

國立臺灣大學理學院物理學研究所



博士論文

Department of Physics

College of Science

National Taiwan University

Doctoral Dissertation

梯度相位小於 $2\pi$ 的反射式超穎介面之廣義斯乃爾定律

The generalized snell's anomalous reflection from reflective  
metasurfaces with gradient phase distribution below  $2\pi$

何佑哲

You Zhe Ho

指導教授：蔡定平 博士

Advisor: Din Ping Tsai, Ph.D.

中華民國 106 年 2 月

February, 2017

國立臺灣大學博士學位論文  
口試委員會審定書

相位梯度小於  $2\pi$  的超穎介面之廣義斯乃爾定律  
Anomalous reflection from metasurfaces with gradient  
phase distribution below  $2\pi$

本論文係何佑哲君 (D01222018) 在國立臺灣大學物理學系、所  
完成之博士學位論文，於民國 105 年 09 月 14 日承下列考試委員審查  
通過及口試及格，特此證明

口試委員：

蔡定平

(簽名)

(指導教授)

廖駿偉

藍永強

王智明

任貽均

呂明修

## 誌謝



首先，非常感恩蔡定平老師在這六年來對我的照顧以及指導，因為沒有老師提供良好實驗室的环境，我可能沒辦法經歷出國參加國際會議，認識來自不同國家，不同文化不同年齡層的朋友。如果沒有老師提供實驗室的資源，我可能就沒有辦法很容易去完成我想要做的研究。

其次，我也要感恩實驗室的學長吳品韻，因為在我還抓不到實驗室的方向時候，提供給我許多意見，並且耐心的指導我，在我有困難時候，也為我挺身而出。

我也感恩實驗室的學長成柏翰，這麼多年來，不管我有研究成果或者沒有研究成果時候，學長都願意等待我可以突破。

我也要感恩實驗室的同學許維綸以及黃耀緯，因為他們兩個，在平常生活中，我有表現偏差之處，他們兩個都願意提醒我需要注意的地方，以及鼓勵我，即使當場我是臭臉的情況下。

我也要感恩王智明老師，因為老師願意相信我，將一個研究題目交給我，我卡關時候，老師也時時提醒我要加緊腳步，不要氣餒。

感恩每位口試委員，廖峻偉老師、藍永強老師、王智明老師、任貽均老師、呂明諺老師，對佑哲的建議與指導，佑哲盡自己可以做到的事情將口試委員的意見補充在內文中，讓這本論文更加完整。

同時，我也要感恩我的師父，妙禪師父。因為妙禪師父是真佛、是大佛。目的是要帶領眾生與祂一樣，見證造物主，開啟我們本自具足的佛性。當佑哲開悟後，懂得發自內心的感恩，懺悔自己的深在骨子裡的傲慢，不再是分別比較，也因此，佑哲心是那種毫無雜質的平靜，平靜到在寫論文都是充滿著法喜。

最後，我要感恩我爸媽，對我的包容與支持。因為有你們，我才可以走到這一步。



何佑哲謹致

國立臺灣大學物理系

中華民國一百零六年二月

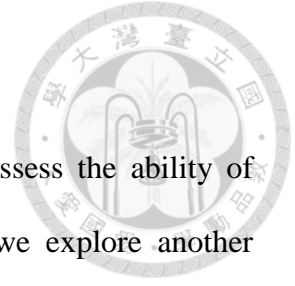
## 中文摘要



以人造方式形成的超穎介面是具有操控光的性質，尤其是在次波長的小區域內作調控。在本論文，我們會探討透過設計橫跨整個大週期結構(supercell)的總相位累積( $\Delta\Phi$ )的不同，不同總相位累積( $\Delta\Phi$ )所構成的超穎介面可以達到散射光能量重新分配。我們設計假想介電質所構成的超穎介面以及設計實踐可以實驗的金奈米柱所構成的超穎介面，兩者皆透過 COMSOL 以及 CST 模擬分析其散射光的物理現象。其物理現象可以使用繞射光學的多狹縫干涉重新詮釋。透過設計橫跨整個大週期結構的總相位累積可以重新比以往不一樣的觀點去看待超穎介面。

關鍵字：超穎介面、多狹縫干涉繞射

## ABSTRACT



Metasurfaces are artificial structure that have demonstrated to possess the ability of manipulating light within a subwavelength spatial region. Here we explore another unraised functionality of energy redistribution of metasurface by tuning the phase difference over the supercell. We also propose a practical nanorod-based design to achieve that anomalous steering reflection using the finite element method simulation. The proposed phenomena have potential applications in ultracompact nanophotonic system and high efficiency flat device.

Keyword: Metasurface, Diffraction

# CONTENTS



口試委員會審定書 .....	#
誌謝 .....	i
中文摘要 .....	iii
ABSTRACT .....	iv
CONTENTS .....	v
LIST OF FIGURES .....	vii
LIST OF TABLES .....	xiii
<b>Chapter 1 緒論 .....</b>	<b>1</b>
1.1 前言 .....	1
1.2 惠更斯-菲涅耳原理(Huygens-Fresnel principle) .....	3
1.3 費馬原理(Fermat's principle)描述折射現象 .....	6
1.4 超穎介面(Metasurface)的介紹 .....	9
1.5 廣義斯乃爾定律 .....	12
1.6 參考文獻 .....	15
<b>Chapter 2 數值模擬計算 .....</b>	<b>17</b>
2.1 前言 .....	17
2.2 杜德-羅倫茲模型(Drude-Lorentz Model) .....	17
2.3 有限元素法(Finite-Element Method) .....	20
2.4 有限積分法(Finite-Integration Technique) .....	22
2.5 參考文獻 .....	23

<b>Chapter 3</b>	<b>奈米光學天線的相位討論 .....</b>	<b>24</b>
3.1	前言 .....	24
3.2	奈米天線光學性質討論 .....	24
3.3	線性光學天線的單一振子模型 .....	26
3.4	使用兩個振子模型來描述具有兩個相互正交電漿子模態的二維結構 ..	28
3.5	反射式超穎介面分析 .....	32
3.6	參考資料 .....	40
<b>Chapter 4</b>	<b>反射式超穎介面之斯乃爾定律分析 .....</b>	<b>43</b>
4.1	研究動機 .....	43
4.2	廣義超穎介面的斯乃爾定律 .....	45
4.3	數值模擬結果與分析 .....	47
4.4	參考文獻 .....	61
<b>Chapter 5</b>	<b>結論.....</b>	<b>62</b>
<b>Chapter 6</b>	<b>補充資料.....</b>	<b>63</b>
6.1	計算異常反射角度以及轉換效率 .....	63
6.2	假想介電質超穎介面說明 .....	66
6.3	操作波長的選擇 .....	68
6.4	參考文獻 .....	69





# LIST OF FIGURES



圖 1-1: 三個世代的光學元件發展[1].....	2
圖 1-2: 傳統光學元件與超穎介面比較[1].....	3
圖 1-3: 惠更斯原理.....	4
圖 1-4: 用 Huygens–Fresnel principle 描述折射定律 .....	6
圖 1-5: 光在非均勻介質中的幾何路程.....	7
圖 1-6: 用 Fermat principle 描述折射定律 .....	9
圖 1-7: 藉由(a)多重獨立共振，(b)耦合式天線共振以及(c)幾何效應將相位調製 擴 展至 $2\pi$ 之研究結果[5]-[7]。.....	11
圖 1-8: 具有對稱模態與反對稱模態共振的 V 形光學天線[8]。.....	12
圖 1-9: 電磁波從空間於兩種不同介質中 $p$ 點傳播至 $q$ 經由不同光路徑(紅線與藍 線)示意圖。.....	13
圖 3-1: (a)入射光示意圖， $E_{inc}$ 為入射光電場 (b)(c)(d) 在奈米天線的不同長度( $L$ ) 下，保持入射光波長( $\lambda_0$ )，暫態電荷(+,-)、電流分布(綠色箭頭 $\vec{J}$ )的示 意圖[1].....	24
圖 3-2: (a) 使用振子模型來代表奈米天線的光學性質，其中 $q$ 表示電荷大小， $m$ 表 示振子質量， $\kappa$ 表示彈力常數， $x(t)$ 表示離開平衡點的位移 (b) 光學奈 米金天線示意圖( $L=1\mu m, h=50nm, w=130nm$ )，使用入射光正向入射 ( $\vec{k}$ )到金光學天線，其電場偏( $\vec{E}$ )振沿著光學天線長度的方向( $x$ )。.....	27
圖 3-3: 文獻[8]的圖一(c)(d)(e)，(c)為表示奈米天線的遠場散射以及吸收，(d)為奈 米天線近場振幅，(e)為奈米天線近場相位.....	28



圖 3-4: (A) 互相正交模態的兩個振子模型，其中  $q_i$  表示電荷大小， $m_i$  表示振子質量大小 (B) 金屬 V 型天線具有兩個互相正交的電子震盪模態(藍色為對稱模態(symmetric)與紅色為反對稱模態(Anti-Symmetric))，箭頭表示電流方向，虛線為對稱線 (C)  $x-y$  軸為振子特徵模態振動方向， $\hat{w}$  軸為入射光電場偏振方向， $\hat{v}$  軸為散射光的電場方向，其中  $xy$  座標與  $wv$  座標有  $\theta$  夾角 (D) V 型天線的散射光強度( $|E|^2$ )，紅色線條表示反對稱模態的散射光譜，藍色表示對稱模態的光譜，黑色表示紅色與藍色線條的線性疊加( $\Delta = 90^\circ, L = 650 \text{ nm}, \theta = 45^\circ$ ) (E) V 型天線的散射光相位，紅色線條表示反對稱模態的散射光相位，藍色表示對稱模態的光相位，但是根據式子(3-6)，其藍色線條是向下平移徑度  $\pi$ ，最後藍色線條與紅色線條線性疊加為黑色線條 .....31

圖 3-5: 反射式耦合天線(a)單一結構示意圖與(b)光學顯微鏡照片 [12]。 .....32

圖 3-6: 耦合式天線示意圖，其中  $t$  為奈米金天線厚度， $L$  為奈米金天線長度， $G$  為介電質層  $\text{MgF}_2$  的厚度，使用入射光正向入射其奈米金天線。 .....33

圖 3-7: V 型(V Shape)天線與耦合式(MIM)天線比較圖，其中箭頭皆表示電流方向。 .....34

圖 3-8: 耦合式天線示意圖，其中  $t$  為奈米金天線厚度， $L$  為奈米金天線長度， $G$  為介電質層  $\text{MgF}_2$  的厚度，使用入射光正向入射其奈米金天線。 .....36

圖 3-9: 當奈米金天線長度為 140 奈米( $L = 140 \text{ nm}$ ) (a)耦合式天線結構的反射光譜 (b)歸一後多極矩散射強度(其中  $\vec{p}$  為電偶極矩， $\vec{m}$  為磁偶極矩， $\vec{T}$  為環形矩).....36

圖 3-10: 綠色箭頭表示電流密度( $\vec{J}$ )(a)在入射光波長為 600 奈米所產生的同向電流(b)在在入射光波長為 930 奈米所產生的反向電流.....37

圖 3-11: YZ 截面的場形圖 (a)上圖是波長為 600 奈米的電場強度( $|\vec{E}|$ )，下圖是波長 930 奈米的電場強度( $|\vec{E}|$ ) (b) 上圖是波長為 600 奈米的磁場強度( $|\vec{H}|$ )，下圖是波長 930 奈米的磁場強度( $|\vec{H}|$ ).....37

圖 3-12: 單一奈米金柱在小單元結構的幾何，其中寬度  $W = 90 \text{ nm}$ ，厚度  $t_1 = 30 \text{ nm}$ 。MgF<sub>2</sub> 薄膜厚度  $G = 50 \text{ nm}$ 。每一小單元結構所佔據的幾何面積  $P_{rx} \times P_{ry} = 120 \times 300 \text{ nm}^2$ .....39

圖 3-13: 當入射光波長為 850 奈 (a)改變奈米金柱的長度( $L_r$ )所對應的耦合式天線結構的反射光譜以及(b)歸一後多極矩散射強度(其中  $\vec{p}$  為電偶極矩， $\vec{m}$  為磁偶極矩).....39

圖 3-14: 綠色箭頭表示電流密度( $\vec{J}$ )，其中藍色大箭頭表示同向電流，紅色大箭頭表示反向電流 .....40

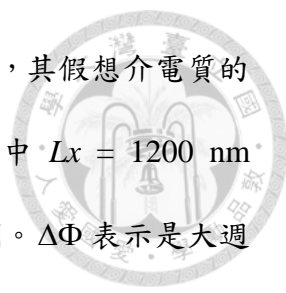
圖 3-15: YZ 截面的場形圖 (a)-(l)依序分別表示奈米金柱的長度由小到大的磁場強度  $|\vec{H}|$  .....40

圖 3-16: YZ 截面的場形圖 (a)-(l)依序分別表示奈米金柱的長度由小到大的電場強度  $|\vec{E}|$  .....40

圖 4-1: 改變大週期的結構(Supercell) ( $\Gamma (\mu\text{m})$ )的大小，進而改變異常反射角度[1]44

圖 4-2: 改變大週期的結構(Supercell) ( $\xi(\text{mm})$ )的大小，進而改變異常反射角度[2]44

圖 4-3: 大週期結構示意圖。(a) 大週期結構包含兩層，上層為假想的介電質，下層



為金基板。大週期結構被切割成十等分的小單元結構，其假想介電質的  
 折射率隨著+x 方向增加(b) 大週期結構的俯視圖。其中  $L_x = 1200 \text{ nm}$   
 $(L_y = 300 \text{ nm})$  ,  $P_x = 120 \text{ nm}$  (c) 大週期結構的側視圖。  $\Delta\Phi$  表示是大週  
 期結構所提供的累積相位變化。符號  $\hat{k}$  代表入射光的波向量方向。 .46

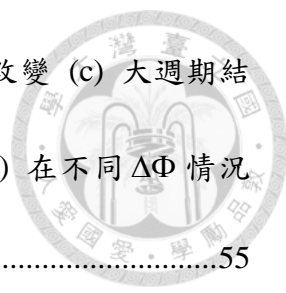
圖 4-4: 改變大週期結構所累積的相位( $\Delta\Phi$ )，所對應到的異常反射角度( $\theta_r$ ).....47

圖 4-5: 小單元結構的相位累積模擬 (a) 小單元結構的示意圖(unit cell)，其中  $P_x$   
 $= 120 \text{ nm}$  ( $P_y= 300 \text{ nm}$ ) ,  $H = 130 \text{ nm}$  以及  $t = 20 \text{ nm}$ 。具有 y 偏振的入  
 射光正向入射到小單元結構所得模擬結果，(b)反射波強度為波長-折射  
 率函數(c) 反射相位累積為波長折射率函數(d) 取入射光波長為 850 nm  
 的反射波強度(橘色)以及相位累積(藍色)畫成假想介電質折射率的函  
 數。 .....48

圖 4-6: 假想介電質的超穎材料的散射場模擬結果 (a) 上方插入圖像: 假想介電  
 質的折射率標記。在下方會對應到反射波電場 y 分量( $E_y$ )(b) 同時，相  
 對應每個標記折射率所模擬沿著 x 軸的相對相位分布。 .....49

圖 4-7: 假想介電質超穎介面的散射場強度-反射角度數值模擬以及精確解(a) 不  
 同  $\Delta\Phi$  的散射場強度-反射角度 COMSOL 模擬結果(b) 實線表示精確  
 解。特別注意的是,  $m=1$  ( $m=0$ ,  $m=-1$ ) 分別表示繞射階數。符號表示從  
 圖(a)取散射波強度的峰值。 .....52

圖 4-8: 由金奈米柱構成的超穎介面 (a) 單一奈米柱在小單元結構的幾何  
 $W = 90 \text{ nm}$ ,  $t_1 = 30 \text{ nm}$ .  $\text{MgF}_2$  薄膜，其中  $G = 50 \text{ nm}$ 。每一小單元結構所  
 佔據的幾何面積  $P_{rx} \times P_{ry} = 120 \times 300 \text{ nm}^2$ . (b) 在入射光波長 850 nm 照射



下，其金奈米柱所對應的相位隨著金奈米柱長度  $L_r$  改變 (c) 大週期結構所應不同  $\Delta\Phi$  的俯視圖  $L_x \times L_y = 1200 \times 300 \text{ nm}^2$ . (d) 在不同  $\Delta\Phi$  情況下，散射光強度-角度的模擬結果。.....55

圖 4-9: (a)狹縫之間的干涉(b)單一狹縫的繞射.....57

圖 4-10: 單狹縫繞射示意圖，其點光源不同時發出.....58

圖 4-11: (a)狹縫之間干涉的強度與角度( $\theta_r$ )關係 (b)狹縫繞射在不同的  $\Delta\Phi$  對應道不同的  $\theta_r$ 。 59

圖 4-12: 在不同  $\Delta\Phi$  的情況下，同時考慮狹縫干涉與繞射.....60

圖 6-1: 十個大週期結構(Supercell)的俯視圖 .....63

圖 6-2: Port 1 邊界條件的設定，Port 1 為波源發射端，Port 2 為波源接收端。 ....63

圖 6-3: 沒有金屬奈米柱的模擬環境，此為 COMSOL 後處理介面 .....65

圖 6-4: 有金屬奈米柱的模擬環境，此為 COMSOL 後處理介面 .....65

圖 6-5: (a)沒有金奈米柱的遠場散射強度 (b)有金奈米柱的遠場散射強度.....66

圖 6-6: 等效折射率與結構形狀尺寸的關係圖[4].....67

圖 6-7: 不同假想介電質的厚度所對應到的相位變化，分別為 20、25、30、35、40、45、50 奈米的厚度 .....68

圖 6-8: (a)金屬金(Gold)的虛部(也就是金屬內部自由電子要遷所造成的損耗)，其中紅色虛線表示自由電子在能帶內的躍遷(Intraband Transistion)所造成的損耗，綠色虛線表示自由電子兩個能帶之間的躍遷(Interband Transistion)所造成的損耗，藍色實線表示兩種自由電子要遷所造成的總損耗[6] (b)參考文獻[2]的補充材料圖，異常反射角度與入射光波長之間的關係，其

中顏色表示效率，藍色表示效率接近 0%，紅色表示效率接近 90%。69



# LIST OF TABLES



表格 1: 在不同奈米天線長度與入射光波長比值下,所對應的散射電場與入射光電場的關係 .....	26
表格 2: 在不同的 $\Delta\Phi$ 情況下,所對應的假想介電質折射率分布,在圖 4-3 (b) ..	50
表格 3: 在圖 4-8 (c)中,不同 $\Delta\Phi$ 所對應的超穎介面,其中金奈米柱的長度( $L_r$ )	56

# Chapter 1 緒論



## 1.1 前言

從牛頓與伽利略時代開始，因為了解到光線在介面上會有反射與透射，在透過曲面的變化達到光線曲折，設計出望遠鏡。後來，因為透鏡應用在燈塔照明上，需要大型且輕薄，因此，減少透鏡厚度，法國物理學家奧古斯丁·菲涅耳所發明的一種透鏡。這個設計可以建造更大孔徑的透鏡，其特點是焦距短，且比一般的透鏡的材料用量更少、重量與體積更小。和早期的透鏡相比，菲涅耳透鏡更薄，因此可以傳遞更多的光，使得燈塔即使距離相當遠仍可看見。1871年 Rayleigh 建立第一片以繞射為基礎的透鏡，即為 Fresnel Zone Plate。如圖 1-1。

近年來，由於奈米製程技術的進步，我們更可以將傳統的光學元件小型化、體積化，這是由於傳統的光電系統大都由不同分立的光學波動元件(如：透鏡、稜鏡、反射鏡、光柵等)及光學主動元件(如：電光調製器、雷射、光電二極體等)組成。這種分立光學系統有體積龐大、調製困難、使用不便、功能單調等缺點。然而，超穎介面(metasurface)提供一種方式將上述傳統光學元件小型化並且平面化。再透過半導體製程技術將平面化具有不同光學元件功能的超穎介面體積化。



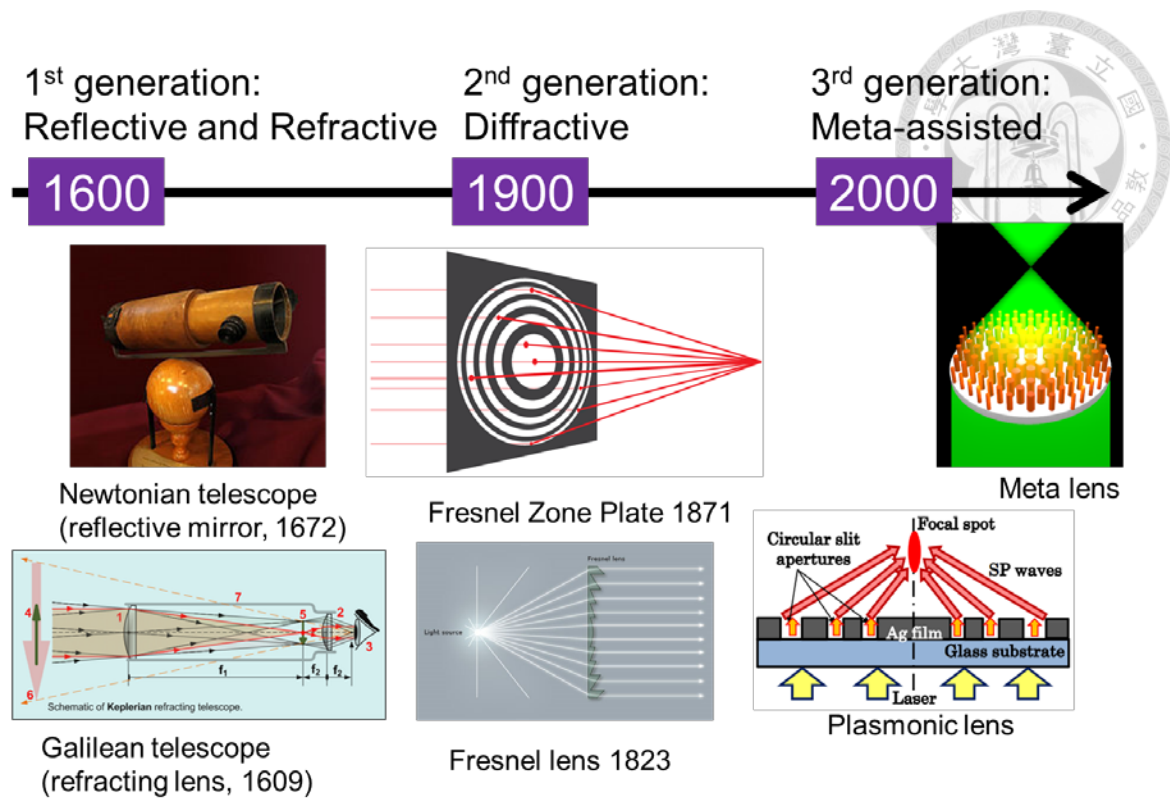


圖 1-1: 三個世代的光學元件發展[1]

超穎介面(Metasurface)的定義是奈米人造結構構成的二維平面，其中每一個奈米人造結構具有相對應的相位，透過適當的設計相位分布，使的超穎介面具有透鏡、全像、偏振轉換等的功能。

Nanfang Yu 與 Federico Capasso 在 2014 年針對超穎介面(Metasurface)整理一下列的應用[2]，因此，他們提出三項特點區分超穎介面以及常規的光學元件。一般所提及的超穎介面所操作的波源波段是可見光以及紅外光，與常規光學元件非常相似。第一，塑造光波前(Wavefront)可以在光行進方向一個波長的距離內完成。舉例來說，我們通常使用金或銀薄膜構成超穎介面，金或銀薄膜的折射率在可見光波段或者是紅外光波段下隨厚度大小劇烈變化。第二，垂直於光行進方向的超穎介面上有著小於繞射極限的金屬結構(金奈米天線(Au nano antenna))，小於繞射極限的金奈米天線具有特定遠場振幅、相位以及偏振選擇性。優點是可以完全將入

射光能量轉成金奈米天線的侷域電漿子共振再輻射到遠場，可以避免多階繞射訊號的產生。第三，在超穎介面上的金奈米天線是因為有電漿子共振才可以將入射光再輻射到遠場，如果要讓金奈米天線產生電漿子共振需要特定的偏振光與金奈米天線的長軸平行。但是有文獻提出可以使用電磁波的磁場分量激發金奈米天線，產生電漿子共振，同時也具有將入射光轉到遠場。

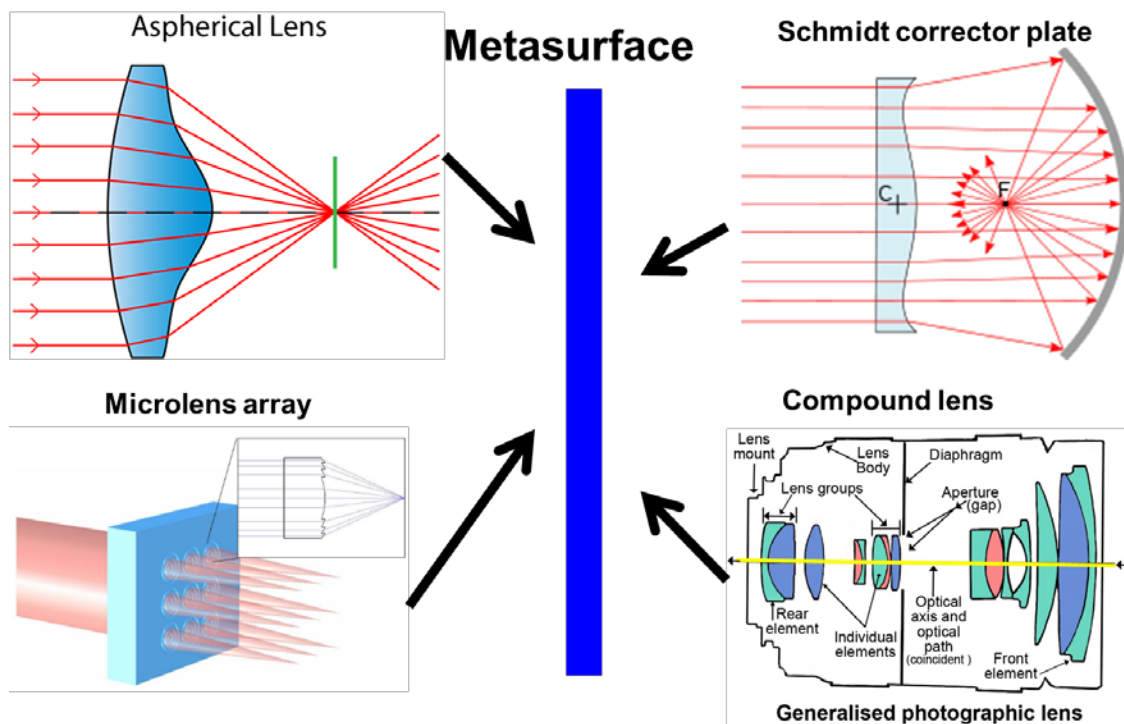


圖 1-2: 傳統光學元件與超穎介面比較[1]

