

國立臺灣大學工學院機械工程學研究所

碩士論文

Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis



應用位移李次群理論於三類不連續可動機構之

合成及運動分析

Synthesis and Motion Analysis of
Three Discontinuous Mobility Mechanisms via
Displacement Lie Subgroup Theory

楊宗霓

Tsung-Ni Yang

指導教授：李志中 博士

Advisor: Jyh-Jone Lee, Ph.D.

中華民國 105 年 7 月

July, 2016

致謝

首先感謝指導教授李志中老師，於兩年研究期間的指導與協助，領引我並給予指正。也感謝口試委員劉霆老師及郭進星老師，指導我從不同的角度去看事情，幫助我更加完整我的論文。

這兩年期間，有瑋璞學姊、柏諺學長、智達學長、景棋學長的經驗分享，與同學鼎翔、洪揚、耿勳相互討論遇到的所有問題，以及學弟福元、承原、坤祐、宗翰的各種幫助，充實了我的碩士生涯，實驗室融洽且歡樂的氣氛使得我的校園生活很精彩。

最重要的是要感謝我的家人及親密的朋友們，讓我能無憂地投注於碩士研究，無限給予我很多關心與支持，因為有周遭的所有人的協助，我才能如此順利地完成這份碩士研究論文。





應用位移李次群理論於三類不連續可動機構之 合成及運動分析

研究生：楊宗寬 指導教授：李志中 博士

摘要

不連續可動機構為具有兩種或兩種以上不可共存之運動的特殊機構。特殊桿件幾何、接頭運動軸的方向等皆可能是產生此現象的原因。因此在眾多研究當中，對此種機構的定義仍是眾說紛紜，合成方法也隨之而不同，進而導致部分類型之不連續可動機構的合成方法也尚未完全發展，本文主旨在於將此種特殊機構進行有系統的定義及分類，設法完善不連續可動機構的合成方法，並詳細說明些許案例。本文採用李群作為機構分析及合成的運算工具，以便於快速的分析得知機構的運作狀況，亦有考慮到合成上的需求。隨後，本文將不連續可動機構依據產生原因進行分類，並針對其中一大類之不連續可動機構的合成方法進行整理。接著應用此合成方法實際將符合設定之條件的機構設計出來，並利用電腦輔助設計軟體繪製出機構模型來進行運動驗證。最後將呈現兩個擁有兩種運動模式之不連續可動機構，以及一個具三種運動模式之不連續可動機構，且探討合成過程中所得到不符合之案例及其不符預期之因素。

關鍵字：李群、位移群、位移李次群、不連續可動性、不連續可動機構、機構合成

Synthesis and Motion Analysis of Three Discontinuous Mobility Mechanisms via Displacement Lie Subgroup Theory



Student : Tsung-Ni Yang

Advisor : Dr. Jyh-Jone Lee

Abstract

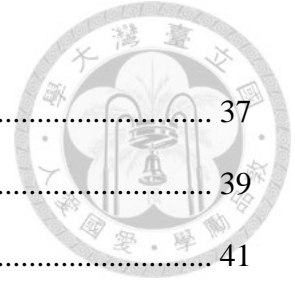
Discontinuously movable mechanisms (DMM) are special mechanisms with two or more working modes. Additionally, these modes cannot work simultaneously. Such mechanisms with these characteristics result from various reasons such as the geometry of the links and directions of the joint axes. Therefore, definitions and methods of synthesis of DMMs are wildly divided and depend on their classifications. In the virtue of diverse definitions of DMMs and indefinite synthesis method of some categories of DMMs, the purpose of this work is to systematically classify present DMMs and to develop a method of synthesis of DMMs. Several cases are discussed in detail. In order to learn the motion of the mechanisms fast, this study analyzes and synthesizes DMMs on the strength of Lie group theorem. Firstly, this paper presents the classification of DMMs according to their prime characteristics. Then, one of the classes of DMMs is analyzed on the basis of this thesis. Last but not least, the final designs, which are two DMMs with bifurcation and one with trifurcation, are modeled by a CAD software to validate their motions with discussions of the improper ones as well.

Key words: Lie group, displacement group, displacement Lie subgroup, discontinuous mobility, discontinuously movable mechanism, mechanism synthesis

目錄



摘要	i
Abstract.....	ii
目錄	iii
圖目錄	v
表目錄	viii
第一章 緒論	1
1.1 前言	1
1.2 文獻回顧	2
1.3 研究動機及目的	4
1.4 論文架構	4
第二章 機構之分析理論與合成方法	6
2.1 李群及位移李次群	6
2.2 機構運動分析方法	11
2.3 新機構產生方法	18
第三章 不連續可動機構	21
3.1 不連續可動機構	21
3.2 不連續可動機構運動分析方法	24
3.3 共同特徵	30
3.4 小結	32
第四章 不連續可動機構之合成與分析	33
4.1 設計合成方法	33
4.2 合成具 $1/S(O_1)$ 及 $1/S(O_2)$ 運動模式之不連續可動機構	36
4.2.1 列舉原生機構	36



4.2.2	結合原生機構	37
4.2.3	改變接頭連接次序	39
4.2.4	初步篩選判斷	41
4.2.5	結果展示	43
4.2.6	其他案例討論	53
4.3	合成具 $1/G(\mathbf{y}_1)$ 及 $1/G(\mathbf{y}_2)$ 運動模式之不連續可動機構	54
4.3.1	列舉原生機構	54
4.3.2	結合原生機構	55
4.3.3	改變接頭連接次序	57
4.3.4	初步篩選判斷	60
4.3.5	結果展示	62
4.3.6	其他案例討論	71
4.4	合成具 $R(A, \mathbf{x})$ 、 $R(B, \mathbf{y})$ 及 $R(C, \mathbf{z})$ 運動模式之不連續可動機構	72
4.4.1	列舉原生機構	72
4.4.2	結合原生機構	73
4.4.3	改變接頭連接次序	73
4.4.4	初步篩選判斷	74
4.4.5	結果展示	75
4.4.6	其他案例討論	78
4.5	小結	79
第五章	結論與未來展望	80
5.1	結論	80
5.2	未來研究方向	81
	參考文獻	82



圖目錄

圖 2.2 位移李次群階層關係圖[7]	10
圖 2.3 產生平面運動 $\{G(\mathbf{w})\}$ 之等效運動鏈 [7]	12
圖 2.4 雙平面運動鏈 [7]	13
圖 2.5 $\{X(\mathbf{u})\}\{X(\mathbf{v})\}$ 運動鏈 [14].....	14
圖 2.6 歐丹聯軸器 [10]	15
圖 2.7 4R2P聯軸器 [15].....	16
圖 2.8 五腳並聯機構 [13]	17
圖 3.1 混合型球面及球面7R不連續可動機構 [19].....	24
圖 3.2 6R不連續可動機構 [20].....	26
圖 3.3 平面及平面8R不連續可動機構 [21].....	27
圖 3.4 2-PPRR不連續可動機構 [22].....	29
圖 3.5 不同組成之6R不連續可動機構	31
圖 4.1 不連續可動機構合成流程圖	33
圖 4.2 $R_{v_1}^O R_{v_2}^O * R_{v_4}^O R_{v_3}^O$ 機構.....	36
圖 4.3 $R_{v_1}^O R_{v_2}^O R_{v_3}^O * R_{v_4}^O$ 機構.....	37
圖 4.4 組合機構之 R_W^O 插入範例	39
圖 4.5 交錯機構之 R_W^O 插入範例	41
圖 4.6 $R_{u_1}^{O_1} R_{v_1}^{O_2} R_{u_2}^{O_1} R_{v_2}^{O_2} * R_W^O R_{u_3}^{O_1} R_{v_3}^{O_2}$ 機構於分歧點位置	43
圖 4.7 進入 $\{1/S(O_1)\}$ 運動模式	44
圖 4.8 $R_{u_1}^{O_1} R_{v_1}^{O_2} R_{u_2}^{O_1} R_{v_2}^{O_2} * R_W^O R_{u_3}^{O_1} R_{v_3}^{O_2}$ 機構於 $\{1/S(O_1)\}$ 之端效器運動坐標	45
圖 4.9 $R_{u_1}^{O_1} R_{v_1}^{O_2} R_{u_2}^{O_1} R_{v_2}^{O_2} * R_W^O R_{u_3}^{O_1} R_{v_3}^{O_2}$ 機構於 $\{1/S(O_1)\}$ 之接頭運動狀態	45
圖 4.10 進入 $\{1/S(O_2)\}$ 運動模式	46



圖 4.11 $R_{u_1}^{O_1} R_{v_1}^{O_2} R_{u_2}^{O_1} R_{v_2}^{O_2} * R_w^O R_{u_3}^{O_1} R_{v_3}^{O_2}$ 機構於 $\{1/S(O_2)\}$ 之端效器運動坐標 47

圖 4.12 $R_{u_1}^{O_1} R_{v_1}^{O_2} R_{u_2}^{O_1} R_{v_2}^{O_2} * R_w^O R_{u_3}^{O_1} R_{v_3}^{O_2}$ 機構於 $\{1/S(O_2)\}$ 之接頭運動狀態 47

圖 4.13 $R_{u_1}^{O_1} R_{v_1}^{O_2} R_{v_2}^{O_2} R_{u_2}^{O_1} * R_{u_3}^{O_1} R_w^O R_{v_3}^{O_2}$ 機構於分歧點位置 48

圖 4.14 進入 $\{1/S(O_1)\}$ 運動模式 49

圖 4.15 $R_{u_1}^{O_1} R_{v_1}^{O_2} R_{v_2}^{O_2} R_{u_2}^{O_1} * R_{u_3}^{O_1} R_w^O R_{v_3}^{O_2}$ 機構於 $\{1/S(O_1)\}$ 之端效器運動坐標 49

圖 4.16 $R_{u_1}^{O_1} R_{v_1}^{O_2} R_{v_2}^{O_2} R_{u_2}^{O_1} * R_{u_3}^{O_1} R_w^O R_{v_3}^{O_2}$ 機構於 $\{1/S(O_1)\}$ 之接頭運動狀態 50

圖 4.17 進入 $\{1/S(O_2)\}$ 運動模式 51

圖 4.18 $R_{u_1}^{O_1} R_{v_1}^{O_2} R_{v_2}^{O_2} R_{u_2}^{O_1} * R_{u_3}^{O_1} R_w^O R_{v_3}^{O_2}$ 機構於 $\{1/S(O_2)\}$ 之端效器運動坐標 51

圖 4.19 $R_{u_1}^{O_1} R_{v_1}^{O_2} R_{v_2}^{O_2} R_{u_2}^{O_1} * R_{u_3}^{O_1} R_w^O R_{v_3}^{O_2}$ 機構於 $\{1/S(O_2)\}$ 之接頭運動狀態 52

圖 4.20 $R_{y_1}^B R_{y_2}^E R_{y_1}^C T_{v_1} * R_{y_2}^F T_{v_c} R_{y_1}^D$ 機構於分歧點位置 62

圖 4.21 進入 $\{1/G(y_1)\}$ 運動模式 63

圖 4.22 $R_{y_1}^B R_{y_2}^E R_{y_1}^C T_{v_1} * R_{y_2}^F T_{v_c} R_{y_1}^D$ 機構於 $\{1/G(y_1)\}$ 之端效器運動坐標 64

圖 4.23 $R_{y_1}^B R_{y_2}^E R_{y_1}^C T_{v_1} * R_{y_2}^F T_{v_c} R_{y_1}^D$ 機構於 $\{1/G(y_1)\}$ 之接頭運動狀態 64

圖 4.24 進入 $\{1/G(y_2)\}$ 運動模式 65

圖 4.25 $R_{y_1}^B R_{y_2}^E R_{y_1}^C T_{v_1} * R_{y_2}^F T_{v_c} R_{y_1}^D$ 機構於 $\{1/G(y_2)\}$ 之端效器運動坐標 66

圖 4.26 $R_{y_1}^B R_{y_2}^E R_{y_1}^C T_{v_1} * R_{y_2}^F T_{v_c} R_{y_1}^D$ 機構於 $\{1/G(y_2)\}$ 之接頭運動狀態 66

圖 4.27 $R_{y_1}^B R_{y_2}^E T_{v_1} R_{y_1}^C * R_{y_1}^D R_{y_2}^F T_{v_c}$ 機構於分歧點位置 67

圖 4.28 進入 $\{1/G(y_1)\}$ 運動模式 68

圖 4.29 $R_{y_1}^B R_{y_2}^E T_{v_1} R_{y_1}^C * R_{y_1}^D R_{y_2}^F T_{v_c}$ 機構於 $\{1/G(y_1)\}$ 之端效器運動坐標 68

圖 4.30 $R_{y_1}^B R_{y_2}^E T_{v_1} R_{y_1}^C * R_{y_1}^D R_{y_2}^F T_{v_c}$ 機構於 $\{1/G(y_1)\}$ 之接頭運動狀態 69

圖 4.31 進入 $\{1/G(y_2)\}$ 運動模式 70

圖 4.32 $R_{y_1}^B R_{y_2}^E T_{v_1} R_{y_1}^C * R_{y_1}^D R_{y_2}^F T_{v_c}$ 機構於 $\{1/G(y_2)\}$ 之端效器運動坐標 70



圖 4.33 $R_{y_1}^B R_{y_2}^E T_{v_1} R_{y_1}^C * R_{y_1}^D R_{y_2}^F T_{v_c}$ 機構於 $\{1/G(y_2)\}$ 之接頭運動狀態..... 71

圖 4.34 $R_x^{A_1} * R_x^{A_2}$ 機構..... 72

圖 4.35 $R_x^{A_1} R_y^{B_1} R_z^{C_1} * R_x^{A_2} R_y^{B_2} R_z^{C_2}$ 機構於分歧點位置..... 76

圖 4.36 $R_x^{A_1} R_y^{B_1} R_z^{C_1} * R_x^{A_2} R_y^{B_2} R_z^{C_2}$ 機構之 $\{R(A, \mathbf{x})\}$ 運動軌跡..... 76

圖 4.37 $R_x^{A_1} R_y^{B_1} R_z^{C_1} * R_x^{A_2} R_y^{B_2} R_z^{C_2}$ 機構之 $\{R(B, \mathbf{y})\}$ 運動軌跡 77

圖 4.38 $R_x^{A_1} R_y^{B_1} R_z^{C_1} * R_x^{A_2} R_y^{B_2} R_z^{C_2}$ 機構之 $\{R(C, \mathbf{z})\}$ 運動軌跡..... 78



表目錄

表 2.2 李代數結構對速度場之表示式 [4]	7
表 2.3 位移李次群之運動描述 [5]	9
表 2.4 常用接頭與李次群之對應	10
表 2.5 X 運動基本開放鏈 [9].....	19
表 2.6 含反向排列之 X 運動基本開放鏈	20
表 4.1 去除一旋轉接頭之 $\{1/S(O_1)\}$ 及 $\{1/S(O_2)\}$ 原生機構.....	38
表 4.2 去除一旋轉接頭之 $\{1/S(O_1)\}$ 及 $\{1/S(O_2)\}$ 簡寫原生機構.....	38
表 4.3 兩球面之簡寫機構的接頭填法	38
表 4.4 兩球面混合之簡寫組合機構	39
表 4.5 兩球面混合之簡寫交錯機構	40
表 4.6 初步篩選後的兩球面混合之簡寫可能機構	42
表 4.7 第一種 $\{1/G(\mathbf{y})\}$ 原生機構.....	54
表 4.8 第二種 $\{1/G(\mathbf{y})\}$ 原生機構.....	54
表 4.9 以平移接頭數量分類 $\{1/G(\mathbf{y})\}$ 原生機構.....	55
表 4.10 去除一平移接頭之 $\{1/G(\mathbf{y}_1)\}$ 及 $\{1/G(\mathbf{y}_2)\}$ 原生機構.....	56
表 4.11 去除一平移接頭之 $\{1/G(\mathbf{y}_1)\}$ 及 $\{1/G(\mathbf{y}_2)\}$ 簡寫原生機構	56
表 4.12 兩平面之簡寫機構的接頭填法	56
表 4.13 兩平面混合之簡寫組合機構	57
表 4.14 兩平面混合之簡寫交錯機構	57
表 4.15 初步篩選後的兩平面混合之簡寫可能機構	60
表 4.16 三軸旋轉混合之組合機構	73
表 4.17 三軸旋轉混合之交錯機構	73
表 4.18 三軸旋轉混和之機構類型分類	75



第一章 緒論

1.1 前言

早期的機構學主要以圖解法來進行機構之運動分析，而適用圖解法的機構類型有限，分析結果也比較不準確。然而隨著電腦科技及優化設計的快速發展，亦伴隨著逐漸成熟的解析法及數值分析法於多領域之應用，使得分析機構的方法也愈來愈廣泛與精確，而李群(Lie group)便是其中一種用於機構運動分析的方法。應用李群於機構運動分析的優點在於不須將機構中的桿件尺寸、接頭變數等盡數涵蓋，也不須進行繁複的數學運算，便可快速得知機構的運動狀態，且可藉由分解、結合等方法，將已知機構進行修改，進而設計出新的機構。

於眾多機構中，不連續可動機構(Discontinuously Movable Mechanism, DMM)為其中較特殊的一類。此種機構的運動狀態會受制於運動中之某些情況，造成其接頭有不連續可動的現象，使得機構擁有無法同時進行作動的兩種運動模式。經過十餘年的研究，此類機構已有完善的運動分析方法，但在定義、分類及合成方法等方面還尚有欠缺。實務方面，不連續可動機構將可應用於並聯式機器人、並聯式空間機構、等速聯軸機構、雙摺疊門樞等多種工業用途。故本文將對不連續可動機構進行分類、分析，對已設計出之系統化合成方法進行驗證，並應用李群實際進行合成及結果分析。



1.2 文獻回顧

始於 1970 時期，Hervé[1]將李群理論應用在分析機構的運動，主要使用矩陣來表示及進行運算，並對各種運動進行剖析與歸類，進而提出基礎常見的運動子群。接著藉由整理各個子群間的從屬關係，得到運動子群之結合、拆解及轉換等法則，作為之後李群運算理論的奠基。而後幾年，Hervé[2-5]繼續對此理論進行探討，除了基本的位置分析之外，也將理論帶入運動的分析方法，並提出更詳細的表示法及運算方法。接著 Meng 等人[6]根據 Hervé 的理論做進一步的分析，提出更數學化的運算和表示方式，在文中更舉出一些範例來做明確的說明。Lee 與 Hervé[7]，利用位移次群理論於空間純平移機器人的構造合成。

多位學者將李群應用在各式運動鏈(kinematic chain)及機構的分析和合成上。Hervé 與 Lee [7]討論 G 運動(gliding motion)的特性及運動產生器(generator)，並將兩個相異的 G 運動鏈進行組合，去除重合運動的部分後得到 $G - G$ 運動，分析其特性並列舉 $G - G$ 運動產生器，最後將其組成可用的並聯機構。文獻[8]中分析討論 Y 運動(pseudoplanar motion)的運動鏈組成，先是用 H 接頭(helical joint)來表示，而後應用李群將其進行變化，並列舉出所有可形成 Y 運動的等效運動鏈，最後將其組合擴充，得到多種可進行三維平移運動的三腳並聯機構。

此外，Hervé 及 Lee 等人在 X 運動(Schoenflies motion)及 $X - X$ 運動(double Schoenflies motion)有著深入的研究[9-12]。兩人進行 X 運動的分析，列舉出所有的 X 運動產生器，也進行奇異構型的討論。同時，也討論此類運動的應用，組成 Oldham 聯軸器及 Delta Robot 等具潛在工業用途的機構。接著，更進一步在[13-17]中將兩種 X 運動串聯結合，同樣是應用李群進行分析，會有重合的運動出現，將此部分去除後得到數種 $X - X$ 運動產生器，並討論此運動在多種機構中的應用。

有關機構運動學之不連續可動性研究，Lee 與 Hervé 首先將位移李次群應用於機構不連續可動性的分析與合成[18-23]。此類機構在運作時，依據不同的狀況，其



組成構件會有不同的運動模式(mode)，有些構件還會出現暫時不可動的狀況，所以被稱作「不連續可動」。由於此類機構的運動會隨著各種條件而改變，是一種較為特殊的運動，因此較不容易推算得知。在文中，將先分析其機構組成，找尋出造成運動改變的原因，如旋轉接頭同軸、轉軸平行等可能的條件，而後藉由鎖定某一條件並應用李群的分析方式，來得知各條件下的運動狀態。

除了分析不連續可動機構的運動之外，在[22]中亦討論不連續可動機構的合成，目標是合成出運動模式為兩種 X 運動的不連續可動機構，其步驟為：

1. 分析運動

對兩種 X 運動進行分析，得到二者有共同的運動——三維平移，將之消去後，得知真正需要合成的部分為兩個方向不同的 R 運動。

2. 尋找及組合機構

從文獻裡中找到運動模式為兩個相異 R 運動的不連續可動機構，然後加上共同的三維平移運動，得到符合需求的不連續可動機構。

3. 分析及列舉運動鏈

分析步驟 2 之機構的運動鏈，得知其為 $X-X$ 運動產生器的一種，接著依照其他文獻中的結果，列舉出所有可能的 $X-X$ 運動產生器。

4. 列舉機構

從步驟 3 得到的運動鏈中進行挑選及組合，得到多種符合需求的機構。

近期 Lee 與 Hervé 更提出一具不連續可動性之等速聯軸器[23]，探討其運動的特性，也有對此聯軸器之個案例有更詳細的說明[24]，最後提出其潛在工業應用。羅子欽[25]於 2014 年整理出對於某一類不連續可動機構之合成方法，嘗試以電腦模擬軟體進行運動分析，並列舉出幾個實例說明以證實其合成方法。



1.3 研究動機及目的

李群在機構分析上的應用雖然有一段時間，卻尚非十分普及。李群理論用於一般機構及運動鏈的分析和合成上已有相當多的文獻探討，但對於不連續可動機構之合成上的討論並不多。再者，不連續可動機構之定義為：擁有兩種或兩種以上不可共存之運動的特殊機構。有許多學者對這類機構的產生原因進行研究，也做出了各自的定義或命名，如顏鴻森教授[26]及 Balli 等人[27]定義且命名了「可變拓樸機構(Mechanism with variable topologies)」，而 Dai 等人[28]則提出「變胞機構(Metamorphic mechanism)」，同樣是指機構在運作中會因某些條件導致拓樸構造改變，使得構件運動產生改變，造成不連續可動的現象。Lee 與 Hervé 亦有對此說法提出「變胞 Bennett 連桿機構(Metamorphic Bennett linkages)」進行研究[29]。另一方面，Wohlhart[30]對於可變自由度的機構命名為「Kinematotropic linkages」，而後由 Galletti 與 Fanghella[31]對此類機構進行研究。由此可知在這個領域裡，定義及內容仍有探究的空間。因此，本文將依循文獻[25]對「不連續可動機構」進行探討與分類，同時應用李群的理論發展出可以系統化合成此類具有兩種不可共存之運動的特殊機構。接著對此方法的後續流程細節多做修改及說明，並予以更多的驗證，最後嘗試使用該合成方法找出一具有三種運動之不連續可動機構。

1.4 論文架構

本文共分為五個章節，第一章為前述之緒論，簡單介紹李群在機構分析上之應用與不連續可動機構的文獻回顧，以及本文研究之動機與目的等。

第二章為本文使用之理論的介紹，著重於李群在機構領域的應用方法、位移李次群的種類，然後對機構分析與合成分別做詳細的介紹與討論。

第三章進入本文重點，先是對本文目標之「不連續可動機構」做詳細的介紹及分類，並介紹李群對此類機構的運動分析及描述法，藉由分析多種不連續可動機構



來歸納其共同特徵。

第四章應用第三章之分析結果所得的特徵，設計出合成的方法，並實際進行操作。列舉兩個合成雙運動不連續可動機構的例子，以及一個具三運動模式的機構，進行結果展示，並討論不符合預期之案例及因素。

第五章作本文結論，總結前幾章之結果，並討論未來合成不連續可動機構之方法的研究方向。



第二章 機構之分析理論與合成方法

2.1 李群及位移李次群

群是具有二元運算(binary operation, 或稱群運算 group operation)的非空集合, 可含有限或無限個元素, 滿足運算中的四種基本特性: 封閉性(closure)、結合律(associativity)、存在單位(identity element)元素以及反元素(inverse element), 其數學理論可應用於位移集合。如定義一集合 G , 由元素 $\{A, B, C, \dots\}$ 組成, 元素間須滿足下列運算, 才能稱作一個群。

1. 封閉性: 若 $A, B \in G$, 則 $AB \in G$ 。
2. 結合律: 若 $A, B, C \in G$, 則 $(AB)C = A(BC)$ 。
3. 單位元素: 存在一元素 I , 使得任一元素 $A \in G$, 皆滿足 $IA = AI = A$ 。
4. 反元素: 任一元素 $A \in G$, 集合 G 必有另一元素 $B = A^{-1}$ 且 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ 。

其中同時具有群運算結構的可微流形(manifold)則為李群, 是以 19 世紀挪威自阿貝爾之後極具代表性的數學家——Marius Sophus Lie 命名。利用指數映射來結合李代數(Lie algebra)與李群, 是李理論(Lie theory)對於連續群最具代表性的特徵。因此, 由此指數函數去轉換在實數向量空間中, 以李代數結構表示之剛體運動的速度場, 即可得到位移李次群(displacement Lie subgroup), 其對應關係如表 2.1。

已知位移運算 D 是一在空間 \mathcal{E} 中對點 M 的幾何轉換, 包含向量的長度與角度。因此, 當此位移運算作用在任意剛體上時, 可得此剛體新的位置。這樣的位移運算 D 可表示成:

$$\forall M \in \mathcal{E}$$

$$M \xrightarrow{D} M' = N + a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} + \exp((f\mathbf{u} + g\mathbf{v} + h\mathbf{w}) \wedge) \mathbf{N}M \quad (2-1)$$

$$M' \in \mathcal{E}$$

其中 a, b, c, f, g, h 為位移參數, 點 N 和 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 向量建立空間結構。並利用單位向



量表示以便計算。令 \mathbf{T} 及 \mathbf{R} 為單位向量，且

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = t\mathbf{T} \quad \mathbf{T} = (a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w})/\|a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}\|$$

$$f\mathbf{u} + g\mathbf{v} + h\mathbf{w} = \theta\mathbf{R} \quad \mathbf{R} = (f\mathbf{u} + g\mathbf{v} + h\mathbf{w})/\|f\mathbf{u} + g\mathbf{v} + h\mathbf{w}\|$$

因此，2-1式亦可寫成：

$$\mathbf{NM}' = t\mathbf{T} + \exp(\theta\mathbf{R} \wedge) \mathbf{NM} \quad (2-2)$$

展開指數項的部分，可得：

$$\exp(\theta\mathbf{R} \wedge) = 1 + \frac{1}{1!}\theta\mathbf{R} \wedge + \frac{1}{2!}\theta^2\mathbf{R} \wedge (\mathbf{R} \wedge) + \dots + \frac{1}{n!}\theta^n(\mathbf{R} \wedge)^n + \dots \quad (2-3)$$

經過整理則寫成：

$$\exp(\theta\mathbf{R} \wedge) = 1 + \sin\theta\mathbf{R} \wedge + (1 - \cos\theta)(\mathbf{R} \wedge (\mathbf{R} \wedge)) \quad (2-4)$$

或寫成：

$$\exp(\theta\mathbf{R} \wedge)\mathbf{NM} = \mathbf{NM} + \sin\theta\mathbf{R} \wedge \mathbf{NM} + (1 - \cos\theta)(\mathbf{R} \wedge (\mathbf{R} \wedge \mathbf{NM}))$$

文獻[2]中指出，此指數項相當於一個以 (N, \mathbf{R}) 為軸的旋轉運動，此軸會過點 N ，且與向量 \mathbf{NM} 夾角 θ 。同時，可以向量代數來證實：

$$\begin{aligned} \exp(\theta\mathbf{R} \wedge)\mathbf{NM} &= (\mathbf{R} \cdot \mathbf{NM})\mathbf{R} + \sin\theta\mathbf{R} \wedge (\mathbf{NM} - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{NM})\mathbf{R}) \\ &\quad + \cos\theta(\mathbf{NM} - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{NM})\mathbf{R}) \end{aligned} \quad (2-5)$$

其中 $(\mathbf{R} \cdot \mathbf{NM})\mathbf{R}$ 表示 \mathbf{NM} 之正交投影於 (N, \mathbf{R}) 上； $\mathbf{NM} - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{NM})\mathbf{R}$ 是 \mathbf{NM} 之正交投影於一垂直於該軸的面上；而 $\mathbf{R} \wedge (\mathbf{NM} - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{NM})\mathbf{R}) = \mathbf{R} \wedge \mathbf{NM}$ 則為一落於同一平面上、正交於前一方向的向量。

則任一給定位移皆可表示成一旋轉運動與一平移運動的組合，即式(2-2)。

此外，從對時間微分之計算後，可得點 M 的速度，表示成：

$$\mathbf{v}(M) = \frac{da}{d\tau}\mathbf{u} + \frac{db}{d\tau}\mathbf{v} + \frac{dc}{d\tau}\mathbf{w} + \left(\frac{df}{d\tau}\mathbf{u} + \frac{dg}{d\tau}\mathbf{v} + \frac{dh}{d\tau}\mathbf{w}\right) \wedge \mathbf{NM} \quad (2-6)$$

此速度場為一螺旋(screw)。

$$\mathbf{v}(M) = \mathbf{v}(N) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{NM}$$

因此，此位移方法與針對速度場之研究可以互相聯結。



表 2.1 李代數結構對速度場之表示式 [4]

d.o.f	Notation of the Lie subalgebra	Given geometric elements
0	0	
1	\mathbf{au}	Vector straight line $D = \mathbf{au}$
	$f\mathbf{u} \wedge (\mathbf{NM})$	Affine straight line or axis (N, \mathbf{u})
	$f(k\mathbf{u} + \mathbf{u} \wedge (\mathbf{NM}))$	Axis (N, \mathbf{u}) and pitch $p = 2\pi k$
2	$\mathbf{au} + \mathbf{bv}$	Vector plane $P = \mathbf{au} + \mathbf{bv}$
	$\mathbf{au} + f\mathbf{u} \wedge (\mathbf{NM})$	Affine straight line or axis (N, \mathbf{u})
3	$\mathbf{au} + \mathbf{bv} + \mathbf{cw}$	
	$\mathbf{au} + \mathbf{bv} + h\mathbf{w} \wedge (\mathbf{NM})$	Vector plane $P = \mathbf{au} + \mathbf{bv}$ or vector \mathbf{w} ($\mathbf{w} \perp P$)
	$\mathbf{au} + \mathbf{bv} + h(k\mathbf{w} + \mathbf{w} \wedge (\mathbf{NM}))$	Vector \mathbf{w} and pitch $p = 2\pi k$
	$(f\mathbf{u} + g\mathbf{v} + h\mathbf{w}) \wedge (\mathbf{NM})$	Point N
4	$\mathbf{au} + \mathbf{bv} + \mathbf{cw} + h\mathbf{w} \wedge (\mathbf{NM})$	Vector \mathbf{w}
6	$\mathbf{au} + \mathbf{bv} + \mathbf{cw} + (f\mathbf{u} + g\mathbf{v} + h\mathbf{w}) \wedge (\mathbf{NM})$	

d.o.f	Displacement subgroup	Transformations	Variables of translation, rotation
0	$\{E\}$	$M \rightarrow M$	
1	$\{T(\mathbf{u})\}$	$M \rightarrow M + \mathbf{au}$	a
	$\{R(N, \mathbf{u})\}$	$M \rightarrow N + \exp(f\mathbf{u} \wedge (\mathbf{NM}))$	f
	$\{H(N, \mathbf{u}, p)\}$	$M \rightarrow N + f\mathbf{ku} + \exp(f\mathbf{u} \wedge (\mathbf{NM}))$	f
2	$\{T(Pl)\}$	$M \rightarrow M + \mathbf{au} + \mathbf{bv}$	a, b
	$\{C(N, \mathbf{u})\}$	$M \rightarrow N + \mathbf{au} + \exp(f\mathbf{u} \wedge (\mathbf{NM}))$	a, f
3	$\{T\}$	$M \rightarrow M + \mathbf{au} + \mathbf{bv} + \mathbf{cw}$	a, b, c
	$\{G(Pl)\}$ or $\{G(\mathbf{w})\}$	$M \rightarrow N + \mathbf{au} + \mathbf{bv} + \exp(h\mathbf{w} \wedge (\mathbf{NM}))$	a, b, h
	$\{Y(\mathbf{w}, p)\}$	$M \rightarrow N + \mathbf{au} + \mathbf{bv} + h\mathbf{k}\mathbf{w} + \exp(h\mathbf{w} \wedge (\mathbf{NM}))$	a, b, h
	$\{S(N)\}$	$M \rightarrow N + \exp((f\mathbf{u} + g\mathbf{v} + h\mathbf{w}) \wedge (\mathbf{NM}))$	f, g, h
4	$\{X(\mathbf{w})\}$	$M \rightarrow N + \mathbf{au} + \mathbf{bv} + \mathbf{cw} + \exp(h\mathbf{w} \wedge (\mathbf{NM}))$	a, b, c, h
6	$\{D\}$	$M \rightarrow N + \mathbf{au} + \mathbf{bv} + \mathbf{cw} + \exp((f\mathbf{u} + g\mathbf{v} + h\mathbf{w}) \wedge (\mathbf{NM}))$	a, b, c, f, g, h



表 2.1 中分別列出對十二種位移李次群之自由度、於李代數的表示式與給定的幾何元素，以及其轉換式與旋轉或平移的變數。觀察自由度對應於變數之數量，例如：運動 $\{G(Pl)\}$ 之自由度為 3，且該運動具有三個變數，表示此運動所需之驅動數量為 3。另外，從三變數 a 、 b 、 h 中可判斷此運動之概況，變數 a 、 b 所影響的是兩種方向的平移，變數 h 則是異於前兩種方向之旋轉參數。

因此，表 2.1 列出空間中一般的運動模式，可轉換成常見的基本運動對表示法，例如平移運動、旋轉運動、螺旋運動、圓柱運動、平面運動與球面運動等。若是應用在機構分析上，則能清楚地判斷相鄰連接桿件的相對運動狀態。而表 2.2 則為由 Hervé 進一步對於各個位移李次群情形之描述。

表 2.2 位移李次群之運動描述 [5]

