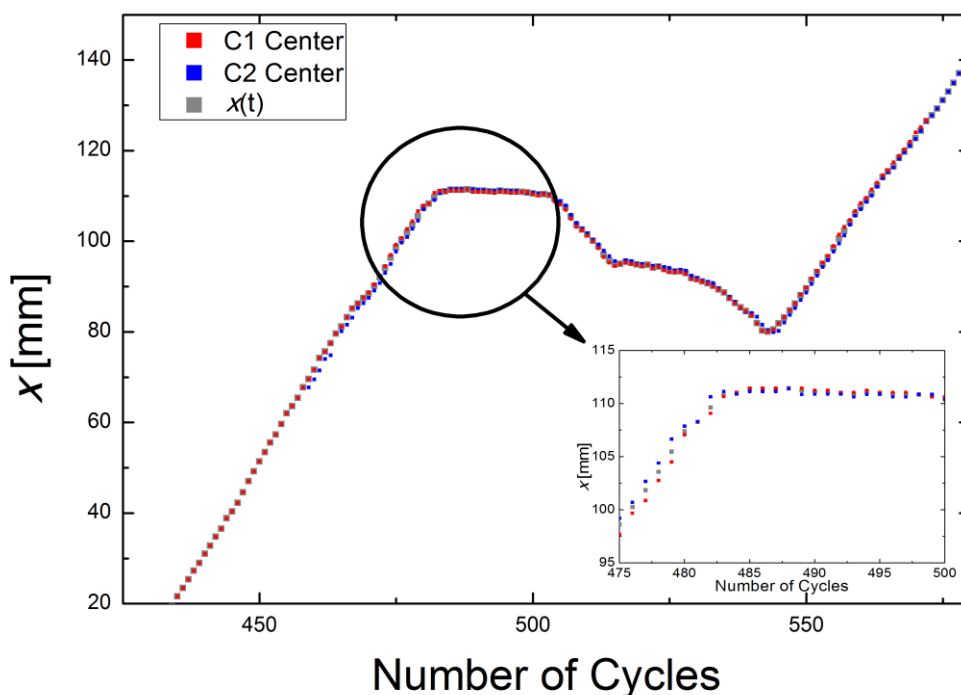




Figure 2-6 顆粒鍊銜接示意圖

顆粒數 $N=5$ ， $\Gamma = 1.60$ ，攝影機拍射頻率為 25fps。顆粒鍊位置大約在軌道上 $\pi/8$ 處。顆粒鍊由 C1 攝影機視野內換至 C2 攝影機，分別以紅色及藍色色標表示。顆粒鍊的位置函數由 C1 及 C2 所紀錄的位置做線性內差而得，以灰色色標表示。

2.2.4 空間精確度討論

顆粒鍊質心的精確度由兩個因素影響：攝影機影像的解析度及計算質心方法所造成的不確定性，其中，後者所造成的不確定性大於前者。

攝影機在水平方向有 800 個像素，但計算顆粒鍊位置的過程中，只有大概中央大約 600 個像素是會被利用到的。計算像素與實際位移映射關係的方法是：先將黑色格線所在的像素標記出來，再將格線寬 5.25mm 除上格線間的總像素數目，意即我將格線之間的像素所對應的位移大小視為定值。

Figure 2-7 為攝影機影像水平方向的解析度，黑色方格紙的一格間距通常約涵蓋數十個像素，所以我們可以看到，一個像素的空間解析度為 0.3—0.6mm，不過實際上會被使用到的像素其解析度最大不會超過 0.6mm。所以顆粒鍊位置及位移的空間解析度不會大於 0.6mm。

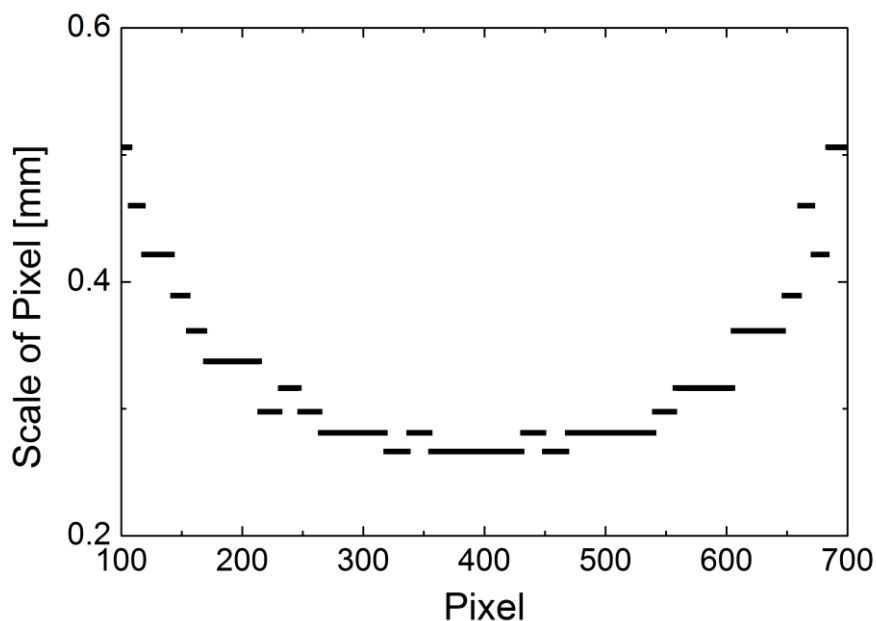




Figure 2-7 像素與實際移動位移映射圖

攝影機的水平像素數為 800，但在追蹤顆粒鍊的軌跡的過程中，實際會運用到的像素只有中央大概 600 個像素左右。用以測量像素尺度的方格紙間格大小為 5.25mm。映射關係的計算方法則如章節內文所述。

受限於攝影機影像的精度，我們選擇用影像中顆粒鍊的左極限與右極限平均來代表顆粒鍊的質心位置。但在實驗中，我們所關心的主要參數為顆粒鍊的位移，所以，即使透過影像頭尾相減取平均的做法沒有辦法告訴我們真正的質心位置，只要這個我們自行定義的質心相對於顆粒鍊的位移是足夠小的即可。所以為了估算此質心位置與顆粒鍊的相對位移，我們需要研究顆粒鍊長度隨時間的變動。

Figure 2-8 (a) 為顆粒鍊長度隨時間的變化，紅、藍色分別代表一號及二號攝影機所看到的顆粒鍊長度。從圖中可以發現，顆粒鍊的長度除了短時間的波動之外，也同時有著長時間的變化趨勢。我們所關心的為短時間的波動，這是由於長時間的波動相對於顆粒鍊的位移可以忽略不計。而此短時間波動的振幅寬度約在 1mm 上下。Figure 2-8 (b) 為每幀影像顆粒鍊長度差的長度分佈圖。我們可以由該分部圖清楚的看到顆粒鍊長度每幀的長度差幾乎都在 1mm 之間，由此，我們得以知道此質心定義方式對位移的精確度 $\approx 1\text{mm}$ 。

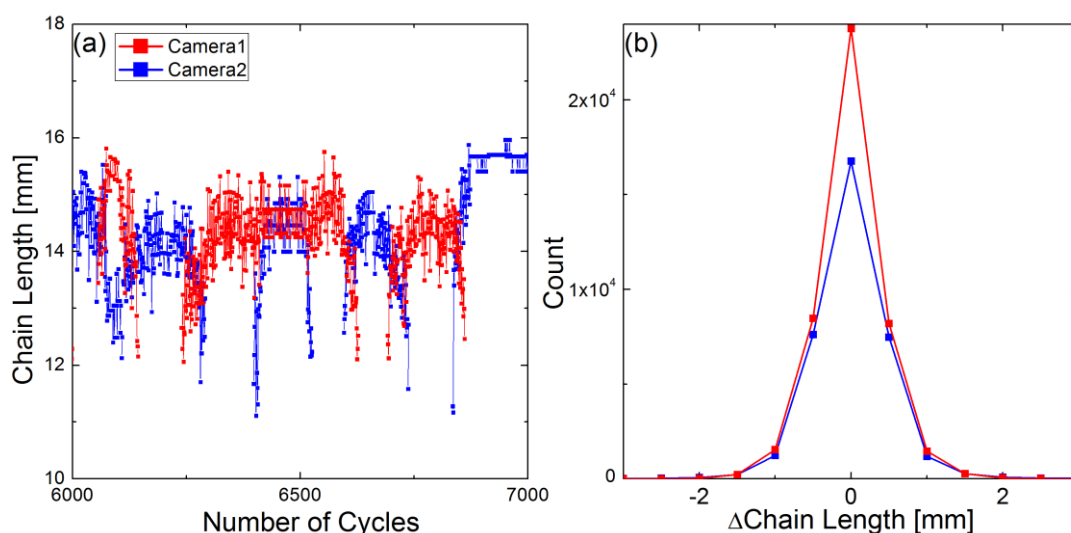




Figure 2-8 顆粒鍊長度變化圖

(a) 為 $N=5$, $\Gamma=1.50$ 顆粒鍊長度隨時間的變化圖，紅、藍色代表一、二號攝影機所看到的顆鍊鍊長度。(b) 為顆粒鍊長度每幀 ($\Delta t=0.04s$) 影像長度變化的長度分配圖，所選用 bin 的大小為 $0.5mm$ 。

[http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/Chap2/fig2.8_chain_length_variation.pdf]

在討論過攝影機的空間解析度、質心定義方式對位移所造成的不確定性以及前一節中兩攝影機軌跡的位移差後，我們知道三者所造成的誤差分別為 $\pm 0.3mm$ 、 $\pm 1mm$ 以及 $\pm 2mm$ 。所以本實驗在空間上的解析度為 $\pm\sqrt{0.09 + 1 + 4}mm \cong 2.2mm$ 。

2.3 形態 (State) 及區段 (Interval) 定義

本論文的主要目的是研究顆粒珠鍊的形狀與水平位移的關聯性。在我們之前 PRE 的工作中 (Sun et al., 2016)，我們依據顆粒鍊的形狀為其形態作定義；而在此論文中，我再進一步定義區段的概念以方便之後的討論。

2.3.1 形態 (State) 定義

我們依據顆粒鍊的形狀為其形態 (State) 作定義。Figure 2-9 為顆粒鍊的形態示意圖。(a)、(d) 為形態 0 的實驗實際影像，(b)、(e) 為形態 1 的實驗實際影像，(c)、(f) 則為形態 2 的實驗實際影像。振動台振動頻率為 $25Hz$ ，而 (a)、(b)、(c) 為攝影機拍攝頻率為 $500Hz$ ，曝光時間為 $1/500s$ 的影像，(d)、(e)、(f) 則是攝影機拍攝頻率 $25Hz$ ，曝光時間為 $1/25s$ 的影像。

本實驗攝影機所使用的拍攝頻率固定為 $25Hz$ 。為了判斷顆粒鍊是處於哪一形態，我們首先分析顆粒鍊中間顆數的高度位置。若 N 為奇數便取正中間的

金屬小球為代表，若 N 為偶數，則取中間兩顆的金屬小球為代表。然後我們分析顆粒鍊最兩端金屬小球與中間顆數的高度差，稱為 Δh_1 與 Δh_2 。若 Δh_1 與 Δh_2 中只有一項數值大於我們所挑選的閾值 h_{cut} ， h_{cut} 為金屬小球直徑的四分之一，假定為 $\Delta h_1 > h_{cut}$ ，則我們稱此為形態 1。若 Δh_1 與 Δh_2 兩項皆大於 h_{cut} ，則我們稱此為形態 2。從附錄一可知，顆粒鍊的形態在 $h_{cut} = d/4$ 處，不會隨著 h_{cut} 的些微變化而改變。

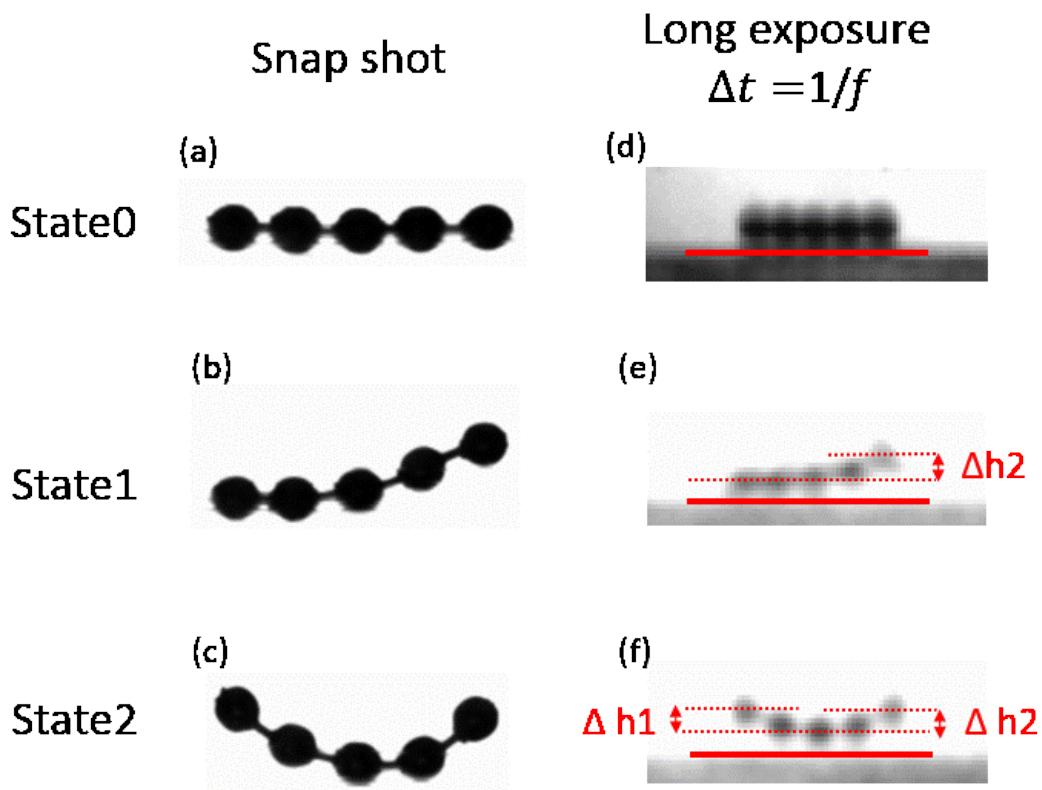


Figure 2-9 顆粒鍊形態示意圖

振動頻率為 25Hz，顆粒數為 5。(a)、(b)、(c) 對應到拍攝頻率 500Hz 的形態 0、形態 1、形態 2 的影像。(d)、(e)、(f) 對應到拍攝頻率 25Hz 的形態 0、形態 1、形態 2 的影像。(d)、(e)、(f) 中的紅色實線為基板的位置，紅色虛線則標示顆粒鍊兩端或是中心的高度位置， Δh_1 與 Δh_2 則為顆粒鍊兩端與中心的高度差。當兩端其一大大於顆粒鍊直徑的四分之一，即 $d/4$ 時，我們稱此為形態 1；而當兩端高度差

皆大於 $d/4$ 時，即為形態 2。



2.3.2 區段 (Interval) 定義

研究顆粒鍊的水平運動與其形態的關聯性時，我定義「顆粒鍊持續某一形態的軌跡片段」為「區段」(Interval)，如 Figure 2-10 所示。Figure 2-10 為顆粒鍊的軌跡示意圖，不同的形態用不同色標標示。顆粒鍊約在第 12610 個震動週期由形態 1 轉為形態 2，並在形態 2 持續約 100 個震動週期後轉為形態 1，我們便稱顆粒鍊在 12610—12710 振動週期為一個形態 2 區段。同理，12800—13000 振動週期為一個形態 1 區段，17000—17290 振動週期為一個形態 0 區段。在第三章對顆粒鍊的水平分析中，便是以區段為基本單元進行分析。

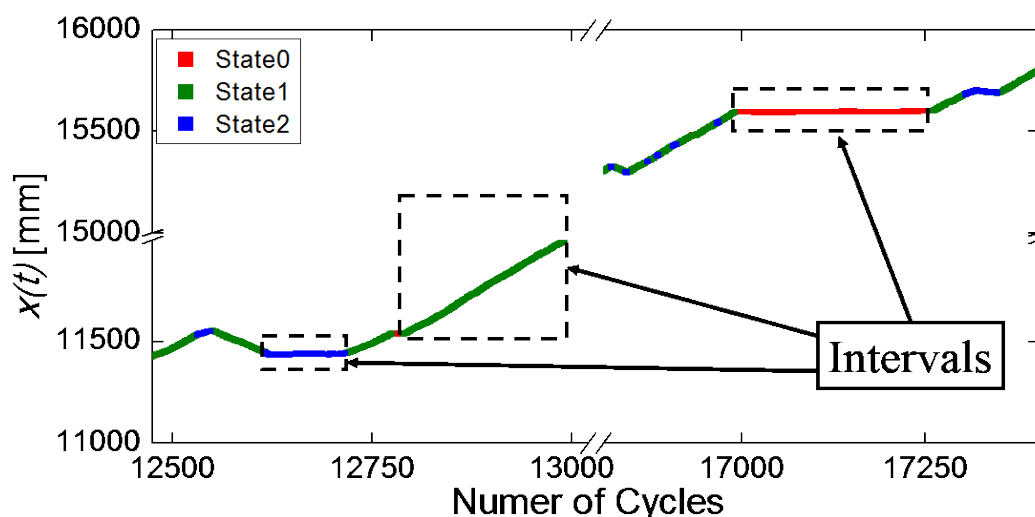


Figure 2-10 區段定義示意圖

$N=5$ ， $\Gamma=1.70$ ，其中不同形態區段以不同顏色標註：紅色為形態 0，綠色為形態 1，藍色為形態 2。

2.3.3 顆粒鍊行為概述

在震動強度比重力加速度小，也就是 $\Gamma < 1$ 時，顆粒鍊不會在振動過程中離開基板；當 Γ 慢慢增加至略大於 1 時，顆粒鍊會開始離開基板，但離開的幅度很小，此時顆粒鍊會作幾乎均勻的直上直下運動，此即為形態 0。形態 0 的顆