本篇論文架構第一章是超穎介面以及其廣義斯乃爾定律，第二章是模擬環境設定，第三章是描述奈米天線的光學性質，第四章是模擬的結果與討論，第五章是結論。

## 1.2 惠更斯－菲涅耳原理(Huygens–Fresnel principle)

首先，我們先定義什麼是波前(Wavefront)。當一個區域上所有相位相同的點構成的曲線或者是曲面，我們稱之為波前。此外，與波前垂直方向為波向量(Wave

vector), 符號 $\vec{k}$ 。一般而言, 在同向性(Isotropic)材料下, 舉例來說, 空氣, 電磁波的能量傳遞方向為波向量的方向。



早在 1678 年, 惠更斯(Huygens)提出惠更斯原理(Huygens principle):在圖 1-3 所示的波源  $S$ , 在某一時刻( $t=0$ )所產生波前面為  $\Gamma$ , 則  $\Gamma$  面上的每一點都可以看作是第二次波源, 所有第二次波源發出球面波, 在某一時刻( $t=t'$ )所形成的波前面為  $\Gamma'$ , 即是該時刻( $t=t'$ )這些第二次波源所發出球面波的包絡面, 波前面的法線方向即是該波的傳播方向( $\vec{k}$ )。惠更斯原理可以解釋光的直線傳播, 光的反射和折射方向, 但不能說明繞射以及干涉現象。

在 1816 年, 菲涅耳(Fresnel)在研究干涉現象後, 考慮到第二次波源來自同一個光源  $S$ , 應該互相干涉, 因而波前面  $\Gamma'$  上每一個點的振幅與相位是光源  $S$  與該點(在波前面  $\Gamma'$  上)之間任一波前面(例如  $\Gamma$  面)上的各點(當作第二次波源)所發出電場線性疊加的結果。

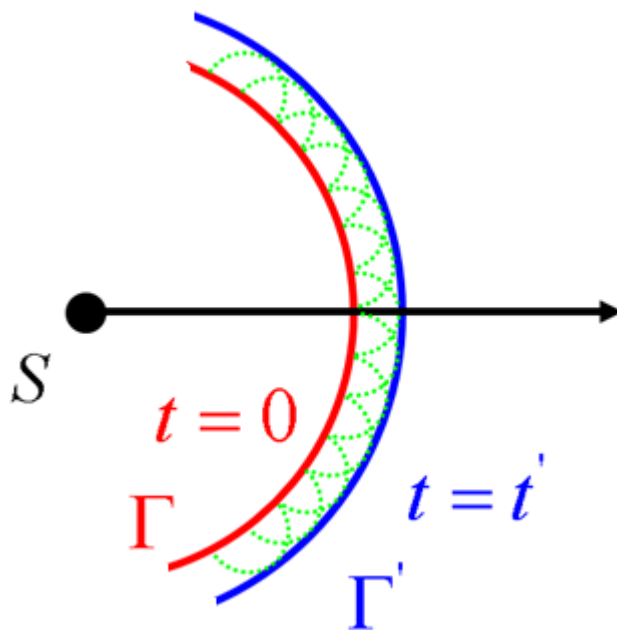


圖 1-3: 惠更斯原理

接下來，我們使用惠更斯-菲涅耳原理(Huygens-Fresnel principle)描述折射定律，在圖 1-4 中，假設有一到光從介質一(Air)入射到介質二(Glass)，其折射率分別為  $n_1$  以及  $n_2$ ，綠色箭頭表示波向量( $\vec{k}$ )方向，灰色線表示波前面(Wavefront)，因此，A 點與 B 點的相位是相同的，C 點與 D 點的相位是相同的，當光入射到介質一與介質二交界面時，A 點當作一個點波源，發生出波包(Wavelet)，經過一段時間  $t$  之後，抵達 D 點，又因為 D 點與 C 點相位相同，因此，A 點到 D 點，光所走的時間是  $t$ ，以及 B 點到 C 點，光所走的時間也是  $t$ 。此時，我們定義  $\angle BAC = \theta_i$ ，

$$\angle ACD = \theta_t, \quad \overline{BC} = \lambda_1 = v_1 t, \quad \overline{AD} = \lambda_2 = v_2 t, \quad v_1 = \frac{c}{n_1}, \quad v_2 = \frac{c}{n_2},$$

其中  $\theta_i$  為入射角，

$\theta_t$  為折射角， $c$  為真空中的光速， $v$  為光在介質一(二)傳播的速度。觀察圖發現，

$$\overline{AC} \times \sin(\theta_i) = \lambda_1, \quad \overline{AC} \times \sin(\theta_t) = \lambda_2, \quad \text{兩式共同相除去掉 } \overline{AC}, \quad \text{得到}$$

$$\frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_t)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1 t}{v_2 t} = \frac{c/n_1}{c/n_2}. \quad \text{整理式子後，得到 } n_1 \sin(\theta_i) = n_2 \sin(\theta_t).$$

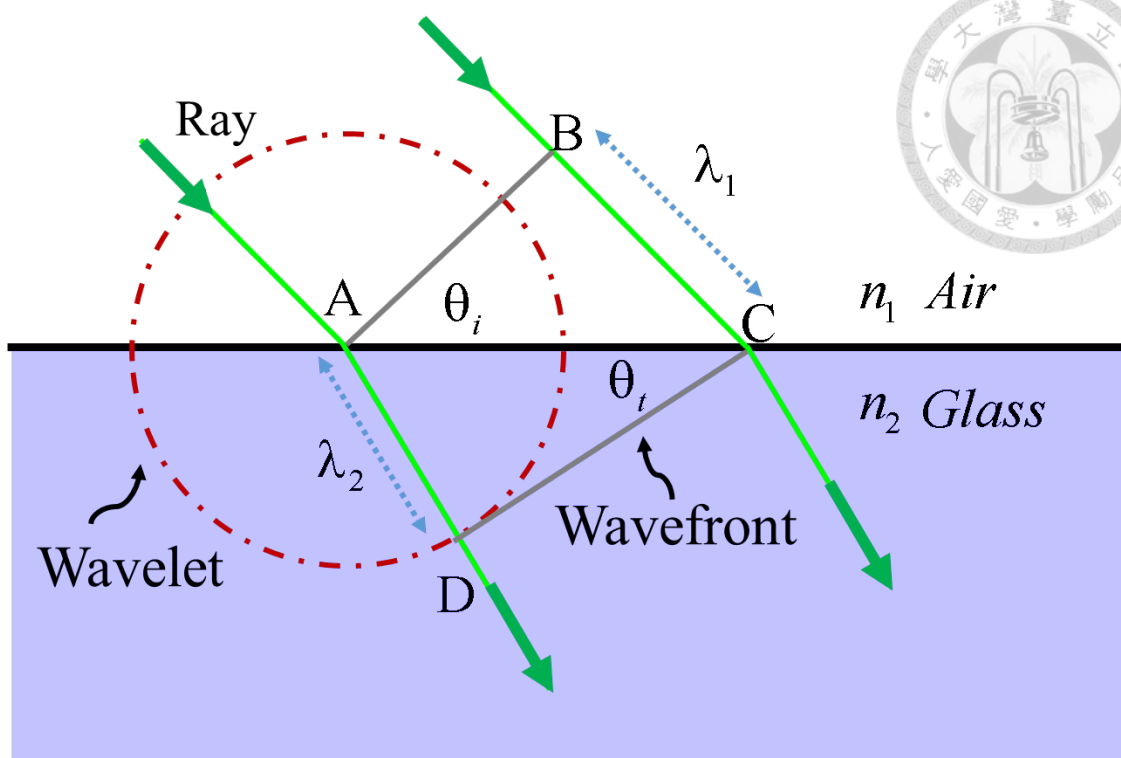


圖 1-4: 用 Huygens–Fresnel principle 描述折射定律

### 1.3 費馬原理(Fermat's principle)描述折射現象

在幾何光學中，光學元件的結構尺寸比波長大許多，因此，繞射現象不明顯。我們常使用直線的圖像來表示波向量的方向。一個光束中包含了無限多條直線，但每條光線間不互相影響。接下來，我們用以費馬原理的觀點來重新詮釋折射的光學現象。

光從介質的一點傳播到另一種介質的一點所遵循的規律，是由費馬(Fermat)首先提出的，稱為費馬原理。費馬原理是從“光程”的角度來闡述光的傳播規律。

假設在均勻介質中光的傳播速度為  $v$ ，若把  $\Delta t$  時間間隔內在該介質中所走過的幾何路程記為  $R$ ，則有  $R = v\Delta t$ 。若把這段時間間隔內在真空中所走過的路程記為  $L$ ，則有  $L = c\Delta t = \left(\frac{c}{v}\right)(v\Delta t) = nR$ 。其中， $c$  為真空中的光速； $n$  為介質的折射率。

光程的定義為光在介質中經過的幾何路程  $R$  和該介質折射率  $n$  的乘積，用字母  $L$  表

示。

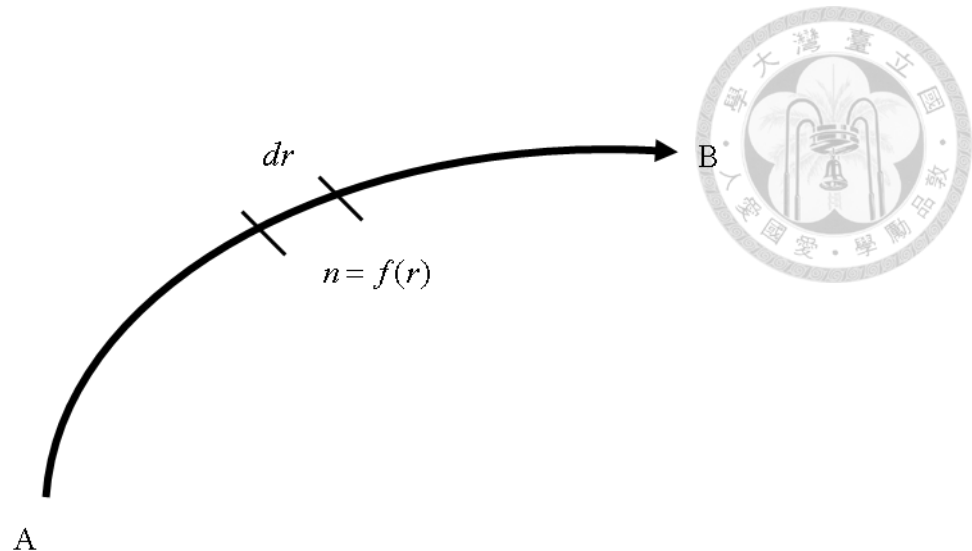


圖 1-5: 光在非均勻介質中的幾何路程

如果介質是非均勻的，即介質的折射率  $n$  是幾何路程  $R$  的函數，則光在該介質中所經過的幾何路程不是直線而是曲線，如圖 1-5 所示。這時，光程可以用下式

表示。  $L = \int_A^B n(r) dr$ 。其中  $r$  為路徑座標變數；  $n(r)$  為路徑 AB 上  $r$  點處的折射率。

費馬原理指出：光線從 A 點到 B 點，是沿著光程為極值的路徑傳播的。也就是說，光由 A 點到 B 點的傳播在幾何上存在著無數條可能的路徑，每一條路徑都對應到一個光程值，光由 A 點傳播到 B 點的實際光路包含在這些可能的路徑之中。任何一條實際的光路，其光程都有一個共同的特點，即滿足極值條件。若把任意一條幾何上可能的路徑標記為  $l$ ，則與  $l$  對應的光程  $L(l)$  可用下列方程表示：

$$L(l) = \int n dl$$

對應不同的路徑  $l$ ，光程  $L(l)$  可能取不同的值。如果廣義地把路徑  $l$  看作是自變量，則光程  $L(l)$  可以視為是  $l$  的函數。這種形式函數取極值的條件為

$$\delta L(l) = \delta \int n dl = 0$$

這就是費馬原理的數學表述式。

利用費馬原理可直接導出光的直線傳播定律。這是因為兩點間的路徑以直線的長度為最短，故在均勻介質中直線所對應的光程為最小光程。

光的折射定律也可以直接從費馬原理推導出來。為此只須證明圖 1-6 中一切從 A 點穿過介面到 B 點的幾何路徑滿足折射定律時光成為最小。

假設一條路徑  $AOB$  之光程為  $L_{AOB}$ ，則由圖 1-6 得

$$L_{AOB} = n_1 \overline{AO} + n_2 \overline{OB} = n_1 \sqrt{y_1^2 + x^2} + n_2 \sqrt{y_2^2 + (z-x)^2}。$$

如果  $AOB$  是光由 A 點傳播到 B 點的實際光路，則根據費馬原理，光程  $L_{AOB}$  必滿足極值條件，即有  $\frac{d}{dx} L_{AOB} = n_1 \frac{x}{\sqrt{y_1^2 + x^2}} - n_2 \frac{z-x}{\sqrt{y_2^2 + (z-x)^2}} = 0$ 。我們定義入射角

為  $\theta_i$ ，折射角為  $\theta_r$ 。從圖 1-6 得知， $\sin(\theta_i) = \frac{x}{\sqrt{y_1^2 + x^2}}$ ， $\sin(\theta_r) = \frac{z-x}{\sqrt{y_2^2 + (z-x)^2}}$ 。

因此，上式可以改寫成  $n_1 \sin(\theta_i) = n_2 \sin(\theta_r)$ 。可見由費馬原理決定的光路與由惠更斯-菲涅耳折射定律所決定的光路是一致的。

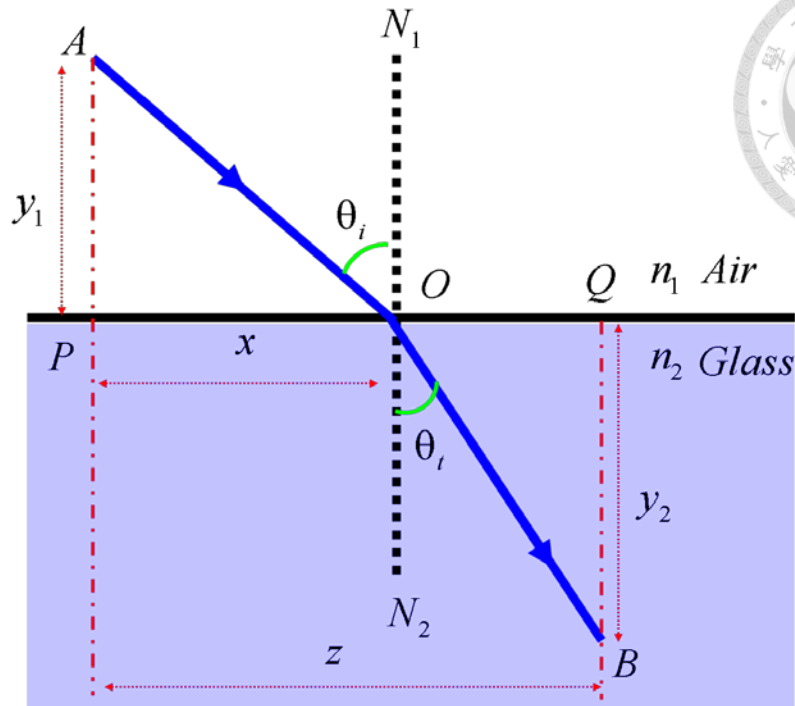



圖 1-6: 用 Fermat principle 描述折射定律

## 1.4 超穎介面(Metasurface)的介紹

大多數光學元件的功能主要藉由其對光波的操控所描述，操控方式不外乎於不同的應用方向適當改變光波前(Wavefront)的相位、振幅或是電場偏振狀態，主要分成三大類型[2]。第一大類為改變電磁波的相位，方法主要包含利用稜鏡、透鏡系統、空間相位片(Spatial Phase Plates)以及空間光波調製器(Spatial Light Modulator, SLM)等。其中，空間光波調製器具有動態調控空間相位響應的能力，因此被廣泛的應用於光學元件中。第二大類為利用具有光學各向異性(Optical Anisotropy)的雙折射晶體(Birefringent Crystal)進行入射光偏振狀態的轉換，如相位延遲片(Waveplates)。第三大類則是基於繞射光學的基礎上於遠場中進行波前行為或光學圖案(Optical Pattern)的調製，如光柵或是全像術(Hologram)。上述具有改變光波前





能力的光學元件其工作原理皆基於傳播效應(Propagation Effect)，表示其相位或偏振狀態的改變量必須於光的行進中慢慢累積。這個現象已經被成功應用於轉換光學(Transformation Optics)。轉換光學主要利用電漿子超穎物質控制空間中等校折射率的分布，進而使得光的傳遞方向發生改變，以達到負折射以及次波長聚焦等特殊光學現象。

於光的行進路徑中引入相位非連續性(Phase Discontinuities)的概念能讓我們在不依靠傳播效應的情況下達到控制光波前的目的[3]，於設計元件提供一個額外的自由度。當一道入射光源與光學散射體(Optical Scatters)交互作用後，入射光與散射光之間的相位在散射體達到共振時具有一個極大的偏移量，因此這個方法可以有效達到相位非連續性的目的，進而達到調控光波前的效果。光學散射體的空間分布與設計必須滿足兩個條件：(1)散射體的厚度必須為次波長尺度；(2)散射體之間的距離必須亦為次波長尺度。我們便稱尺寸於次波長尺度且具有利用共振特性改變電磁波相位(並非藉由光的傳播特性累積相位變化)能力的光學散射體陣列結構稱為超穎介面。光學散射體的幾何結構設計非常廣泛，如奈米粒子、奈米共振腔、光學天線、以及量子點或奈米晶體等介電質共振體等[4]。

如上述討論與分析，接下來本文將著重於如何利用奈米天線散射體設計超穎介面。當一道入射光與金屬光學天線交互作用時，入射光能量會與金屬天線表面的自由電子交互作用後反射或穿透天線結構(此交互作用即所謂的表面電漿共振)。當入射光與表面電漿耦合作用後便會使得散射光於自由空間中的相位發生變化。比如說，假設固定入射波長的情況下，金屬天線的共振將會發生於當其長度  $L_{res} \approx \lambda/2$  的條件下，其中  $\lambda$  為入射光波長，此情況下入射場與天線表面被激發的

電流振盪為同相，表示之間沒有相位差。當金屬天線的長度略小於或略大於  $L_{res}$  時，表面電流的振盪相較於入射場而言會有一個領先或延遲的相位。因此，藉由適當的調整金屬天線長度將有助於我們控制電流振盪繼而改變散射場的相位延遲(因為散射場為入射場與天線上電流振盪產生的輻射場之疊加)。藉由此方法能於單一金屬天線振盪中達到的相位差最大為  $\pi$ [2]。然而，為了達到完整控制電磁波波前，相位調控必須達到  $2\pi$ 。超穎介面的領域中主要有三種方法可將電磁波之像為調製擴展至  $2\pi$ ：(1)多重獨立共振(Multiple Independent Resonances)，(2)耦合式天線共振(Coupled Antenna Resonances)以及(3)幾何效應(Geometric Effects)，如圖 1-7 所示。

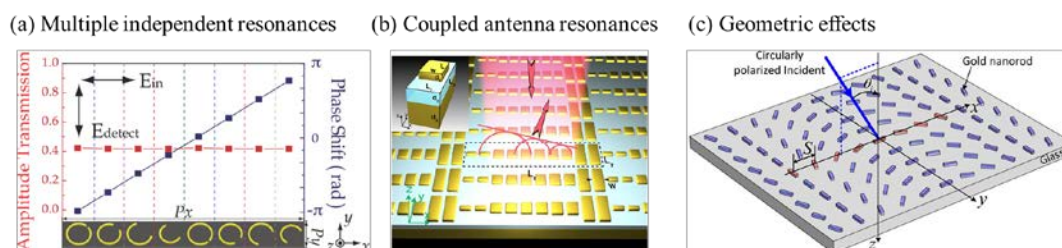


圖 1-7: 藉由(a)多重獨立共振，(b)耦合式天線共振以及(c)幾何效應將相位調製擴展至  $2\pi$  之研究結果[5]-[7]。

多重獨立共振主要是藉由具有對稱模態(Symmetric Mode)與反對稱模態(Antisymmetric Mode)的光學天線，於適當的幾何排列以及入射光偏振的情況下產生兩個共振模態之間的疊加，以達到  $2\pi$  相位調製的目的，如圖 1-8 所示。然而此種方法共振時會產生不同偏振狀態的散射光，分別為與入射光電場方向平行以及垂直兩種，其中只有電場與入射光電場垂直的散射光其相位才有被調製的作用，造成偏振轉換的效率也是必須被仔細的考慮因素之一，以達到最佳的效率。

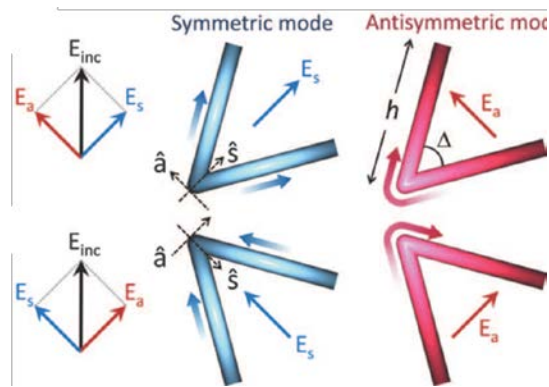


圖 1-8: 具有對稱模態與反對稱模態共振的 V 形光學天線[8]。

幾何效應主要藉由奈米天線的旋轉，使得入射光的相位能被有效的調製，並同時能讓電磁波的散射振幅浮動非常微小，因此非常適合應用於電漿子超穎介面的設計[11]。然而，此種方法只適用於入射光為圓偏振光，也因此大大的限制了應用範圍。

## 1.5 廣義斯乃爾定律

一般而言，斯乃爾定律(Snell's Law)主要用以描述當入射光通過一個介於兩種不同物質介面時其入射角、反射角以及折射角之間的關係。由於電漿子超穎介面會額外提供入射電磁波一個相位平移，因此用一般的斯乃爾定律已經無法完整描述電磁波的光學行為，必須額外將電漿子振盪產生的相位貢獻考慮進系統中。由費馬定律(Fermat's Principle)得知，如圖 1-9 所示，空間中任意兩點之間，不論光走哪一條路徑，其相位變化必須一致。其中光路徑產生的相位差為  $\Phi = \frac{L}{\lambda} \cdot 2\pi = L \cdot n \cdot k_0$ 。其中  $L$  為路徑長， $\lambda$  為入射光波長， $n$  為介質折射率， $\theta_i$  與  $\theta_t$  分別代表入射角以及折射角。

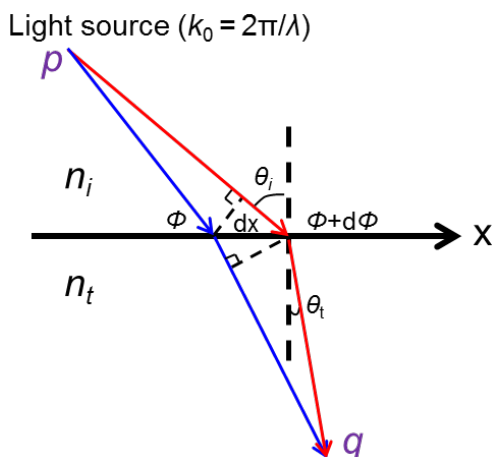


圖 1-9: 電磁波從空間於兩種不同介質中  $p$  點傳播至  $q$  經由不同光路徑(紅線與藍線)示意圖。

然而，由於置於介面上的電漿子超穎介面其對於入射電磁波的電位亦有所貢獻，因此費馬定理將被改寫成：

$$[k_0 n_i \sin(\theta_i) dx + (\Phi + d\Phi)] - [k_0 n_t \sin(\theta_t) dx + \Phi] = 0 \quad (1)$$

其中  $\Phi$  為電漿子超穎介面於兩物質介面中產生的相位偏移量。將(1.1)式重新整理後可得廣義斯乃爾定律[8]：

$$\text{Refraction: } \sin(\theta_t) n_t - \sin(\theta_i) n_i = \left( \frac{\lambda_0}{2\pi} \right) \frac{d\Phi}{dx} \quad (2)$$

$$\text{Reflection: } \sin(\theta_r) - \sin(\theta_i) = \left( \frac{\lambda_0}{2\pi n_i} \right) \frac{d\Phi}{dx} \quad (3)$$

值得注意的是，不論是反射光或是折射光都有  $d\Phi/dx$  這一項，主要描述介面上金屬天線共振時所產生的相位貢獻。若將此項移除，則(1.2)以及(1.3)式將會恢復成一

般的斯乃爾定律。

我們進一步從動量的角度討論此問題。由於兩物質的介面上水平方向的動量必須守恆(即平行  $x$  的方向)，因此可以將電磁波的動量寫成：

$$\text{Refraction: } k_t \sin \theta_t = k_i \sin \theta_i + \frac{d\Phi}{dx} \quad (4)$$

$$\text{Reflection: } k_r \sin \theta_r = k_i \sin \theta_i + \frac{d\Phi}{dx} \quad (5)$$

相同的，不論在折射或是反射的式子中皆可以觀察到  $d\Phi/dx$  這一項，表示電漿子超穎介面此時可以看成額外提供了一個水平動量給予入射電磁波，藉由此動量轉換達到改變電磁波的行進方向。

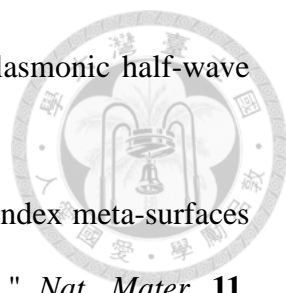
電漿子超穎介面提供了一個全新的自由度，使人們能藉由調整結構的排列與幾何形狀達到調控電磁波的振幅以及相位，進而達到控制電磁波傳播行為的能力。電漿子超穎介面已經被廣泛討論並應用於許多光學元件中，如全像術[12],[13]、相位延遲片[14],[15]、偏振檢測器[16]以及光波前調控[17]等。





## 1.6 參考文獻

- [1] X G. Luo, "Principles of electromagnetic waves in metasurfaces," *Sci China-Phys Mech Astron* **58**, 594201 (2015)
- [2] N. Yu, and F. Capasso, "Flat optics with designer metasurfaces," *Nat. Mater.* **13**, 139-150 (2014).
- [3] N. Meinzer, W. L. Barnes, and I. R. Hooper, "Plasmonic meta-atoms and metasurfaces," *Nat. Photon.* **8**, 889-898 (2014).
- [4] Y. Nanfang, P. Genevet, F. Aieta, M. A. Kats, R. Blanchard, G. Aoust, J. P. Tetienne, Z. Gaburro, and F. Capasso, "Flat optics: Controlling wavefronts with optical antenna metasurfaces," *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, **19**, 4700423-4700423 (2013).
- [5] X. Zhang, Z. Tian, W. Yue, J. Gu, S. Zhang, J. Han, and W. Zhang, "Broadband terahertz wave deflection based on C-shape complex metamaterials with phase discontinuities," *Adv. Mater.* **25**, 4567-4572 (2013).
- [6] S. Sun, K.-Y. Yang, C.-M. Wang, T.-K. Juan, W. T. Chen, C. Y. Liao, Q. He, S. Xiao, W.-T. Kung, G.-Y. Guo, L. Zhou, and D. P. Tsai, "High-efficiency broadband anomalous reflection by gradient meta-surfaces," *Nano Lett.* **12**, 6223-6229 (2012).
- [7] L. Huang, X. Chen, H. Mühlenbernd, G. Li, B. Bai, Q. Tan, G. Jin, T. Zentgraf, and S. Zhang, "Dispersionless phase discontinuities for controlling light propagation," *Nano Lett.* **12**, 5750-5755 (2012).
- [8] N. Yu, P. Genevet, M. A. Kats, F. Aieta, J.-P. Tetienne, F. Capasso, and Z. Gaburro, "Light propagation with phase discontinuities: Generalized laws of reflection and refraction," *Science* **334**, 333-337 (2011).