運動表示法	運動描述
$\{E\}$	不動(為單位元)
$\{T(\mathbf{u})\}$	平行於 \mathbf{u} 方向之平移運動
$\{R(N, \mathbf{u})\}$	以 (N, \mathbf{u}) 為軸之旋轉運動
$\{H(N, \mathbf{u}, p)\}$	以 (N, \mathbf{u}) 為軸、節距為 p 之螺旋運動
$\{T(Pl)\}$	平行於平面 Pl 之二維平移運動
$\{C(N, \mathbf{u})\}$	以 (N, \mathbf{u}) 為軸之圓柱運動(旋轉運動附帶平移運動)
$\{T\}$	空間三維平移運動
$\{G(Pl)\}$ or $\{G(\mathbf{w})\}$	平行於平面 Pl 之滑移運動，可以 \mathbf{w} 方向旋轉
$\{Y(\mathbf{w}, p)\}$	垂直於 \mathbf{w} 方向之二維平移及以 \mathbf{w} 方向為軸、節距為 p 之螺旋運動
$\{S(N)\}$	以 N 為球心之三維球面運動
$\{X(\mathbf{w})\}$	空間三維平移及以 \mathbf{w} 方向為軸的旋轉運動，又稱 Schönflies 運動
$\{D\}$	空間三維平移及三維旋轉，普遍的剛體運動



將表 2.2 中的運動參數進行整理，可找出群與次群間互相從屬的關係，藉著自由度的遞減，並以階層關係來呈現，可得圖 2.1。

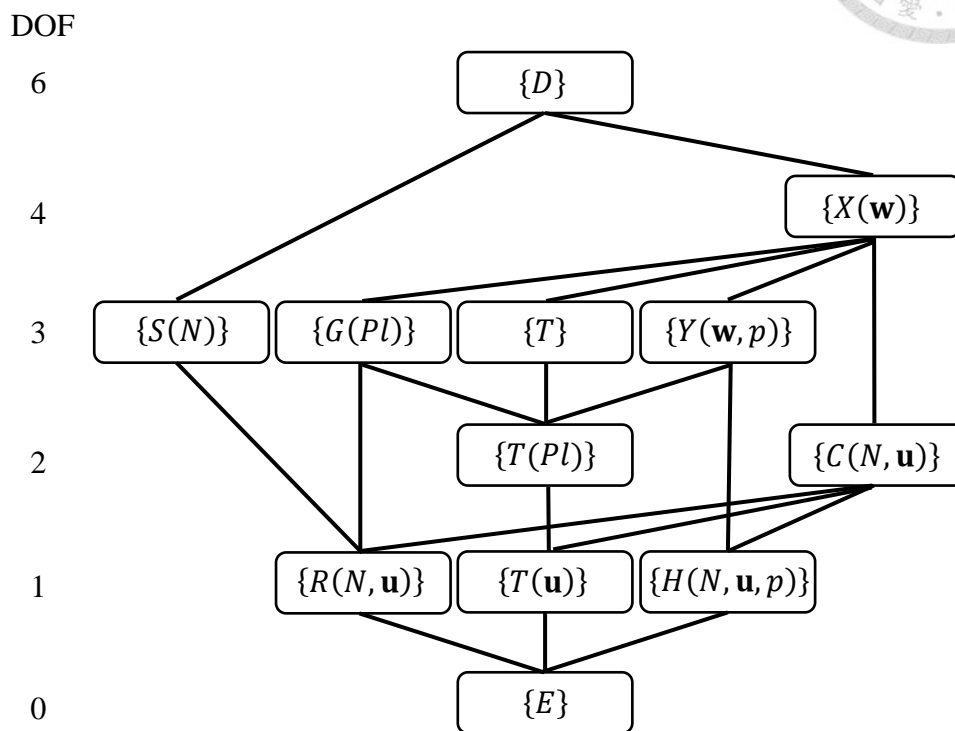


圖 2.1 位移李次群階層關係圖[7]

自由度是機構中需要控制的參數數量，例如在圖 2.1 中， $\{Y(\mathbf{w}, p)\}$ 是 3 自由度的運動，需要控制的 3 個參數為，兩個方向的平移和一個方向的螺旋運動。若是從中去除其螺旋運動，則可減少成 2 自由度的 $\{T(Pl)\}$ 運動。在 12 種李次群中，有 5 種運動可用單一接頭就可以達成，如表 2.3 所示。

表 2.3 常用接頭與李次群之對應

種類	表示法	運動表示
平移接頭	$T_{\mathbf{u}}$	$\{T(\mathbf{u})\}$
旋轉接頭	$R_{\mathbf{u}}^N$	$\{R(N, \mathbf{u})\}$
螺旋接頭	$H_{\mathbf{u}, p}^N$	$\{H(N, \mathbf{u}, p)\}$
圓柱接頭	$C_{\mathbf{u}}^N$	$\{C(N, \mathbf{u})\}$
球接頭	S^N	$\{S(N)\}$



2.2 機構運動分析方法

本節將介紹開放式運動鏈以及封閉式機構的運動分析。進行分析前，須先指定機構中的地桿(ground)，及所要分析相對於地桿之運動的桿件：端效器(end-effector)，其次定義出從地桿至端效器的路徑，每一路徑皆可視為一條運動鏈。對於開放式運動鏈，單條運動鏈的末端即為端效器的位置。封閉式機構分析則是找出每一條運動鏈所產生之運動的交集運動，記作 $\{L(n, m)\}$ ，其中 n 為地桿的桿件編號， m 為端效器的桿件編號， m 相對於 n 之運動即為要分析的運動。

舉例來說，從圖 2.1 中可以發現階層中沒有單一的位移次群可表達 5 自由度之運動，但可由其他運動鏈組合才能達成，在此以雙平面運動之串聯為例，構成三個方向的平移及兩個方向的旋轉運動。將 3 自由度的 $\{G(\mathbf{w})\}$ 可拆解成三個由旋轉接頭 R 及平移接頭 T 之 1 自由度李次群的串接，假設給予三條相異的線 (N_1, \mathbf{w}) 、 (N_2, \mathbf{w}) 、 (N_3, \mathbf{w}) ，可得：

$$\begin{aligned}\{G(\mathbf{w})\} &= \{R(N_1, \mathbf{w})\}\{R(N_2, \mathbf{w})\}\{R(N_3, \mathbf{w})\} \\ &= \{R(N_1, \mathbf{w})\}\{R(N_2, \mathbf{w})\}\{T(\mathbf{u})\} \\ &= \{R(N_1, \mathbf{w})\}\{T(\mathbf{u})\}\{R(N_2, \mathbf{w})\} \\ &= \{T(\mathbf{u})\}\{R(N_1, \mathbf{w})\}\{R(N_2, \mathbf{w})\} \\ &= \{R(N_1, \mathbf{w})\}\{T(\mathbf{u})\}\{T(\mathbf{v})\} \\ &= \{T(\mathbf{u})\}\{R(N_1, \mathbf{w})\}\{T(\mathbf{v})\} \\ &= \{T(\mathbf{u})\}\{T(\mathbf{v})\}\{R(N_1, \mathbf{w})\}\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}, \forall \mathbf{u} \perp \mathbf{w}, \forall \mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ 。上列各恆等式中，並非表示任意的旋轉運動可與平移運動互相調換，而是以可造成運動 $\{G(\mathbf{w})\}$ 為出發點，列出所有可能的運動鏈組合。

若以接頭 R 及 P 表示能更直接地連結到運動鏈的型式，如圖 2.2 所示，若不考慮運動鏈路徑的順序，三種組合與其交錯排列之組合皆可完成平面運動，即 RRR 、 RRP 、 RPP 。

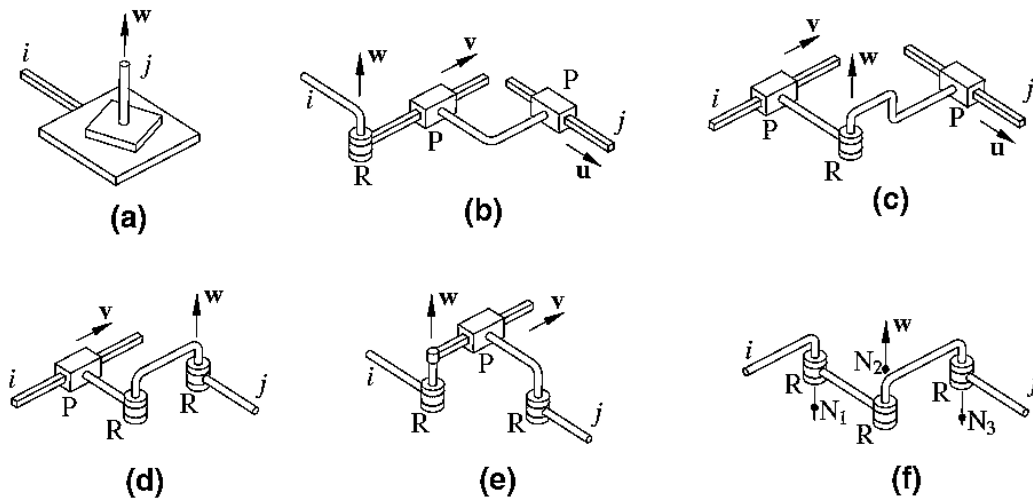
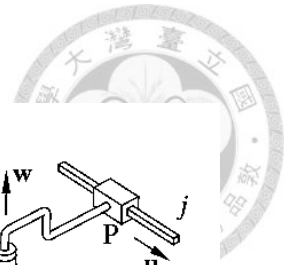


圖 2.2 產生平面運動 $\{G(\mathbf{w})\}$ 之等效運動鏈 [7]

接著，在串聯兩個平面運動 $\{G(\mathbf{u})\}$ 及 $\{G(\mathbf{v})\}$ 前，須先了解只要 $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ ，此兩平面運動間必有一非空集合之交集，即 $\{G(\mathbf{u})\} \cap \{G(\mathbf{v})\} = \{T(\mathbf{w})\}$ ，得到 \mathbf{w} 會同時垂直於 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} ，可由向量積 $\mathbf{u} \times \mathbf{v} / |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ 得到。兩運動之串聯以乘積表示成 $\{L\} = \{G(\mathbf{u})\}\{G(\mathbf{v})\}$ ，由於 $\{G(\mathbf{u})\}$ 及 $\{G(\mathbf{v})\}$ 皆包含 $\{T(\mathbf{w})\}$ ， $\{G(\mathbf{u})\}\{G(\mathbf{v})\}$ 將會有兩個 $\{T(\mathbf{w})\}$ ，但因為乘積封閉性的關係， $\{T(\mathbf{w})\}^2 = \{T(\mathbf{w})\}$ ，多餘的一個 $\{T(\mathbf{w})\}$ 可直接在運算式中消去。圖 2.3 則為其中一種雙平面運動鏈之可能，選擇 $\{G(\mathbf{u})\} = \{R(A, \mathbf{u})\}\{R(B, \mathbf{u})\}\{R(C, \mathbf{u})\}$ 及 $\{G(\mathbf{v})\} = \{T(\mathbf{w})\}\{R(D, \mathbf{v})\}\{R(E, \mathbf{v})\}$ ，因此在串聯之後，多餘的 $\{T(\mathbf{w})\}$ 不會對 5 自由度之運動鏈有額外的運動狀態，將從運動鏈式中去掉，構成 $\{G(\mathbf{u})\}\{G(\mathbf{v})\} = \{R(A, \mathbf{u})\}\{R(B, \mathbf{u})\}\{R(C, \mathbf{u})\}\{R(D, \mathbf{v})\}\{R(E, \mathbf{v})\}$ ，在空間中構成 $-3T - 2R$ 之機構。

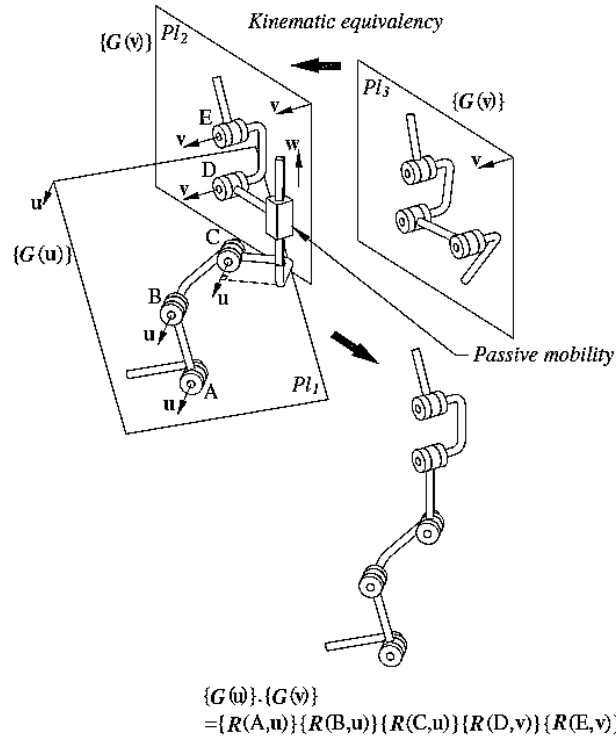
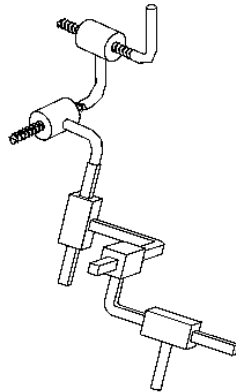


圖 2.3 雙平面運動鏈 [7]

然而， $3T - 2R$ 的運動鏈不只能從 $\{G(\mathbf{u})\}\{G(\mathbf{v})\}$ 中獲得， $\{X(\mathbf{u})\}\{X(\mathbf{v})\}$ 也能推得擁有三個方向的平移及兩個方向的旋轉 5 自由度運動。不同於 $\{G(\mathbf{u})\}\{G(\mathbf{v})\}$ 的是， $\{X(\mathbf{u})\} \cap \{X(\mathbf{v})\} = \{T\}$ ，因此可分別將 $\{X(\mathbf{u})\}$ 及 $\{X(\mathbf{v})\}$ 視為 $\{R(A, \mathbf{u})\}\{T\}$ 與 $\{T\}\{R(B, \mathbf{v})\}$ ，則 $\{L\} = \{X(\mathbf{u})\}\{X(\mathbf{v})\} = \{T\}\{R(A, \mathbf{u})\}\{R(B, \mathbf{v})\}$ ，如圖 2.4 所示之 $PPPH - H$ ，其中 $PPPH$ 原屬於 $\{X(\mathbf{u})\}$ ，最右邊的 H 則是從 $\{X(\mathbf{v})\}$ 去除三個重複方向的平移自由度而剩下之接頭。



PPPH-H

圖 2.4 $\{X(\mathbf{u})\}\{X(\mathbf{v})\}$ 運動鏈 [14]

其次，對於封閉機構而言，端效器的位置不再一定位於運動鏈的末端，因此欲求的運動方法則會是各個運動鏈的交集。例如給予一個單迴路機構(single loop mechanism)： $R_u^A T_v R_u^B R_u^N R_v^N R_w^N$ ，地桿介於 R_x^A 及 R_w^N 之間，端效器介於 R_u^B 及 R_u^N 之間，則自地桿至端效器間產生兩條路徑，即 $R_u^A T_v R_u^B$ 和 $R_u^N R_v^N R_w^N$ 的運動鏈，故兩運動鏈產生的運動為：

$$\{G_1\} = \{R(A, \mathbf{u})\}\{T(\mathbf{v})\}\{R(B, \mathbf{u})\}$$

$$\{G_2\} = \{R(N, \mathbf{u})\}\{R(N, \mathbf{v})\}\{R(N, \mathbf{w})\}$$

將以上兩運動進行交集分析，運算程序如下：

$$\begin{aligned} \{L\} &= \{G_1\} \cap \{G_2\} \\ &= \{R(A, \mathbf{u})\}\{T(\mathbf{v})\}\{R(B, \mathbf{u})\} \cap \{R(N, \mathbf{u})\}\{R(N, \mathbf{v})\}\{R(N, \mathbf{w})\} \\ &= \{G(\mathbf{u})\} \cap \{S(N)\} \\ &= \{R(N, \mathbf{u})\} \end{aligned}$$

得知此機構的兩條運動鏈分別產生兩個不同方向的三自由度平面運動，端效器的運動為以 (N, \mathbf{u}) 為軸線之旋轉運動。



接著是歐丹聯軸器(Oldham coupling)的分析，由 2 個R接頭和 2 個P接頭組成的 4 連桿機構，如圖 2.5 所示。

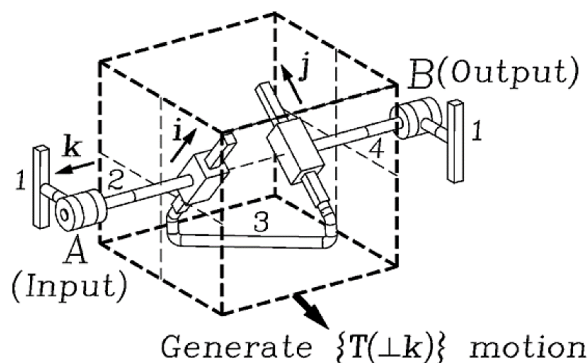


圖 2.5 歐丹聯軸器 [10]

聯軸器的主要研究就是其輸出端的運動，以桿 1 為地桿、桿 4 為端效器，則地桿與端效器間的兩條運動鏈分別為 $R_k^A T_i T_j$ 及 R_k^B ，其中 \mathbf{i} 及 \mathbf{j} 的方向構成一個垂直於 \mathbf{k} 的二維平移運動，因此兩條運動鏈的運動可分別寫為：

$$\{G_1\} = \{R(A, \mathbf{k})\}\{T(\mathbf{i})\}\{T(\mathbf{j})\}$$

$$\{G_2\} = \{R(B, \mathbf{k})\}$$

以上兩運動之交集即是端效器相對於地桿的運動，記作 $\{L(1, 4)\}$ 。

$$\begin{aligned} \{L(1, 4)\} &= \{G_1\} \cap \{G_2\} \\ &= \{R(A, \mathbf{k})\}\{T(\mathbf{i})\}\{T(\mathbf{j})\} \cap \{R(B, \mathbf{k})\} \\ &= \{R(A, \mathbf{k})\}\{T(Pl_{\mathbf{k}})\} \cap \{R(B, \mathbf{k})\} \\ &= \{G(\mathbf{k})\} \cap \{R(B, \mathbf{k})\} \\ &= \{R(B, \mathbf{k})\} \end{aligned}$$

經上述分析的結果為以 \mathbf{k} 方向為軸的旋轉運動，證實可為聯軸器。

從前一聯軸器中，將其虛線框內的構件擴充成另一較複雜之聯軸器，由 4 個R接頭及 2 個P接頭組成的 6 連桿機構，如圖 2.6 所示。

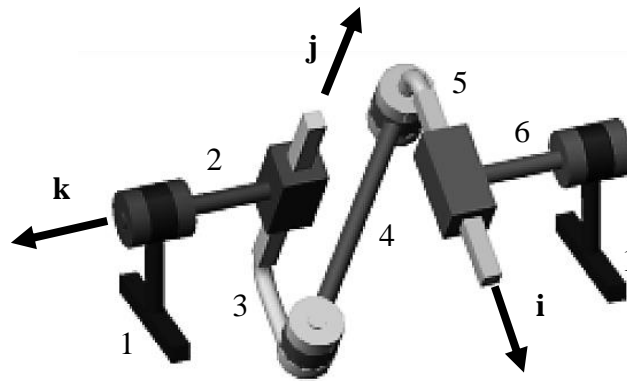


圖 2.6 4R2P 聯軸器 [15]

設以桿 1 為地桿、桿 6 為端效器，則自地桿至端線器間產生之路徑分別為 $R_k^A T_j R_j^B R_j^C T_i$ 及 R_k^D 的運動鏈，其中 \mathbf{i} 及 \mathbf{j} 皆為垂直於 \mathbf{k} 的方向，此兩條運動鏈的運動可寫為：

$$\{G_1\} = \{R(A, \mathbf{k})\}\{T(\mathbf{j})\}\{R(B, \mathbf{j})\}\{R(C, \mathbf{j})\}\{T(\mathbf{i})\}$$

$$\{G_2\} = \{R(D, \mathbf{k})\}$$

以上兩運動之交集即為端效器相對於地桿的運動，記作 $\{L(1, 6)\}$ 。

$$\begin{aligned} \{L(1, 6)\} &= \{G_1\} \cap \{G_2\} \\ &= \{R(A, \mathbf{k})\}\{T(\mathbf{j})\}\{R(B, \mathbf{j})\}\{R(C, \mathbf{j})\}\{T(\mathbf{i})\} \cap \{R(D, \mathbf{k})\} \\ &= \{R(A, \mathbf{k})\}\{T(\mathbf{j})\}\{G(\mathbf{j})\} \cap \{R(D, \mathbf{k})\} \\ &= \{R(A, \mathbf{k})\}\{X(\mathbf{j})\} \cap \{R(D, \mathbf{k})\} \\ &= \{X(\mathbf{k})\}\{X(\mathbf{j})\} \cap \{R(D, \mathbf{k})\} \\ &= \{R(D, \mathbf{k})\} \end{aligned}$$

利用李群理論及位移李次群的運動表示法，可得輸出端的運動為以 \mathbf{k} 方向為軸的旋轉運動，證實有達到聯軸器的功能。



不僅是單迴路機構，李群亦可用於分析由多隻腳組成的並聯機構(parallel mechanism)，即多迴路機構(multiple loop mechanism)。只要將多隻腳的並聯機構視為多個閉迴路運動鏈來分析，在此舉一個機構為例，如圖 2.7 所示，最上端的桿件為端效器的位置，每隻腳最下端的桿件為地桿，故此機構含有 5 隻由 5 自由度運動鏈組成的腳。

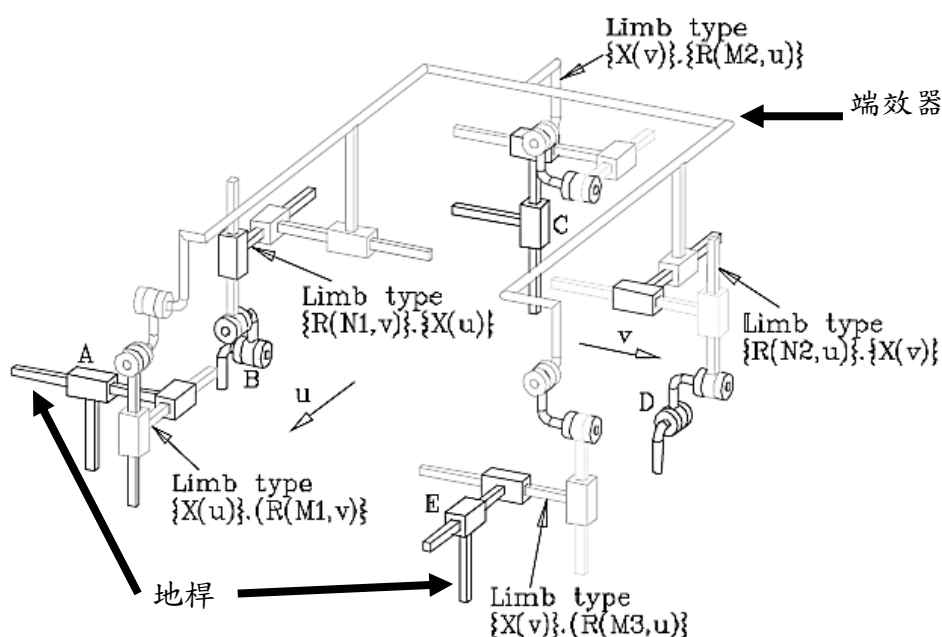


圖 2.7 五腳並聯機構 [13]

從腳 A 到腳 E 的運動分別為： $\{X(\mathbf{u})\}\{R(M_1, \mathbf{v})\}$ ， $\{R(N_1, \mathbf{v})\}\{X(\mathbf{u})\}$ ， $\{X(\mathbf{v})\}\{R(M_2, \mathbf{u})\}$ ， $\{R(N_2, \mathbf{u})\}\{X(\mathbf{v})\}$ ， $\{X(\mathbf{v})\}\{R(M_3, \mathbf{u})\}$ ，端效器的運動應為以上這五種運動的交集運動。在此先將令腳 A 和腳 B 組成運動鏈 $\{L_1\}$ 、腳 C 和腳 D 組成 $\{L_2\}$ ，接著進行 $\{L_1\}$ 及 $\{L_2\}$ 之交集運算，腳 E 則放到最後做結合運算，可先得到兩條運算式：

$$\begin{aligned}
 \{L_1\} &= \{X(\mathbf{u})\}\{R(M_1, \mathbf{v})\} \cap \{R(N_1, \mathbf{v})\}\{X(\mathbf{u})\} \\
 &= \{X(\mathbf{u})\}\{X(\mathbf{v})\} \cap \{X(\mathbf{v})\}\{X(\mathbf{u})\} \\
 &= \{X(\mathbf{u})\}\{X(\mathbf{v})\}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \{L_2\} &= \{X(\mathbf{v})\}\{R(M_2, \mathbf{u})\} \cap \{R(N_2, \mathbf{u})\}\{X(\mathbf{v})\} \\
 &= \{X(\mathbf{v})\}\{X(\mathbf{u})\} \cap \{X(\mathbf{u})\}\{X(\mathbf{v})\} \\
 &= \{X(\mathbf{u})\}\{X(\mathbf{v})\}
 \end{aligned}$$

將以上兩分析結果再進行一次交集運算，並將此結果與腳 E 的運動作交集，可得以下兩條運算式：

$$\begin{aligned}
 \{L_3\} &= \{L_1\} \cap \{L_2\} \\
 &= \{X(\mathbf{u})\}\{X(\mathbf{v})\} \cap \{X(\mathbf{u})\}\{X(\mathbf{v})\} \\
 &= \{X(\mathbf{u})\}\{X(\mathbf{v})\} \\
 \{L\} &= \{L_3\} \cap \{X(\mathbf{v})\}\{R(M_3, \mathbf{u})\} \\
 &= \{X(\mathbf{u})\}\{X(\mathbf{v})\} \cap \{X(\mathbf{v})\}\{X(\mathbf{u})\} \\
 &= \{X(\mathbf{u})\}\{X(\mathbf{v})\}
 \end{aligned}$$

$\{L\}$ 為交集運算的最終結果，故得知圖 2.7 中並聯機構的端效器運動為以 \mathbf{u} 及 \mathbf{v} 兩方向為旋轉軸的雙 X 運動。

2.3 新機構產生方法

「新機構」的產生是指設計出與某一已知機構具相同運動的機構，但有著不同的接頭種類或排列。意味著此兩機構的所有桿件的運動不須完全相同，而是各機構之端效器相對於地桿的運動相同。其中一種合成的方法為：利用等效的運動鏈來取代原運動鏈。因此，需要先尋找欲研究之運動的等效運動鏈。此部分的研究主要出現在較早期的論文當中，例如 $H_{\mathbf{w},p}^A H_{\mathbf{w},p}^B H_{\mathbf{w},p}^C$ 運動鏈，此運動鏈產生的運動 $\{L\}$ 為：

$$\{L\} = \{H(A, \mathbf{w}, p)\}\{H(B, \mathbf{w}, p)\}\{H(C, \mathbf{w}, p)\} = \{Y(\mathbf{w}, p)\}$$

可得知產生的運動為包含兩方向平移及一方向螺旋運動的 3 自由度虛平面運動 (Pseudoplanar motion)。藉李群理論可以列舉出其他可產生相同運動的運動組合[6]。



$$\begin{aligned}
 \{Y(\mathbf{w}, p)\} &= \{H(A, \mathbf{w}, p)\}\{H(B, \mathbf{w}, p)\}\{H(C, \mathbf{w}, p)\} \\
 &= \{H(A, \mathbf{w}, p)\}\{H(B, \mathbf{w}, p)\}\{T(\mathbf{u})\} \\
 &= \{H(A, \mathbf{w}, p)\}\{T(\mathbf{u})\}\{H(B, \mathbf{w}, p)\} \\
 &= \{T(\mathbf{u})\}\{H(A, \mathbf{w}, p)\}\{H(B, \mathbf{w}, p)\} \\
 &= \{H(A, \mathbf{w}, p)\}\{T(\mathbf{u})\}\{T(\mathbf{v})\} \\
 &= \{T(\mathbf{u})\}\{H(A, \mathbf{w}, p)\}\{T(\mathbf{v})\} \\
 &= \{T(\mathbf{u})\}\{T(\mathbf{v})\}\{H(A, \mathbf{w}, p)\}
 \end{aligned}$$

將以上列舉出來的運動表示成運動鏈，共可得 7 種產生 $\{Y(\mathbf{w}, p)\}$ 的運動鏈—— $H_{\mathbf{w},p}^A H_{\mathbf{w},p}^B H_{\mathbf{w},p}^C$ 、 $H_{\mathbf{w},p}^A H_{\mathbf{w},p}^B T_{\mathbf{u}}$ 、 $H_{\mathbf{w},p}^A T_{\mathbf{u}} H_{\mathbf{w},p}^B$ 、 $T_{\mathbf{u}} H_{\mathbf{w},p}^A H_{\mathbf{w},p}^B$ 、 $H_{\mathbf{w},p}^A T_{\mathbf{u}} T_{\mathbf{v}}$ 、 $T_{\mathbf{u}} H_{\mathbf{w},p}^A T_{\mathbf{v}}$ 、 $T_{\mathbf{u}} T_{\mathbf{v}} H_{\mathbf{w},p}^A$ 。因此當某一運動鏈中有出現這 7 種接頭組合之一時，即可用其他 6 種替換來產生有著相同運動的新運動鏈，藉此產生新機構。

另外，李群理論方法也適用於更複雜的運動分析。如 $H_{\mathbf{u}}^A H_{\mathbf{u}}^B H_{\mathbf{u}}^C H_{\mathbf{u}}^D$ 運動鏈，由 4 個相同方向但不同軸線的螺旋接頭組成，自由度為 4，在空間中構成一具有三維平移及以 \mathbf{u} 方向為軸的旋轉運動。由於多個 H 接頭連續串接而成的運動較難判斷，文獻[9]中提供的分析方法為「螺旋理論(screw theory)」，計算得知該運動鏈產生 $\{X(\mathbf{u})\}$ ，並進一步列舉出擁有相同運動的運動鏈，如表 2.4 所示。

表 2.4 X 運動基本開放鏈 [9]

X運動基本開放鏈									
0P	HHHH	HHHR	HHRH	HHRR	HRHR	HRRH	RHHR	HRRR	RHRR
1P	PHHH	PHHR	PHRH	PRHH	PHRR	PRHR	PRRH	PRRR	HHPH
	HHPR	HRPH	RHPH	HRPR	RHPR	RRPH	RRPR		
2P	HHPP	HRPP	RHPP	RRPP	HPPH	HPPR	RPPR	HPHP	HPRP
	RPHP	RPRP	PHHP	PHRP	PRRP				
3P	PPPH	PPPR	PPHP	PPRP					



表 2.4 中顯示出 43 種可以產生 X 運動的運動鏈。但在進行機構組裝和分析的時，須按照接頭順序來進行，將接頭順序反向排列之運動鏈視為不同的運動鏈是必要的。因此，考慮反向排列的運動鏈可得表 2.5，共 79 種可產生 X 運動的運動鏈。若遇到某一運動鏈含有 X 運動時，便有 79 種選擇，增加了機構可選擇的種類。

表 2.5 含反向排列之 X 運動基本開放鏈

X 運動基本開放鏈									
0P	HHHH	HHHR	HHRH	HRHH	RHHH	HHRR	HRHR	HRRH	RRHH
	RHRH	RHHR	HRRR	RHRR	RRHR	RRRH			
1P	PHHH	HPHH	HHPH	HHHP	PHHR	PHRH	PRHH	HPHR	HPRH
	RPHH	HHPR	HRPH	RHPH	HHRP	HRHP	RHHP	PHRR	PRHR
	PRRH	HPRR	RPHR	RPRH	HRPR	RHPR	RRPH	HRRP	RHRP
	RRHP	PRRR	RPRR	RRPR	RRRP				
2P	HHPP	HPHP	HPPH	PPHH	PHPH	PHPH	HRPP	HPRP	HPPR
	RHPP	RPHP	RPPH	PPHR	PHPR	PHRP	PPRH	PRPH	PRHP
	RRPP	RPRP	RPPR	PPRR	PRPR	PRRP			
3P	PPPH	PPPR	PPHP	PPRP	PHPP	PRPP	HPPP	RPPP	



第三章 不連續可動機構

3.1 不連續可動機構

對於連續可動機構而言，兩桿件間相對運動之位移子集是一完全定義的維度。反觀不連續可動機構中兩特定桿件間之位移子集，則為兩個或以上各有其維度的相異平滑流形之聯集。

因此，不連續可動機構具兩種或以上無法共同進行的運動模式，且含一個以上之「分歧點(singular pose)」。分歧點的位置可視為該機構瞬時之易變(uncertainty)，或其模式變換之過渡位置，且此結構狀態存在部分可動性，該可動性為以螺旋構成之向量空間維度。簡言之，此時機構同時滿足全數所含運動模式的條件，可進入任一運動模式。

當此類機構通過這些分歧點進入其中一個運動模式時，會阻止其他運動模式作動，此時機構之整體自由度即於該運動模式之自由度。運動時，僅部分接頭會運作，其餘的接頭會保持不動，運作中的接頭可以組成該運動模式之機構。若要切換至另一運動模式，須先將此機構回復到分歧點位置，才能選擇其他的運動模式來運作。而進入另一種運動模式後，參與運動的接頭將會與先前的不同。

這些具特殊運動的機構已有許多研究。對於各種不連續可動機構進行運動模式的分析，多為由 Lee 與 Hervé 所作之研究[18-21]。文獻[18]中提出對於多種單迴路6R機構之分析，含著名之 Sarrus 機構。文獻[19]中列舉出具 $\{1/G(\mathbf{u})\}$ 及 $\{1/S(O)\}$ 兩種運動模式之「混合型球面及球面7R不連續可動機構(hybrid spherical-spherical 7R DMM)」，產生 $\{1/G(\mathbf{u})\}$ 及 $\{1/G(\mathbf{v})\}$ 兩種運動模式之「混合型平面及平面6R1P不連續可動機構(hybrid planar-planar 6R1P DMM)」等，文中共討論三種7桿不連續可動機構，以及推衍出各自機構之7桿連續可動機構。文獻[20]中則為分析具 $\{R(O_1, \mathbf{u})\}$ 及 $\{1/G(\mathbf{w})\}$ 兩種運動模式之6R不連續可動機構，同時比較一具不同組成



的6R不連續可動機構現有模型，以及對照該機構為連續可動機構時的組合。文獻[21]中討論更複雜的8R不連續可動機構，此類機構之運動為：由兩個相交在同一個1自由度次群上之2自由度流形。換言之，該機構擁有無數個分歧點，可隨時於前一停止之動作下進行運動模式的交替，例如產生運動模式 $\{T(\mathbf{w})\}\{R(D, \mathbf{u})\}$ 和 $\{T(\mathbf{w})\}\{R(E, \mathbf{v})\}$ 之機構，被命名為「平面及平面8R不連續可動機構(planar-planar 8R DMM)」。此外，Lee 與 Hervé 在文獻[22]當中討論具 $\{X(\mathbf{x})\}$ 及 $\{X(\mathbf{y})\}$ 兩種運動模式之不連續可動機構，將其命名為「X運動分岔並聯機構(parallel mechanism with bifurcation of Schoenflies motion)」。

