

國立臺灣大學工學院應用力學研究所

碩士論文

Institute of Applied Mechanics

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis



四分之一波長共振腔之寬頻吸音薄板研究

Quarter-wavelength resonator-based thin panels

for absorbing broadband audio waves

廖翊涵

Yi-Han Liao

指導教授：吳政忠 博士

Advisor: Tsung-Tsong Wu, Ph.D.

中華民國 106 年 11 月

November, 2017

致謝



本論文得以完成，首先感謝恩師 吳政忠教授在學生就讀研究所期間的指導，不論在學術研究或待人處事上都有莫大的啟發，而談話間展現對國家社會的關心，培養學生的遠見，讓學生受益良多，在此謹向老師獻上最誠摯的敬意與謝意。

承蒙長庚大學 孫嘉宏教授、大同大學 陳永裕教授、成功大學 陳蓉珊教授以及 鮑世勇博士於百忙之中撥冗擔任學生的口試委員，對於本論文不吝指正，使學生得以將諸多缺失進行改善，讓論文內容更加完備。感謝 孫嘉宏教授與 陳永裕教授在學生研究期間不辭辛勞的至實驗室給予諸多協助，在前進的過程中，老師會適時地給予方向，使問題更加清晰，而有釐清的可能，而細節上的處理也秉持嚴謹的態度，是研究過程中難能可貴的經驗。感謝 陳蓉珊教授與長庚大學 余仁方教授實驗儀器的慷慨借用，讓實驗得以順利進行。

感謝 327 實驗室的同伴們於平日的照顧。謝謝思伶、東柏、辰峰、珮羚、順成、薰儀學長姐們在研究上的耐心指導；謝謝育展與陳毅兩年多來的包容；謝謝彥達、至綱、必昀、浚譯學弟們的關心。謝謝在應力所求學期間認識的朋友，阿妙、郁涵、意茹、華儒平時的打鬧與餵食。謝謝翁姐、阿彤、王名、阿九、伊雯、貞汝、亭靜、詩涵、百芸、孟汝、宇凡、逸耘．．．．．等每一位老朋友，不論你們在台北生活與否，都能在我需要幫助時，給予最溫暖的雙手。感謝叙良在我論文研究期間在我低潮時給予最大的支持與陪伴，接納我每一個發洩的情緒。謝謝奶奶與叔叔一家在台北的照顧，使我想家時可以有個歸處。謝謝一路走來讓我得以啃食諸多文字的每個生命。

最後感謝我生命中最愛的父母與家人。謝謝我的父親 廖宗仁先生與母親 蔡麗寬女士給予我無限的支持與信任，得以讓我無後顧之憂的完成學業。謝謝小阿姨 蔡麗雪女士於兒時的細心教導，讓我能夠有今天的表現。

僅將本論文獻給他們。

中文摘要



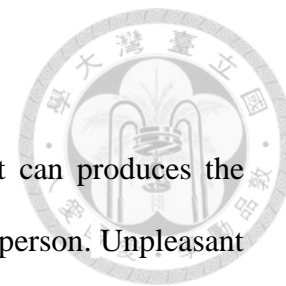
聲波是經由固體振動對空氣擾動進而產生的，每個人對於聲音的感受不盡相同，不悅耳的聲音皆可稱為噪音。近年來噪音影響人們生活的新聞層出不窮，包括風力發電、機場捷運、高架鐵路等交通噪音，皆為急需克服的問題。

空氣於空腔型結構內共振時，邊界層的熱黏滯效應能有效地引起能量損失，可作為吸音板的用途。本文所採用的吸音結構為四分之一波長共振器，即第一共振頻率的波長為管長的四倍。首先，分別以聲阻抗的觀點與有限元素法的途徑分析四分之一波長共振器之幾何形狀與吸收頻率的對應關係，由於阻抗分析在熱黏滯效應上的簡化，兩者得到的結果有些微的差異，因此針對阻抗匹配法提出長度的修正公式。薄型化則是參考 Cai 提出的設計，將原本的直管盤繞而成螺旋狀共振腔，可大幅減低其厚度，接著以同樣的模擬方式確認四分之一波長共振腔與薄型吸音板的相關性後，並進一步提出雙螺旋共振腔的設計，使吸音頻寬大幅增加。

本研究經現場量測得知臺灣桃園國際機場聯外捷運系統於新北環河快速道路與疏洪東路一段轉彎處之噪音頻率為 467 Hz，合適的共振腔長度為 177 mm，開口率為 0.017，以 3D 列印機印製此形狀的吸音薄板。實驗則根據美國材料試驗協會(ASTM)所提出的測試規範操作，以壓克力自行製作聲學阻抗管，搭配雙麥克風轉移函數法量測吸音薄板的吸音效率。實驗所得到的最大吸收係數為 0.91，阻抗匹配法則為 0.99，而實驗上擁有最大吸收率之頻率為 473 Hz，阻抗匹配法則為 468 Hz，主要吸收頻率的誤差為 1.06 %，證實修正後的阻抗匹配法可以作為薄型吸音板的設計準則，免去有限元素法計算量過大的限制。而雙螺旋共振腔的設計也能大幅增加吸音頻寬，若兩共振腔的長度分別為 170 與 181 mm，吸收係數達 0.5 以上的頻寬範圍由單共振腔的 30 Hz 增大至 54 Hz。

關鍵詞：四分之一波長共振器、聲阻抗分析、吸音係數、寬頻吸音薄板

ABSTRACT



Sound is produced by a variety of pressure disturbance that can produce the sensation of hearing. The sensation of sound varies from person to person. Unpleasant sound can be judged as noise. In recent years, there have been a lot of news about noise reducing the quality of life, including wind turbine, airport MRT, and other traffic noise. All of them are urgent problems.

When air is resonant in the cavity structure, the thermal viscous effect of the boundary layer can effectively cause energy loss and cavity can be used as a sound absorbing plate. The quarter-wave resonator means wavelength of the first resonant frequency is four times of the length of the tube. First, impedance matching method and finite element method are employed to calculate the absorption coefficient of quarter-wave resonators. Since the impedance analysis is simplified on the thermal viscous effect, the length has to be modified.

By referring to the design proposed by Cai, the quarter-wave resonator is coiled up into coplanar spiral resonator, which can significantly reduce the thickness and its absorption coefficient is similar to quarter-wave resonator through the simulation method. To broaden the bandwidth of absorbing frequency, thin panel with two resonant cavities is proposed.

In this study, the noise frequency of Taiwan Taoyuan International Airport Access MRT System at the corner of New Taipei Huanhe Expressway and Sec. 1, Shuhong E. Rd. is 467 Hz by measurement on site. The appropriate cavity length is 177 mm and porosity is 0.017. The sample with this geometry is fabricated by 3D printing. According to standard test method of ASTM, the absorption coefficient of thin panels had been measured with a tube and two microphones in experiment. The max

absorption coefficient is 0.91 at 473 Hz in experiment, and the modified impedance matching method is 0.99 at 468 Hz. The error of main absorption frequency is 1.06 %. Modified impedance matching method can be a design rule for sound absorbing thin panels, to avoid the limitation of calculation in finite element method. The thin panel with dual resonant cavities can also broaden the absorption bandwidth. If the length of two resonators is 170 and 181 mm, the bandwidth of absorption coefficient more than 0.5 increases from 30 Hz in single resonator to 54 Hz.

Keywords: Quarter-wave resonator, Acoustic impedance analysis, Absorption coefficient, Broadband sound-absorbing panel

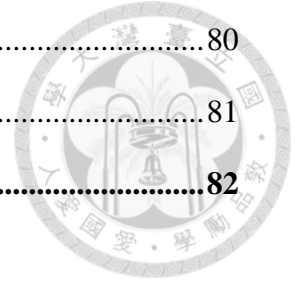
目錄



致謝.....	I
中文摘要.....	II
ABSTRACT.....	III
目錄.....	V
表目錄.....	VIII
圖目錄.....	IX
符號對照表	XII
第一章 導論	1
1.1 研究動機.....	1
1.2 文獻回顧.....	2
1.3 章節介紹.....	3
第二章 聲學原理	4
2.1 聲波方程式.....	4
2.1.1 狀態方程式.....	4
2.1.2 連續方程式.....	5
2.1.3 尤拉方程式.....	6
2.1.4 聲波方程式.....	8
2.2 阻抗管內的波傳現象.....	8
2.2.1 平面波之介紹.....	9
2.2.1 波導管之截止頻率.....	9
2.2.3 阻抗管量測吸音係數之原理.....	12
2.3 阻抗匹配對吸收率之影響.....	13
2.3.1 聲阻抗之介紹.....	13

2.3.2	反射係數與穿透係數.....	15
2.3.3	四分之一波長共振腔之阻抗分析與吸收率.....	16
第三章	四分之一波長共振器之吸收率模擬方法	24
3.1	聲熱模組之統御方程式.....	24
3.1.1	納維-斯托克斯方程式	24
3.1.2	能量方程式.....	26
3.2	邊界層之介紹.....	29
3.2.1	黏滯邊界層	29
3.2.2	熱邊界層.....	30
3.3	收斂性分析.....	30
3.3.1	軸對稱模型.....	30
3.3.2	三維模型.....	31
3.4	能量損失分布.....	32
3.5	四分之一波長管內的聲壓、粒子速度及溫度分布特徵.....	33
3.6	共振腔幾何與吸音係數之關係.....	34
3.7	阻抗匹配法與有限元素法之比較與設計準則.....	35
第四章	寬頻吸音薄板之設計與實驗量測	54
4.1	研究場域.....	54
4.2	寬頻吸音薄板的設計.....	54
4.2.1	吸音薄板與四分之一波長共振器之比較.....	54
4.2.2	吸音薄板之寬頻化設計.....	56
4.3	寬頻吸音薄板吸音效率之量測.....	56
4.3.1	實驗裝置之建立.....	56
4.3.2	薄型吸音板吸音效率之量測.....	58
第五章	結果討論與未來展望	80

5.1 結論.....	80
5.2 未來展望.....	81
參考文獻.....	82



表目錄

表 2-1 參數符號與單位對應表	20
表 3-1 20 °C 空氣材料參數	38



圖目錄



圖 2.1	定體積下 x 方向的質量流.....	21
圖 2.2	圓柱座標圖.....	21
圖 2.3	阻抗管內波傳示意圖.....	22
圖 2.4	垂直入射聲波時反射與穿透波的示意圖.....	22
圖 2.5	一截面均勻的管道內含可壓縮但無能量損失流體示意圖.....	23
圖 2.6	不均勻截面管道之示意圖.....	23
圖 3.1	移動中微小流體元素所受的 x 方向淨力之示意圖.....	39
圖 3.2	邊界層之介紹 (a)黏滯邊界層 (b)熱邊界層.....	39
圖 3.3	四分之一波長共振腔之軸對稱 (a)模擬模型 (b)共振腔之網格形狀 (c)吸收率之收斂性分析.....	40
圖 3.4	軸對稱模型中麥克風間距與吸收係數之關係.....	41
圖 3.5	軸對稱模型中第一支麥克風的位置與吸收係數之關係.....	41
圖 3.6	軸對稱模型中阻抗管長度與吸收係數之關係.....	42
圖 3.7	軸對稱模型中阻抗管最大之網格尺寸與吸收係數之關係.....	42
圖 3.8	四分之一波長共振腔吸收係數之三維模擬模型.....	43
圖 3.9	三維模擬模型之元素形狀的討論.....	43
圖 3.10	四面體元素之收斂性分析.....	44
圖 3.11	一維及三維模型對吸收率影響之比較.....	44
圖 3.12	各頻率下的能量損失.....	45
圖 3.13	共振時的能量損失分布 (a)黏滯損失 (b)熱損失.....	45
圖 3.14	阻抗管與共振腔的 (a)位置座標 以及對稱軸上的 (b)聲壓 (c)軸向速度 (d)溫度變化分布.....	46
圖 3.15	共振腔閉口處溫度變化的局部放大圖.....	47

圖 3.16	共振腔內半徑方向的壓力分佈.....	47
圖 3.17	共振腔內半徑方向的速度分佈.....	48
圖 3.18	共振腔內半徑方向速度分佈的局部放大圖.....	48
圖 3.19	共振腔內半徑方向的溫度差異分佈.....	49
圖 3.20	開口率與最大吸音係數及吸收頻率之關係.....	49
圖 3.21	共振腔長度與最大吸音係數及吸收頻率之關係.....	50
圖 3.22	阻抗匹配法與有限元素法擁有最大吸收率之頻率誤差.....	50
圖 3.23	阻抗匹配法與有限元素法擁有最大吸收率之開口率.....	51
圖 3.24	修正前之阻抗匹配法與有限元素法之吸收率曲線.....	51
圖 3.25	修正後之阻抗匹配法與有限元素法之吸收率曲線.....	52
圖 3.26	修正後共振腔長度、吸收頻率與吸音係數間的關係.....	52
圖 3.27	四分之一波長共振腔之特徵模態聲壓分布.....	53
圖 3.28	共振腔長度、第一吸收頻率與吸音係數間的關係.....	53
圖 4.1	機場捷運噪音頻譜圖.....	62
圖 4.2	(a)四分之一波長共振腔外殼與空氣腔結構示意圖.....	62
圖 4.2	(b)薄型吸音板外殼與空氣腔結構示意圖.....	63
圖 4.3	圓形截面之四分之一波長共振腔 (a)完整模型 (b)上視圖 (c)軸對稱模擬模型.....	63
圖 4.4	方形截面之四分之一波長共振腔 (a)完整模型 (b)上視圖 (c)八分之一對稱模擬模型.....	64
圖 4.5	圓形與方形截面之四分之一波長共振腔吸收率曲線.....	64
圖 4.6	(a)均勻方形截面 (b)圓形開口方形截面 之四分之一波長共振腔.....	65
圖 4.7	均勻方形截面與圓形開口方形截面共振腔之吸收率.....	65
圖 4.8	吸音薄板與四分之一波長共振腔之吸收率比較.....	66
圖 4.9	寬頻吸音薄板意圖之示意圖.....	66

圖 4.10	寬頻吸音薄板之吸收率曲線.....	67
圖 4.11	實驗架設之示意圖.....	67
圖 4.12	實驗架設之實際情況.....	68
圖 4.13	(a)麥克風與鐵氟龍套管 (b)實驗安裝情形.....	68
圖 4.14	共振腔安裝方式之剖面示意圖.....	69
圖 4.15	(a)直徑落差的壓克力套管 (b)吸音薄板之實驗安裝情形.....	69
圖 4.16	(a) LabVIEW 之程式框圖.....	70
	(b) LabVIEW 之人機介面.....	71
圖 4.17	麥克風重複安裝對實驗結果之影響.....	71
圖 4.18	(a)未塗有耦合劑與 (b)塗有耦合劑 之試件正反面.....	72
圖 4.19	吸音薄板與硬背板間有無耦合劑之比較.....	72
圖 4.20	3D 列印材料不同填充率之吸音係數比較.....	73
圖 4.21	(a)吸音薄板與 (b)寬頻吸音薄板 之共振腔示意圖與實驗試件.....	73
圖 4.22	薄型吸音板實驗與阻抗匹配法之吸音係數比較.....	74
圖 4.23	寬頻吸音薄板實驗與阻抗匹配法之吸音係數比較.....	74
圖 4.24	相同幾何形狀 (a)雙共振腔與 (b)單共振腔 之示意圖與實驗試件.....	75
圖 4.25	相同幾何形狀之雙支與單支共振腔之吸收率比較.....	75
圖 4.26	(a)雙共振腔單開口 (b)雙共振腔雙開口 之吸音薄板.....	76
圖 4.27	雙共振腔之單開口與雙開口之吸音效果.....	76
圖 4.28	單共振腔及雙共振腔之吸音薄板吸音效率比較.....	77
圖 4.29	(a)無共振腔 (b)有共振腔 之實驗試件.....	77
圖 4.30	有無共振腔之吸音係數比較.....	78
圖 4.31	吸音棉及薄型吸音版之實驗試件.....	78
圖 4.32	寬頻吸音薄板與吸音棉之吸音係數比較.....	79

符號對照表



符號	意義	
\mathcal{P}	任一點的瞬時壓力	(2.1)
ρ	任一點的瞬時密度	(2.1)
r	氣體常數與每莫耳氣體質量的比值	(2.1)
T_k	絕對溫度	(2.1)
\mathcal{P}_0	流體平衡狀態時的壓力	(2.2)
ρ_0	流體平衡狀態時的密度	(2.2)
γ	比熱比	(2.3)
\mathcal{B}	絕熱體積模量	(2.5)
p	聲壓	(2.6)
s_ρ	縮合係數	(2.6)
$dV=dx dy dz$	微小體積	(2.7)
$\vec{u} = u_x \hat{x} + u_y \hat{y} + u_z \hat{z}$	粒子速度	(2.7)
$\vec{df} = df_x \hat{x} + df_y \hat{y} + df_z \hat{z}$	淨總力	P.6
\vec{a}	加速度	P.6
dm	微小質量	P.6
t	時間變數	P.6

c_0	相速度	(2.22)
k	波數	(2.23)
ω	角速度	P.8
p^+	往+x方向傳遞的聲壓	(2.27)
p^-	往-x方向傳遞的聲壓	(2.27)
u^+	往+x方向傳遞聲波的粒子速度	(2.28)
u^-	往-x方向傳遞聲波的粒子速度	(2.28)
r	圓柱座標徑向方向的變數	(2.30)
θ	圓柱座標角度方向的變數	(2.30)
z	圓柱座標高度方向的變數	(2.30)
J_m	m階的第一類貝索函數	(2.42)
N_m	m階的第二類貝索函數	(2.42)
a	圓管半徑	(2.44)
α'_{mn}	J'_m 的第n個零點	(2.44)
f_{mn}^c	圓管內的截止頻率	(2.49)
x_1	第一支麥克風的位置座標	(2.50)
x_2	第二支麥克風的位置座標	(2.51)
P_1	第一支麥克風所量取到的聲壓	(2.50)
P_2	第二支麥克風所量取到的聲壓	(2.51)



R	反射係數	(2.54)
H	轉移函數	(2.54)
s	兩麥克風的距離	(2.54)
α	吸收係數	(2.55)
q_p	推變量	P.13
q_f	流變量	P.13
Z	阻抗	(2.56)
α'	聲阻	(2.58)
β'	聲抗	(2.58)
Z_{ac}	聲阻抗	(2.59)
Z_{spac}	特徵聲阻抗	(2.60)
Z_{mech}	機械阻抗	(2.61)
Z_0	材料的特徵聲阻抗	P.15
Z_0^+	往 $+x$ 方向傳遞聲波的材料特徵聲阻抗	(2.64)
Z_0^-	往 $-x$ 方向傳遞聲波的材料特徵聲阻抗	(2.65)
p^i	入射波	(2.66)
p^r	反射波	(2.66)
p^t	穿透波	(2.67)
T	穿透係數	(2.67)



u^i	入射波的粒子速度	(2.70)
u^r	反射波的粒子速度	(2.70)
u^t	穿透波的粒子速度	(2.70)
Z_{01}	材料一的特徵聲阻抗	P.15
Z_{02}	材料二的特徵聲阻抗	P.15
L_i	共振腔的長度	P.17
$Z_{\lambda/4}$	四分之一波長共振腔的特徵聲阻抗	(2.81)
$Z_{\lambda/2}$	二分之一波長共振腔的特徵聲阻抗	(2.82)
ρ_{eff}	有效密度	P.18
C_{eff}	有效壓縮性	P.18
ν	運動黏滯係數	(2.83)
r_i	空氣管開口半徑	(2.83)
μ	動態黏滯係數	P.18
κ	熱傳導係數	P.18
C_v	定容比熱	P.18
S_1	不均勻管道中 $x < 0$ 處的截面積	(2.85)
S_2	不均勻管道中 $x > 0$ 處的截面積	(2.86)
ξ	開口率	(2.87)
F_i	i 方向所受的淨力	(3.1)