- 
- [9] A. Pors, M. G. Nielsen, and S. I. Bozhevolnyi, "Broadband plasmonic half-wave plates in reflection," *Opt. Lett.* **38**, 513-515 (2013).
- [10] S. Sun, Q. He, S. Xiao, Q. Xu, X. Li, and L. Zhou, "Gradient-index meta-surfaces as a bridge linking propagating waves and surface waves," *Nat. Mater.* **11**, 426-431 (2012).
- [11] M. Kang, T. Feng, H.-T. Wang, and J. Li, "Wave front engineering from an array of thin aperture antennas," *Opt. Express* **20**, 15882-15890 (2012).
- [12] X. Ni, A. V. Kildishev, and V. M. Shalaev, "Metasurface holograms for visible light," *Nat. Commun.* **4**, 2807 (2013).
- [13] S. Larouche, Y.-J. Tsai, T. Tyler, N. M. Jokerst, and D. R. Smith, "Infrared metamaterial phase holograms," *Nat. Mater.* **11**, 450-454 (2012).
- [14] L.-J. Black, Y. Wang, C. H. de Groot, A. Arbouet, and O. L. Muskens, "Optimal polarization conversion in coupled dimer plasmonic nanoantennas for metasurfaces," *ACS Nano* **8**, 6390-6399 (2014).
- [15] N. Yu, F. Aieta, P. Genevet, M. A. Kats, Z. Gaburro, and F. Capasso, "A broadband, background-free quarter-wave plate based on plasmonic metasurfaces," *Nano Lett.* **12**, 6328-6333 (2012).
- [16] D. Lin, P. Fan, E. Hasman, and M. L. Brongersma, "Dielectric gradient metasurface optical elements," *Science* **345**, 298-302 (2014).
- [17] B. Walther, C. Helgert, C. Rockstuhl, F. Setzpfandt, F. Eilenberger, E.-B. Kley, F. Lederer, A. Tünnermann, and T. Pertsch, "Spatial and spectral light shaping with metamaterials," *Adv. Mater.* **24**, 6300-6304 (2012).

## Chapter 2 數值模擬計算



### 2.1 前言

本篇論文利用數值模擬計算電磁波光譜與相位平移等光學性質，並進行電磁場分析，進一步設計與驗證電漿子超穎物質的共振模態、耦合作用與光學元件開發。

### 2.2 杜德-羅倫茲模型(Drude-Lorentz Model)

在非常廣泛的頻率範圍中，金屬的光學特性可以藉由電漿模型(Plasma Model)進行分析與討論，其主要以空間密度為  $n$  的自由電子氣描述。對於鹼金屬而言，此頻率範圍可以被擴展至紫外光，然而對於貴金屬而言，由於在可見光波段會產生兩個不同能帶之間的躍遷(Interband Transition)，因此侷限了此模型的有效頻率區間。在電漿模型中，晶格位能以及電子與電子之間的交互作用都必須被考慮。為了簡化問題，這邊將所有電子的等效光學質量皆等效為  $m$ 。對於一個外加電磁波而言，自由電子會對其有一定的響應，電子的運動會因為碰撞而產生損耗，碰撞頻率為  $1/\tau$ ， $\tau$  為電子氣的延遲時間(Relaxation Time)，通常在室溫下為  $10^{-14}$  的等級，對應於 100 太赫茲(Terahertz)的碰撞頻率。

現考慮一自由電子受外加時諧電場  $\vec{E}$  作用，此時自由電子的運動方程式為

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + m\gamma \frac{d\vec{x}}{dt} = -e\vec{E} \quad (1)$$

其中  $\vec{x}$  為自由電子位移隨時間變化的函數， $\gamma$  為阻尼係數， $e$  為自由電子的帶電量。





若我們假設外加電場為一個和諧時間場，即  $\bar{E}(t) = \bar{E}_0 e^{-i\omega t}$ ，則(2.1)式方程式的解必為  $\bar{x}(t) = \bar{x}_0 e^{-i\omega t}$ 。此複數振幅  $\bar{x}_0$  包含所有外加電場與響應之間的相位平移：

$$\bar{x}(t) = \frac{e}{m(\omega^2 + i\gamma\omega)} \bar{E}(t) \quad (2)$$

金屬內部的極化向量  $\bar{P} = -ne\bar{x}$ ，帶入(2.2)式後整理可得：

$$\bar{P}(t) = -\frac{ne^2}{m(\omega^2 + i\gamma\omega)} \bar{E}(t) \quad (3)$$

接著引進電磁學課本中電位移  $\bar{D}$  與電場  $\bar{E}$  的關係式：

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \quad (4)$$

從(2.3)以及(2.4)可得

$$\bar{D}(t) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}\right) \bar{E}(t) \quad (5)$$

其中  $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}$  為電漿頻率(Plasma Frequency)。因此，我們得到自由電子器的介電

函數：

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} \quad (6)$$

(2.6)式即為杜德(Drude)模型所描述的電子介電函數。若將此複數介電函數的實部

與虛部分量表示為  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1(\omega) + i\varepsilon_2(\omega)$



$$\varepsilon_1(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (7)$$

$$\varepsilon_2(\omega) = \frac{\omega_p^2 \tau^2}{\omega(1 + \omega^2 \tau^2)} \quad (8)$$

其中  $\gamma = 1/\tau$ 。

我們接下來進一步的分析不同頻率範圍內(2.9)式的物理涵義。當入射光頻率小於電漿頻率時，即  $\omega < \omega_p$  時，金屬便保持著其本身的金屬特質。當頻率大到非常接近電漿頻率  $\omega_p$  時，此時  $\omega\tau \gg 1$ ，造成損耗項可以被忽略，因此(2.9)式可被改寫成：

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (9)$$

(2.9)式可被視為無損耗情況下自由電子的介電質函數。若考慮入射電磁波的頻段為高頻波段，此時只利用杜德模型描述金屬內部的電子運動行為可能會造成比較大的誤差，原因在於杜德模型只描述金屬內部自由電子的運動狀態，然而金屬內部亦有受到比較大束縛力的束縛電子，若入射電磁波頻率較大時便需考慮到束縛電子的運動狀態。因此在模擬計算高頻波段的電磁波交互作用時介電係數通常會加入羅倫茲(Lorentz)項加以修正，即為杜德-羅倫茲(Drude-Lorentz)模型。

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} + \sum_{m=1}^3 \frac{f_m \omega_m^2}{\omega_m^2 - \omega^2 - i\gamma_m \omega} \quad (10)$$

式中最後一項即為羅倫茲修正項，其推導過程類似於杜德模型，只要將(2.1)加入一束縛力所造成的項即可。

在本論文所使用的金屬金的參數，其電漿頻率  $\omega_p$  為  $1.3673 \times 10^{16}$  (rad/s)，其阻

尼係數  $\gamma$  為  $2.127 \times 10^{14}$  (rad/s)[1]。此外，我們所使用介電質氟化鎂(MgF<sub>2</sub>)的折射率為  $\varepsilon = 1.892$  來自文獻[2]。



## 2.3 有限元素法(Finite-Element Method)

本論文主要使用兩種商業軟體進行數值模擬計算與分析，分別為 COMSOL Multiphysics 以及 Computer Simulation Technology (CST)，此節將著重於 COMSOL Multiphysics 的介紹，至於 CST 的部分則會在下一小節進行更進一步的探討。

COMSOL Multiphysics 為一種建立於有限元素法(Finite-Element Method, FEM)基礎上進行數值計算的套裝軟體[3]。有限元素法的基本觀念是任何連續量均可用一不連續函數的型式作近似表示，此型式乃為有限區域的集合分段連續函數所組成。使用連續量的值，以定義分段連續函數將整個結構視為次區域(Subdomain)，即有限元素之組合，做為整個結構解析之模擬。在每一個次區域內之結構行為，可以用一假設函數來表示該區域內之應力或應變，而這個假設函數通常必須能夠保持整個連體結構行為的連續性。

凡是牽涉到複雜之幾何、負載與材料性質之問題，通常都無法得到其分析數學解，因此對一被分析之未知連續體而言，分析解由分析對象「局部」之數學式求得，而分析對象包含無限個這種「局部」。有限元素法假設將此未知連續體分割成有限個「局部」，稱之為元素 (Element)，或稱為網格(Mesh)，網格的邊界點稱之為節點 (Node)，然而每個節點上均滿足一條數學方程式，稱之為內插函數方程式 (Interpolation Equation)，藉由有限個內插函數方程式表達該連續體之分析行為，此群有限個方程式之解稱為內插近似解 (Interposition Approximation)。只要連續體之場變數 (位移、速度、電磁場、...) 與各條件 (幾何條件、起始條件、邊界條件、材料性質、...) 假設正確，則在誤差容忍度之內，近似解可視為取代精確解



之可信賴結果。

從上述討論得知，若增加欲求解系統的網格數，也就是增加內插函數方程式會使得計算出來的數值結果誤差較小，但相對的此時電腦所需的運算量也較大，因此在進行計算時必須在兩者之間取得平衡。有限元素法另外一個計算優勢在於可以根據欲深入了解的次區域進行局部性的網格優化，其他次區域的網格設置則可以依照個別需求進行調整，如此一來既可大大減低電腦計算所需的運算量，亦可以得到精確度極高的數值解。

有限元素法是至今解決偏微分方程 (Partial Differential Equation, PDE) 和積分方程 (Integral Equation) 的數值方法中極為重要的一環。主要的概念為完全消除微分方程 (穩態問題) 或者把偏微分方程轉化為等效的常微分方程，然後用有限差分方法求解。在求解偏微分方程過程中，最大的困難點在於要如何創造出一個能近似原始偏微分方程的方程式，且此方程式必須具數值穩定性，即輸入資料的誤差和中間計算不會帶來誤差的累積，否則輸出會因為誤差太大而毫無意義。有很多方法可以實現這一過程，互有優劣。這個方法自 1955 年開始被使用以來[4]，如今已經變成數學物理之數值解析問題中一個非常熱門的解析方法。有限元素法應用的範圍非常的廣泛，包含了生物、物理、結構工程等方面的使用，其優點如下：

- I. 鄰近元素可以為非均質 (Non-homogeneous) 或非等向性 (Anisotropic) 等材料。
- II. 元素邊界可以為不規則形狀的邊界，其能用直邊元素或用曲線邊界作近似。
- III. 元素(網格)的大小可以任意地進行局部設定，此性質能視電腦的計算能力或所需的誤差大小將網格尺寸擴大或縮小。

邊界條件 (Boundary Condition) 中，諸如不連續性的邊界條件設定，用有限元素

法不會產生任何困難，能很容易解決混合的邊界條件問題。

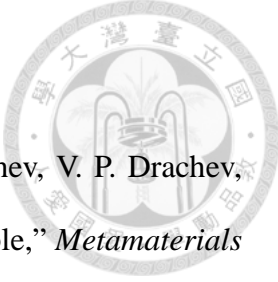


## 2.4 有限積分法(Finite-Integration Technique)

本文所使用的另一種商用數值計算軟體為 CST Microwave Studio，其主要的電磁計算方法為有限積分技術(Finite-Integration Technique, FIT)。有限積分技術提供了一個空間辨認平面(Universal Spatial Discrimination)，適用於電磁問題中所有高頻靜電磁場的計算(時域或頻域皆可)。不同於有限元素法，有限積分技術以離散馬克斯威爾方程的積分式進行計算，並非微分方程[5]。藉由定義計算空間，馬克思威爾方程可在適當的空間中被解析，而這些計算空間為許多小格點晶胞(Grid Cells)所組合而成的網格系統。一般而言，這些格點主要基於卡笛耳座標系(Cartesian Grids)。為了在較複雜的邊界上增加其精確度，在數值計算中 CST 亦把完美邊界近似技術(Perfect Boundary Approximation, PBA)引進計算空間中，其可以保持卡笛耳座標系格點的優勢，並於建構較複雜的曲線結構時保持著極高的精確度。藉由合併有限積分技術模型以及完美邊界近似技術，CST 同時具有有限元素法以及有限時域差分(Finite-Difference Time-Domain, FDTD)模型的優點。CST 同時具有自由度極高的模型建構以及高速計算能力，但是在模型分割方面的能力較差。

計算過程中我們所使用的邊界條件為週期性邊界條件(Periodic Boundary Conditions, PBC)，光源部分設定為平面波入射。所有的電磁場只能被探針(Probes)於空間中一個特定位置所偵測，且一次只能偵測一個分量(於所有頻率範圍內)。因此，只有穿透率可以被完整描述，因為在結構上方的電磁場為入射光與反射光的疊加態。在電磁波傳遞方向上計算空間必須足夠大，確保消散場能在被遠場偵測到之前就完全消失衰退，但這也使得計算時間被加長。

## 2.5 參考文獻

- 
- [1] Z. Liu, A. Boltasseva, R. H. Pedersen, R. Bakker, A. V. Kildishev, V. P. Drachev, and V. M. Shalaev, "Plasmonic nanoantenna arrays for the visible," *Metamaterials* **2**, 45-51 (2008).
- [2] H. H. Li. "Refractive index of alkaline earth halides and its wavelength and temperature derivatives.," *J. Phys. Chem. Ref. Data* **9**, 161-289 (1980).
- [3] COMSOL Multiphysics, "RF module user's guide."
- [4] Zienkiewicz, O. C., "The finite element method (3<sup>rd</sup> ed.)," New York (1977).
- [5] CST GmbH, Germany. [www.cst.de](http://www.cst.de)

## Chapter 3 奈米光學天線的相位討論



### 3.1 前言

在緒論所提及的超穎介面，都是由奈米金屬結構所構成，而這些奈米金屬結構具有在極小面積中累積相位的性質，透過激發奈米金屬結構的局域表面電漿子共振，其散射光的相位可以透過奈米金屬結構共振模態所決定，而共振模態又與奈米級金屬結構的幾何以及激發光波長有關係。因此，在這個章會討論奈米天線相位的性質。

### 3.2 奈米天線光學性質討論

一般而言，對於單一奈米天線而言，入射光與散射光的相位差最多是 $\pi$ 。我們會粗略討論單一奈米天線其共振性質，之後會用精確物理模型討論其相位。

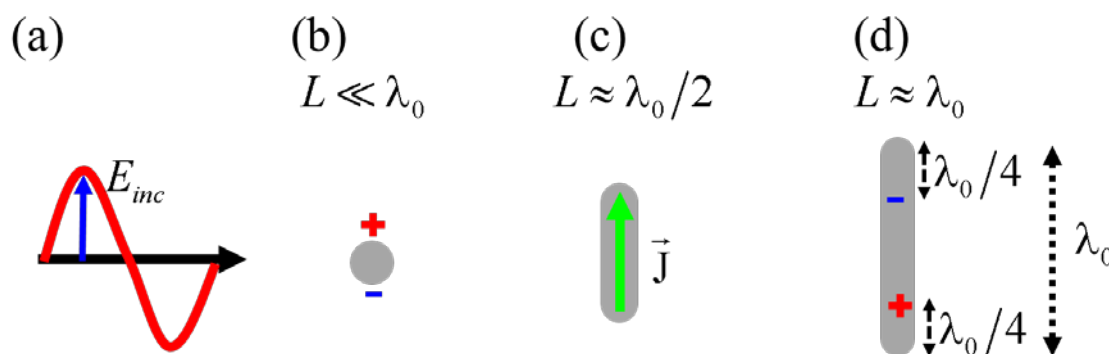


圖 3-1: (a)入射光示意圖， $E_{inc}$  為入射光電場 (b)(c)(d) 在奈米天線的不同長度( $L$ )下，保持入射光波長( $\lambda_0$ )，暫態電荷(+,-)、電流分布(綠色箭頭 $\vec{J}$ )的示意圖[1]

圖(a)表示入射光場示意圖，其中 $\vec{E}_{inc}$ 為藍色箭頭，表示最大的振幅。圖(b)表示在奈米天線非常小( $L \ll \lambda_0$ )的情況下，只有在奈米天線兩端累積相當大的電荷密

度( $\vec{\sigma}$ )，其中紅色(+)為暫態的正電荷密度，藍色(-)為暫態負電荷密度，但是沒有任何響應電流( $\vec{J}$ )。圖(c)表示在奈米天線恰等於入射光波長的一半( $L \sim \lambda_0/2$ )時，有最大的響應電流( $\vec{J}$ )，綠色箭頭所示暫態電流方向，但是沒有任何的電荷密度的累積。圖(d)表示在奈米天線長度等於入射光波長( $L \sim \lambda_0$ )的情況下，在距離奈米天線的兩端 $\lambda_0/4$ 有最大的電荷密度的累積，其電荷密度分布與圖(b)的正電與負電荷密度分部完全相反。同時，也沒有響應電流。[1]

在不使用任何精確的理論模型或者是數值模擬軟體的情況下，我們透過了解奈米天線光學響應的現象來分析。首先，光學奈米天天線的長度( $L/\lambda_0 \ll 1$ )的情況下，其電荷分布隨著外加電場變化，因此，可以將電荷密度分布( $\vec{\sigma}$ )與外加電場( $\vec{E}$ )成正比如表格所示，其中 $\vec{\sigma}$ 表示在奈米天線其中一端的電荷密度。因此，輻射電場

與被加速電荷成正比(根據 Larmor formula[2])。也就是 $\vec{E}_{scat} \propto \frac{\partial^2 \vec{\sigma}}{\partial t^2} \propto -\omega^2 \vec{E}_{inc}$ 。入射

場與散射場的相位差是 $\pi$ 。接下來是討論奈米天線長度恰等於入射光波長的一半( $L/\lambda_0 \sim 1/2$ )，此時，在奈米天線上中心點的響應電流( $\vec{J}$ )與入射場是同相。也就是

$\vec{I} \propto \vec{E}_{inc} = E_{inc} \exp(i\omega t)$ ，因此，是最有效率地驅動響應電流。在推論出

$\vec{E}_{scat} \propto \frac{\partial^2 \vec{\sigma}}{\partial t^2} \propto \frac{\partial \vec{I}}{\partial t} \propto i\omega \vec{E}_{inc}$ ，其中 $\vec{E}_{sca}$ 與 $\vec{E}_{inc}$ 相位差為 $\pi/2$ 。接下來對於奈米天長度

等於入射光波長( $L/\lambda_0 \sim 1$ )的情況下，其中天線阻抗主要是電感性，也就是在奈米

天線上的電流比入射場的相位領先 $\pi/2$ (i.e.  $\vec{I} \propto -i\vec{E}_{inc} = -iE_{inc} \exp(i\omega t)$ )。因此，

$\vec{E}_{scat} \propto \frac{\partial^2 \vec{\sigma}}{\partial t^2} \propto \frac{\partial \vec{I}}{\partial t} \propto \omega \vec{E}_{inc}$ ，散射場與入射場是同相位的。總結來說，對於固定激發

波長，奈米天線的阻抗與奈米天線長度的關係如下(表格 1)，當奈米天天線長度由





小變大時，其阻抗由電容性到電阻性最後再到電感性。其中阻抗為電阻性時後為共振。因此，單一的奈米天線只能提供散射場與入射場最多的相位差為 $\pi$ 。

表格 1: 在不同奈米天線長度與入射光波長比值下，所對應的散射電場與入射光電場的關係

	$L \ll \lambda_0$	$L \approx \lambda_0/2$	$L \approx \lambda_0$
$\vec{\sigma}$ or $\vec{I}$	$\vec{\sigma} \propto \vec{E}_{inc} = E_{inc} \exp(i\omega t)$	$\vec{I} \propto \vec{E}_{inc} = E_{inc} \exp(i\omega t)$	$\vec{I} \propto -i\vec{E}_{inc} = -iE_{inc} \exp(i\omega t)$
$\vec{E}_{scat}$	$\vec{E}_{scat} \propto \frac{\partial^2 \vec{\sigma}}{\partial t^2} \propto -\omega^2 \vec{E}_{inc}$	$\vec{E}_{scat} \propto \frac{\partial^2 \vec{\sigma}}{\partial t^2} \propto \frac{\partial \vec{I}}{\partial t} \propto i\omega \vec{E}_{inc}$	$\vec{E}_{scat} \propto \frac{\partial^2 \vec{\sigma}}{\partial t^2} \propto \frac{\partial \vec{I}}{\partial t} \propto \omega \vec{E}_{inc}$
$\Delta\phi$	$\pi$	$\frac{\pi}{2}$	0

### 3.3 線性光學天線的單一振子模型

在這個小節，我們使用簡單單一振子模型描述光學天線、一般而言，可以適用於任意奈米結構具有局域表面電漿子共振的特性(LSPRs)[3],[4]。此模型將奈米結構的共振、集體電子的振盪視作為一個電荷在彈簧上具有阻尼且受驅動的簡諧振子。不像一般的振子模型，其所有的阻尼機制全部可以統合成單一損耗項且正比於電荷的速度[5]-[7]。然而，我們可以將局域表面電漿共振(LSPR)有兩種衰減機制的解釋，第一是自由載子的吸收(內部的損耗)，第二是將光輻射到遠場(輻射的損耗)[8]。

我們開始假設一個理想系統的運動分成如下式，此系統具有電荷 $q$ 坐落在位置座標 $x(t)$ ，其中此電荷的質量為 $m$ 連結在彈簧一端，此彈簧的彈力係數為 $\kappa$ ，有一外加電磁場頻率為 $\omega$ 驅動此電荷，並且在運動過程中有內部損耗，內部損耗的阻尼係數為 $\Gamma_a$ 。



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \Gamma_a \frac{dx}{dt} + \kappa x = q E_0 e^{i\omega t} + \Gamma_s \frac{d^3 x}{dt^3} \quad (1)$$

除了內部的阻尼力為  $\Gamma_a(\omega) = \Gamma_a \frac{dx}{dt}$ ，電荷還受到額外因為輻射造成的作用力

為  $\Gamma_s(\omega) = \Gamma_s \frac{d^3 x}{dt^3}$ ，其中  $\Gamma_s = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$ 。這項可以被描述為後作用力，被加速的電荷

輻射出光子並且得到與光子相反的動量，我們也可以稱作阿布拉罕-勞倫茲力 (Abraham-Lorentz force) 或者輻射反應作用力。此種後座力也可以被視為電荷所產生的作用力對電荷本身的作用。對於一個電荷被彈簧束縛的模型，輻射的作用力包含物理自我的一致性並且不被內部損耗所吸收。

藉由假設諧波運動為  $x(\omega, t) = x(\omega) e^{i\omega t}$ ，我們可以立即寫下(3.2)式是(3.1)式的穩態解如下所示

$$x(\omega, t) = \frac{(q/m) E_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i \frac{\omega}{m} (\Gamma_a + \omega^2 \Gamma_s)} e^{i\omega t} = x(\omega) e^{i\omega t} \quad (2)$$

其中  $x(\omega)$  包含振子的振幅與相位的資訊，而且  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ 。