Yan[26]提出可變拓樸機構，基於機構中可變其類型或方位之接頭，會改變該機構在運動過程中之拓樸構造。文獻中討論此類機構的特性及合成方法，並以按鈕鎖為例，此類機構於運作時構件間之相互接觸，造成新的約束而使可動部位改變，導致接頭種類以及拓樸構造跟著有所變化，造成不連續可動的現象，文中對此類機構進行分析、修改，最後合成出多種符合需求的機構。

Balli 及 Chand [27]提出另一類之可變拓樸機構。文中討論看似一般的一平面5桿連續可動機構，然而此機構運動時會產生「極限位置(extreme position)」，使得某些接頭失效，改變拓樸構造，而造成不連續可動的現象。

Dai 等人[28]提出了另一種具不連續可動性之變胞機構，利用加入插銷於機構中來對機構有更多的約束及限制，導致機構當中可動的部分發生改變；或藉由凹槽的設計來改變某些接頭之性質，使該機構有新的組成，產生不連續可動之現象。文中討論之合成方法，不僅能用於合成多自由度之變胞機構，亦能產生出更多不同類型的機構。

近期，Lee 與 Hervé 於文獻[23]討論一具不連續可動性之新型RC - CR聯軸器，於分歧點位置上擁有同向旋轉或反向旋轉兩種選擇，並於文獻[24]中有更詳盡之敘述。亦提出了文獻[29]之變胞 Bennett 連桿(metamorphic Bennett linkage)，將兩旋轉



對分別置入原四連桿 Bennett 機構中之相對的兩個桿件中，形成具有三個運動模式之不連續可動機構。

前文提出之多種機構，根據作者的定義皆可被稱為不連續可動機構。若從導致不連續可動性之原因來進行分類，可分為以下三大類。

第一大類不連續可動機構中各接頭種類不變，憑藉著桿件間的角度約束來滿足該機構的運動，且與桿件的幾何形狀無關。上述機構中屬於此類的機構包含：文獻[19]中的三種混合型 $7R$ 不連續可動機構、文獻[20]中的 $6R$ 不連續可動機構、文獻[21]中的兩種 $8R$ 不連續可動機構等、文獻[22]中的 X 運動分岔並聯機構、文獻[23]及[24]中的新型 $RC - CR$ 聯軸器等。

第二大類不連續可動機構中各接頭種類會隨著桿件之運作而改變，且會受到桿件之幾何形狀及相對位置影響，如機構運動時桿件間的互相接觸，可能是阻擋或是插銷，使得桿件受到更多約束，而造成不連續可動的現象。屬於此大類的文獻包含：文獻[26]中的按鈕鎖、文獻[28]中的變胞機構。

第三大類不連續可動機構中各接頭種類不變，但與桿件的幾何形狀有相關，如旋轉對同軸、遇到極限位置等狀況，使得某些接頭失去作用，或是到達機構之分歧點，而產生不連續可動的現象。屬於此大類的有：文獻[18]中的 $6R$ 機構、文獻[27]中的平面 5 桿機構、文獻[29]的變胞 Bennett 連桿機構。

於此三大類不連續可動機構中，已有研究提出系統化的方法來合成第二大類機構，第三大類則是一般機構的特殊現象，偏屬於工程設計上的特例。而針對第一大類的研究多只提出分析其運動特性之方法，少有提到機構的產生步驟[19]，並未有詳細的合成討論。唯獨文獻[22]中，除了進行機構運動分析之外，亦有詳盡的合成過程，主要方法是應用李群運動鏈之替代理論，並對 X 運動分岔之並聯機構進行修改，合成出其他擁有相同運動模式之不連續可動機構。然而此研究中的合成步驟僅能運用在此種機構上，後來羅子欽[25]探討上述之第一大類不連續可動機構之合



成方法，對此類已知的不連續可動機構進行分析，尋找其共同特徵並歸納出第一類不連續可動機構的合成流程。但其流程中仍有部分細節未詳盡說明，因此本文將利用其方法做其他運動模式之合成，並加以驗證與除錯。

3.2 不連續可動機構運動分析方法

首先分析文獻[19]中的混合型球面及球面7R不連續可動機構，如圖 3.1 所示。

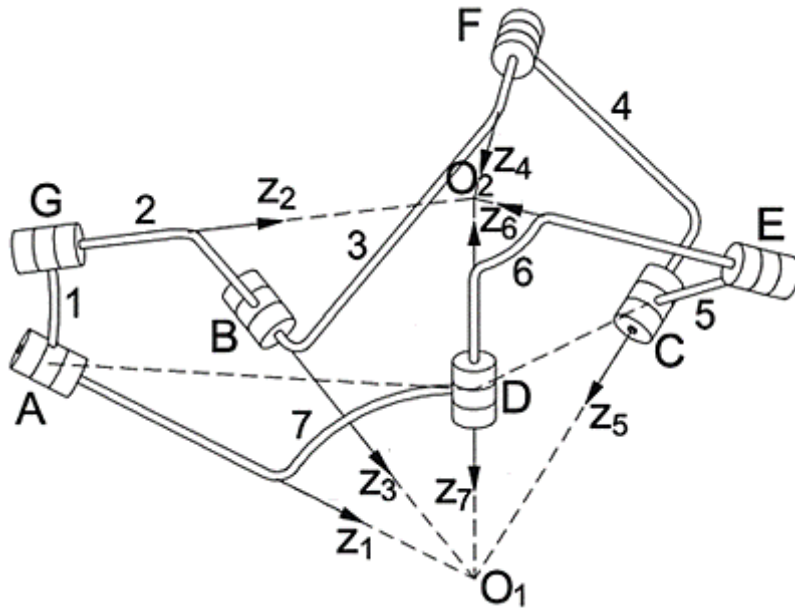


圖 3.1 混合型球面及球面7R不連續可動機構 [19]

此機構之表示法可記作： $R_{z_1}^A R_{z_2}^G R_{z_3}^B R_{z_4}^F R_{z_5}^C R_{z_6}^E R_{z_7}^D$ 。圖 3.1 中顯示此機構處於分歧點位置的情形，由A、B、C、D四個旋轉對指向點 O_1 ，而D、E、F、G四個旋轉對指向點 O_2 。因此又可寫成： $R_{z_1}^{O_1} R_{z_2}^{O_2} R_{z_3}^{O_1} R_{z_4}^{O_2} R_{z_5}^{O_1} R_{z_6}^{O_2} R_{z_7}^{O_1}$ 。

文獻中選取桿件 7 為地桿、桿件 4 為端效器，經分析後得兩運動模式為 $\{1/S(O_1)\}$ 及 $\{1/S(O_2)\}$ 。以下將改設端效器於桿件 5 上，地桿仍為桿件 7，則端效器之運動表示為 $\{L(7,5)\}$ ，而自地桿至端效器間之兩條運動鏈的運動分別為：

$$\{G_1\} = \{R(O_1, z_1)\}\{R(O_2, z_2)\}\{R(O_1, z_3)\}\{R(O_2, z_4)\}\{R(O_1, z_5)\}$$

$$\{G_2\} = \{R(O_1, z_7)\}\{R(O_2, z_6)\}$$



此時端效器之運動可記作：

$$\begin{aligned}\{L(7,5)\} &= \{G_1\} \cap \{G_2\} \\ &= \{R(O_1, \mathbf{z}_1)\}\{R(O_2, \mathbf{z}_2)\}\{R(O_1, \mathbf{z}_3)\}\{R(O_2, \mathbf{z}_4)\}\{R(O_1, \mathbf{z}_5)\} \\ &\quad \cap \{R(O_1, \mathbf{z}_7)\}\{R(O_2, \mathbf{z}_6)\}\end{aligned}$$

經分析後可得端效器具有兩種運動模式—— $\{1/S(O_1)\}$ 及 $\{1/S(O_2)\}$ 。 $\{1/S(O_1)\}$ 表示 $\{S(O_1)\}$ 之 1 維次流形，產生一單自由度之球面運動。同理可知 $\{1/S(O_2)\}$ 為另一單自由度球面運動。在此仿照文獻[20]使用聯集符號「 \cup 」於運動式中，藉以表示此機構具有該兩種運動模式，但無法同時作動的特性。並且將端效器之運動記作：

$$\{L(7,5)\} \supseteq \{1/S(O_1)\} \cup \{1/S(O_2)\}$$

當機構進行運動模式 $\{1/S(O_1)\}$ 時，接頭 E 、 F 、 G 為固定不動，而端效器之運動可改寫成：

$$\begin{aligned}\{L(7,5)\}_{s_1} &= \{R(O_1, \mathbf{z}_1)\}\{E\}\{R(O_1, \mathbf{z}_3)\}\{E\}\{R(O_1, \mathbf{z}_5)\} \cap \{R(O_1, \mathbf{z}_7)\}\{E\} \\ &= \{R(O_1, \mathbf{z}_1)\}\{R(O_1, \mathbf{z}_3)\}\{R(O_1, \mathbf{z}_5)\} \cap \{R(O_1, \mathbf{z}_7)\} \\ &= \{1/S(O_1)\}\end{aligned}$$

由於此機構並不僅有此運動模式，因此以 $\{L(7,5)\} \supseteq \{1/S(O_1)\}$ 表示來概括。

另一方面，機構進行運動模式 $\{1/S(O_2)\}$ 時，接頭 A 、 B 、 C 為固定不動，而端效器之運動可改寫成：

$$\begin{aligned}\{L(7,5)\}_{s_2} &= \{E\}\{R(O_2, \mathbf{z}_2)\}\{E\}\{R(O_2, \mathbf{z}_4)\}\{E\} \cap \{R(O_1, \mathbf{z}_7)\}\{R(O_2, \mathbf{z}_6)\} \\ &= \{R(O_2, \mathbf{z}_2)\}\{R(O_2, \mathbf{z}_4)\} \cap \{R(O_1, \mathbf{z}_7)\}\{R(O_2, \mathbf{z}_6)\} \\ &= \{1/S(O_2)\}\end{aligned}$$

則 $\{L(7,5)\} \supseteq \{1/S(O_2)\}$ 。

基於群理論之表示計算，得證 $\{L(7,5)\} \supseteq \{1/S(O_1)\} \cup \{1/S(O_2)\}$ 。

對於此機構做進一步之分析，探討其不連續可動性的因素。首先須了解機構於分歧點的狀況，由於此位置狀態下可同時滿足兩相異球面運動之條件——分別有足



夠數量之接頭指向同一球心點，因此機構將進入之下一動作有兩種選擇。一旦選擇其中一運動模式來進行，如 $\{1/S(O_1)\}$ ，原先指向點 O_2 的數個接頭將無法同時滿足其共同條件，導致產生球面運動 $\{1/S(O_2)\}$ 的可能失效，故唯有屬於 $\{1/S(O_1)\}$ 之接頭參與此時的運動。反之，屬 $\{1/S(O_1)\}$ 之接頭於運動模式 $\{1/S(O_2)\}$ 時，將不再共同指向點 O_1 ，因而無法介入 $\{1/S(O_2)\}$ 的運動。而在此機構中之 $R_{z_7}^D$ 為同時滿足兩相異運動模式的接頭，表示在任一運動模式作用時，此接頭都不會失去作用，適合作為驅動接頭。接著以相同的方法分析其他現有的不連續可動機構，並直接探討各機構之運動結果，將不再對各步驟逐一說明。

文獻[20]中之6R不連續可動機構，如圖 3.2 所示，以 $R_{z_1}^{O_1}R_{z_2}^{O_1}R_{z_3}^A R_{z_4}^B R_{z_5}^{O_2}R_{z_6}^{O_2}$ 表示。

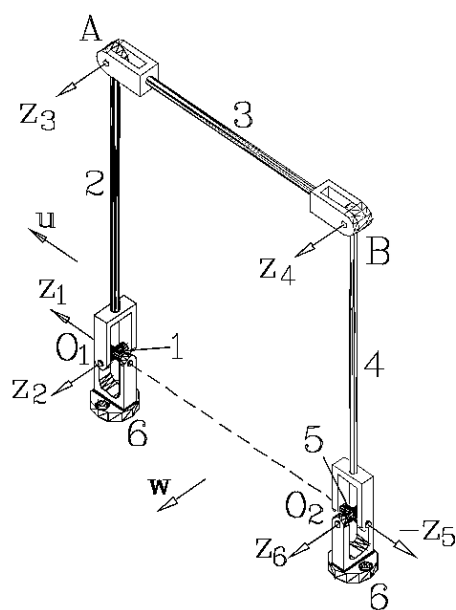


圖 3.2 6R不連續可動機構 [20]

圖 3.2 顯示此機構處於分歧點位置的情形，其中 z_2 、 z_3 、 z_4 、 z_6 平行於方向 w ，而 z_1 、 z_5 平行於方向 u ，因此又可寫成： $R_u^{O_1}R_w^{O_1}R_w^A R_w^B R_u^{O_2}R_w^{O_2}$ 。

文獻中選取桿件 6 為地桿、桿件 3 為端效器，經分析後得兩運動模式為 $\{R(O_1, u)\}$ 及 $\{1/G(w)\}$ 。以下將改設端效器於桿件 2 上，地桿仍為桿件 6，自地桿至端效器間之兩條運動鏈的運動分別為：



$$\{G_1\} = \{R(O_1, \mathbf{u})\}\{R(O_1, \mathbf{w})\}$$

$$\{G_2\} = \{R(O_2, \mathbf{w})\}\{R(O_2, \mathbf{u})\}\{R(B, \mathbf{w})\}\{R(A, \mathbf{w})\}$$

進入第一種運動模式時， $R_{\mathbf{w}}^{O_1}$ 、 $R_{\mathbf{w}}^A$ 、 $R_{\mathbf{w}}^B$ 、 $R_{\mathbf{w}}^{O_2}$ 為不動，此時端效器之運動可記作：

$$\begin{aligned} \{L(6,2)\} &= \{R(O_1, \mathbf{u})\}\{E\} \cap \{E\}\{R(O_2, \mathbf{u})\}\{E\}\{E\} \\ &= \{R(O_1, \mathbf{u})\} \end{aligned}$$

進入第二種運動模式時， $R_{\mathbf{u}}^{O_1}$ 、 $R_{\mathbf{u}}^{O_2}$ 為不動，此時端效器之運動可記作：

$$\begin{aligned} \{L(6,2)\} &= \{E\}\{R(O_1, \mathbf{w})\} \cap \{R(O_2, \mathbf{w})\}\{E\}\{R(B, \mathbf{w})\}\{R(A, \mathbf{w})\} \\ &= \{1/G(\mathbf{w})\} \end{aligned}$$

因此可得端效器具兩種運動模式，可寫成： $\{L(6,2)\} \supseteq \{R(O_1, \mathbf{u})\} \cup \{1/G(\mathbf{w})\}$ 。

文獻 [21] 中之平面及平面 8R 不連續可動機構，如圖 3.3 所示，以 $R_{z_1}^A R_{z_2}^B R_{z_3}^C R_{z_4}^E R_{z_5}^D R_{z_6}^F R_{z_7}^G R_{z_8}^H$ 表示。

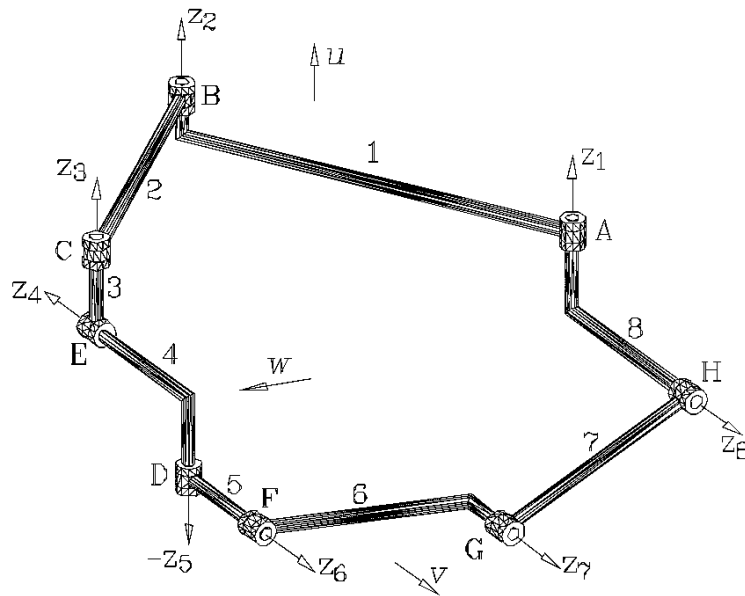


圖 3.3 平面及平面 8R 不連續可動機構 [21]

其中顯示此機構處於分歧點位置的情形，其中 \mathbf{z}_1 、 \mathbf{z}_2 、 \mathbf{z}_3 、 \mathbf{z}_5 平行於方向 \mathbf{u} ，而 \mathbf{z}_4 、 \mathbf{z}_6 、 \mathbf{z}_7 、 \mathbf{z}_8 平行於方向 \mathbf{v} ，因此又可寫成： $R_{\mathbf{u}}^A R_{\mathbf{u}}^B R_{\mathbf{u}}^C R_{\mathbf{v}}^E R_{\mathbf{u}}^D R_{\mathbf{v}}^F R_{\mathbf{v}}^G R_{\mathbf{v}}^H$ 。

文獻中選取桿件 8 為地桿、桿件 4 為端效器，經分析後得兩運動模式為



$\{T(\mathbf{w})\}\{R(D, \mathbf{u})\}$ 及 $\{T(\mathbf{w})\}\{R(E, \mathbf{v})\}$ 。以下將改設端效器於桿件 5 上，地桿仍為桿件 8，自地桿至端效器間之兩條運動鏈的運動分別為：

$$\begin{aligned} \{G_1\} &= \{R(A, \mathbf{u})\}\{R(B, \mathbf{u})\}\{R(C, \mathbf{u})\}\{R(E, \mathbf{v})\}\{R(D, \mathbf{u})\} \\ \{G_2\} &= \{R(H, \mathbf{v})\}\{R(G, \mathbf{v})\}\{R(F, \mathbf{v})\} \end{aligned}$$

進入第一種運動模式時， R_v^E 為不動，此時端效器之運動可記作：

$$\begin{aligned} \{L(8,5)\} &= \{R(A, \mathbf{u})\}\{R(B, \mathbf{u})\}\{R(C, \mathbf{u})\}\{E\}\{R(D, \mathbf{u})\} \\ &\quad \cap \{R(H, \mathbf{v})\}\{R(G, \mathbf{v})\}\{R(F, \mathbf{v})\} \\ &= \{G(\mathbf{u})\} \cap \{G(\mathbf{v})\} \\ &= \{T(\mathbf{w})\} \end{aligned}$$

進入第二種運動模式時， R_u^D 為不動，此時端效器之運動可記作：

$$\begin{aligned} \{L(8,5)\} &= \{R(A, \mathbf{u})\}\{R(B, \mathbf{u})\}\{R(C, \mathbf{u})\}\{R(E, \mathbf{v})\}\{E\} \\ &\quad \cap \{R(H, \mathbf{v})\}\{R(G, \mathbf{v})\}\{R(F, \mathbf{v})\} \\ &= \{G(\mathbf{u})\}\{R(E, \mathbf{v})\} \cap \{G(\mathbf{v})\} \\ &= \{T(\mathbf{w})\}\{R(E, \mathbf{v})\} \end{aligned}$$

因此可得端效器具兩種運動模式，可寫成： $\{L(8,5)\} \supseteq \{T(\mathbf{w})\} \cup \{T(\mathbf{w})\}\{R(E, \mathbf{v})\}$ 。

文獻 [22] 中之 2-PPRR 不連續可動機構，如圖 3.4 所示，以 $P_x P_y P_z R_x^N R_y^N R_x^N R_y^N P_z P_x P_y$ 表示。

選取桿件 8 為地桿、桿件 4 為端效器，而自地桿至端效器間之兩條運動鏈的運動分別為：

$$\begin{aligned} \{G_1\} &= \{T(\mathbf{x})\}\{T(\mathbf{y})\}\{T(\mathbf{z})\}\{R(N, \mathbf{x})\}\{R(N, \mathbf{y})\} \\ \{G_2\} &= \{T(\mathbf{y})\}\{T(\mathbf{x})\}\{T(\mathbf{z})\}\{R(N, \mathbf{y})\}\{R(N, \mathbf{x})\} \end{aligned}$$

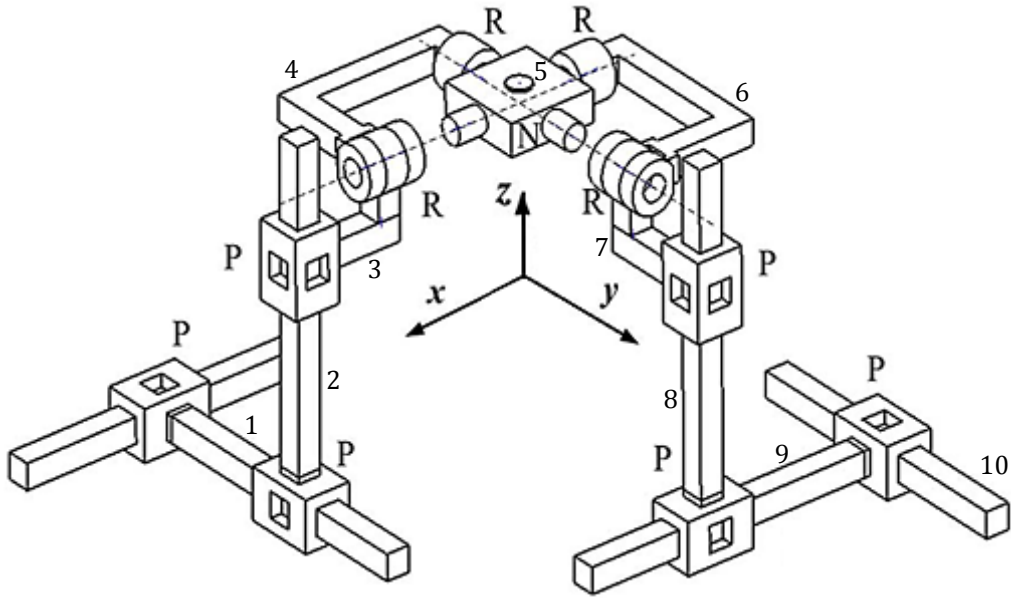


圖 3.4 2 - PPPRR不連續可動機構 [22]

進入第一種運動模式時，兩個 R_y^N 接頭為不動，此時端效器之運動可記作：

$$\begin{aligned} \{L(10,5)\} &= \{T(\mathbf{x})\}\{T(\mathbf{y})\}\{T(\mathbf{z})\}\{R(N, \mathbf{x})\}\{E\} \\ &\quad \cap \{T(\mathbf{y})\}\{T(\mathbf{x})\}\{T(\mathbf{z})\}\{E\}\{R(N, \mathbf{x})\} \\ &= \{X(\mathbf{x})\} \cap \{X(\mathbf{x})\} \\ &= \{X(\mathbf{x})\} \end{aligned}$$

進入第二種運動模式時，兩個 R_x^N 接頭為不動，此時端效器之運動可記作：

$$\begin{aligned} \{L(10,5)\} &= \{T(\mathbf{x})\}\{T(\mathbf{y})\}\{T(\mathbf{z})\}\{E\}\{R(N, \mathbf{y})\} \\ &\quad \cap \{T(\mathbf{y})\}\{T(\mathbf{x})\}\{T(\mathbf{z})\}\{R(N, \mathbf{y})\}\{E\} \\ &= \{X(\mathbf{y})\} \cap \{X(\mathbf{y})\} \\ &= \{X(\mathbf{y})\} \end{aligned}$$

因此可得端效器具兩種運動模式，可寫成： $\{L(10,5)\} \supseteq \{X(\mathbf{x})\} \cup \{X(\mathbf{y})\}$ 。



3.3 共同特徵

由上一小節之分析結果可發現，當一個不連續可動機構於某一個運動模式中作動時，會使另一個運動模式無法展現。而在特定條件或位置下，可以進行運動模式的變換。亦能解釋為此機構具有這兩種運動，但該兩種運動無法共存、無法同時表現。這樣的現象就如同將兩種不同運動的簡單機構，依據某種法則而結合在一起，本節將設法找出這個法則。

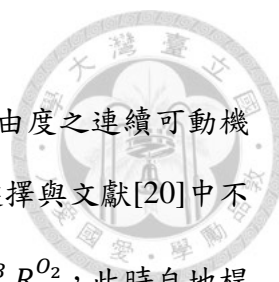
對於前一小節所分析之現有不連續可動機構，分別觀察自地桿至端效器兩端的運動鏈，兩運動鏈中各有部分接頭屬於一種運動模式，部分接頭屬於另一運動模式。且其中分屬不同運動模式的接頭順序為交錯或刻意變換，使得兩運動模式之完整運動鏈於該機構迴路中被打斷。也就是說，構成同一運動模式之數個接頭不完全為相鄰連接的。選取文獻[20]所提出之6R不連續可動機構為例(圖 3.2)，在運動模式 $\{R(O_1, \mathbf{u})\}$ 下參與運動的接頭為 $R_{z_1}^{O_1}$ 和 $R_{z_5}^{O_2}$ ，而此兩個接頭恰好可組成一個使端效器運動為 $\{R(O_1, \mathbf{u})\}$ 之二連桿機構，此機構自地桿至端效器兩端之路徑的運動鏈分別為 $R_{z_1}^{O_1}$ 及 $R_{z_5}^{O_2}$ ；另一運動模式 $\{1/G(\mathbf{w})\}$ 下會運動的接頭有 $R_{z_2}^{O_1}$ 、 $R_{z_3}^A$ 、 $R_{z_4}^B$ 、 $R_{z_6}^{O_2}$ ，可組成一個使端效器運動為 $\{1/G(\mathbf{w})\}$ 之四連桿機構，此機構自地桿至端效器兩端之路徑的運動鏈為 $R_{z_2}^{O_1}R_{z_3}^A$ 及 $R_{z_6}^{O_2}R_{z_4}^B$ 。

若將上述兩種機構各自的兩條運動鏈分別進行相同順序之結合，並以符號「 \times 」來劃分左右端分別為二連桿與四連桿機構的運動鏈運動。因此自地桿至端效器兩端之路徑的運動鏈分別為 $R_{z_1}^{O_1}R_{z_2}^{O_1}R_{z_3}^A$ 及 $R_{z_5}^{O_2}R_{z_6}^{O_2}R_{z_4}^B$ ，產生的運動分別為：

$$\{G_1\} = \{R(O_1, \mathbf{z}_1)\} \times \{R(O_1, \mathbf{z}_2)\}\{R(A, \mathbf{z}_3)\}$$

$$\{G_2\} = \{R(O_2, \mathbf{z}_5)\} \times \{R(O_2, \mathbf{z}_6)\}\{R(B, \mathbf{z}_4)\}$$

結果獲得此機構之運動為： $\{L(6,3)\} = \{G_1\} \cap \{G_2\} = \{R(O_1, \mathbf{u})\}\{1/G(\mathbf{w})\}$ 。



由上式得到的機構並非具有不連續可動性，而是一種 2 自由度之連續可動機構，於文獻[20]末亦有提及。若變更運動鏈中的接頭次序，並選擇與文獻[20]中不同的組成，將 $R_{z_1}^{O_1}R_{z_2}^{O_1}R_{z_3}^A$ 改為 $R_{z_2}^{O_1}R_{z_1}^{O_1}R_{z_3}^A$ ，將 $R_{z_5}^{O_2}R_{z_6}^{O_2}R_{z_4}^B$ 改為 $R_{z_6}^{O_2}R_{z_4}^B R_{z_5}^{O_2}$ ，此時自地桿至端效器兩端運動鏈的運動分別為：

$$\{G_1\} = \{R(O_1, z_2)\}\{R(O_1, z_1)\}\{R(A, z_3)\}$$

$$\{G_2\} = \{R(O_2, z_6)\}\{R(B, z_4)\}\{R(O_2, z_5)\}$$

進行分析後成功獲得不連續可動的現象。而此具有兩個運動模式之結果為：

$$\{L(6,3)\} \supseteq \{R(O_1, \mathbf{u})\} \cup \{1/G(\mathbf{w})\}$$

上述的運動雖與文獻中之機構產生的運動相同，但從接頭的組成順序上來看，已是完全不同的機構所產生的運動，此不同組成之機構如圖 3.5 所示。

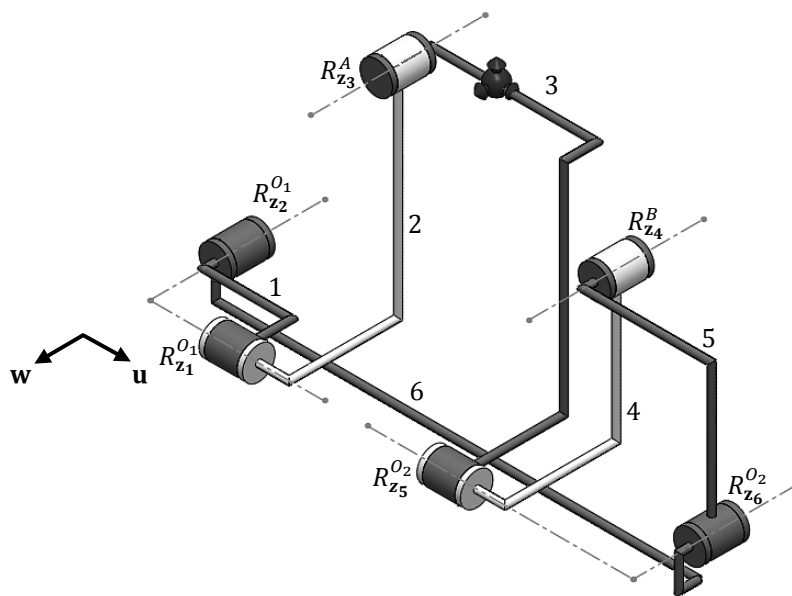


圖 3.5 不同組成之6R不連續可動機構

然而，若僅鎖定接頭的旋轉方向，此機構與文獻[20]之不連續可動機構有相同的組成方式，僅地桿及端效器的設置位置恰好相反。若考慮旋轉軸所經過的點和端效器兩端之運動鏈，則文獻中的機構為 $R_{\mathbf{u}}^{O_1}R_{\mathbf{w}}^{O_1}R_{\mathbf{w}}^A R_{\mathbf{w}}^B R_{\mathbf{u}}^{O_2}R_{\mathbf{w}}^{O_2}$ ，與圖 3.5 的機構 $R_{\mathbf{w}}^{O_1}R_{\mathbf{u}}^{O_1}R_{\mathbf{w}}^A R_{\mathbf{u}}^{O_2}R_{\mathbf{w}}^B R_{\mathbf{w}}^{O_2}$ 仍有些許不同。此外，整理所有接頭之重新組合狀況，可得到



另一種具有不連續可動性之機構為 $R_u^{O_1}R_w^{O_1}R_w^AR_u^{O_2}R_w^BR_w^{O_2}$ 。

以同樣的方法對上述其他的不連續可動機構進行嘗試，將發現皆符合這些現象，因此合理歸納出第一類不連續可動機構之共同特徵如下：

1. 此類 DMM 可視為由兩個獨立的機構所組成
2. 此類 DMM 擁有的兩種運動模式即為前述之兩機構產生的運動
3. 上述兩機構的結合為一組機構的接頭穿插至另一組機構中

3.4 小結

本章節將文獻提出之各種不連續可動機構進行與文獻中略微不同的運動分析，並嘗試改變其中一現有例之接頭的連接次序，或利用重新選取地桿及端效器的位置來找出新機構，最後整理出幾項各種不連續可動機構擁有的共同特徵。



第四章 不連續可動機構之合成與分析

4.1 設計合成方法

利用上一章節所歸納之不連續可動機構的共同特徵，推行出合成此類機構的方法，機構之合成流程如圖 4.1。合成方法中主要是運用位移李次群理論與排列組合，企圖尋找能產生設定之運動模式的不連續可動機構，以下將對此流程之各步驟逐一說明。

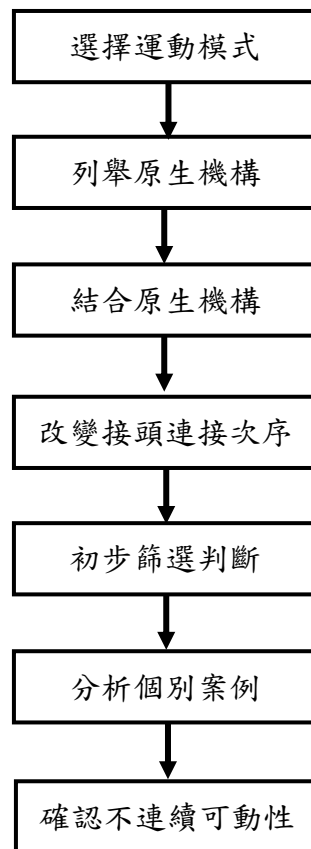


圖 4.1 不連續可動機構合成流程圖

一、選擇運動模式

首先需要決定預期的運動目標，由於機構中任兩桿件間之運動未必有兩個運動模式，故須設定地桿及端效器的位置。設定運動目標後，可加入其他限制或條件，再依下列步驟進行來推得符合需求之不連續可動機構。



二、列舉原生機構

進行合成前，須先分析期望的運動模式，盡可能地列出可達成此運動模式的單迴路最簡易機構，在此將之命名為「原生機構(primitive mechanism, PM)」。這些能滿足此運動的機構多從文獻中取得，若無法找出完全符合之機構，則只須找出端效器運動結果有包含該運動的機構即可。

三、結合原生機構

從各運動模式之數個原生機構中各選一種，照兩種先後次序分別進行結合。若兩目標運動之運動鏈直接結合後有多餘的自由度，應在符合限制條件下去除多餘的接頭。在下一章節之合成中，此過程採用一接頭同時屬於兩原生機構，並將此接頭稱為「共同接頭」。此步驟中產生之可能機構數量將遽增，故若有另設特殊條件，應於此步驟中套用，以減少機構數量，便於後續步驟進行。將此步驟所得之機構命名為「組合機構(combined mechanism, CM)」。接著整理各組合機構，扣除完全相同者，並尋找可產生相同運動的其他組合機構。

四、改變接頭連接次序

將上一步驟之結果運動鏈的接頭進行次序交換，處理方法為：將分屬於兩種運動模式之接頭相互交錯調換。例如一組合機構的其中一條運動鏈是由分屬於A、B兩種運動模式之接頭所組成，以AABBB表示，則調換屬不同運動模式之接頭位置可得ABABB、ABBAB……等組合。