粒鍊於震動台上升加速度減少至 g 的時刻離開基板，但在基板的下降過程中會大致釋放完其所有動能，重新貼合回基板，並在下次震動週期中重複以上的循環。

而當 Γ 從略大於 1 繼續增加至 1.5–1.7 時（此數據會隨 N 而略有變化），顆粒鍊開始出現一端翹起的行為，也就是形態 1。處於形態 1 的顆粒鍊似乎從未有釋放完所有動能並貼合回基板的時刻。當顆粒鍊於震動台上升過程離開基板後，其翹起端於大部分的情況會在振動台的下一個震動週期的上升過程才落回基板，而非震動週期的下降過程；如此，顆粒鍊翹起端將可以從基板獲得更多的動能，並持續此循環。

當 Γ 增加至形態 1 開始出現時，形態 2 通常也會跟著出現。形態 2 如同形態 1 一般，顆粒鍊的兩翹起端大致會在振動台下一個震動週期的的上升過程中才落回基板，獲得更多動能也同時維持翹起端不斷翹起的循環。

另外，值得特別強調的是，顆粒鍊在足夠大的振動強度下，會自發性地在不同形態間轉變。這是因為雖然形態 1 及形態 2 的翹起端在大部分的情況下會在下一個震動週期的上升過程中才落回基板，但當翹起端於振動台的下降過程中落回基板的情形發生時，其翹起端的動能會被耗散，在下一次的震動週期中便有可能再一次於震動台的下降過程中落回基板。如此，顆粒鍊便會由形態 2 落回形態 1，或是由形態 1 落回形態 0。而當震動強度越強時，這個形態轉變的現象便會越頻繁的發生。



Chapter 3 水平運動與形態之關聯



在定義了顆粒鍊的形態 (State) 及區段 (Interval) 後，我將水平運動的資訊加以分類，透過不同的分析方式研究水平運動與形態之間的關聯性。

3.1 基本分析

3.1.1 顆粒鍊軌跡 (Trajectories)

我可以從兩台同步過後的攝影機同時得到顆粒鍊的顆粒鍊型態與水平運動軌跡圖，如 Figure 3-1 所示，其中顆粒鍊的不同形態以不同顏色標註。由軌跡圖中可清楚看到顆粒鍊會在不同形態間做轉換，而我們可以進一步將特定形態的區間切離出來，對形態與水平運動作初步的觀察。

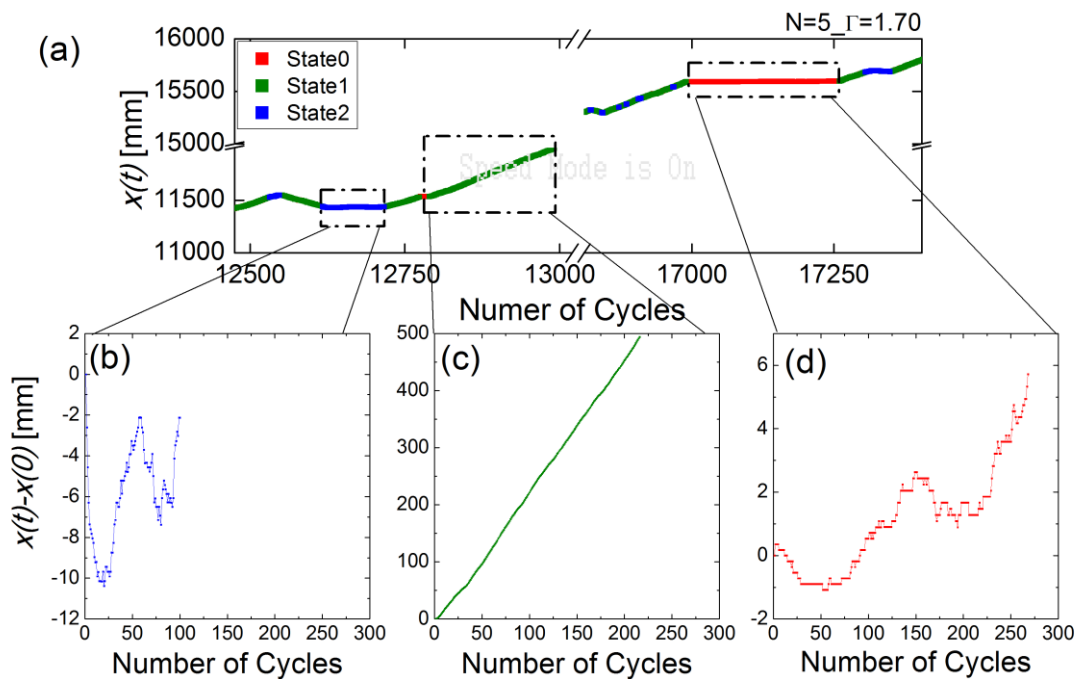


Figure 3-1 顆粒鍊型態與水平運動軌跡圖

$N=5$, $\Gamma=1.70$, (a) 為總軌跡圖，其中不同形態區段以不同顏色標

註：紅色為形態 0，綠色為形態 1，藍色為形態 2。(b)、(c)、(d) 則

分別為形態 2、形態 1 及形態 0 的區段軌跡圖。在區段軌跡圖中，原

點為每一區段開始時的顆粒鍊座標。



3.1.2 位移分佈直方圖 (Histogram)

為了進一步研究不同形態水平運動的統計行為，我對每一個區段計算區段內特定時間 Δt 的位移量 Δx ，收集所有位移量同時依據形態分類，以畫出位移分佈直方圖，如 Figure 3-2 所示。每一個形態位移分佈以該形態的資料數加以標準化 (Normalized)。為了配合實驗影像的精確度，我所選用 bin 的大小在本論文中統一為 1mm。

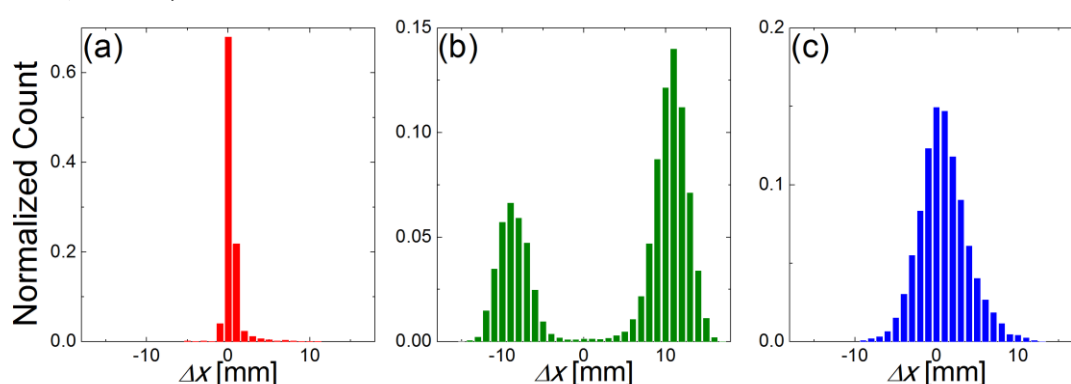


Figure 3-2 不同形態位移分佈直方圖

$N=5$ ， $\Gamma=1.70$ ，所選用的 Δt 為 0.2s，bin size 為 1mm。(a)、(b)、(c) 分別對應到形態 0、形態 1 及形態 2，分別有 2834、40326、7565 個資料點。每一個形態位移分佈以該形態的資料數加以標準化。

[http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/Chap3/fig3.2_3_state_histogram.am.pdf]

3.1.3 方均位移 (Mean Square Displacement, MSD)

除了觀察顆粒鍊的位移形態分佈外，隨機運動的研究有一個重要的指標是方均位移 (MSD)： $MSD(\Delta t) = \langle (x(t + \Delta t) - x(t))^2 \rangle$ 。我在此計算的是不同形態的方均位移，亦即選擇同一形態下不同的區段，分別計算這些區段內的 Δx^2 ，再將這些區段的 Δx^2 加以平均。而這些用以統計的區段至少需持續某一最

小時間 t_L 。Figure 3-3 為形態 2 的方均位移對 Δt 作圖，並將給定不同 t_L 所得到的不同方均位移畫在同一張圖上。選用不同 t_L 所得到的區段數目則如表 3-1 所示。在觀察這些方均位移後，我發現這些它們的表現非常類似。這表示我能夠用 $t_L = 70$ 週期的方均位移，即 11 個足夠長的區段代表所有區段的表現行為。形態 0 與形態 1 的方均位移也同樣如此。

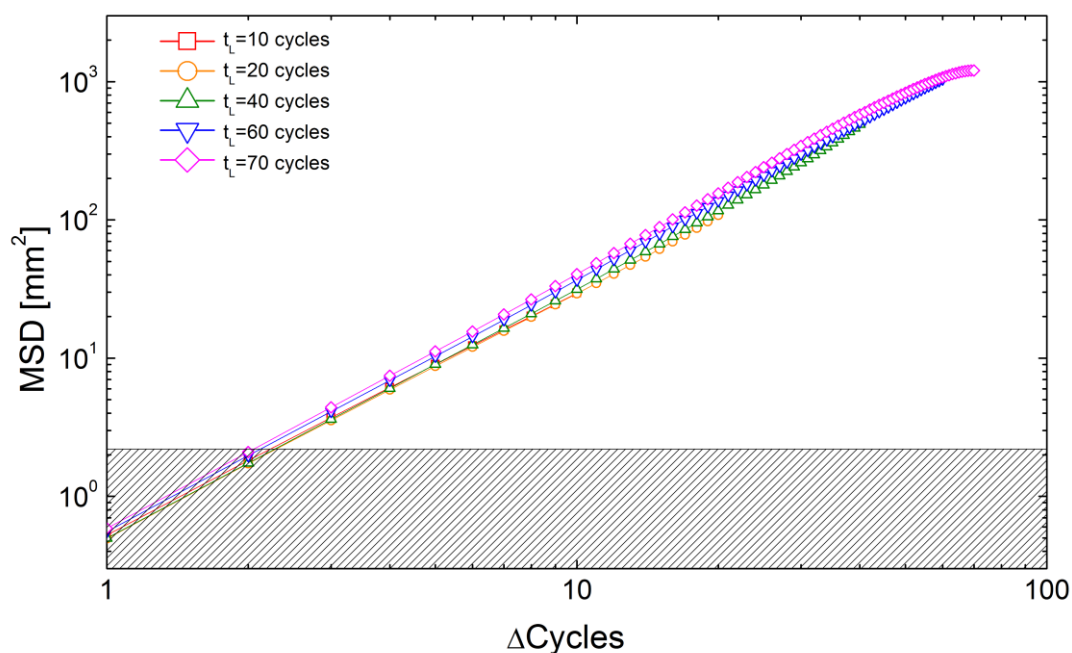


Figure 3-3 形態 2 方均根位移圖

$N=5$ ， $\Gamma=1.70$ ，不同線段代表不同的最小區段 t_L 。斜線部分面積代表顆粒鍊軌跡精度的範圍外。

[http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/Chap3/fig3.3_N=5_G=1.70_State2_MSD_vary_threshold_of_.pdf]

表 3-1 不同 t_L 所得到的區段數目

t_L (週期)	區段數目 (個)
10	326
20	129
40	36
60	14
70	11



3.2 形態 0 的研究

3.2.1 顆粒鍊軌跡

首先，我研究形態 0 的軌跡。Figure 3-4 是 3 段形態 0 的軌跡圖。我從形態 0 的區段中選擇了 3 個較長的區段來觀察。Figure 3-4 的右下嵌入圖是將 Figure 3-1 (b)、(c)、(d) 三個區段畫在一張圖上，用以作形態 0 軌跡的對照。從嵌入圖 3 個形態的比較可以得知形態 0 的移動相較於形態 1 及形態 2 都是相對緩慢的。同時透過觀察 3 個形態 0 的區段我可以推測形態 0 是一種移動緩慢的隨機運動，並在接下來的分析進一步驗證。

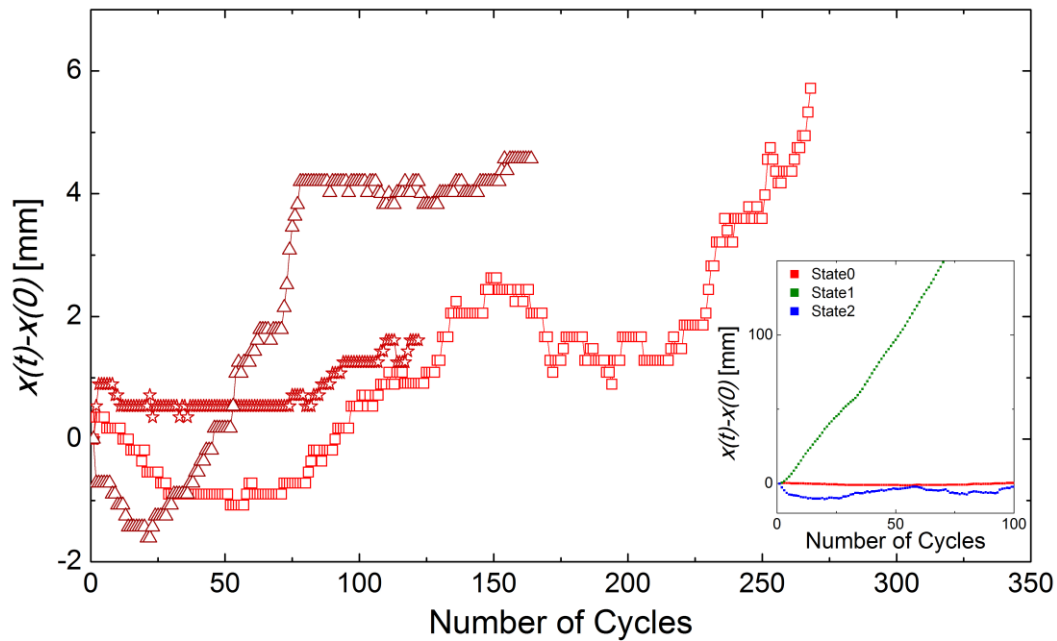


Figure 3-4 形態 0 軌跡圖

$N=5$, $\Gamma=1.70$, 3 個區段的軌跡分別以不同符號表示。所選的區段皆長過 4s。嵌入圖則是 Figure 3-1 (b)、(c)、(d) 三個不同形態區段 0 到 100 週期的部分軌跡圖，用以作形態 0 軌跡的對照。

[http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/Chap3/fig3.4_state0_trajectory.pdf]

3.2.2 位移分佈

在對形態 0 的特性有了初步的概念後，我透過位移分佈直方圖來研究形態 0 的統計性質。Figure 3-5 (a) – (e) 為取不同 Δt 的形態 0 位移分佈直方圖，(f) 則是 $\Delta t = 0.2$ s 三個形態的位移分佈直方圖。我所選用 bin 的大小統一為 1mm。由 (f)，我確實觀察到了形態 0 的位移小於形態 1 及形態 2，與從軌跡圖所觀察到的結果一致。同時由直方圖隨 Δt 的變化中，我可以得知隨著 Δt 的增加，位移分佈由大致對稱的結構演變到明顯的不對稱。這不對稱性是由於顆粒鍊本身結構上的不對稱性所造成，並且會由長時間的行為表現出來。關於對稱性對顆粒鍊運動的影響，我會在之後的章節中在進行討論。

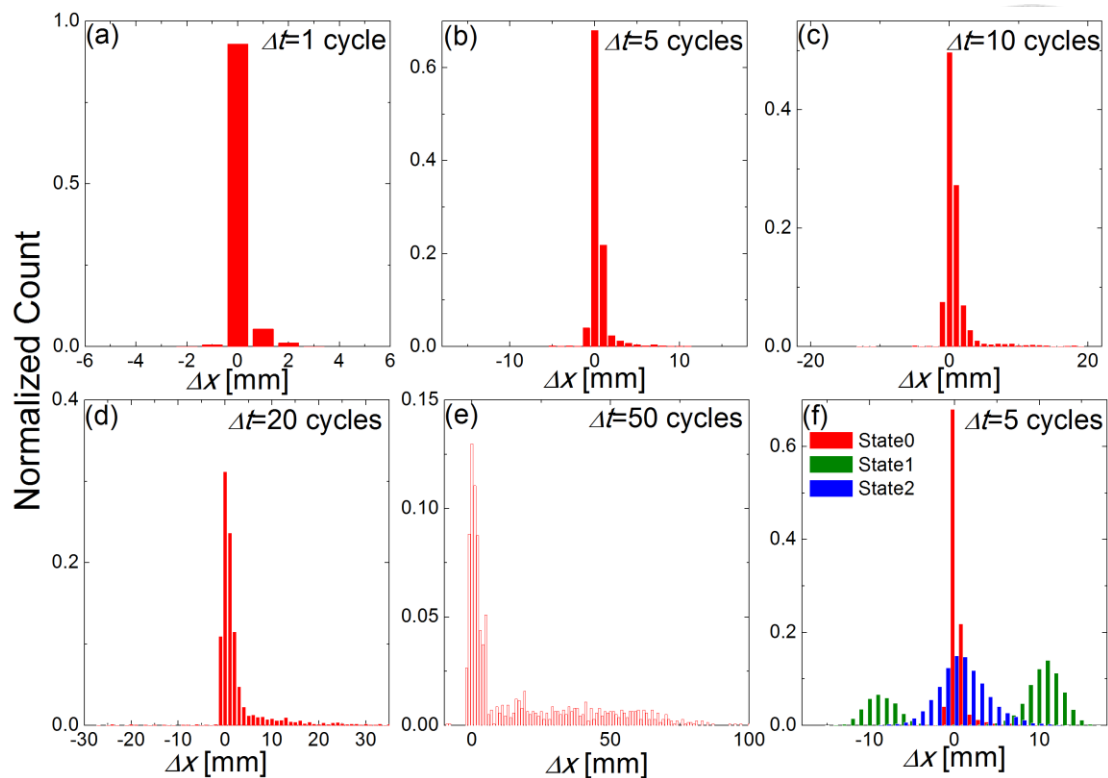


Figure 3-5 形態 0 的位移分佈圖

$N=5$, $\Gamma=1.70$, (a) – (e) 為形態 0 的位移分佈圖隨時間的變化。 Δt 分別為 1 個震動週期、5 個震動週期、10 個震動週期、20 個震動週期及 50 個震動週期，分別對應到 0.04s、0.2s、0.4s、0.8s 及 2s，且分別有 3385、2834、2458、1983、1394 個資料點。(f) 為 Figure 3-2 三形態位移分佈畫在同一張圖上， $\Delta t = 5$ 週期。這些直方圖 bin 的大小皆為 1mm。每一個形態位移分佈以該筆資料的資料數加以標準化。