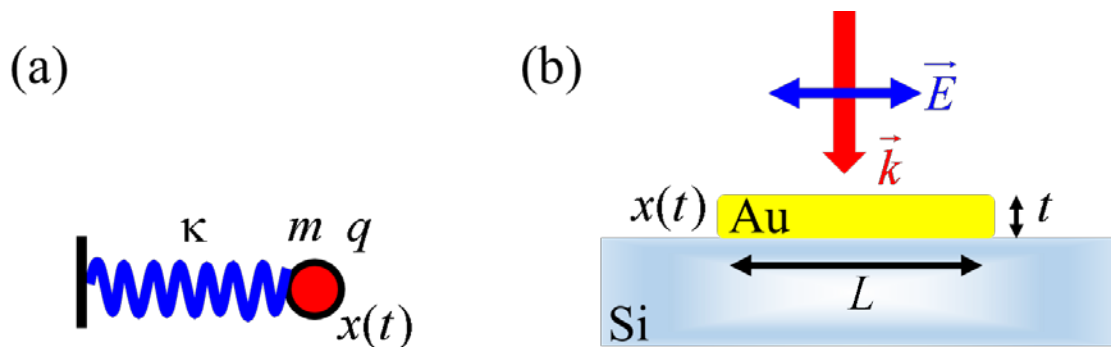
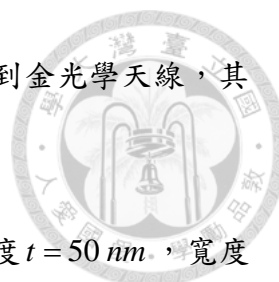


圖 3-2: (a) 使用振子模型來代表奈米天線的光學性質，其中  $q$  表示電荷大小， $m$  表示振子質量， $\kappa$  表示彈力常數， $x(t)$  表示離開平衡點的位移 (b) 光學奈米金天線示



意圖 ( $L=1\mu\text{m}$ ,  $h=50\text{nm}$ ,  $w=130\text{nm}$ )，使用入射光正向入射 ( $\vec{k}$ ) 到金光學天線，其電場偏 ( $\vec{E}$ ) 振沿著光學天線長度的方向 ( $x$ )。

根據文獻[8]，其中金奈米光學天線的長度為  $L=1\mu\text{m}$ ，厚度  $t=50\text{nm}$ ，寬度  $w=130\text{nm}$ ，坐落在矽基板，使用正向入射光 ( $\vec{k}$ )，其電場 ( $\vec{E}$ ) 偏振方向沿著長度  $L$  方向， $q\sim 2.3\times 10^8$ ， $m_e^*\sim 1.5m_e$ ，其他的參數像是  $\omega_0$ 、 $\Gamma_s$  以及  $\Gamma_a$  皆從文獻[8]。用數值擬和方式作出圖 3-2，圖 3-2(b)表示此模型的近場振幅大小，圖 3-2(c)表示此模型的相位資訊，由圖(c)非常清楚知道，固定單一奈米天線的長度，大幅度改變其入射光波長，但是相位改變僅僅只有 2.5 徑度(注意： $2\pi=6.28$  徑度)。

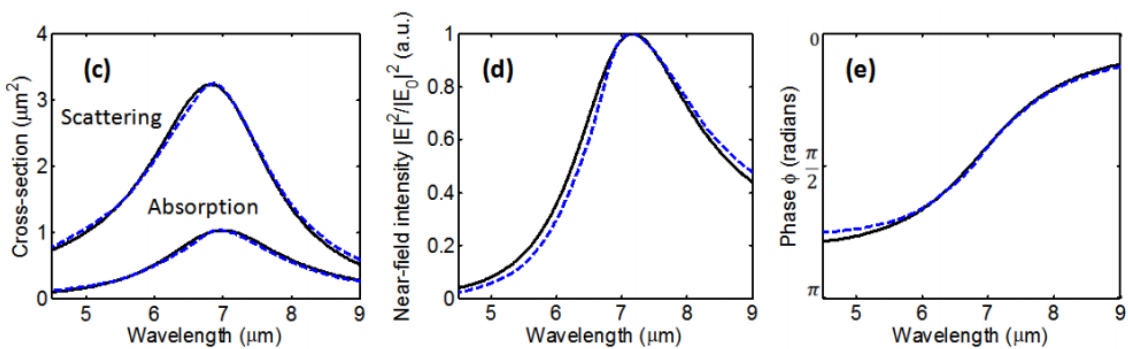


圖 3-3: 文獻[8]的圖一(c)(d)(e)，(c)為表示奈米天線的遠場散射以及吸收，(d)為奈米天線近場振幅，(e)為奈米天線近場相位

### 3.4 使用兩個振子模型來描述具有兩個相互正交電漿子模態的二維結構

為了可以操控電磁波的波前，我們需要次波長光學單元去調控輻射光的相位，其輻射光相位差範圍相對入射光的相位可高達  $2\pi$ 。上述單一奈米光學天線可以用單一振子模型所描述，我們已經知道是無法達到  $2\pi$  的相位調製。因此，需要



額外加入其他振子到我們的系統模型，以達到相位調製的目的。在接下來內容會描述兩個互相正交的振子模型是可以達到 $2\pi$ 的相位調製。

將兩個互相正交的電漿模態視作互為獨立簡諧振子，此組合系統可以被視作為兩個有質量的電荷在互相垂直的彈簧上運動(如圖 3-4(A)、(B))。其中一個簡諧振子沿著  $x$  方向運動，另外一個簡諧振子沿著  $y$  方向運動，入射光沿著  $z$  方向入射，其中入射光的電場沿著  $w$  方向振動。 $w$  軸是躺在  $xy$  平面上，且與  $y$  軸夾角為  $\theta$ 。

對於具有電荷，受驅動的振子沿著  $x$  軸運動，其中  $x(\omega)$  為複數振幅，表示從平衡點起算的位移，又假設此振子運動是諧和震盪  $x(\omega)e^{i\omega t}$ ，可以被寫成如同[8]，我們觀察(3.3)式與(3.2)式是一樣的，只是(3.3)式下標  $x$ ，表示沿著  $x$  方向震盪的振子的穩態解

$$x(\omega) = \frac{(\frac{q_x}{m_x})E_0}{(\omega_{0,x}^2 - \omega^2) + i\frac{\omega}{m_x}(\Gamma_{a,x} + \omega^2\Gamma_{s,x})} = \tilde{x}(\omega)E_{0,x} \quad (3)$$

其中  $q_x$  是表示電荷大小， $m_x$  表示質量， $\omega_{0,x}$  表示共振頻率， $\Gamma_{a,x}$  以及  $\Gamma_{s,x}$  分別表示吸收與散射的衰減係數。振子所輻射出的電場為  $E_{s,x}(\omega)$  可以被描述如下

$$E_{s,x}(\omega) = -D_x(\vec{r})\sqrt{\Gamma_{s,x}}\omega^2 x(\omega) \quad (4)$$

在式(3.4)中， $D_x(\vec{r})$  包含角度與逕向相依的輻射電場。精確形式的  $D_x(\vec{r})$  與振子特定的幾何以及周圍環境有關，但是受限於振子大小與波長相比是非常小的，因此， $D_x(\vec{r})$  簡單為電偶極的輻射場。如果振子是沿著  $y$  方向運動的話，只要將上述的  $x$  改寫成  $y$  即可，比如說:  $y(\omega)$ ， $\tilde{y}(\omega)$ ， $E_{s,y}(\omega)$ 。假設入射光的偏振方向沿著  $\hat{w}$  軸(如圖 3-4 (C))，我們將輻射電場沿著  $\hat{v}$  方向定義為  $E_{s,v}(\omega)$ 。我們將過程分兩

個步驟說明:入射光耦合到振子的兩個獨立模態(in-coupling process)以及振子的兩個獨立模態耦合到輻射場(out-coupling process)。在 in-coupling 過程中，牽涉到入射光的偏振投影到兩個獨立共振模態，可以被表示為  $E_{0,x} = E_0 \hat{w} \cdot \hat{x} = E_0 \sin(\theta)$  以及  $E_{0,y} = E_0 \hat{w} \cdot \hat{y} = E_0 \cos(\theta)$ 。對於 out-coupling 過程，我們將被兩個互相獨立的振子振動所輻射場投影到  $\hat{v}$  軸表示如下

$$E_{s,x} \hat{v} \cdot \hat{x} = -D_x(\vec{r}) \sqrt{\Gamma_{s,x}} \omega^2 \tilde{x}(\omega) E_{0,x} \cos(\theta) \quad (5)$$

$$E_{s,y} \hat{v} \cdot \hat{y} = D_y(\vec{r}) \sqrt{\Gamma_{s,y}} \omega^2 \tilde{y}(\omega) E_{0,y} \sin(\theta) \quad (6)$$

將這些輻射場的投影線性疊加後，總和的輻射場可以被表示為  $E_{s,v}$  如下

$$E_{s,v}(\omega) = D(\vec{r}) \frac{E_0}{2} \sin(2\theta) \omega^2 \left[ \sqrt{\Gamma_{s,x}} \tilde{x}(\omega) e^{i\pi} + \sqrt{\Gamma_{s,y}} \tilde{y}(\omega) \right] \quad (7)$$

其中我們假設  $D_x(\vec{r}) \approx D_y(\vec{r}) = D(\vec{r})$ 。方程式(3.5)、(3.6)提供兩個互相獨立振子的系統一個完整輻射場的描述。輻射場強度為  $|E_{s,v}(\omega)|^2$  以圖 3-4 (D)表示，輻射場相位為  $\varphi(\omega)$  以圖 3-4 (E)表示。對於典型 V 型天線有其對應特定的參數( $\Gamma_{a,i}$ ,  $\Gamma_{s,i}$ ,  $\omega_{0,i}$ ,  $m_i$ )分別帶入兩振子系統模型中。

圖 3-4 (E)中，其黑色線條表示兩個振子系統的相位，藍色線條表示沿著  $\hat{x}$  方向振動的振子的相位，紅色線條表示沿著  $\hat{y}$  方向振動的振子的相位。根據方程式(3.7)，沿著  $\hat{x}$  軸振盪的振子與沿著  $\hat{y}$  軸振盪的振子所產生的散射場在  $\hat{v}$  軸上的投影相位相差一個常數  $e^{i\pi}$ 。此比例常數使得 V 型調製相位可以達到  $2\pi$ 。更進一步觀察圖 E，其藍色線條是向下平移徑度  $\pi$ 。觀察圖 3-4(D)，在波長範圍坐落在  $3 \mu\text{m} \sim 5 \mu\text{m}$  時，為對稱共振模態(Symmetric Mode)，是沿著  $\hat{x}$  軸振盪的振子所主

導，波長範圍坐落在  $6\ \mu\text{m} \sim 9\ \mu\text{m}$  時，為反對稱共振模態(Antisymmetric Mode)，是沿著  $\hat{y}$  軸振盪的振子所主導。因此，觀察圖 3-4(E)，在波長範圍坐落在  $3\ \mu\text{m} \sim 5\ \mu\text{m}$  時，其相位為沿著  $\hat{x}$  軸振盪的振子所主導(藍色線條)，波長範圍坐落在  $6\ \mu\text{m} \sim 9\ \mu\text{m}$  時，其相位為沿著  $\hat{y}$  軸振盪的振子所主導(紅色線條)。

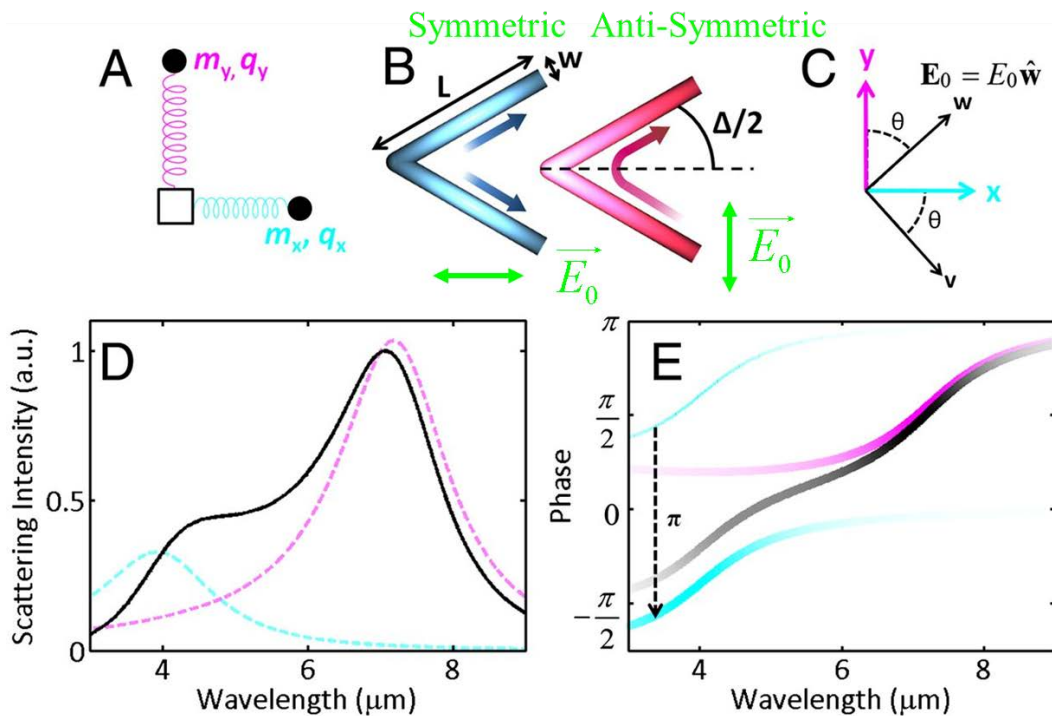


圖 3-4: (A) 互相正交模態的兩個振子模型，其中  $q_i$  表示電荷大小， $m_i$  表示振子質量大小 (B) 金屬 V 型天線具有兩個互相正交的電子震盪模態(藍色為對稱模態(symmetric)與紅色為反對稱模態(Anti-Symmetric))，箭頭表示電流方向，虛線為對稱線 (C)  $x-y$  軸為振子特徵模態振動方向， $\hat{w}$  軸為入射光電場偏振方向， $\hat{v}$  軸為散射光的電場方向，其中  $xy$  座標與  $wv$  座標有  $\theta$  夾角 (D) V 型天線的散射光強度 ( $|E|^2$ )，紅色線條表示反對稱模態的散射光譜，藍色表示對稱模態的光譜，黑色表示紅色與藍色線條的線性疊加( $\Delta = 90^\circ, L = 650\ \text{nm}, \theta = 45^\circ$ ) (E) V 型天線的散射光相



位，紅色線條表示反對稱模態的散射光相位，藍色表示對稱模態的光相位，但是根據式子(3-6)，其藍色線條是向下平移徑度 $\pi$ ，最後藍色線條與紅色線條線性疊加為黑色線條

### 3.5 反射式超穎介面分析

耦合式天線最常見的方法主要以金屬-介電質-金屬的多層結構最為廣泛。由於結構最底下為一層反射金屬鏡，因此此種結構主要為反射式元件。在這裡，反射金屬鏡主要扮演著兩個重要的腳色。第一個為與上表面之金屬天線進行耦合交互作用。當金屬天線產生電漿子共振產生一類似電偶極矩的電場振盪時，反射金屬鏡會產生與金屬天線相反的電荷振盪，進而於中間介電質層中產生磁偶振盪響應，達到相位調製的擴展。第二個功能主要是為了抵銷所有穿透光。上面所描述的多重獨立共振由於大多數皆設計成穿透式元件，因此反射光成了額外的能量損耗，使得電漿子超穎介面的工作效率無法有效被提高。然而，在反射式耦合天線中，所有穿透光皆無法產生，使得所有入射光的能量能有效的被集中，進而達到高效率的反射式電漿子超穎介面[9]-[11]。因為效率極高，因此反射式電漿子超穎介面亦被廣泛地探討與應用，亦有研究結果顯示其具有將傳播電磁波轉換成表面消逝波的功能[12]。

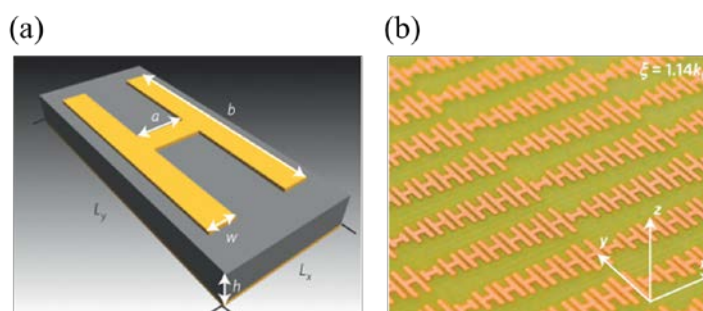


圖 3-5: 反射式耦合天線(a)單一結構示意圖與(b)光學顯微鏡照片[12]。

為了瞭解為什麼耦合式天線具有調控相位的性質，並且可以寬頻調控，我們會先用簡單模態模型來表達。首先，在文獻[9]-[11]中，所討論的耦合式天線皆是如圖 3-6 所示，使用入射光正向入射到耦合式天線，其散射、吸收以及模態場型等等的光學性質皆可以從下個段落討論。

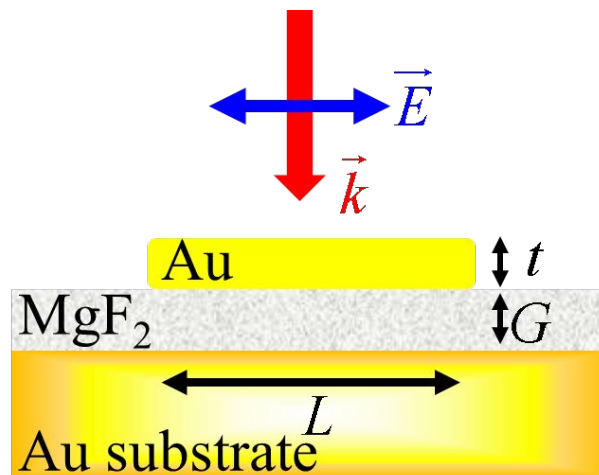


圖 3-6: 耦合式天線示意圖，其中  $t$  為奈米金天線厚度， $L$  為奈米金天線長度， $G$  為介電質層  $\text{MgF}_2$  的厚度，使用入射光正向入射其奈米金天線。

為了瞭解 V 型天線與耦合天線的差異，我們製作一張圖表，關於模態分析，如圖 3-7。我們在上個小節知道，由於 V 型天線可以拆成兩個互相正交模態的振子模型分析，所以在這兩個正交模態的正子的散射光，根據式子(3-6)，可以將相位延展至  $2\pi$ ，因此，對於耦合天線來說，當奈米金天線被入射激發，其表面電漿子共振所產生的電流，與在金屬基板被誘導出的感應電流，如果是同向，則是對稱模態(Symmetric)共振，如果奈米金天線被激發的電流與在金屬基板被誘導的感應電流為反向，則是反對稱模態(Anti-Symmetric)共振。這與 V 型天線非常類似，因此，我們可以再重複上述的兩個互相正交的振子模型去描述耦合天線。其詳細



討論在楊光宇的論文中[13]。

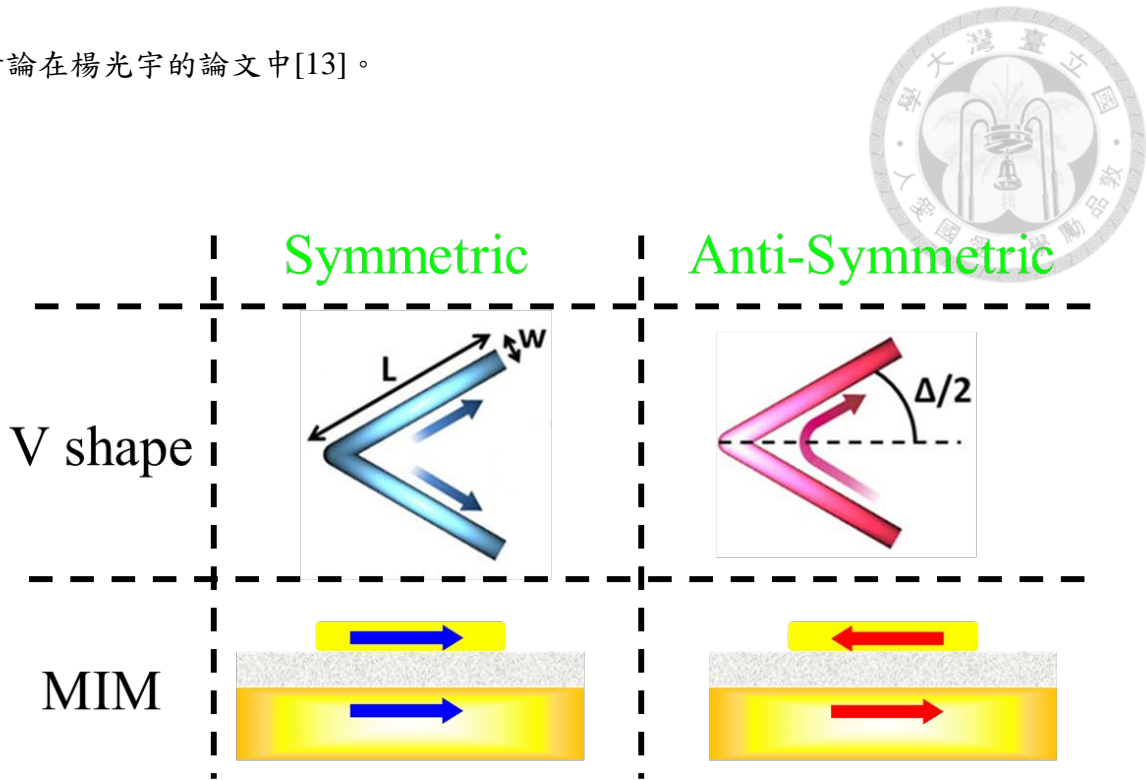


圖 3-7: V 型(V Shape)天線與耦合式(MIM)天線比較圖,其中箭頭皆表示電流方向。

為了更驗證耦合式天線也具有兩種互相正交模態,使的此結構具有足夠的相位延展到  $2\pi$ , 因此,可以用來設計我們想要的超穎介面。因此,我們試著選定奈米金柱長度為 140 奈米,其結構如圖 3-8 所表示,入射光的電場沿著 y 方向。奈米金柱的厚度為 30 奈米,氟化鎂的厚度為 50 奈米,以金為基底的基板厚度為 130 奈米。邊界條件,我們想要知道在耦合式天線下的反射率大小是多少,因此,模擬結果在圖 3-9(a)。但是如果想要知道耦合式天線是哪一種電流密度分布所造成的遠場散射,則需要引進一個觀念,那就是多極矩(Multipole Moments)。我們根據文獻[14],來了解在耦合式天線結構會由哪一種多極矩來貢獻遠場散射,我們透過商業軟體 COMSOL 的設定,將分布在結構中的電流密度( $\vec{J}$ )以及電荷密度( $\rho$ )以卡式座標描述,對於電偶極矩所對應的的電流密度或者電荷密度為

$$p_{\alpha} = \int d^3r \rho r_{\alpha} = \frac{1}{i\omega} \int d^3r J_{\alpha}, \quad \text{磁偶極矩則為 } m_{\alpha} = \frac{1}{2c} \int d^3r [\vec{r} \times \vec{J}]_{\alpha}, \quad \text{環形矩則為}$$

$T_{\alpha} = \frac{1}{10c} \int d^3r [(\vec{r} \cdot \vec{J})r_{\alpha} - 2r^2 J_{\alpha}]_{\alpha}$ ， $\alpha$  表示  $x, y, z$  其中一分量。圖 3-9(b) 為模擬結果，

我們觀察發現在入射光波長為 600 奈米時，電偶極矩為主要貢獻，在入射光為 930 奈米時候，磁偶極矩為主要貢獻。但是我們還不清楚其電流密度分布，因此，透過 COMSOL 的後處理，我們取出電流密度分布分別在入射光波長 600 奈米以及 930 奈米，綠色箭頭表示電流密度( $\vec{J}$ )方向，(特別注意:這裡的箭頭大小並不能完全表示電流密度大小)，在入射光波長為 600 奈米所對應的電流密度方向為同向，在入射光波長為 930 奈米所對應的在奈米金柱(Au Nanorod)上電流密度與在金基板(Au Substrate)上的電流密度方向為反向，互為反向的電流密度可以想像成一個環形線圈上的電流，因此，會產生一個等效的磁偶極矩。有別於同向電流，並不會產生磁偶極矩，是完全的單純的電偶極矩。若要從反射光譜是無法完全分辨電流分布狀況，原因是因為反射光譜的意義是討論此種結構是否會將電磁場能量侷域在所設計的奈米結構上。從圖 3-9(a)觀察到在入射光波長 930 奈米的反射率比波長 600 奈米還要低，因此，在圖 3-11 中波長 930 奈米的電場( $|\vec{E}|$ )與磁場( $|\vec{H}|$ )強度皆是比波長 600 奈米的電場與磁場強度大。

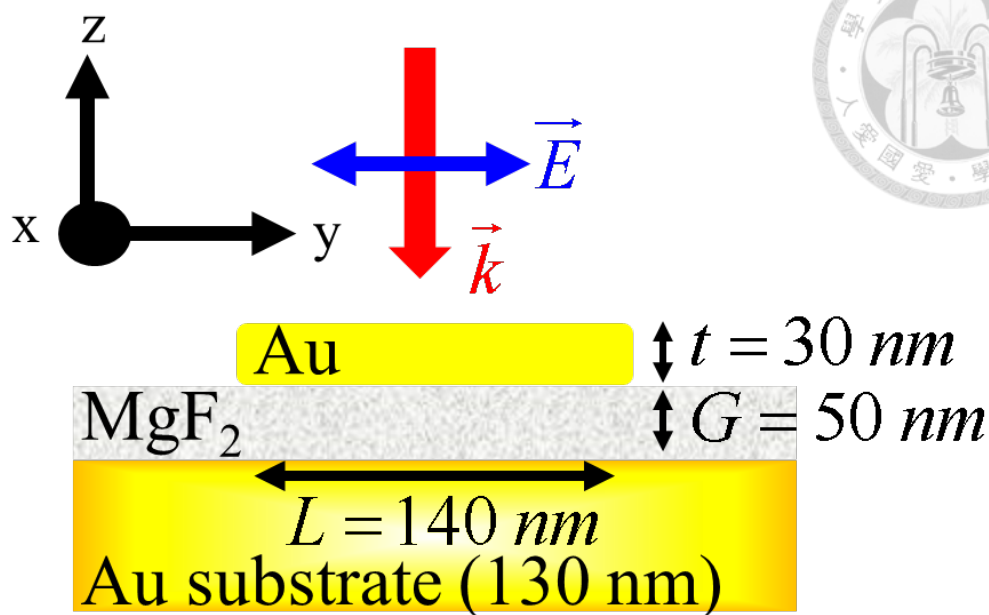


圖 3-8: 耦合式天線示意圖，其中  $t$  為奈米金天線厚度， $L$  為奈米金天線長度， $G$  為介電質層  $\text{MgF}_2$  的厚度，使用入射光正向入射其奈米金天線。