τ_{ij}	i 面上 j 方向的應力	(3.1)
λ_d	膨脹黏度	(3.7)
μ_B	體積黏度	(3.9)
ΔE	每單位質量內的能量改變	(3.10)
Q	進入每單位質量的熱能	(3.10)
W	外界對單位質量所做的功	(3.10)
v_s	比容	(3.12)
S	熵	(3.13)
T	攝氏溫度	(3.13)
H	焓	(3.14)
F	荷姆霍茲自由能	(3.15)
G	布斯自由能	(3.16)
C_p	定壓比熱	(3.28)
α_0	熱膨脹係數	(3.28)
Φ	黏滯損失函數	(3.31)
\dot{Q}	每單位時間內每單位體積所接收到的熱量	(3.31)
$\delta_{\text{visc}}^{\text{BL}}$	黏滯邊界層厚度	P.29
$\delta_{\text{therm}}^{\text{BL}}$	熱邊界層厚度	P.30
Pr	普朗特數	P.30



L	阻抗管長度	P.32
l'_{neck}	荷姆霍茲共振器頸柱之等效長度	P.35
l_{neck}	荷姆霍茲共振器頸柱之幾何長度	P.35
R_{neck}	荷姆霍茲共振器之頸口半徑	P.35
F_{max}^{error}	吸收率最大的頻率誤差之近似方程式	P.36
L'_i	阻抗匹配法修正後的共振腔長度	P.36
c	聲速	表 3-1
D_t	共振腔截面之特徵長度	P.55
L_{t1}	雙共振腔之共振腔一的長度	P.56
L_{t2}	雙共振腔之共振腔二的長度	P.56
ξ_1	雙共振腔之共振腔一的開口率	P.56
ξ_2	雙共振腔之共振腔二的開口率	P.56
f_u	阻抗管最高工作頻率	P.57
f_l	阻抗管最低工作頻率	P.57
K	無單位係數	P.57
d	阻抗管截面的最大特徵長度	P.57



第一章 導論



1.1 研究動機

隨著科技日新月異的發展，生活的型態高度工業化，伴隨而來的除了品質提升的正面影響，也帶來許多環境汙染及破壞等負面作用，而噪音即為當中重要的一環。若是在工作場所中，長期暴露於吵雜的環境下，除了影響工作效率，嚴重者甚至造成職業傷害；若是生活環境中充滿這些聲音同樣干擾日常作息影響生活品質之外，長期累積下對身心健康皆是負擔，聽力受損的傷害更是不可逆的，因此噪音的防制是工程領域中非常重要的課題。

一般解決噪音問題，最直接的方式是移除噪音源，藉由改變機械結構與材料的使用，可使機械避免震動及噪音的產生，但要達成此目的並非易事，因此多數仍然使用隔音與吸音兩種方式[1]。隔音原理是利用空氣與固體阻抗間的巨大差異，可將入射聲波由隔音牆等裝置予以反射，但此作法僅得到聲音的隔絕，在開放性空間中，反射式噪音隔絕的方式效率有限，若是處於密閉空間則容易造成能量放大甚至是共振的現象產生；在吸音方面則分為多孔性的吸音材料及共振式的吸音結構兩大類，兩者都是藉由空氣振動摩擦，使能量轉為熱能散失至環境中，達到削弱噪音的目的，前者可吸收各頻率的波，但有不耐水性與不耐高溫的缺點，而共振式的吸音結構則可針對特定頻率有良好的吸效率。

然而，低頻波的波長較長，不論使用隔音牆的裝置或多孔性吸音材料，除非增加結構尺寸，否則聲波都容易繞過障礙物的阻隔，造成使用上的困難，如此看來，若要吸收低頻聲波，共振型吸音器為較好的選擇。本文將基於此特點，以四分之一波長共振器為主，設計出一具有高吸音率的寬頻吸音薄板，能直接應用於生活及工業層面中。



1.2 文獻回顧

空腔諧振器於近幾世紀已有相當多樣化的發展，經由邊界層的熱黏滯效應，可有效地引起能量損失，此特性在共振頻率下被強烈放大，經常作為消音器使用[2, 3]。常見的共振式吸音結構有荷姆霍茲、四分之一波長與二分之一波長共振腔以及微穿孔板吸音板。

荷姆霍茲共振器是在 1862 年由 Helmholtz 提出[4]，主要由一大腔體與一小頸口組成，然而由於其理論與實驗的差異性，在當時仍是一個具有挑戰性的課題，至 1953 年，Ingard 進行較完整的分析，主要針對內、外部的末端修正，並探討不同開口條件對共振頻率及吸收率的影響[5]，而直至今時今日荷姆霍茲共振器仍多數文獻討論的重點[6-8]。除了理論分析外，幾何設計的討論也如雨後春筍般相繼出現，例如頸口的變形[9-11]、陣列式排列的情況[12, 13]、雙共振腔耦合[14, 15]、甚至與吸音材料結合使用[16-18]等等，期望使吸收頻率的範圍可以更廣以及最佳化其吸音效果。微穿孔吸音板是在 1975 年由 Maa 提出[19]，主要由許多孔徑小於 1 mm 的微穿孔板與背後空氣層所組成，以取代傳統微穿孔板後的多孔隙材料，可耐高溫與耐水性，並發展出一套理論公式[20]，在建築上廣為使用。而二分之一與四分之一波長共振腔的外型相對簡單，二分之一波長共振腔為兩端皆開口的直管，而四分之一波長共振腔則為一端開口、一端閉口的直管，其吸音效率優於二分之一波長共振腔[21]。

然而不論是以哪種途徑吸收低頻聲波，都容易造成尺寸過大的問題，近期發展出一種螺旋形共振腔的薄型吸音板[22, 23]，可將四分之一波長共振器或微穿孔板後的空氣腔長度大幅降低。本文將基於四分之一波長螺旋式的共振腔，進一步提出雙螺旋共振腔的設計，可更有效地使用每個單元的面積同時達成寬頻化的目的，使之更為實用與便利。

1.3 章節介紹

本論文分為五個章節，第一章為研究動機及文獻回顧，主要介紹噪音防制的方法及空腔型消音器的總類。第二章為基礎的聲學理論，並以聲阻抗的觀點分析四分之一波長共振腔的吸收率。第三章則說明如何運用 COMSOL 多物理耦合軟體計算吸收係數，包括模組、邊界條件及網格的設定，並與阻抗匹配法的結果比較，進而對阻抗匹配法的長度提出修正公式。第四章則運用阻抗匹配法及有限元素法對 Cai 所提出的薄型吸音板與四分之一波長共振腔的吸音係數進行比較，並進一步提出雙螺旋共振腔的設計，能有效地使用面積，同時使吸音頻寬大幅增加，實驗則以美國材料試驗協會(ASTM)的測試規範，以機場捷運噪音頻率設計吸音薄板，驗證此結構的吸音效率。第五章為結論與未來展望。

第二章 聲學原理



本章分為三節。第一節為無損失流體中線性聲波方程式的推導；第二節說明實驗及模擬中阻抗管內的波傳現象，包括其合適的工作頻率，以及如何使用雙埠麥克風計算測試物件的吸收係數；第三節則利用阻抗匹配的觀點求得內含可壓縮且無能量損失流體的圓管在各頻率下的吸收係數。

2.1 聲波方程式

此節主要為方程式的推導，由描述流體的狀態方程式(equation of state)、連續方程式(equation of continuity)以及尤拉方程式(Euler's equation)，得出僅有一變數的聲波方程式(wave equation)。為了得到流體中的最簡單的聲學理論，在此忽略萬有引力的作用，因此流體平衡狀態時的壓力與密度皆為固定常數，流體方面則有均質、等向性、完美彈性以及無任何因黏滯性或熱傳導而產生損失的假設，最後，此處分析僅限制於小的振幅的情況下做討論，故相對於平衡時的密度而言，改變的幅度非常小[24]。

2.1.1 狀態方程式

理想氣體的狀態方程式描述了給定物質任一點的瞬時壓力 \mathcal{P} 、瞬時密度 ρ 及絕對溫度 T_k 之間的熱力學行為：

$$\mathcal{P} = \rho r T_k \quad (2.1)$$

$r = R/M$ 為氣體常數 $R = 8.314 \text{ J} / (\text{mol} \cdot \text{K})$ 與每莫耳氣體質量 M 的比值。若此熱力學的過程受到等溫或絕熱的限制時，其狀態方程式可簡化成：

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (\text{等溫}) \quad (2.2)$$

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (\text{絕熱}) \quad (2.3)$$



其中 γ 為比熱比 (空氣: $\gamma=1.4$)。一般而言, 等溫的狀態最常發生於流體與容器壁面間, 兩者會不斷地經由熱交換使溫度維持一定值。另一方面, 若是單純考慮聲學實驗的過程, 流體粒子間幾乎不會有熱交換的行為發生, 在這樣的條件下, 流體的熵保持不變, 稱為等熵狀態或絕熱狀態。然而在真實氣體中, 絕熱狀態方程式卻非常複雜, 因此傾向利用實驗來確認壓力以及密度擾動間的關係, 已知可在平衡密度處由泰勒展開式寫成:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial \rho^2} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 + \dots \quad (2.4)$$

若擾動非常小, 因此可將式(2.4)的高次項忽略, 得到壓力與密度改變間的線性關係:

$$\mathcal{P} - \mathcal{P}_0 = \mathcal{B} \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) \quad (2.5)$$

其中 $\mathcal{B} = \rho_0 \left(\partial \mathcal{P} / \partial \rho \right)_{\rho_0}$ 為絕熱體積模量(adiabatic bulk modulus), 在一大氣壓、20°C的環境下的空氣, 絕熱體積模量為 1.42×10^5 Pa, 藉由聲壓 $p = \mathcal{P} - \mathcal{P}_0$ 及縮合項 $s_\rho = (\rho - \rho_0) / \rho_0$ 的定義, 將式(2.5)改寫成:

$$p = \mathcal{B} s_\rho \quad (2.6)$$

2.1.2 連續方程式

連續方程式描述了質量守恆定律, 考慮一微小體積固定於空間之中, 其淨流量率等於體積內的質量變化率。如圖 2.1, x 方向的淨流入量為:

$$\left\{ \rho u_x - \left[\rho u_x + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx \right] \right\} dydz = -\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dV \quad (2.7)$$

y 、 z 方向同理，可得總淨流量率為：

$$-\left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \right] dV = -[\nabla \cdot (\rho \vec{u})] dV \quad (2.8)$$

而體積內的質量變化率為 $(\partial\rho/\partial t)dV$ 。因此得到連續方程式為：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.9)$$

由於第二項為瞬時密度與粒子速度的乘積，兩者皆為變數，所以式(2.9)為非線性系統。然而若將瞬時密度表示為 $\rho = \rho_0(1 + s_\rho)$ ，其中 ρ_0 在空間及時間上皆為常數，且假設 s_ρ 非常小，代入式(2.9)，則可得到線性連續方程式：

$$\frac{\partial s_\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.10)$$

2.1.3 尤拉方程式

尤拉方程式為牛頓第二定律 $d\vec{f} = \vec{a} dm$ 的延伸，在狀態方程式中忽略的熱傳導的效果，而此處引入的假設為非黏滯性流體。考慮一隨流場移動的微小元素粒子，其體積為 dV ，內含質量 dm ，若不考慮黏滯力， x 方向的淨力為：

$$df_x = \left[\mathcal{P} - \left(\mathcal{P} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} dx \right) \right] dydz = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} dV \quad (2.11)$$

y 、 z 方向同理，因此可得總淨力 $d\vec{f} = df_x \hat{x} + df_y \hat{y} + df_z \hat{z}$ 為：

$$d\vec{f} = -\nabla \mathcal{P} dV \quad (2.12)$$

而質量由體積與密度表示為：

$$dm = \rho dV \quad (2.13)$$

由於粒子速度 \vec{u} 同時為時間和空間的函數，因此在加速度的討論稍微複雜些。當





流體粒子在時間 t 、位於 (x, y, z) 的時候，其速度為 $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z; t)$ ，但在下一瞬間 $t+dt$ 時，流體粒子移動到 $(x+dx, y+dy, z+dz)$ 的位置，此時的 velocity 則為 $\vec{u}(x+dx, y+dy, z+dz; t+dt)$ 。因此加速度為：

$$\vec{a} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{u}(x+dx, y+dy, z+dz; t+dt) - \vec{u}(x, y, z; t)}{dt} \quad (2.14)$$

假設 \vec{u} 的變化量很小，利用 $dx = u_x dt$ 、 $dy = u_y dt$ 、 $dz = u_z dt$ 的關係將 $\vec{u}(x+dx, y+dy, z+dz; t+dt)$ 改寫成 $\vec{u}(x+u_x dt, y+u_y dt, z+u_z dt; t+dt)$ ，再由泰勒展開後的第一項表示成：

$$\begin{aligned} & \vec{u}(x+u_x dt, y+u_y dt, z+u_z dt; t+dt) \\ &= \vec{u}(x, y, z; t) + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} u_x dt + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} u_y dt + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} u_z dt + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (2.15)$$

將式(2.15)代入(2.14)得：

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \quad (2.16)$$

其中向量運算符號 $(\vec{u} \cdot \nabla)$ 定義為：

$$(\vec{u} \cdot \nabla) = u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}$$

將式(2.12)、(2.13)、(2.16)代入牛頓第二定律，得到：

$$-\nabla \mathcal{P} = \rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] \quad (2.17)$$

此為非線性無黏滯流體的尤拉方程式。藉由 $|s| \ll 1$ 與 $|(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}| \ll |\partial \vec{u} / \partial t|$ 的假設，

可將式(2.17)的 ρ 改為 ρ_0 ，且 $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$ 項忽略，因此得到線性無黏滯流體的尤拉方程式：

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p \quad (2.18)$$



2.1.4 聲波方程式

前三小節已推導出流體的狀態方程式(2.6)、連續方程式(2.10)以及尤拉方程式(2.18)，可由此三式推得聲波方程式。首先對式(2.18)做散度運算：

$$\rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\nabla p) = -\nabla^2 p \quad (2.19)$$

其中 ∇^2 為三維的拉普拉斯運算符號。接著將式(2.10)對時間微分，得到：

$$\frac{\partial^2 s_\rho}{\partial t^2} + \nabla \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0 \quad (2.20)$$

利用式(2.19)和式(2.20)消除速度項，得到：

$$\nabla^2 p = \rho_0 \frac{\partial^2 s_\rho}{\partial t^2} \quad (2.21)$$

將式(2.6)，代入式(2.21)消除縮合項 s_ρ ，得到無損失流體中的線性聲波方程式：

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2.22)$$

其中 $c_0 = \sqrt{B/\rho_0}$ 為其相速度。

若將式(2.22)時間域的波動方程式做傅立葉轉換得到頻域的荷姆霍茲表示式為：

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad (2.23)$$

其中 $k = \omega/c_0$ 為波傳向量，而傅立葉轉換對定義為：

$$p(x, y, z; \omega) = \mathcal{F}\{p(x, y, z; t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y, z; t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.24)$$

$$p(x, y, z; t) = \mathcal{F}^{-1}\{p(x, y, z; \omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y, z; \omega) e^{j\omega t} dt \quad (2.25)$$

2.2 阻抗管內的波傳現象

本文在實驗及模擬上皆根據美國材料試驗協會(ASTM)的測試規範得到共振腔的吸音效率[25]，主要利用聲學阻抗管搭配雙埠麥克風轉移函數法進行計算，阻抗管又稱駐波管，為一截面均勻的直管，管內的聲波需以平面波的形式傳播，

且不與外界互相干擾，麥克風於阻抗管的側邊接收訊號，可量測待測物件受聲波垂直入射時的吸音係數。本節首先介紹平面波的定義，接著討論阻抗管內的波傳行為以及其合適的工作頻率，最後說明如何利用雙麥克風轉移函數法得到待測物件的吸音係數。



2.2.1 平面波之介紹

平面波(plane wave)的定義為任一時刻的波前皆互相平行，且垂直於傳播方向，其中波前為波相位相等的每個點相連所形成的曲面，也就是說平面波的特性為垂直傳播方向上任一平面的聲學變數(壓力、位移、密度等)的振幅大小及相位皆相等。若現有一平面波沿 x 方向傳遞，則式(2.23)可簡化成：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + k^2 p = 0 \quad (2.26)$$

聲壓 p 為頻率變數 ω 及空間變數 x 的函數，可表示成：

$$p = p^+ + p^- = Ae^{-jkx} + Be^{jkx} \quad (2.27)$$

其中 $p^+ = Ae^{-jkx}$ 代表往 $+x$ 方向傳遞的波，而 $p^- = Be^{jkx}$ 則為往 $-x$ 方向傳遞的波。

其粒子速度可由式(2.18)與式(2.27)得到：

$$\vec{u} = [u^+ + u^-] \hat{x} = \left[\frac{A}{\rho_0 c_0} e^{-jkx} - \frac{B}{\rho_0 c_0} e^{jkx} \right] \hat{x} \quad (2.28)$$

同理， $u^+ = \frac{A}{\rho_0 c_0} e^{-jkx}$ ，而 $u^- = -\frac{B}{\rho_0 c_0} e^{jkx}$ 。

2.2.1 波導管之截止頻率

實驗時所使用的阻抗管為圓直管，視為一圓形波導，因此將式(2.22)的聲波方程式轉為圓柱座標，如圖 2.2，數學式表示為：

$$p_{rr} + \frac{1}{r} p_r + \frac{1}{r^2} p_{\theta\theta} + p_{zz} - \frac{1}{c_0^2} p_{tt} = 0 \quad (2.29)$$

利用分離變數法解式(2.29)，令

$$p = R(r)\Theta(\theta)Z(z)T(t) \quad (2.30)$$

將式(2.30)代入(2.29)得：

$$\frac{R_{rr}}{R} + \frac{1}{r} \frac{R_r}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta_{\theta\theta}}{\Theta} + \frac{Z_{zz}}{Z} = \frac{1}{c_0^2} \frac{T_{tt}}{T} \quad (2.31)$$

令式(2.31)等於一常數， $-k^2$ ，因此可得到時間項的方程式為：

$$T_{tt} + k^2 c_0^2 T = 0 \quad (2.32)$$

其一般解為：

$$T = \left\{ \begin{array}{l} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{array} \right\} \text{ 或 } \left\{ \begin{array}{l} e^{j\omega t} \\ e^{-j\omega t} \end{array} \right\} \quad (2.33)$$

其中：

$$\omega = kc_0 \quad (2.34)$$

接著以同樣的方式分離式(2.31)的 Z 方向變數：

$$\frac{R_{rr}}{R} + \frac{1}{r} \frac{R_r}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta_{\theta\theta}}{\Theta} + k^2 = -\frac{Z_{zz}}{Z} = k_z^2 \quad (2.35)$$

則 Z 方向的方程式為：

$$Z_{zz} + k_z^2 Z = 0 \quad (2.36)$$

其一般解為：

$$Z = \left\{ \begin{array}{l} \cos k_z z \\ \sin k_z z \end{array} \right\} \text{ 或 } \left\{ \begin{array}{l} e^{jk_z z} \\ e^{-jk_z z} \end{array} \right\} \quad (2.37)$$

因此式(2.31)可由 k 及 k_z 整理成：

$$r^2 \frac{R_{rr}}{R} + r \frac{R_r}{R} + k_r^2 r^2 = -\frac{\Theta_{\theta\theta}}{\Theta} \quad (2.38)$$

其中：



$$k_r^2 = k^2 - k_z^2 \quad (2.39)$$

同樣令式(2.38)等於一常數， m^2 ，則 θ 項的解為：

$$\Theta = \begin{cases} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} e^{jm\theta} \\ e^{-jm\theta} \end{cases} \quad (2.40)$$