[http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/Chap3/fig3.5_State0_histogram_vary_dt.pdf]

3.2.3 方均位移

我進一步使用方均位移來研究顆粒鍊的型態 0 的水平運動，如 Figure 3-6 所示。

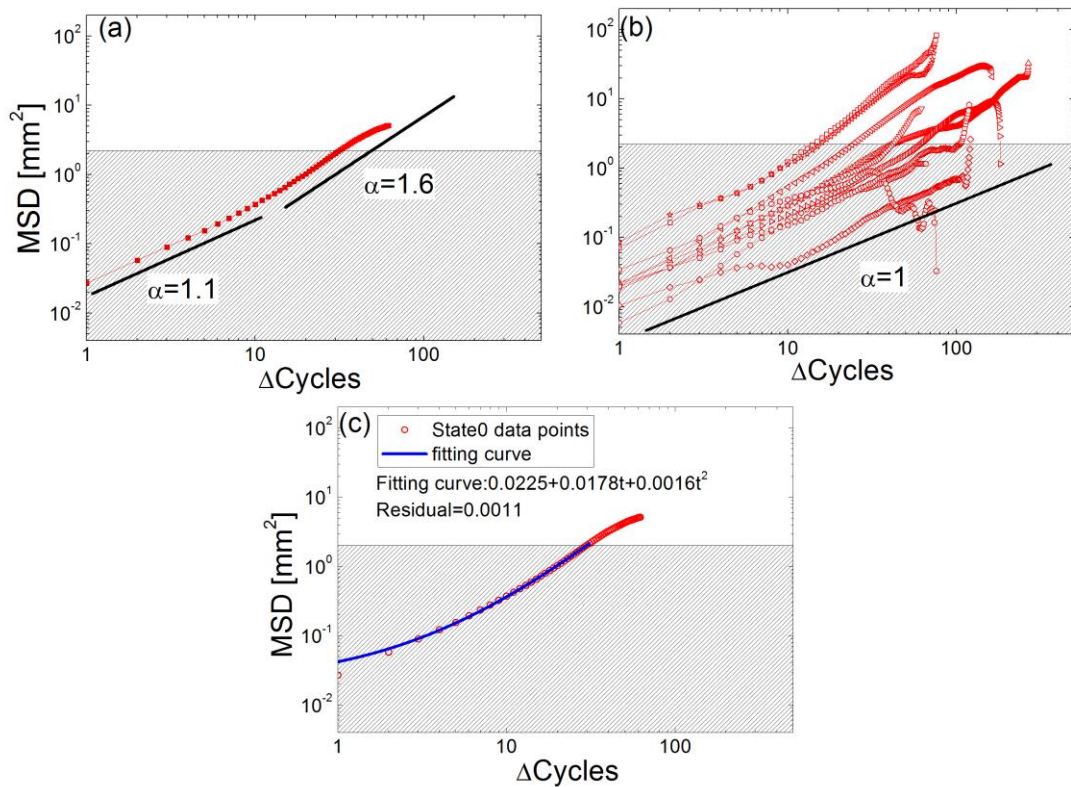


Figure 3-6 形態 0 方均位移圖

(a) 是 $N=5$, $\Gamma=1.70$ 顆粒鍊形態 0 水平運動的方均位移。是由 10 個形態 0 的區段計算而得，其中最短的區段長度持續 62 個週期。(b) 則是構成 (a) 區段各自的方均位移。斜線部分表示軌跡精確度以下區域。雙對數作標上的直線表示其值 $\propto \Delta t^\alpha$ ， α 為該直線的斜率。圖上直線斜率 α 值的選擇是以肉眼判斷選擇。(c) 則為 (a) 圖曲線以二次多項式擬合結果，藍線為擬合區線，紅圈為資料點。擬合所得參數如圖所標示。所用以擬合的資料僅有前 31 個資料點。斜線部分面積代表顆粒鍊軌跡精度的範圍外。

[http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/Chap3/fig3.6_N=5_G=1.70_State0_MSD_total_&_intervals.pdf]

Figure 3-6 (a) 是形態 0 足夠長區段的方均位移，如果方均位移 $\propto \Delta t^\alpha$ ，則在雙對數作標圖上會是一條斜率為 α 的直線。從 (a) 中可以發現，形態 0 在時

間尺度小的情況下，其斜率大致為 1。而隨著時間尺度的加大，形態 0 的方均位移斜率會逐步增加至 1.6 左右，與前一小節在位移分佈隨時間變化所看到的情形吻合：形態 0 的水平運動在不同時間尺度下會有不同的表現形為。而此特徵時間大致為 10 個週期左右。另外，形態 0 小尺度時間的運動，由於精確度不足，我只能推測其大致為一種步伐 (step) 小的布朗運動。Figure 3-6 (b) 則是用以構成 (a) 的區段其各自的方均位移。這些區段方均位移的斜率大致上都接近 1，但不同區段的表現行為差異很大。所以我由此可以推斷同樣是形態 0 的區段會有一些共同的特徵：位移量小，移動方向也接近隨機運動，但即使同樣擁有這些特徵，不同區段的表現行為仍有差異。

Figure 3-6 (c) 則是 (a) 圖曲線以二次多項式擬合後的結果，我們發現用以擬合的曲線很好地與資料點吻合。二次多項式在時間短時，由一次項佔主導地位；而在時間長時，則轉由二次項佔主導地位。這暗示我們形態 0 顆粒鍊的在小時間尺度下確實是一種布朗運動；而當觀察時間拉長時，顆粒鍊會表現出接近等速運動的行為，我們推測這是由顆粒鍊左右位移的些微不對稱在長時間尺度下被表現出來。

3.3 形態 1 的研究

形態 1 的行為表現與形態 0、形態 2 有非常大的差異。當顆粒鍊處於形態 1 時，它會沿著翹起端方向不斷前行。

3.3.1 顆粒鍊軌跡

形態 1 的研究我一樣從軌跡圖開始。Figure 3-7 為 3 個足夠長的型態 1 區段，同樣地，右下嵌入圖是 3 個不同形態區段的比較圖，用以作形態 1 軌跡的對照。我可以由軌跡圖觀察得到其位移速度遠大於形態 0 及形態 2，同時，形態 1 的顆粒鍊是朝一固定方向不斷前行，不會有轉向的情形發生。

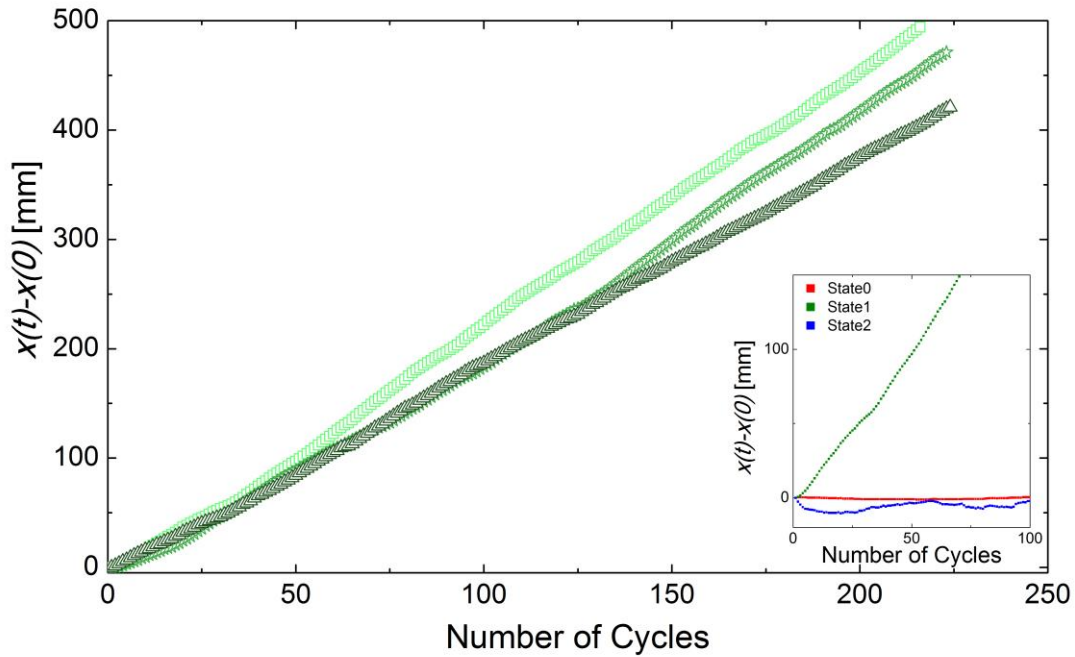


Figure 3-7 形態 1 軌跡圖

$N=5$, $\Gamma=1.70$, 3 個區段的軌跡分別以不同符號表示。所選的區段皆長過 200 個週期。嵌入圖則是 Figure 3-1 (b)、(c)、(d) 三個不同形態區段 0 到 100 週期的部分軌跡圖，用以作形態 1 軌跡的對照。

[http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/Chap3/fig3.8_State1_histogram_vary_dt.pdf]

3.3.2 位移分佈

Figure 3-8 (a) – (c) 為形態 1 取不同 Δt 的位移分佈圖，3-8 (d) 則是將這些位移分佈除上 Δt 後畫在單對數座標上，3-8 (e) 則是 3 個不同形態在取相同 Δt 的位移分佈。從位移分佈圖中，可以明顯的看出形態 1 的位移分佈有兩個明顯的高峰，這是由顆粒鍊翹起端不同所導致。而形態 1 的位移確實大於形態 0 及形態 2，如同我們從軌跡圖所觀察到的。

另外，從 Figure 3-8 (d) 中，我觀察到不同 Δt 位移分佈圖的高峰位置很好的疊合在一起，這表示形態 1 的運動特性不隨著觀察時間尺度的改變而改變，同時這也表示形態 1 的顆粒鍊是一種等速率運動。

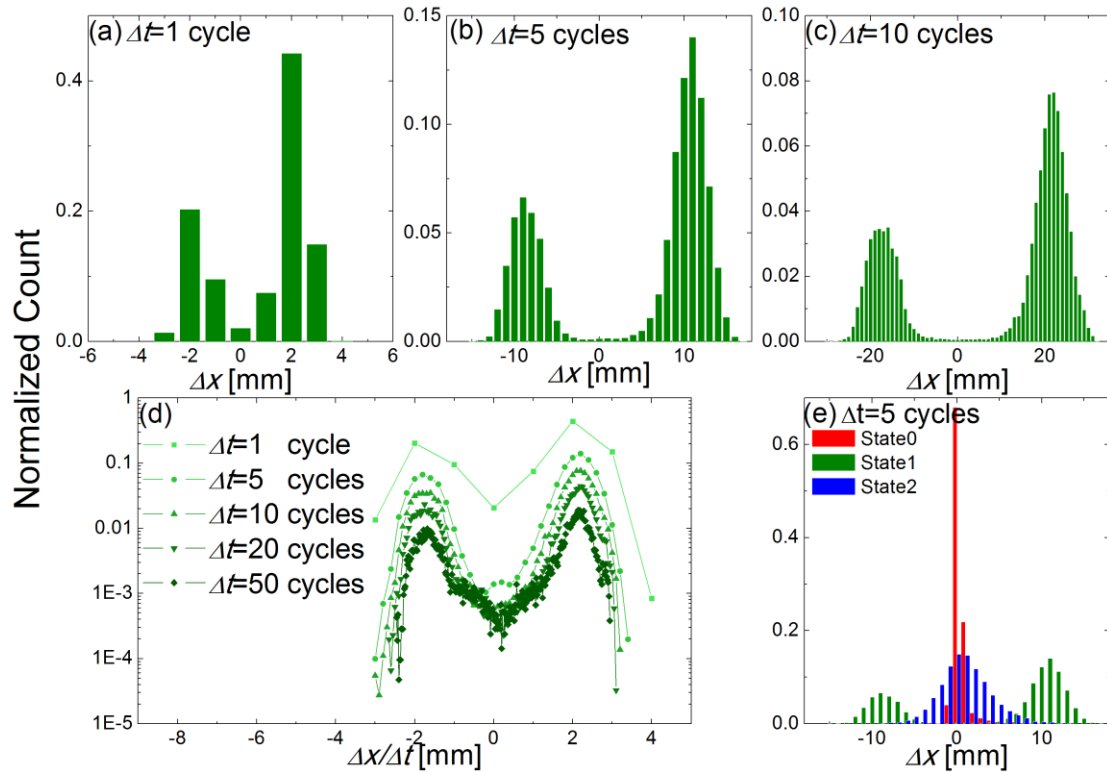


Figure 3-8 形態 1 的位移分佈圖

$N=5$, $\Gamma=1.70$, (a) – (c) 為形態 1 的位移分佈圖隨 Δt 的變化。 Δt 分別為 1 個震動週期、5 個震動週期及 10 個震動週期，分別對應到 0.04s、0.2s、0.4s，這些直方圖 bin 的大小皆為 1mm。(d) $\Delta t=1$ 、5、10、20、50 週期的位移分佈除上 Δt 後畫在單對數座標軸上，所對應到的資料點數為 44851、40326、36323、30598、21034，選用 bin 大小同樣為 1mm。(e) 則為 $\Delta t = 5$ 週期，3 個形態位移直方分佈圖。每一個形態位移分佈以該筆資料的資料數加以標準化。

[http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/Chap3/fig3.9_N=5_G=1.70_State1_MSD_total_&_intervals.pdf]



3.3.3 方均位移

在透過軌跡圖及位移分佈圖對形態 1 有了初步了解後，我接下來使用形態 1 區段的方均位移來研究其統計行為。Figure 3-9 (a) 為形態 1 足夠長區段的方均位移，我可以從此方均位移中發現：(1) 方均位移在雙對數座標上是一條斜直線，這表示形態 1 的運動表現不會隨著觀察的時間尺度不同而有所改變，與我在位移分佈圖所看到的結果一致。(2) 方均位移斜直線的斜率 $\cong 2$ ，這表示顆粒鍊處於形態 1 時，會用固定的速率不斷前行。

Figure 3-9 (b) 則是構成 (a) 區段各自的方均位移，每一個區段的方均位移斜率也都約等於 2。可以由此圖發現這些區段的方均位移幾乎重合在一起，這表示形態 1 下的顆粒鍊有非常一致的行為。

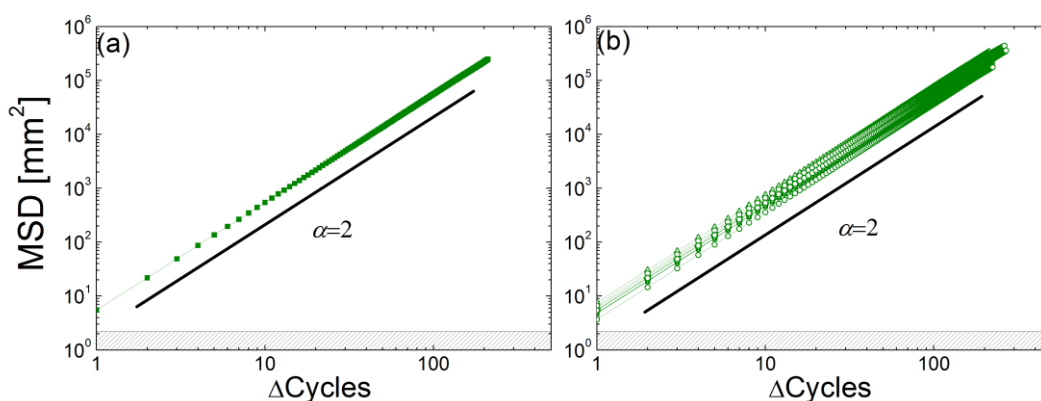


Figure 3-9 形態 1 的方均位移

(a) 是 $N=5$ ， $\Gamma=1.70$ 顆粒鍊形態 1 水平運動的方均位移。是由 10 個形態 1 的區段計算而得，其中最短的區段長度持續 211 個週期。(b) 則是構成 (a) 區段各自的方均位移。雙對數作標上的直線表示其值 $\propto \Delta t^\alpha$ ， α 為該直線的斜率。圖上直線斜率 α 值的選擇是以肉眼判斷選擇。斜線部分表示軌跡精確度以下區域。

[http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/Chap3/fig3.9_N=5_G=1.70_State1_MSD_total_&_intervals.pdf]