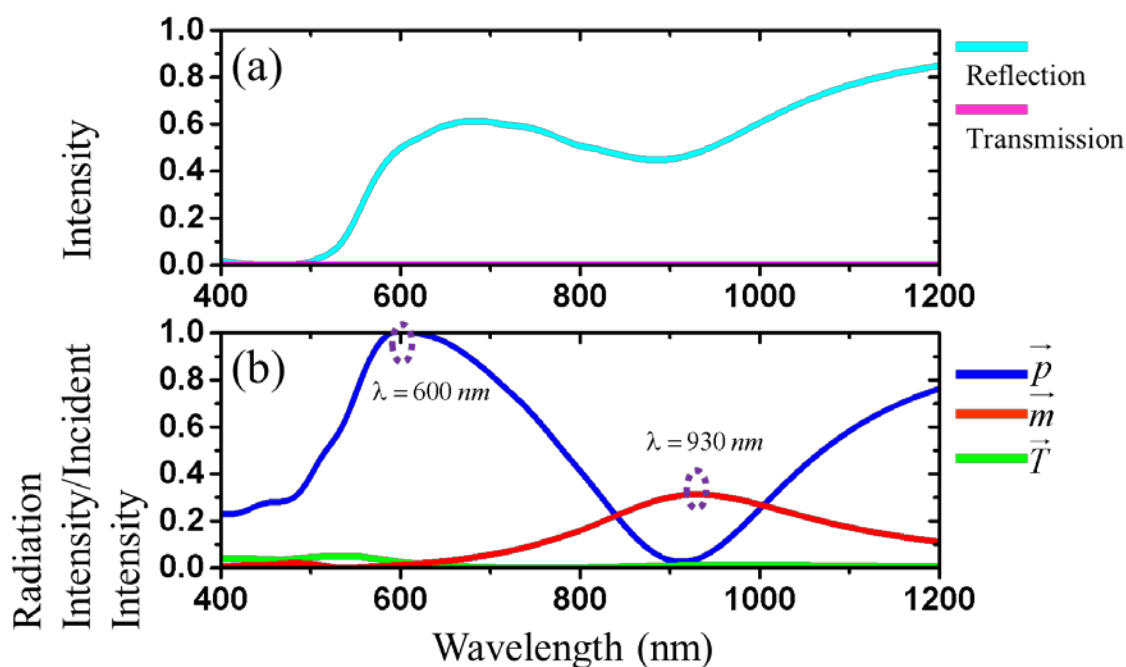


圖 3-9: 當奈米金天線長度為 140 奈米 ( $L = 140 \text{ nm}$ ) (a) 耦合式天線結構的反射光譜

(b) 歸一後多極矩散射強度(其中  $\vec{p}$  為電偶極矩,  $\vec{m}$  為磁偶極矩,  $\vec{T}$  為環形矩)

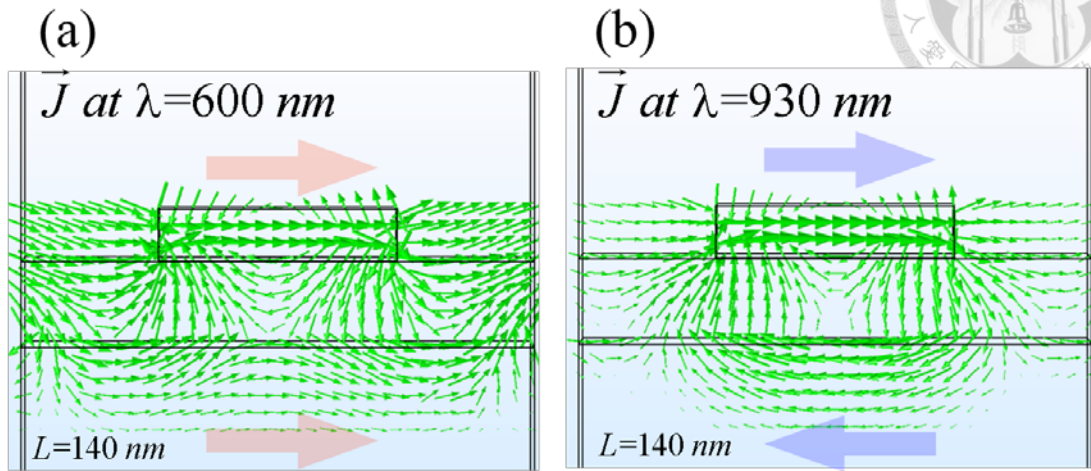


圖 3-10: 綠色箭頭表示電流密度( $\vec{J}$ ) (a) 在入射光波長為 600 奈米所產生的同向電流 (b) 在在入射光波長為 930 奈米所產生的反向電流

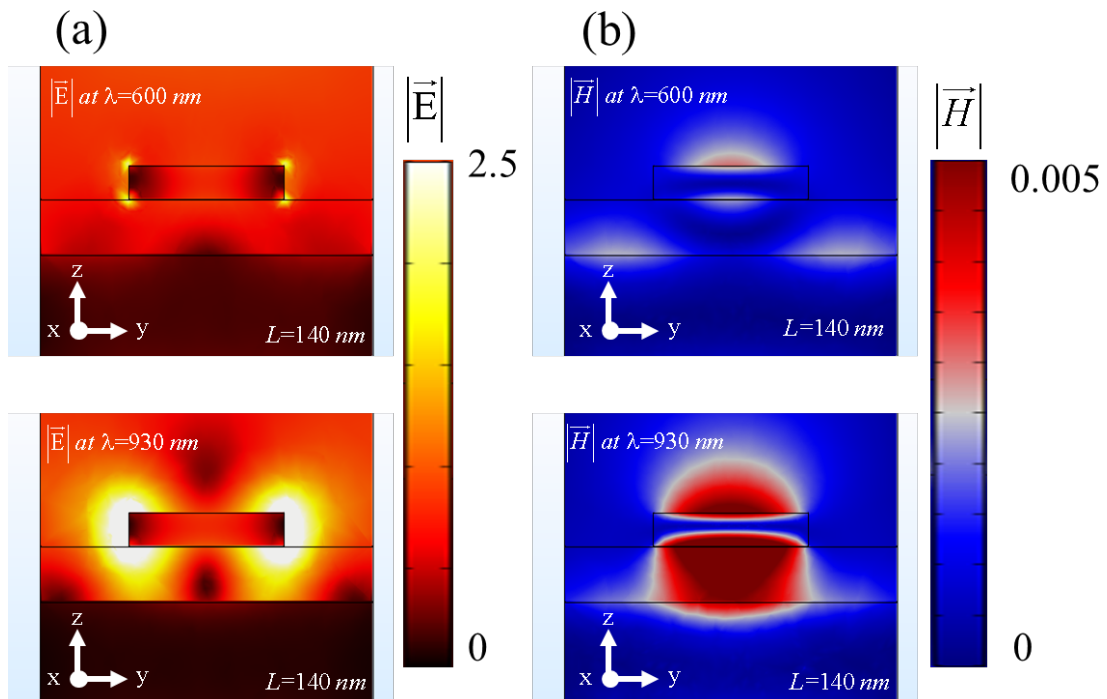


圖 3-11: YZ 截面的場形圖 (a) 上圖是波長為 600 奈米的電場強度( $|\vec{E}|$ ), 下圖是波長 930 奈米的電場強度( $|\vec{E}|$ ) (b) 上圖是波長為 600 奈米的磁場強度( $|\vec{H}|$ ), 下圖是

## 波長 930 奈米的磁場強度( $|\vec{H}|$ )



我們在上一段驗證固定耦合式天線中奈米金柱的長度( $L_r = 140 \text{ nm}$ )，改變入射光波長( $400 \text{ nm} \leq \lambda \leq 1200 \text{ nm}$ )，發現具有兩種電磁場模態，因此，具有調製相位的功能，但現在我們將討論固定入射光波長( $\lambda = 850 \text{ nm}$ )，改變奈米金柱的長度( $40 \text{ nm} \leq L_r \leq 260 \text{ nm}$ )是否也可以有兩種電磁場模態，圖 3-12 為模擬示意圖。也是透過套裝模擬軟體 COMSOL 模擬反射率以及多極矩。圖 3-13 為模擬結果，從模擬結果發現，當  $L_r = 120 \text{ nm}$  時候，磁偶極矩的散射強度為最大，但是當  $L_r$  遠離 120 奈米時候，電偶極矩的散射為主要貢獻。我們也發現，當  $L_r = 120 \text{ nm}$  時候所對應的反射率，相較於其他長度所對應的反射率是較低的，也就是在這樣的幾何結構下可以將電磁場能量侷域。為了驗證圖 3-13(b)是否是真實的電偶極矩或者磁偶極矩，我們透過 COMSOL 後處理，將電流密度( $\vec{J}$ )分布，電場強度( $|\vec{E}|$ )，磁場強度( $|\vec{H}|$ )分別在圖 3-14，圖 3-15，圖 3-16。當  $80 \text{ nm} \leq L_r \leq 180 \text{ nm}$  時候，奈米金柱上的電流密度與金基板的電流密度是反向的，是屬於磁偶極矩。當  $40 \text{ nm} \leq L_r \leq 60 \text{ nm}$  與  $180 \text{ nm} \leq L_r \leq 260 \text{ nm}$  時候，奈米金柱(Au Nanorod)上的電流密度與金基板(Au substrate)的電流密度是反向的，是屬於電偶極矩。因為我們已經從圖 3-13 知道反射率，因此，可以與圖 3-15、圖 3-16 相呼應，當  $L_r = 120 \text{ nm}$  時候，所對應的磁場與電場強度是非常大的。除此之外，可以仔細觀察，當  $L_r = 40 \text{ nm}$  時候，磁場強度集中在金基板(Au Substrate)上方，當  $L_r = 120 \text{ nm}$  時候，磁場強度集中在氟化鎂隔離層(MgF<sub>2</sub> Spacer)，當  $L_r = 240 \text{ nm}$  時候，磁場強度集中在奈米金柱(Au Nanorod)上表面。

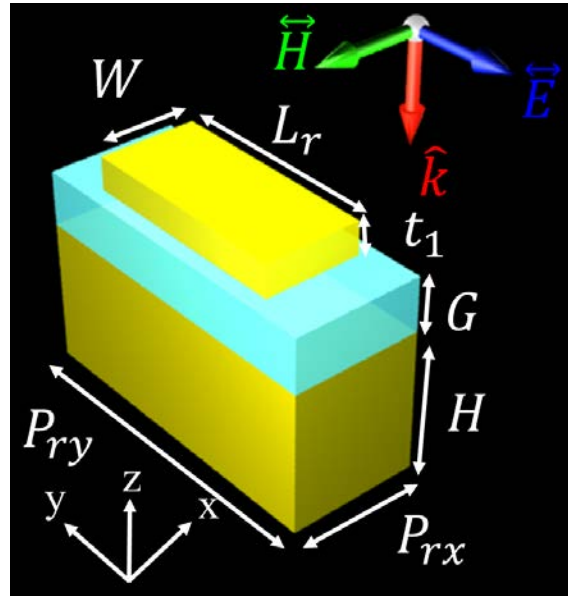


圖 3-12: 單一奈米金柱在小單元結構的幾何，其中寬度  $W = 90 \text{ nm}$ ，厚度  $t_1 = 30 \text{ nm}$ 。

$\text{MgF}_2$  薄膜厚度  $G = 50 \text{ nm}$ 。每一小單元結構所佔據的幾何面積  $P_{rx} \times P_{ry} = 120 \times 300$

$\text{nm}^2$ 。

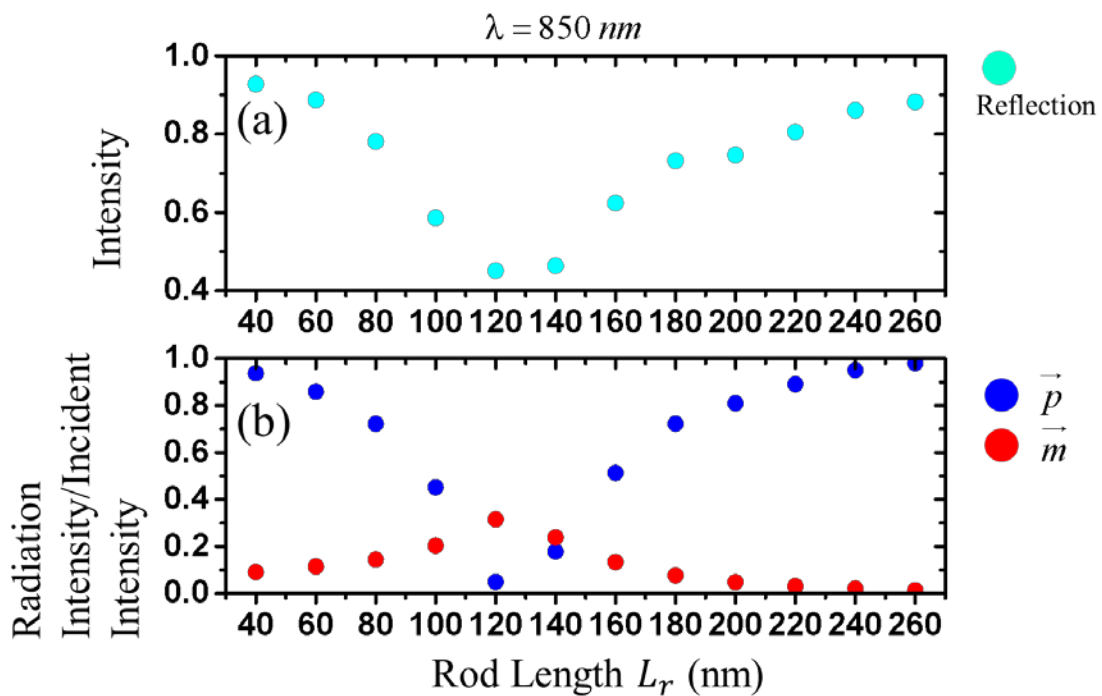


圖 3-13: 當入射光波長為 850 奈 (a) 改變奈米金柱的長度 ( $L_r$ ) 所對應的耦合式天線

結構的反射光譜以及 (b) 歸一後多極矩散射強度 (其中  $\vec{p}$  為電偶極矩,  $\vec{m}$  為磁偶極矩)

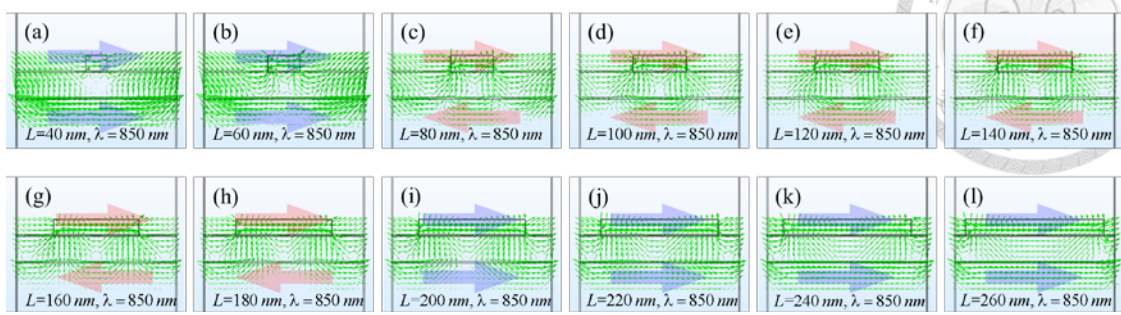
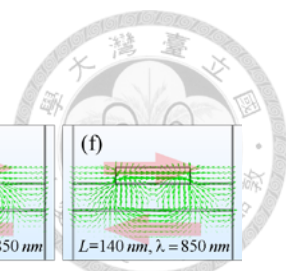


圖 3-14: 綠色箭頭表示電流密度( $\vec{J}$ ), 其中藍色大箭頭表示同向電流, 紅色大箭頭表示反向電流

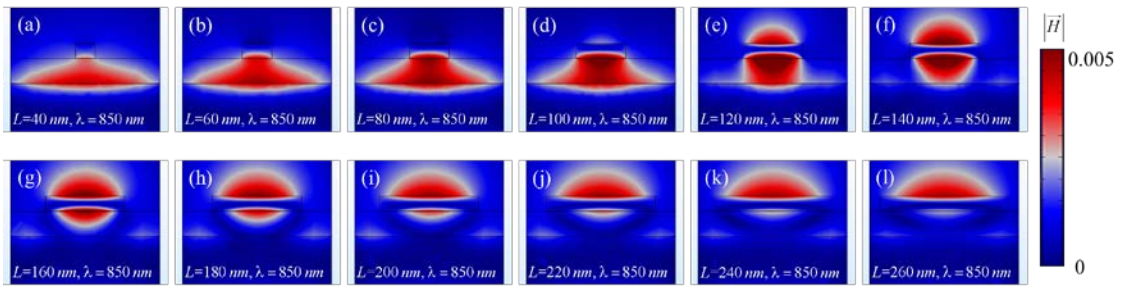


圖 3-15: YZ 截面的場形圖 (a)-(l)依序分別表示奈米金柱的長度由小到大的磁場強度 $|\vec{H}|$

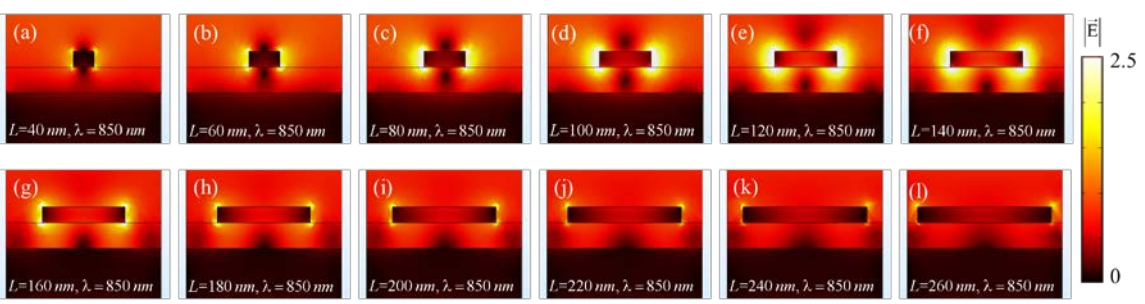
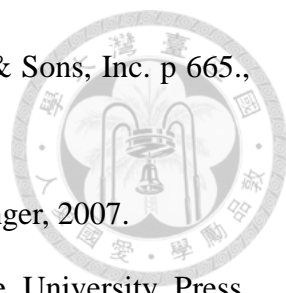


圖 3-16: YZ 截面的場形圖 (a)-(l)依序分別表示奈米金柱的長度由小到大的電場強度 $|\vec{E}|$

### 3.6 參考資料

[1] R. W. P. King, *The Theory of Linear Antennas*. Harvard University Press, 1956

- 
- [2] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics. 3rd ed.* John Wiley & Sons, Inc. p 665., 1999
- [3] S. A. Maier, *Plasmonics: Fundamentals and Applications.* Springer, 2007.
- [4] L. Novotny, H. Bert, *Principles of Nano-Optics.* Cambridge University Press, 2011.
- [5] J. Zuloaga, and P. Nordlander, “On the Energy Shift between Near-Field and Far-Field Peak Intensities in Localized Plasmon Systems,” *Nano Lett.* **11**, 1280-1283 (2011)
- [6] S. Zhang, D. A. Genov, Y. Wang, M. Liu, and X. Zhang, “Plasmon-Induced Transparency in Metamaterials,” *Phys. Rev. Lett.* **101**, 047401 (2008).
- [7] N. Liu, L. Langguth, T. Weiss<sup>1</sup>, J. Kästel, M. Fleischhauer, T. Pfau ,and H. Giessen, “Plasmonic analogue of electromagnetically induced transparency at the Drude damping limit,” *Nat. Mater.* **8**, 758 - 762 (2009).
- [8] M. A. Kats, N. Yu, P. Genevet, Z. Gaburro, and F. Capasso, “Effect of radiation damping on the spectral response of plasmonic components,” *Opt. Express* **19**, 21748- 21753 (2011).
- [9] M. G. Nielsen, D. K. Gramotnev, A. Pors, O. Albrektsen, and S. I. Bozhevolnyi, “Continuous layer gap plasmon resonators,” *Opt. Express.* **19**, 19310-19322 (2013).
- [10] A. Pors, M. G. Nielsen, and S. I. Bozhevolnyi, “Broadband plasmonic half-wave plates in reflection,” *Opt. Lett.* **38**, 513-515 (2013).
- [11] A. Pors, and S. I. Bozhevolnyi, “Plasmonic metasurfaces for efficient phase control in reflection,” *Opt. Express.* **21**, 27438- 27451 (2013).
- [12] S. Sun, Q. He, S. Xiao, Q. Xu, X. Li, and L. Zhou, "Gradient-index meta-surfaces as a bridge linking propagating waves and surface waves," *Nat. Mater.* **11**,



426-431 (2012).

[13] 楊光宇, "介面梯度超穎材料之電磁波調控研究," 碩士論文, 國立臺灣大學, 臺灣, 2012.

[14] V. Savinov, V. A. Fedotov, and N. I. Zheludev, "Toroidal dipolar excitation and macroscopic electromagnetic properties of metamaterials," *Phys. Rev B* **89**, 205112 (2014).