由於 $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$ ，因此 m 必須為整數。而 r 項的方程式為：

$$R_{rr} + \frac{1}{r}R_r + \left(k_r^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R = 0 \quad (2.41)$$

此為 m 階的貝索函數，其一般解為：

$$R = \begin{cases} J_m(k_r r) \\ N_m(k_r r) \end{cases} \quad (2.42)$$

其中 $J_m(k_r r)$ 為 m 階的第一類貝索函數， $N_m(k_r r)$ 為 m 階的第二類貝索函數。將式(2.33)、(2.37)、(2.40)、(2.42)代回(2.30)得：

$$p = \begin{cases} J_m(k_r r) \\ N_m(k_r r) \end{cases} \begin{cases} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{cases} \begin{cases} e^{jk_z z} \\ e^{-jk_z z} \end{cases} \begin{cases} e^{j\omega t} \\ e^{-j\omega t} \end{cases} \quad (2.43)$$

由於圓管內中心壓力為有限值，而 $N_m(0)$ 為 $-\infty$ ，因此 N_m 項不存在。又因為 $\frac{\partial R(a)}{\partial r} = 0$ ，得到 $\frac{\partial J_m(k_r a)}{\partial r} = 0$ ， $k_r a$ 為 J'_m 的零點，其中 a 為圓管半徑，令：

$$k_r = \frac{\alpha'_{mn}}{a} \quad (2.44)$$

其中 α'_{mn} 代表 J'_m 的第 n 個零點。由式(2.39)、(2.34)、(2.44)得知：

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_r^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 - \left(\frac{\alpha'_{mn}}{a}\right)^2} \quad (2.45)$$

重新定義波傳向量為：

$$k_{z\ mn} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 - \left(\frac{\alpha'_{mn}}{a}\right)^2} \quad (2.46)$$

因此正 z 方向的波傳通解為：

$$p_{mn} = J_m\left(\frac{\alpha'_{mn}r}{a}\right) [A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \sin m\theta] e^{j(\omega t - k_{z\ mn}z)} \quad (2.47)$$

相速度為：

$$c_{mn}^{ph} = \frac{\omega}{k_{z\ mn}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha'_{mn}c_0}{2\pi fa}\right)^2}} \quad (2.48)$$

截止頻率為：

$$f_{mn}^c = \frac{\alpha'_{mn}c_0}{2\pi a} \quad (2.49)$$

當管內的波傳頻率大於截止頻率時，波傳向量則為一虛數，由式(2.47)可知此頻率的波，在沿 z 方向傳遞時會成指數遞減，稱為「消散模態」。同理，若當管內的波傳頻率小於截止頻率時，波傳向量則為一正實數，代表此頻率的波，可沿 z 方向傳遞，稱為「傳播模態」。而 α'_{mn} 的最小值為 1.84，故只有當截止頻率 f_{mn}^c 小於等於 $\frac{1.84c_0}{2\pi a}$ ，才會符合管內波傳僅有平面波的實驗要求。實驗中阻抗管半徑為 51.5 mm，因此截止頻率為 1950 Hz。

2.2.3 阻抗管量測吸音係數之原理

圖 2.3 為阻抗管之實驗架設示意圖，聲源由圓管的左端入射，右方為待測試件，後有一硬背板，藉此設計為全反射的條件，麥克風則於側邊接收訊號，將座標原點定在待測試件的左緣，往右為 $+x$ 方向，往左為 $-x$ 方向， x_1 、 x_2 分別為兩支麥克風的位置座標。已知阻抗管內的聲波為沿 x 方向的平面波，由式(2.27)得知兩麥克風所量取到的聲壓為：

$$P_1 = Ae^{-jkx_1} + Be^{jkx_1} \quad (2.50)$$

$$P_2 = Ae^{-jkx_2} + Be^{jkx_2} \quad (2.51)$$

其中 A 表示入射波的大小， B 為反射波。由式(2.50)、(2.51)可解得：

$$A = \frac{j(P_1 e^{jkx_2} - P_2 e^{jkx_1})}{2 \sin(kx_1 - kx_2)} \quad (2.52)$$

$$B = \frac{j(P_2 e^{-jkx_1} - P_1 e^{-jkx_2})}{2 \sin(kx_1 - kx_2)} \quad (2.53)$$

得到反射係數為：

$$R = \frac{B}{A} = \frac{H - e^{-jks}}{e^{jks} - H} e^{-j2kx_1} \quad (2.54)$$

其中 $H = P_2/P_1$ 為轉移函數， $s = x_2 - x_1$ 為兩支麥克風的距離。因此吸收係數為：

$$\alpha = 1 - |R|^2 \quad (2.55)$$

2.3 阻抗匹配對吸收率之影響

本節由阻抗匹配的視角討論共振腔的吸收率。第一小節介紹何為聲阻抗，第二小節則說明一般情況下反射係數與穿透係數與特徵聲阻抗間的關係，第三小節為第二小節的推廣，計算本文所使用的共振腔之阻抗大小及其對吸收率的影響。

2.3.1 聲阻抗之介紹

阻抗為描述「推」變量 q_p (如電壓或壓力) 和與之相應產生的「流」變量 q_f (如電流或粒子速度) 的比值，聲阻抗的大小與頻率相關[3]。以下說明原因，若先假設 q_p 及 q_f 為時域變量，則阻抗為：

$$Z = \frac{q_p(x, y, z; t)}{q_f(x, y, z; t)} \quad (2.56)$$

若 q_p 為時間諧波函數，表示成 $q_p = Q_p(x, y, z)e^{j\omega t}$ ，由於 q_p 與 q_f 為線性關係，則

q_f 同樣為時間諧波函數，即 $q_f = Q_f(x, y, z)e^{j\omega t}$ ，在此關係下時間項可被消除：

$$Z = \left(\frac{q_p}{q_f} \right)_{\text{time harmonic}} = \frac{Q_p}{Q_f} \quad (2.57)$$

其中 Q_p 及 Q_f 為複數，因此 Z 也是，表示成：

$$Z = \alpha' + \beta' j \quad (2.58)$$

α' 為聲阻， β' 為聲抗。以時間域表示的式(2.56)在分析上不易，若轉成式(2.57)的頻域表示則廣為使用。

然而在某些情況下，不須假設為時間諧波函數，因為不論波型為何，時間項皆可被取消，例如：無損失的傳輸線，這些情況下的阻抗為一實數且與頻率無關。然而若是在管道中形成駐波的形式，其阻抗則為複數，例如四分之一波長共振腔、二分之一波長共振腔等。

以下介紹三個在聲學領域中常用的阻抗：

(1) 聲阻抗 Z_{ac} (Acoustic impedance)：在一給定的表面上，平均壓力 p_{av} 與通

過表面的體積速度 q 的比值，常用來計算來自振動表面的輻射。

$$Z_{ac} = \frac{p_{av}}{q} \quad (2.59)$$

(2) 特徵聲阻抗 Z_{spac} (Specific acoustic impedance)：在一特定點上，壓力 p

與粒子速度 u 的比值，多用來討論聲波在不同介質中傳遞的行為。

$$Z_{spac} = \frac{p}{u} \quad (2.60)$$

(3) 機械阻抗 Z_{mech} (Mechanical impedance)：施加於一個點上的力 f 與該點速

度 u 的比值，多用來描述聲波與驅動源或驅動負荷間的比值。

$$Z_{\text{mech}} = \frac{f}{u} \quad (2.61)$$

接著考慮兩種常見的情況，首先若有一平面波在截面積為 S 的管道中傳播，因此在一選定的截面上，各點壓力皆相等，則可得到 $p_{\text{av}} = p$ 、 $q = Su$ 及的關係式 $f = pS$ ，代入式(2.59)、(2.61)得到：

$$Z_{\text{ac}} = \frac{p}{Su} = \frac{Z_{\text{sp ac}}}{S} \quad (2.62)$$

$$Z_{\text{mech}} = \frac{pS}{u} = Z_{\text{sp ac}} S \quad (2.63)$$

另一種常見的情況則是有一平面波在無窮域且均勻、等向的介質中傳遞，其壓力與粒子速度可表示成式(2.27)與(2.28)，代入式(2.60)得到材料的特徵聲阻抗，在本文中命名為 Z_0 ，若將往 $+x$ 方向與往 $-x$ 方向傳遞的聲波獨立來看，則可分別得到往兩方向傳遞的聲波的材料特徵聲阻抗：

$$Z_0^+ = \rho_0 c_0 \quad (2.64)$$

$$Z_0^- = -\rho_0 c_0 \quad (2.65)$$

注意 $Z_0 \neq Z_0^+ + Z_0^-$ ， Z_0^+ 與 Z_0^- 為往 $+x$ 與 $-x$ 方向傳遞聲波的材料特徵聲阻抗。

2.3.2 反射係數與穿透係數

在兩個特性不同材料間，聲波傳遞時會有部分穿透、部份反射的行為發生，此小節將討論垂直入射時穿透與反射的量值與聲阻抗間的關係。考慮一波傳問題，有一任意波型的波垂直入射至兩半無窮域介質間的介面，如圖 2.4，其中 p^i 為入射波的大小、 p^r 為反射波的大小、 p^t 為穿透波的大小、材料一的特徵聲阻抗為 $Z_{01} = \rho_1 c_1$ 、材料二的特徵聲阻抗為 $Z_{02} = \rho_2 c_2$ 。反射係數 R 與穿透係數 T 的定義為：

$$R = \frac{p^r}{p^i} \quad (2.66)$$

$$T = \frac{p^t}{p^i} \quad (2.67)$$

介面視為無質量體，根據牛頓第二定律，若介面左右有壓力差會引發無窮大的加速度，因此介面左右的壓力要相等：

$$p^i + p^r = p^t \quad (2.68)$$

將式(2.68)同除 p^i 並以式(2.66)、(2.67)對反射係數及穿透係數的定義代入，得到：

$$1 + R = T \quad (2.69)$$

而介面左右的粒子速度必須連續，得到：

$$u^i + u^r = u^t \quad (2.70)$$

將式(2.70)以聲壓與阻抗表示，則為：

$$\frac{p^i}{Z_{01}} - \frac{p^r}{Z_{01}} = \frac{p^t}{Z_{02}} \quad (2.71)$$

將式(2.71)中的聲壓以反射係數與穿透係數表示，得到：

$$1 - R = \frac{Z_{01}}{Z_{02}} T \quad (2.72)$$

由式(2.69)與(2.72)解得 R 與 T 為：

$$R = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \quad (2.73)$$

$$T = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}} \quad (2.74)$$

若 $Z_{01} \gg Z_{02}$ ，則 $R=-1$ 、 $T=0$ ，表示無穿透波，而反射波與入射波大小相同、相位相反；反之，若 $Z_{02} \gg Z_{01}$ ，則 $R=1$ 、 $T=2$ ，表示穿透波為入射波的兩倍，反射波與入射波大小相同，兩者的相位皆與入射波相同。

2.3.3 四分之一波長共振腔之阻抗分析與吸收率

本小節將聲阻抗的分析推廣至有限管道中內含可壓縮但無能量損失流體的

情況並討論其吸收率。考慮一截面均勻但長度有限的管道，同時存在往 $+x$ 方向與 $-x$ 方向傳遞的波，如圖 2.5， x_1 、 x_2 為該點座標，兩點間的距離為 L_t ，其 x 方向的聲壓與粒子速度可由式(2.27)與(2.28)表示成[26]：

$$p = Ae^{-jkx} + Be^{jkx} \quad (2.75)$$

$$u = \frac{A}{Z_0} e^{-jkx} - \frac{B}{Z_0} e^{jkx} \quad (2.76)$$

由式(2.60)特徵聲阻抗的定義中得知：

$$Z_{\text{sp ac}}(x_1) = \frac{p(x_1)}{u(x_1)} = Z_0 \frac{Ae^{-jkx_1} + Be^{jkx_1}}{Ae^{-jkx_1} - Be^{jkx_1}} \quad (2.77)$$

$$Z_{\text{sp ac}}(x_2) = \frac{p(x_2)}{u(x_2)} = Z_0 \frac{Ae^{-jkx_2} + Be^{jkx_2}}{Ae^{-jkx_2} - Be^{jkx_2}} \quad (2.78)$$

由式(2.77)得知：

$$\frac{B}{A} = \frac{Z_{\text{sp ac}}(x_1) - Z_0}{Z_{\text{sp ac}}(x_1) + Z_0} e^{-2jkx_1} \quad (2.79)$$

將式(2.79)代入(2.78)，得到：

$$Z_{\text{sp ac}}(x_2) = Z_0 \frac{-jZ_{\text{sp ac}}(x_1) \cot kL_t + Z_0}{Z_{\text{sp ac}}(x_1) - jZ_0 \cot kL_t} \quad (2.80)$$

對於封閉管道而言， $Z_{\text{sp ac}}(x_1) = \infty$ ，代入式(2.80)，得到：

$$Z_{\text{sp ac}}(x_2) = -jZ_0 \cot kL_t = Z_{\lambda/4} \quad (2.81)$$

當 $L_t = \lambda/4$ 時， $Z_{\text{sp ac}}(x_2) = 0$ ，為四分之一波長共振腔。同理，若是開放管道，

$Z_{\text{sp ac}}(x_1) = 0$ ，得到：

$$Z_{\text{sp ac}}(x_2) = jZ_0 \tan kL_t = Z_{\lambda/2} \quad (2.82)$$

當 $L_t = \lambda/2$ 時， $Z_{\text{sp ac}}(x_2) = 0$ ，為二分之一波長共振腔。

在有限管道中內含可壓縮但無能量損失流體的假設中，材料的特徵阻抗改寫

成 $Z_0 = \sqrt{\rho_{eff}/C_{eff}}$ ，有效傳播常數 $k = \omega\sqrt{\rho_{eff}/C_{eff}}$ ，其中有效密度 ρ_{eff} 與有效壓縮

性 C_{eff} 為[27]：

$$\rho_{eff} = \rho_0 \{1 - 2(-i\omega/\nu)^{-1/2} \times G[r_i(-i\omega/\nu)^{1/2}] / r_i\}^{-1} \quad (2.83)$$

$$C_{eff} = (1/\gamma P_0) \{1 + 2(\gamma - 1)(-i\omega\gamma/\nu')^{-1/2} \times G[r_i(-i\omega\gamma/\nu')^{1/2}] / r_i\} \quad (2.84)$$

其中 $G[\zeta] = J_1(\zeta)/J_0(\zeta)$ 、 $\nu' = \kappa/(\rho_0 C_v)$ 、 $\nu = \mu/\rho_0$ 為運動黏滯係數、 L_t 為空氣管長度、 r_i 為管道的開口半徑、 ρ_0 為平衡密度、 P_0 為平衡壓力、 μ 為動態黏滯係數、 κ 為熱傳導係數、 C_v 為定容比熱、 γ 為比熱比、 J_0 為零階之第一類貝索函數、 J_1 為一階之第一類貝索函數，各參數對應的單位列於表 2-1。若管道的開口半徑 r_i 為毫米等級以上，則 $Z_0 = \sqrt{\rho_{eff}/C_{eff}} \approx \rho_0 c_0$ 。

接著討論本文中的情況，若有一平面波在截面積不均勻的管道中傳遞，如圖 2.6，在 $x < 0$ 處，截面積為 S_1 ，可視為實驗中阻抗管的部分； $x > 0$ 處，截面積為 S_2 ，為四分之一波長共振腔， $x=0$ 處為兩者的交界， Z_1 代表 $-dx$ 處的聲阻抗， Z_2 代表 dx 處的聲阻抗，由式(2.62)與(2.81)得知 Z_1 、 Z_2 為：

$$Z_1 = \frac{Z_0}{S_1} \quad (2.85)$$

$$Z_2 = \frac{Z_{\lambda/4}}{S_2} \quad (2.86)$$

由式(2.73)得知 $x=0$ 處的反射係數為：

$$R = \frac{Z_{\lambda/4}/\xi - Z_0}{Z_{\lambda/4}/\xi + Z_0} \quad (2.87)$$

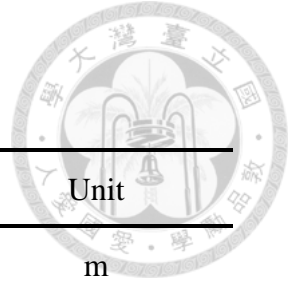
其中 ξ 為 S_1 與 S_2 的比值，代表開口率。吸收率 α 為：

$$\alpha = 1 - |R|^2$$



表 2-1 參數符號與單位對應表

Item	Symbol	Unit
Length of the tube	L_t	m
Radius of the tube	r_t	m
Speed of sound	c_0	m/s
Equilibrium density	ρ_0	kg/m ³
Equilibrium pressure	P_0	N/m ²
Dynamic viscosity	μ	Pa s
Thermal conductivity	κ	W/(m K)
Heat capacity at constant volume	C_v	J/(kg K)