3.4 形態 2 的研究

形態 2 跟形態 0 同樣是隨機運動，不過兩者之間還是有不大相同的行為表現。形態 0 的珠鍊在一個振動週期尾段會釋放完所有動能而與底板完全貼合；形態 2 卻不會有完全貼合底板的時刻。所以，與形態 0 相異的是顆粒鍊的行進方向似是由兩端”拔河”所決定。

3.4.1 顆粒鍊軌跡

先從軌跡圖開始，Figure 3-10 是形態 2 三個足夠長區段的軌跡圖，右下角嵌入圖同樣是 3 個不同形態區段比較圖，用以作形態 2 軌跡的對照。形態 2 同樣是隨機運動，移動的速率比形態 0 快上一些，但同時也較形態 1 來的慢。

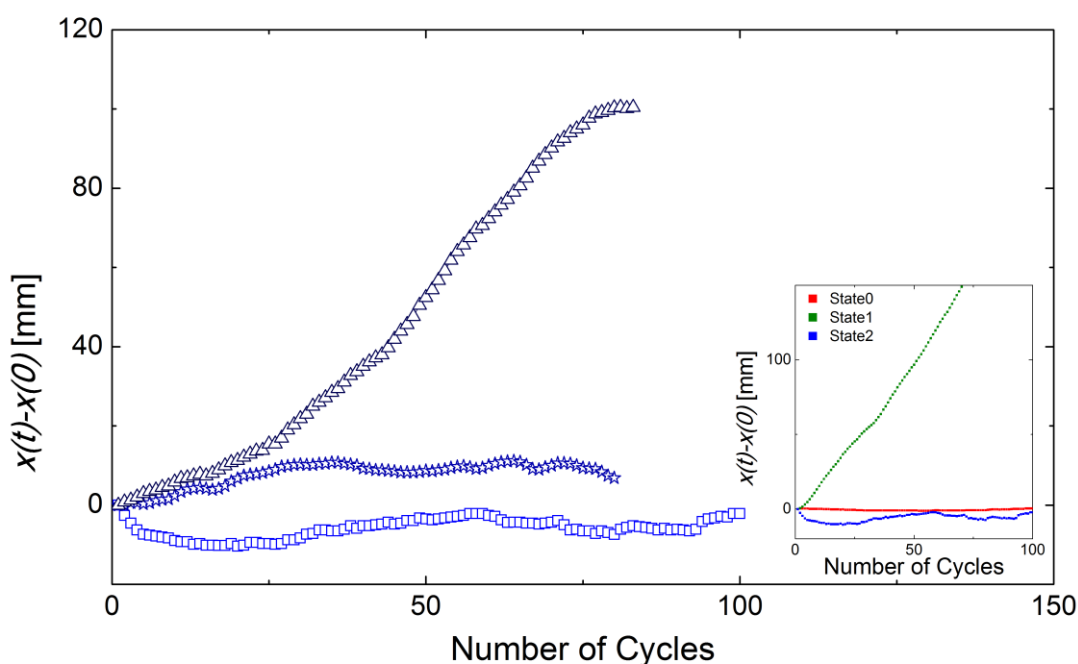


Figure 3-10 形態 2 軌跡圖

$N=5$, $\Gamma=1.70$, 3 個區段的軌跡分別以不同符號表示。所選的區段皆長過 75 個週期。嵌入圖則是 Figure 3-1 (b)、(c)、(d) 三個不同形態區段 0 到 100 週期的部分軌跡圖，用以作形態 2 軌跡的對照。

[http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/Chap3/fig3.10_state2_traject



3.4.2 位移分佈

Figure 3-11 (a) – (d) 是形態 2 位移分佈隨 Δt 的變化，(e) 則是 3 個不同形態在取相同 Δt 的位移分佈。如同形態 0，形態 2 位移分佈的高峰值同樣位在 Δx 為 0 的地方，且其位移分佈的峰寬大於形態 0，如同在軌跡圖所觀察到的。

從肉眼來看，形態 2 的位移分佈並不隨著 Δt 不同而有所變化，同時為了確認形態 2 是否同形態 0 一樣，也是一種布朗運動。我需要進一步研究形態 2 的方均位移。

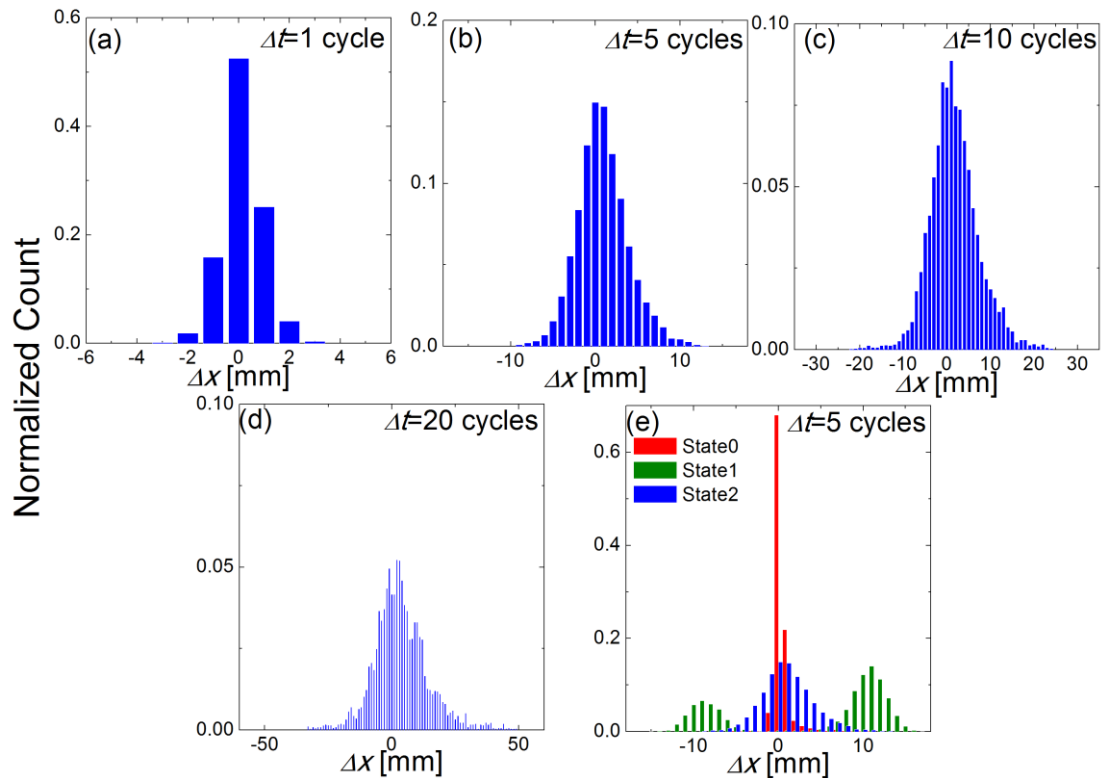


Figure 3-11 形態 2 的位移分佈圖

$N=5$, $\Gamma=1.70$, (a) – (d) 為形態 2 的位移分佈圖隨時間的變化。 Δt 分別為 1 個震動週期、5 個震動週期、10 個震動週期、20 個震動週期，分別對應到 0.04s、0.2s、0.4s、0.8s 及 2s，且分別有 10891、7565、5660、3756 個資料點。(e) 則為 $\Delta t = 5$ 個週期，3 個形態位移

直方分佈圖。這些直方圖 bin 的大小皆為 1mm。每一個形態位移分佈以該筆資料的資料數加以標準化。

[http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/Chap3/fig3.11_State2_histogram_am_vary_dt.pdf]

3.4.3 方均位移

如前一節所述，我藉由觀察形態 2 區段的方均位移來研究其是否為布朗運動。Figure 3-12 (a) 為形態 2 足夠長區段的方均位移。方均位移的斜率 α 介於 1 跟 2 之間，其值大約為 1.85。所以形態 2 明顯不屬於布朗運動，而是一種超擴散運動 (superdiffusion)，同時，從其斜率大致保持為定值可看出形態 2 的運動特性也不隨時間尺度而有所改變。

Figure 3-12 (b) 則為構成 (a) 區段各自的方均位移。由圖可以發現這些區段方均位移的斜率並不一致，但都落在 1.5—2 的區段內。與形態 0 與形態 1 相較，形態 2 區段與區段的差異是比較大的。也就是當顆粒鍊處於形態 2 時，雖然顆粒鍊同樣都是超擴散運動，但其水平運動的不一致性是比形態 0 跟形態 1 高的。

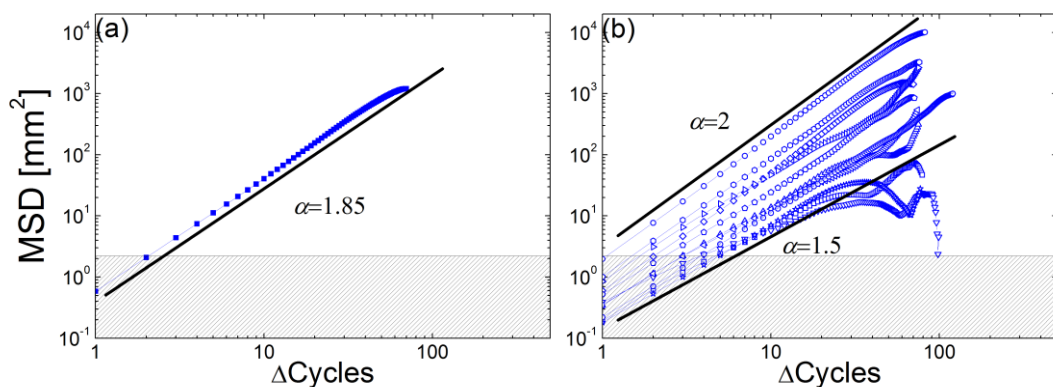


Figure 3-12 形態 2 方均位移圖

(a) 是 $N=5$, $\Gamma=1.70$ 顆粒鍊形態 2 水平運動的方均位移。是由 11 個形態 2 的區段計算而得，其中最短的區段長度持續 2.8s。(b) 則是構

成 (a) 區段各自的方均位移。圖上用以近似的直線斜率大小是用肉眼加以選擇。雙對數作標上的直線表示其值 $\propto \Delta t^\alpha$ ， α 為該直線的斜率。圖上直線斜率 α 值的選擇是以肉眼判斷選擇。斜線部分表示軌跡精確度以下區域。

[http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/Chap3/fig3.12_N=5_G=1.70_State_MSD_total_&_intervals.pdf]

3.5 其他分析

在 3.5 節中，我試圖利用位移延滯圖、顆粒鍊頭尾高度差與位移散佈圖，以及 Δx vs Δt 的散佈圖等其他分析方式來進一步研究形態的水平運動特性。

3.5.1 位移延滯圖 (Lag plot)

Figure 3-13 為位移延滯圖，是 $\Delta x(t)$ 對 $\Delta x(t + \Delta t)$ 作圖。而 $\Delta x(t)$ 是顆粒鍊在 t 時刻的位置與下一幀影像位置的位移。透過位移延滯圖，我們可以檢查顆粒鍊位移的時間序列有多少隨機成分。

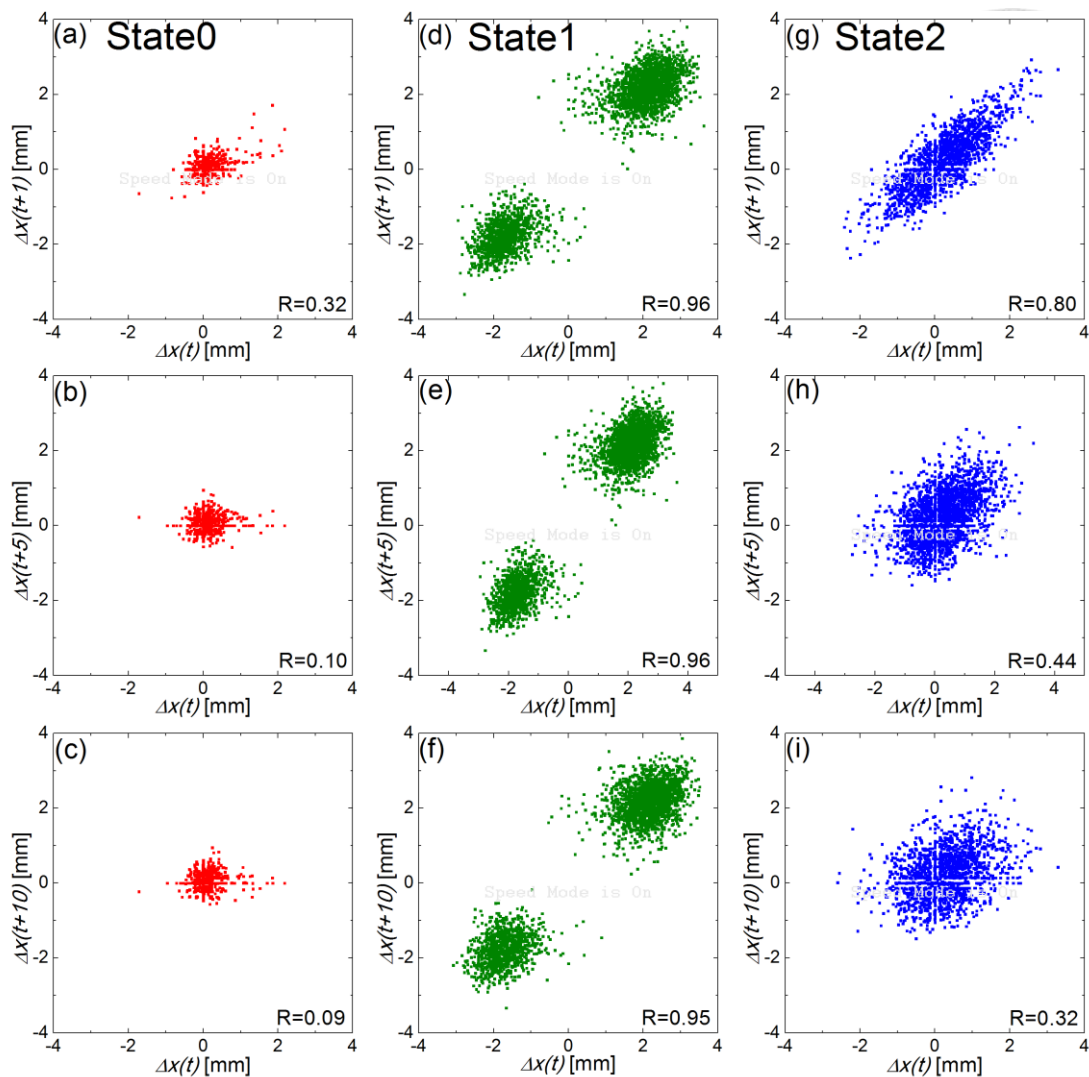


Figure 3-13 形態的位移延滯圖

$N = 5$ 、 $\Gamma = 1.70$ ，其中 (a)、(b)、(c) 為形態 0 顆粒鍊在 $\Delta t = 1$ 、5 及 10 週期的位移延滯圖；(d)、(e)、(f) 為形態 1 顆粒鍊在 $\Delta t = 1$ 、5 及 10 週期的位移延滯圖。(g)、(h)、(i) 為形態 2 顆粒鍊在 $\Delta t = 1$ 、5 及 10 週期的位移延滯圖。R 為延滯圖的相關係數。延滯圖中心的白色十字由資料紀錄的最小單位而來，而非真實實驗資料。(a)、(b)、(c)、(d)、(e)、(f)、(g)、(h)、(i) 分別對應到 3062、2181、2180、9082、5920、3896、42970、38260、33414 個資料點。

[http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/Chap3/fig3.13_lagplot_dt=1_vary_lag.pdf]

形態 0 延滯圖大部分的資料點都落在我們實驗的精確值以下，而其圖

形並不隨著選取的 Δt 改變，約略是一個圓形，這與我們 3.2 節的結論一致。形態 1 的資料點非常明顯的分佈在對角線上，且有非常高的相關性，這也與我們前面的章節有一致的結論。但形態 2 延滯圖的相關係數可以看到是隨著 Δt 的增加而減少，且在 $\Delta t=1$ 週期時，其 $\Delta x(t)$ 與 $\Delta x(t + \Delta t)$ 為高度正相關，表示形態 2 的顆粒鍊傾向於往其上一個週期的運動方向移動。這告訴我們形態 2 的顆粒鍊會往固定方向移動數個週期後才轉換方向。

3.5.2 位移與顆粒鍊兩端高度差關聯探討

Figure 3-14 為形態 1 與形態 2 顆粒鍊頭尾兩端的平均高度差與對應的平均位移散佈圖。高度差 Δh 為頭尾兩端高度相減後除上金屬球直徑，而平均高度差 $\langle \Delta h \rangle_{cycle}$ 即為 Δh 在經過時間 Δt 的幀數平均。平均位移 $\langle \Delta x \rangle_{cycle}$ 則為顆粒鍊經過 Δt 的總位移除上 Δt 時間內的幀數。我希望透過此散佈圖了解顆粒鍊兩端的高度差與顆粒鍊水平位移的關聯性。不過，需要一提的是當 $\Delta t=1$ 時，資料點實際上是未經過平均的。