有鑑於進行先前步驟時，已將各運動模式機構之接頭排列全數列出，此步驟中只會變換不同模式的接頭排列順序，以避免產生重複的排列，同一模式的接頭將不互相調換。由於進行排列組合整理時之複雜性，後續舉例中將會對接頭簡化，減少視覺上的混淆，更全面地找出其他擁有相同運動的機構，並將結果命名為「交錯機構(reordered mechanism, RM)」。



五、初步篩選判斷

由於步驟四中須考慮所有接頭之排列組合，可能產生連續可動機構，因此將其結果與步驟三的組合機構進行比對，排除與組合機構重複的交錯機構。此外，須確認由地桿至端效器兩端之運動鏈的運動序列，例如：兩運動鏈分別為 $\{T(\mathbf{y})\}\{T(\mathbf{z})\}\{R(A, \mathbf{x})\}$ 及 $\{T(\mathbf{z})\}\{R(A, \mathbf{x})\}\{T(\mathbf{y})\}$ ，形式表現上看似不同，但經分析後皆為 $\{G(\mathbf{x})\}$ 。因此這兩條運動鏈之運動序列相同，可視為不同形式的同一運動鏈，亦屬須被排除之情形。經過上述兩種刪減的過程，預期剩下的生成機構即為需求之機構——含有多種目標運動模式之不連續可動機構。

六、分析個別案例

後續將以實例說明不連續可動機構之合成過程，找出合成結果後，會使用電腦軟體 SolidWorks 2013 建立模型來模擬機構之各運動狀態，並匯入 Adams 2013 取得運動模擬之各參數數據。列舉例子將為具 (1) $\{1/S(O_1)\}$ 及 $\{1/S(O_2)\}$ 、(2) $\{1/G(\mathbf{y}_1)\}$ 及 $\{1/G(\mathbf{y}_2)\}$ 、(3) $\{R(\mathbf{x})\}$ 、 $\{R(\mathbf{y})\}$ 及 $\{R(\mathbf{z})\}$ 運動模式之不連續可動機構，其中例(1)與例(2)將各有兩個相異的機構範例。

七、確認不連續可動性

分析建模之機構運動結果，是否符合不連續可動機構的基本條件：具兩種或以上不可共存之運動模式，且運動模式為合成目標之運動設定，進而確定其不連續可動性。

與文獻[25]之主要差異在於，文獻中認為經過步驟五後所剩下的所有交錯機構，皆可成為不連許可動機構。然而，本研究經過更多的實例驗證，發現多數的結果皆非不連續可動機構。因此仍需要經過個例驗證，才能明確地證實該機構是否具有不連續可動性。



4.2 合成具 $\{1/S(O_1)\}$ 及 $\{1/S(O_2)\}$ 運動模式之不連續可動機構

本節首先選擇一較簡單的不連續可動機構作為第一個例，設定合成目標的運動模式為文獻[20]中，含兩不同球心之球面運動的不連續可動機構，故設定運動模式為 $\{1/S(O_1)\}$ 及 $\{1/S(O_2)\}$ 。

4.2.1 列舉原生機構

$\{1/S(O_1)\}$ 及 $\{1/S(O_2)\}$ 兩運動模式皆屬 $\{1/S(O)\}$ ，為 $\{S(O)\}$ 之 1 維次流形，是一種位於一球心為 O 之球面上的 1 維運動，即一任意曲線，且曲線上任一點至球心 O 之距離固定。由於要考慮端效器與地桿，故產生兩種運動方式。而在此討論坐擁不同之球心的兩運動模式，即 $O_1 \neq O_2$ 。

產生機構的第一種 $\{1/S(O)\}$ 組成方式為 $R_{v_1}^O R_{v_2}^O * R_{v_4}^O R_{v_3}^O$ ，以 $*$ 代表端效器的位置，如圖 4.2 所示。

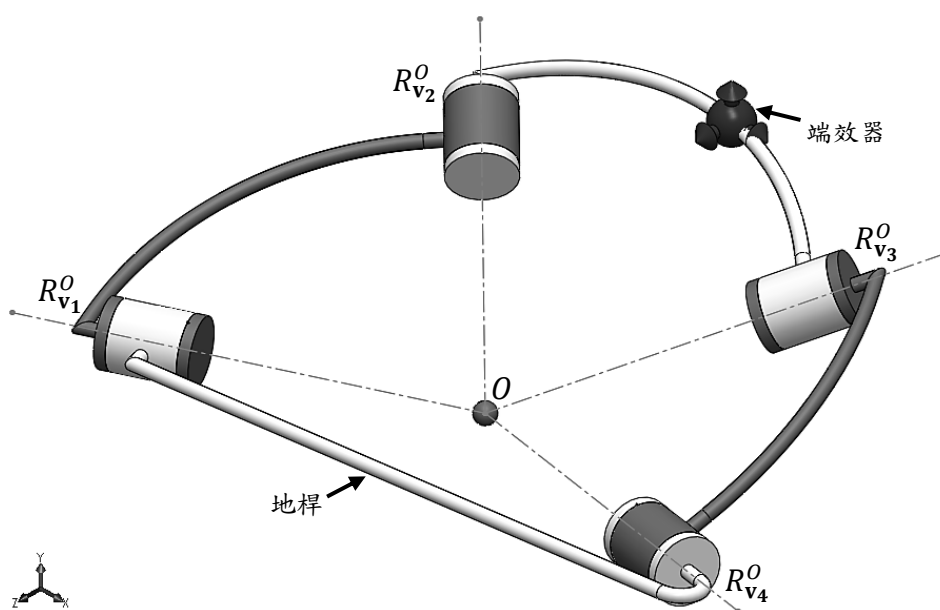


圖 4.2 $R_{v_1}^O R_{v_2}^O * R_{v_4}^O R_{v_3}^O$ 機構



第二種 $\{1/S(O)\}$ 組成方式為 $R_{v_1}^O R_{v_2}^O R_{v_3}^O * R_{v_4}^O$ ，如圖 4.3 所示。

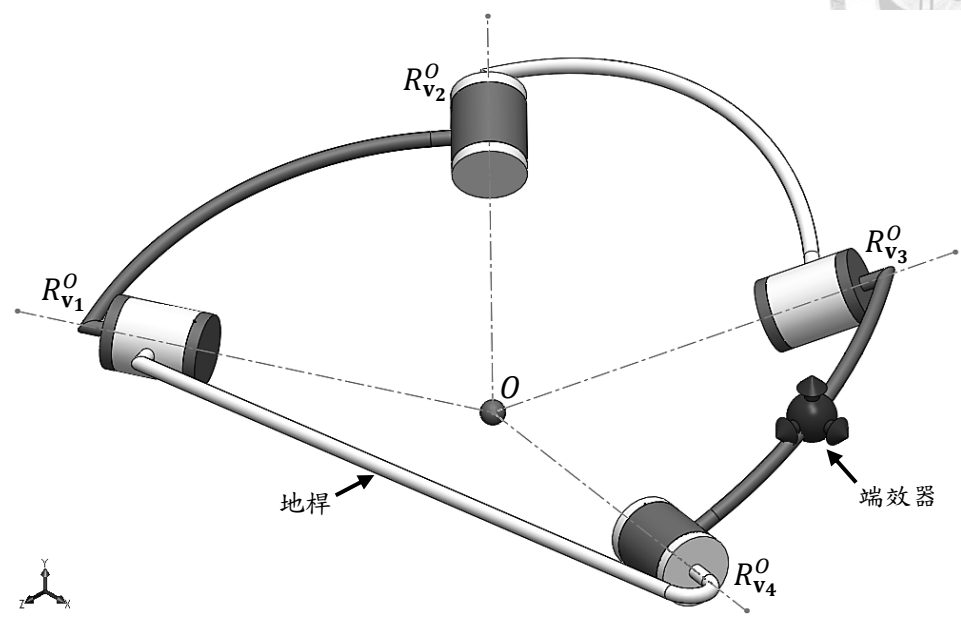


圖 4.3 $R_{v_1}^O R_{v_2}^O R_{v_3}^O * R_{v_4}^O$ 機構

上述兩種機構實際上有相同的組合，但對於不同的地桿與端效器設定，在本文中將其視為不同機構，以利往後之步驟的進行。

4.2.2 結合原生機構

將以上兩種各產生 $\{1/S(O_1)\}$ 及 $\{1/S(O_2)\}$ 的原生機構進行結合。若將兩種原生機構直接結合會得到 8 桿機構，但經過分析之結果會得非單一自由度的運動模式，因此無論機構具有不連續可動性與否，將不易利用電腦模擬結果來觀察；若為了減少桿建的數目而使用過多的共同接頭形成 6 桿機構，所擁有的運動模式將不會完全與目標相同。詳細對於 8 桿機構與 6 桿機構的情況將於本節末討論。因此設定桿件的數量為 7，且使用一個共同接頭，來減少額外的衍伸問題。共同接頭是指從兩運動的原生機構中，各選一個接頭來作為共用，且此共同接頭須為兩基礎運動鏈結合時鄰接的地方。

由於共同接頭必為兩運動之原生機構共有的接頭，所以此接頭的運動需要同時滿足兩運動的組成條件，故應為以通過 O_1 點和 O_2 點之軸線進行旋轉的 R 接頭，在



此對之命為 R_W^O ，點 O 僅表示 O_1 和 O_2 連線之任一點。

從 $\{1/S(O_1)\}$ 及 $\{1/S(O_2)\}$ 之原生機構中移除一個 R 接頭後，以 \square 表示暫時空缺的位置。且為了確保能得到全面的組合，將納入其中一運動之順序相反的機構，例如 $R_{v_1}^{O_2} R_{v_2}^{O_2} * R_{v_3}^{O_2}$ 之反向機構為 $R_{v_3}^{O_2} * R_{v_2}^{O_2} R_{v_1}^{O_2}$ ，並整理成表 4.1 所示。

表 4.1 去除一旋轉接頭之 $\{1/S(O_1)\}$ 及 $\{1/S(O_2)\}$ 原生機構

$\{1/S(O_1)\}$	$R_{u_1}^{O_1} R_{u_2}^{O_1} * R_{u_3}^{O_1}$	$R_{u_1}^{O_1} R_{u_2}^{O_1} R_{u_3}^{O_1} * \square$		
$\{1/S(O_2)\}$	$R_{v_1}^{O_2} R_{v_2}^{O_2} * R_{v_3}^{O_2}$	$R_{v_3}^{O_2} * R_{v_2}^{O_2} R_{v_1}^{O_2}$	$R_{v_1}^{O_2} R_{v_2}^{O_2} R_{v_3}^{O_2} * \square$	$\square * R_{v_3}^{O_2} R_{v_2}^{O_2} R_{v_1}^{O_2}$

$\{1/S(O_1)\}$ 之簡寫原生機構有 2 種，而對於 $\{1/S(O_2)\}$ 保留其反向機構共 4 種進行結合。為了便於閱讀，故將上表之組合機構進行簡易改寫，見表 4.2，以 A 取代屬於 $\{1/S(O_1)\}$ 的接頭，以 B 取代屬於 $\{1/S(O_2)\}$ 之的接頭，下標數字表示接頭的填法，如表 4.3 所示。

表 4.2 去除一旋轉接頭之 $\{1/S(O_1)\}$ 及 $\{1/S(O_2)\}$ 簡寫原生機構

$\{1/S(O_1)\}$	$A_1 A_1 * A_1$	$A_2 A_2 A_2 * \square$		
$\{1/S(O_2)\}$	$B_1 B_1 * B_1$	$B_2 * B_2 B_2$	$B_3 B_3 B_3 * \square$	$\square * B_4 B_4 B_4$

表 4.3 兩球面之簡寫機構的接頭填法

A_1, A_2	$R_{u_1}^{O_1} R_{u_2}^{O_1} R_{u_3}^{O_1}$
B_1, B_2, B_3, B_4	$R_{v_1}^{O_2} R_{v_2}^{O_2} R_{v_3}^{O_2}$

進行結合時，設定地桿為起點，以運動鏈為單位按照順序進行裝配。從表 4.2 之兩運動模式中各選一原生機構表示法，去除前者的端效器、去除後者的地桿，將此二者的缺口兩端分別以桿件結合，並交換順序結合一次。由於先前已對 $\{1/S(O_2)\}$ 保留其逆向機構，因此兩種安裝次序皆能納入考量，如表 4.4 所示。

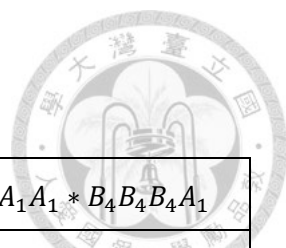


表 4.4 兩球面混合之簡寫組合機構

$A_1A_1B_1B_1 * B_1A_1$	$A_1A_1B_2 * B_2B_2A_1$	$A_1A_1B_3B_3B_3 * A_1$	$A_1A_1 * B_4B_4B_4A_1$
$B_1B_1A_1A_1 * A_1B_1$	$B_2A_1A_1 * A_1B_2B_2$	$B_3B_3B_3A_1A_1 * A_1$	$A_1A_1 * A_1B_4B_4B_4$
$A_2A_2A_2B_1B_1 * B_1$	$A_2A_2A_2B_2 * B_2B_2$	$A_2A_2A_2B_3B_3B_3 * \square$	$A_2A_2A_2 * B_4B_4B_4$
$B_1B_1A_2A_2A_2 * B_1$	$B_2A_2A_2A_2 * B_2B_2$	$B_3B_3B_3A_2A_2A_2 * \square$	

此時若考慮要置入共同接頭 R_W^O ，除含有 \square 之機構必須在此空缺處填入 R_W^O 之外，其他插入位置為 A 接頭與 B 接頭之連接處。以 $A_1A_1B_1B_1 * B_1A_1$ 為例， R_W^O 可置入的位置如圖 4.4 所示。

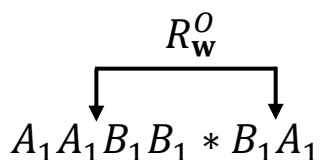


圖 4.4 組合機構之 R_W^O 插入範例

4.2.3 改變接頭連接次序

對兩運動之簡寫組合機構進行接頭交錯，交錯的方法為：先列出端效器兩端之接頭組各別的所有排列可能，再合併兩側的組合。例如機構 $A_1A_1B_1B_1 * B_1A_1$ 之端效器左側為 $A_1A_1B_1B_1$ ，其其他排列有 $A_1B_1A_1B_1$ 、 $A_1B_1B_1A_1$ ……等六種可能，端效器右側之排列可能為 B_1A_1 或 A_1B_1 ，因此兩側合併之結果則為 $A_1B_1A_1B_1 * B_1A_1$ 、 $A_1B_1B_1A_1 * B_1A_1$ 、 $A_1B_1A_1B_1 * A_1B_1$ 、 $A_1B_1B_1A_1 * A_1B_1$ ……等共十二種可能，而組合機構與其交錯之全數結果如下表 4.5 所示。

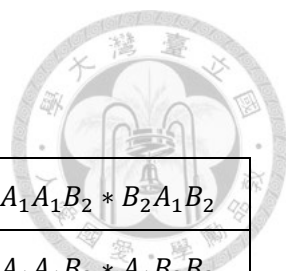


表 4.5 兩球面混合之簡寫交錯機構

$A_1A_1B_2 * B_2B_2A_1$	$B_2A_1A_1 * B_2A_1B_2$	$A_1B_2A_1 * B_2A_1B_2$	$A_1A_1B_2 * B_2A_1B_2$
	$B_2A_1A_1 * A_1B_2B_2$	$A_1B_2A_1 * A_1B_2B_2$	$A_1A_1B_2 * A_1B_2B_2$
	$B_2A_1A_1 * B_2B_2A_1$	$A_1B_2A_1 * B_2B_2A_1$	
$A_1A_1B_3B_3B_3 * A_1$	$A_1B_3A_1B_3B_3 * A_1$	$A_1B_3B_3A_1B_3 * A_1$	$A_1B_3B_3B_3A_1 * A_1$
	$B_3A_1A_1B_3B_3 * A_1$	$B_3A_1B_3A_1B_3 * A_1$	$B_3A_1B_3B_3A_1 * A_1$
	$B_3B_3A_1A_1B_3 * A_1$	$B_3B_3A_1B_3A_1 * A_1$	$B_3B_3B_3A_1A_1 * A_1$
$A_1A_1B_1B_1 * B_1A_1$	$A_1A_1B_1B_1 * A_1B_1$	$A_1B_1B_1A_1 * A_1B_1$	$B_1A_1A_1B_1 * A_1B_1$
	$A_1B_1A_1B_1 * A_1B_1$	$B_1A_1B_1A_1 * A_1B_1$	$B_1B_1A_1A_1 * A_1B_1$
	$A_1B_1B_1A_1 * B_1A_1$	$B_1A_1A_1B_1 * B_1A_1$	$A_1B_1A_1B_1 * B_1A_1$
	$B_1A_1B_1A_1 * B_1A_1$	$B_1B_1A_1A_1 * B_1A_1$	
$A_1A_1 * B_4B_4B_4A_1$	$A_1A_1 * B_4B_4A_1B_4$	$A_1A_1 * B_4A_1B_4B_4$	$A_1A_1 * A_1B_4B_4B_4$
$A_2A_2A_2B_1B_1 * B_1$	$A_2A_2B_1A_2B_1 * B_1$	$A_2B_1A_2A_2B_1 * B_1$	$B_1A_2A_2A_2B_1 * B_1$
	$A_2A_2B_1B_1A_2 * B_1$	$A_2B_1A_2B_1A_2 * B_1$	$B_1A_2A_2B_1A_2 * B_1$
	$A_2B_1B_1A_2A_2 * B_1$	$B_1A_2B_1A_2A_2 * B_1$	$B_1B_1A_2A_2A_2 * B_1$
$A_2A_2A_2B_2 * B_2B_2$	$A_2A_2B_2A_2 * B_2B_2$	$A_2B_2A_2A_2 * B_2B_2$	$B_2A_2A_2A_2 * B_2B_2$
$A_2A_2A_2B_3B_3B_3 * \square$	$A_2A_2B_3A_2B_3B_3 * \square$	$A_2A_2B_3B_3A_2B_3 * \square$	$A_2A_2B_3B_3B_3A_2 * \square$
	$A_2B_3A_2A_2B_3B_3 * \square$	$A_2B_3A_2B_3A_2B_3 * \square$	$A_2B_3A_2B_3B_3A_2 * \square$
	$A_2B_3B_3A_2A_2B_3 * \square$	$A_2B_3B_3A_2B_3A_2 * \square$	$A_2B_3B_3B_3A_2A_2 * \square$
	$B_3A_2A_2A_2B_3B_3 * \square$	$B_3A_2A_2B_3A_2B_3 * \square$	$B_3A_2A_2B_3B_3A_2 * \square$
	$B_3A_2B_3A_2A_2B_3 * \square$	$B_3A_2B_3A_2B_3A_2 * \square$	$B_3A_2B_3B_3A_2A_2 * \square$
	$B_3B_3A_2A_2A_2B_3 * \square$	$B_3B_3A_2A_2B_3A_2 * \square$	$B_3B_3A_2B_3A_2A_2 * \square$
	$B_3B_3B_3A_2A_2A_2 * \square$		
$A_2A_2A_2 * B_4B_4B_4$			



此時置入共同接頭 R_w^O 的方式與前述之不完全相同，除了有空缺的機構必須將之插入□中之外，其他的機構可以在任意位置插入 R_v^O 。因此，含有□之機構僅有1個 R_w^O 插入處，其他機構則有8個 R_w^O 插入處，如圖4.5所示。

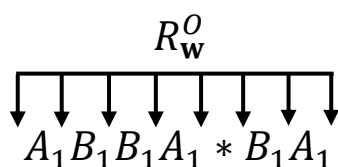


圖 4.5 交錯機構之 R_w^O 插入範例

4.2.4 初步篩選判斷

從上一小節的結果中，首先要刪減的是連續可動機構組合，其判斷條件為：機構迴路中至少有一組屬於同一運動的接頭完全相鄰連接，即表4.5之全數機構及其各自相反方向的機構，例如機構 $A_1 A_1 B_2 * B_2 B_2 A_1$ 中，屬於同一運動之接頭 $B_2 B_2 B_2$ 為完全相鄰連接，則此機構會是連續可動的。此外，對於不同形式之同一運動鏈的狀況，已在定義接頭的填法時，將其可能重複的機會排除。例如在填寫機構 $B_2 A_1 A_1 * B_2 A_1 B_2$ 時， $R_{v_1}^{O_2} R_{u_1}^{O_1} R_{u_2}^{O_1} * R_{v_2}^{O_2} R_{u_3}^{O_1} R_{v_3}^{O_2}$ 會是唯一的填法，而不會出現 $R_{v_2}^{O_2} R_{u_3}^{O_1} R_{u_1}^{O_1} * R_{v_1}^{O_2} R_{u_2}^{O_1} R_{v_3}^{O_2}$ 。因此可將表4.5刪減成表4.6。



表 4.6 初步篩選後的兩球面混合之簡寫可能機構

$B_2A_1A_1 * B_2B_2A_1$	$A_1B_2A_1 * B_2B_2A_1$	$B_2A_1A_1 * B_2A_1B_2$	$A_1B_2A_1 * B_2A_1B_2$
$A_1A_1B_2 * B_2A_1B_2$	$A_1B_2A_1 * A_1B_2B_2$	$A_1A_1B_2 * A_1B_2B_2$	
$A_1B_3A_1B_3B_3 * A_1$	$A_1B_3B_3A_1B_3 * A_1$	$A_1B_3B_3B_3A_1 * A_1$	$B_3A_1A_1B_3B_3 * A_1$
$B_3A_1B_3A_1B_3 * A_1$	$B_3A_1B_3B_3A_1 * A_1$	$B_3B_3A_1A_1B_3 * A_1$	$B_3B_3A_1B_3A_1 * A_1$
$A_1B_1B_1A_1 * B_1A_1$	$B_1A_1A_1B_1 * B_1A_1$	$A_1B_1A_1B_1 * B_1A_1$	$B_1A_1B_1A_1 * B_1A_1$
$B_1B_1A_1A_1 * B_1A_1$	$A_1A_1B_1B_1 * A_1B_1$	$A_1B_1B_1A_1 * A_1B_1$	$B_1A_1A_1B_1 * A_1B_1$
$A_1B_1A_1B_1 * A_1B_1$	$B_1A_1B_1A_1 * A_1B_1$		
$A_1A_1 * B_4B_4A_1B_4$	$A_1A_1 * B_4A_1B_4B_4$		
$A_2A_2B_1A_2B_1 * B_1$	$A_2B_1A_2A_2B_1 * B_1$	$B_1A_2A_2A_2B_1 * B_1$	$A_2A_2B_1B_1A_2 * B_1$
$A_2B_1A_2B_1A_2 * B_1$	$B_1A_2A_2B_1A_2 * B_1$	$A_2B_1B_1A_2A_2 * B_1$	$B_1A_2B_1A_2A_2 * B_1$
$A_2A_2B_2A_2 * B_2B_2$	$A_2B_2A_2A_2 * B_2B_2$		
$A_2A_2B_3A_2B_3B_3 * \square$	$A_2A_2B_3B_3A_2B_3 * \square$	$A_2A_2B_3B_3B_3A_2 * \square$	$A_2B_3A_2A_2B_3B_3 * \square$
$A_2B_3A_2B_3A_2B_3 * \square$	$A_2B_3A_2B_3B_3A_2 * \square$	$A_2B_3B_3A_2A_2B_3 * \square$	$A_2B_3B_3A_2B_3A_2 * \square$
$A_2B_3B_3B_3A_2A_2 * \square$	$B_3A_2A_2A_2B_3B_3 * \square$	$B_3A_2A_2B_3A_2B_3 * \square$	$B_3A_2A_2B_3B_3A_2 * \square$
$B_3A_2B_3A_2A_2B_3 * \square$	$B_3A_2B_3A_2B_3A_2 * \square$	$B_3A_2B_3B_3A_2A_2 * \square$	$B_3B_3A_2A_2A_2B_3 * \square$
$B_3B_3A_2A_2B_3A_2 * \square$	$B_3B_3A_2B_3A_2A_2 * \square$		



4.2.5 結果展示

選擇上表中之 $A_1B_1A_1B_1 * A_1B_1$ 機構排列，並任選一位置插入共同接頭形成 $A_1B_1A_1B_1 * RA_1B_1$ ，填入詳細接頭表示法則可寫為 $R_{u_1}^{O_1}R_{v_1}^{O_2}R_{u_2}^{O_1}R_{v_2}^{O_2} * R_w^O R_{u_3}^{O_1}R_{v_3}^{O_2}$ 。舉此例作具 $\{1/S(O_1)\}$ 及 $\{1/S(O_2)\}$ 運動模式之分析說明。設定桿 7 為地桿位置、桿 4 為端效器位置，其機構於分歧點位置如圖 4.6 所示。

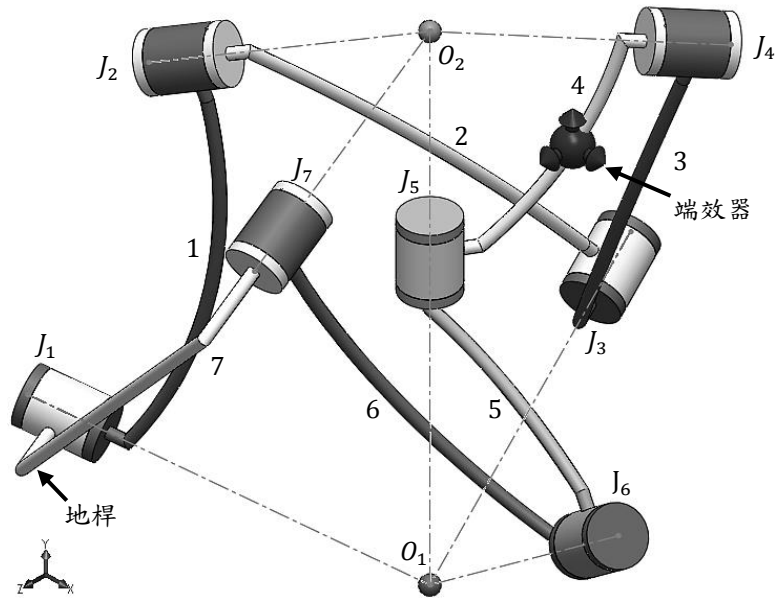


圖 4.6 $R_{u_1}^{O_1}R_{v_1}^{O_2}R_{u_2}^{O_1}R_{v_2}^{O_2} * R_w^O R_{u_3}^{O_1}R_{v_3}^{O_2}$ 機構於分歧點位置

從圖 4.6 可見，屬於運動模式 $\{1/S(O_1)\}$ 的四個接頭 J_1 、 J_3 、 J_5 、 J_6 相交於球心 O_1 ，符合產生第一個球面運動的條件；屬於運動模式 $\{1/S(O_2)\}$ 的四個接頭 J_2 、 J_4 、 J_5 、 J_7 相交於球心 O_2 ，足以產生第二個球面運動。故此時的機構狀態同時符合兩種運動的條件，可以進入任一個運動模式。

首先讓機構進入運動模式 $\{1/S(O_1)\}$ ，如圖 4.7 所示，接頭 J_2 、 J_4 及 J_5 之軸線皆偏離 O_2 ，阻止了球面運動 $\{1/S(O_2)\}$ ，故僅能進行 $\{1/S(O_1)\}$ 運動。再重新滿足組成球面運動 $\{1/S(O_2)\}$ 的條件之前，接頭 J_2 、 J_4 、 J_7 將處於不動的狀態，產生的運動應寫為 $\{E\}$ 。

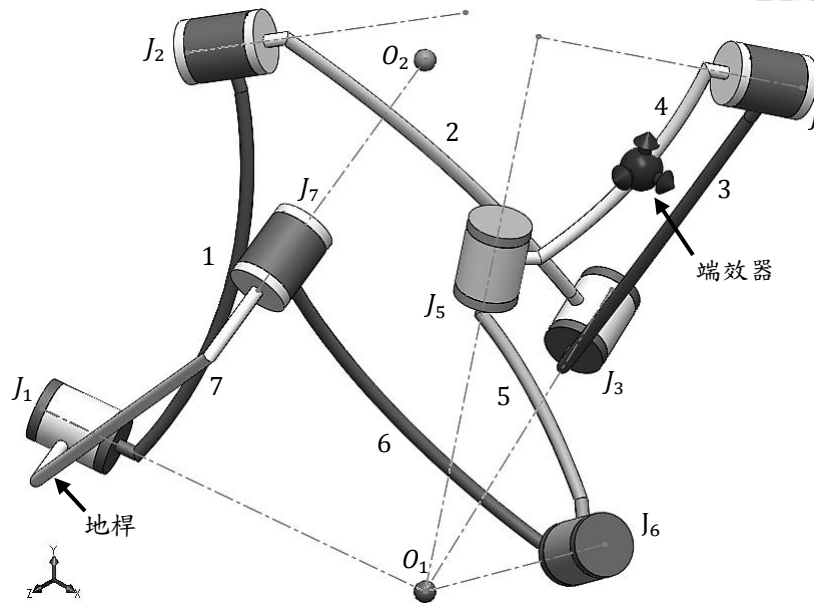


圖 4.7 進入 $\{1/S(O_1)\}$ 運動模式

因此，此時端效器(桿 4)之運動可記作：

$$\begin{aligned} \{L(7,4)\} &\supseteq \{R(O_1, \mathbf{u}_1)\}\{E\}\{R(O_1, \mathbf{u}_2)\}\{E\} \cap \{E\}\{R(O_1, \mathbf{u}_3)\}\{R(O_1, \mathbf{w})\} \\ &\supseteq \{1/S(O_1)\} \end{aligned}$$

上式中可得端效器在此時的運動為：通過球心 O_1 之球面上的 1 自由度運動。

為了能更加確信其運動狀態，使用電腦軟體進行模擬，將 J_1 設為驅動接頭，空間原點恰設於 O_1 上，並觀察端效器之運動坐標變化，以及計算其坐標絕對值 D ，可製成圖表如圖 4.8 所示。

圖 4.8 之三條虛線分別表示端效器於空間中，三軸之坐標變化，只能表示此確實為一空間機構，但無法從不規則變化的曲線中觀察其特性。反觀絕對值 D ，即端效器至原點的直線距離，亦可視為端效器至 O_1 的距離，呈現一定值。因此可證實此運動確實為 $\{1/S(O_1)\}$ ， $\{L(7,4)\} \supseteq \{1/S(O_1)\}$ 。

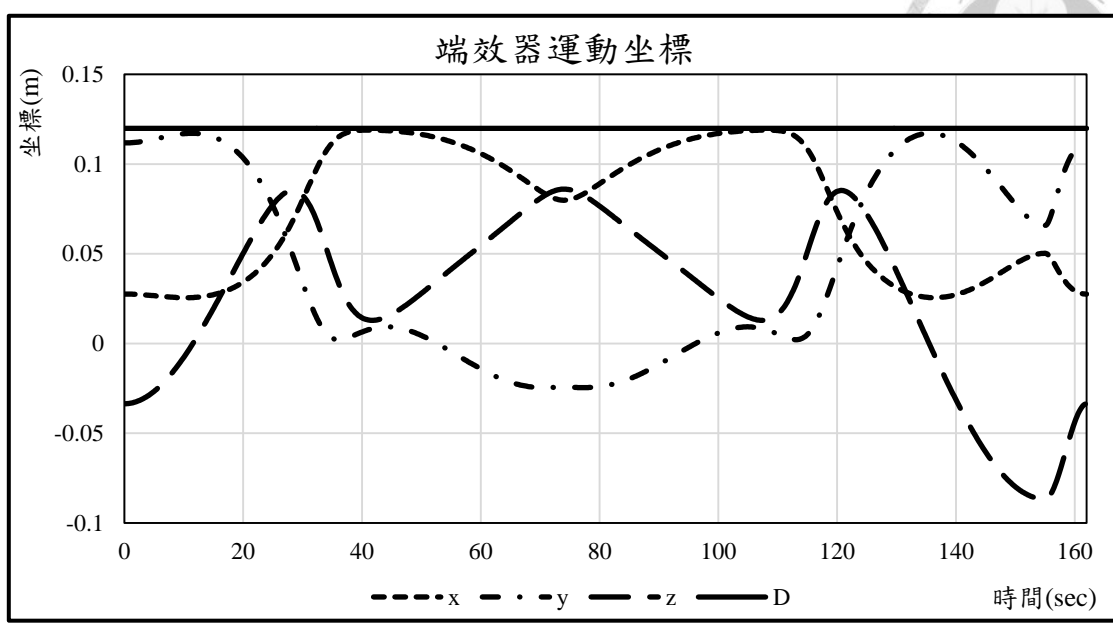
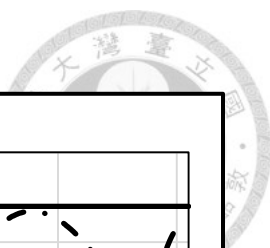


圖 4.8 $R_{u_1}^{O_1} R_{v_1}^{O_2} R_{u_2}^{O_1} R_{v_2}^{O_2} * R_w^O R_{u_3}^{O_1} R_{v_3}^{O_2}$ 機構於 $\{1/S(O_1)\}$ 之端效器運動坐標

此外，利用各接頭運動結果之比較，能夠更加確信在進入 $\{1/S(O_1)\}$ 模式後，原屬於 $\{1/S(O_2)\}$ 之接頭皆無作動，如圖 4.9 中點虛線……所表示之。而屬於 $\{1/S(O_1)\}$ 之其他接頭 J_3 、 J_5 、 J_6 皆有隨著 J_1 運動而變化。

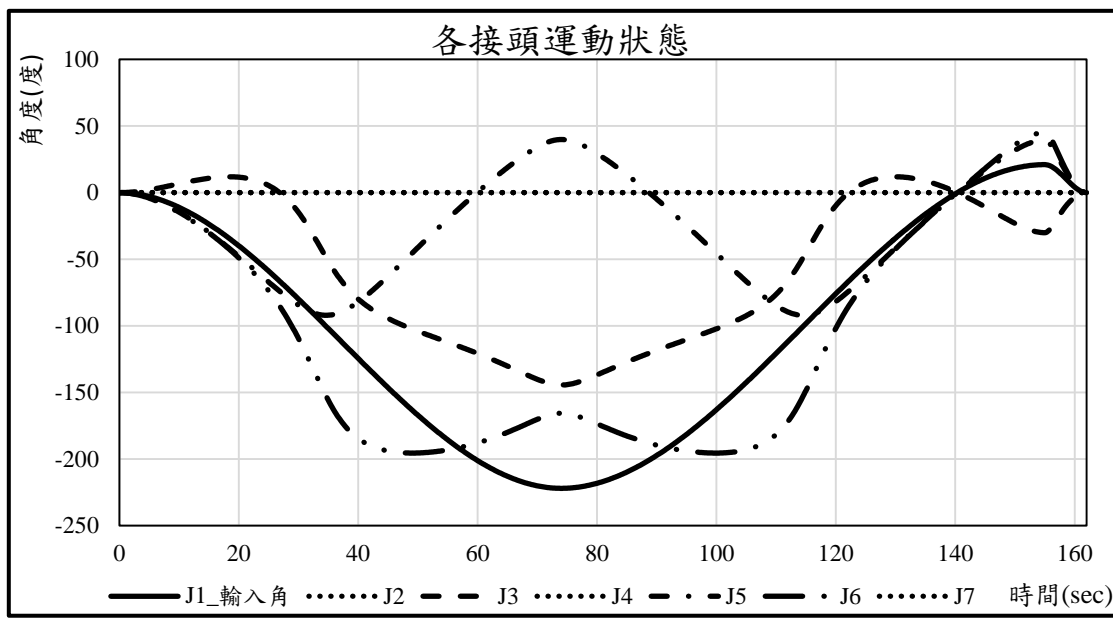


圖 4.9 $R_{u_1}^{O_1} R_{v_1}^{O_2} R_{u_2}^{O_1} R_{v_2}^{O_2} * R_w^O R_{u_3}^{O_1} R_{v_3}^{O_2}$ 機構於 $\{1/S(O_1)\}$ 之接頭運動狀態