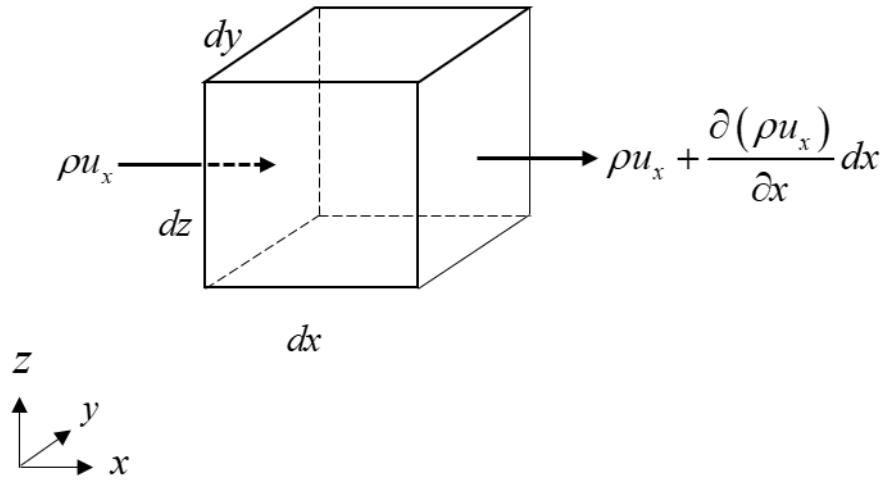


圖 2.1 定體積下 x 方向的質量流



圖 2.2 圓柱座標圖

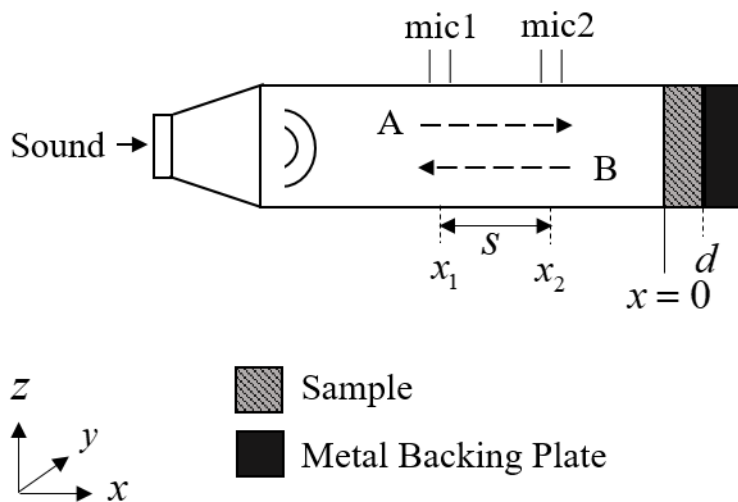


圖 2.3 阻抗管內波傳示意圖

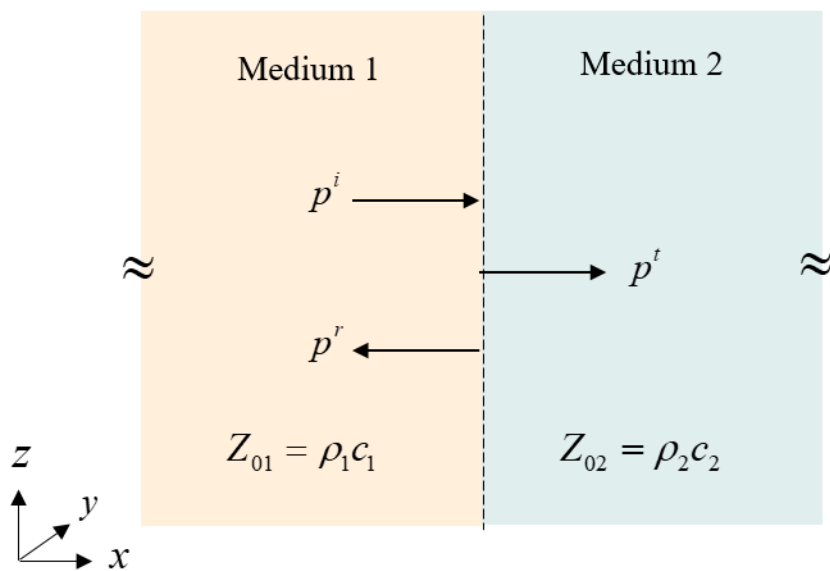


圖 2.4 垂直入射聲波時反射與穿透波的示意圖

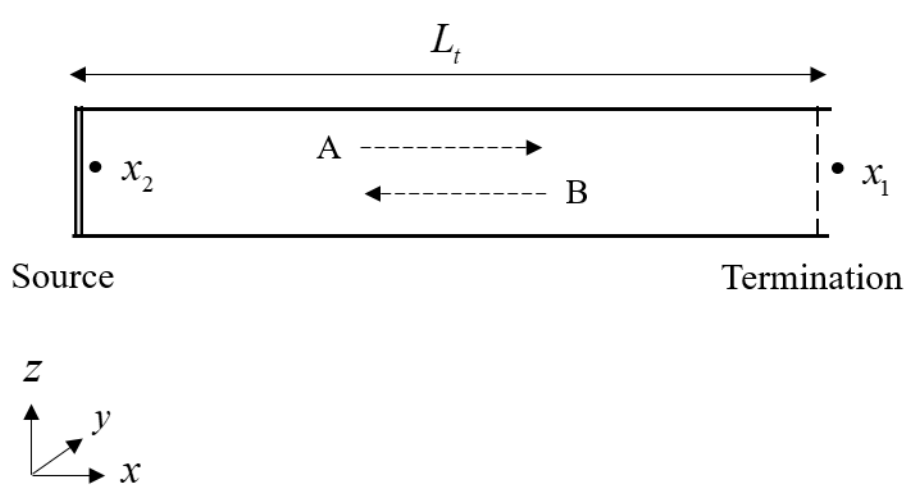


圖 2.5 一截面均勻的管道內含可壓縮但無能量損失流體示意圖

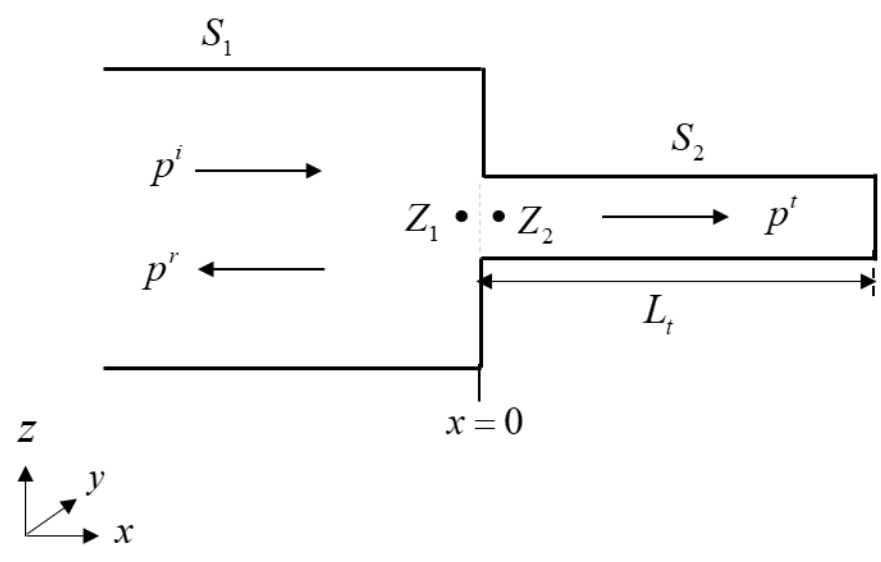


圖 2.6 不均勻截面管道之示意圖

第三章 四分之一波長共振器之吸收率模擬方法

本章主要利用 COMSOL 多物理耦合軟體計算四分之一波長共振器受各頻率聲波入射後的情況。3.1 至 3.3 節主要介紹模擬時所使用到的統御方程式，並建立模擬的方法，3.4 至 3.7 節則是討論吸收率最大時，共振腔內各物理量的分布特徵，以及影響吸收頻率與吸音係數的主要參數，並與 2.3.3 小節以阻抗匹配法所得到的結果比較，針對阻抗匹配法提出修正公式，及說明設計準則。

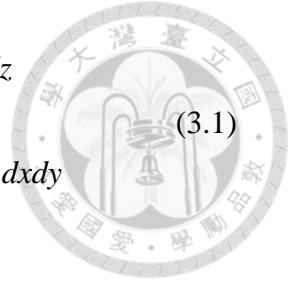
3.1 聲熱模組之統御方程式

第二章主要由阻抗匹配的觀點計算入射、反射以及穿透的比例，進而得到吸收係數，然而本文所使用的吸音機制是經由共振時的熱黏滯效應所引起的能量損失，且發生範圍僅限於邊界層附近，而聲波方程式卻恰巧忽略的熱黏滯的邊界效應，因此有必要以微觀的角度考慮流體的聲熱效應。模擬使用到聲壓與聲熱模組，聲壓模組在頻域中所使用的統御方程式為式(2.23)的荷姆霍茲方程式，聲熱模組所使用的統御方程式有式(2.9)的連續方程式、納維-斯托克斯方程式(Navier-Stokes equation)以及能量方程式(energy equation)[28]。連續方程式與荷姆霍茲方程式已於 2.1.2 和 2.1.4 小節介紹過，因此以下分別介紹動量方程式與能量方程式。

3.1.1 納維-斯托克斯方程式

納維-斯托克斯方程式即為牛頓第二定律延伸至流體力學的結果[3, 29, 30]。考慮一移動中的流體元素，受力分布如圖 3.1 所示，其中忽略重力作用，因此 x 方向所受的淨力為：

$$F_x = \left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right] dydz + \left[\left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx - \tau_{xx} \right) \right] dydz + \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy - \tau_{yx} \right) \right] dx dz + \left[\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz - \tau_{zx} \right) \right] dx dy \quad (3.1)$$



其中 p 為壓力， τ_{ij} 表示在 i 面上 j 方向的應力，式(3.1)整理得：

$$F_x = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (3.2)$$

同理 y 、 z 方向的受力為：

$$F_y = \left[-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (3.3)$$

$$F_z = \left[-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (3.4)$$

而加速度可由式(2.16)得知為 $\vec{a} = (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \partial \vec{u} / \partial t$ ，可表示成：

$$\vec{a} = (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \frac{D\vec{u}}{Dt} \quad (3.5)$$

根據牛頓第二定律，由式(3.2)、(3.3)、(3.4)以及(3.5)得到：

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] + \left[-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right] + \left[-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] \quad (3.6)$$

其中：



$$\begin{aligned}
 \tau_{xx} &= \lambda_d (\nabla \cdot \vec{u}) + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \\
 \tau_{yy} &= \lambda_d (\nabla \cdot \vec{u}) + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
 \tau_{zz} &= \lambda_d (\nabla \cdot \vec{u}) + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left[\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right] \\
 \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left[\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right] \\
 \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left[\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right]
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

λ_d 為膨脹黏度(dilatational viscosity)、 μ 為動態黏度(dynamic viscosity)，因此式(3.6)

可由(3.7)整理成：

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + (\lambda_d + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) \tag{3.8}$$

其中 $\lambda_d + 2\mu = 4\mu/3 + \mu_B$ ，且引入渦流損失項 $\mu\nabla \times \nabla \times \vec{u}$ 至式(3.8)，可得到納維-斯

托克斯方程式：

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \left(\frac{4}{3}\mu + \mu_B \right) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \mu\nabla \times \nabla \times \vec{u} \tag{3.9}$$

其中 μ_B 為體積黏度(bulk viscosity)。

3.1.2 能量方程式

熱力學第一定律說明每單位質量內的能量變化 ΔE 為由外界進入此單位質量的熱能 Q 與對此單位質量所做的功 W 的總和[31, 32]，其數學式表示為：

$$\Delta E = Q + W \tag{3.10}$$

微分項可表示成：

$$dE = dQ + dW \quad (3.11)$$

若外界對此元素施加 p 的壓力，此壓力會使此元素的體積些微減少，因此外界對此單位質量所做的功可表示成 $-pdv_s$ 。式(3.11)可改寫成：

$$dE = dQ - pdv_s \quad (3.12)$$

其中 v_s 為比容，表示某單位質量的物質所擁有的體積。熱力學中有四個描述物質狀態的重要參數，分別為熵(entropy)、焓(enthalpy)、荷姆霍茲自由能(Helmholtz free energy)以及吉布斯自由能(Gibbs free energy)，熵以 S 、焓以 H 、荷姆霍茲自由能以 F 、吉布斯自由能以 G 表示，其數學式表示為：

$$dS = dQ/T \quad (3.13)$$

$$H = E + pv_s \quad (3.14)$$

$$F = E - TS \quad (3.15)$$

$$G = F + pv_s \quad (3.16)$$

其中 T 為攝氏溫度，式(3.12)可由式(3.13)寫成：

$$TdS = dE + pdv_s \quad (3.17)$$

式(3.14)以微分量表示：

$$dH = dE - pdv_s - v_s dp \quad (3.18)$$

由(3.17)與(3.18)可得到：

$$TdS = dH - v_s dp \quad (3.19)$$

同理式(3.15)與式(3.16)可表示成：

$$dF = -SdT - pdv_s \quad (3.20)$$

$$dG = -SdT + v_s dp \quad (3.21)$$

若式(3.17)中 S 和 v_s 為兩獨立參數，則可得到：



$$\left(\frac{\partial E}{\partial v_s}\right)_S = -p \quad \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{v_s} = T \quad (3.22)$$



對式(3.22)中的兩條式子再微分成 $\partial^2 E/\partial v_s \partial S$ 的形式，則可得到：

$$\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_{v_s} = -\left(\frac{\partial T}{\partial v_s}\right)_S \quad (3.23)$$

式(3.19)、(3.20)與(3.21)可以同樣的方式可得到三條關係式：

$$\left(\frac{\partial v_s}{\partial S}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S \quad (3.24)$$

$$\left(\frac{\partial v_s}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \quad (3.25)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{v_s} = \left(\frac{\partial S}{\partial v_s}\right)_T \quad (3.26)$$

式(3.23)、(3.24)、(3.25)與(3.26)為四條馬克斯威爾熱力學關係式(Maxwell's thermodynamic relations)。若流體在非均勻溫度的狀態下流動，熵可視為溫度與壓力的函數[32]，因此：

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp \quad (3.27)$$

將定壓比熱 C_p 與熱膨脹係數 α_0 之定義：

$$C_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \quad (3.28)$$

$$\alpha_0 = -\frac{1}{v_s} \left(\frac{\partial v_s}{\partial T}\right)_p \quad (3.29)$$

與式(3.24)代入式(3.27)，得到：

$$TdS = C_p dT - \alpha_0 v_s T dp \quad (3.30)$$

式(3.30)表示每單位質量內的能量變化，其中 $v_s = 1/\rho$ 。因此能量方程式為：

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} - \alpha_0 T \frac{dp}{dt} = -\nabla \cdot (-\kappa \nabla T) + \Phi + \dot{Q} \quad (3.31)$$

其中 $\rho C_p (dT/dt) - \alpha_0 T (dp/dt)$ 為每單位體積在每單位時間內的能量變化、 $-\nabla \cdot (-\kappa \nabla T)$ 為熱傳項，由熱傳中的傅立葉定律(Fourier's law)所得到的、 Φ 為黏滯損失函數、 \dot{Q} 為熱源項。式(3.31)表示一體積內的能量變化為等於熱傳導項、熱源項與黏滯損失的總和。

3.2 邊界層之介紹

本文所使用的吸音機制是由共振時產生的熱黏滯效應造成的能量損失，因此本節對黏滯與熱邊界層分別做介紹。若有一流體流經固體表面時，固體表層會出現一層特性不同的薄膜，此為邊界層，分為黏滯與熱邊界層[3, 30, 32]。

3.2.1 黏滯邊界層

黏性流體流動時，在固體表面上會形成具有大速度梯度的薄層，如圖 3.2(a)，在黏滯邊界層外的流體速度為定值，而黏滯邊界層內流速會由一定值遞減至牆壁為零，若是無黏性流體，那麼流體與牆壁間則可完全滑動，也就是說流體與牆壁間無摩擦力且邊界層厚度為零。由於真實氣體有黏性的特性，導致此有限厚度邊界層的存在，儘管相當地薄，仍為本文的重點之一，此邊界層厚度為

$$\delta_{\text{visc}}^{\text{BL}} = \sqrt{2\mu/\omega\rho_0} [3]。$$

3.2.2 熱邊界層

熱邊界層是與黏性邊界層同時存在，考慮一流體在圓管內流動，其剖面的熱行為如圖 3.2 (b)，在圓管中心範圍，不論是處於壓縮或是擴張的瞬間，流體特性皆處於絕熱狀態，但在管壁周圍則傾向於等溫條件，由於牆壁實際上可視為無限的熱源或水槽，所以與管壁相鄰的流體溫度始終保持與壁面相同，也就是說與管壁相鄰的流體有任何溫度變化都將立刻流入或流出牆壁，此改變流體特徵由絕熱至等溫的區域則稱為熱邊界層，熱邊界層厚度與黏滯邊界層厚度間的關係由普朗特數 Pr (Prandtl number) 所控制， $\delta_{\text{therm}}^{\text{BL}} = \delta_{\text{visc}}^{\text{BL}} / \sqrt{Pr}$ ， Pr 表示動黏滯係數與熱擴散率的比例，若 Pr 為 1，則兩者厚度相同；若 Pr 大於 1，則熱邊界層厚度較薄，熱傳遞的效果較為顯著；若 Pr 小於 1，則熱邊界層厚度較厚，熱傳遞的效果較差，如空氣，一大氣壓，20°C 的空氣， $Pr=0.708$ [3]。

3.3 收斂性分析

為確認模擬結果的可信度，需先進行網格的收斂性分析，以長度 205 mm、開孔率為 0.026 的四分之一波長共振腔為對象，改變邊界的網格大小，觀察其擁有最佳吸音效果的頻率 406 Hz 的吸音係數收斂情況。為節省計算量先以軸對稱模型進行分析，但後續薄型吸音板的設計已無軸對稱的特性，在此節也一並以相同的結構討論三維模型中合適的網格形狀與大小。

3.3.1 軸對稱模型

圖 3.3 (a) 為計算四分之一波長共振腔吸收率的軸對稱模型，分為阻抗管與四分之一波長共振腔兩部分，開口率即為兩者截面積的比值，紅色虛線表示軸對稱的對稱軸，灰色區塊皆為 20°C 的空氣，材料參數列於表 3.1[11]。由於本文所使用的吸音機制是由共振時產生的熱黏滯效應造成的能量損失，因此在共振腔的部

分需考慮熱黏滯效應，使用聲熱模組，空氣與固體的交界處，因黏滯邊界層的作用，須為無滑動條件，又因熱邊界層的影響，須同時滿足等溫特性；而阻抗管視為一圓形波導，不考慮能量損失，則使用聲壓模組，左方的邊界條件為一大氣壓的壓力垂直入射，其餘固體與空氣間的介面設為硬聲場邊界。已知邊界層為主要影響範圍，因此在網格的收斂性分析上，以黏滯邊界層的厚度為收斂參數，406 Hz 時的黏性邊界層厚度為 0.1087 mm，且只對管壁附近的網格尺寸分析，邊界最大網格的網格尺寸由 5 倍的黏滯邊界層厚度遞減至二分之一倍，其餘部分的網格尺寸則以 1.3 的倍率往對稱軸的方向遞增，共振腔的網格形狀如圖 3.3 (b)，收斂目標為共振腔的吸音係數，吸音係數的計算方式則依照 2.2.3 小節的方法，同樣將座標原點定在共振腔與阻抗管的交接處，往右為 $+x$ 方向，往左為 $-x$ 方向，第一支麥克風的位置為 -100 mm，第二支麥克風的位置為 -50 mm，由圖 3.3 (c) 得知邊界網格尺寸小於 1.8 倍的黏滯邊界層厚度時，吸收係數達穩定值，因此本文後續使用軸對稱模擬模型時所使用的網格尺寸皆為 1.5 倍的黏滯邊界層厚度。

3.3.2 三維模型

為節省計算量，在進入三維模擬之前先利用圖 3.3 (a) 的軸對稱模型決定模擬中阻抗管所需要的長度與網格元素的大小，因為麥克風放置在阻抗管的部分，所以需要先討論麥克風的位置，雖然美國材料試驗協會的測試規範中對於兩麥克風位置及阻抗管的幾何形狀已提供基本的準則，將於本文的 4.3.1 節介紹，但此處則針對模擬所需的位置重新分析。由式(2.54)得知影響吸收係數之麥克風位置參數為兩麥克風的間距 s 以及第一支麥克風的位置 x_1 ，因此圖 3.4 與圖 3.5 分別討論此兩參數。圖 3.4 顯示將第二支麥克風的位置固定在 -50 mm 處，兩麥克風的間距與吸收係數間的關係，由圖中得知兩麥克風的間距對吸收係數的影響不大，而阻抗管長度越短所需計算量則越少，因此將兩麥克風的間距決定為 5 mm；圖 3.5 則沿用上述的結果，將麥克風間距固定為 5 mm，討論第一支麥克風的位

置與吸收係數的關係，當麥克風的位置過於接近共振腔時，吸收係數會開始產生劇烈的變動，因此將第一支麥克風的位置選在-45 mm，以維持準確的吸收係數同時節省計算量。接著圖 3.6 是阻抗管長度 L 的討論，當阻抗管長度小於 55 mm 時，吸收係數會有些為的變動，因此阻抗管長度不得小於 55 mm，也就是說第一支麥克風與入射聲源間需留有的 10 mm 的空間，而圖 3.7 則為阻抗管最大元素尺寸與吸收係數之關係，顯示阻抗管的元素大小並不影響吸收率，因此阻抗管部分的元素尺寸設定為 1.5s。

由圖 3.4 至 3.7 將阻抗管的尺寸以及所需的計算量最小化後，以此標準建立三維模型，如圖 3.8。同樣的在三維模型中，若要使求得的吸收係數穩定，需重複進行一次收斂性分析，然而在三維模型中建立網格元素的方法相當多樣化，不同的幾何形狀對吸收率之收斂性以及計算量之影響甚鉅，因此除了元素大小的討論外，也對元素的形狀進行分析。圖 3.9 為元素形狀對吸收率之討論，形狀分別設定為四面體(三角錐)、五面體(三角柱)以及六面體(四角柱)，而元素尺寸由七倍的黏滯邊界層厚度逐漸縮小至計算量之極限，由圖中得知六面體的元素最快達到計算量之極限，因此其所需的計算量最大，而五面體的元素對吸收率收斂的效果不彰，因此在三維模擬中，選用四面體做為元素之形狀。圖 3.10 為四面體元素之收斂性分析，黃色區塊為吸收率大於 0.99 的部分，由於三維模型的計算量過大，吸收率難以達到穩定值，然而當元素尺寸小於 3.3 倍的黏滯邊界層厚度時，吸收率已達 0.99。圖 3.11 為一維及三維模型對吸收率影響之比較，兩者吻合度極高，因此後續使用三維模擬模型時，取決於吸收率之收斂性與計算量，網格元素形狀設定為四面體，大小則為 3 倍的黏滯邊界層厚度，吸收率的精度至小數點後兩位。