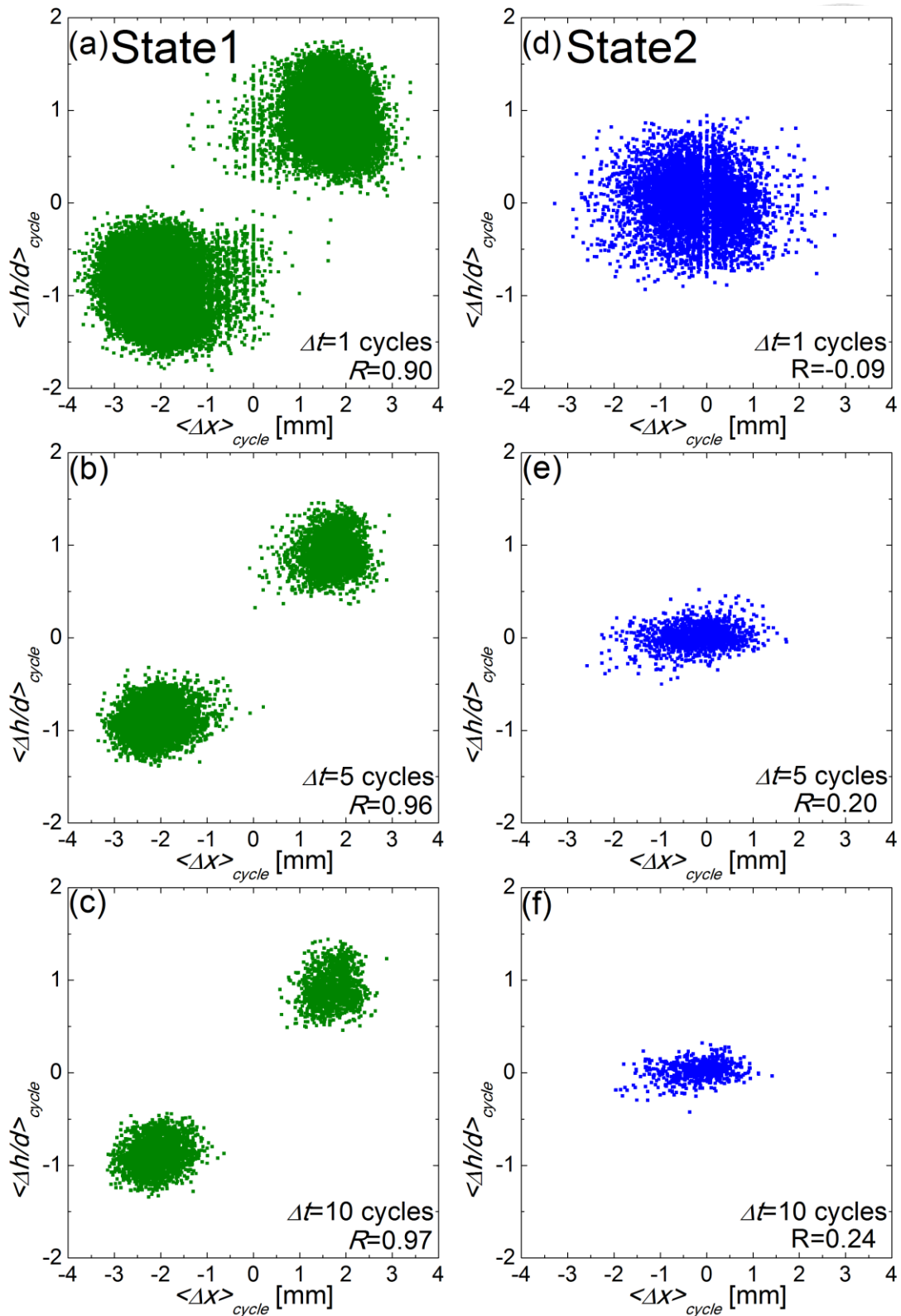


Figure 3-14 形態 1 與形態 2 顆粒鍊頭尾高度差與位移散佈圖

$N = 5$ 、 $\Gamma = 1.70$ ，其中 (a)、(b)、(c) 為形態 1 顆粒鍊在 $\Delta t = 1$ 、5 及 10 週期的散佈圖；(d)、(e)、(f) 為形態 2 顆粒鍊在 $\Delta t = 1$ 、5 及 10 週期的散佈圖。 R 為散佈圖的相關係數。 Δh 為顆粒鍊頭尾兩端的高

度差除上顆粒鍊直徑，平均高度差為 Δh 的幀數平均。高度差正負號調整至與形態 1 的運動方向一致。平均位移為 Δt 內所經過總位移的幀數平均。(a)、(b)、(c)、(d)、(e)、(f) 分別對應到 42868、8198、3873、7565、1376、607 個資料點，同時我們只選取長度超過 10 週期的區段計入統計。

[http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/Chap3/fig3.14_state1&state2_dh_vs_dx.pdf]

我們先觀察形態 1 的散佈圖。雖然散佈圖的相關係數告訴我們平均高度差及平均位移為高度相關，但整個散佈圖並非分佈在一條斜直線上，而是以右上左下兩個圓形分佈，且此結構並不隨著 Δt 改變。這暗示我們，在顆粒鍊兩端的高度差過了一定閾值後，位移對高度差並不敏感。形態 2 的散佈圖隨時間的變化也暗示我們同樣的結論，形態 2 散佈圖的相關係數皆為低度相關，且高度差甚至可以與運動方向異號。

但要注意的是，我們實驗設置為了能長時間的紀錄顆粒鍊的運動行為，犧牲了小時間尺度及小空間尺度的精確性。所以在較短的 Δt 之下顆粒鍊頭尾高度差與水平位移其實是可疑的。

3.5.3 位移—時距之散佈圖 (Scatter Plot)

以 2.3.2 節所定義的區段為分析單元，Figure 3-15 為區段 Δx vs Δt 的散佈，所對應到的 Δx 與 Δt 為各區段的總位移與持續時間。我將不同形態的區段以不同色標表示。

我們可以看出圖上的點大致構成了三條直線，分別為形態 1 兩個方向的斜直線，及形態 0 與形態 2 所共同構成的水平線。而形態 1 所構成的兩條斜直線斜率就顯示了這個系統的特徵速度 (characteristic speed)。

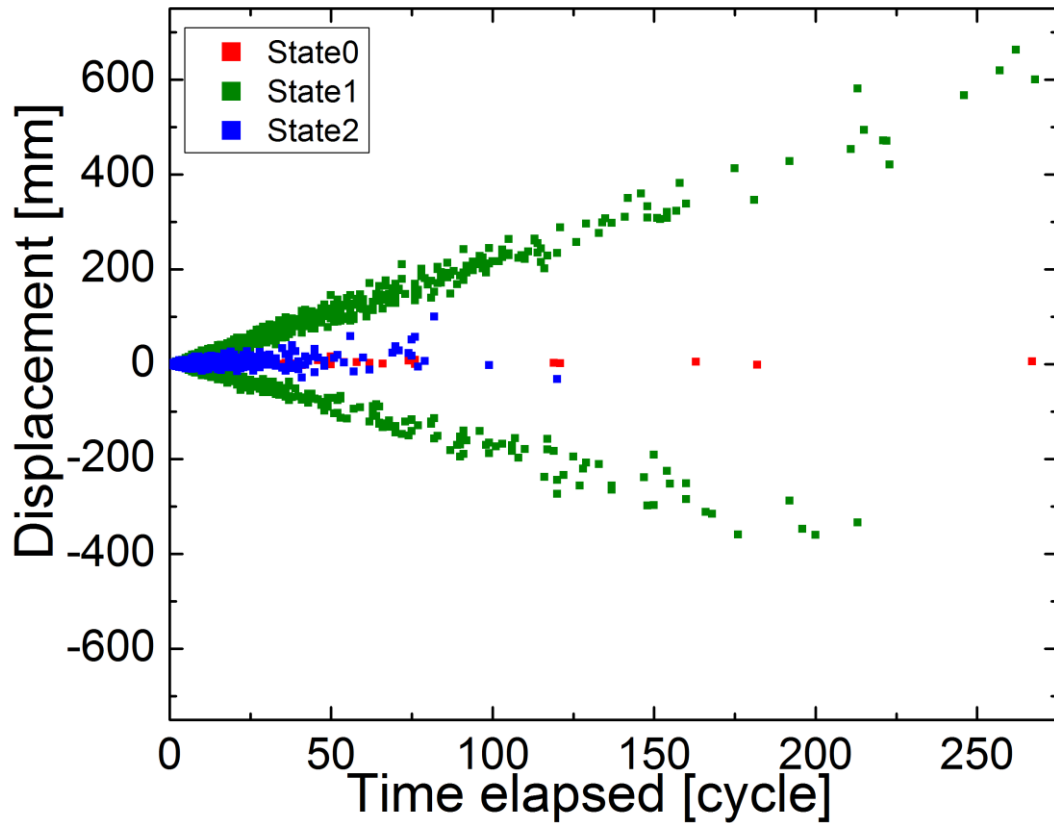


Figure 3-15 區段之位移—時距散佈圖

$N = 5$ 、 $\Gamma = 1.70$ ，圖上每一點代表一個區段；其所對應到的 Δx 與 Δt 為區段的總位移與持續時間。三個不同形態的區段以不同色標標註：紅色為形態 0，綠色為形態 1，藍色為形態 2。

[http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/Chap3/fig3.15_Dx_vs_Dt_scatter_plot_of_intervals_Jia20160630.pdf]

此外，對於形態 2，我還進一步藉由定義步伐 (step) 來研究其是否也具有特徵速度。我將形態 2 軌跡加以平滑化： $x(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} x(t+i)$ ， n 是平滑化的跨度 (span)，同時 n 必須為奇數， t 則為週期數。步伐便定義為平滑化 (smoothing) 後顆粒鍊轉折與轉折間的軌跡，如圖 3-16 (a) 所示。圖 3-16 (a) 為形態 2 的一區段，平滑化的跨度為 3。紅圈為顆粒鍊轉折處，所以相鄰紅圈間的軌跡即為步伐。

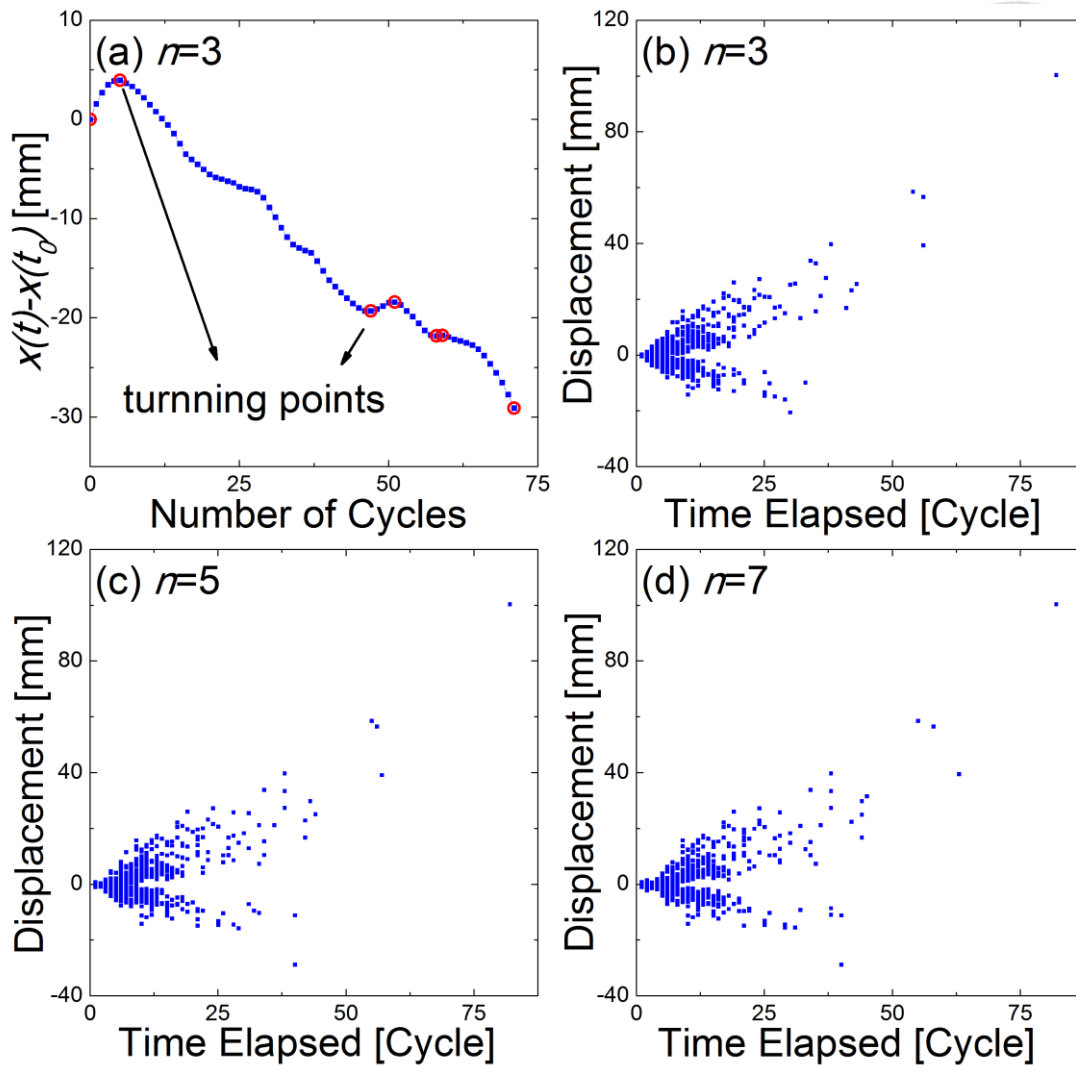


Figure 3-16 形態 2 的步法散佈圖

$N = 5$ 、 $\Gamma = 1.70$ ，(a) 為顆粒鍊形態 2 一區段 $n = 3$ 的步法示意圖。

(b)、(c)、(d) 為平滑化跨度 $n = 3$ 、 5 、 7 形態 2 步法的位移—時距散佈圖。每一點代表一步，所對應到 Δx 與 Δt 即為步法的總位移與持續時間。

[http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/Chap3/fig3.16_step_Dx_vs_Dt_scatter_of_state2_Jia20160630.pdf]

Figure 3-15 (b)、(c)、(d) 為步法的位移—時距散佈，分別對應到平滑化跨度為 3、5 及 7。我們可以發現散佈圖對 n 的選擇非常的不敏感，這表示我們選擇的平滑化參數在一定區間內對步法沒有太大的影響。

我們發現步伐的散佈圖雖然沒有同區段的散佈圖一般，可以定出非常清楚的兩條直線，但我們仍可以清楚的將散佈圖上的點分為上下兩塊，這代表了顆粒鍊在在形態 2 的運動仍有某種程度的特徵速度存在。



3.6 小結

在第三章中，我依據形態來為水平運動資訊進行分類，以得到不同形態所對應到的水平運動特性。我以 $N = 5$ 、 $\Gamma = 1.70$ 的顆粒鍊為例，透過仔細的比較各個形態不同 Δt 下的位移分佈以及方均位移，來為顆粒鍊形態的水平運動定性。

形態 0 的運動受限於實驗的精確度，在 Δt 小的情形下，我只能推測其為步伐小的隨機漫步，同時，其位移分佈大致是對稱的。但在 Δt 加大的過程中，其位移開始出現不對稱的分佈，這也同時反應在形態 0 方均位移在雙對數圖上出現了轉折。同時，不同區段彼此有所差異的方均位移也告訴我們顆粒鍊形態 0 的運動雖然都屬於小步伐的隨機漫步，但表現並沒有非常一致。

形態 1 的運動不論從位移分佈隨 Δt 的變化或是方均位移都能看出其大致保持一固定速度往翹起端前行。同時，不同區段方均位移的高度重合也表示形態 1 下的顆粒鍊其水平運動有非常高的一致性。

而形態 2 的運動與形態 0 雖然也看似為無序的運動，但從位移分佈圖可以明顯看出其步伐較形態 0 來的大。同時，根據方均位移的斜率，我們推斷形態 2 的運動是一種超擴散運動。不過同樣根據不同區段的方均位移，我們得知顆粒鍊處於形態 2 之下的行為並沒有高度一致性，其方均位移的斜率分佈可以從 1.5 一直到非常接近 2。同時，在觀察形態 2 的位移延滯圖後，我們得知形態 2 之下的顆粒鍊傾向於同其上一個週期的運動方向移動，也就是形態 2 的顆粒鍊同形態 1 一般，能夠某種程度上“記住”自己的運動方向，並傾向於往同一方向持續移動。

另外，我們也在第三章的最後嘗試探討顆粒粒頭尾高度差與位移的關聯

性。而高度差與位移的散佈圖暗示我們此兩者間沒有高相關性，但此推論仍需進一步的實驗檢驗。

而在第三章的最後，我們利用散佈圖來研究系統的特徵速度。從區段的散佈圖中，我們可以清楚的看出系統特徵速度的存在。同時，我們透過定義步伐的方式，發現形態 2 也有某種程度上的特徵速度，雖然並未如同形態 1 般可以清楚的收斂到一個單一的數值。



Chapter 4 控制參數的角色及其他評估



在上一章中，我以 $\Gamma = 1.7$ 為例描述了不同形態所擁有的水平運動性質。在接下來第 4 章中，我將討論這些水平運動性質在控制參數的改變下會有些甚麼變化。最主要的控制參數是振動強度 Γ 以及顆粒數 N ，分別於 4.1 節與 4.2 及討論。本論文中的震動頻率固定在 25Hz，所以改變振動強度只改變振幅。而在 4.3 節我則會對系統自身的不對稱性作簡單的評估。

4.1 振動強度 (Γ)

實驗中當震動強度低於 1.5 時，顆粒鍊將會只待在形態 0，而不會有形態轉變的行為出現；另外，當震動強度大於 2 時，則會有不規則的形狀出現，顆粒鍊翹起的部分將不會只侷限在兩端。這種更高能量的形態不是我所想要討論的部分。所以我在這篇論文所探討的震動強度只在 1.5—2 之間。