另一方面，當此機構進入運動模式 $\{1/S(O_2)\}$ ，如圖 4.10 所示，接頭 J_3 、 J_5 及 J_6 之軸線皆偏離 O_1 ，阻止了球面運動 $\{1/S(O_1)\}$ ，故僅能進行 $\{1/S(O_2)\}$ 運動。因此，此時端效器之運動可記作：

$$\begin{aligned} \{L(7,4)\} &\supseteq \{E\}\{R(O_2, \mathbf{v}_1)\}\{E\}\{R(O_2, \mathbf{v}_2)\} \cap \{R(O_2, \mathbf{v}_3)\}\{E\}\{R(O_2, \mathbf{w})\} \\ &\supseteq \{1/S(O_2)\} \end{aligned}$$

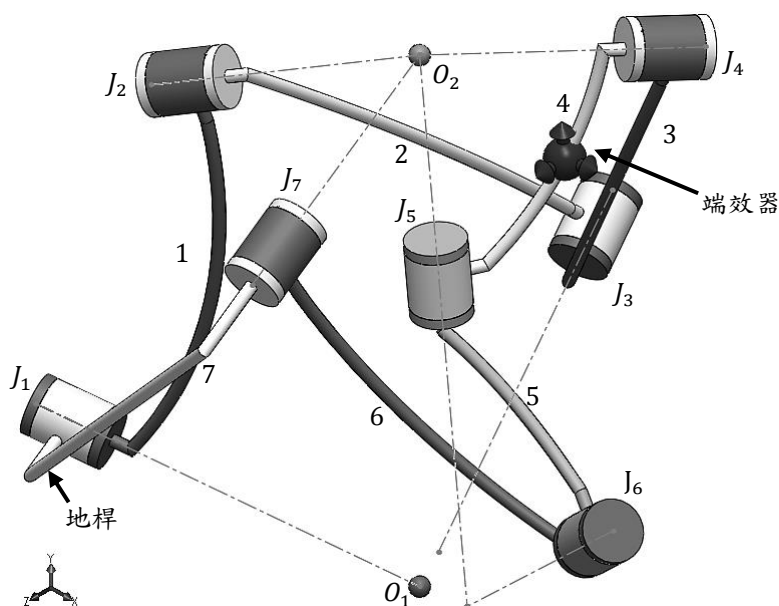


圖 4.10 進入 $\{1/S(O_2)\}$ 運動模式

上式中可得端效器在此時的運動應為：通過球心 O_2 之球面上的 1 自由度運動。不同於上一模式，驅動接頭將改設於 J_7 ，觀察端效器之運動坐標變化，計算其坐標絕對值 D ，可製成圖表如圖 4.11 所示。

由圖 4.11 之坐標絕對值 D 曲線中，看不出來與 O_2 的直接關係，因此另外加上一條觀察曲線，於表中記為「端點- O_2 」，表示由端效器至球心 O_2 之直線距離。而其呈現一定值，則可證實此運動確實為 $\{1/S(O_2)\}$ ， $\{L(7,4)\} \supseteq \{1/S(O_2)\}$ 。

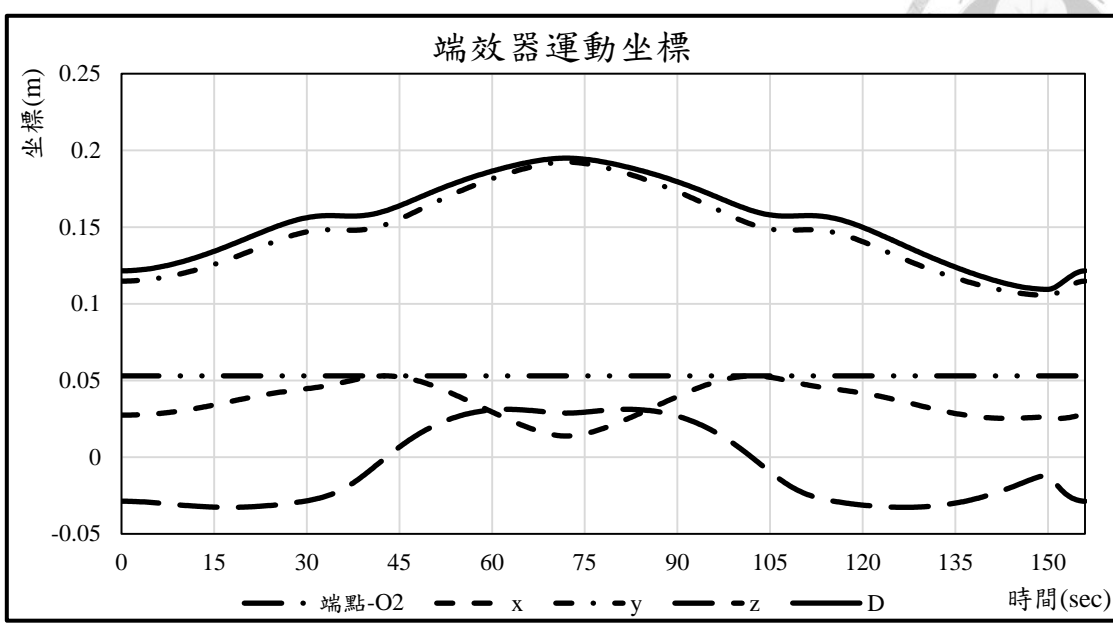
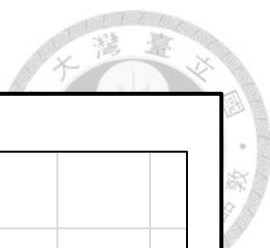


圖 4.11 $R_{u_1}^{O_1}R_{v_1}^{O_2}R_{u_2}^{O_1}R_{v_2}^{O_2} * R_w^O R_{u_3}^{O_1}R_{v_3}^{O_2}$ 機構於 $\{1/S(O_2)\}$ 之端效器運動坐標

同樣利用各接頭運動結果之比較，接頭 J_1 、 J_3 及 J_6 皆無作動，如圖 4.12 中點虛線……所表示之。而屬於 $\{1/S(O_2)\}$ 之其他接頭 J_2 、 J_4 、 J_5 皆隨著 J_7 運動而變化。

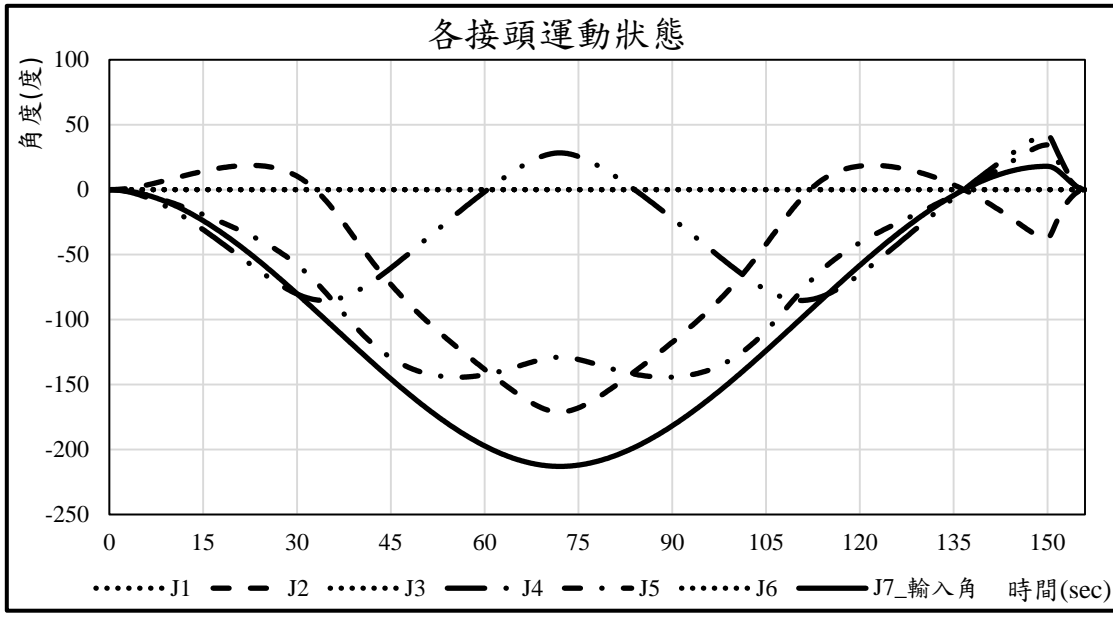


圖 4.12 $R_{u_1}^{O_1}R_{v_1}^{O_2}R_{u_2}^{O_1}R_{v_2}^{O_2} * R_w^O R_{u_3}^{O_1}R_{v_3}^{O_2}$ 機構於 $\{1/S(O_2)\}$ 之接頭運動狀態

經以上分析，得證 $\{L(7,4)\} \supseteq \{1/S(O_1)\} \cup \{1/S(O_2)\}$ 。



接著選用另一相似種類機構，由 $A_1A_1B_1B_1$ 之任意排列為端效器左端的運動鏈， B_1A_1R 之任意排列為右端運動鏈，但接頭順序不同之組合，機構 $A_1B_1B_1A_1 * A_1RB_1$ ，填入詳細接頭表示法則可寫為 $R_{u_1}^{O_1}R_{v_1}^{O_2}R_{v_2}^{O_2}R_{u_2}^{O_1} * R_{u_3}^{O_1}R_w^O R_{v_3}^{O_2}$ ，為進行驗證之第二例。同樣設定桿 7 為地桿位置、桿 4 為端效器位置，其機構於分歧點位置如圖 4.13 所示。

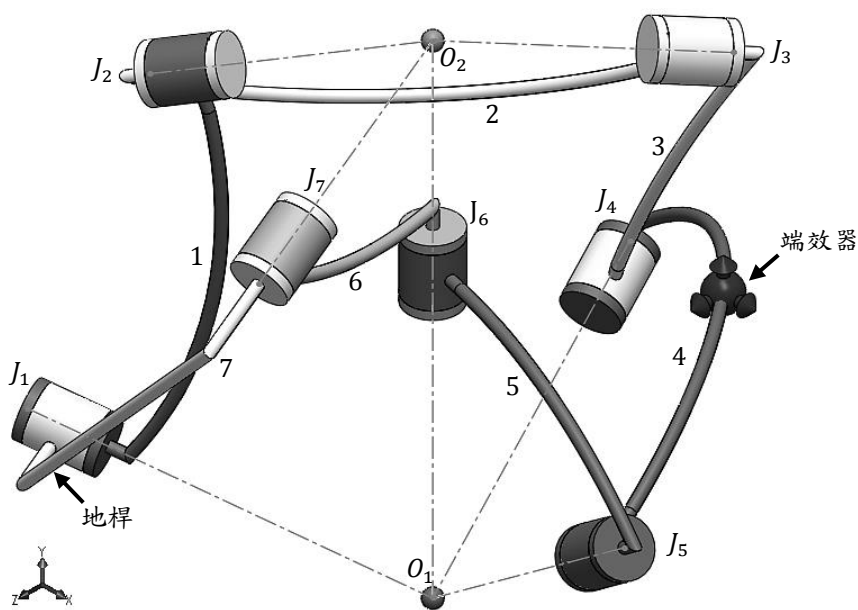


圖 4.13 $R_{u_1}^{O_1}R_{v_1}^{O_2}R_{v_2}^{O_2}R_{u_2}^{O_1} * R_{u_3}^{O_1}R_w^O R_{v_3}^{O_2}$ 機構於分歧點位置

由圖 4.13 觀察此機構，改由接頭 J_1 、 J_4 、 J_5 、 J_6 組成運動模式 $\{1/S(O_1)\}$ ；接頭 J_2 、 J_3 、 J_5 、 J_7 組成運動模式 $\{1/S(O_2)\}$ 。

直接讓機構進入運動模式 $\{1/S(O_1)\}$ ，如圖 4.14 所示，接頭 J_2 、 J_3 之軸線偏離 O_2 ，阻止了球面運動 $\{1/S(O_2)\}$ ，故僅能進行 $\{1/S(O_1)\}$ 運動。因此，此時端效器之運動可記作：

$$\begin{aligned} \{L(7,4)\} &\supseteq \{R(O_1, \mathbf{u}_1)\}\{E\}\{E\}\{R(O_1, \mathbf{u}_2)\} \cap \{E\}\{R(O_1, \mathbf{w})\}\{R(O_1, \mathbf{u}_3)\} \\ &\supseteq \{1/S(O_1)\} \end{aligned}$$

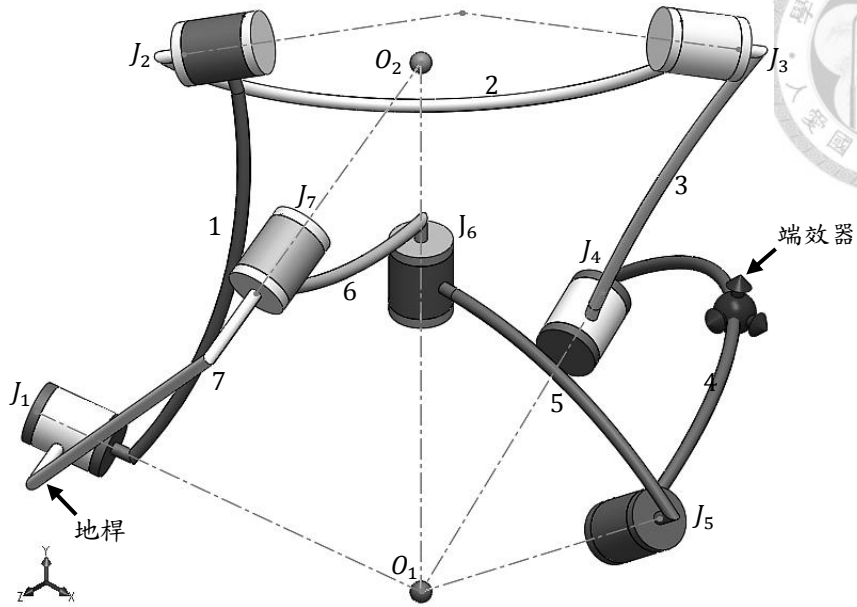


圖 4.14 進入 $\{1/S(O_1)\}$ 運動模式

使用電腦軟體進行模擬來驗證其運動狀態，將 J_1 設為驅動接頭，空間原點恰設於 O_1 上，並觀察端效器之運動坐標變化，以及計算其坐標絕對值 D ，可製成圖表如圖 4.15 所示。

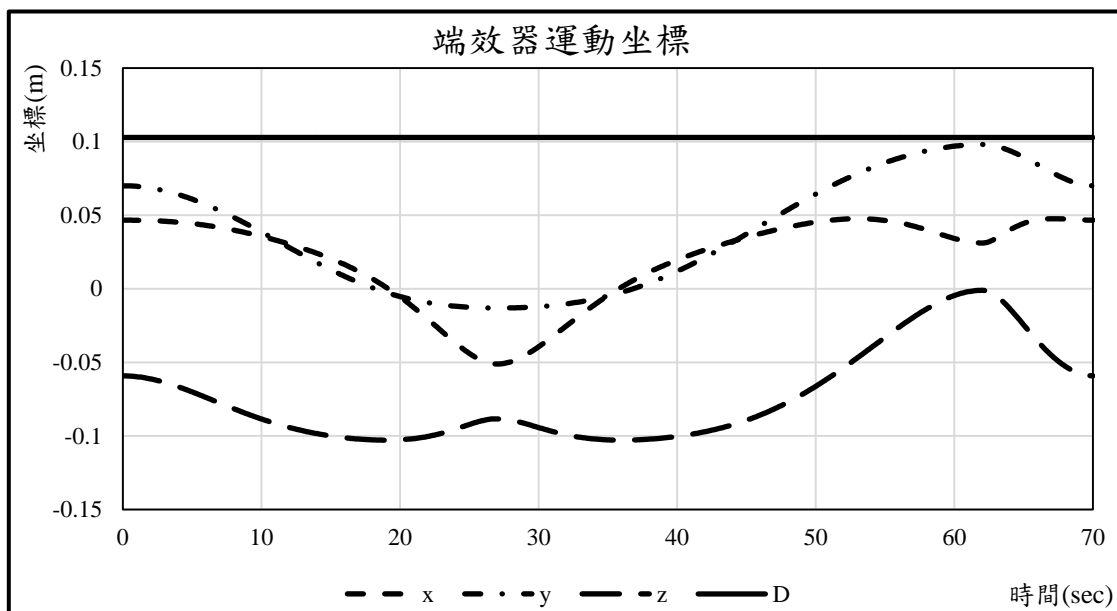


圖 4.15 $R_{u_1}^{O_1} R_{v_1}^{O_2} R_{v_2}^{O_2} R_{u_2}^{O_1} * R_{u_3}^{O_1} R_w^{O_1} R_{v_3}^{O_2}$ 機構於 $\{1/S(O_1)\}$ 之端效器運動坐標



圖 4.15 中呈現水平線之絕對值D，表示端效器至 O_1 的距離亦維持一定值。因此可證實此運動確實為 $\{1/S(O_1)\}$ ， $\{L(7,4)\} \supseteq \{1/S(O_1)\}$ 。

比較各接頭之運動結果，如圖 4.16 所示。其中由點虛線……表示無作動之接頭，為屬於運動模式 $\{1/S(O_2)\}$ 之 J_2 、 J_3 及 J_7 ，而屬於 $\{1/S(O_1)\}$ 之其他接頭 J_4 、 J_5 、 J_6 皆有隨著 J_1 運動而變化。

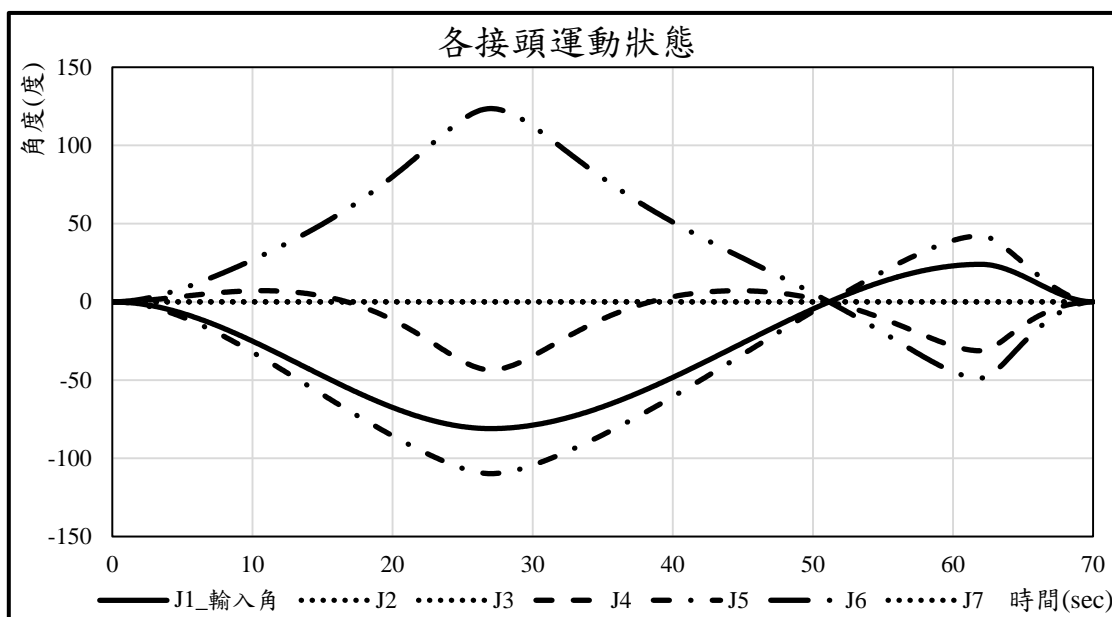


圖 4.16 $R_{u_1}^{O_1} R_{v_1}^{O_2} R_{v_2}^{O_2} R_{u_2}^{O_1} * R_{u_3}^{O_1} R_w^{O_2} R_{v_3}^{O_2}$ 機構於 $\{1/S(O_1)\}$ 之接頭運動狀態

反觀此機構進入運動模式 $\{1/S(O_2)\}$ 時，如圖 4.17 所示，接頭 J_4 、 J_5 及 J_6 之軸線皆偏離 O_1 ，阻止了球面運動 $\{1/S(O_1)\}$ ，故僅能進行 $\{1/S(O_2)\}$ 運動。因此，此時端效器之運動可記作：

$$\begin{aligned} \{L(7,4)\} &\supseteq \{E\}\{R(O_2, \mathbf{v}_1)\}\{R(O_2, \mathbf{v}_2)\}\{E\} \cap \{R(O_2, \mathbf{v}_3)\}\{R(O_2, \mathbf{w})\}\{E\} \\ &\supseteq \{1/S(O_2)\} \end{aligned}$$

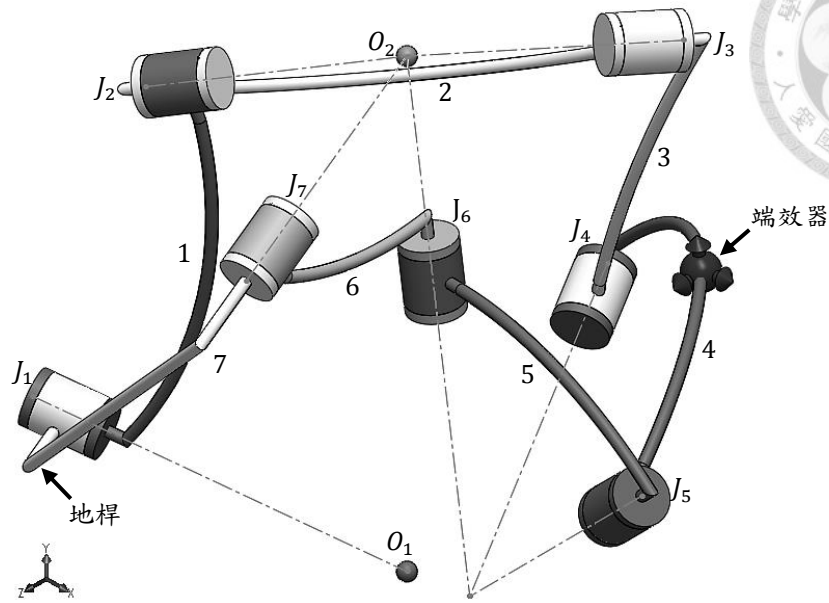


圖 4.17 進入 $\{1/S(O_2)\}$ 運動模式

上式中可得端效器在此時的運動應為：通過球心 O_2 之球面上的 1 自由度運動。此時將驅動接頭改設於 J_7 ，觀察端效器之運動坐標變化，計算其坐標絕對值 D ，可製成圖表如圖 4.18 所示。

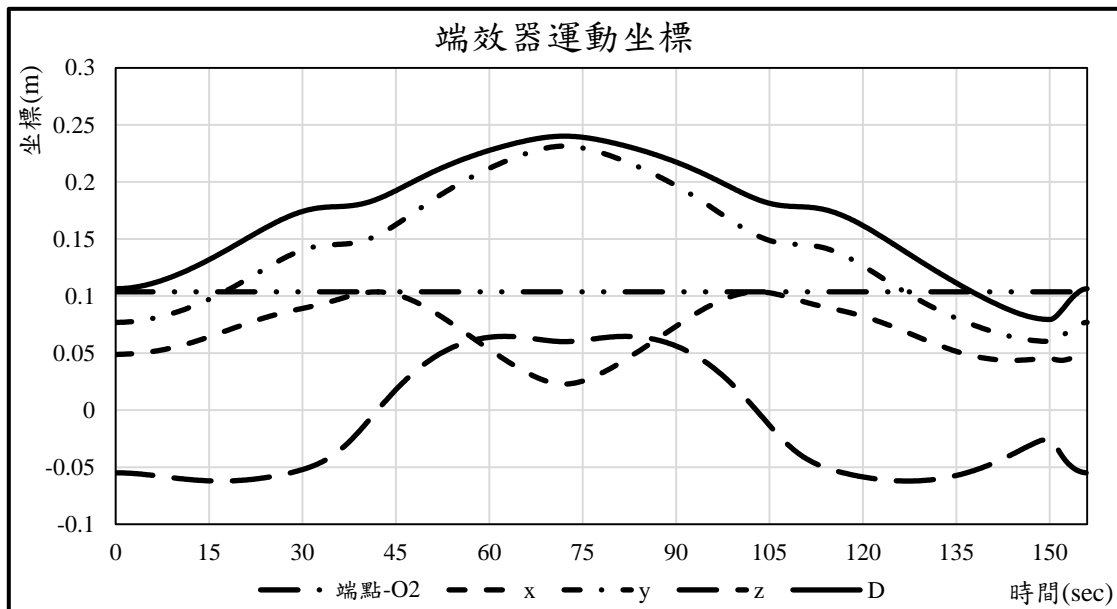
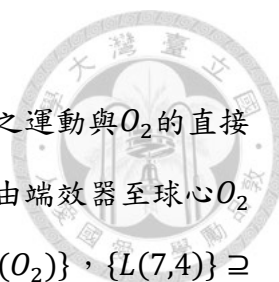


圖 4.18 $R_{u_1}^{O_1}R_{v_1}^{O_2}R_{v_2}^{O_2}R_{u_2}^{O_1} * R_{u_3}^{O_1}R_{w_3}^{O_2}R_{v_3}^{O_2}$ 機構於 $\{1/S(O_2)\}$ 之端效器運動坐標



然而由圖 4.18 之坐標絕對值D曲線中，無法觀察到端效器之運動與 O_2 的直接關係。若另外加上一條觀察曲線，於表中記為「端點- O_2 」，表示由端效器至球心 O_2 之直線距離。而其維持一定值，則可證實此運動確實為 $\{1/S(O_2)\}$ ， $\{L(7,4)\} \supseteq \{1/S(O_2)\}$ 。

最後，藉著各接頭運動結果之比較，接頭 J_1 、 J_4 、 J_5 無相對旋轉運動，意指運動模式 $\{1/S(O_1)\}$ 無法進行，如圖 4.9 中點虛線……所表示之。而屬於 $\{1/S(O_2)\}$ 之其他接頭 J_2 、 J_3 、 J_6 皆有隨著 J_7 運動而變化。

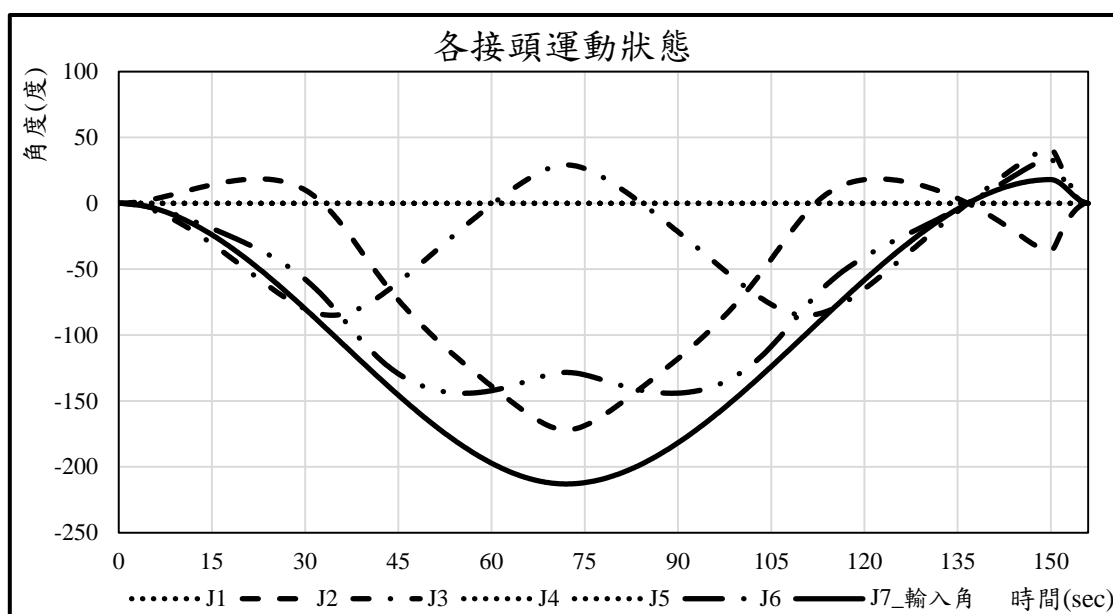


圖 4.19 $R_{u_1}^{O_1} R_{v_1}^{O_2} R_{v_2}^{O_2} R_{u_2}^{O_1} * R_{u_3}^{O_1} R_w^{O_1} R_{v_3}^{O_2}$ 機構於 $\{1/S(O_2)\}$ 之接頭運動狀態

經以上分析，得證 $\{L(7,4)\} \supseteq \{1/S(O_1)\} \cup \{1/S(O_2)\}$ 。即 $R_{u_1}^{O_1} R_{v_1}^{O_2} R_{v_2}^{O_2} R_{u_2}^{O_1} *$

$R_{u_3}^{O_1} R_w^{O_1} R_{v_3}^{O_2}$ 機構亦為具 $\{1/S(O_1)\}$ 及 $\{1/S(O_2)\}$ 運動模式之不連續可動機構。



4.2.6 其他案例討論

對於其他 7 桿機構之組合，亦有探討其中幾個案例的運動分析，但運動結果並不如預期，或是不符合原設定之運動模式目標。例如：機構 $R_{u_1}^{O_1} R_{v_1}^{O_2} R_{u_2}^{O_1} R_{u_3}^{O_1} * R_{v_2}^{O_2} R_w^O R_{v_3}^{O_2}$ 與其少數相同類型之機構，於第一種運動模式中，會作用的接頭為 $R_{u_1}^{O_1}$ 、 $R_{u_2}^{O_1}$ 、 $R_{u_3}^{O_1}$ 及 R_w^O ，觀察端效器的運動卻為 $\{1/S(O_2)\}$ ，即以點 O_2 為中心之一維球面運動；第二種運動模式中，於前半段只有 $R_{v_1}^{O_2}$ 不動，端效器的運動為以 O_1 及 O_2 連心線為軸之旋轉運動，因此在這段時間內，觀察點的位置到兩心之距離同時為定值。然而進入後半段的運動時， $R_{u_1}^{O_1}$ 、 $R_{u_2}^{O_1}$ 、 $R_{u_3}^{O_1}$ 突然變成不動， $R_{v_1}^{O_2}$ 開始運動，此時端效器的運動為 $\{1/S(O_2)\}$ ，這樣複雜的結果將難以用運動式子表達。

又如機構 $R_{v_1}^{O_2} R_{u_1}^{O_1} R_{v_2}^{O_2} R_{v_3}^{O_2} R_{u_2}^{O_1} R_{u_3}^{O_1} * R_w^O$ ，第一種運動模式中不動的接頭為 $R_{v_1}^{O_2}$ 、 $R_{v_2}^{O_2}$ 、 $R_{v_3}^{O_2}$ ，另一種運動模式中不動的接頭為 $R_{u_1}^{O_1}$ 、 $R_{u_2}^{O_1}$ 、 $R_{u_3}^{O_1}$ ，然而於兩種模式中端效器的運動皆為：以 O_1 及 O_2 連心線為軸之旋轉運動，觀察點的位置到兩心之距離同時為固定。在空間中此兩條運動路徑並非完全重疊，但兩相異曲線坐落於同一個平面上，同樣地，此運動結果無法用單一運動式表示。

本節初亦討論到桿件數量的限制，並非一定為 7 桿機構才能達成不連續可動的現象。於合成的過程中嘗試過分析 6 桿機構，整體上需要兩個共同接頭。由於共同接頭必須同時屬於兩種球面運動，因此兩共同接頭皆為以通過 O_1 點和 O_2 點之軸線進行旋轉的 R 接頭，在此對之命為 $R_w^{O_a}$ 及 $R_w^{O_b}$ ，從表示法中可得 O_1 和 O_2 連心線是唯一的，方向以 w 表示。經過相似的合成過程後，挑選出兩種機構進行運動分析。首先是機構 $R_{u_1}^{O_1} R_w^{O_a} R_{v_1}^{O_2} * R_{u_2}^{O_1} R_{v_2}^{O_2} R_w^{O_b}$ ，運動結果為 $\{R(w)\} \cup \{1/S(O_1)\}$ ，對於以 O_2 為中心之一維球面運動沒有表現出來。另一機構 $R_{v_1}^{O_2} R_w^{O_a} R_{u_1}^{O_1} * R_w^{O_b} R_{u_2}^{O_1} R_{v_2}^{O_2}$ 結果亦如此。



4.3 合成具 $\{1/G(\mathbf{y}_1)\}$ 及 $\{1/G(\mathbf{y}_2)\}$ 運動模式之不連續可動機構

文獻[19]中曾舉出一不連續可動機構運動為 $\{T(\mathbf{w})\} \cup \{1/G(\mathbf{v})\}$ 。然而，由於運動模式 $\{T(\mathbf{w})\}$ 可視為 $\{1/G(\mathbf{u})\}$ 運動中較特殊的情況。所以在接下來之合成例子中，將依照先前所歸納之合成步驟，企圖尋找出含有較一般之運動模式的機構，故設定運動模式為 $\{1/G(\mathbf{y}_1)\}$ 及 $\{1/G(\mathbf{y}_2)\}$ 。

4.3.1 列舉原生機構

$\{1/G(\mathbf{y}_1)\}$ 及 $\{1/G(\mathbf{y}_2)\}$ 兩運動模式皆屬 $\{1/G(\mathbf{y})\}$ ，為屬於 $\{G(\mathbf{y})\}$ 的1維次流形，意指位於一垂直於 \mathbf{y} 方向之平面上的一種1維運動。產生此種運動的方式大致可分成三種。第一種是由一條三個接頭之運動鏈，以及一條一個接頭之運動鏈組成，整理後組合可得11種機構，如表4.7所示。其中 \mathbf{v}_1 及 \mathbf{v}_2 為平行於 $\mathbf{x}-\mathbf{z}$ 平面的任意二不同之方向。