3.4 能量損失分布

由 3.3 節建立四分之一波長共振腔之模擬模型後，此節則由軸對稱的模型討

論其能量損失分布的情形。圖 3.12 為各頻率能量損失的情形，紅色曲線代表總能量損失、藍色曲線為黏滯能量損失、綠色曲線為熱能量損失，其趨勢與圖 3.11 吸收率的曲線相同，再次說明四分之一波長共振腔的吸音機制是由共振時產生的熱黏滯效應造成的能量損失。圖 3.13 為共振時的能量損失分布情形，圖軸顏色代表每單位體積的能量損失，單位為 W/m^3 ，黏滯損失主要集中於頸口，這是共振時頸口處的空氣會產生激烈振盪，使速度大幅提高，造成空氣和壁面之間的摩擦大量消耗聲波的動能，而熱損失的分布則由共振腔閉口端的管壁往開口處遞減，雖黏滯損失範圍較小，但每單位體積的能量損失約為熱損失的 50 倍，由圖 3.12 得知，黏滯損失約佔總損失的三分之二，熱損失則為三分之一，兩者皆不可忽視。

3.5 四分之一波長管內的聲壓、粒子速度及溫度分布特徵

此節沿用圖 3.3(a)的軸對稱模型討論四分之一波長管內各物理量之分布情形。為方便表示，圖 3.14(a)再次定義阻抗管與四分之一波長管的位置座標，x 方向的原點座標同樣定在阻抗管與四分之一波長管的交接處，往四分之一波長管的方向為正，往阻抗管的方向為負，y 方向的原點座標則位於對稱軸上，圖 3.14(b)、圖 3.14(c)與圖 3.14(d)分別為對稱軸上的聲壓、軸向速度及溫度變化分布的情況，紅色曲線為第一特徵模態、藍色曲線為第二特徵模態、綠色曲線為第三特徵模態。首先在聲壓分布圖 3.14(b)中可以看到阻抗管處的聲壓變化量很小，而在四分之一波長共振腔內的聲壓則對應其特徵模態呈四分之一、四分之三及四分之五波長的形式分布，閉口端為波腹位置，開口端則接近節點。而在軸向的速度分布圖 3.14(c)中同樣可以發現共振腔內的粒子速度相較於阻抗管的部分有被放大的現象，開口處更是明顯，此處粒子快速振盪可有效地引起黏滯損失，閉口處則符合無滑動條件，粒子速度為零。圖 3.14(d)則顯示內部溫度與外界溫度的差異，阻抗管視為理想波導，不考慮任何熱效應，因此在圖 3.14(d)中只繪製共振腔內的情形，其溫度差異分布與聲壓相似，但在閉口處的溫度差有明顯驟降的情況，這

是由於管壁的部分需符合等溫條件，圖 3.15 為閉口處溫度變化的局部放大圖，黃色區域為第一特徵頻率下的熱邊界層範圍，厚度為 0.1291 mm，符合紅色線溫度差下降的區域，而越高模態溫度差下降的區域越小，同樣符合 3.2 節邊界層的介紹。

接著討論半徑方向物理量的分布，此處只針對第一特徵模態分析，圖 3.16 至 3.19，皆將共振腔分為五等分，共取六個位置，沿半徑方向繪製欲討論之物理量的大小。圖 3.16 為共振腔內半徑方向的聲壓分佈，每條線幾乎呈水平狀，只產生些微變化，紅色線位於開口處，壓力最小，藍色線位於閉口處，壓力最大，越接近閉口端，兩位置聲壓差異越小，其對應關係與圖 3.14(b)相同。圖 3.17 為半徑方向上速度分布的情況，越接近閉口處，半徑方向上的速度變化量小，藍色線為管壁部份，粒子速度皆為零滿足無滑動條件，淺綠色的區域為黏滯邊界層的範圍，厚度為 0.1087 mm，圖 3.18 為速度分布的局部放大圖，紅色線上速度最大的區域在黏性邊界層的範圍，再次說明開口處空氣劇烈振盪的行為，造成大量的黏滯損失。圖 3.19 為半徑方向上溫度差異分布的情形，同樣藍色線以及 $y=4.85$ mm 處皆代表管壁的部份，須滿足等溫條件，溫度差皆為零，黃色區塊為熱邊界層的部份，此處為空氣由絕熱狀態進入等溫的過度帶，溫度差驟降的行為發生在此區域。由此節討論得知不論是在熱邊界層或是黏滯邊界層的範圍，都有物理量劇烈變化的行為，為計算共振腔吸收率時的主要影響範圍，以此呼應 3.3 節在吸收率收斂性分析上網格形狀及尺寸的討論。

3.6 共振腔幾何與吸音係數之關係

由 2.3.3 小節得知影響四分之一波長共振腔的參數為共振腔的長度及開口率，為進一步了解各參數對吸收頻率及吸音係數的影響，利用有限元素法進行分析，為節省計算時間，此處使用軸對稱模型，模擬方式如 3.3.1 小節所述。圖 3.20 為共振腔長度固定在 177 mm 時，開口率與最大吸音係數及吸收頻率之關係，藍色

線表示開口率與最大吸音係數之關係，顯示共振腔長度固定時，若要得到最佳吸音效果，有其合適的開口率，隨著開口率的偏移，吸音效果隨之下降；紅色線為開口率對最大吸音率之頻率的影響，開口率越小，吸音頻率越高，開口率越大吸音頻率越低，但整體而且影響不大。吸音頻率隨開口率變化的原因可參照荷姆霍茲共振器頸柱的等效長度校正[14]，對一圓形開口的荷姆霍茲共振腔，其腔體半徑遠大於頸口半徑，則頸柱校正後的長度為 $l'_{neck} = l_{neck} + 0.85R_{neck}$ ，其中 l_{neck} 為頸柱的幾何長度， R_{neck} 為頸口半徑，頸口的開口半徑越大，頸柱的等效長度越長。同理，若四分之一波長共振腔的開口率越大，共振腔的等效長度越長，吸音頻率越低，反之，若開口率越小，共振腔的等效長度越短，吸音頻率越高。

圖 3.21 開口率固定為 0.017 時，共振腔長度與最大吸音係數及吸收頻率之關係，藍色線表示共振腔長度與最大吸音係數之關係，同樣顯示在固定開口率時，在適當的共振腔長度下，才会有最大的吸音係數，但其變化量不如開口率改變時的明顯；紅色線則為共振腔長度對最大吸收率之頻率的影響，共振腔長度越長，吸音頻率隨之下降，長度越短，吸音頻率越高，且對應關係符合四分之一波長共振腔之概念。由圖 3.20 及 3.21 得知，欲得到最大的吸音係數，共振腔的開口率與頻率須經適當的設計，吸收頻率主要由共振腔的長度控制，開口率則主要影響吸收率。

3.7 阻抗匹配法與有限元素法之比較與設計準則

由於利用阻抗匹配分析吸收率的過程中，對流體做了均質、等向性、完美彈性以及無任何因黏滯性或熱傳導而產生損失的假設，相較於有限元素法會與實際情形差異較大，此節將針對阻抗匹配法提出修正公式。圖 3.22 為阻抗匹配法與有限元素法擁有最大吸收率之頻率誤差，藍色實線為校正前的誤差，當共振腔長度越短時，阻抗匹配法的簡化影響越大，誤差越大，反之，若共振腔長度越長，

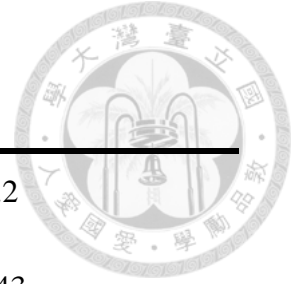
阻抗匹配法的簡化影響相對越小，誤差則越小，藍色虛線為其近似曲線，方程式為 $F_{\max}^{error} = 0.66L_i^{-0.795}$ ，由於修正前阻抗匹配法所得到的吸收頻率略高於有限元素法的結果，因此修正後的共振腔長度為 $L'_i = L_i + F_{\max}^{error} \times L_i \times 0.01$ ，其中 L_i 為修正前的長度，紅色實線為阻抗匹配法共振腔長度修正後的結果，修正後吸收頻率的誤差皆在 1% 以內。然而在開口率的部分相對簡單許多，圖 3.23 是分別利用阻抗匹配法與有限元素法得到各共振腔長度在第一特徵模態下擁有最大吸收率之開口率，可以發現兩者結果十分接近，由 3.5 節得知邊界層厚度非常小，而四分之一波長共振腔的開口半徑通常是邊界層厚度的數十倍，因此阻抗匹配法對熱黏滯效應的簡化對開口率不會造成太大的影響。

若以 177 mm 的四分之一波長共振腔舉例說明，擁有最大吸收率之開口率為 0.017，圖 3.24 為修正前之阻抗匹配法與有限元素法之吸收率曲線，有限元素法與阻抗匹配法的共振腔長度 177 mm、開口率為 0.017，圖 3.25 為修正後之阻抗匹配法與有限元素法之吸收率曲線，有限元素法的模擬模型維持不變，而修正後阻抗匹配法的共振腔長度 181.6 mm、開口率仍維持 0.017，由圖 3.24 與 3.25 得知修正後的阻抗匹配法與模擬結果吻合度極高。圖 3.26 為阻抗匹配法修正後共振腔長度、吸收頻率及吸收係數間的關係，其中使用的開口率為各長度所對應的第一特徵模態之最佳值，可以想像成由許多不同共振腔長度的圖 3.24 所疊加起來的結果，而吸收係數的部分轉為顏色表示，已知共振發生時，可達到吸收率的最大值，因此左下至右上的曲線為第一、第二、第三特徵模態，依序遞增，而第一特徵模態所對應的波長為共振腔長度的四倍，第二特徵模態的波長則是共振腔長度的四分之三倍，第三特徵模態的波長為共振腔長度的四分之五倍，依此類推，其最大聲壓分布如圖 3.27，由於本文目的為低頻波的吸收，因此所使用的模態皆為第一特徵模態。圖 3.28 共振腔長度、開口率與吸收係數間的關係，其中隱含的吸音頻率為各共振腔長度第一特徵模態的頻率，同樣可想像成由許多圖 3.20 的藍色線疊加起來的結果。後續的共振腔的幾何尺寸可直接由圖 3.26 及 3.28 進行

設計，首先利用圖 3.26 得知欲吸收頻率與共振腔長度的關係，並藉由圖 3.28 設計合適的開口率，以此減去三維計算量過大的麻煩，雖修正公式所涵蓋的共振腔長度只在 50~700 mm，但第一特徵頻率已跨足 100~1500 Hz，作為共振式的吸音板的使用範圍已相當足夠。



表 3-1 20 °C 空氣材料參數



Equilibrium density ρ_0 , kg/m ³	1.2
Speed of sound c , m/s	343
Dynamic viscosity μ , Pa s	1.81×10^{-5}
Bulk viscosity μ_B , Pa s	3.08×10^{-3}
Thermal conductivity κ , W/(m K)	2.58×10^{-2}
Heat capacity at constant pressure C_p , J/(kg K)	1010
Heat capacity at constant volume C_v , J/(kg K)	721.428
Ratio of specific heats γ	1.4

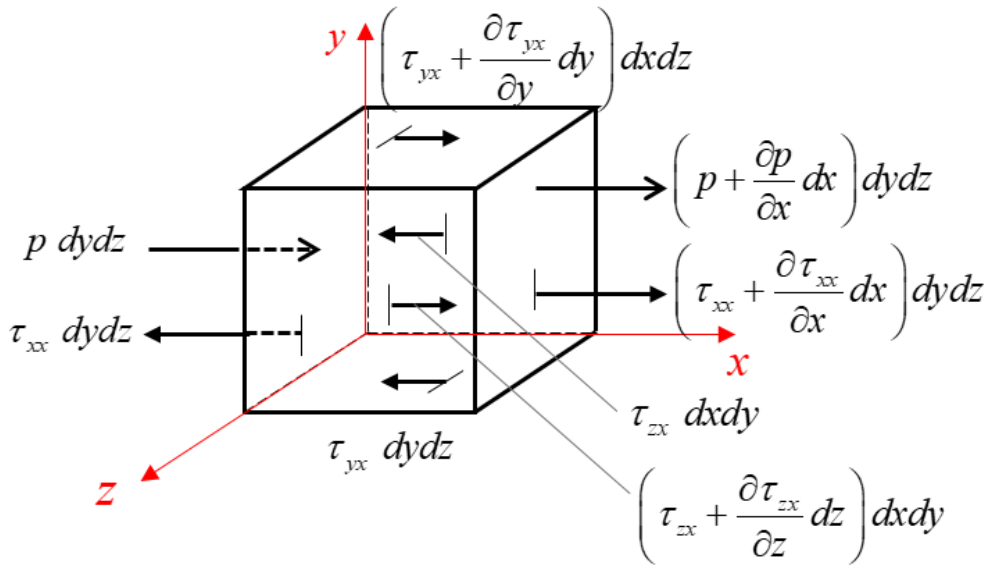


圖 3.1 移動中微小流體元素所受的 x 方向淨力之示意圖

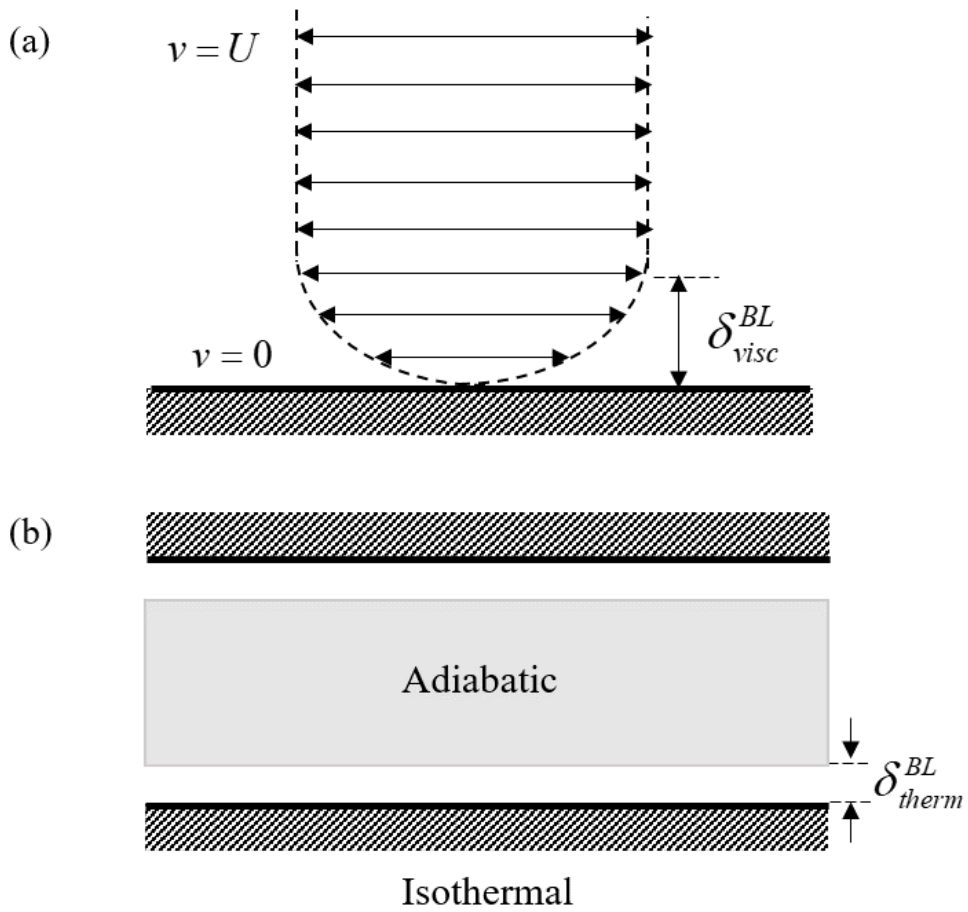


圖 3.2 邊界層之介紹 (a)黏滯邊界層 (b)熱邊界層

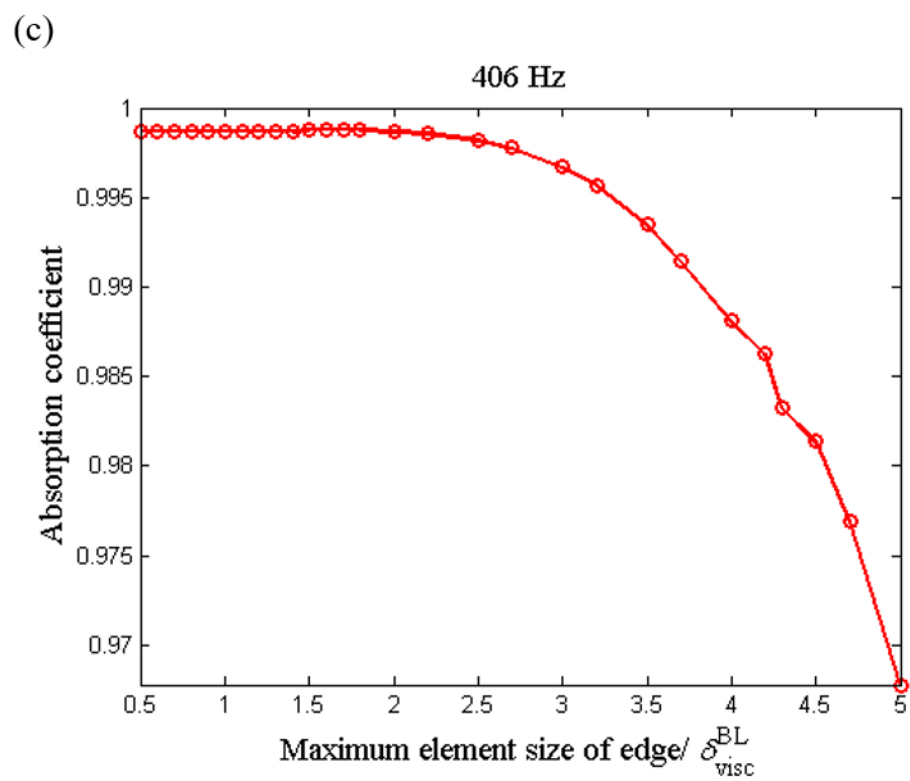
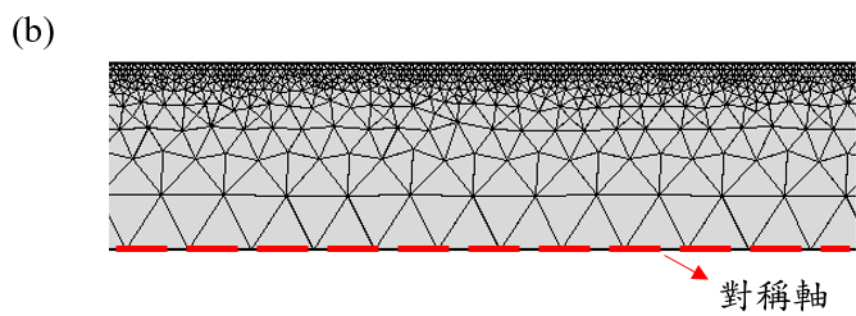
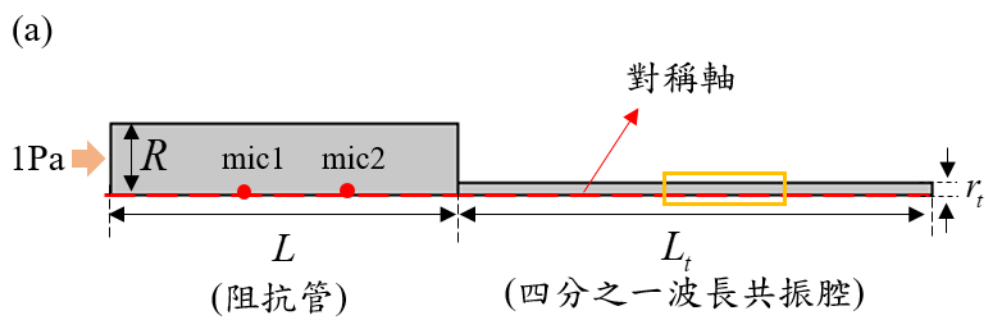