## Chapter 4 反射式超穎介面之斯乃爾定律分析



### 4.1 研究動機

從前面幾個章節，我們已經了解到可以利用非常小的單元(unit cell)幾何結構來表現相對的相位，特過適當的設計，每個小單元(unit cell)的幾何結構，所構成的大週期性(supercell)結構，其總體的超穎介面可以表現出異常反射、異常穿透、聚焦、分光以及全像等等的光學元件功能。

在此研究中，我們專注在利用超穎介面呈現出廣義斯乃爾定律的現象。在 2011 年，Nafang Yu 已經透過以 V 型結構為小單元所構成的超穎介面實驗證明，在文獻 [1] 中圖三中的 C、D 圖如下圖 4-1。觀察到，若要改變異常反射或者異常穿透的角度，則是透過改變週期性結構(Supercell)的長度即可。在 2012 孫樹林教授所發表的 H 型結構為小單元所構成的超穎介面[2]，透過改變週期性結構(Supercell)的長度，也可以改變異常反射的角度，當週期性結構(Supercell)的長度增加，異常反射角度也是增加，但是當大週期性結構(Supercell)的長度大於入射光波長的大小時，則此超穎介面會將入射光轉成在超穎介面上行走的表面波型態。這是由於超穎介面提供非常大的橫向波向量給入射光，使得反射光不具有前進方向的波向量(圖 4-2)。此超穎介面的功能將 15GHz 的電磁波轉成表面波的效率接近 100% 的元件。

從上面兩個例子以及雨後春筍般的研究所討論的異常反射、穿透的超穎介面，其大週期的結構(Supercell)所構成的相位一定滿足  $2\pi$ 。同時，在每個大週期的結構(Supercell)底下每個小單元(Unit Cell)結構所對應的相位互相為線性遞增或者遞減。因此，如果我們考慮到大週期的結構(Supercell)所構成的相位不滿足  $2\pi$ ，是

否可以改變異常反射、異常穿透的角度。為什麼我們會考慮大週期性結構所構成的相位是一個重要的因子，在下一小節會詳細說明。

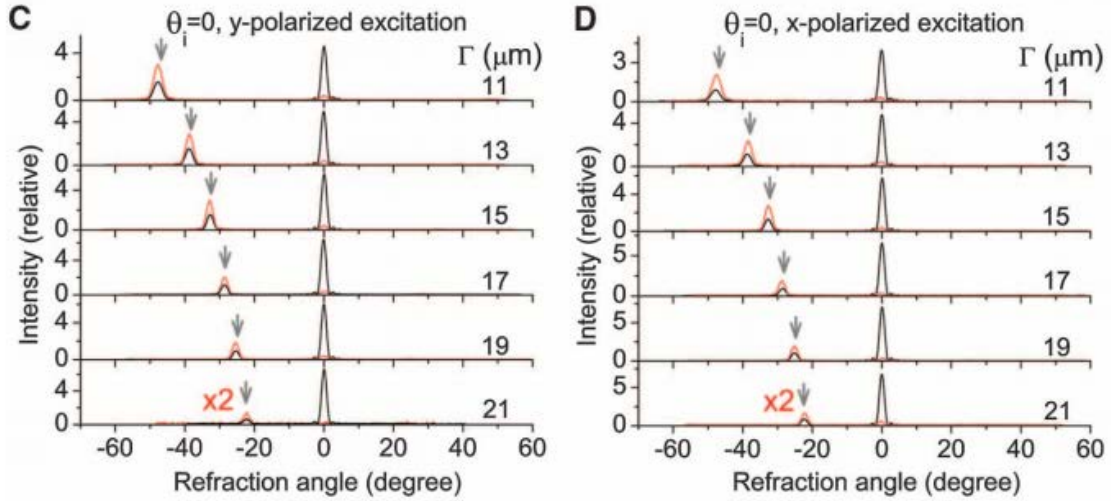


圖 4-1: 改變大週期的結構(Supercell) ( $\Gamma$  ( $\mu\text{m}$ ))的大小，進而改變異常反射角度[1]

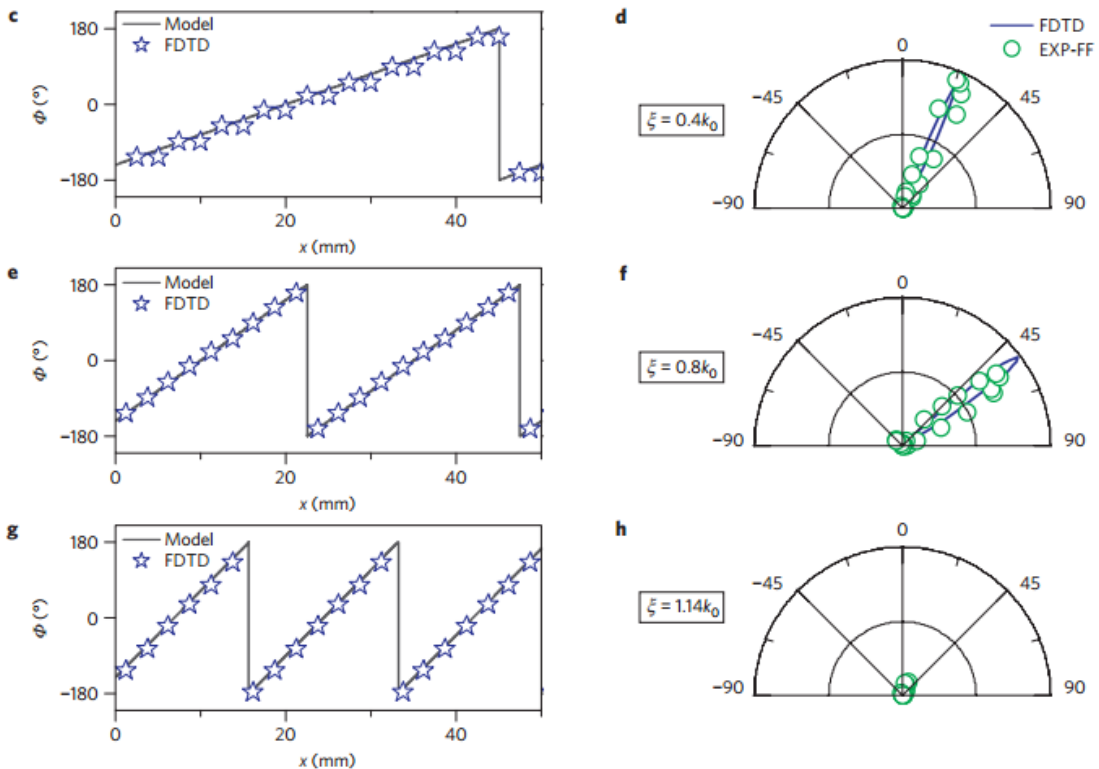


圖 4-2: 改變大週期的結構(Supercell) ( $\xi$ (mm))的大小，進而改變異常反射角度[2]



## 4.2 廣義超穎介面的斯乃爾定律

雖然我們已經在前面章節提過廣義斯乃爾定律，但是為了接下來討論模擬設計以及模擬結果的方便性，我們在此小節在定義我們所使用的參數。

圖 4-3(a)是我們所要研究的大週期結構(Supercell)的示意圖，它包含了十個小單元(Unit Cell)，其小單元為介電質與金屬的雙層薄膜所構成，其中介電質的折射率(Refractive Index)透過適當設計後，目的是為了模仿理想連續相位(Phase Shift)變化(Variations)的超穎介面。金屬薄膜當作基底，其厚度為 130 奈米。圖 4-3(b)是大週期結構的俯視圖，其中  $P_x$  為小單元結構(Unit Cell)沿著  $x$  方向的長度， $L_x$  為大週期結構(Supercell)沿著  $x$  方向的長度， $L_y$  同時為小單元結構以及大週期結構沿著  $y$  方向的長度。其中每一個小單元結構假設有一個折射率為  $n_i$  的材料。圖 4-3(c)為大週期結構(Supercell)的側視圖， $\theta_i$  為入射角度， $\theta_r$  為異常反， $\Delta\Phi$  為橫跨大週期結構的總相位差 ( $\Delta\Phi = k(n_{i0} - n_i)L_x$ )，其中  $k$  為入射光的波向量大小。超穎介面以圖 4-3 表示的架構下，我們可以將入射光、反射光與超穎介面的關係用廣義斯乃爾定律所描述如方程式(1)[1]

$$n_{ref} \sin(\theta_r) - n_{in} \sin(\theta_i) = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{d\Phi(x)}{dx} \quad (1)$$

其中  $n_{in}$  為入射光所存在環境的折射率， $n_{ref}$  為反射光所存在環境的折射率。 $\lambda$  表示為入射光波長， $d\Phi(x)$  表示隨著位置座標  $x$  變化，所相對應的極小相位差的變化。特別要注意的事是為了滿足方程式(4.1)，因此， $d\Phi(x)/dx$  必須為常數，此數值為  $2\pi/L_x$ 。然而橫跨整個大週期結構的總相位差變化定義為  $\Delta\Phi = \frac{d\Phi(x)}{dx} L_x$ 。因此，

根據方程式(4.1)，大週期結構的週期長度( $L_x$ )或者是橫跨整個大週期結構的總相位

差變化( $\Delta\Phi$ )可以決定異常反射角度。在先前章節有提到如何透過改變大週期結構的長度來改變異常反射角度，這已經被其他文獻詳細的討論了，然而，橫跨整個大週期結構的總相位差變化( $\Delta\Phi$ )是否可以影響異常反射角度的研究尚未被討論。

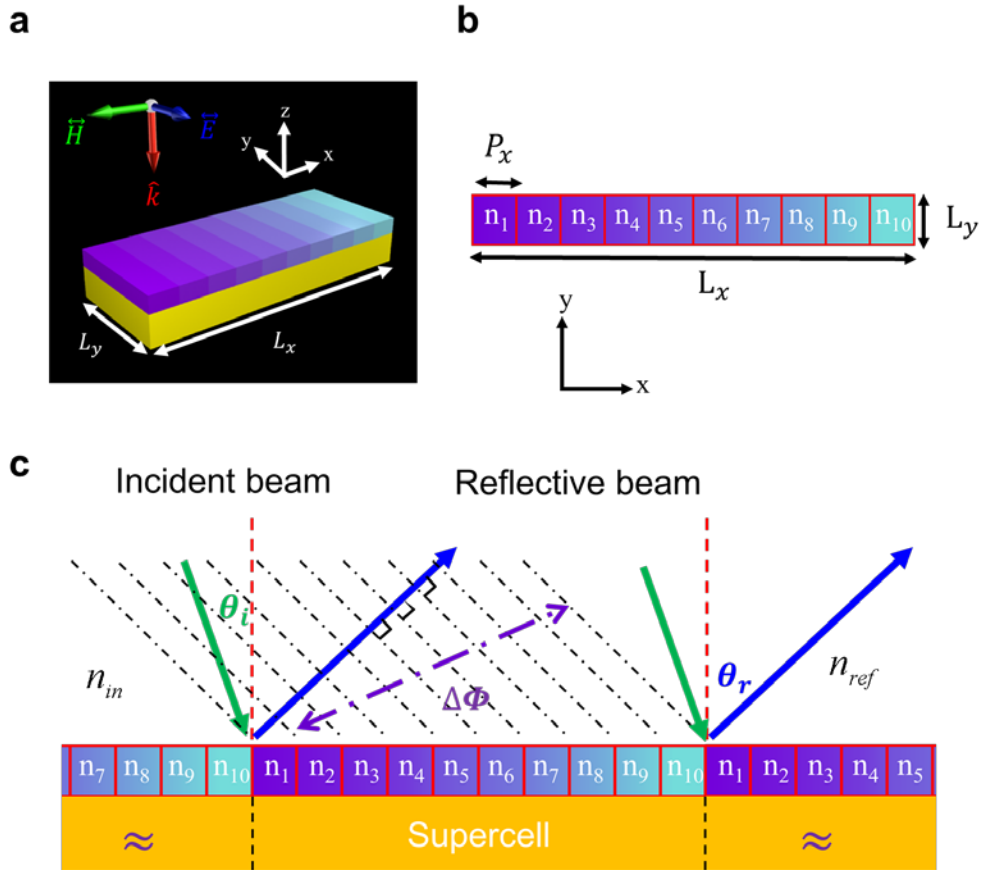
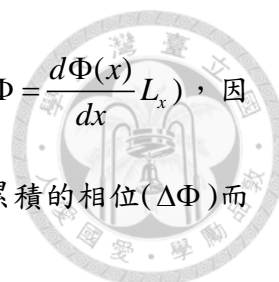


圖 4-3: 大週期結構示意圖。(a) 大週期結構包含兩層，上層為假想的介電質，下層為金基板。大週期結構被切割成十等分的小單元結構，其假想介電質的折射率隨著+x方向增加(b) 大週期結構的俯視圖。其中  $L_x = 1200 \text{ nm}$  ( $L_y = 300 \text{ nm}$ )， $P_x = 120 \text{ nm}$  (c) 大週期結構的側視圖。 $\Delta\Phi$  表示是大週期結構所提供的累積相位變化。

符號  $\hat{k}$  代表入射光的波向量方向。

如果我們改變此  $(d\Phi(x)/dx)$  比值大小，但是保持大週期結構的長度不變，則



所對應的大週期結構所累積的總相位變化是會改變的(根據  $\Delta\Phi = \frac{d\Phi(x)}{dx} L_x$ )，因此，從圖 4-4 所預期的異常反射角度( $\theta_r$ )會隨著大週期結構所累積的相位( $\Delta\Phi$ )而改變。

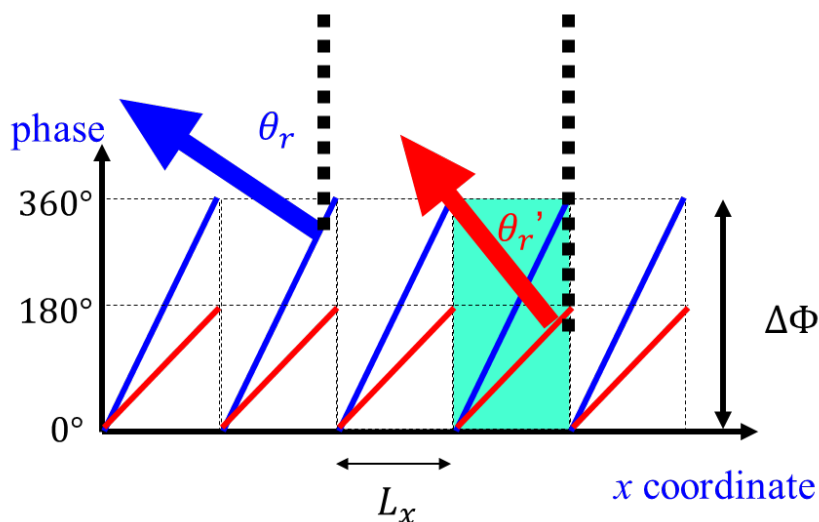


圖 4-4: 改變大週期結構所累積的相位( $\Delta\Phi$ )，所對應到的異常反射角度( $\theta_r$ )

### 4.3 數值模擬結果與分析

首先，我們會透過在大週期結構(Supercell)之中，每一個小單元(Unit Cell)賦予一個特定的折射率( $n_i$ )，再透過適當的排列後，會得到一個我們所想要的  $\Delta\Phi$ 。為了實現我們所提出的設計模型，我們使用電磁商業套裝軟體 COMSOL Multiphysics 以及 CST STUDIO SUITE，目的是用來計算反射率以及反射波的相位。(這裡的反射撥為複數形式)。圖 4-5 (a)為小單元結構的模擬示意圖，黃色部分為材料為金的基板，厚度為  $H = 130$  nm。紫色部分為不同折射率的介電質，其厚度為  $t = 20$  nm。小單元結構沿著 x 方向的週期為  $P_x = 60$  nm，沿著 y 方向的週期為  $P_y = 300$  nm。入射光從 z 方向往 -z 方向入射，其電場偏振沿著 y 方向。我們在 CST STUDIO SUITE

模擬環境中的邊界條件設定  $x, y$  方向為週期性(Periodic)，在  $z$  方向的邊界條件設定為完美吸收邊界(Perfect Matched Layered)，我們改變模擬參數的入射光波長( $\lambda$ )以及介電質折射率( $n_i$ )，入射光波長範圍設定從 500 nm 到 1200 nm，折射率範圍設定從 1 到 25。透過 CST STUDIO SUITE 模擬其小單元的反射波的強度(Reflectance)以及反射波的相位(Reflective Phase Shift)，我們將其模擬結果透過 Matlab 整理成圖 4-5 (b)與(c)，將反射波強度與相位整理成入射光波長與介電質折射率的函數。然而，為了延續之前實驗室所發表的文章以及實驗上的方便性，我們選擇波長為所對應的反射波強度以及相位，如圖 4-5 (d)所示。橘色線條表示反射波強度，藍色線條表示反射波相位，皆在波長為  $\lambda = 850$  nm 為介電質折射率( $n_i$ )的函數。

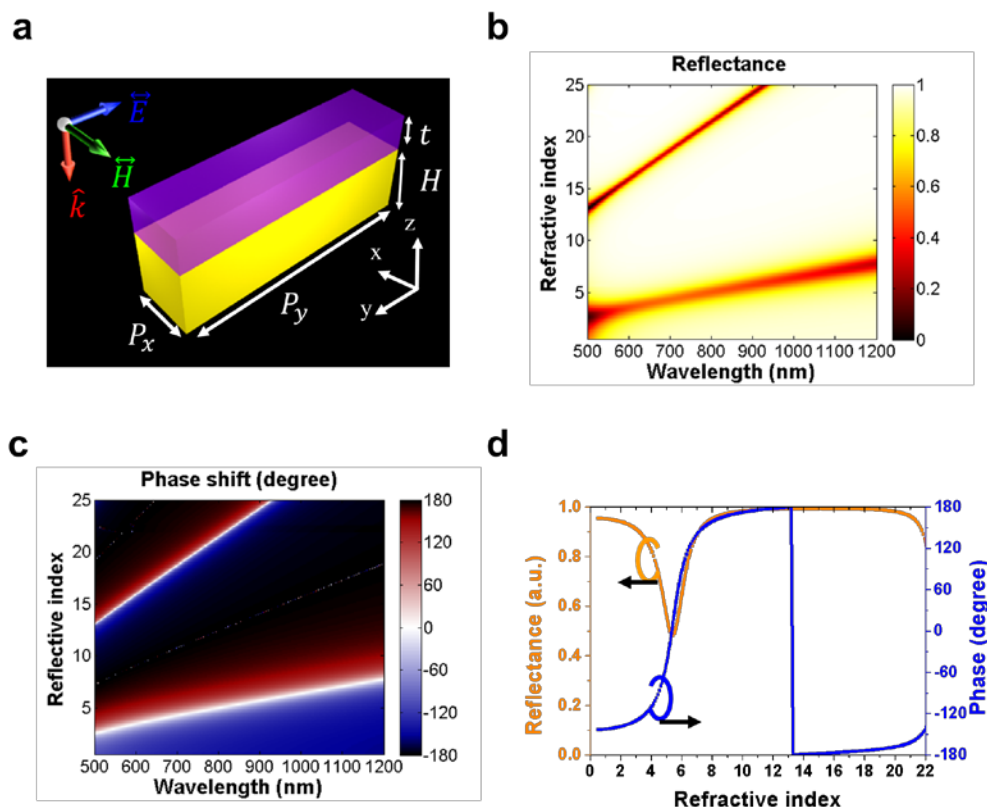


圖 4-5: 小單元結構的相位累積模擬 (a) 小單元結構的示意圖(unit cell)，其中  $P_x = 120$  nm ( $P_y = 300$  nm)， $H = 130$  nm 以及  $t = 20$  nm。具有  $y$  偏振的入射光正向入



射到小單元結構所得模擬結果，(b)反射波強度為波長-折射率函數(c) 反射相位累積為波長折射率函數(d) 取入射光波長為 850 nm 的反射波強度(橘色)以及相位累積(藍色)畫成假想介電質折射率的函數。

為了在一個大週期結構(Supercell)中提供足夠的相位變化的累積(i.e.  $\Delta\Phi = 2\pi(360^\circ)$ )，我們將每個小單元結構(介電質蒸鍍在金基板上)中的介電質的折射率從  $n_1 = 1.09$  排列到  $n_{10} = 14.74$  如圖 4-6(a)內所示。這排列使的  $d\Phi(x)/dx$  為常數，如圖 4-6(b)中，相位(Phase)是位置(x)階梯函數(Step Function)。將此大週期結構週期性排列成一個超穎介面，透過 COMSOL 設定入射光波長為  $\lambda = 850$  nm，正向入射到超穎介面，其反射波的波前(取散射場的電場 y 分量)如圖 4-6(a)所示。

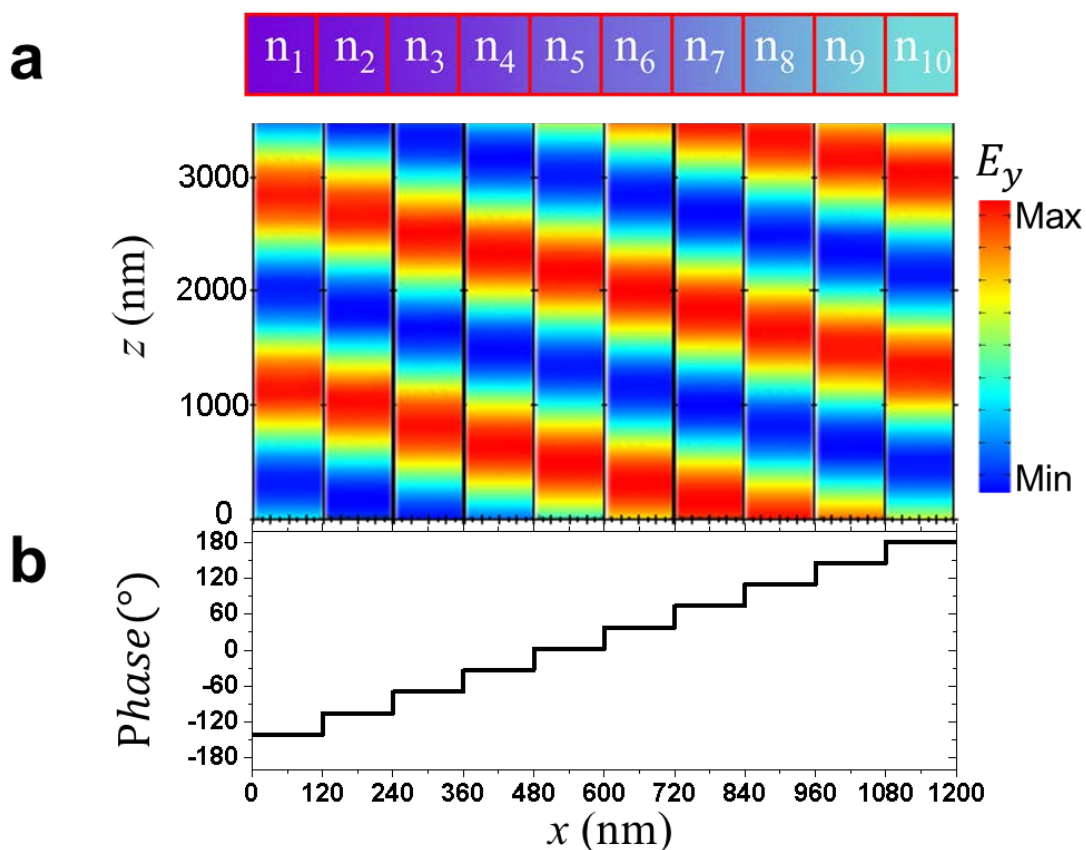


圖 4-6: 假想介電質的超穎材料的散射場模擬結果 (a) 上方插入圖像: 假想介電





質的折射率標記。在下方會對應到反射波電場  $y$  分量( $E_y$ )(b) 同時，相對應每個標記折射率所模擬沿著  $x$  軸的相對相位分布。

由上述選擇適當的介電質的折射率範圍以及適當地排列使得橫跨整個大週期結構的總相位變化差為  $\Delta\Phi = 360^\circ$ 。因此，我們可以選擇介電質折射率的範圍以及排列來改變  $\Delta\Phi$ 。接下來我們有一個表格描述(表格 2)，介電質折射率的選擇以及排列使的  $90^\circ \leq \Delta\Phi \leq 360^\circ$ 。

表格 2: 在不同的  $\Delta\Phi$  情況下，所對應的假想介電質折射率分布，在圖 4-3 (b)

$\Delta\Phi(^{\circ})$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$	$n_6$	$n_7$	$n_8$	$n_9$	$n_{10}$
$90^\circ$	1.09	2.73	3.32	3.82	4.11	4.33	4.47	4.64	4.75	4.85
$120^\circ$	1.09	3	3.7	4.11	4.39	4.59	4.75	4.88	5	5.1
$180^\circ$	1.09	3.32	4.11	4.47	4.75	4.94	5.1	5.23	5.35	5.47
$240^\circ$	1.09	3.7	4.39	4.75	5	5.19	5.35	5.5	5.67	5.86
$300^\circ$	1.09	3.93	4.59	4.94	5.19	5.39	5.58	5.81	6.11	6.62
$360^\circ$	1.09	4.17	4.75	5.1	5.35	5.58	5.86	6.28	7.2	14.74

透過使用 COMSOL 模擬此表格所設計的超穎介面，此超穎介面所反射的散射場大小隨著 COMSOL 模擬的接收角度而改變，我們定義此接收角度為圖 4-7(c) 的異常反射角度( $\theta_r$ )。在 COMSOL 模擬設定上，我們將大週期結構(Supercell)週期性地沿著  $x$  以及  $y$  方向排列目的是符合我們未來可以實驗的狀況，其大小為



$L_x \times L_y = 1200 \times 300$  平方奈米。設定模擬偵測平面在超穎介面正上方  $xy$  平面 ( $z = 300$  奈米)，偵測平面所偵測的物理量為坡印廷向量。

我們以  $\Delta\Phi = 360^\circ$  的模擬結果為標準，在異常反射角度為  $\theta_r = 45^\circ$ ，同時也滿足廣義斯乃爾定律((4.1)式)的預測結果。然而，廣義斯乃爾定律只適用於  $\Delta\Phi = 360^\circ$  的情況，那對於  $\Delta\Phi \neq 360^\circ$  的情況，根據(4.1)式，所預測的  $\theta_r$  可能會隨著  $\Delta\Phi$  而改變。

圖 4-7 (a)為在不同  $\Delta\Phi$  的情況下，被設計後的超穎介面所反射的散場場訊號隨著改變接收角度的函數。我們定義在  $\Delta\Phi = 360^\circ$  情況下， $\theta_r = 45^\circ$  為  $m = 1$  的訊號， $\theta_r = -45^\circ$  為  $m = -1$  的訊號， $\theta_r = 0^\circ$  為  $m = 0$  的訊號。然而模擬結果不符合我們所預期的，反而是改變不同的  $\Delta\Phi$  的超穎介面，其反射波的異常反射角度皆為  $\theta_r = 45^\circ$ ，其反射角度並不隨著  $\Delta\Phi$  改變。

圖 4-7 (b)是將圖 4-7 (a)中  $m = 1, 0, -1$  的訊號分別用不同顏色表示，將其強度表示為縱軸， $\Delta\Phi$  表示為橫軸。線條表示精確解，符號表式是 COMSOL 的數值模擬。非常明顯地，當  $\Delta\Phi = 360^\circ$  的情況下， $m = 1$  的訊號為最大，當  $\Delta\Phi = 0^\circ$  的情況下， $m = 0$  的訊號為最大，然而， $m = 1$  的訊號在  $\Delta\Phi = 180^\circ$  是比其他情況的  $\Delta\Phi$  為相對較大。

根據文獻[3],[4]，如果將圖 4-7(b)中，相位對位置的階梯函數做傅立葉分析，其散射場大小可以透過傅立葉分析後的係數絕對值平方取得，當  $m = -1$ ，其散射場能量為  $|A_{-1}|^2 = (1 - \text{sinc}^2[0.5 \times (\Delta\Phi - 360^\circ)] - \text{sinc}^2[0.5 \times \Delta\Phi]) \times 100\%$ ，當  $m = 0$ ，其散射場能量為  $|A_0|^2 = (\text{sinc}^2[0.5 \times \Delta\Phi]) \times 100\%$ ，當  $m = 1$ ，其散射場能量為  $|A_1|^2 = (\text{sinc}^2[0.5 \times (\Delta\Phi - 360^\circ)]) \times 100\%$ 。特別注意的事是總能量定義



$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} I_m = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} |A_m|^2 = 100\%$ 。我們觀察精確解釋平滑曲線，且可以達到 100%，然而