表 4.7 第一種 $\{1/G(\mathbf{y})\}$ 原生機構

$R_y^B R_y^C R_y^D * R_y^E$	$R_y^B R_y^C T_{v_1} * R_y^D$	$R_y^B T_{v_1} R_y^C * R_y^D$	$T_{v_1} R_y^B R_y^C * R_y^D$
$R_y^B T_{v_1} T_{v_2} * R_y^C$	$T_{v_1} R_y^B T_{v_2} * R_y^C$	$T_{v_1} T_{v_2} R_y^B * R_y^C$	$R_y^B R_y^C R_y^D * T_{v_1}$
$R_y^B R_y^C T_{v_1} * T_{v_2}$	$R_y^B T_{v_1} R_y^C * T_{v_2}$	$T_{v_1} R_y^B R_y^C * T_{v_2}$	

第二種是由二條相異的兩個接頭之運動鏈所組成，可得7種機構，如表4.8所示。其中 \mathbf{v}_1 及 \mathbf{v}_2 為平行於 $\mathbf{x}-\mathbf{z}$ 平面的任意二不同之方向。

表 4.8 第二種 $\{1/G(\mathbf{y})\}$ 原生機構

$R_y^B R_y^C * R_y^E R_y^D$	$R_y^B R_y^C * T_{v_1} R_y^D$	$R_y^B R_y^C * R_y^D T_{v_1}$	$R_y^B R_y^C * T_{v_2} T_{v_1}$
$R_y^B T_{v_1} * T_{v_2} R_y^C$	$R_y^B T_{v_1} * R_y^C T_{v_2}$	$T_{v_1} R_y^B * R_y^C T_{v_2}$	

第三種是由一條兩個接頭之運動鏈及一條一個接頭之運動鏈所組成，最後只得1個組成方式，為 $T_{v_1} T_{v_2} * T_{v_3}$ 。



若將全數原生機構以含有平移 P 接頭之數量來重新分類，可整理成表 4.9。

表 4.9 以平移接頭數量分類 $\{1/G(\mathbf{y})\}$ 原生機構

A	B	C		D
不含 P 接頭	一個 P 接頭	兩個 P 接頭		三個 P 接頭
$R_y^B R_y^C R_y^D * R_y^E$	$R_y^B R_y^C T_{v_1} * R_y^D$	$R_y^B T_{v_1} T_{v_2} * R_y^C$	$R_y^B T_{v_1} * R_y^C T_{v_2}$	$T_{v_1} T_{v_2} * T_{v_3}$
$R_y^B R_y^C * R_y^E R_y^D$	$R_y^B T_{v_1} R_y^C * R_y^D$	$T_{v_1} R_y^B T_{v_2} * R_y^C$	$R_y^B T_{v_1} * T_{v_2} R_y^C$	
	$T_{v_1} R_y^B R_y^C * R_y^D$	$T_{v_1} T_{v_2} R_y^B * R_y^C$	$T_{v_1} R_y^B * R_y^C T_{v_2}$	
	$R_y^B R_y^C R_y^D * T_{v_1}$	$R_y^B R_y^C T_{v_1} * T_{v_2}$	$R_y^B R_y^C * T_{v_2} T_{v_1}$	
	$R_y^B R_y^C * T_{v_1} R_y^D$	$R_y^B T_{v_1} R_y^C * T_{v_2}$		
	$R_y^B R_y^C * R_y^D T_{v_1}$	$T_{v_1} R_y^B R_y^C * T_{v_2}$		

4.3.2 結合原生機構

此節為對以上兩種各產生 $\{1/G(\mathbf{y}_1)\}$ 及 $\{1/G(\mathbf{y}_2)\}$ 的原生機構進行結合。結合前須先考量預期機構的桿件數量，若直接結合會得到一 8 桿機構，但此機構運動時自由度可能超過 1，將增加分析上的難度。因此考慮兩原生機構至少使用一個共同接頭，而大多數的結合結果會為 7 桿機構。後續步驟將較為繁瑣，為維持桿件數量的一致，在此將先不考慮第三種由 $T_{v_1} T_{v_2} * T_{v_3}$ 運動鏈所產生的 $\{1/G(\mathbf{y})\}$ 原生機構。

共同接頭是指從兩運動的原生機構中，各選一個接頭來作為共用，且此共同接頭須為兩基礎運動鏈結合時鄰接的地方。從 $\{1/G(\mathbf{y})\}$ 的原生機構中觀察， R 接頭所表示的方向為平面之法線方向，若選用一個 R 接頭作為共同接頭，表示兩平面必為平行。另一方面，原生機構中的 P 接頭方向可為平行該平面之任意方向，而兩不平行之平面相交亦為一直線方向。因此，下列結合方法將使用一 P 接頭為共同接頭。

在此對共同接頭 P 之運動命為 T_{v_c} ，下標 v_c 方向表示兩不平行之平面所相交的直線方向，所以此接頭的運動足以同時滿足兩運動的組成條件。表 4.9 中之不含有平



移接頭的分類將會排除，同時為了避免與文獻[19]出現重複，將排除 B 與 B 組合會出現6R1P的可能，因此設定 $\{1/G(\mathbf{y}_1)\}$ 使用含一個P接頭之原生機構， $\{1/G(\mathbf{y}_2)\}$ 使用含兩個P接頭之原生機構，兩者來進行結合，即 B 與 C 的組合。另外，亦可嘗試使用 C 與 C 產生4R3P的組合，但於本文中將不詳細探討。

接著從 $\{1/G(\mathbf{y}_1)\}$ 及 $\{1/G(\mathbf{y}_2)\}$ 之原生機構中移除一個P接頭，以 \square 表示暫時空缺的位置。且為了確保能找到所有的組合，將保留兩原先運動鏈之逆向相同的機構，如表 4.10 所示。

表 4.10 去除一平移接頭之 $\{1/G(\mathbf{y}_1)\}$ 及 $\{1/G(\mathbf{y}_2)\}$ 原生機構

$\{1/G(\mathbf{y}_1)\}$	$R_{y_1}^B R_{y_1}^C R_{y_1}^D * \square$	$\square * R_{y_1}^D R_{y_1}^C R_{y_1}^B$	$R_{y_1}^B R_{y_1}^C * R_{y_1}^D$	$R_{y_1}^D * R_{y_1}^C R_{y_1}^B$
$\{1/G(\mathbf{y}_2)\}$	$R_{y_2}^E T_{v_1} * R_{y_2}^F$	$T_{v_1} R_{y_2}^E * R_{y_2}^F$	$R_{y_2}^F * T_{v_1} R_{y_2}^E$	$T_{v_1} R_{y_2}^F * R_{y_2}^E$
	$R_{y_2}^E R_{y_2}^F * T_{v_1}$	$T_{v_1} * R_{y_2}^F R_{y_2}^E$	$R_{y_2}^E R_{y_2}^F T_{v_1} * \square$	$R_{y_2}^E T_{v_1} R_{y_2}^F * \square$
	$T_{v_1} R_{y_2}^E R_{y_2}^F * \square$	$\square * T_{v_1} R_{y_2}^F R_{y_2}^E$	$\square * R_{y_2}^F T_{v_1} R_{y_2}^E$	$\square * R_{y_2}^F R_{y_2}^E T_{v_1}$

其中 \mathbf{y}_1 即平面 1 之法線方向， \mathbf{y}_2 為平面 2 之法線方向， \mathbf{v}_1 是平行於平面 2 之某一方向。為便於閱讀，故將上表之組合機構進行簡易改寫，見表 4.11，以A取代屬於 $\{1/G(\mathbf{y}_1)\}$ 的接頭，以B取代屬於 $\{1/G(\mathbf{y}_2)\}$ 之的接頭，下標數字表示接頭的填法，如表 4.12 所示。

表 4.11 去除一平移接頭之 $\{1/G(\mathbf{y}_1)\}$ 及 $\{1/G(\mathbf{y}_2)\}$ 簡寫原生機構

$\{1/G(\mathbf{y}_1)\}$	$A_1 A_1 A_1 * \square$	$\square * A_2 A_2 A_2$	$A_3 A_3 * A_3$	$A_4 * A_4 A_4$
$\{1/G(\mathbf{y}_2)\}$	$B_1 B_1 B_1 * \square$	$\square * B_2 B_2 B_2$	$B_3 B_3 * B_3$	$B_4 * B_4 B_4$

表 4.12 兩平面之簡寫機構的接頭填法

A_1, A_2, A_3, A_4	$R_{y_1}^B R_{y_1}^C R_{y_1}^D$		
B_1, B_2, B_3, B_4	$R_{y_2}^E R_{y_2}^F T_{v_1}$	$R_{y_2}^E T_{v_1} R_{y_2}^F$	$T_{v_1} R_{y_2}^E R_{y_2}^F$



直接進行結合的動作，利用表 4.11 可將兩種安裝次序全數納入，結合結果如表 4.13 所示。

表 4.13 兩平面混合之簡寫組合機構

$A_1A_1A_1B_1B_1B_1 * \square$	$A_1A_1A_1 * B_2B_2B_2$	$A_1A_1A_1B_3B_3 * B_3$	$A_1A_1A_1B_4 * B_4B_4$
$B_1B_1B_1A_1A_1A_1 * \square$		$B_3B_3A_1A_1A_1 * B_3$	$B_4A_1A_1A_1 * B_4B_4$
$B_1B_1B_1 * A_2A_2A_2$	$\square * B_2B_2B_2A_2A_2A_2$	$B_3B_3 * B_3A_2A_2A_2$	$B_4 * B_4B_4A_2A_2A_2$
	$\square * A_2A_2A_2B_2B_2B_2$	$B_3B_3 * A_2A_2A_2B_3$	$B_4 * A_2A_2A_2B_4B_4$
$A_3A_3B_1B_1B_1 * A_3$	$A_3A_3 * B_2B_2B_2A_3$	$A_3A_3B_3B_3 * B_3A_3$	$A_3A_3B_4 * B_4B_4A_3$
$B_1B_1B_1A_3A_3 * A_3$	$A_3A_3 * A_3B_2B_2B_2$	$B_3B_3A_3A_3 * A_3B_3$	$B_4A_3A_3 * A_3B_4B_4$
$A_4B_1B_1B_1 * A_4A_4$	$A_4 * B_2B_2B_2A_4A_4$	$A_4B_3B_3 * B_3A_4A_4$	$A_4B_4 * B_4B_4A_4A_4$
$B_1B_1B_1A_4 * A_4A_4$	$A_4 * A_4A_4B_2B_2B_2$	$B_3B_3A_4 * A_4A_4B_3$	$B_4A_4 * A_4A_4B_4B_4$

此時若考慮要置入共同接頭 T_v ，除含有 \square 之機構必須在此空缺處填入 T_v 之外，其他插入位置為 A 接頭與 B 接頭之連接處，詳細插入方法與前述之圖 4.4 相同。

4.3.3 改變接頭連接次序

對兩運動之簡寫組合機構進行接頭交錯，組合機構與其交錯之結果如下表 4.14 所示。

表 4.14 兩平面混合之簡寫交錯機構

$A_1A_1A_1 * B_2B_2B_2$	$B_1B_1B_1 * A_2A_2A_2$		
$A_1A_1A_1B_3B_3 * B_3$	$A_1A_1B_3A_1B_3 * B_3$	$A_1B_3A_1A_1B_3 * B_3$	$B_3A_1A_1A_1B_3 * B_3$
	$A_1A_1B_3B_3A_1 * B_3$	$A_1B_3A_1B_3A_1 * B_3$	$B_3A_1A_1B_3A_1 * B_3$
	$A_1B_3B_3A_1A_1 * B_3$	$B_3A_1B_3A_1A_1 * B_3$	$B_3B_3A_1A_1A_1 * B_3$
$A_1A_1A_1B_4 * B_4B_4$	$A_1A_1B_4A_1 * B_4B_4$	$A_1B_4A_1A_1 * B_4B_4$	$B_4A_1A_1A_1 * B_4B_4$



表 4.14 兩平面混合之簡寫交錯機構(續)

$A_1A_1A_1B_1B_1B_1 * \square$	$A_1A_1B_1A_1B_1B_1 * \square$	$A_1A_1B_1B_1A_1B_1 * \square$	$A_1A_1B_1B_1B_1A_1 * \square$
	$A_1B_1A_1A_1B_1B_1 * \square$	$A_1B_1A_1B_1A_1B_1 * \square$	$A_1B_1A_1B_1B_1A_1 * \square$
	$A_1B_1B_1A_1A_1B_1 * \square$	$A_1B_1B_1A_1B_1A_1 * \square$	$A_1B_1B_1B_1A_1A_1 * \square$
	$B_1A_1A_1A_1B_1B_1 * \square$	$B_1A_1A_1B_1A_1B_1 * \square$	$B_1A_1A_1B_1B_1A_1 * \square$
	$B_1A_1B_1A_1A_1B_1 * \square$	$B_1A_1B_1A_1B_1A_1 * \square$	$B_1A_1B_1B_1A_1A_1 * \square$
	$B_1B_1A_1A_1A_1B_1 * \square$	$B_1B_1A_1A_1B_1A_1 * \square$	$B_1B_1A_1B_1A_1A_1 * \square$
	$B_1B_1B_1A_1A_1A_1 * \square$		
$\square * B_2B_2B_2A_2A_2A_2$	$\square * B_2B_2A_2B_2A_2A_2$	$\square * B_2B_2A_2A_2B_2A_2$	$\square * B_2B_2A_2A_2A_2B_2$
	$\square * B_2A_2B_2B_2A_2A_2$	$\square * B_2A_2B_2A_2B_2A_2$	$\square * B_2A_2B_2A_2A_2B_2$
	$\square * B_2A_2A_2B_2B_2A_2$	$\square * B_2A_2A_2B_2A_2B_2$	$\square * B_2A_2A_2A_2B_2B_2$
	$\square * A_2B_2B_2B_2A_2A_2$	$\square * A_2B_2B_2A_2B_2A_2$	$\square * A_2B_2B_2A_2A_2B_2$
	$\square * A_2B_2A_2B_2B_2A_2$	$\square * A_2B_2A_2B_2A_2B_2$	$\square * A_2B_2A_2A_2B_2B_2$
	$\square * A_2A_2B_2B_2B_2A_2$	$\square * A_2A_2B_2B_2A_2B_2$	$\square * A_2A_2B_2A_2B_2B_2$
	$\square * A_2A_2A_2B_2B_2B_2$		
$B_3B_3 * B_3A_2A_2A_2$	$B_3B_3 * A_2B_3A_2A_2$	$B_3B_3 * A_2A_2B_3A_2$	$B_3B_3 * A_2A_2A_2B_3$
$B_4 * B_4B_4A_2A_2A_2$	$B_4 * B_4A_2B_4A_2A_2$	$B_4 * B_4A_2A_2B_4A_2$	$B_4 * B_4A_2A_2A_2B_4$
	$B_4 * A_2B_4B_4A_2A_2$	$B_4 * A_2B_4A_2B_4A_2$	$B_4 * A_2B_4A_2A_2B_4$
	$B_4 * A_2A_2B_4B_4A_2$	$B_4 * A_2A_2B_4A_2B_4$	$B_4 * A_2A_2A_2B_4B_4$
$A_3A_3B_1B_1B_1 * A_3$	$A_3B_1A_3B_1B_1 * A_3$	$B_1A_3A_3B_1B_1 * A_3$	$A_3B_1B_1A_3B_1 * A_3$
	$B_1A_3B_1A_3B_1 * A_3$	$B_1B_1A_3A_3B_1 * A_3$	$A_3B_1B_1B_1A_3 * A_3$
	$B_1A_3B_1B_1A_3 * A_3$	$B_1B_1A_3B_1A_3 * A_3$	$B_1B_1B_1A_3A_3 * A_3$
$A_3A_3 * B_2B_2B_2A_3$	$A_3A_3 * B_2B_2A_3B_2$	$A_3A_3 * B_2A_3B_2B_2$	$A_3A_3 * A_3B_2B_2B_2$

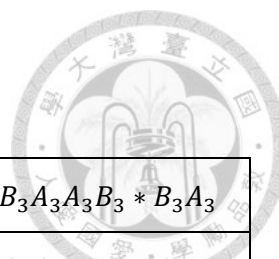


表 4.14 兩平面混合之簡寫交錯機構(續)

$A_3A_3B_3B_3 * B_3A_3$	$A_3B_3A_3B_3 * B_3A_3$	$A_3B_3B_3A_3 * B_3A_3$	$B_3A_3A_3B_3 * B_3A_3$
	$B_3A_3B_3A_3 * B_3A_3$	$B_3B_3A_3A_3 * B_3A_3$	$A_3A_3B_3B_3 * A_3B_3$
	$A_3B_3A_3B_3 * A_3B_3$	$A_3B_3B_3A_3 * A_3B_3$	$B_3A_3A_3B_3 * A_3B_3$
	$B_3A_3B_3A_3 * A_3B_3$	$B_3B_3A_3A_3 * A_3B_3$	
$A_3A_3B_4 * B_4B_4A_3$	$A_3B_4A_3 * B_4B_4A_3$	$B_4A_3A_3 * B_4B_4A_3$	$A_3A_3B_4 * B_4A_3B_4$
	$A_3B_4A_3 * B_4A_3B_4$	$B_4A_3A_3 * B_4A_3B_4$	$A_3A_3B_4 * A_3B_4B_4$
	$A_3B_4A_3 * A_3B_4B_4$	$B_4A_3A_3 * A_3B_4B_4$	
$A_4B_1B_1B_1 * A_4A_4$	$B_1A_4B_1B_1 * A_4A_4$	$B_1B_1A_4B_1 * A_4A_4$	$B_1B_1B_1A_4 * A_4A_4$
$A_4 * B_2B_2B_2A_4A_4$	$A_4 * B_2B_2A_4B_2A_4$	$A_4 * B_2A_4B_2B_2A_4$	$A_4 * A_4B_2B_2B_2A_4$
	$A_4 * B_2B_2A_4A_4B_2$	$A_4 * B_2A_4B_2A_4B_2$	$A_4 * A_4B_2B_2A_4B_2$
	$A_4 * B_2A_4A_4B_2B_2$	$A_4 * A_4B_2A_4B_2B_2$	$A_4 * A_4A_4B_2B_2B_2$
$A_4B_3B_3 * B_3A_4A_4$	$B_3A_4B_3 * B_3A_4A_4$	$B_3B_3A_4 * B_3A_4A_4$	$A_4B_3B_3 * A_4B_3A_4$
	$B_3A_4B_3 * A_4B_3A_4$	$B_3B_3A_4 * A_4B_3A_4$	$A_4B_3B_3 * A_4A_4B_3$
	$B_3A_4B_3 * A_4A_4B_3$	$B_3B_3A_4 * A_4A_4B_3$	
$A_4B_4 * B_4B_4A_4A_4$	$A_4B_4 * B_4A_4B_4A_4$	$A_4B_4 * A_4B_4B_4A_4$	$A_4B_4 * B_4A_4A_4B_4$
	$A_4B_4 * A_4B_4A_4B_4$	$A_4B_4 * A_4A_4B_4B_4$	$B_4A_4 * B_4B_4A_4A_4$
	$B_4A_4 * B_4A_4B_4A_4$	$B_4A_4 * A_4B_4B_4A_4$	$B_4A_4 * B_4A_4A_4B_4$
	$B_4A_4 * A_4B_4A_4B_4$	$B_4A_4 * A_4A_4B_4B_4$	

此時置入共同接頭 T_{vc} 的方式與前述之不完全相同，除了有空缺的機構必須將之插入□中之外，其他的機構可以在任意位置插入 T_{vc} 。因此，含有□之機構僅有1個 T_{vc} 插入處，其他機構則有8個 T_{vc} 插入處，詳細之可插入位置如前述之圖4.5所示。



4.3.4 初步篩選判斷

從上一小節的結果中，首先要刪減的是連續可動機構組合，刪減方法與之前相同，因此可將表 4.14 刪減成表 4.15。若與表 4.6 比較，在此由於 $\{1/G(\mathbf{y}_2)\}$ 之接頭填法有三種可能，將造成不同的運動鏈，則不會遇到可能重複的機會。

表 4.15 初步篩選後的兩平面混合之簡寫可能機構

$A_1A_1B_3A_1B_3 * B_3$	$A_1B_3A_1A_1B_3 * B_3$	$B_3A_1A_1A_1B_3 * B_3$	$A_1A_1B_3B_3A_1 * B_3$
$A_1B_3A_1B_3A_1 * B_3$	$B_3A_1A_1B_3A_1 * B_3$	$A_1B_3B_3A_1A_1 * B_3$	$B_3A_1B_3A_1A_1 * B_3$
$A_1A_1B_4A_1 * B_4B_4$	$A_1B_4A_1A_1 * B_4B_4$		
$A_1A_1B_1A_1B_1B_1 * \square$	$A_1A_1B_1B_1A_1B_1 * \square$	$A_1A_1B_1B_1B_1A_1 * \square$	$A_1B_1A_1A_1B_1B_1 * \square$
$A_1B_1A_1B_1A_1B_1 * \square$	$A_1B_1A_1B_1B_1A_1 * \square$	$A_1B_1B_1A_1A_1B_1 * \square$	$A_1B_1B_1A_1B_1A_1 * \square$
$A_1B_1B_1B_1A_1A_1 * \square$	$B_1A_1A_1A_1B_1B_1 * \square$	$B_1A_1A_1B_1A_1B_1 * \square$	$B_1A_1A_1B_1B_1A_1 * \square$
$B_1A_1B_1A_1A_1B_1 * \square$	$B_1A_1B_1A_1B_1A_1 * \square$	$B_1A_1B_1B_1A_1A_1 * \square$	$B_1B_1A_1A_1A_1B_1 * \square$
$B_1B_1A_1A_1B_1A_1 * \square$	$B_1B_1A_1B_1A_1A_1 * \square$		
$\square * B_2B_2A_2B_2A_2A_2$	$\square * B_2B_2A_2A_2B_2A_2$	$\square * B_2B_2A_2A_2A_2B_2$	$\square * B_2A_2B_2B_2A_2A_2$
$\square * B_2A_2B_2A_2B_2A_2$	$\square * B_2A_2B_2A_2A_2B_2$	$\square * B_2A_2A_2B_2B_2A_2$	$\square * B_2A_2A_2B_2A_2B_2$
$\square * B_2A_2A_2A_2B_2B_2$	$\square * A_2B_2B_2B_2A_2A_2$	$\square * A_2B_2B_2A_2B_2A_2$	$\square * A_2B_2B_2A_2A_2B_2$
$\square * A_2B_2A_2B_2B_2A_2$	$\square * A_2B_2A_2B_2A_2B_2$	$\square * A_2B_2A_2A_2B_2B_2$	$\square * A_2A_2B_2B_2B_2A_2$
$\square * A_2A_2B_2B_2A_2B_2$	$\square * A_2A_2B_2A_2B_2B_2$		
$B_3B_3 * A_2B_3A_2A_2$	$B_3B_3 * A_2A_2B_3A_2$		
$B_4 * B_4A_2B_4A_2A_2$	$B_4 * B_4A_2A_2B_4A_2$	$B_4 * B_4A_2A_2A_2B_4$	$B_4 * A_2B_4B_4A_2A_2$
$B_4 * A_2B_4A_2B_4A_2$	$B_4 * A_2B_4A_2A_2B_4$	$B_4 * A_2A_2B_4B_4A_2$	$B_4 * A_2A_2B_4A_2B_4$
$A_3B_1A_3B_1B_1 * A_3$	$B_1A_3A_3B_1B_1 * A_3$	$A_3B_1B_1A_3B_1 * A_3$	$B_1A_3B_1A_3B_1 * A_3$
$B_1B_1A_3A_3B_1 * A_3$	$A_3B_1B_1B_1A_3 * A_3$	$B_1A_3B_1B_1A_3 * A_3$	$B_1B_1A_3B_1A_3 * A_3$



表 4.15 初步篩選後的兩平面混合之簡寫可能機構(續)

$A_3A_3 * B_2B_2A_3B_2$	$A_3A_3 * B_2A_3B_2B_2$		
$A_3B_3A_3B_3 * B_3A_3$	$A_3B_3B_3A_3 * B_3A_3$	$B_3A_3A_3B_3 * B_3A_3$	$B_3A_3B_3A_3 * B_3A_3$
$B_3B_3A_3A_3 * B_3A_3$	$A_3A_3B_3B_3 * A_3B_3$	$A_3B_3A_3B_3 * A_3B_3$	$A_3B_3B_3A_3 * A_3B_3$
$B_3A_3A_3B_3 * A_3B_3$	$B_3A_3B_3A_3 * A_3B_3$		
$A_3B_4A_3 * B_4B_4A_3$	$B_4A_3A_3 * B_4B_4A_3$	$A_3A_3B_4 * B_4A_3B_4$	$A_3B_4A_3 * B_4A_3B_4$
$B_4A_3A_3 * B_4A_3B_4$	$A_3A_3B_4 * A_3B_4B_4$	$A_3B_4A_3 * A_3B_4B_4$	
$A_4B_1B_1B_1 * A_4A_4$	$B_1A_4B_1B_1 * A_4A_4$	$B_1B_1A_4B_1 * A_4A_4$	$B_1B_1B_1A_4 * A_4A_4$
$A_4 * B_2B_2A_4B_2A_4$	$A_4 * B_2A_4B_2B_2A_4$	$A_4 * A_4B_2B_2B_2A_4$	$A_4 * B_2B_2A_4A_4B_2$
$A_4 * B_2A_4B_2A_4B_2$	$A_4 * A_4B_2B_2A_4B_2$	$A_4 * B_2A_4A_4B_2B_2$	$A_4 * A_4B_2A_4B_2B_2$
$B_3A_4B_3 * B_3A_4A_4$	$B_3B_3A_4 * B_3A_4A_4$	$A_4B_3B_3 * A_4B_3A_4$	$B_3A_4B_3 * A_4B_3A_4$
$B_3B_3A_4 * A_4B_3A_4$	$A_4B_3B_3 * A_4A_4B_3$	$B_3A_4B_3 * A_4A_4B_3$	
$A_4B_4 * B_4A_4B_4A_4$	$A_4B_4 * A_4B_4B_4A_4$	$A_4B_4 * B_4A_4A_4B_4$	$A_4B_4 * A_4B_4A_4B_4$
$A_4B_4 * A_4A_4B_4B_4$	$B_4A_4 * B_4B_4A_4A_4$	$B_4A_4 * B_4A_4B_4A_4$	$B_4A_4 * A_4B_4B_4A_4$
$B_4A_4 * B_4A_4A_4B_4$	$B_4A_4 * A_4B_4A_4B_4$		



4.3.5 結果展示

選擇上表中之 $A_3B_3A_3B_3 * B_3A_3$ 機構排列，並任選一位置插入共同接頭形成 $A_3B_3A_3B_3 * B_3TA_3$ ，填入詳細接頭表示法則可寫為 $R_{y_1}^B R_{y_2}^E R_{y_1}^C T_{v_1} * R_{y_2}^F T_{v_c} R_{y_1}^D$ ，為具 $\{1/G(\mathbf{y}_1)\}$ 及 $\{1/G(\mathbf{y}_2)\}$ 運動模式之第一舉例，設定桿 7 為地桿位置、桿 4 為端效器位置，其機構於分歧點位置如圖 4.20 所示。

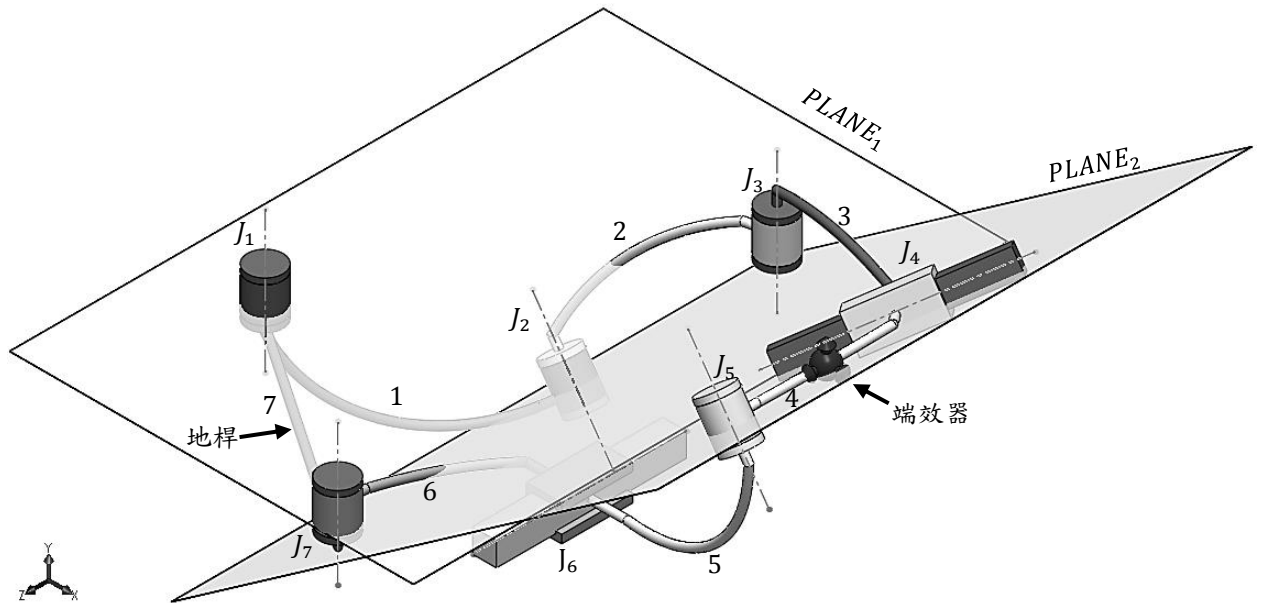


圖 4.20 $R_{y_1}^B R_{y_2}^E R_{y_1}^C T_{v_1} * R_{y_2}^F T_{v_c} R_{y_1}^D$ 機構於分歧點位置

從圖 4.20 可見，屬於運動模式 $\{1/G(\mathbf{y}_1)\}$ 的四個接頭為 J_1 、 J_3 、 J_6 、 J_7 ，其中三個旋轉接頭之方向會垂直於平面 1，平移接頭之方向平行於平面 1，符合產生第一個平面運動的條件；屬於運動模式 $\{1/G(\mathbf{y}_2)\}$ 的四個接頭有 J_2 、 J_4 、 J_5 、 J_6 ，兩個旋轉方向垂直於平面 2，兩平移方向分別平行於平面 2，足以產生第二個平面運動。故此時的機構狀態同時符合兩種運動的條件，可以進入任一個運動模式。

首先讓機構進入運動模式 $\{1/G(\mathbf{y}_1)\}$ ，如圖 4.21 所示， J_2 及 J_5 不再垂直於平面 2，亦不互相平行，而 J_4 也不再平行於平面 2，阻止了 $\{1/G(\mathbf{y}_2)\}$ 的運動，故僅能進行 $\{1/G(\mathbf{y}_1)\}$ 運動。再重新滿足組成 $\{1/G(\mathbf{y}_2)\}$ 的條件之前，接頭 J_2 、 J_4 、 J_5 將處於不動的狀態，產生的運動應記作 $\{E\}$ 。

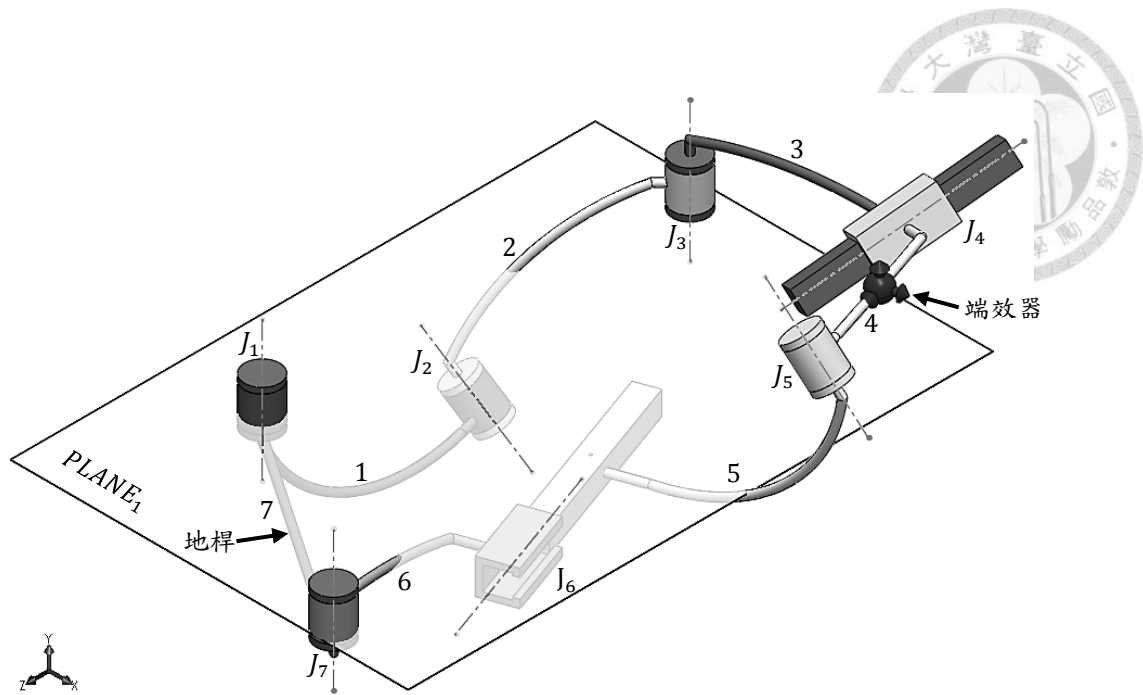


圖 4.21 進入 $\{1/G(\mathbf{y}_1)\}$ 運動模式

因此，此時端效器(桿 4)之運動可記作：

$$\begin{aligned} \{L(7,4)\} &\supseteq \{R(B, \mathbf{y}_1)\}\{E\}\{R(C, \mathbf{y}_1)\}\{E\} \cap \{R(D, \mathbf{y}_1)\}\{T(\mathbf{v}_c)\}\{E\} \\ &\supseteq \{1/G(\mathbf{y}_1)\} \end{aligned}$$

上式中可得端效器在此時的運動為：平行於平面 1 之的 1 自由度運動。使用電腦軟體進行模擬其運動狀態，將 J_1 設為驅動接頭，並使平面 1 恰為空間中之 $\mathbf{x} - \mathbf{z}$ 平面，並觀察端效器之運動坐標變化，可製成圖表如圖 4.22 所示。