圖 3.3 四分之一波長共振腔之軸對稱 (a)模擬模型 (b)共振腔之網格形狀
(c)吸收率之收斂性分析

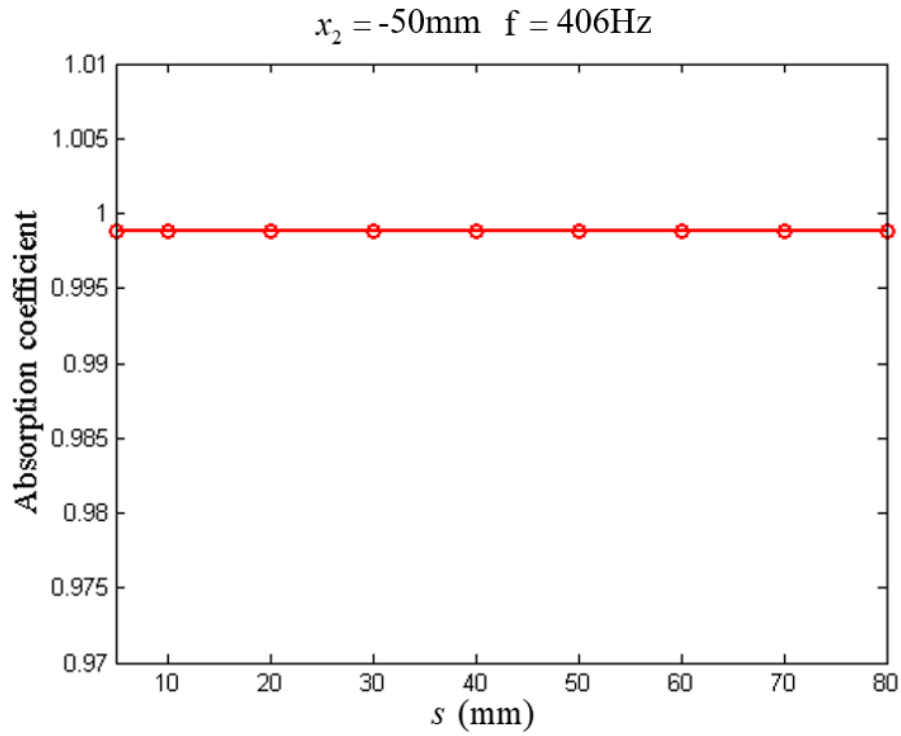


圖 3.4 軸對稱模型中麥克風間距與吸收係數之關係

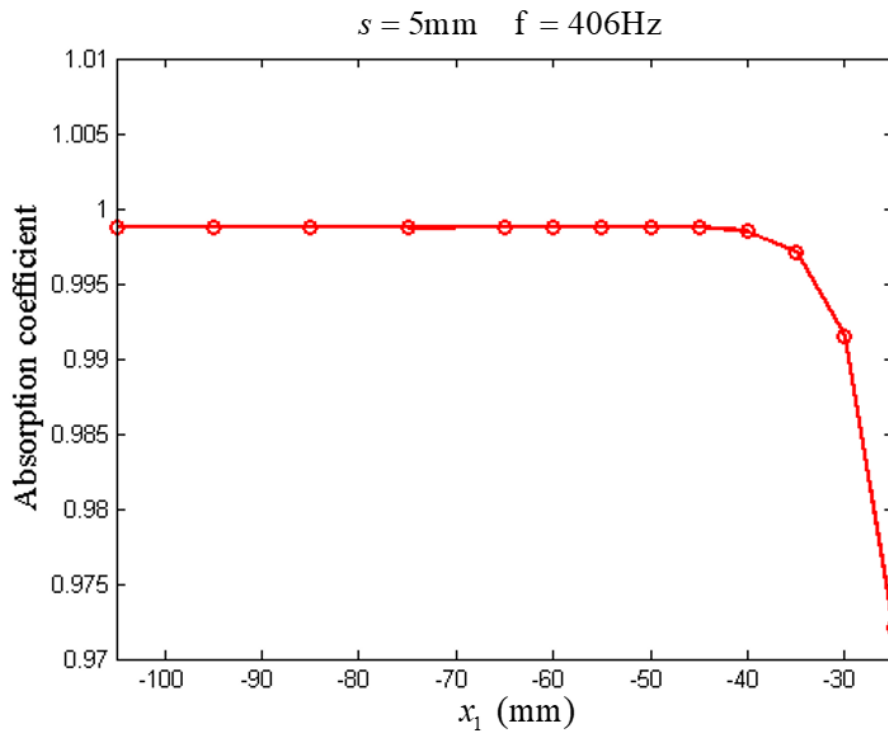


圖 3.5 軸對稱模型中第一支麥克風的位置與吸收係數之關係

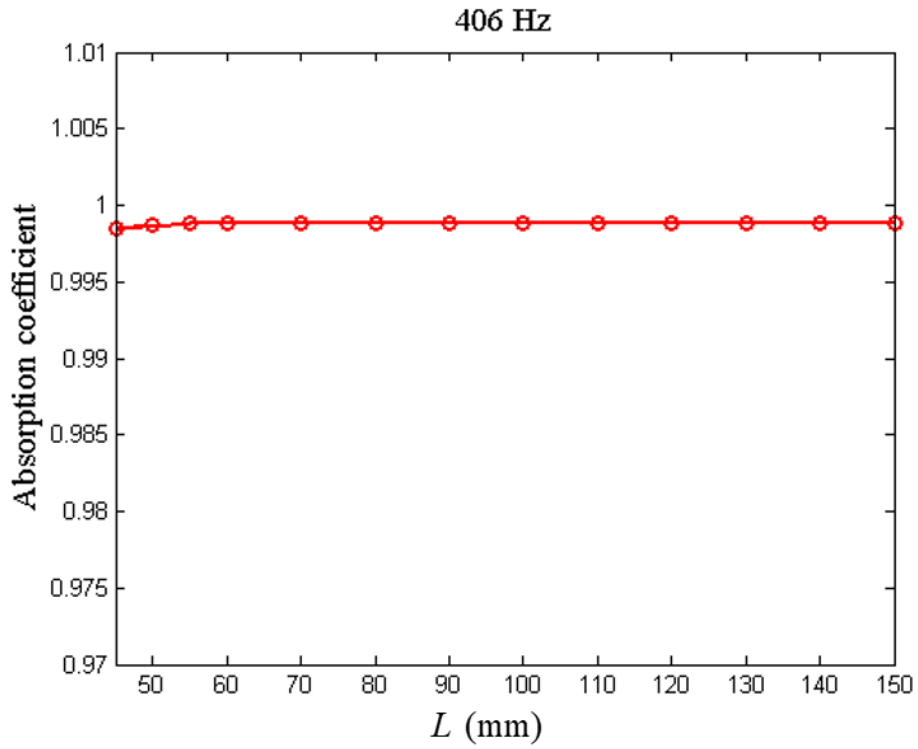


圖 3.6 軸對稱模型中阻抗管長度與吸收係數之關係

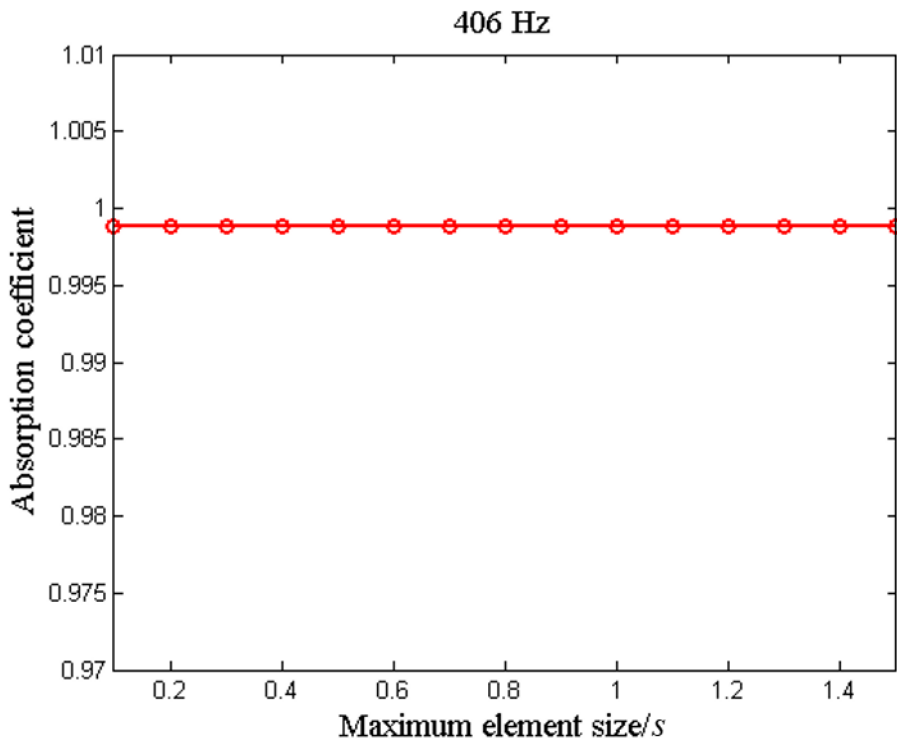


圖 3.7 軸對稱模型中阻抗管最大之網格尺寸與吸收係數之關係

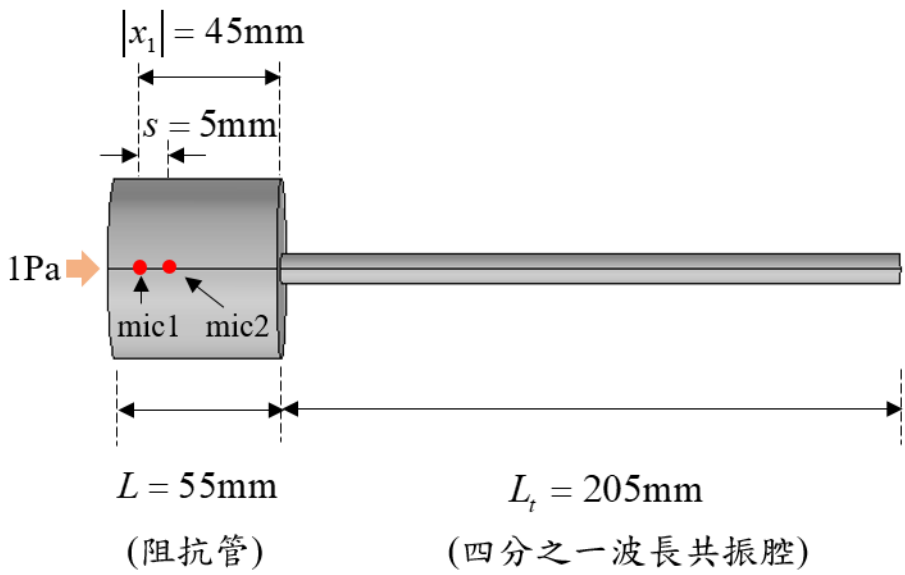


圖 3.8 四分之一波長共振腔吸收係數之三維模擬模型

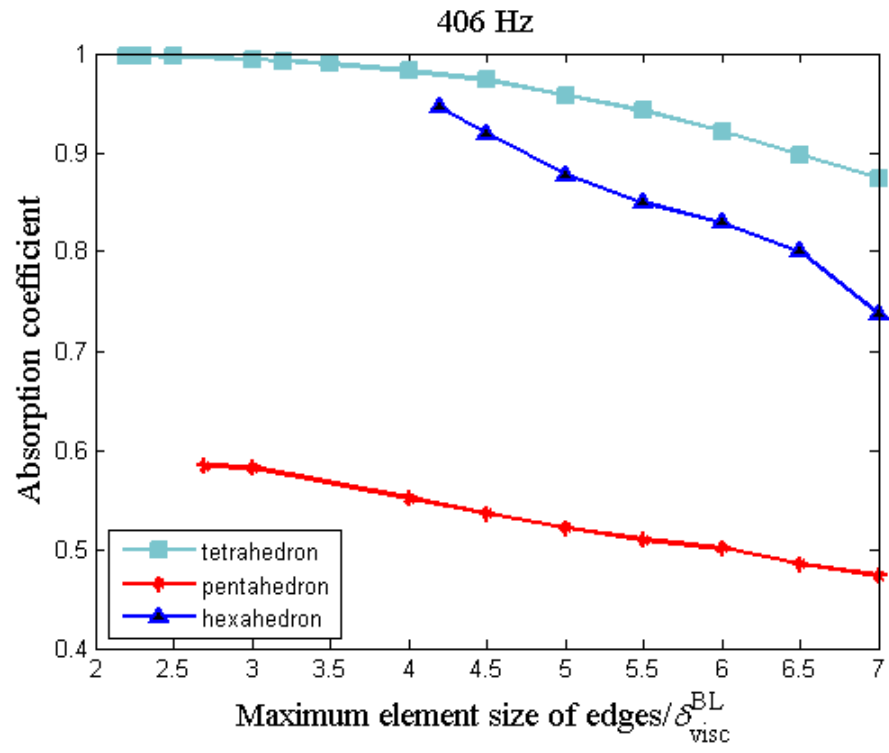


圖 3.9 三維模擬模型之元素形狀的討論

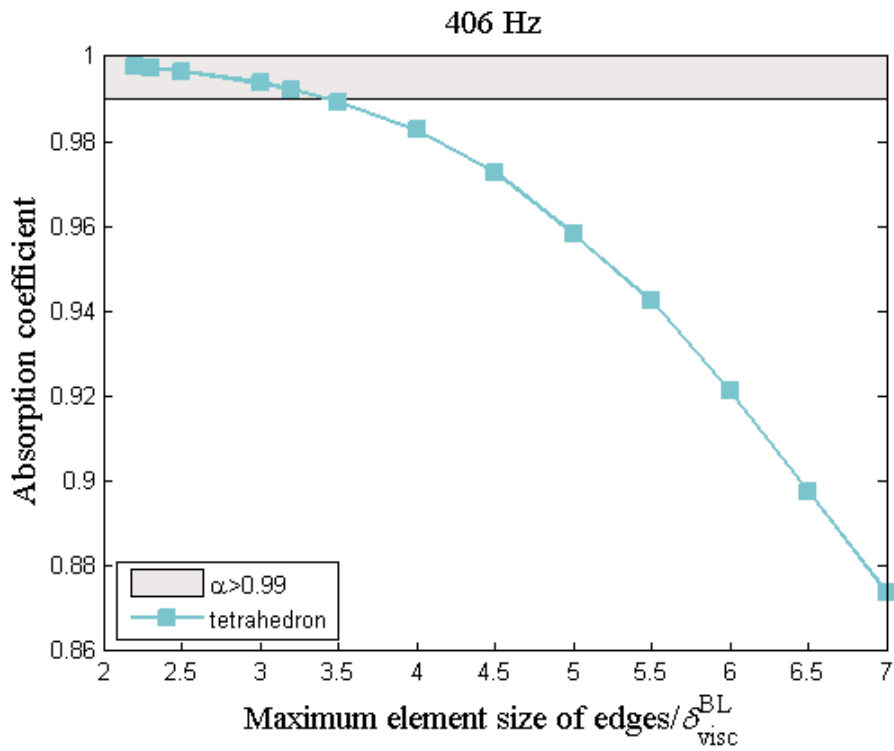


圖 3.10 四面體元素之收斂性分析

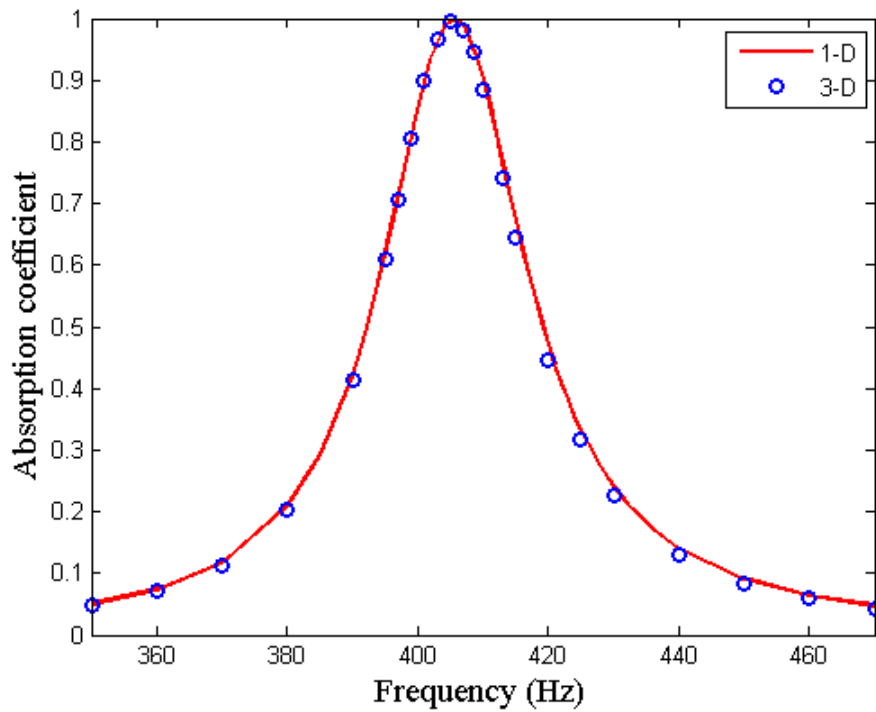


圖 3.11 一維及三維模型對吸收率影響之比較

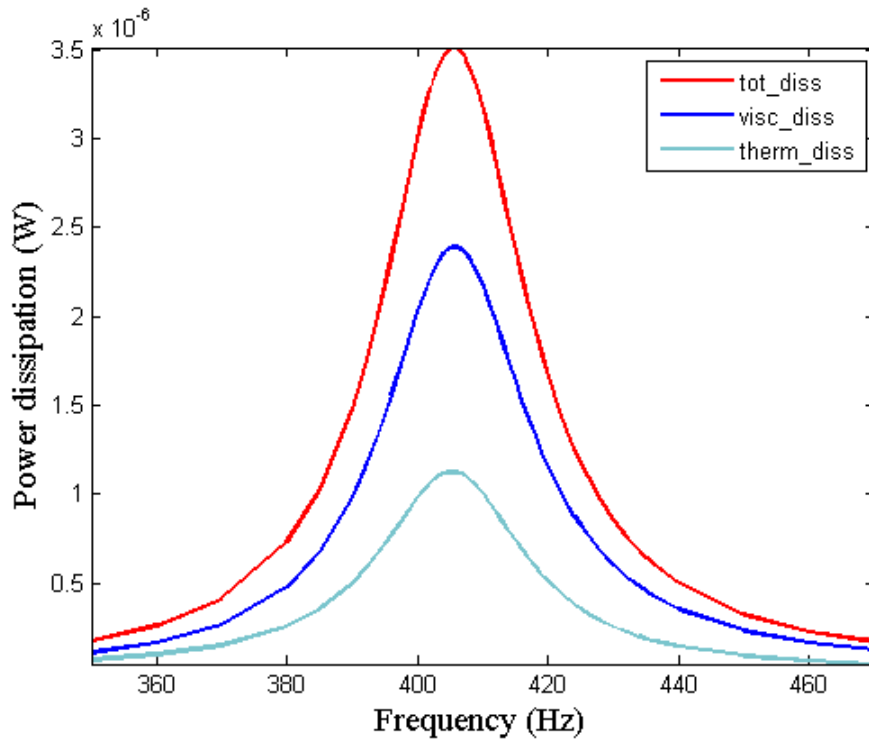


圖 3.12 各頻率下的能量損失

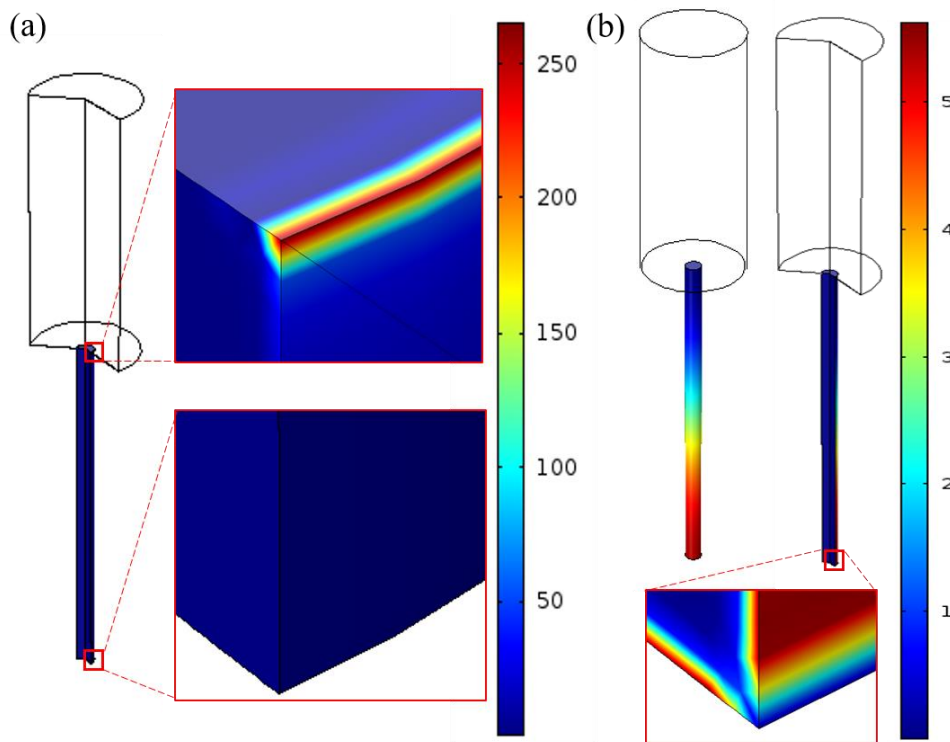


圖 3.13 共振時的能量損失分布 (a)黏滯損失 (b)熱損失

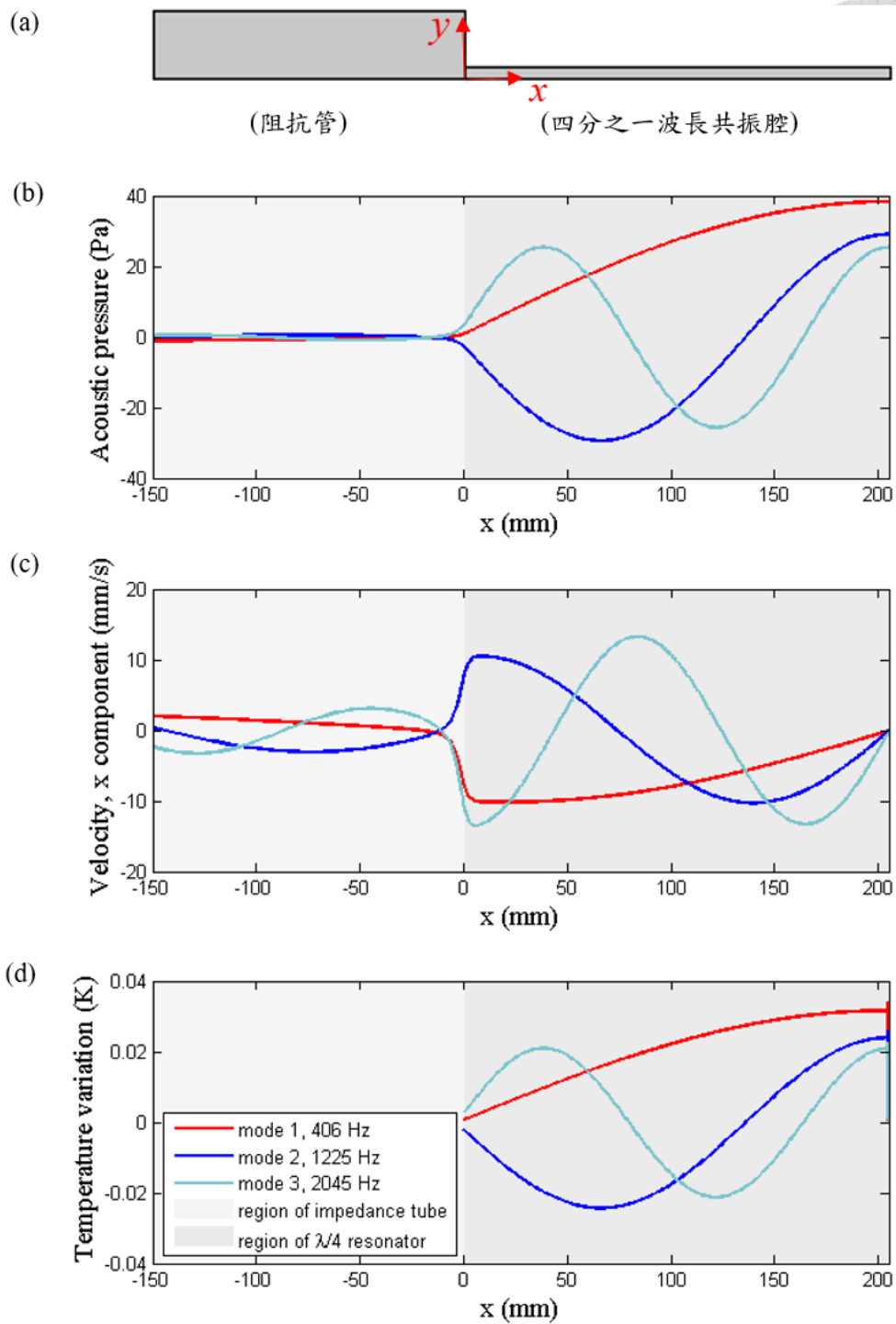