振動強度對此系統的影響我分成兩個部分來討論：(1) Γ 對不同形態區段持續時間的影響 (2) Γ 對不同形態位移的影響。

4.1.1 Γ 對形態區段長度的影響

由我們之前的實驗可得知(Sun et al., 2016)，顆粒數為 5 的顆粒鍊在 Γ 為 1.50—1.70 時，進入形態轉變的區間。顆粒鍊會從形態 0 為主，經過形態 1 為主的過渡階段，轉變成形態 2 為主，如 Figure 4-1 所示。Figure 4-1 是顆粒鍊處於三個形態的時間於總長度 43.3 分鐘的影像裡所佔有的時間比例。紅線以上的區間表示形態 0 所佔的比例，紅、藍線之間的區域為形態 1 所佔的時間比例，藍線以下則為形態 2 所佔的時間比例。我們可以發現顆粒鍊處於形態 0 的時間比例隨著 Γ 增加而顯著減少，形態 2 則正好相反，其時間比例隨著 Γ 增加而顯著增加，形態 1 的時間比例則比較穩定，隨著 Γ 的改變都能佔有一定的比例。

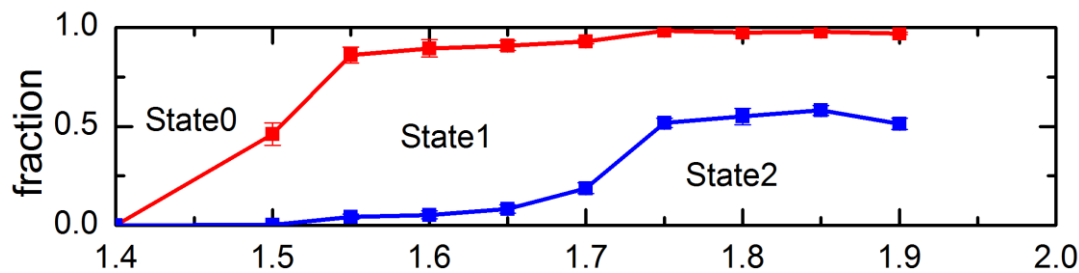


Figure 4-1 顆粒鍊形態分布隨 Γ 的變化

$N=5$ ，每一筆資料皆為總長度 43.3 分鐘（65000 幀）的統計結果。藍線代表顆粒鍊兩端同時翹起，紅色代表至少一端翹起。所以紅色上端為形態 0 所佔有比例，紅線藍線之間區域為形態 1 所佔有比例，藍線以下則為形態 0 所佔有比例。標準差的估算方法為將原始 65000 個震動週期影像隨機切成 100 個長度為 15000 個震動週期的片段，計算這些片段的形態比例而得到平均值及標準差。

[http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/Chap4/fig4.6_N=5~8_state_fraction.pdf]

同時， Γ 的改變也會影響區段長度。Figure 4-2 是三個形態區段長度分佈圖隨 $\Gamma = 1.50$ 、 1.70 、 1.90 的變化。形態 0 的區段長度隨著 Γ 的增加而顯著減少，形態 2 的區段長度雖然沒有顯著增加，但區段數目卻隨著 Γ 的增加而顯著增加。形態 1 隨著 Γ 增加，其區段長度減少，但區段數目卻增加，所以其形態所佔時間比例沒有太大的改變。另外，三個形態的區段長度隨著 Γ 增加都是減小的，這是由於 Γ 越大，顆粒鍊越容易發生形態轉換，也就導致形態區段的長度減小。

所以 Figure 4-1 及 4-2 告訴我們，當震動強度大時，相較於形態 0 及形態 1，顆粒鍊會很容易地轉變到形態 2，但也往往只能在形態 2 維持很短的時間便又轉重新變回形態 1 或是形態 0，顆粒鍊在只能一個形態持續很短的時間。

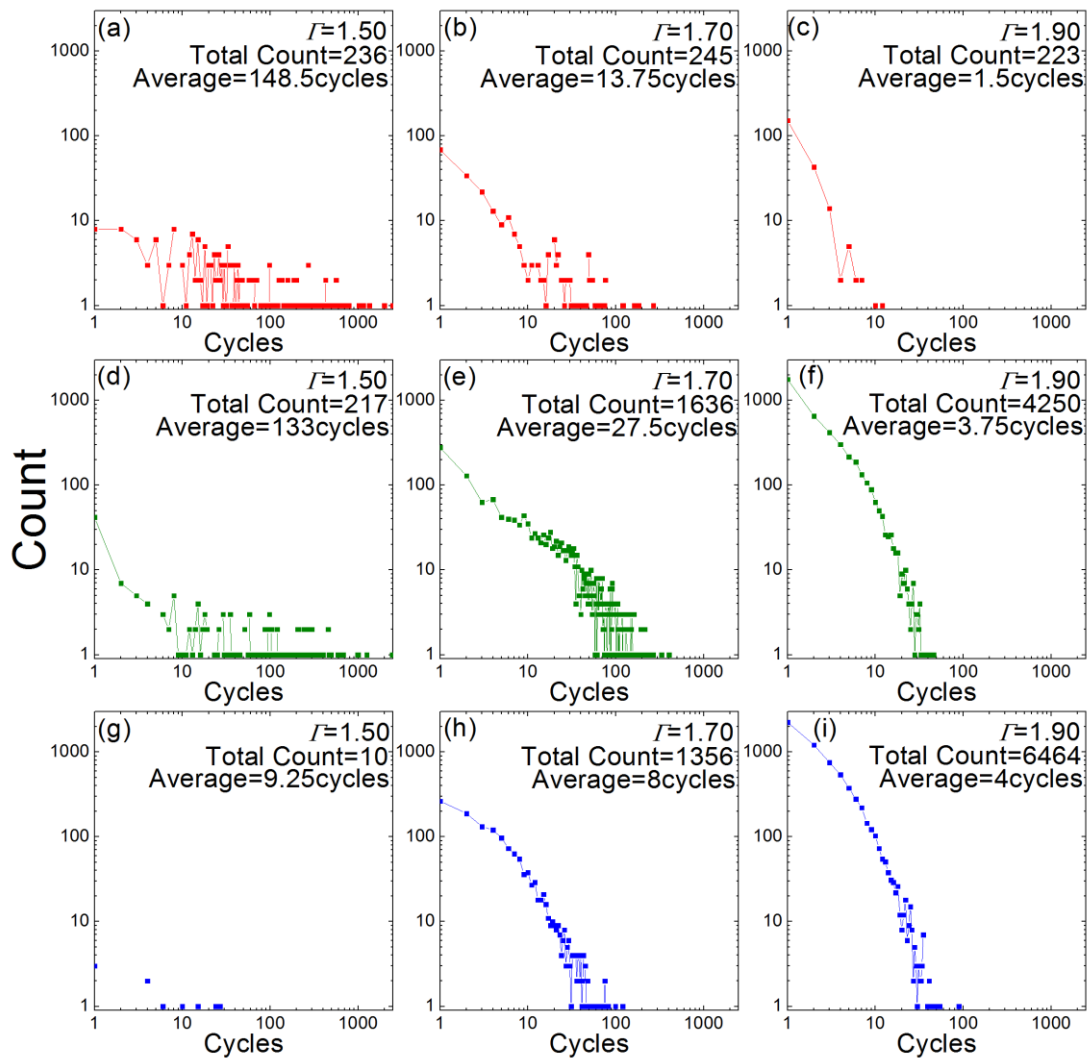


Figure 4-2 三個形態區段不同 Γ 長度分佈圖

$N=5$ ，(a) — (c) 為形態 0 的區段於 Γ 為 1.50、1.70、1.90 的長度分佈圖，(d) — (f) 為形態 1 的區段於 Γ 為 1.50、1.70、1.90 的長度分佈圖，(g) — (i) 為形態 2 的區段於 Γ 為 1.50、1.70、1.90 的長度分佈圖。圖上所標示的總區段數目及區段平均長度是從總長度 43.3 分鐘的原始資料中所作的統計，而所選用 bin 的大小為一個震動週期。

[http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/Chap4/fig4.2_state_interval_persistent_time_vary_G.pdf]



4.1.2 Γ 對位移分佈的影響

改變振動強度除了改變區段長度外，也會同時影響顆粒鍊在不同形態下的位移。Figure 4-3 是三個形態在 $\Delta t = 5$ 週期時位移分佈隨著 Γ 的變化。我將形態的位移分佈標準化，並將不同 Γ 的位移分佈疊合在單對數座標軸上。從圖中可以發現，雖然位移分佈隨著 Γ 加大而有所改變，但三個形態各自都有一些共同的特徵不會隨著 Γ 變化而改變：形態 0 跟形態 2 的峰寬大致保持在一個定值，形態 1 的雙峰位置則大致接近。由此，我們得知顆粒鍊水平運動的位移分佈大致上在我們所研究的震動強度範圍內是有一致性的。我們在下一節會進一步研究顆粒鍊的方均位移，從不同的方式研究水平運動隨著 Γ 的變化。

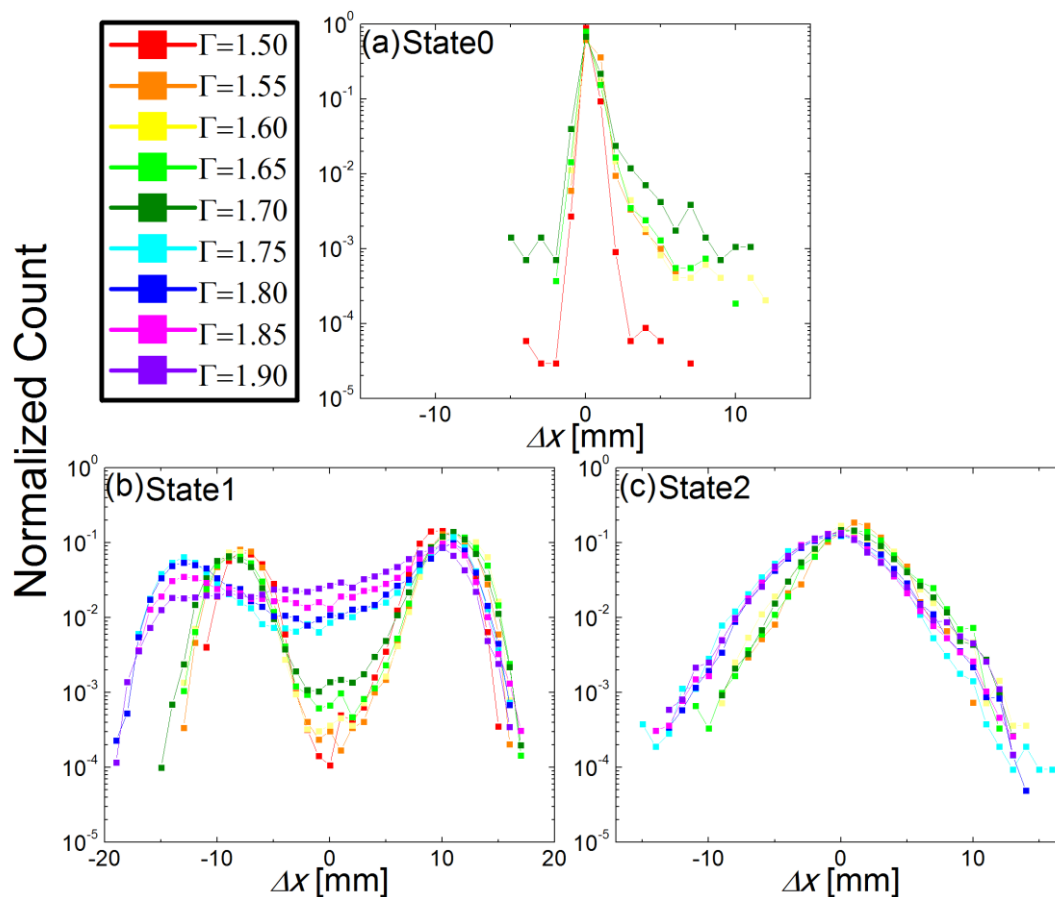


Figure 4-3 三形態不同 Γ 的位移分佈圖

$N=5$ ，(a)、(b)、(c) 分別對應到形態 0、形態 1 及形態 2。所選用 bin 的大小為 1mm， Δt 則為 0.2s。每一筆位移分佈都以該分佈的總資



料數作標準化處理，同時每一筆位移分佈都至少含有 1000 個位移資料點。不同的 Γ 值用不同的顏色標示，如圖標所示。形態 0 的資料點為 $\Gamma=1.50-1.70$ ，形態 1 的資料點為 $\Gamma=1.50-1.90$ ，形態 2 的資料點則為 $\Gamma=1.55-1.90$ 。

[http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/Chap4/fig4.3_3_state_pdf_dx=1_dt=5.pdf]

4.1.3 Γ 對方均位移的影響

在位移分佈之後，我進一步探討 Γ 對方均位移的影響。Figure 4-4 為三個形態方均位移隨 Γ 的變化。

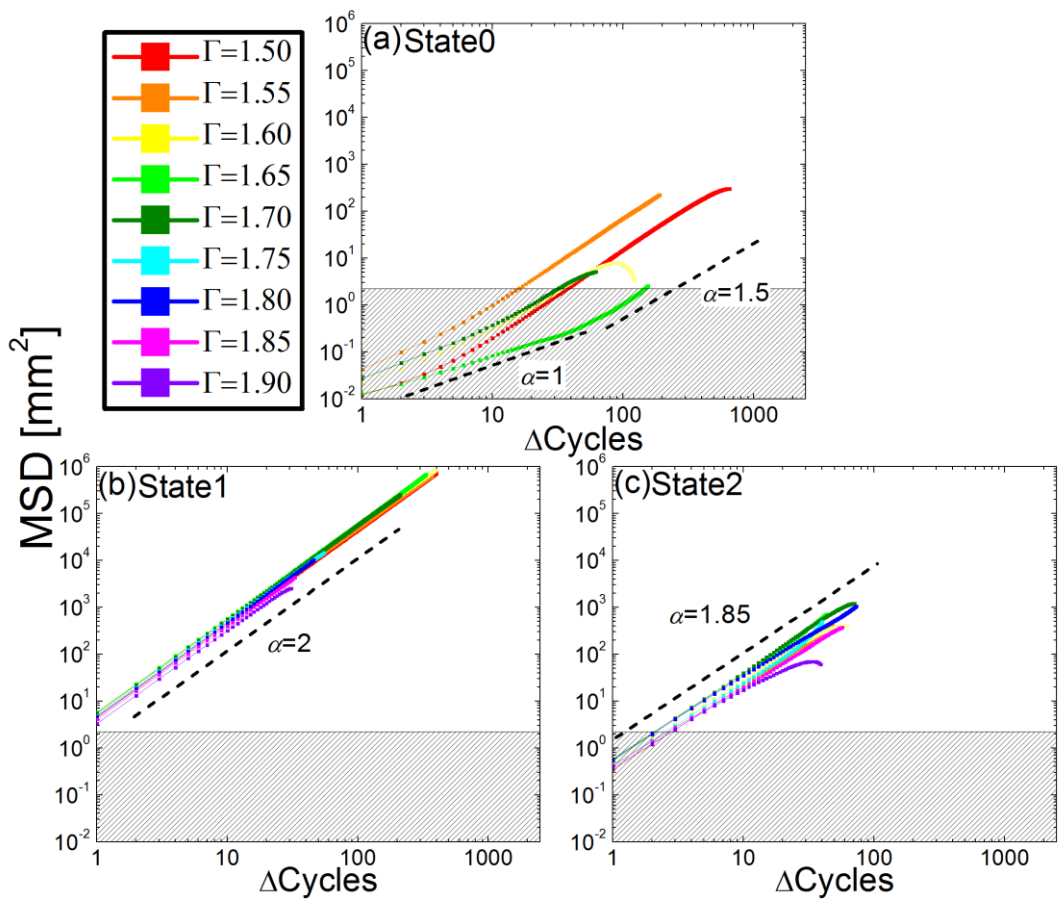


Figure 4-4 方均位移隨 Γ 的變化

$N=5$ ，(a)、(b)、(c) 分別對應到形態 0、形態 1 及形態 2，不同的 Γ 值用不同顏色標示，每一筆資料皆是由 10 筆長度超過 20 個週期的區

段所計算而得。斜線部分表示軌跡精確度以下區域。雙對數作標上的直線表示其值 $\propto \Delta t^\alpha$ ， α 為直線斜率。圖上直線斜率 α 值的選擇是以肉眼判斷選擇。形態0的資料點為 $\Gamma=1.50-1.70$ ，形態1的資料點為 $\Gamma=1.50-1.90$ ，形態2的資料點則為 $\Gamma=1.55-1.90$ 。

[http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/Chap4/fig4.4_MSD_vary_G.pdf]

我們可以從圖中發現，三個形態的方均位移在不同 Γ 有非常相似的表現。形態0的方均位移皆有一明顯的轉折，都是從 $\alpha \approx 1$ 增加至 $\alpha \approx 1.5$ 。形態1的方均位移有非常高的一致性，不同 Γ 值的方均位移皆重合在一起，同時 α 值也都約等於2。形態2不同 Γ 值的方均位移也同樣疊合在一起，其 α 值也都在1.85左右。

在研究 Γ 對位移分佈及對方均位移的影響後，我發現顆粒鍊形態的水平運動並不隨著 Γ 的改變而有顯著變化。形態0還是維持小尺度的隨機運動，形態1也依然沿著其翹起端以大致相同的速率前行。形態2同形態0，一樣是隨機運動，但其向外擴散的運動是一種超擴散運動，比形態0來的快。但 Γ 的改變對顆粒鍊的水平運動還是有顯著影響，如同4.1.1及所述，這主要體現在改變形態分佈的比例以及形態區段的長度上。