圖 4.22 之三條虛線分別表示端效器於空間中，三軸之坐標變化。其中 \mathbf{y} 軸坐標維持一定值，即端效器至平面 1 的垂直距離不改變。因此可證實此運動確實為 $\{1/G(\mathbf{y}_1)\}$ ， $\{L(7,4)\} \supseteq \{1/G(\mathbf{y}_1)\}$ 。

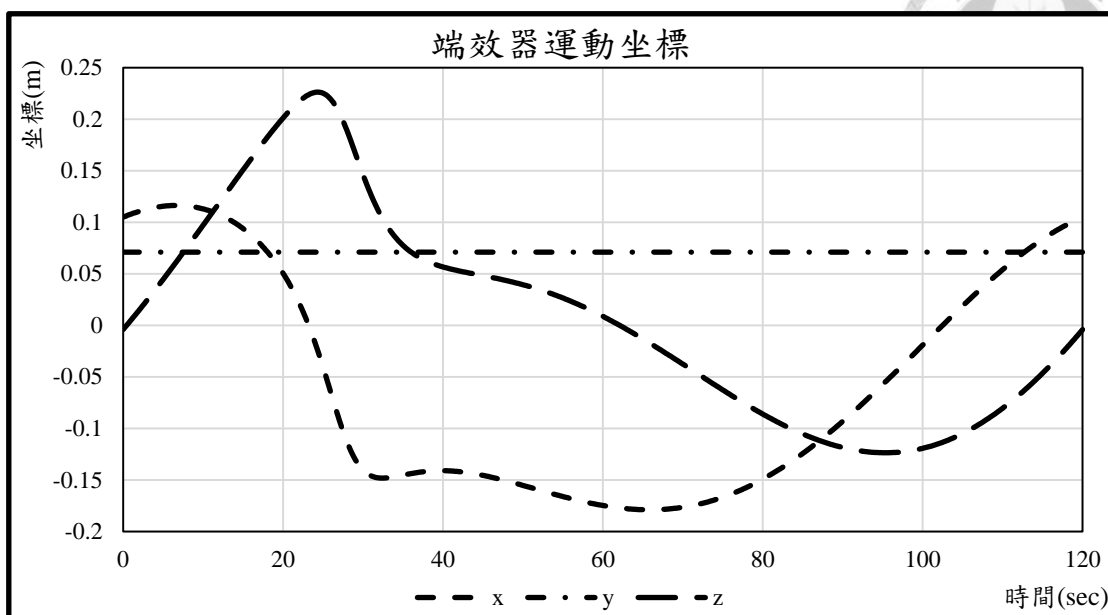
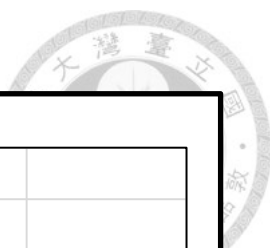


圖 4.22 $R_{y_1}^B R_{y_2}^E R_{y_1}^C T_{v_1} * R_{y_2}^F T_{v_c} R_{y_1}^D$ 機構於 $\{1/G(y_1)\}$ 之端效器運動坐標

比較各接頭運動結果，如圖 4.23 所示，其中 J_1 、 J_2 、 J_3 、 J_5 、 J_7 等R接頭旋轉角度使用左邊縱軸之刻度值，而 J_4 和 J_6 等P接頭使用右邊之長度刻度值，後續圖表亦套用此方法。從圖 4.23 可看到屬於 $\{1/G(y_2)\}$ 之接頭 J_2 、 J_4 、 J_5 變化值為零，而屬於 $\{1/G(y_1)\}$ 之其他接頭皆有隨著 J_1 旋轉而變化。

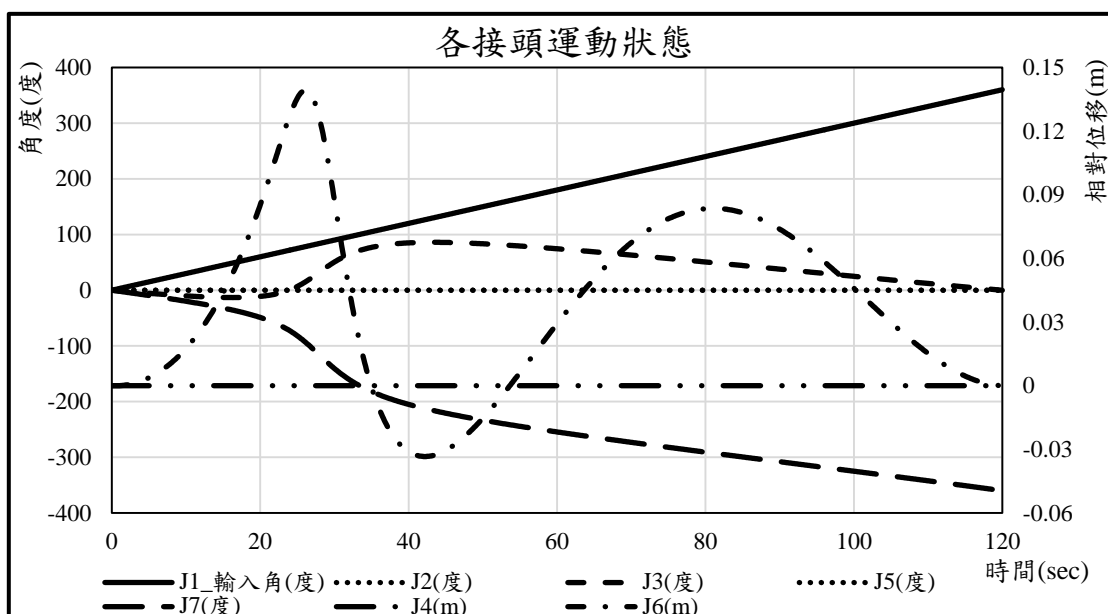


圖 4.23 $R_{y_1}^B R_{y_2}^E R_{y_1}^C T_{v_1} * R_{y_2}^F T_{v_c} R_{y_1}^D$ 機構於 $\{1/G(y_1)\}$ 之接頭運動狀態



另一方面，當此機構進入運動模式 $\{1/G(y_2)\}$ ，如圖 4.24 所示，接頭 J_3 不再垂直於平面 1，阻止了 $\{1/G(y_1)\}$ 。因此，此時端效器之運動可記作：

$$\begin{aligned} \{L(7,4)\} &\supseteq \{E\}\{R(E, y_2)\}\{E\}\{T(v_1)\} \cap \{E\}\{T(v_c)\}\{R(F, y_2)\} \\ &\supseteq \{1/G(y_2)\} \end{aligned}$$

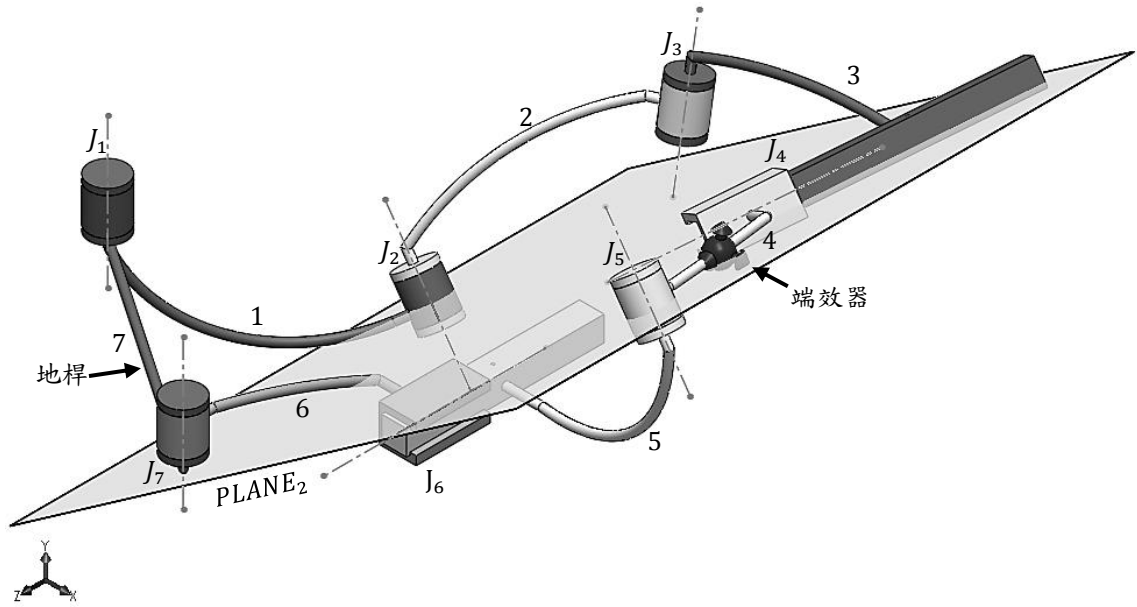


圖 4.24 進入 $\{1/G(y_2)\}$ 運動模式

上式中可得端效器在此時的運動為：平行於平面 2 之的 1 自由度運動。不同於上一模式，此時將驅動接頭設於 J_2 ，觀察端效器之運動坐標變化，並計算其坐標到平面 2 之垂直距離變化，可製成圖表如圖 4.25 所示。

圖 4.25 之三條虛線分別表示端效器於空間中，三軸之坐標變化。而需要特別觀察的是端效器至平面 2 的垂直距離，觀測結果其值不改變。因此可證實此運動確實為 $\{1/G(y_2)\}$ ， $\{L(7,4)\} \supseteq \{1/G(y_2)\}$ 。

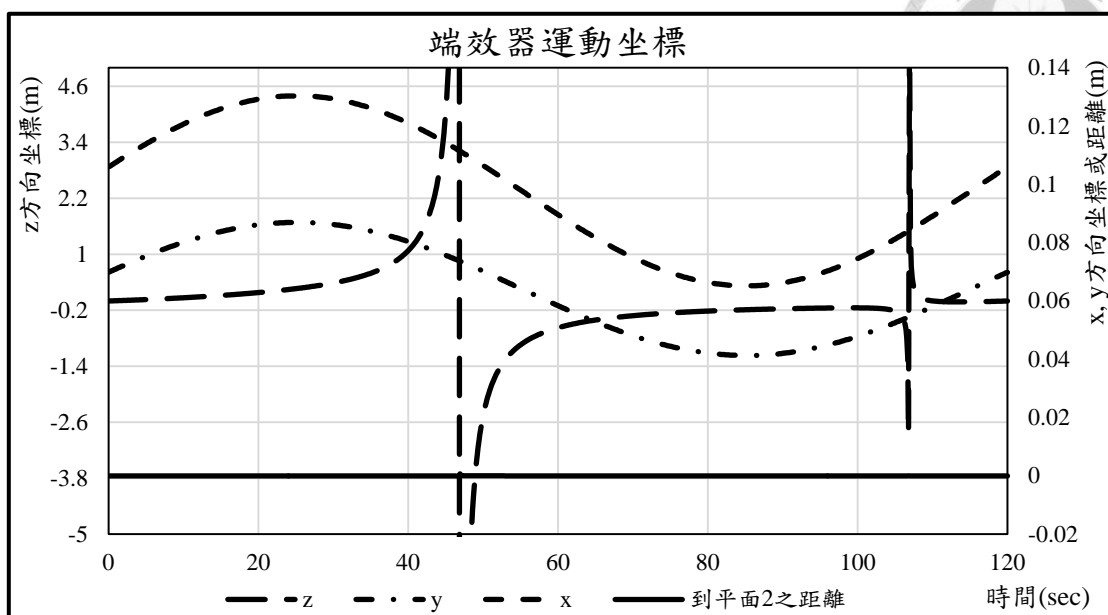
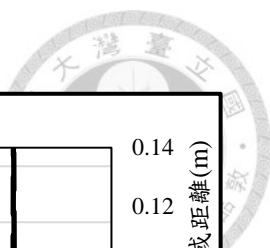


圖 4.25 $R_{y_1}^B R_{y_2}^E R_{y_1}^C T_{v_1} * R_{y_2}^F T_{v_c} R_{y_1}^D$ 機構於 $\{1/G(y_2)\}$ 之端效器運動坐標

同樣利用各接頭運動結果之比較，接頭 J_1 、 J_3 及 J_7 皆無角度變化，如圖 4.26 所示。而屬於 $\{1/G(y_2)\}$ 之其他接頭 J_4 、 J_5 、 J_6 皆隨著 J_2 運動而改變。

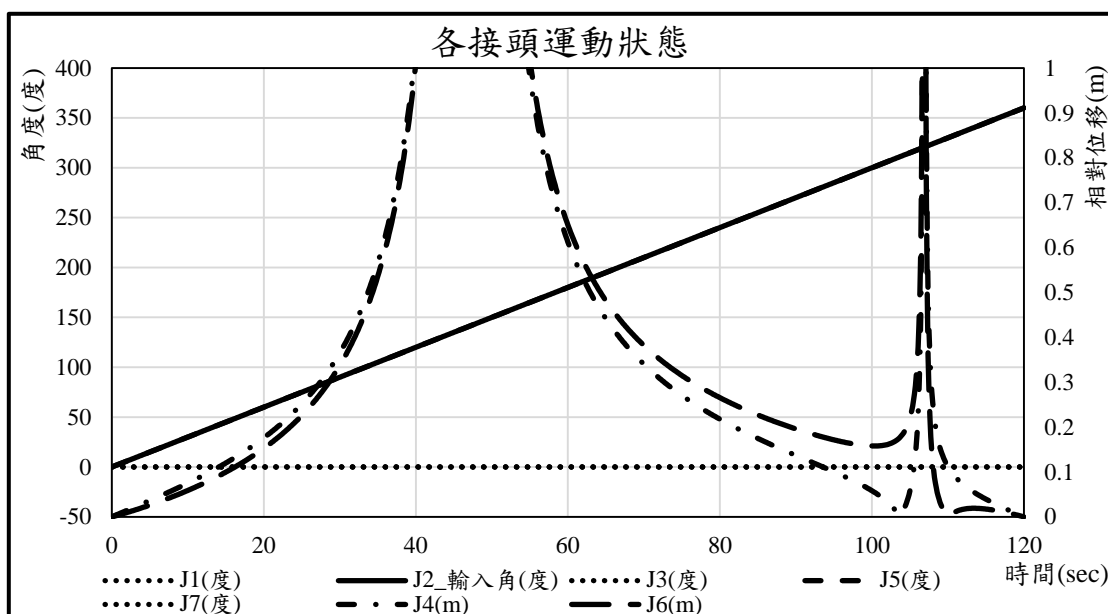


圖 4.26 $R_{y_1}^B R_{y_2}^E R_{y_1}^C T_{v_1} * R_{y_2}^F T_{v_c} R_{y_1}^D$ 機構於 $\{1/G(y_2)\}$ 之接頭運動狀態

經以上分析，得證 $\{L(7,4)\} \supseteq \{1/G(y_1)\} \cup \{1/G(y_2)\}$ 。



接著選用另一相似種類機構，同樣由 $A_3A_3B_3B_3$ 之任意排列為端效器左端的運動鏈， B_3A_3T 之任意排列為右端運動鏈，但接頭順序不同之組合，機構 $A_3B_3B_3A_3 * A_3B_3T$ ，填入詳細接頭表示法則可寫為 $R_{y_1}^B R_{y_2}^E T_{v_1} R_{y_1}^C * R_{y_1}^D R_{y_2}^F T_{v_c}$ ，為進行驗證之第二例。同樣設定桿 7 為地桿位置、桿 4 為端效器位置，其機構於分歧點位置如圖 4.27 所示。

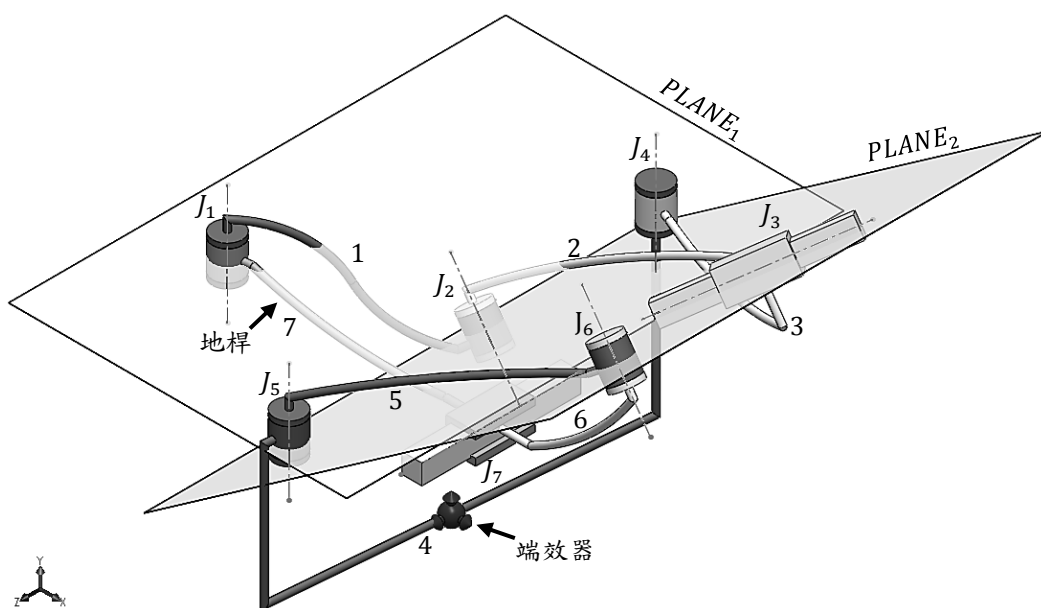


圖 4.27 $R_{y_1}^B R_{y_2}^E T_{v_1} R_{y_1}^C * R_{y_1}^D R_{y_2}^F T_{v_c}$ 機構於分歧點位置

由圖 4.27 觀察此機構，改由接頭 J_1 、 J_4 、 J_5 、 J_7 組成運動模式 $\{1/G(\mathbf{y}_1)\}$ ；接頭 J_2 、 J_3 、 J_6 、 J_7 組成運動模式 $\{1/G(\mathbf{y}_2)\}$ 。

直接讓機構進入運動模式 $\{1/G(\mathbf{y}_1)\}$ ，如圖 4.28 所示，接頭 J_2 、 J_6 之軸線不再垂直於平面 2， J_3 亦不再平行於平面 2，阻止了 $\{1/G(\mathbf{y}_2)\}$ 的運動。因此，此時端效器之運動可記作：

$$\begin{aligned} \{L(7,4)\} &\supseteq \{R(B, \mathbf{y}_1)\} \{E\} \{E\} \{R(C, \mathbf{y}_1)\} \cap \{T(\mathbf{v}_c)\} \{E\} \{R(D, \mathbf{y}_1)\} \\ &\supseteq \{1/G(\mathbf{y}_1)\} \end{aligned}$$

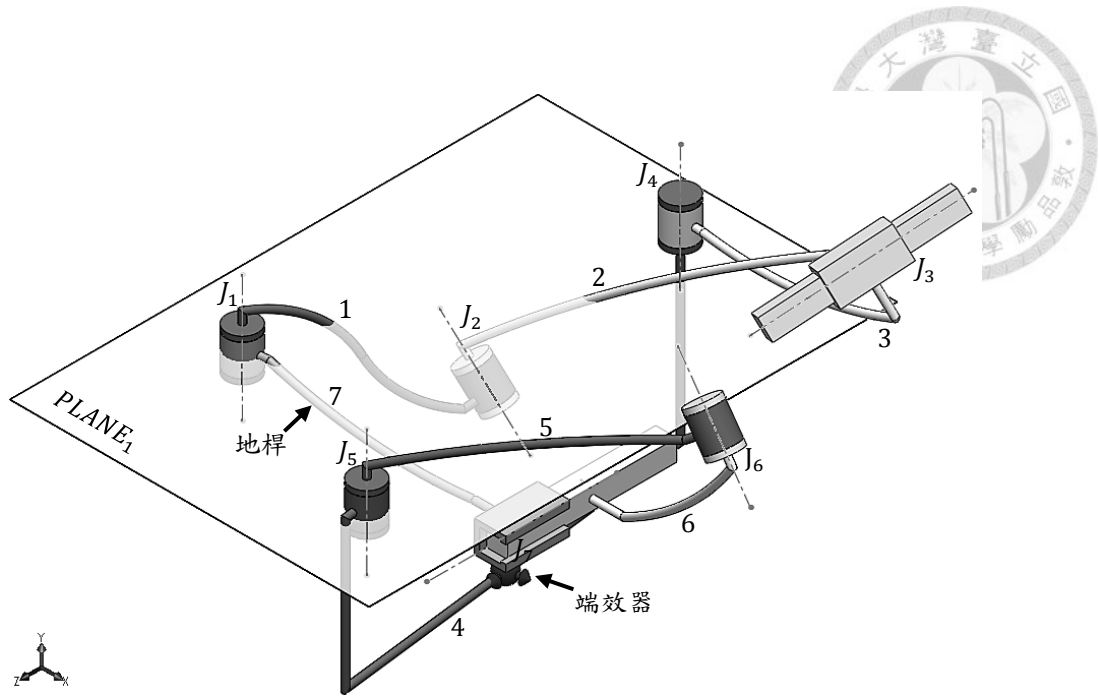


圖 4.28 進入 $\{1/G(y_1)\}$ 運動模式

使用電腦軟體進行模擬來驗證其運動狀態，將 J_1 設為驅動接頭，使平面 1 恰為空間中之 $x-z$ 平面，並觀察端效器之運動坐標變化，可製成圖表如圖 4.29 所示。

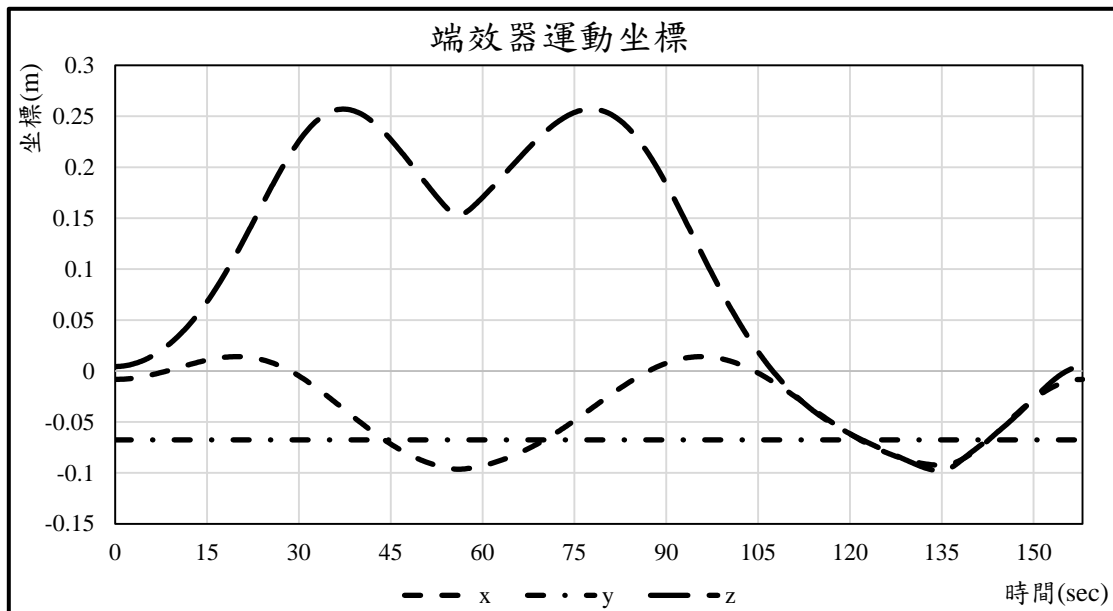


圖 4.29 $R_{y_1}^B R_{y_2}^E T_{v_1} R_{y_1}^C * R_{y_1}^D R_{y_2}^F T_{v_c}$ 機構於 $\{1/G(y_1)\}$ 之端效器運動坐標



圖 4.29 之三條虛線分別表示端效器於空間中，三軸之坐標變化。其中y軸坐標維持一定值，即端效器至平面 1 的垂直距離不改變。因此可證實此運動確實為 $\{1/G(\mathbf{y}_1)\}$ ， $\{L(7,4)\} \supseteq \{1/G(\mathbf{y}_1)\}$ 。

比較各接頭之運動結果，如圖 4.30 所示。 J_2 、 J_3 及 J_6 之運動變化值為零，證實抑制了運動模式 $\{1/G(\mathbf{y}_2)\}$ ，因此僅能進行運動模式 $\{1/G(\mathbf{y}_1)\}$ 。

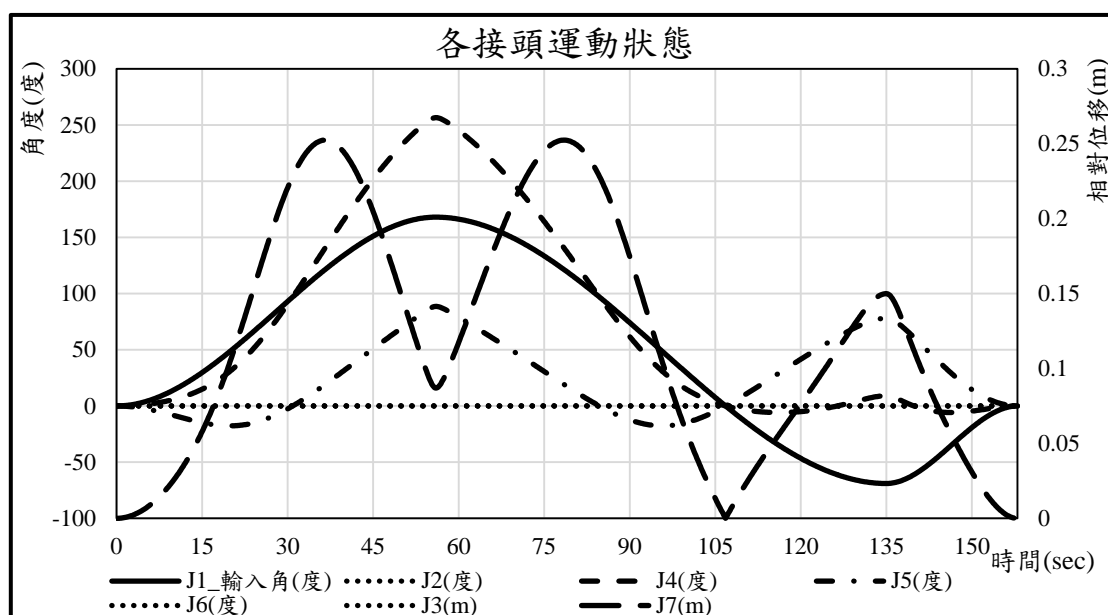


圖 4.30 $R_{y_1}^B R_{y_2}^E T_{v_1} R_{y_1}^C * R_{y_1}^D R_{y_2}^F T_{v_c}$ 機構於 $\{1/G(\mathbf{y}_1)\}$ 之接頭運動狀態

反觀此機構之運動模式 $\{1/G(\mathbf{y}_2)\}$ ，如圖 4.31 所示，此時端效器之運動可記作：

$$\begin{aligned} \{L(7,4)\} &\supseteq \{E\}\{R(E, \mathbf{y}_2)\}\{T(\mathbf{v}_1)\}\{E\} \cap \{T(\mathbf{v}_c)\}\{R(F, \mathbf{y}_2)\}\{E\} \\ &\supseteq \{1/G(\mathbf{y}_2)\} \end{aligned}$$

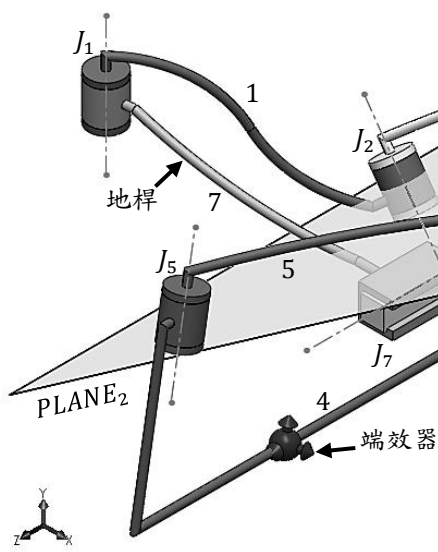


圖 4.31 進入 $\{1/G(y_2)\}$ 運動模式

上式中可得端效器在此時的運動應為：平行於平面 2 的 1 自由度運動。從圖 4.31 也可觀察到，原屬於 $\{1/G(y_1)\}$ 之旋轉接頭 J_4 與 J_5 不再垂直於 $x-z$ 平面，抑制了 $\{1/G(y_1)\}$ 之運動。此時將驅動接頭改設於 J_2 ，觀察端效器之運動坐標變化，並計算端效器位置到平面 2 之垂直距離隨時間的變化，可製成圖表如圖 4.32 所示。

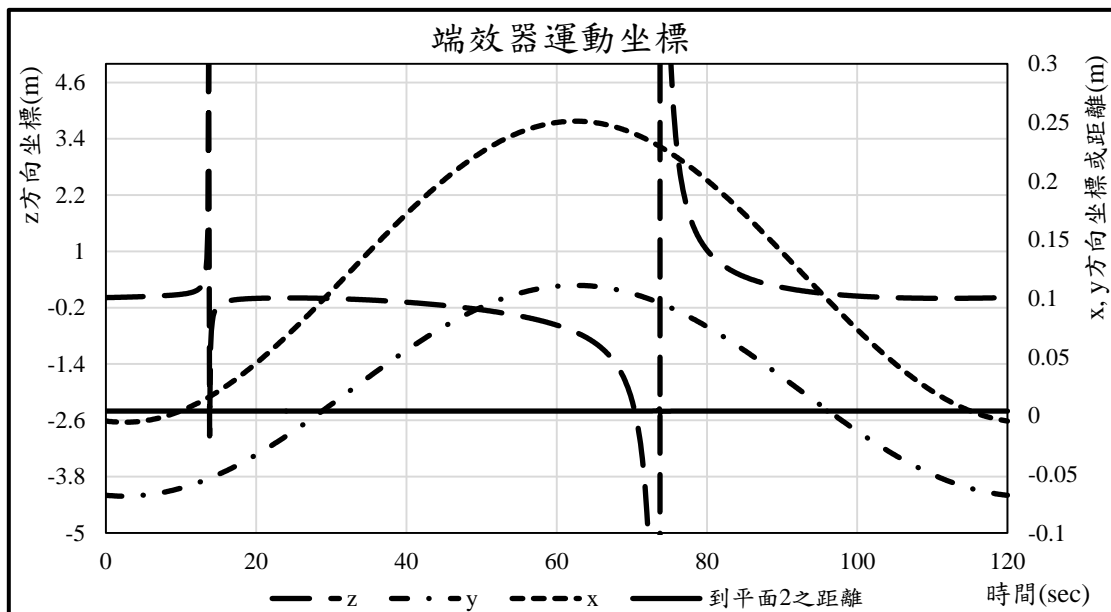


圖 4.32 $R_{y_1}^B R_{y_2}^E T_{v_1} R_{y_1}^C * R_{y_1}^D R_{y_2}^F T_{v_c}$ 機構於 $\{1/G(y_2)\}$ 之端效器運動坐標



圖 4.32 之三條虛線分別表示端效器於空間中，三軸之坐標變化。而需要特別觀察的是端效器至平面 2 的垂直距離，結果其值呈現一定值。因此可證實此運動確實為 $\{1/G(y_2)\}$ ， $\{L(7,4)\} \supseteq \{1/G(y_2)\}$ 。

最後，藉著各接頭運動結果之比較，如圖 4.33 所示。圖表中顯示接頭 J_1 、 J_4 、 J_5 無相對旋轉運動，意指無法進行運動模式 $\{1/G(y_1)\}$ ，而屬於 $\{1/G(y_2)\}$ 之其他接頭 J_3 、 J_6 、 J_7 皆有隨著 J_2 運動而變化。

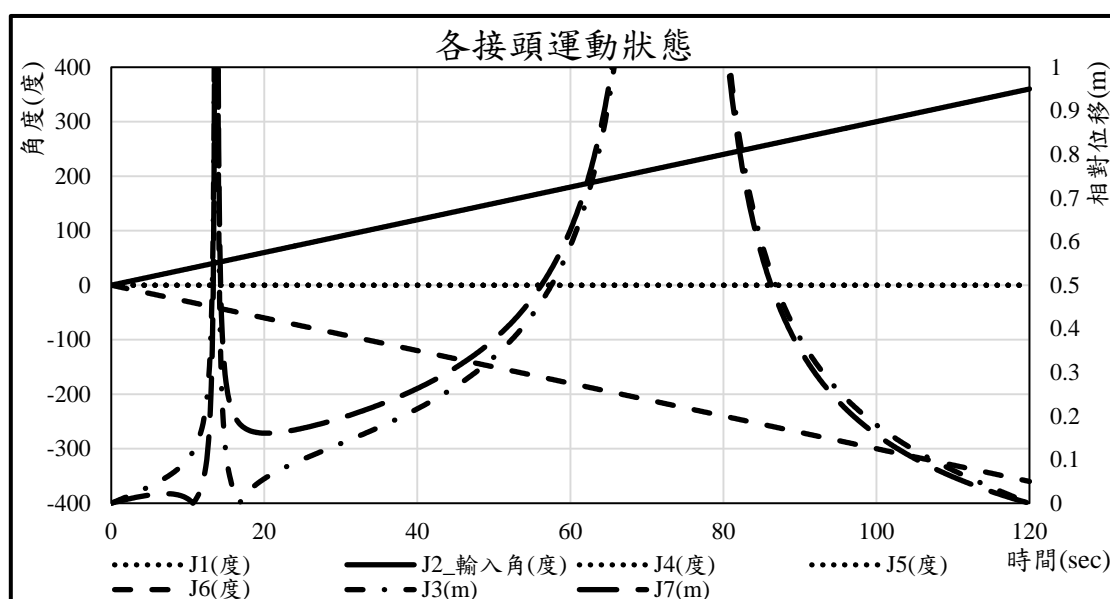


圖 4.33 $R_{y_1}^B R_{y_2}^E T_{v_1} R_{y_1}^C * R_{y_1}^D R_{y_2}^F T_{v_c}$ 機構於 $\{1/G(y_2)\}$ 之接頭運動狀態

經以上分析，得證 $\{L(7,4)\} \supseteq \{1/G(y_1)\} \cup \{1/G(y_2)\}$ 。即可稱機構 $R_{y_1}^B R_{y_2}^E T_{v_1} R_{y_1}^C * R_{y_1}^D R_{y_2}^F T_{v_c}$ 為具有 $\{1/G(y_1)\}$ 及 $\{1/G(y_2)\}$ 運動模式之不連續可動機構。

4.3.6 其他案例討論

嘗試探討 C 與 C 的組合，並從合成結果中選取機構 $R_{y_1}^B T_{v_c} R_{y_2}^D T_{v_1} * R_{y_2}^E T_{v_2} R_{y_1}^C$ 作說明，其中 v_c 為兩不平行之平面所相交的直線方向， v_1 平行於平面 1， v_2 平行於平面 2，而所得之運動結果為具有 2 自由度之連續可動機構。