圖 3.14 阻抗管與共振腔的 (a)位置座標
以及對稱軸上的 (b)聲壓 (c)軸向速度 (d)溫度變化分布

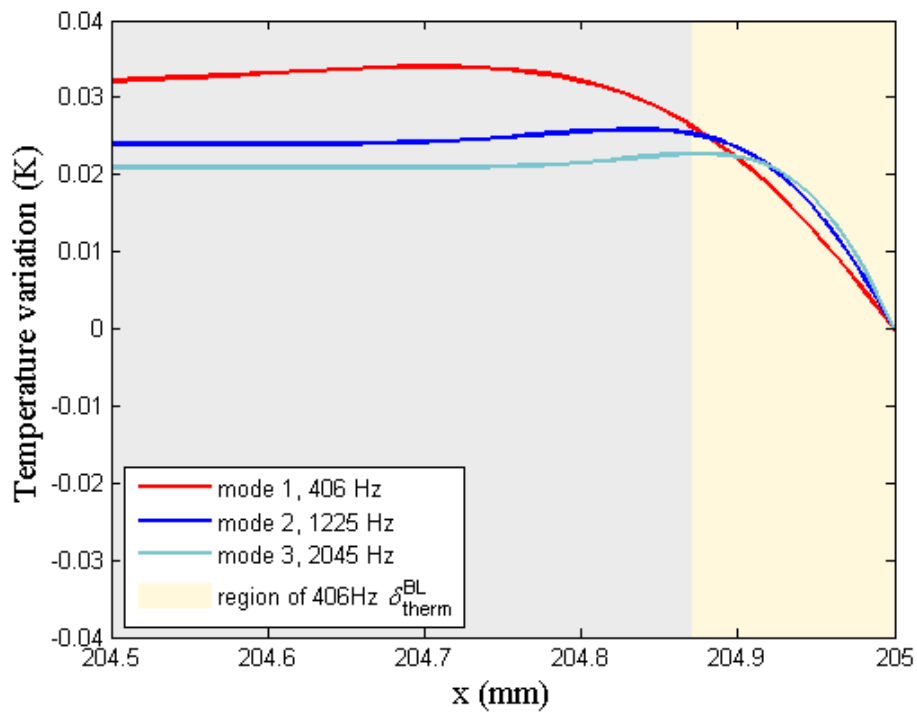


圖 3.15 共振腔閉口處溫度變化的局部放大圖

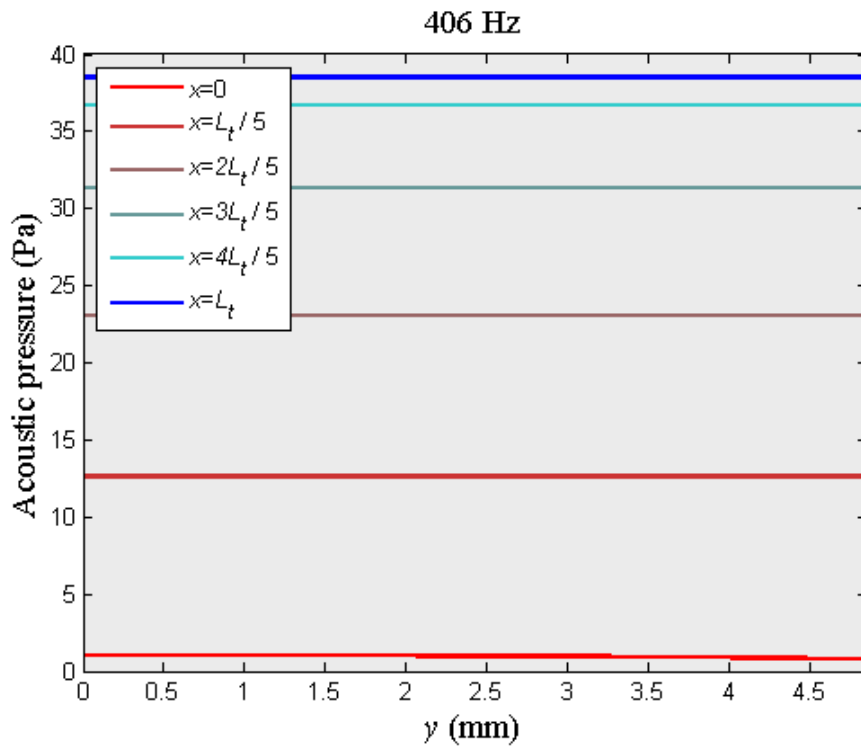


圖 3.16 共振腔內半徑方向的壓力分佈

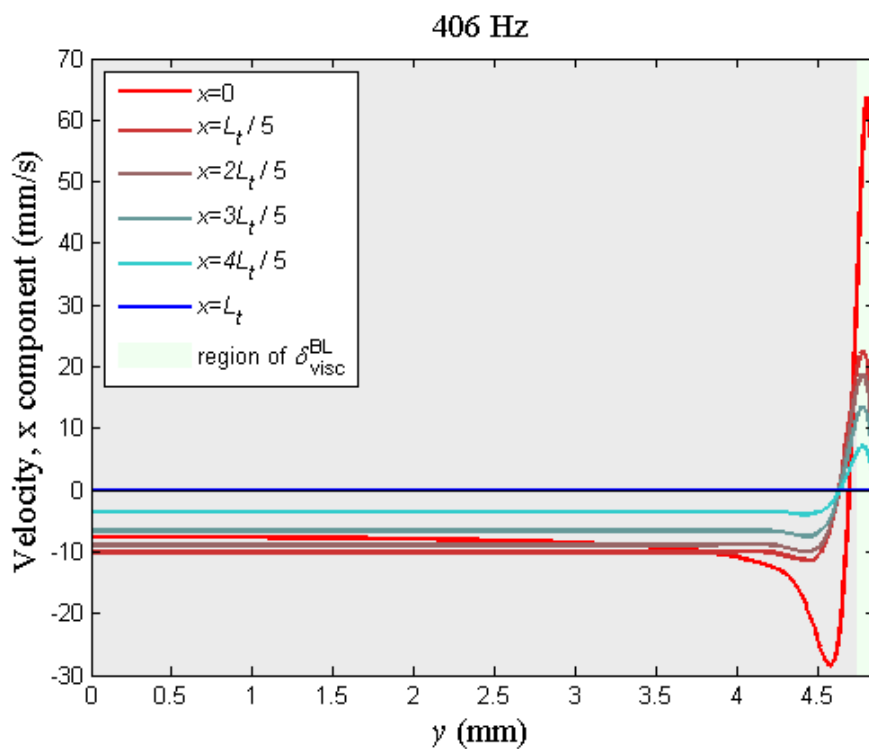


圖 3.17 共振腔內半徑方向的速度分佈

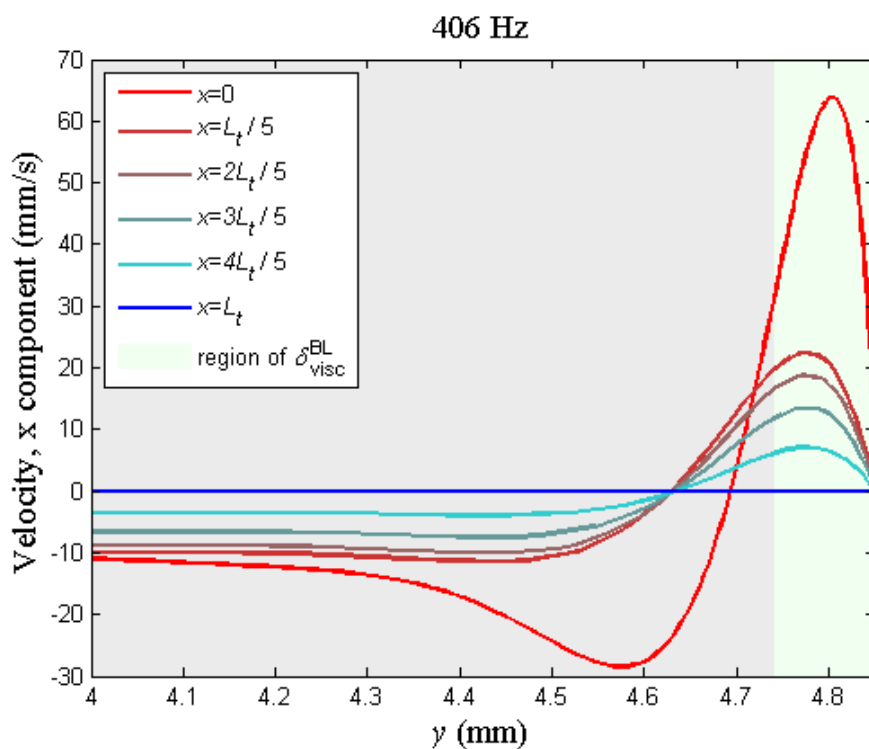


圖 3.18 共振腔內半徑方向速度分佈的局部放大圖

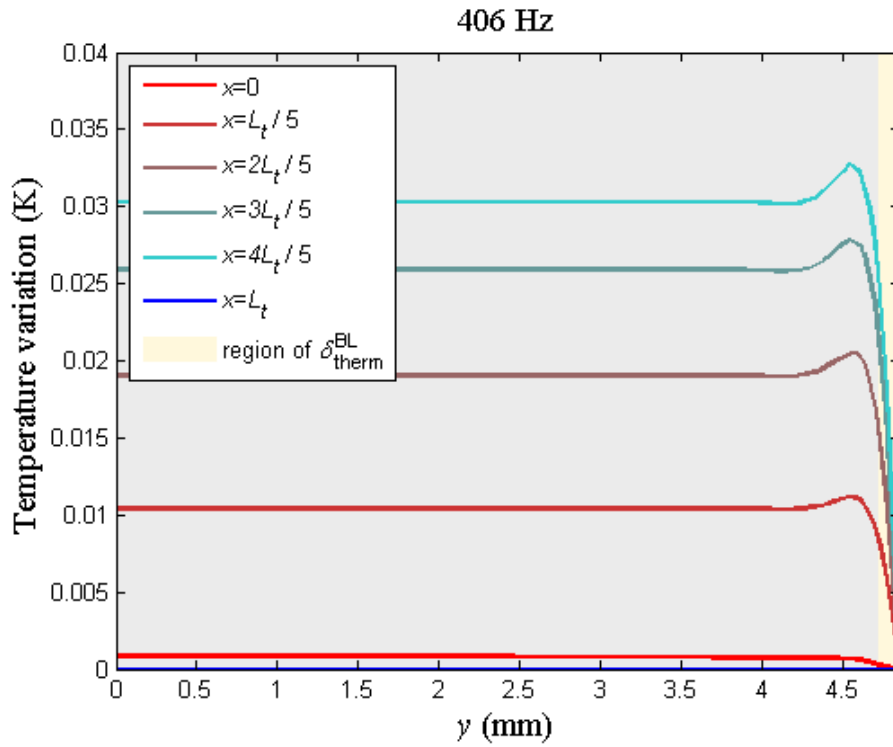


圖 3.19 共振腔內半徑方向的溫度差異分佈

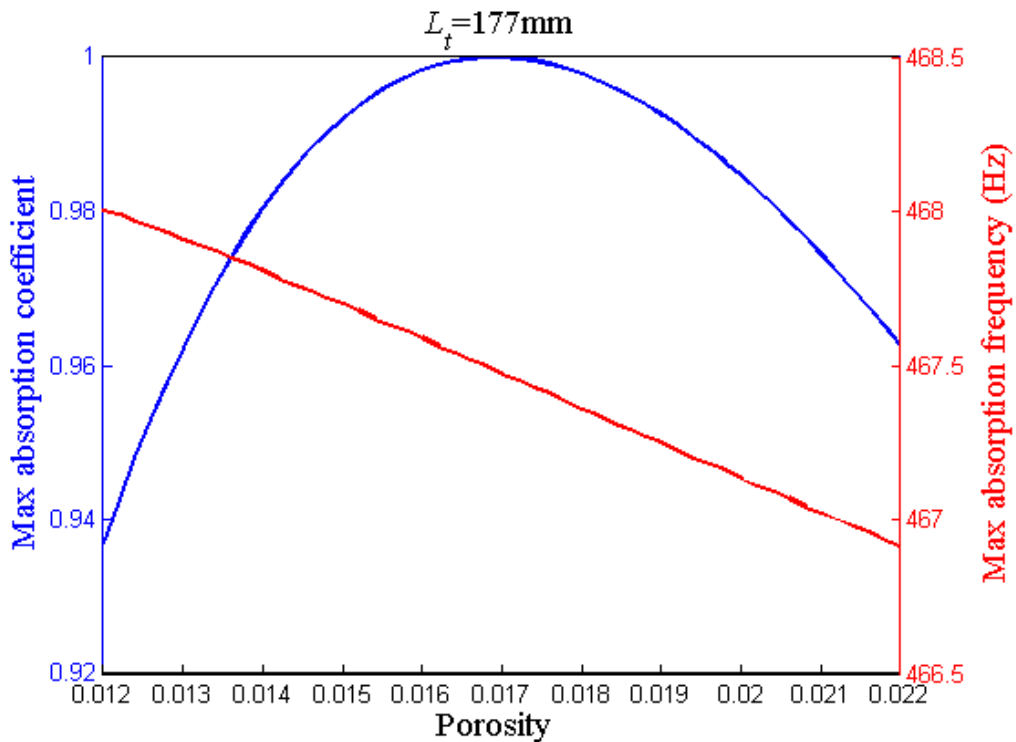


圖 3.20 開口率與最大吸音係數及吸收頻率之關係

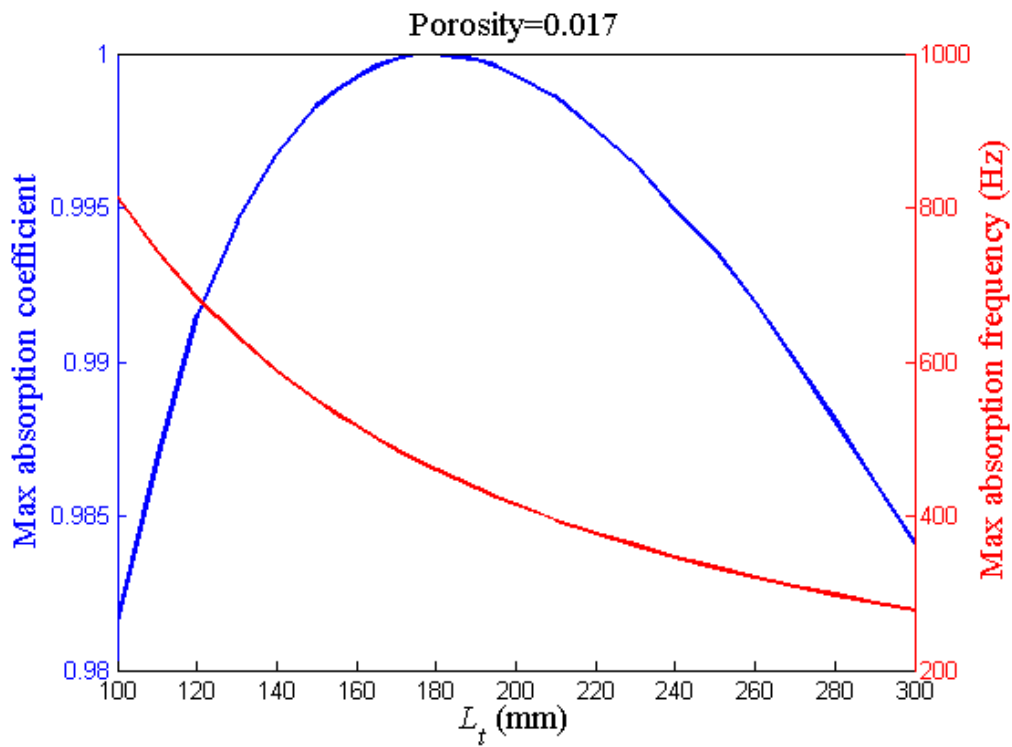


圖 3.21 共振腔長度與最大吸音係數及吸收頻率之關係

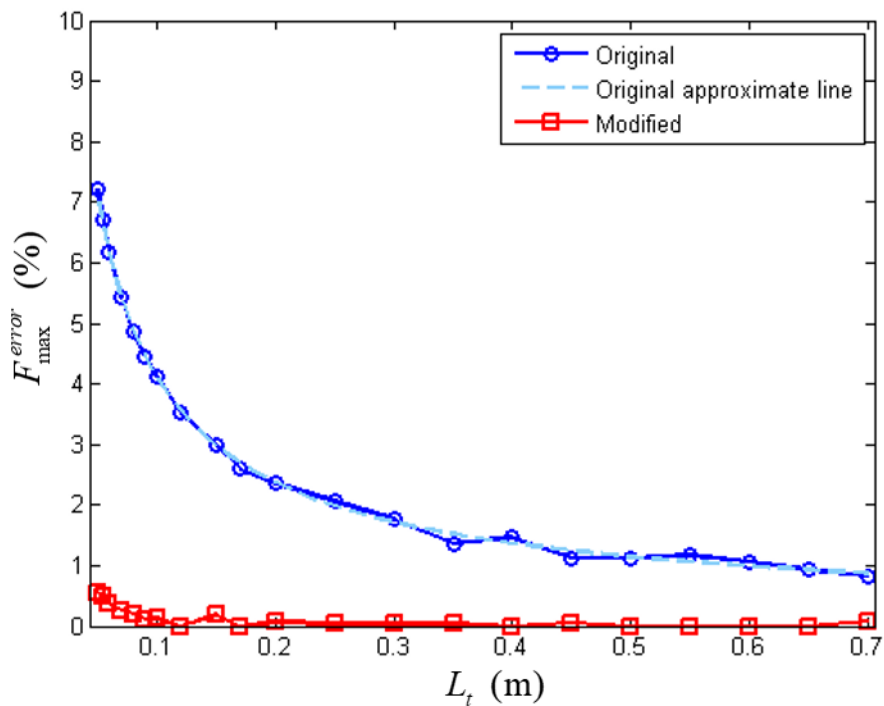


圖 3.22 阻抗匹配法與有限元素法擁有最大吸收率之頻率誤差

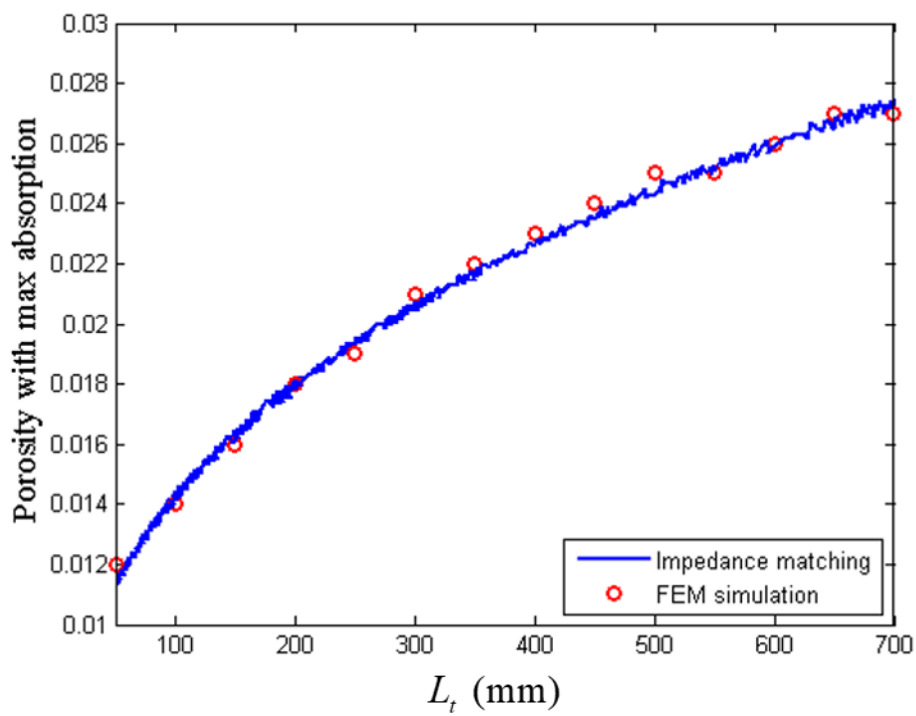


圖 3.23 阻抗匹配法與有限元素法擁有最大吸收率之開口率

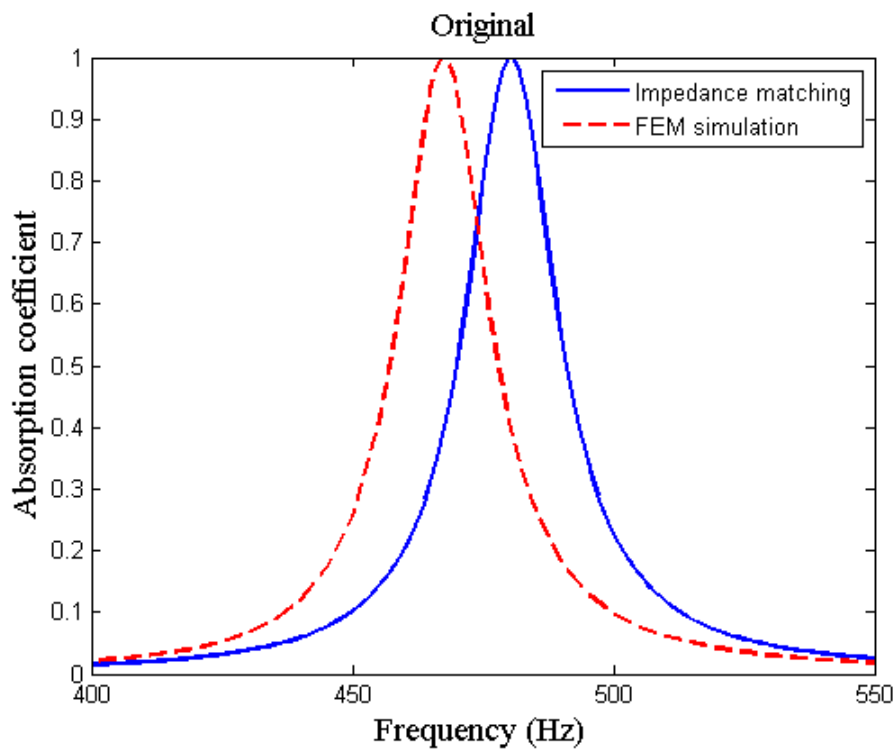


圖 3.24 修正前之阻抗匹配法與有限元素法之吸收率曲線