4.2 顆粒數 (N)

我所研究的顆粒鍊以短顆粒為主，而為了能看到3個形態的出現，顆粒數至少要大於或等於5。所以這一節所要探討的顆粒數 N 將介於5-8之間。



4.2.1 顆粒數對形態分佈的影響

Figure 4-5 為 $N=5-8$ 顆粒鍊形態分佈圖，如同 Figure 4-1，紅線以上的區間表示形態 0 所佔的比例，紅、藍線之間的區域為形態 1 所佔的時間比例，藍線以下則為形態 2 所佔的時間比例。

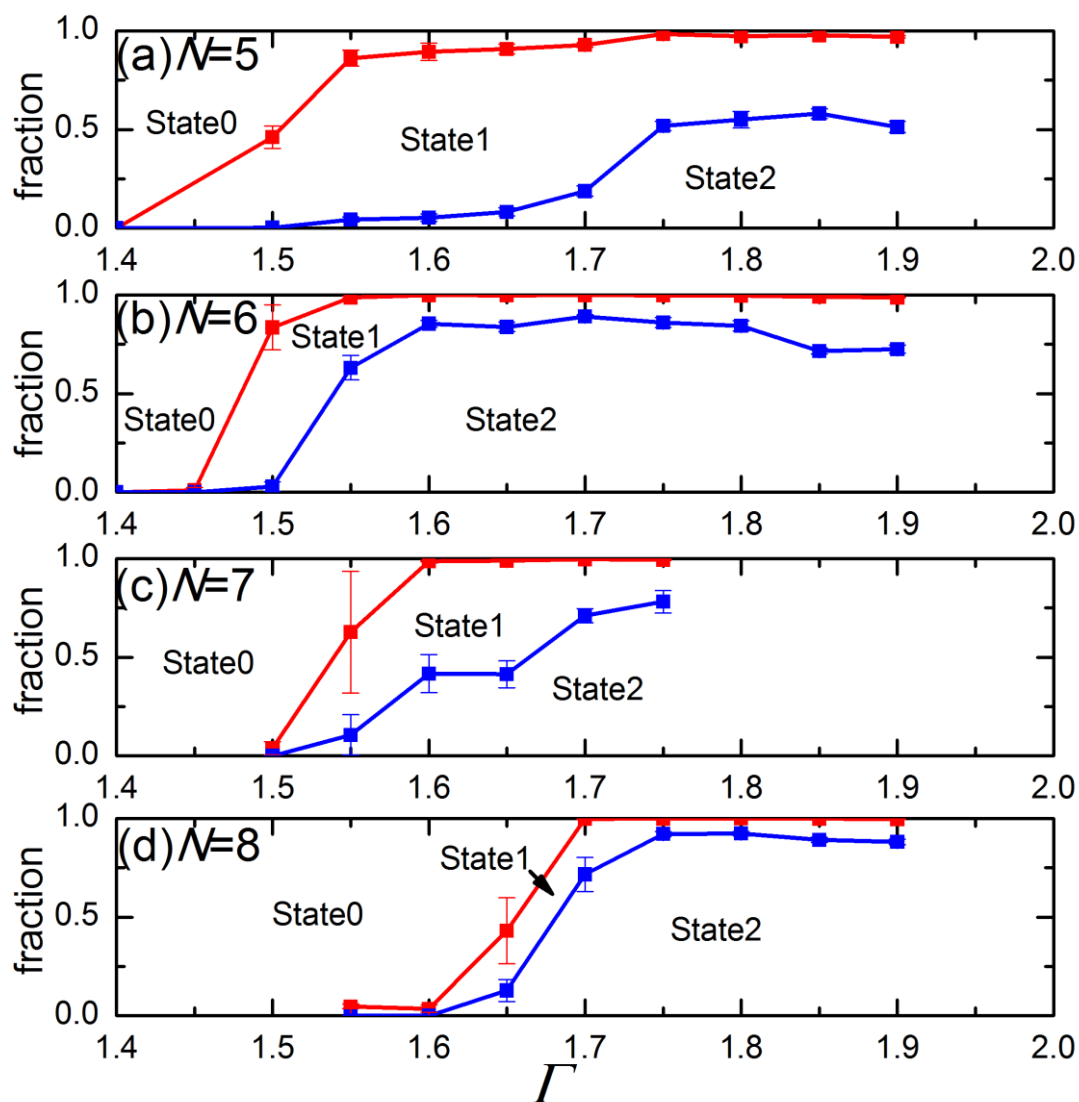


Figure 4-5 顆粒鍊形態分佈隨 Γ 的變化

每一筆資料皆為總長度 43.3 分鐘 (65000 幀) 的統計結果。藍線代表顆粒鍊兩端同時翹起，紅色代表至少一端翹起。所以紅色上端為形態 0 所佔有比例，紅線藍線之間區域為形態 1 所佔有比例，藍線以下則為形態 2 所佔有比例。標準差的估算方法為將原始 65000 個震動週期

影像隨機切成 100 個長度為 15000 個震動週期的片段，計算這些片段的形態比例而得到平均值及標準差。(a)、(b)、(c)、(d) 分別為 $N=5$ 、6、7、8。

[http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/Chap4/fig4.6_N=5~8_state_fraction.pdf]

短顆粒鍊在震動場上的形態轉變會隨著顆粒數的增加而有延後發生的現象。以 Figure 4-5 (d) $N=8$ 為例，顆粒鍊從形態 0、形態 1 為主轉變為形態 1、形態 2 為主是發生在 $\Gamma = 1.6-1.7$ 時。但當 $N=6$ 時，形態轉變的大致上發生在 $\Gamma = 1.45-1.55$ 時。所以形態轉變的發生大致隨著顆粒數的增加而延後發生。比較特別的是，當 $N=5$ 時，雖然形態 1 隨著 Γ 的增加很快地就佔有相當比例，但其形態 2 卻要等到 Γ 增加至 1.7 才會佔有較大的比例，這是由於當顆粒數過少時，其兩端會彼此影響，因而較不容易同時翹起。

4.2.2 顆粒數對位移分佈的影響

Figure 4-6 為不同形態的位移分佈隨著顆粒數的變化。因不存在一個單一的 Γ 值，使三個形態都有足夠多的資料點，所以我選擇兩個不同的 Γ 值作圖，所選用的 $\Delta t = 0.2s$ 。我們可以很清楚地由分佈圖中看到，前一章針對三個形態特性所作的描述在顆粒數改變的情況下依然適用。形態 1 的速度仍然大過形態 2 及形態 0，並保有雙峰的結構。另外，值得注意的在相同 Γ 之下， $N = 6、7、8$ 形態 1 位移的速率大致相同，但明顯小於 $N = 5$ 的形態 1 速率。

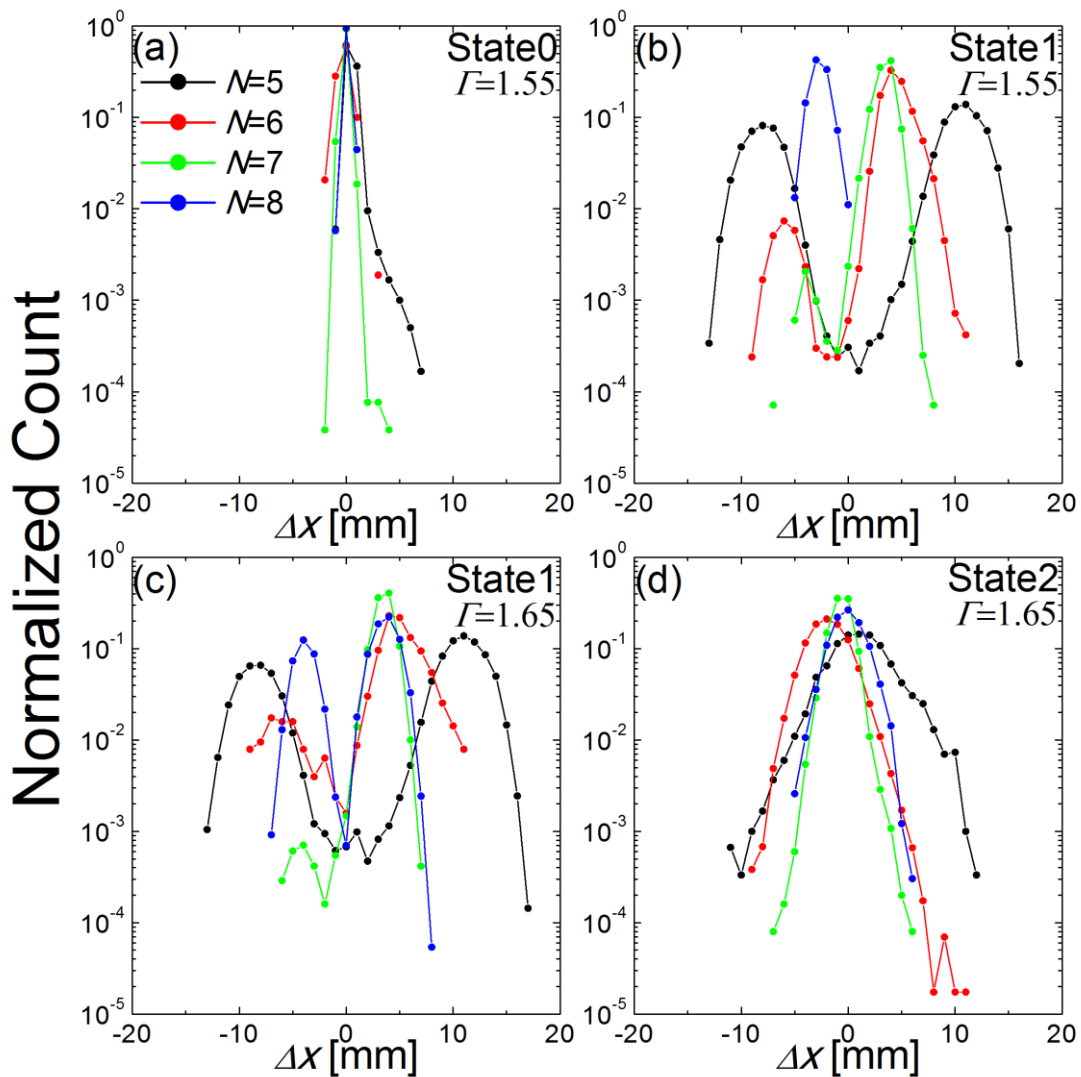


Figure 4-6 形態位移分佈隨著 N 的變化

(a) — (d) 為三形態位移分佈圖隨顆粒數的變化，所選用的 Δt 為 0.2s，bin 的大小為 1mm，同時每一筆位移分佈都以該分佈的總資料數作標準化處理，不同的顆粒數用不同顏色標示，如圖標所示。(a) 為形態 0 在 $\Gamma = 1.55$ 的位移分佈圖，其中 $N = 5、6、7、8$ 的位移分佈所擁有的資料筆數分別為 5994 筆、530 筆、26172 筆以及 60117 筆。

(b) 為形態 1 在 $\Gamma = 1.55$ 的位移分佈圖，其中 $N = 5、6、7、8$ 的位移分佈所擁有的資料筆數分別為 29472 筆、16705 筆、28066 筆以及 2339 筆。(c) 為形態 1 在 $\Gamma = 1.65$ 的位移分佈圖，其中 $N = 5、6、7、8$ 的位移分佈所擁有的資料筆數分別為 48737 筆、1262 筆、31192

筆以及 18530 筆。(d) 為形態 2 在 $\Gamma = 1.65$ 的位移分佈圖，其中 $N = 5、6、7、8$ 的位移分佈所擁有的資料筆數分別為 3003 筆、57543 筆、25069 筆以及 6588 筆。

[http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/Chap4/fig4.7_histogram_vary_N.pdf]

4.2.3 顆粒數對方均位移的影響

我可以透過計算顆粒鍊的方均位移來進一步了解顆粒數對形態的影響，如

Figure 4-7。

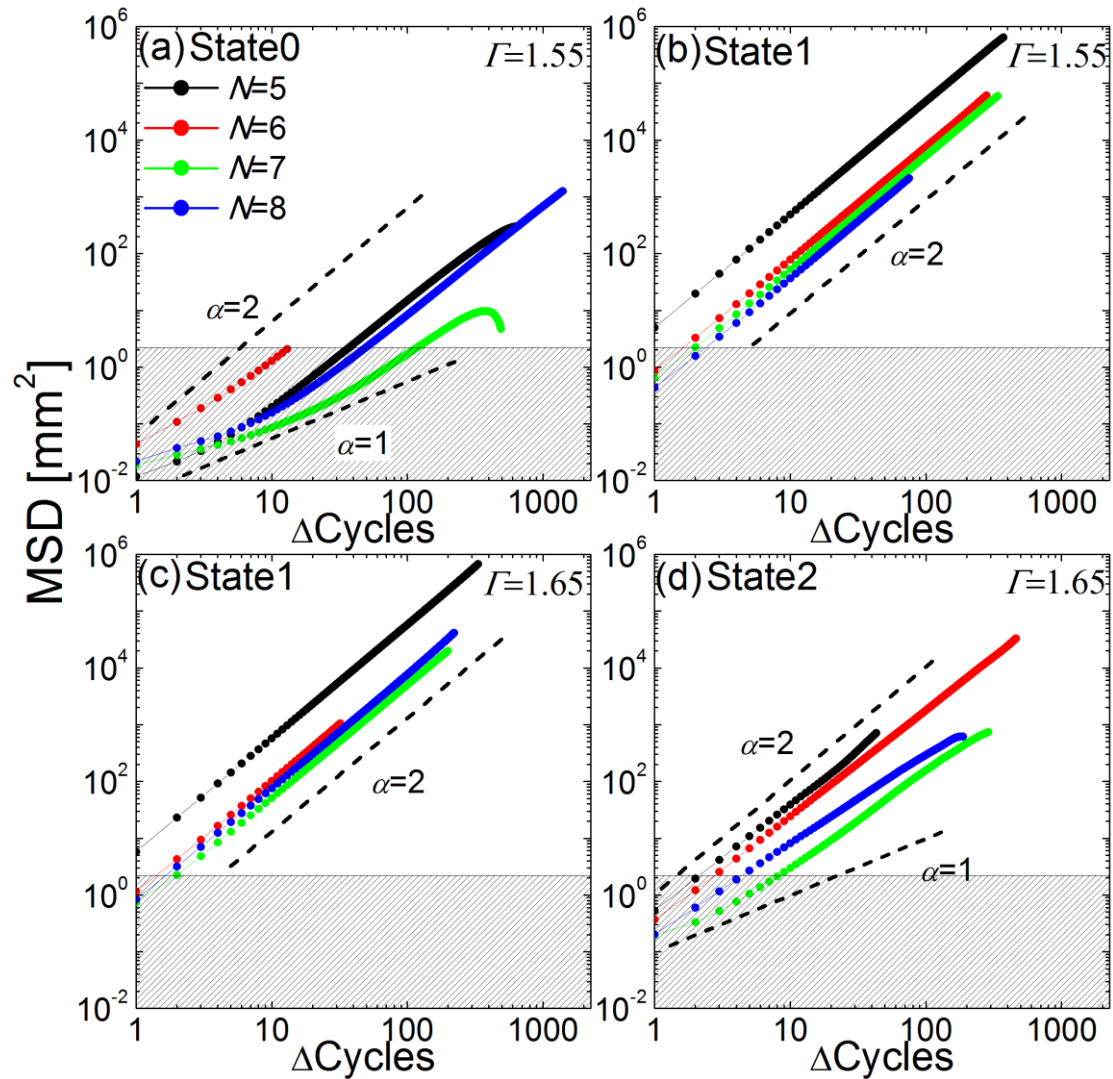


Figure 4-7 三個形態方均位移隨著顆粒數的變化

(a)、(b) 為不同 N 在 $\Gamma = 1.55$ 形態 0、形態 1 的方均位移。(c)、

(d) 為不同 N 在 $\Gamma = 1.65$ 形態 1、形態 2 的方均位移。每一筆資料皆是由 10 筆長度超過 0.2s 的區段所計算而得，斜線部分表示軌跡精確度以下區域。圖上 α 值是依虛線斜率標示。

[http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/Chap4/fig4.8_MSD_vary_N.pdf]

Figure 4-7 為三個形態的方均位移隨著 N 的變化，同樣地，不同的形態我選用不同的 Γ 值。我們可以從圖中發現，形態的特性同樣不隨著 N 的改變而有明顯的變化：形態 0 除了 $N = 6$ 的方均位移稍短之外，其它的資料都可看出在某一個 Δt 方均位移會偏折，也同樣都是由 α 接近 1 偏折到 1.6 左右。形態 1 的方均位移則有高度的一致性，其斜率也都非常接近 2。形態 2 的方均位移雖然 α 值並不完全相同，但也都介於 1–2 之間。所以，與前一小節的位移分佈綜合來看，形態的表現確實不隨著顆粒數的改變而產生本質上的改變。

4.3 系統不對稱性的影響評估

4.3.1 基板水平的影響評估

為了評估振動台基板水平對系統造成的影響，我將環形軌道分成四等份，並以 $N = 5$ ， $\Gamma = 1.70$ 的參數為例，分別計算顆粒鍊於軌道不同部分中形態 1 的位移分佈，如 Figure 4-8 所示。我以顆粒鍊在 Γ 足夠大時，形態 1 較傾向於哪一端移動作為系統不對稱性的粗步估計。所以在觀察 Figure 4-8 後，我們發現，不管是在軌道的哪一部分，顆粒鍊都比較傾向於往逆時鐘方向移動。這告訴我們，基板水平對顆粒鍊行為的影響要小於顆粒鍊自身不對稱性的影響。