4.4 合成具 $\{R(A, \mathbf{x})\}$ 、 $\{R(B, \mathbf{y})\}$ 及 $\{R(C, \mathbf{z})\}$ 運動模式之不連續可動機構

本節最後一例將利用相同的合成流程，找出具有三個運動模式之不連續可動機構，選用最簡易的旋轉運動模式為設定合成目標，即含三個互相正交之軸線旋轉的不連續可動機構，故設定運動模式為 $\{R(A, \mathbf{x})\}$ 、 $\{R(B, \mathbf{y})\}$ 及 $\{R(C, \mathbf{z})\}$ 。

4.4.1 列舉原生機構

以運動模式 $\{R(A, \mathbf{x})\}$ 為例，此運動為以通過點 A 之 \mathbf{x} 方向為軸的旋轉，產生此運動的最簡易運動鏈為 R_x^A 。但若要考慮一閉迴路機構，能產生 $\{R(A, \mathbf{x})\}$ 運動的方式為 $\{R(A, \mathbf{x})\} \cap \{R(A, \mathbf{x})\}$ ，故最簡單的機構應為 $R_x^A * R_x^A$ ，為求明顯區別將之改寫為 $R_x^{A_1} * R_x^{A_2}$ ，如圖 4.34 所示，其中 A_1 、 A_2 連線為 \mathbf{x} 方向且通過 A 點。同理可得 $R_y^{B_1} * R_y^{B_2}$ 為 $\{R(B, \mathbf{y})\}$ 之原生機構， $R_z^{C_1} * R_z^{C_2}$ 為 $\{R(C, \mathbf{z})\}$ 之原生機構。

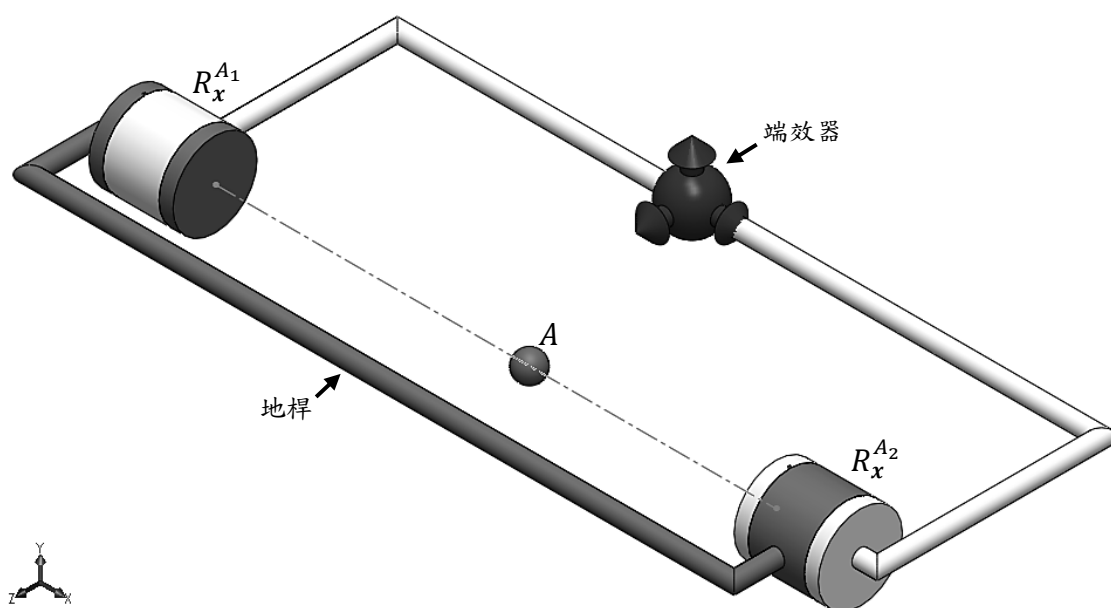


圖 4.34 $R_x^{A_1} * R_x^{A_2}$ 機構



4.4.2 結合原生機構

同樣將地桿設為起點，以按照順序進行運動鏈的裝配。首先對 $\{R(A, \mathbf{x})\}$ 、 $\{R(B, \mathbf{y})\}$ 以及 $\{R(C, \mathbf{z})\}$ 分別進行去除端效器、去除端效器及地桿與去除地桿之處理，並將此三者的缺口兩端分別以桿件結合。接著以相同方法但不同順位之分別去除後結合，可得到六種組合機構，如表 4.16 所示。

表 4.16 三軸旋轉混合之組合機構

$R_x^{A_1} R_y^{B_1} R_z^{C_1} * R_z^{C_2} R_y^{B_2} R_x^{A_2}$	$R_x^{A_1} R_z^{C_1} R_y^{B_1} * R_y^{B_2} R_z^{C_2} R_x^{A_2}$	$R_y^{B_1} R_x^{A_1} R_z^{C_1} * R_z^{C_2} R_x^{A_2} R_y^{B_2}$
$R_y^{B_1} R_z^{C_1} R_x^{A_1} * R_x^{A_2} R_z^{C_2} R_y^{B_2}$	$R_z^{C_1} R_x^{A_1} R_y^{B_1} * R_y^{B_2} R_x^{A_2} R_z^{C_2}$	$R_z^{C_1} R_y^{B_1} R_x^{A_1} * R_x^{A_2} R_y^{B_2} R_z^{C_2}$

4.4.3 改變接頭連接次序

由於單一旋轉之原生機構種類很單純，因此在列舉全數之交錯機構時，端效器兩端的運動鏈各自能產生六種組合方式，扣除重複可產生二十一種交錯機構結果，如表 4.17 所示。

表 4.17 三軸旋轉混合之交錯機構

$R_x^{A_1} R_y^{B_1} R_z^{C_1} * R_x^{A_2} R_y^{B_2} R_z^{C_2}$	$R_x^{A_1} R_y^{B_1} R_z^{C_1} * R_x^{A_2} R_z^{C_2} R_y^{B_2}$	$R_x^{A_1} R_y^{B_1} R_z^{C_1} * R_y^{B_2} R_x^{A_2} R_z^{C_2}$
$R_x^{A_1} R_y^{B_1} R_z^{C_1} * R_y^{B_2} R_z^{C_2} R_x^{A_2}$	$R_x^{A_1} R_y^{B_1} R_z^{C_1} * R_z^{C_2} R_x^{A_2} R_y^{B_2}$	$R_x^{A_1} R_y^{B_1} R_z^{C_1} * R_z^{C_2} R_y^{B_2} R_x^{A_2}$
$R_x^{A_1} R_z^{C_1} R_y^{B_1} * R_x^{A_2} R_y^{B_2} R_z^{C_2}$	$R_x^{A_1} R_z^{C_1} R_y^{B_1} * R_x^{A_2} R_z^{C_2} R_y^{B_2}$	$R_x^{A_1} R_z^{C_1} R_y^{B_1} * R_y^{B_2} R_x^{A_2} R_z^{C_2}$
$R_x^{A_1} R_z^{C_1} R_y^{B_1} * R_y^{B_2} R_z^{C_2} R_x^{A_2}$	$R_x^{A_1} R_z^{C_1} R_y^{B_1} * R_z^{C_2} R_x^{A_2} R_y^{B_2}$	$R_y^{B_1} R_x^{A_1} R_z^{C_1} * R_x^{A_2} R_y^{B_2} R_z^{C_2}$
$R_y^{B_1} R_x^{A_1} R_z^{C_1} * R_x^{A_2} R_z^{C_2} R_y^{B_2}$	$R_y^{B_1} R_x^{A_1} R_z^{C_1} * R_y^{B_2} R_x^{A_2} R_z^{C_2}$	$R_y^{B_1} R_x^{A_1} R_z^{C_1} * R_z^{C_2} R_x^{A_2} R_y^{B_2}$
$R_y^{B_1} R_z^{C_1} R_x^{A_1} * R_x^{A_2} R_y^{B_2} R_z^{C_2}$	$R_y^{B_1} R_z^{C_1} R_x^{A_1} * R_x^{A_2} R_z^{C_2} R_y^{B_2}$	$R_y^{B_1} R_z^{C_1} R_x^{A_1} * R_y^{B_2} R_x^{A_2} R_z^{C_2}$
$R_z^{C_1} R_x^{A_1} R_y^{B_1} * R_x^{A_2} R_y^{B_2} R_z^{C_2}$	$R_z^{C_1} R_x^{A_1} R_y^{B_1} * R_y^{B_2} R_x^{A_2} R_z^{C_2}$	$R_z^{C_1} R_y^{B_1} R_x^{A_1} * R_x^{A_2} R_y^{B_2} R_z^{C_2}$



4.4.4 初步篩選判斷

從表 4.16 中可確定上述之二十一種組合裡面，必有六種機構是連續可動機構，而有一部份為僅具兩種運動模式之不連續可動機構，扣除這兩種所剩下的機構才屬具三種運動模式之不連續可動機構，而三種類型之區分判斷方法如下：

一、連續可動機構

左端運動鏈與右端運動鏈之接頭方向連接次序相同，例如： $R_x^{A_1} R_z^{C_1} R_y^{B_1} * R_y^{B_2} R_z^{C_2} R_x^{A_2}$ ，兩運動鏈之接頭連接次序皆為 $x - z - y$ 。

二、雙運動模式之不連續可動機構

判斷雙運動模式之不連續可動機構的依據可分為兩種：

- (1) 左右兩端運動鏈之接頭連接次序部分相同，如 $R_y^{B_1} R_z^{C_1} R_x^{A_1} * R_y^{B_2} R_x^{A_2} R_z^{C_2}$ 機構，兩運動鏈之接頭連接次序為 $y - z - x$ 及 $z - x - y$
- (2) 運動鏈之起始方向或結束方向相同，如 $R_x^{A_1} R_y^{B_1} R_z^{C_1} * R_y^{B_2} R_z^{C_2} R_x^{A_2}$ 機構，兩運動鏈之接頭方向皆始於 x 方向。

三、三運動模式之不連續可動機構

左右兩端運動鏈之接頭連接次序完全不相同，且兩運動鏈之起始與結束方向皆不得相同，例如： $R_x^{A_1} R_y^{B_1} R_z^{C_1} * R_x^{A_2} R_y^{B_2} R_z^{C_2}$ ，兩運動鏈之接頭連接次序為 $x - y - z$ 及 $z - y - x$ ，且起始方向分別為 x 及 z ，結束於 z 及 x 。

因此，將混合後的交錯機構結果依上述之判斷條件重新分類，如表 4.18 所示，表格內使用數字 1、2、3 分別表示連續可動機構、雙運動模式之不連續可動機構、三運動模式之不連續可動機構。

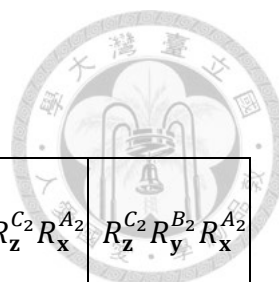


表 4.18 三軸旋轉混和之機構類型分類

右端 左端	$R_x^{A_2} R_y^{B_2} R_z^{C_2}$	$R_y^{B_2} R_x^{A_2} R_z^{C_2}$	$R_x^{A_2} R_z^{C_2} R_y^{B_2}$	$R_z^{C_2} R_x^{A_2} R_y^{B_2}$	$R_y^{B_2} R_z^{C_2} R_x^{A_2}$	$R_z^{C_2} R_y^{B_2} R_x^{A_2}$
$R_x^{A_1} R_y^{B_1} R_z^{C_1}$	3	2	2	2	2	1
$R_x^{A_1} R_z^{C_1} R_y^{B_1}$	2	2	3	2	1	
$R_y^{B_1} R_x^{A_1} R_z^{C_1}$	2	3	2	1		
$R_y^{B_1} R_z^{C_1} R_x^{A_1}$	2	2	1			
$R_z^{C_1} R_x^{A_1} R_y^{B_1}$	2	1				
$R_z^{C_1} R_y^{B_1} R_x^{A_1}$	1					

4.4.5 結果展示

表 4.18 中之分類結果顯示，僅三種交錯機構可能為具有三運動模式之不連續可動機構，分別為 $R_x^{A_1} R_y^{B_1} R_z^{C_1} * R_x^{A_2} R_y^{B_2} R_z^{C_2}$ 、 $R_y^{B_1} R_x^{A_1} R_z^{C_1} * R_y^{B_2} R_x^{A_2} R_z^{C_2}$ ，以及 $R_x^{A_1} R_z^{C_1} R_y^{B_1} * R_x^{A_2} R_z^{C_2} R_y^{B_2}$ ，但可發現若不考慮端效器和地桿的位置，其實此三種機構擁有相同的接頭排列順序，因此只選擇其中之 $R_x^{A_1} R_y^{B_1} R_z^{C_1} * R_x^{A_2} R_y^{B_2} R_z^{C_2}$ 機構為例，即足以說明此類合成之結果。設定桿 6 為地桿位置、桿 3 為端效器位置，其機構於分歧點位置如圖 4.35 所示。

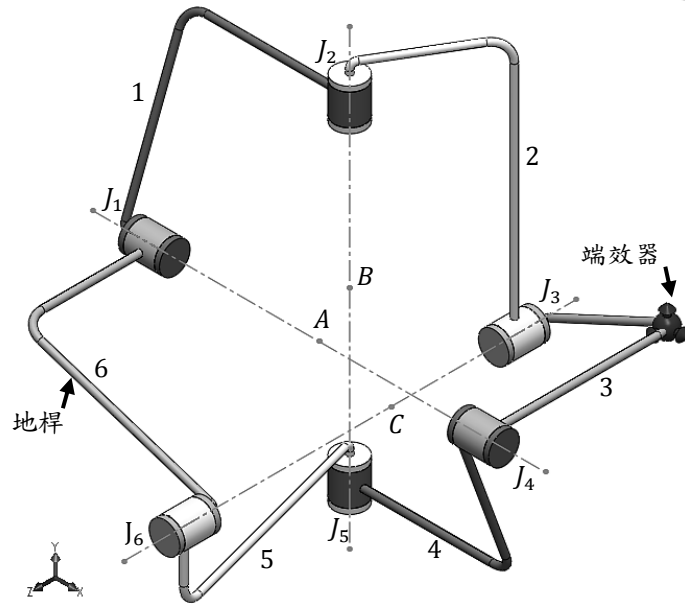


圖 4.35 $R_x^{A_1} R_y^{B_1} R_z^{C_1} * R_x^{A_2} R_y^{B_2} R_z^{C_2}$ 機構於分歧點位置

圖 4.35 顯示此機構之分歧點狀態，其中點 A 、 B 、 C 分別表示互相正交之三軸線方向所通過的點。在建立此電腦模型時，須注意到任意兩軸線方向不可相交，意指 A 、 B 、 C 皆不可共點，否則將無法產生具三種運動模式之不連續可動機構。直接讓此機構進入運動模式 $\{R(A, \mathbf{x})\}$ ，如圖 4.36 所示。

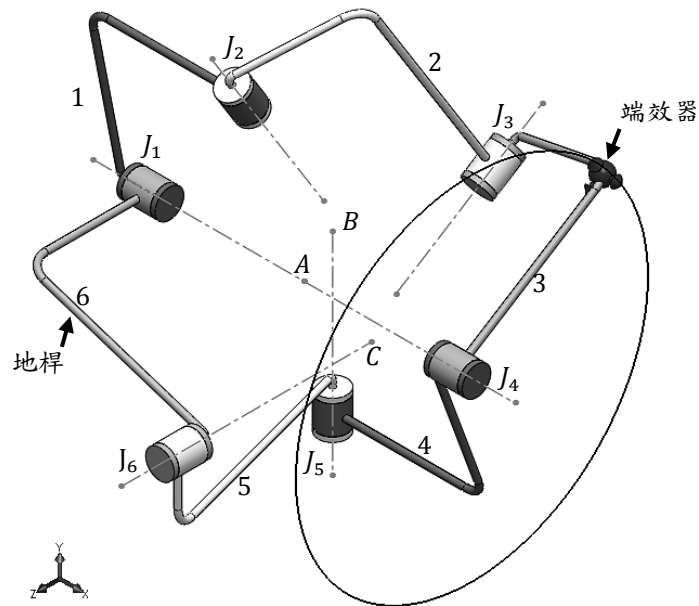


圖 4.36 $R_x^{A_1} R_y^{B_1} R_z^{C_1} * R_x^{A_2} R_y^{B_2} R_z^{C_2}$ 機構之 $\{R(A, \mathbf{x})\}$ 運動軌跡



此時端效器之運動可記作：

$$\begin{aligned} \{L(6,3)\} &\supseteq \{R(A_1, \mathbf{x})\}\{E\}\{E\} \cap \{E\}\{E\}\{R(A_2, \mathbf{x})\} \\ &\supseteq \{R(A, \mathbf{x})\} \end{aligned}$$

從圖 4.36 可看到接頭 J_2 及 J_5 無法同時通過點 B ，抑制了 $\{R(B, \mathbf{y})\}$ 的運動；而接頭 J_3 及 J_6 亦無法同時通過點 C ，阻止了 $\{R(C, \mathbf{z})\}$ 的運動。圖中之黑線顯示於此時端效器之運動軌跡，呈現一以 \mathbf{x} 方向為軸線之 1 自由度旋轉運動，印證了上式之結果。

接著進入運動模式 $\{R(B, \mathbf{y})\}$ ，如圖 4.37 所示， J_1 及 J_4 之軸線互相脫離，不可構成 $\{R(A, \mathbf{x})\}$ 的運動；而 J_3 及 J_6 之軸線亦斷開，無法進行 $\{R(C, \mathbf{z})\}$ 的運動。因此此時端效器之運動可記作：

$$\begin{aligned} \{L(6,3)\} &\supseteq \{E\}\{R(B_1, \mathbf{y})\}\{E\} \cap \{E\}\{R(B_2, \mathbf{y})\}\{E\} \\ &\supseteq \{R(B, \mathbf{y})\} \end{aligned}$$

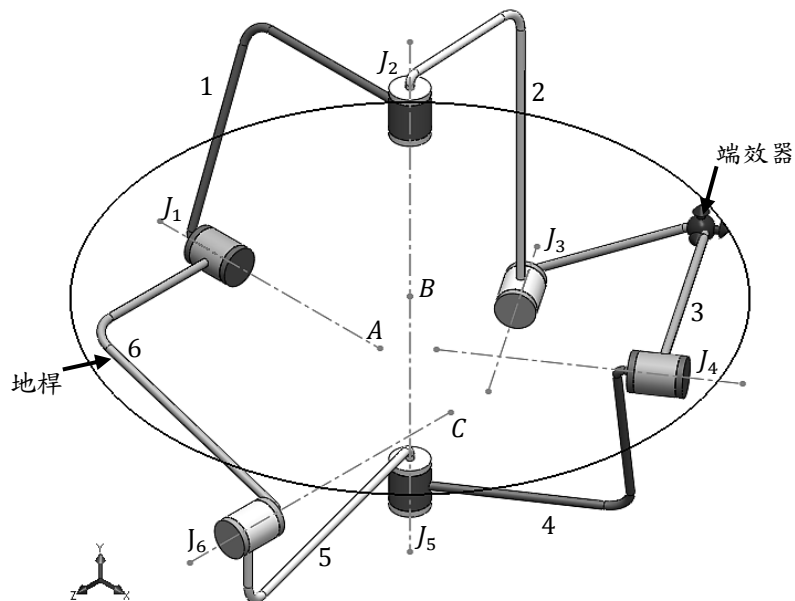


圖 4.37 $R_x^{A_1} R_y^{B_1} R_z^{C_1} * R_x^{A_2} R_y^{B_2} R_z^{C_2}$ 機構之 $\{R(B, \mathbf{y})\}$ 運動軌跡

在此運動狀態使用電腦軟體進行模擬，驅動接頭設於 J_2 ，可得其運動軌跡如上圖中之黑線所示。軌跡路徑明顯為一以 \mathbf{y} 方向為軸之 1 自由度旋轉運動。



最後讓機構進入運動模式 $\{R(C, z)\}$ ，如圖 4.38 所示， J_1 和 J_4 之旋轉軸不再共線，阻止 $\{R(A, x)\}$ 的運動；而 J_2 和 J_5 之旋轉軸亦不共線，抑制了 $\{R(B, y)\}$ 的運動。因此此時端效器之運動可記作：

$$\begin{aligned} \{L(6,3)\} &\supseteq \{E\}\{E\}\{R(C_1, z)\} \cap \{R(C_2, z)\}\{E\}\{E\} \\ &\supseteq \{R(C, z)\} \end{aligned}$$

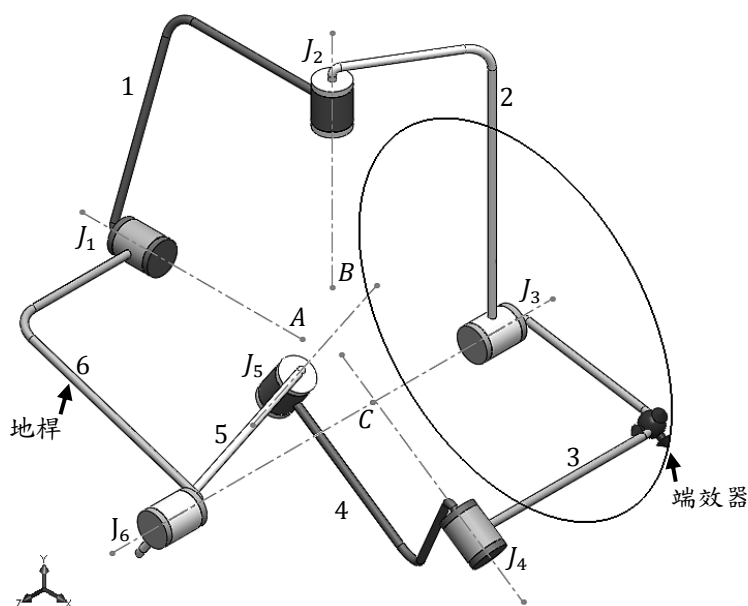


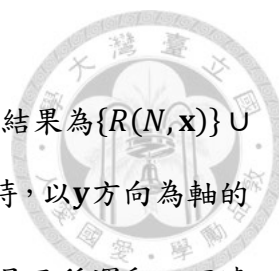
圖 4.38 $R_x^{A_1} R_y^{B_1} R_z^{C_1} * R_x^{A_2} R_y^{B_2} R_z^{C_2}$ 機構之 $\{R(C, z)\}$ 運動軌跡

利用電腦軟體進行模擬於此運動狀態，將驅動接頭設於 J_3 ，可得其運動軌跡如圖中之黑線所示。運動軌跡路徑為一以 z 方向為軸之 1 自由度旋轉運動。

經以上分析，得證 $\{L(6,3)\} \supseteq \{R(A, x)\} \cup \{R(B, y)\} \cup \{R(C, z)\}$ 。因此可稱 $R_x^{A_1} R_y^{B_1} R_z^{C_1} * R_x^{A_2} R_y^{B_2} R_z^{C_2}$ 機構為具有 $\{R(A, x)\}$ 、 $\{R(B, y)\}$ 以及 $\{R(C, z)\}$ 等運動的三運動模式之不連續可動機構。

4.4.6 其他案例討論

若建模過程中將 A 、 B 、 C 視為同一點，並改以 N 表示，則會得到依據 3 自由度之連續可動機構，其運動結果則是 $\{R(N, x)\} \cap \{R(N, y)\} \cap \{R(N, z)\} = \{S(N)\}$ ，為一



球面運動。另外，若只有 A 、 B 視為同一點，並改以 N 表示，其運動結果為 $\{R(N, \mathbf{x})\} \cup \{R(N, \mathbf{y})\} \cup \{R(N, \mathbf{y})\}\{R(C, \mathbf{z})\}$ ，而於運動模式 $\{R(N, \mathbf{y})\}\{R(C, \mathbf{z})\}$ 時，以 \mathbf{y} 方向為軸的旋轉運動幅度極微小。此外，選擇機構 $R_x^{A_1} R_y^{B_1} R_z^{C_1} * R_y^{B_2} R_z^{C_2} R_x^{A_2}$ 作具兩種運動之不連續可動機構驗證，所得之運動結果為 $\{R(A, \mathbf{x})\}\{R(B, \mathbf{y})\} \cup \{R(A, \mathbf{x})\}\{R(C, \mathbf{z})\}$ 。

4.5 小結

本節首先對於文獻[25]之合成流程內容稍作修改，並選取與該文獻內容不同之舉例說明，分別為具 $\{1/S(O_1)\}$ 及 $\{1/S(O_2)\}$ 運動模式、具 $\{1/G(\mathbf{y}_1)\}$ 及 $\{1/G(\mathbf{y}_2)\}$ 運動模式之不連續可動機構，以及嘗試利用相同的方法來合成一具有三種運動模式之不連續可動機構。並且於各個合成結果後討論少許的其他相似案例，會發現從交錯機構結果中扣除所有與組合機構重複之排列，加上已避免發生運動鏈之運動序列相同的可能，剩下的交錯機構並非全數皆能成功成為不連續可動機構。實際為不連續可動機構與否，仍需要經過詳細之模擬驗證分析而得知。



第五章 結論與未來展望

5.1 結論

本文應用位移李次群，對現有的不連續可動機構進行運動特徵逐一分解、模擬分析及歸納，找出造成此類機構之特殊現象的共同特徵，並依循這些共同特徵總結出可以合成不連續可動機構的流程。並於實例說明的部分提出了三種符合需求的合成案例，前兩類機構皆參照現有之不連續可動機構，各自訂定具有兩種合成目標及限制條件，依修正過後的合成流程，佐以位移李群理論及位移群的封閉性來處理機構合成、等效運動鏈替換、結果分析等作業。第三類機構則是利用相同的方法，合成出一具有三種合成運動目標的機構，而後亦有詳細地驗證各個案例之不連續可動性。對文獻[25]所提出的合成方法之修改在於，同樣經過改變接頭順序[19]來達成不連續可動的現象之後，所得到的交錯排列結果並非全數皆可成為不連續可動機構。然而，若要找出完全如設定目標所預期之機構，目前仍只能透過實際模擬及分析的結果方能得知。另外，此方法於運動鏈的安裝時沒有幾何上的限制，可用於所有接頭種類不改變的不連續可動機構，因此可逐步向設定三種目標運動模式的合成機構發展。

於第四章各個案例驗證後，提出些許不符合預期的機構。原則上當目標運動的自由度較高或較複雜時，原生機構所需的接頭數量就會較多，組合後就算有使用共同接頭，產生的組合機構也有一定的數量，而經過交錯排列後的機構更可能不計其數。因此容易出現分析及比對上的困難，也較容易有所疏失。基於以上原因，建議在進行合成時，可通過加入條件來減少機構數量，並使用電腦進行輔助，如此一來便能快速得到符合所需的不連續可動機構。



5.2 未來研究方向

關於不連續可動機構的合成方法，大致上已能順利的將擁有目標運動的機構合成出來，但若要完整的驗證此方法之合成結果，效率上仍有進步的空間。近年來，不連續可動機構之應用持續發展中，如：繼 Dai 之紙盒機構應用一舉成名後，多位學者致力於對不連續可動機構之摺紙(origami)藝術研究。

此外，本文所提出的合成實例，過程中為了更快速的得到合成結果，設置限制條件來使機構數量不會過度擴充。然而設定之限制條件並不是唯一，減少對機構的限制條件，或是更改限制條件的內容，可能可以合成出更多屬同一類型之不連續可動機構。亦可嘗試利用現有的不連續可動機構，直接結合一新的運動模式，然而於組合過程中之其他依據或新的判斷條件，將可能與本研究方法不同。

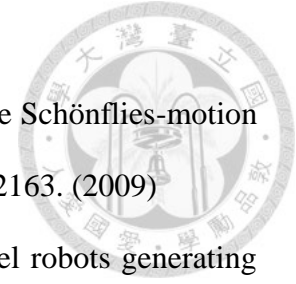
再者，對於擁有多自由度之運動模式的不連續可動機構，亦有值得探討的層面，可能會遇到的狀況在於，如何分辨該機構為純多自由度運動模式之不連續可動機構、具有無數個分歧點位置之不連續可動機構，或甚至只是連續可動機構，要藉由運動結果來辨別此三種機構類型，方法上尚未有明確的發展。而對於多運動模式之不連續可動機構，仍值得去探討由其他目標運動所構成的可能機構。

最後，觀察目前的多數不連續可動機構，仍可視為由連續可動機構中收斂而得。未來是否能發展出一不連續可動機構，不存在與其相關聯或相似的連續可動機構，另闢一種不連續可動機構之領域，亦可成為一大貢獻。


參考文獻

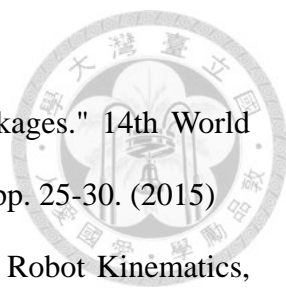


- [1] Hervé, J. M., "Analyse structurelle des mécanismes par groupe des déplacements." *Mechanism and Machine Theory* 13.4, pp. 437-450. (1978)
- [2] Hervé, J. M., "Intrinsic formulation of problems of geometry and kinematics of mechanisms." *Mechanism and Machine Theory* 17.3, pp.179-184. (1982)
- [3] Hervé, J. M., "The mathematical group structure of the set of displacements." *Mechanism and machine theory* 29.1, pp. 73-81. (1994)
- [4] Hervé, J. M., "The Lie group of rigid body displacements, a fundamental tool for mechanism design." *Mechanism and Machine theory* 34.5, pp. 719-730. (1999)
- [5] Hervé, J. M., "The planar-spherical kinematic bond: implementation in parallel mechanisms." online at <http://www.parallemic.org/Reviews/review013.html> (2003)
- [6] Meng, J., Liu, G., and Li., Z., "A geometric theory for analysis and synthesis of sub-6 DoF parallel manipulators." *Robotics, IEEE Transactions on* 23.4, pp. 625-649. (2007)
- [7] Lee, C. C. and Hervé, J. M., "Translational parallel manipulators with doubly planar limbs." *Mechanism and Machine Theory* 41.4, pp. 433-455. (2006)
- [8] Lee, C. C. and Hervé, J. M., "Cartesian parallel manipulators with pseudoplanar limbs." *Journal of Mechanical Design* 129.12, pp. 1256-1264. (2007)
- [9] Lee, C. C. and Hervé, J. M., "Type synthesis of primitive Schoenflies-motion generators." *Mechanism and Machine theory* 44.10, pp. 1980-1997. (2009)
- [10] Lee, C. C. and Hervé, J. M., "Uncoupled actuation of overconstrained 3T-1R hybrid parallel manipulators." *Robotica* 27.1, pp. 103-117. (2009)



- [11] Lee, C. C. and Hervé, J. M., "On some applications of primitive Schönflies-motion generators." *Mechanism and Machine Theory* 44.12, pp. 2153-2163. (2009)
- [12] Hervé, J. M. and Sparacino, F., "Structural synthesis of parallel robots generating spatial translation." *Proc. 5th Int. Conf. Advanced Robotics*, vol. 1, pp. 808-813 (1991)
- [13] 李聰慶, "以群論法合成新的五自由度並聯式機構", 國科會精簡報告(NSC 93-2212-E-151-012), 2005 年 7 月
- [14] Lee, C. C. and Hervé, J. M., "Generators of the product of two Schoenflies motion groups." *European Journal of Mechanics-A/Solids* 29.1, pp. 97-108. (2010)
- [15] 李聰慶, "以位移李次群合成 Homokinetic 聯軸機構", 國科會精簡報告(NSC 99-2221-E-151-016), 2011 年 7 月
- [16] Lee, C. C. and Lee, P. C., "Isoconstrained mechanisms for fast pick-and-place manipulation." *Proceedings 1st International Symposium on Geometric Methods in Robotics and Mechanism Research*, pp. 95-112. (1990)
- [17] Lee, C. C. and Hervé, J. M., "Intersection of Two 5D Submanifolds of the Displacement 6D Lie Group." *13th World Congress in Mechanism and Machine Science, Guanajuato, México*, pp. 19-25. (2011)
- [18] Lee, C. C. and Hervé, J. M., "Discontinuous mobility of one family of spatial 6R mechanisms through the group algebraic structure of displacement set." *Proc. 2002 ASME Des. Eng. Tech. Conf., DETC2002/MECH-34273, Montreal, Canada*, pp. 1-8. (2002)
- [19] Lee, C. C. and Hervé, J. M., "Discontinuously movable seven-link mechanisms via group-algebraic approach." *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 219.6, pp. 577-587. (2005)

- 
- [20] Lee, C. C. and Hervé, J. M., "A novel discontinuously movable six-revolute mechanism." Reconfigurable Mechanisms and Robots, 2009. ReMAR 2009. ASME/IFToMM International Conference on. IEEE, pp. 58-62. (2009)
- [21] Lee, C. C. and Hervé, J. M., "Discontinuously movable 8R mechanisms with an infinity of bifurcations." 12th IFToMM World Congress, Besançon (France), June18-21. (2007)
- [22] Li, Q. C. and Hervé, J. M., "Parallel mechanisms with bifurcation of Schoenflies motion." Robotics, IEEE Transactions on 25.1, pp. 158-164. (2009)
- [23] Lee, C. C. and Hervé, J. M., "A Discontinuously Movable Constant Velocity Shaft Coupling of Koenigs Joint Type." Advances in Reconfigurable Mechanisms and Robots I, pp. 35-43. (2012)
- [24] Lee, C. C. and Hervé, J. M., "Various types of RC/RC-like linkages and the discontinuously movable Koenigs joint." Mechanism and Machine Theory 96.2, pp. 255-268. (2016)
- [25] 羅子欽, "四類特殊機構不連續可動性分析", 碩士論文, 台灣大學機械系, 台北市, 台灣。(2014)
- [26] Yan, H. S. and Kang, C. H., "Configuration synthesis of mechanisms with variable topologies." Mechanism and Machine Theory 44.5, pp. 896-911. (2009)
- [27] Balli, S. S. and Chand, S., "Five-bar motion and path generators with variable topology for motion between extreme positions." Mechanism and Machine theory 37.11, pp. 1435-1445. (2002)
- [28] Zhang, L. P., Wang, D. L. and Dai, J. S., "Biological modeling and evolution based synthesis of metamorphic mechanisms." Journal of Mechanical Design 130.7, pp. 1-11. (2008)

- 
- [29] Lee, C. C. and Hervé, J. M., "The Metamorphic Bennett Linkages." 14th World Congress in Mechanism and Machine Science, Taipei, Taiwan, pp. 25-30. (2015)
- [30] Wohlhart, K., "Kinematotropic linkages." Recent Advances in Robot Kinematics, pp 359-368. (1996)
- [31] Galletti, C. and Fanghella, P., "Single-loop kinematotropic mechanisms." Mechanism and Machine theory 36.6, pp. 743-761. (2001)