對於 COMSOL 模擬的散射場能量卻無法達到 100%，並且與精確解的能量有所差距，我們推測這是由於我們 COMSOL 模擬是由考慮入射光到基板的金有損耗的。

不過，不管是精確解或者是 COMSOL 數值解其強度與  $\Delta\Phi$  的關係是一致的。

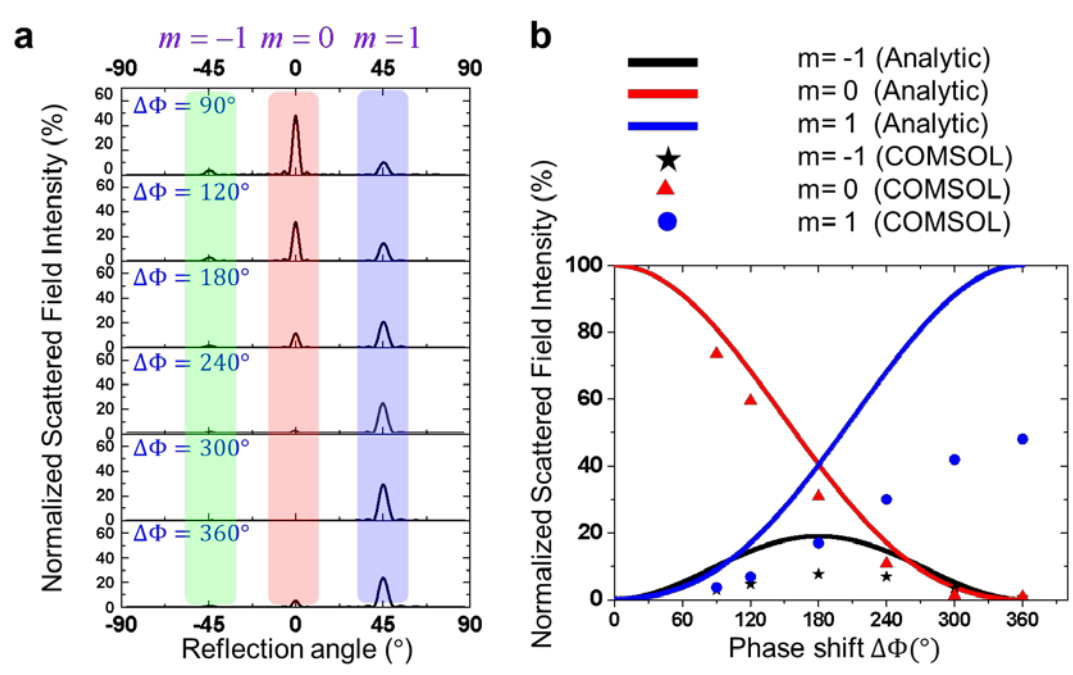


圖 4-7: 假想介電質超穎介面的散射場強度-反射角度數值模擬以及精確解(a) 不同  $\Delta\Phi$  的散射場強度-反射角度 COMSOL 模擬結果(b) 實線表示精確解。特別注意的是,  $m=1$  ( $m=0$ ,  $m=-1$ ) 分別表示繞射階數。符號表示從圖(a)取散射波強度的峰值。

以上的模擬結果與討論都是建立在假想的介電質的折射率介於 1 到 15 之間，這是在現實生活中很難實現的，因此，先前有提到超穎介面每個小單元，使用電子束微影製作的奈米結構，可以在一個非常小的區域，小於繞射極限的區域，等效一個非常高的折射率。為了實際可以實現我們所假設的介電質的折射率的設

計，我們沿用實驗室成員楊光宇所做的反射式介面梯度超穎介面為基礎[5]。首先，我們選擇實驗用的波長為 $\lambda = 850 \text{ nm}$ ，因為可以透過所設計的超穎介面應用在光熱治療，紅外線偵測器以及強吸收體等等元件上。在圖 4-8 (a)，是單一金奈米柱的幾何示意圖，金奈米柱的寬度為 $W = 90 \text{ nm}$ ，厚度 $t_1 = 30 \text{ nm}$ ，長度 $L_r \text{ (nm)}$ 。我們以金奈米柱在厚度 $H = 130 \text{ nm}$  為金的基板，以及厚度 $G = 50 \text{ nm}$  為的隔離層(spacer)氟化鎂( $\text{MgF}_2$ )當作是單一小單元結構(Unit Cell)，其中單一小單元結構所佔據的面積為 $P_{rx} \times P_{ry} = 120 \times 300 \text{ nm}^2$ 。

如同上述圖 4-8(d)的模擬結果，我們將模擬架構設定與入射光波長都與圖 4-5 (d)一樣，唯一不同的事情是我們將介電質折射率改成單一金奈米柱，從改變介電質折射率換成改變金奈米柱的長度( $L_r$ )。因此，圖 4-8 (b)為在入射光波長為 $\lambda = 850 \text{ nm}$  的情況下，相位(Phase)與金奈米柱長度( $L_r$ )的關係。為了與先前假想介電質的超穎介面作比較，因此，在圖 4-8 (c)中，我們保持大週期結構(Supercell)的面積大小不變，也就是 $L_x \times L_y = 1200 \times 300 \text{ nm}^2$ ，其中 $L_x$ 為沿著  $x$  方向的為大週期結構長度， $L_y$ 為沿著  $y$  方向的為大週期結構長度。同時，為了讓超穎介面調製異常反射光的效率提升，我們將結大週期結構分成十等分單一小單元結構，每兩等分單一小周期結構放置相同長度( $L_r$ )的金奈米柱。因此，每一個金奈米柱的長度( $L_r$ )表示一個對應相位，其對應相位之間的相位差為 $\Delta\Phi(^{\circ})/5$ ，為了讓橫跨大週期結構的總相位差變化( $\Delta\Phi$ )改變，我們依照表格 3 中奈米金柱的長度( $L_r$ )作調整，使得排列如圖 4-8 (c)。

同樣地，我們透過 COMSOL 模擬此金奈米柱所構成的超穎介面，在 COMSOL 模擬設定中，如同上述模擬介電質超穎介面的設定一樣，我們將大週期結構

(supercell)週期性地沿著  $x$  以及  $y$  方向排列，其大小為  $L_x \times L_y = 1200 \times 300 \text{ nm}^2$ 。設定模擬偵測平面在超穎介面正上方  $xy$  平面 ( $z = 300 \text{ nm}$ )，偵測平面所偵測的物理量為坡印廷向量。入射光設定為  $\lambda = 850 \text{ nm}$ 。同時，在偵測平面計算出異常反射角度，透過偵測平面計算遠場的散射光大小。

圖 4-8 (d) 為當波長為  $\lambda = 850 \text{ nm}$  正向入射到超穎介面上，其反射的訊號與接收角度的關係，同樣地，圖 4-8 (d) 的模擬結果與圖 4-8 (a) 模擬結果的趨勢是一致性。也就是說，我們所認為的異常反射訊號可能與大週期結構所提供的總相位差變化 ( $\Delta\Phi$ ) 是有關的，但是從目前的模擬結果來看是無關的。接下來，我們會從狹縫繞射理論去討論。

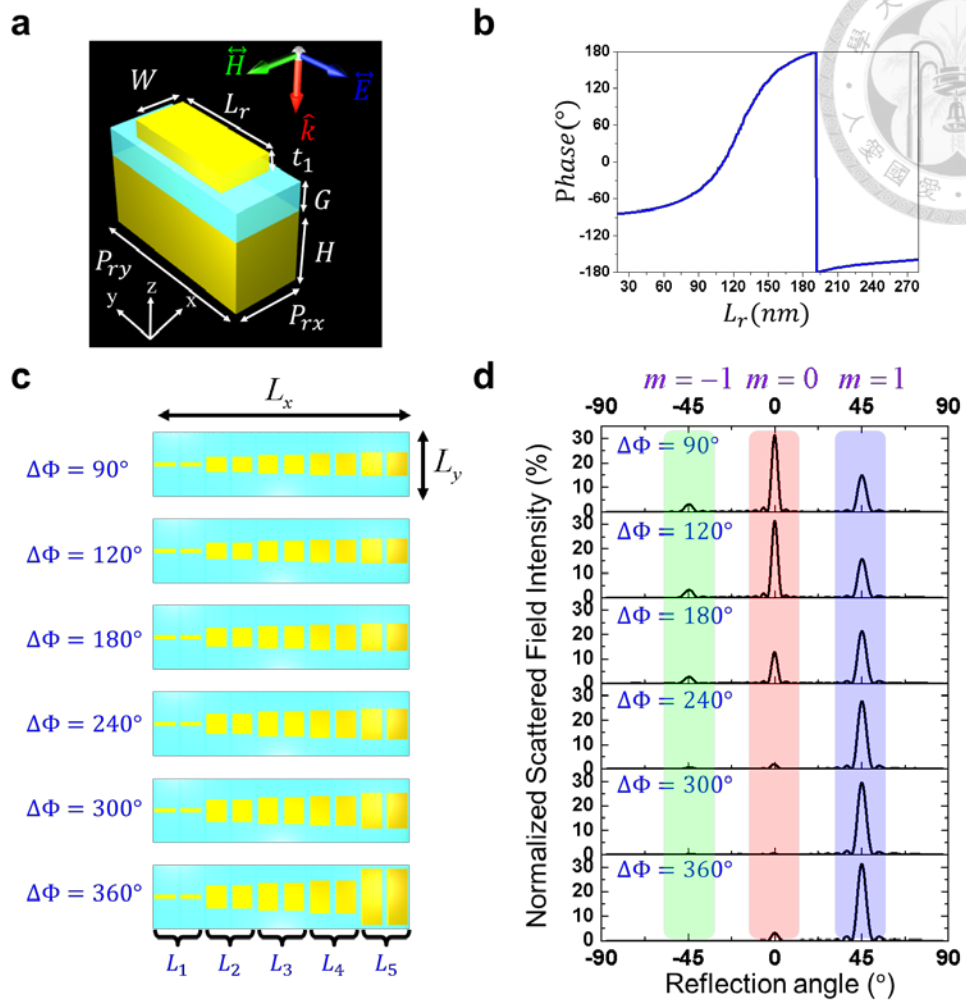


圖 4-8: 由金奈米柱構成的超穎介面 (a) 單一奈米柱在小單元結構的幾何  $W = 90 \text{ nm}$ ,  $t_1 = 30 \text{ nm}$ .  $\text{MgF}_2$  薄膜, 其中  $G = 50 \text{ nm}$ 。每一小單元結構所佔據的幾何面積  $P_{rx} \times P_{ry} = 120 \times 300 \text{ nm}^2$ . (b) 在入射光波長  $850 \text{ nm}$  照射下, 其金奈米柱所對應的相位隨著金奈米柱長度  $L_r$  改變 (c) 大週期結構所應不同  $\Delta\Phi$  的俯視圖  $L_x \times L_y = 1200 \times 300 \text{ nm}^2$ . (d) 在不同  $\Delta\Phi$  情況下, 散射光強度-角度的模擬結果。

表格 3: 在圖 4-8 (c)中，不同  $\Delta\Phi$  所對應的超穎介面，其中金奈米柱的長度( $L_r$ )

$\Delta\Phi(^{\circ})$	$L_1 (nm)$	$L_2 (nm)$	$L_3 (nm)$	$L_4 (nm)$	$L_5 (nm)$
90°	20	71	89	100	107
120°	20	78	96	107	116
180°	20	89	107	118	127
240°	20	96	116	127	140
300°	20	103	121	137	164
360°	20	107	127	150	260

根據文獻[6]，我們知道  $N$  個狹縫繞射的公式如下，

$$I(\theta) = I_0 \frac{(\sin(N \frac{\alpha}{2}))^2 (\sin \frac{\beta}{2})^2}{N^2 (\sin \frac{\alpha}{2})^2 (\frac{\beta}{2})^2} \quad (2)$$

其中公式(2)裡面的  $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi d \sin(\theta_r)}{\lambda}$  本來表示鄰近兩個狹縫之間在遠方屏幕上相對的

相位差(圖 4-9 (a))，而在這裡表示為鄰近兩個大週期結構相對的光程差，只要將狹縫週期改為大週期結構的長度大小(i.e.  $d = L_x$ )，特別注意的是，這裡的  $N$  表示狹

縫的數目，也同時可以表示大週期結構的數目。此外，為了表示實驗的真實性，

我們會考慮  $N$  是趨近於無限大(i.e.  $N \rightarrow \infty$ )。此外，公式(4.2)裡面的  $\frac{\beta}{2} = \frac{\pi a \sin(\theta_r)}{\lambda}$

本來是表示在單一狹縫中，兩個邊界的相對相位差，也就是單狹縫繞射(圖 4-9

(b))，在這裡表示大週期結構中(Supercell)第一個單一小單元結構(1 st- Unit Cell)與

第十個小單元結構(10 t- Unit Cell)的相位差。 $\lambda$ 表示入射光波長， $a$ 本來表示狹縫寬



度，在這裡是表示超穎介面的大週期結構的週期大小( $a = L_x$ )。我們觀察公式(4.2)，

將之拆成兩部分，一部分是  $\frac{(\sin(N\frac{\alpha}{2}))^2}{N^2(\sin\frac{\alpha}{2})^2}$  狹縫之間的干涉，另外一部分是  $\frac{(\sin\frac{\beta}{2})^2}{(\frac{\beta}{2})^2}$  單

一狹縫的繞射。

我們定義  $\theta_r$  為異常反射角度，但是在這裡的公式二可以定義偏離超穎介面的法線方向的角度，恰好與異常反射角度定義相同(比較圖 4-3 與圖 4-9)。

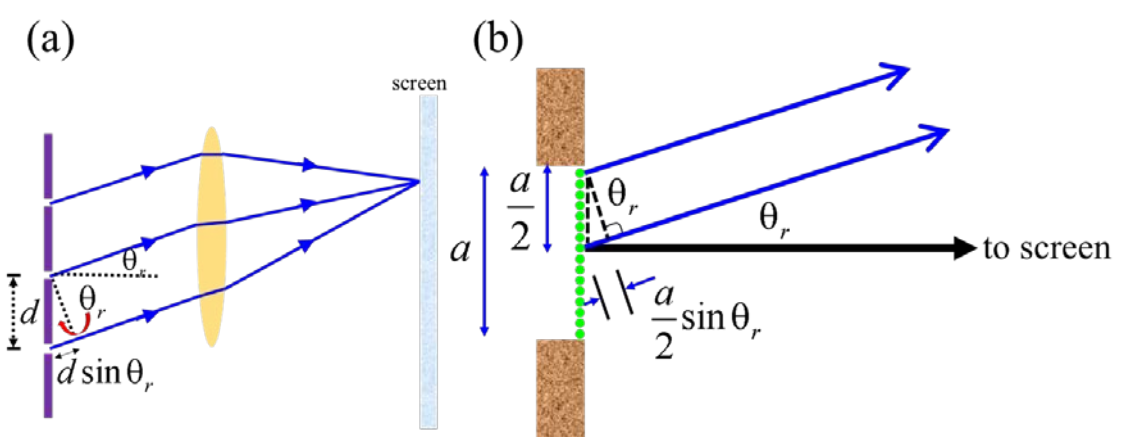


圖 4-9: (a)狹縫之間的干涉(b)單一狹縫的繞射

我們先討論 N 個大週期結構(Supercell)之間的干涉就好比 N 個狹縫之間的干

涉，因此，我們畫出圖 4-11 (a)，使用公式(4.2)的  $\frac{(\sin(N\frac{\alpha}{2}))^2}{N^2(\sin\frac{\alpha}{2})^2}$ ，干涉強度與異常反

射角度關係圖。但是對於單單狹縫繞射公式，我們知道是假設在狹縫中每個位置當作一個點光源，每個點光源彼此在遠方屏幕(Screen)做干涉，其點光源之間所累

積的相位差為  $\frac{\beta}{2} = \frac{\pi a \sin(\theta_r)}{\lambda}$ ，這些點光源都是假設同時同相位發射電磁波(i.e. In

Phase)，因此，如果我們讓點光源之間不是同時發射出電磁波，則累積的相位差會



變成  $\frac{\beta}{2} = \frac{\pi a \sin(\theta_r)}{\lambda} - \left(\frac{\Delta\Phi(^{\circ})}{360} \times \pi\right)$ ，如圖 4-10，紅色表示點光源，但是不是同時發出電磁波，也就不是同相位。我們將大週期結構(Supercell)是作為一個狹縫，大週期結構裡面每一個小單元結構(Unit Cell)可以是作為一個點光源，我們透過調整小單元結構的幾何使得橫跨整個大週期結構的總相位差變化為  $\Delta\Phi$ 。

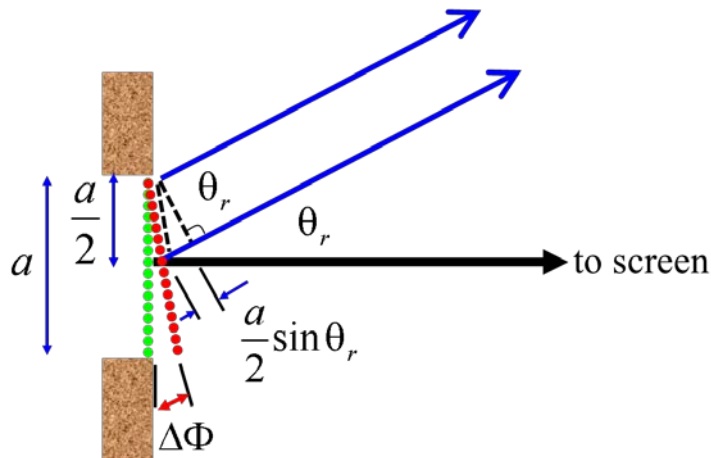


圖 4-10: 單狹縫繞射示意圖，其點光源不同時發出

接下來我們改變(4.2)式中  $\frac{(\sin \frac{\beta}{2})^2}{(\frac{\beta}{2})^2}$  中的  $\frac{\beta}{2}$ ，將不同的  $\Delta\Phi$  放入，畫出圖 4-11 (b)

中的紅色線條，當  $\Delta\Phi = 90^{\circ}$  時候，其紅色線條的波峰非常靠近  $\theta_r = 0^{\circ}$ 。當  $\Delta\Phi$  增加時，觀察到紅色線條的波峰往  $\theta_r = 90^{\circ}$  移動。當  $\Delta\Phi = 360^{\circ}$  時候，其波峰坐落在  $\theta_r = 45^{\circ}$ 。

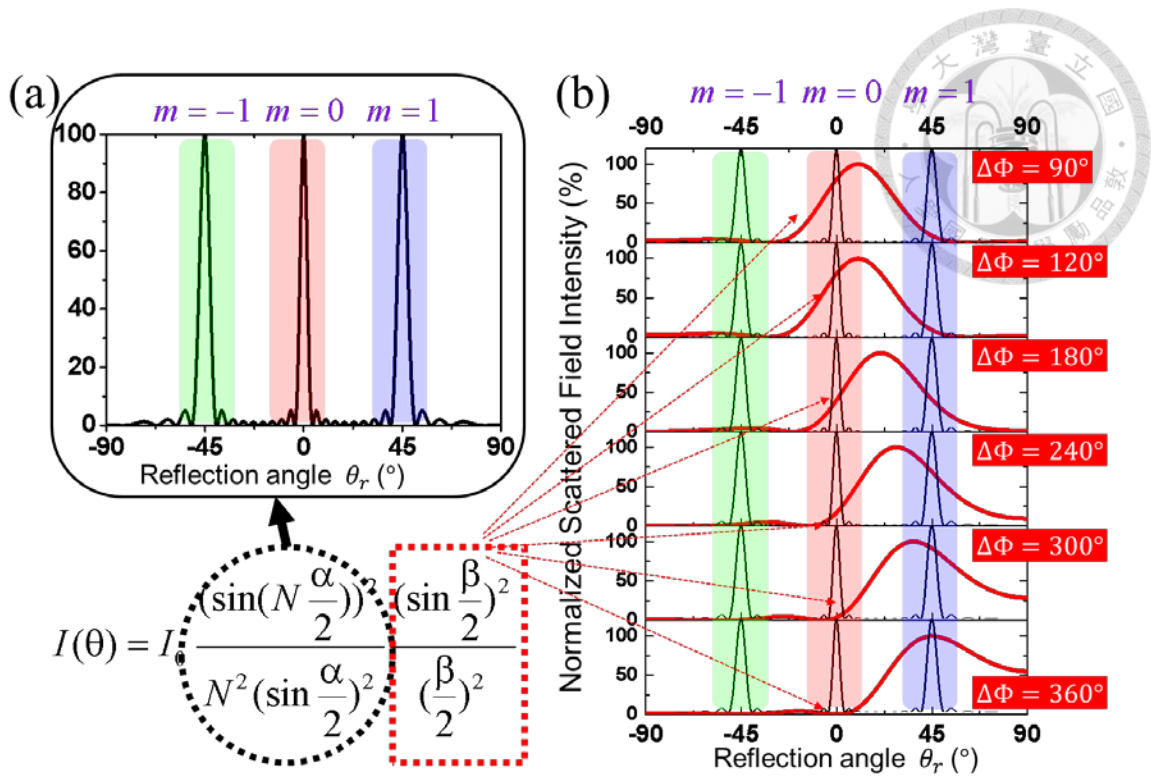


圖 4-11: (a)狹縫之間干涉的強度與角度( $\theta_r$ )關係 (b)狹縫繞射在不同的  $\Delta\Phi$  對應道不同的  $\theta_r$ 。

接下來我們將狹縫干涉項  $\frac{(\sin(N\frac{\alpha}{2}))^2}{N^2(\sin\frac{\alpha}{2})^2}$  與狹縫繞射項  $\frac{(\sin\frac{\beta}{2})^2}{(\frac{\beta}{2})^2}$  相乘。得到圖

4-12。我們觀察到圖 4-12 與圖 4-7 (a)與圖 4-8 (d)的三者同表趨勢是一樣的。

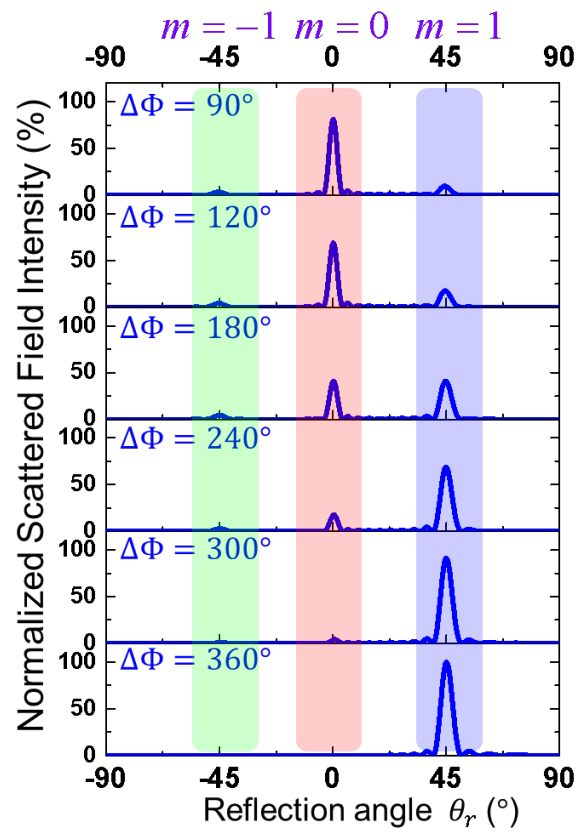
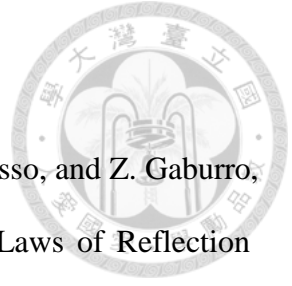


圖 4-12: 在不同  $\Delta\Phi$  的情況下，同時考慮狹縫干涉與繞射



#### 4.4 參考文獻

- [1] N. Yu, P. Genevet, M. A. Kats<sup>1</sup>, F. Aieta, J.-P. Tetienne, F. Capasso, and Z. Gaburro, “Light Propagation with Phase Discontinuities: Generalized Laws of Reflection and Refraction,” *Science* **334**, 333-337 (2011).
- [2] S. Sun, Q. He, S. Xiao, Q. Xu, X. Li, and L. Zhou, “Gradient-index meta-surfaces as a bridge linking propagating waves and surface waves,” *Nature Mater.* **11**, 426-431 (2012).
- [3] J. A. Davis, D. M. Cottrell, J. Campos, M. J. Yzuel, and I. Moreno, “Encoding amplitude information onto phase-only filters,” *Appl. Opt.* **38**, 5004-5013 (1999).
- [4] I. Moreno, J. A. Davis, T. M. Hernandez, D. M. Cottrell, and D. Sand, “Complete polarization control of light from a liquid crystal spatial light modulator,” *Opt. Express.* **2**, 364-376 (2012).
- [5] S. Sun, K.-Y. Yang, C.-M. Wang, T.-K. Juan, W. T. Chen, C. Y. Liao, Q. He, S. Xiao, W.-T. Kung, G.-Y. Guo, L. Zhou, and Din Ping Tsai, “High-Efficiency Broadband Anomalous Reflection by Gradient Meta-Surfaces,” *Nano Lett.* **12**, 6223 (2012).
- [6] E. Hecht, *Optics* (Addison-Wesley, Massachusetts, 2002) 4th ed., p. 385.