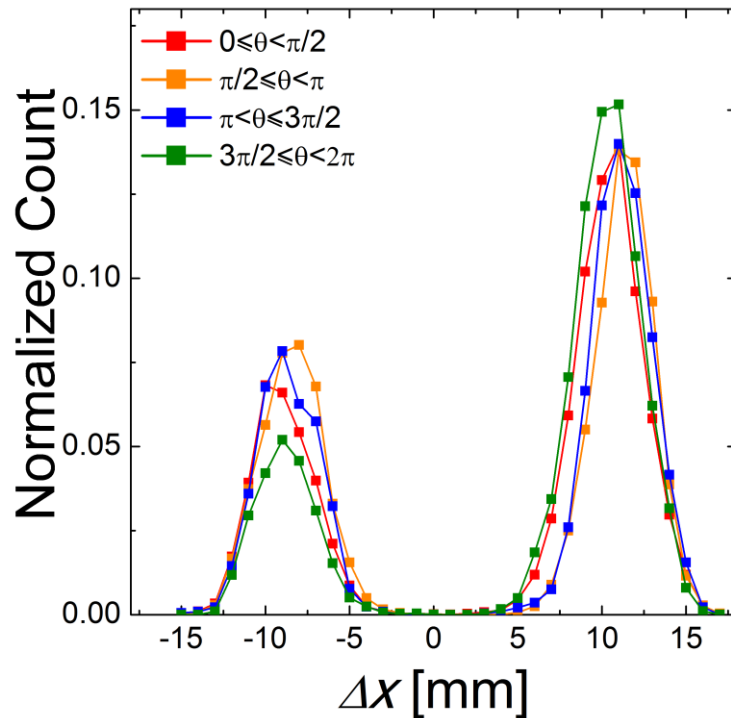


Figure 4-8 振動台的不對稱性評估

$N = 5$ 、 $\Gamma = 1.70$ ，四條曲線為顆粒鍊在軌道四個部分各自的水平位移分佈。軌道分成四個等份，分別是： $0 \leq \theta < \pi/2$ 、 $\pi/2 \leq \theta < \pi$ 、 $\pi \leq \theta < 3\pi/2$ 、 $3\pi/2 \leq \theta < 2\pi$ ，以不同色標表示， θ 的定義如 2-4 所示。bin 的大小為 1mm， Δt 則為 0.2s。每一筆位移分佈都以該分佈的總資料數作標準化處理，而每一等份所對應到的資料數為 11719、10283、7538 及 9893。

[http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/Chap4/fig4.9_symmetry_of_substrate.pdf]

4.3.2 顆粒鍊的不對稱性

為了評估顆粒鍊的不對稱性對系統的影響，我以 $N = 5$ ， $\Gamma = 1.60$ 的參數為例，將顆粒鍊 180° 翻轉，翻轉前後皆以 25fps 拍攝~43 分鐘的影像。我比較兩筆實驗資料形態 1 的位移分佈直方圖，如 Figure 4-9 所示。圖 (a)、(b) 分別為翻轉前、翻轉後的位移分佈。我們可以清楚的由圖中看到，翻轉前、翻轉後

形態 1 的兩位移分佈峰值高度正好互換：翻轉前顆粒鍊比較傾向往負方向移動，翻轉後則相反。我們可以由此推測，顆粒鍊統計行為上的不對稱性，主要是由顆粒鍊自身的不對稱性而來。

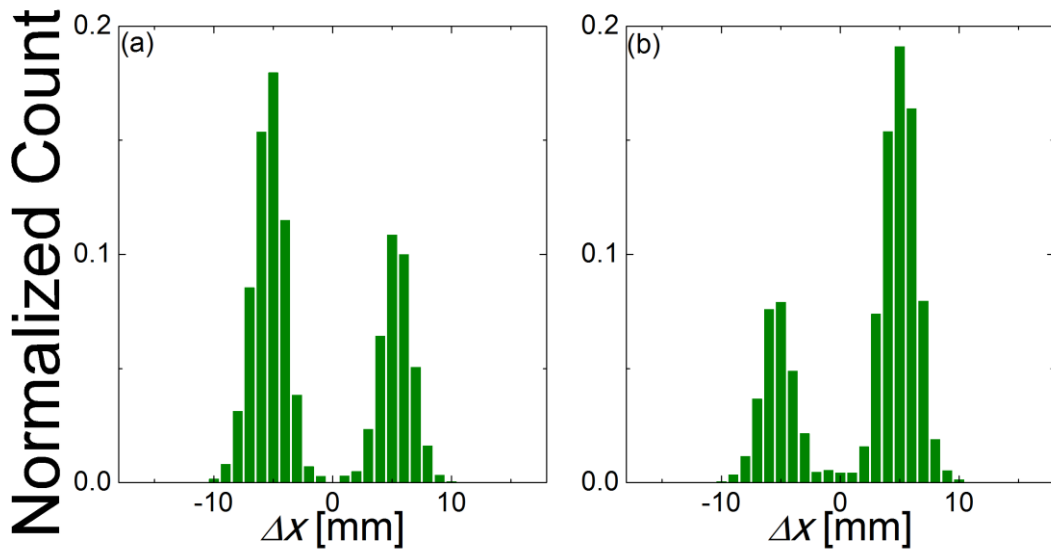


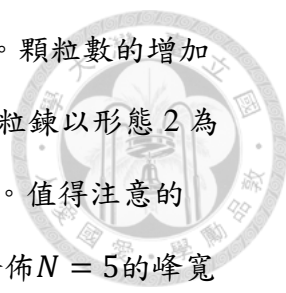
Figure 4-9 顆粒鍊的不對稱性評估

$N = 5$ 、 $\Gamma = 1.60$ 顆粒鍊在翻轉 180° 前後的形態 1 位移直方圖。(a) 為翻轉前，(b) 為翻轉後。bin 的大小為 1mm， Δt 則為 0.2s。(a)、(b) 分別對應到 10722、5399 筆資料數。

[http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/Chap4/fig4.10_symmetry_of_chain.pdf]

4.4 小結

在第四章中，我針對實驗的控制參數以及系統的不對稱性對形態的水平運動特性所造成的影響進行討論。 Γ 對形態造成的影響可概略分成兩類：一是對形態分佈造成的影響，一是對形態水平運動特性造成的影響。 Γ 在從 1.50 增加至 1.90 的過程中，顆粒鍊會從形態 0 為主，經形態 1 為主再過渡到形態 2 為主；同時，形態之間的互相轉換也會隨著 Γ 增加而更加頻繁。不過，雖然形態的分佈隨著 Γ 的增加而有劇烈的改變，形態本身的水平運動特性大致保持相同，我們可以同時從形態的水平位移分佈及方均位移的一致性看出這點。



在短顆粒鍊的情形下，系統對少量顆粒數的改變並不敏感。顆粒數的增加大致會讓形態的轉換延後發生，也就是需要更大的 Γ 才能讓顆粒鍊以形態 2 為主。但顆粒鍊形態的水平運動特性仍然保有一定程度的一致性。值得注意的是， $N = 5$ 形態 1 的移動比 $N = 6、7、8$ 來的快，形態 2 位移分佈 $N = 5$ 的峰寬也較 $N = 6、7、8$ 來的寬。

此外，我們透過形態 1 的位移分佈來簡單探討系統的不對稱性。透過比較顆粒鍊在軌道上不同位置的位移分佈，我們發現在此系統中，顆粒鍊自身不對稱的影響大過於基板水平造成的影響。同時，我們也進一步比較顆粒鍊翻轉前後的位移分佈，確認顆粒鍊統計行為上的不對稱確實主要來自於顆粒鍊自身的不對稱性。



Chapter 5 結果與討論



在我們之前的研究中，我們得知短顆粒鍊在垂直振動場下會有自發性的形態轉變，而在此論文中，我們便利用形態來研究顆粒鍊的水平運動：我們依據形態將顆粒鍊的軌跡切成許多區段，並研究這些區段的特性。我們發現，當顆粒鍊處於直上直下的形態 0 時，其水平運動是一種隨機漫步，其位移量小，且方向也為隨機。但當觀察時間拉長時，形態 0 顆粒鍊的位移出現不對稱的表現，我們推測這是由顆粒鍊自身的不對稱所造成的結果。當顆粒鍊處於一端翹起的形態 1 時，會沿著翹起端以大致相同的速率前行，其水平運動有高度的一致性。而當顆粒鍊處於兩端同時翹起的形態 2 時，其水平運動為超擴散運動，且其方均位移在雙對數作標圖上的斜率大於 1，所以是一種超擴散運動。其運動方向是由顆粒鍊兩端“拔河”所決定，而顆粒鍊會往“拔河”佔優勢的一端持續移動數個週期，也就是形態 2 週期與週期間的位移有一定程度的關聯性。

此外，我們也研究控制參數對形態水平運動特性的改變。在 Γ 增加時，顆粒鍊處於形態 2 的比例會增加，同時，形態轉換的頻率也會增加，這也同時表示區段的平均長度會隨著 Γ 的增加而減少。但形態的水平運動特性並不隨著 Γ 的改變而有顯著變化。同時，形態的水平運動特性對顆粒鍊顆粒小範圍的改變也不敏感：形態 0 同樣為移動較緩慢的隨機漫步；形態 1 同樣為等速率運動；形態 2 也同樣為超擴散運動，但不同顆粒數的 α 值會有所改變。

我們也試圖釐清系統的不對稱對顆粒鍊水平運動所造成的影響：在我們的系統中，振動台水平對顆粒鍊的影響小於顆粒鍊自身的不對稱性，且顆粒鍊在統計行為上的不對稱性確實是由顆粒鍊自身的不對稱性而來。

所以，經由以上的研究，我們發現，透過顆粒鍊的形態確實能更深入了解顆粒鍊的水平運動。而同時，這些形態所對應到的水平運動特徵隨著控制參數的改變仍然保有一定程度的共通性。

參考資料



Brown, R. (1828). XXVII. A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *Philosophical Magazine Series 2*, 4(21), 161-173.

Chen, K., Chou, Y. C., & To, K. (2013). Force generation by granular chains moving randomly on periodic ratchet plates. *Physical Review E*, 87(1), 012711.

Deseigne, J., Dauchot, O., & Chaté, H. (2010). Collective Motion of Vibrated Polar Disks. *Physical Review Letters*, 105(9), 098001.

Deseigne, J., Leonard, S., Dauchot, O., & Chate, H. (2012). Vibrated polar disks: spontaneous motion, binary collisions, and collective dynamics. *Soft Matter*, 8(20), 5629-5639. doi:10.1039/C2SM25186H

Einstein, A. (1905). Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen der physik*, 322(8), 549-560.

Kudrolli, A. (2010). Concentration Dependent Diffusion of Self-Propelled Rods. *Physical Review Letters*, 104(8), 088001.

Kudrolli, A., Lumay, G., Volfson, D., & Tsimring, L. S. (2008). Swarming and Swirling in Self-Propelled Polar Granular Rods. *Physical Review Letters*, 100(5), 058001.

Li, L., Nørrelykke, S. F., & Cox, E. C. (2008). Persistent cell motion in the absence of external signals: a search strategy for eukaryotic cells. *PLoS one*, 3(5), e2093.

Lin, W. T., Sun, Y. C., Chang, C. C., Lin, Y. C., Peng, C. W., Juan, W. T., & Tsai, J. C. (2014). Ratcheting and Transitions: Short Granular Chain in a Gradient of Vibration. *Physical Review Letters*, 112(5), 058001.

Metzler, R., & Klafter, J. (2000). The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Physics reports*, 339(1), 1-77.

Pearson, K. (1905). The problem of the random walk. *Nature*, 72, 342.

Richardson, L. F. (1926). Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 110(756), 709-737.

Safford, K., Kantor, Y., Kardar, M., & Kudrolli, A. (2009). Structure and dynamics of vibrated granular chains: Comparison to equilibrium polymers. *Physical Review E*, 79(6), 061304.

Scher, H., & Montroll, E. W. (1975). Anomalous transit-time dispersion in amorphous solids. *Physical Review B*, 12(6), 2455-2477.

Sun, Y. C., Fei, H. T., Huang, P. C., Juan, W. T., Huang, J. R., & Tsai, J. C. (2016). Short granular chain under vibration: Spontaneous switching of states. *Physical Review E*, 93(3), 032902.

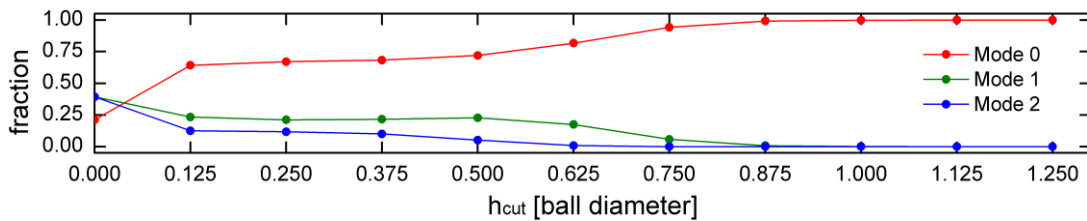
Yadav, V., & Kudrolli, A. (2012). Diffusion of granular rods on a rough vibrated substrate. *The European Physical Journal E*, 35(10), 1-7. doi:10.1140/epje/i2012-12104-0

附錄



附錄一 h_{cut} 對形態判定的影響

圖一為我們選擇的 h_{cut} 對形態判定的影響。我們改變選取的 h_{cut} ，並觀察各型態分布比例的變化。在 $h_{cut} = 0.125 - 0.375$ 的區域內，形態分佈並不隨著 h_{cut} 而有明顯的改變，同時我們在加以人為的視覺判斷後，決定此論文的 $h_{cut} = d/4$ 。



Appendix 1 h_{cut} 對形態判定的影響

$N = 8$ 、 $\Gamma = 1.65$ 。金屬小球的直徑為 8 個像素，而 h_{cut} 的選擇為 1–8 像素。

[http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/Appendix/appendix1_tolerance_on_dh_for_determine_the_Mode.pdf]

附錄二 線上附錄



線上目錄請參考網址 <http://www.phys.sinica.edu.tw/jctsai/Jia2016/>

Ch1. 緒論

Reference

Ch2. 實驗架設與影像分析: Chapter 2 archive

Map of Sun's combine tracking to position data:

GPT10 position data producing map

--programming code: IDL7.0 code

--Figure2-8 顆粒鍊長度變化圖 fig2.8_chain_length_variation.pdf :

GPT10 chain length reader Jia20160301.pro

GPT10 chain length variation Jia20160302.m

Ch3. 水平運動與形態之關聯: Chapter 3 origin file

Chapter 3 archive

-- Figure3-2 不同形態位移分佈直方圖

-- Figure3-3 形態 2 方均根位移圖

-- Figure3-4 形態 0 軌跡圖

-- Figure3-5 形態 0 的位移分佈圖

-- Figure3-6 形態 0 方均位移圖

-- Figure3-7 形態 1 軌跡圖

-- Figure3-8 形態 1 的位移分佈圖

-- Figure3-9 形態 1 的方均位移

-- Figure3-10 形態 2 軌跡圖

-- Figure3-11 形態 2 的位移分佈圖



- Figure3-12 形態 2 方均位移圖
- Figure3-13 形態的位移延滯圖
- Figure3-14 形態 1 與形態 2 顆粒鍊頭尾高度差與位移散佈圖
- Figure3-15 區段之位移-時距散佈圖
- Figure3-16 形態 2 的步伐散佈圖

Chapter 3 programming code

- 三形態位移分佈直方圖:

GPT10 distribution split mode Jia 20150402.m

- 三形態方均位移圖:

GPT10 weighted average MSD vary gamma Jia20160316.m

GPT10 weighted average MSD Jia20160303.m

- Figure3-13 形態的位移延滯圖:

GPT10 lag_plot split state Jia 20150615.m

- Figure3-14 形態 1 與形態 2 顆粒鍊頭尾高度差與位移散佈圖:

GPT10 level diff end Jia20160504.m

GPT10 dx vs dh with manually dt Jia20160512.m

- Figure3-15 區段之位移-時距散佈圖:

GPT10 split mode Dx and Dt Jia 20150427.m

- Figure3-16 形態 2 的步伐散佈圖:

GPT10 level diff end Jia20160504.m

GPT10 State2 turn_def Jia20160512.m

Ch4. 控制參數的角色及其他評估: Chapter 4 origin file

Chapter 4 archive

- Figure4-2 三個形態區段不同 Γ 長度分佈圖
- Figure4-3 三形態不同 Γ 的位移分佈圖



- Figure4-4 方均位移隨 Γ 的變化
- Figure4-5 顆粒鍊形態分布隨 Γ 的變化
- Figure4-6 形態位移分佈隨著 N 的變化
- Figure4-7 三個形態方均位移隨著顆粒數的變化
- Figure4-8 振動台的不對稱性評估
- Figure4-9 顆粒鍊的不對稱性評估

Chapter 4 programming code

- 位移分佈圖:

GPT10_split_state_pdf Jia20160203.m

GPT10_interval_time_histogram Jia20160603.m

- 方均位移圖:

GPT10_weighted_average_MSD_vary_gamma Jia20160316.m

- Figure4-2 三個形態區段不同 Γ 長度分佈圖:

GPT10_split_mode Dx and Dt Jia 20150427.m

GPT10_interval_time_histogram Jia20160603.m

- Figure4-8 振動台的不對稱性評估:

GPT10_level_check_histogram Jia20160325.m

- Figure4-9 顆粒鍊的不對稱性評估:

GPT10_distribution_split_mode Jia 20150402.m

附錄

- Appendix 1 h_{cut} 對形態判定的影響 Appendix archive
- Appendix 2 Angle correction for chain position deciding
GPT10_angle_correction.pdf