## Chapter 5 結論



透過設計不同的大週期結構(Supercell)所累積的相位( $\Delta\Phi$ )所對應的超穎介面已經在本論中分析了。我們也使用假想介電質的超穎介面以及金奈米柱的超穎介面透過 COMSOL 模擬軟體分析其散射場強度-角度關係。對於超穎介面而言，其大週期結構所累積的相位， $\Delta\Phi = 360^\circ$  為一個充分條件，但是對於  $0^\circ \leq \Delta\Phi \leq 360^\circ$  所設計的超穎介面而言，其散射光能量不再是集中在  $m=1$  階，而是重新分配到  $m=-1$  階、 $m=0$  階以及  $m=1$  階。我們重新使用多狹縫繞射理論探討此議題。至於為什麼可以使用多狹縫繞射重新詮釋，是因為我們無法做出小於繞射極限的光波源，因此，對於光來說，超穎介面好像是大面積的狹縫，無法感受到每一個小單元結構 (Unit Cell) 所累積的相位。因此，當  $\Delta\Phi$  為週期性線性遞增，所設計的超穎界面的散射強度皆是在  $m=-1$  階、 $m=0$  階以及  $m=1$  階。透過這個結果，我們可以更進一步設計環繞式的一維梯度相位的超穎介面元件，而達具有模擬透鏡聚焦的效果(在 Chapter 6.4 的參考文獻[5])。

## Chapter 6 補充資料



### 6.1 計算異常反射角度以及轉換效率

為了計算異常反射角度以及轉換效率，我們會先簡單說明 COMSOL 3.5a 設定過程。首先，我們整篇論文都是使用“十”個大週期結構作為我們的模擬基礎。如圖 6-1。



圖 6-1: 十個大週期結構(Supercell)的俯視圖

為了到遠場散射訊號，我們在整體結構最上方設定波源以及遠場計算。設定“Efar”如圖 6-2。

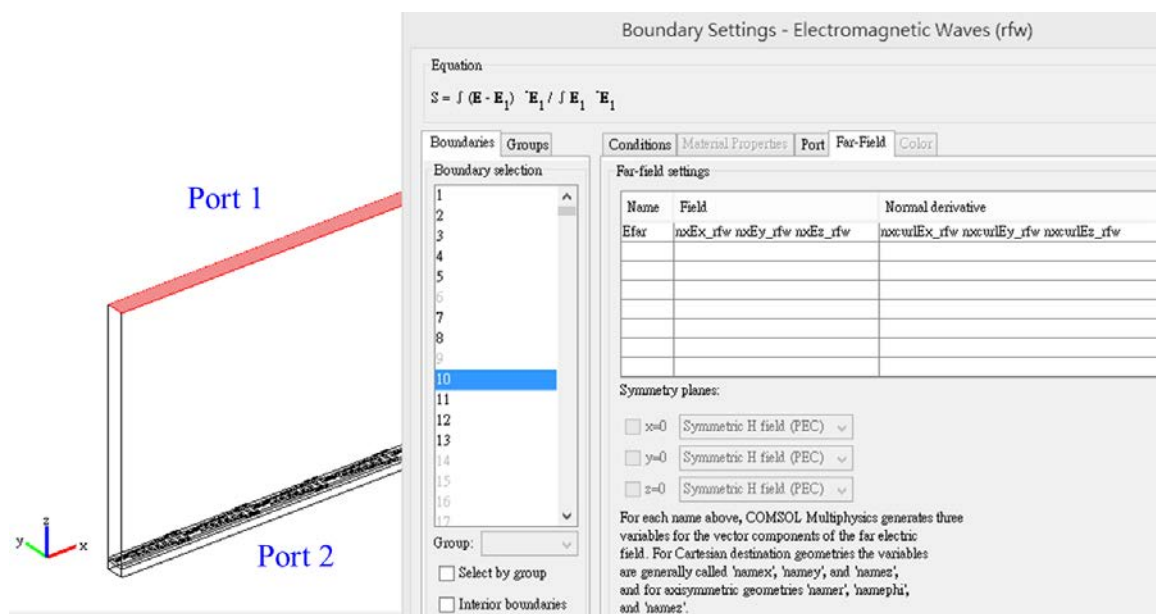


圖 6-2: Port 1 邊界條件的設定，Port 1 為波源發射端，Port 2 為波源接收端。



設定所有恰當的模擬條件並且執行 COMSOL 3.5a 後，我們在後處理上選擇拉出一條線，在基板上方  $z=300\text{nm}$  處，計算“normEfar<sup>2</sup>”，此為遠場電場大小平方，代表遠場的散射強度。

在此之前，我們要先了解什麼是 atan2，atan2 是正切函數 tan 的一個變種。對於任意不同時等於 0 的實參數  $x$  和  $y$ ，atan2( $x,z$ )所表達的意思是坐標原點為起點，指向( $z,x$ )的射線在坐標平面上與  $x$  軸正方向之間的角的角度。當  $x>0$  時，射線與  $z$  軸正方向的所得的角的角度指的是  $z$  軸正方向繞逆時針方向到達射線旋轉的角的角度；而當  $x<0$  時，射線與  $z$  軸正方向所得的角的角度指的是  $z$  軸正方向繞順時針方向達到射線旋轉的角的角度[1]。在 COMSOL 之中，我們透過 atan2 去掃描，我們掃描從-90 度到+90 度的遠場散射強度(normEfar<sup>2</sup>)(Scattered Field Intensity)，如圖 6-5。下方式(1)為 atan2 的數學定義。

$$\text{atan } 2(x, z) = \left\{ \begin{array}{ll} \arctan\left(\frac{x}{z}\right) & z > 0 \\ \arctan\left(\frac{x}{z}\right) + \pi & x \geq 0, z < 0 \\ \arctan\left(\frac{x}{z}\right) - \pi & x < 0, z < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & x > 0, z = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x < 0, z = 0 \\ \text{undefined} & x = 0, z = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

在 COMSOL 後處理介面如圖 6-3 與圖 6-4， $\theta$  定義為偏離  $z$  軸的角度。

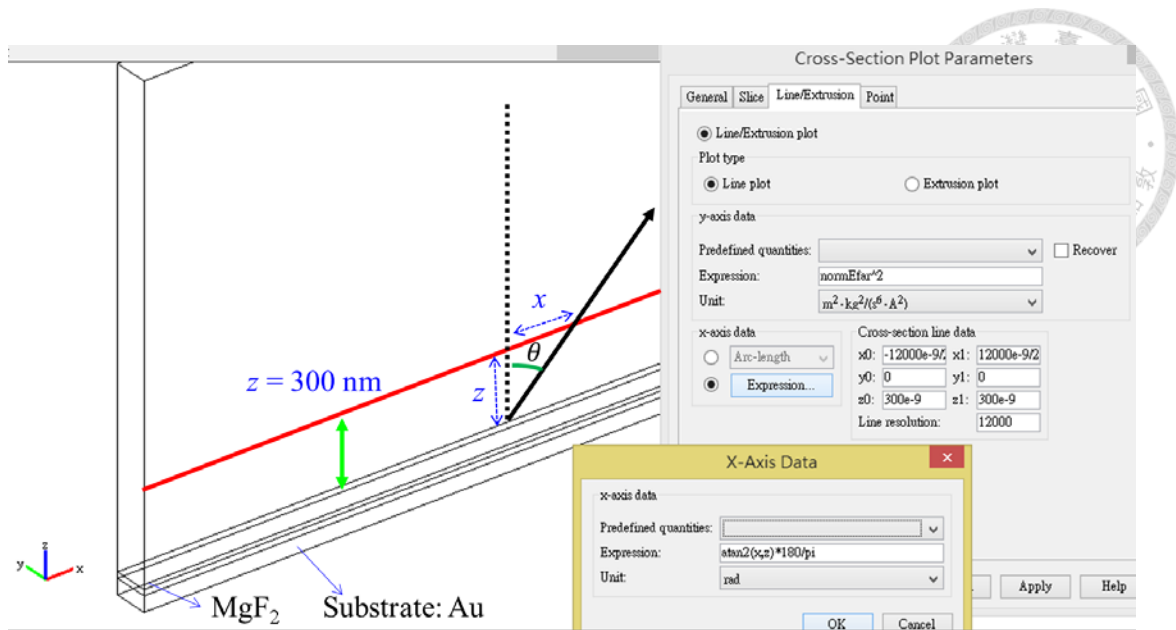


圖 6-3: 沒有金屬奈米柱的模擬環境，此為 COMSOL 後處理介面

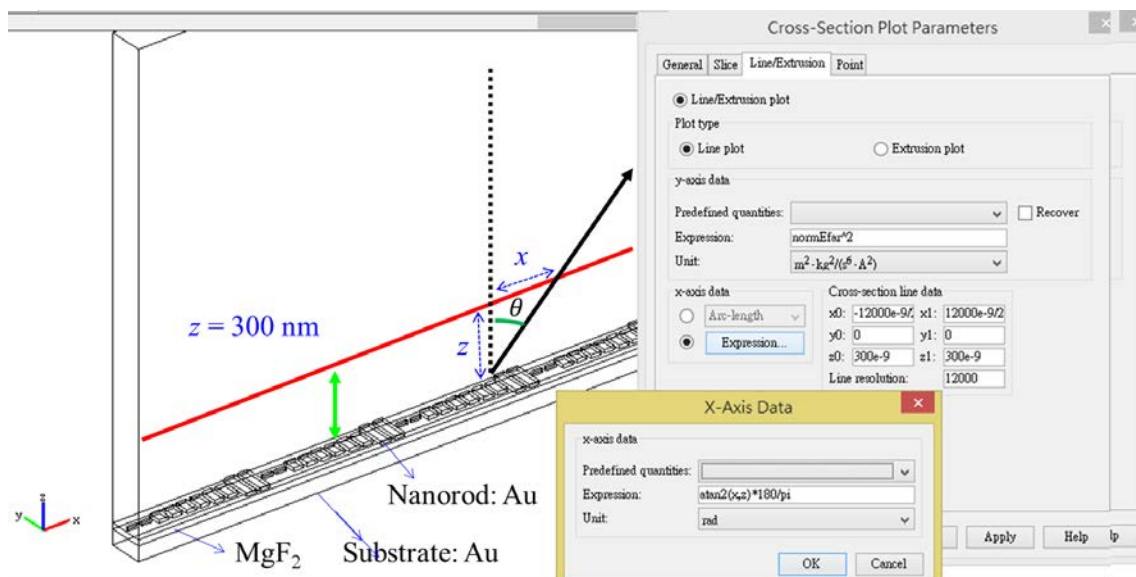


圖 6-4: 有金屬奈米柱的模擬環境，此為 COMSOL 後處理介面

透過後處理後，我們會得到圖 6-5，其中(a)為沒有金奈米柱的遠場散射強度，(b) 有金奈米柱的遠場散射強度，觀察圖(a)波束寬(Beamwidths)的  $\Delta\theta = 8^\circ$ ，觀察圖(b)波束寬(Beamwidths)的  $\Delta\theta = 12^\circ$ ，如果要計算轉換效率(Conversion Efficiency)的





話，嚴格來說是  $Conversion\ efficiency = \frac{\int_{without\ nanorod} normE_{far}^2 d\Omega}{\int_{with\ nanorod} normE_{far}^2 d\Omega}$  [2]，考慮在波束寬

內所有每一個 $\theta$ 所對應到散射強度的累加，其中 $d\Omega$ 是對  $\tan^{-1}$  所計算出來的 $\theta$ 微小改變量，但是在本文中只考慮取圖(a)的散射強度的最大值，以及圖(b)的散射強

度的最大值。也就是  $Conversion\ efficiency = \frac{peak\ of\ normE_{far}^2\ (with\ nanorod)}{peak\ of\ normE_{far}^2\ (without\ nanorod)}$ 。

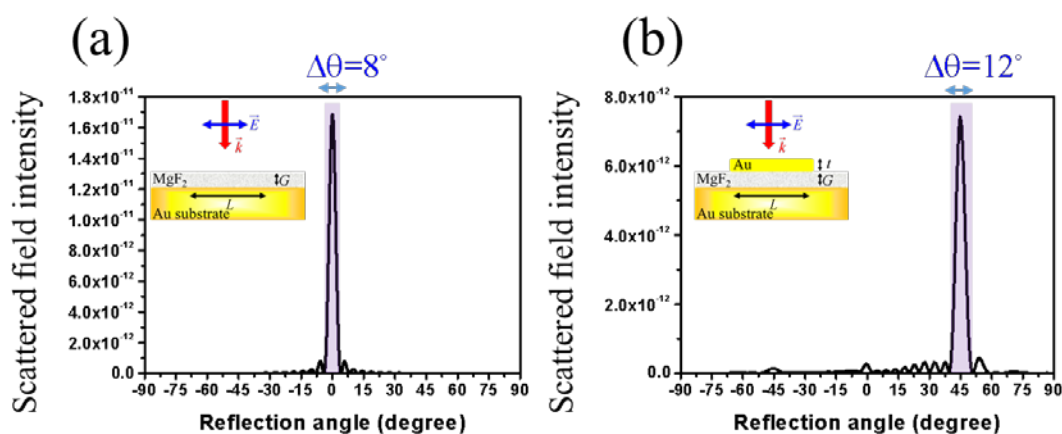


圖 6-5: (a)沒有金奈米柱的遠場散射強度 (b)有金奈米柱的遠場散射強度

## 6.2 假想介電質超穎介面說明

雖然我們在圖 4.3 以及圖 4.5 有提到假想介電質，此種假想介電質雖然不存在在大自然中，但是在過去的文獻已經有提及奈米金屬結構在小於繞射極限的區域提供非常高的折射率[3]。舉例子來說，於 2011 年，D. R. Smith 團隊提出使用金屬-介電質-金屬(Metal-Insulator-Metal, MIM)為基底的結構[4]，改變最上層金屬結構的不同形狀，有圓柱形、棒狀以及 I 型結構，在相同入射光波長(10.6  $\mu m$ )下，對應到不同等效折射率，如圖所示，此圖主不僅僅說明形狀會影響等效折射率，金屬結構的大小也會影響等效折射率。其中寬度( $W$ )與長度( $H$ )分別用 $\times$ 與 $\circ$ 表示。

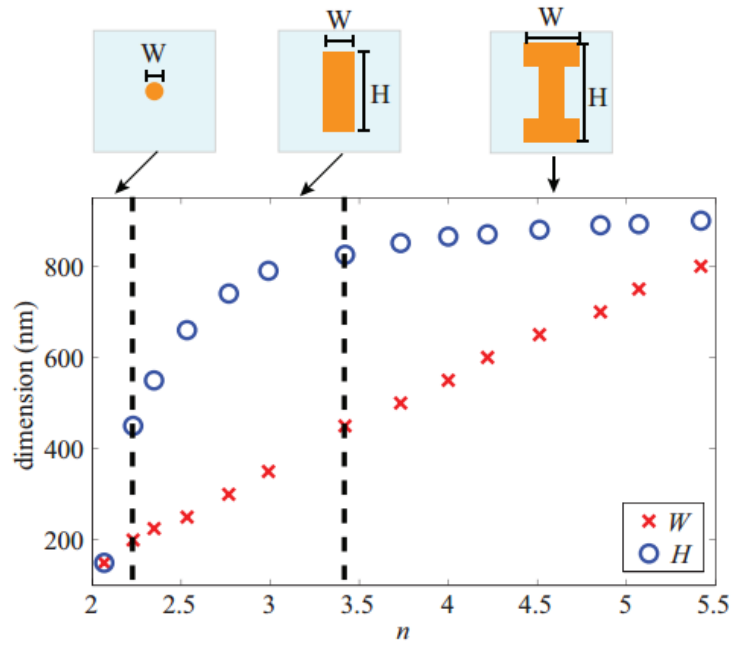


圖 6-6: 等效折射率與結構形狀尺寸的關係圖[4]

為了讓假想介電質有較佳調控相位的性質，我們改變假想介電質的厚度，從圖 6-7 觀察到，當厚度越小，相位的大小隨著折射率變化較小，在這種情況下，可以選擇作為我們模擬的厚度，因為我們不希望再微小的折射率改變就造成相位極大的變化。

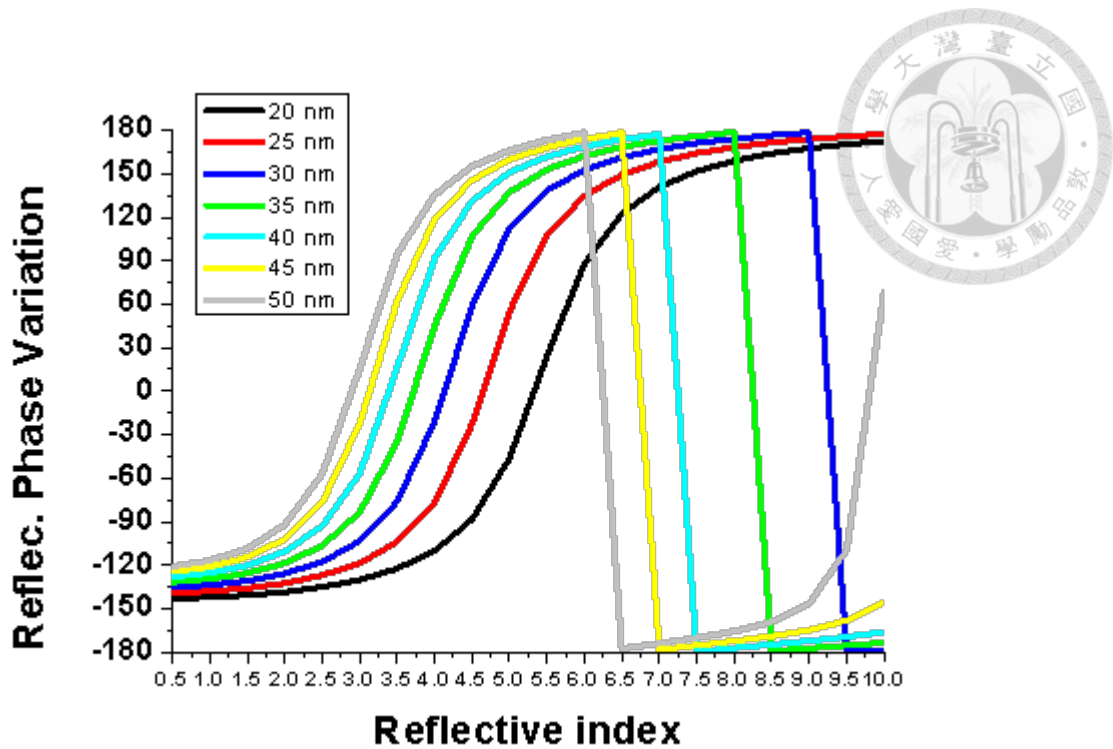


圖 6-7: 不同假想介電質的厚度所對應到的相位變化，分別為 20、25、30、35、40、45、50 奈米的厚度

### 6.3 操作波長的選擇

本論文並沒有模擬一個頻寬來驗證此超穎見面的操作波長，但是我們先從 Vladimir M. Shalaev 教授所發表的文獻[6]討論，文獻中的圖二提到在入射光波長介於 600 奈米到 1000 奈米之間，金屬金(Gold)中自由電子所造成的躍遷的損耗是最小的，我們重製在圖 6-8(a)中，使用淺紫色底色表示損耗最小的區間。接下來，我們討論孫樹林博士所發表梯度版的文獻[2]補充資料，其中圖四重製在圖 6-8(b)。孫樹林博士將他們所設計的梯度版，透過模擬不同的操作波長，在 600 奈米到 1000 奈米之間，從圖 6-8(b)觀察得知，在操作波長為 850 奈米時，其梯度版的工作效率最接近 90%，但我們的本論文工作是基於孫樹林博士所設計的梯度版，因此，我們會選擇工作波長為 850 奈米貫穿本論文。

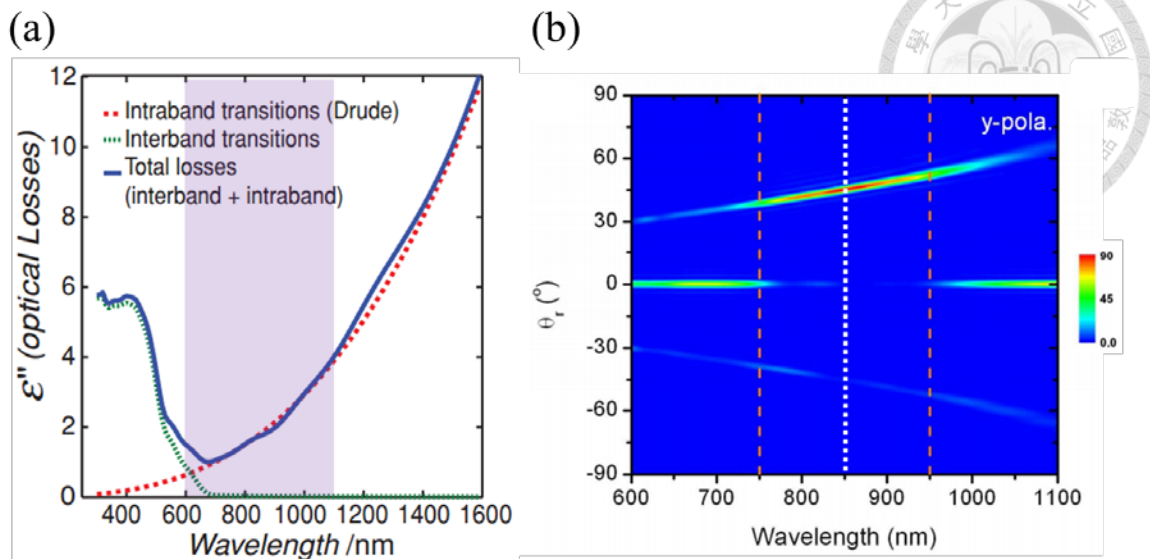


圖 6-8: (a)金屬金(Gold)的虛部(也就是金屬內部自由電子要遷所造成的損耗),其中紅色虛線表示自由電子在能帶內的躍遷(Intraband Transistion)所造成的損耗,綠色虛線表示自由電子兩個能帶之間的躍遷(Interband Transistion)所造成的損耗,藍色實線表示兩種自由電子要遷所造成的總損耗[6] (b)參考文獻[2]的補充材料圖,異常反射角度與入射光波長之間的關係,其中顏色表示效率,藍色表示效率接近 0%,紅色表示效率接近 90%。

## 6.4 參考文獻

- [1] <https://zh.wikipedia.org/wiki/Atan2>
- [2] S. Sun, K.-Y. Yang, C.-M. Wang, T.-K. Juan, W. T. Chen, C. Y. Liao, Q. He, S. Xiao, W.-T. Kung, G.-Y. Guo, L. Zhou, and D. P. Tsai, "High-efficiency broadband anomalous reflection by gradient meta-surfaces," *Nano Lett.* **12**, 6223-6229 (2012).  
(Supporting Information section 3)
- [3] N. Yu, and F. Capasso, "Flat optics with designer metasurfaces," *Nat. Mater.* **13**, 139-150 (2014).
- [4] Y.-J. Tsai, S. Larouche, T. Tyler, G. Lipworth, N. M. Jokerst, and D. R. Smith,

"Design and fabrication of a metamaterial gradient index diffraction grating at infrared wavelengths," *Opt. Express* **19**, 24411-24423 (2011).

- [5] J. Albero, J. A. Davis, D. M. Cottrell, C. E. Granger, K. R. McCormick, and I. Moreno, "Generalized diffractive optical elements with asymmetric harmonic response and phase control," *Appl. Opt.* **52**, 3637-3644 (2013).
- [6] G. V. Naik, V. M. Shalaev, and A. Boltasseva, "Alternative Plasmonic Materials: Beyond Gold and Silver," *Adv. Mater.* **25**, 3264–3294 (2013).

# Curriculum Vitae You Zhe HO



## **Personal Information**

---

**Name:** You Zhe Ho (何佑哲)

**Tel:** +886-2-33665100

**Phone:** 0921206647

**E-mail:** dragosyoujou@gmail.com

**Business Address:** Department of Physics, National Taiwan University, 1, Sec 4, Roosevelt Road, Taipei 10617, Taiwan

## **Education**

---

<b>National Taiwan University</b>	Taipei, Taiwan
PhD in Physics	2012.09~now
<b>National Taiwan University</b>	Taipei, Taiwan
MS in Physics	2010.09~2012.06
<b>Tunghai University</b>	Taichung, Taiwan
BS in Physics	2006.09~2010.06

## **Skills**

---

<b>Lab instruments:</b>	Thermal Evaporator, RIE, FluoroMax®-4P, DXR™ Raman microscope measurement, Fluorescence lifetime measurement
<b>Analyzing software:</b>	COMSOL Multiphysics, MATLAB, Oringin, CST,
<b>Other application:</b>	Photoshop, Autocad
<b>Software:</b>	C/C++ , Python (Learn from 2016)

## **Research Interests**

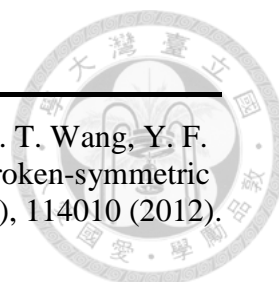
---

- Hyperbolic metamaterial for superresolution and enhancement of fluorescence
- Metasurface application

## **Extracurricular Activities**

---

<b>Taiwan Catholic Foundation of Alzheimer's Disease And Related Dementia</b>	
Taipei, Taiwan	
<i>Volunteers</i>	2012.08-2014.05
<b>National Taiwan University, Physic Department</b>	
<i>General Physics Lab teaching assistant</i>	2014.09-2016.06



## **Publication**

---

- [1] **Y. Z. Ho**, W. T. Chen, Y.-W. Huang, P. C. Wu, M. L. Tseng, Y. T. Wang, Y. F. Chau, D. P. Tsai, “Tunable plasmonic resonance arising from broken-symmetric silver nanobeads with dielectric cores”, *Journal of Optics* **14**(11), 114010 (2012).  
**(IF: 1.847)**  
[Special issue of switchable and reconfigurable metamaterials, Invited paper]
- [2] B. H. Cheng, **Y. Z. Ho**, Y.-C. Lan, D. P. Tsai, “Optical hybrid-superlens hyperlens for superresolution imaging”, *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics* **19**(3), 4601305 (2013).  
**(IF: 3.466)**
- [3] **You Zhe Ho**, Bo Han Cheng, Wei-Lun Hsu, Chih-Ming Wang and Din Ping Tsai, “Anomalous reflection from metasurfaces with gradient phase distribution below  $2\pi$ ”, *Applied Physics Express* **9**, 072502 (2016)  
**(IF: 2.265)**

## **Patens**

---

- [1] I44996, 解析透鏡組 ASSEMBLY OF LENSES FOR RESOLUTION, 蔡定平 TSAI, DIN PING; 成柏翰 CHENG, BO HAN; **何佑哲 HO, YOU ZHE**; 藍永強 LAN, YUNG CHIANG (2014/08/21)
- [2] I456668, 用於光電化學電池之半導體電極及其形成方法 SEMICONDUCTOR ELECTRODE FOR PHOTOELECTROCHEMICAL CELL AND FORMING METHOD THEREOF, 陳浩銘 CHEN, HAO MING; 陳致凱 CHEN, CHIH KAI; **何佑哲 HO, YOU ZHE**; 陳威廷 CHEN, WEI TING; 劉如熹 LIU, RU SHI; 蔡定平 TSAI, DIN PING (2014/10/11)

## **References**

---

**Din Ping Tsai**, Professor, Dept. of Physics, National Taiwan University  
\*[dptsai@phys.ntu.edu.tw](mailto:dptsai@phys.ntu.edu.tw)