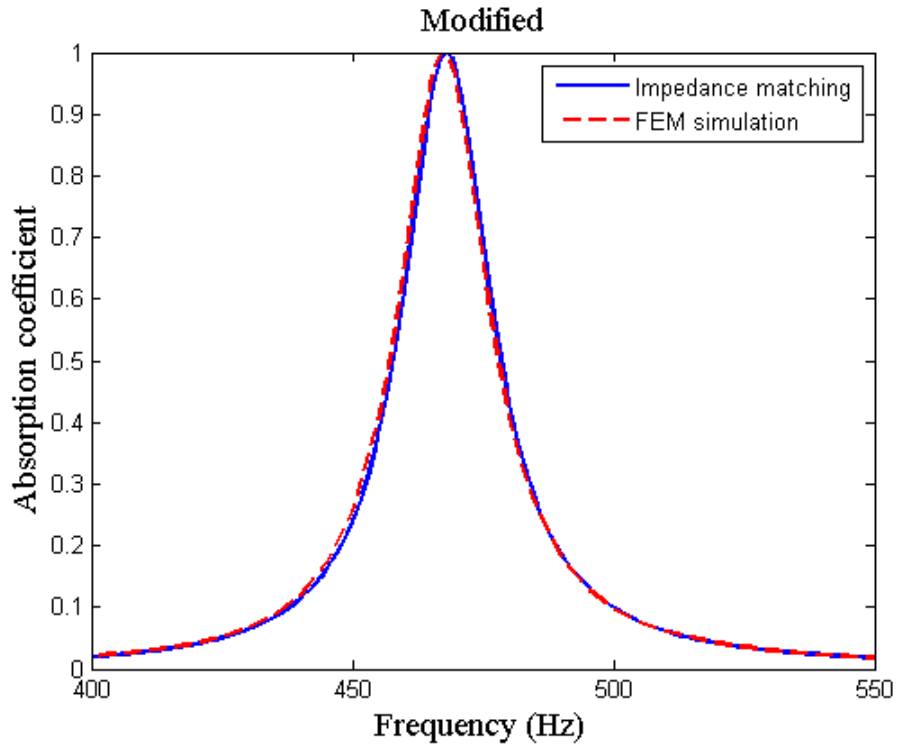


圖 3.25 修正後之阻抗匹配法與有限元素法之吸收率曲線

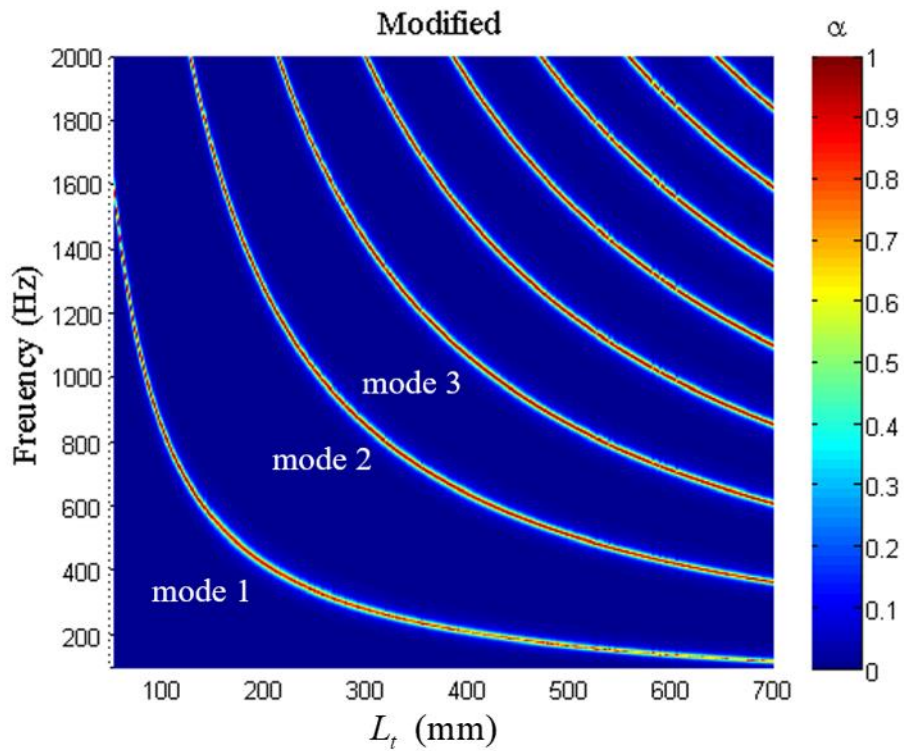


圖 3.26 修正後共振腔長度、吸收頻率與吸音係數間的關係

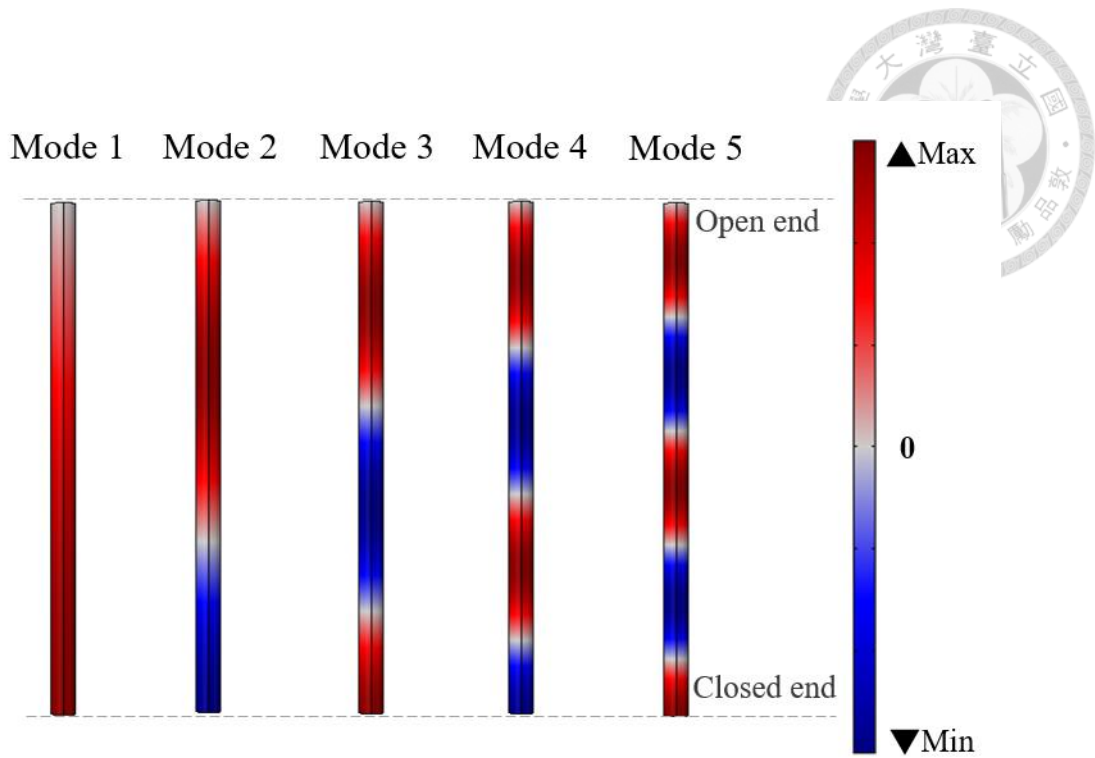


圖 3.27 四分之一波長共振腔之特徵模態聲壓分布

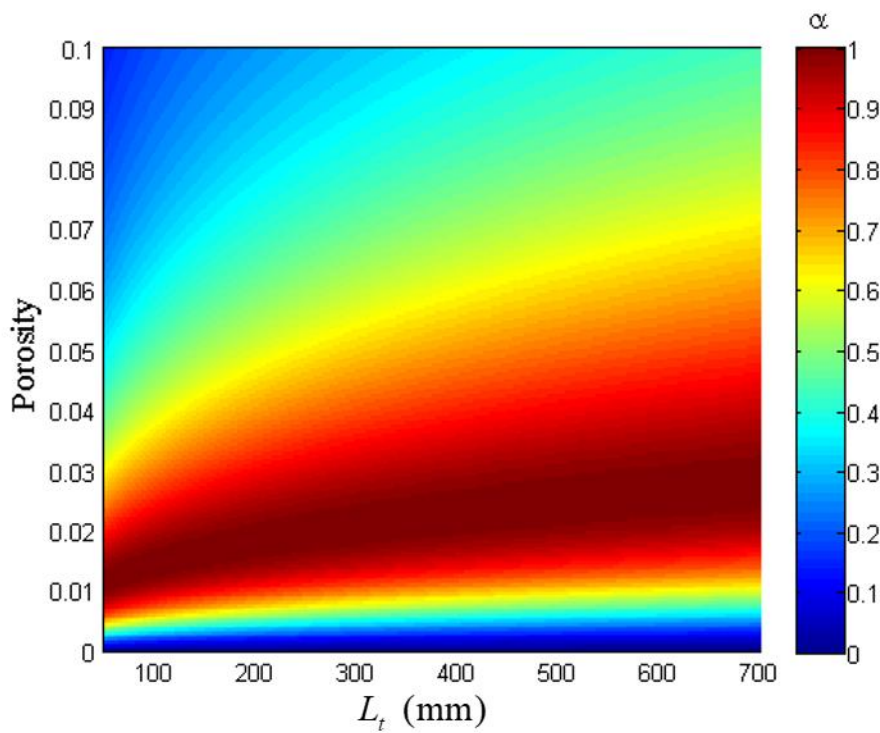


圖 3.28 共振腔長度、第一吸收頻率與吸音係數間的關係

第四章 寬頻吸音薄板之設計與實驗量測

本章主要以機場捷運噪音頻率為例，進行寬頻吸音薄板之設計及實驗量測其吸音效率。在設計層面首先參考 Cai 提出螺線式的共振腔[22]，可大幅減低共振腔的厚度，本文為了更有效地利用每個單元的面積且達到寬頻化的目的，進一步提出雙螺旋共振腔的設計。實驗則根據美國材料試驗協會(ASTM)所提出的規範[25]，自行製作阻抗管，驗證此結構的吸音效果。

4.1 研究場域

機場捷運初建立時，三重區的居民因受其噪音干擾曾多次陳情，地點發生於新北環河快速道路進入疏洪東路一段的轉彎處，當列車進入隔音牆內噪音立即明顯放大，這是由於低頻噪音的聲波較長，一般建築物沒有辦法有效阻隔，加上聲波來回反射，造成聲音放大的現象。為分析其噪音頻率，現場錄製兩段聲音，一為背景音，即未有列車行駛進隔音牆的狀況，一為機場捷運進入隔音牆時的情況，錄音檔的取樣頻率為 44100 Hz，兩者各取 15 秒，經由快速傅立葉轉換得到圖 4.1 的噪音頻譜圖，經由多組量測得知噪音頻率落在 462 至 472 Hz 之間。若使用共振式的吸音板，聲波能量則經由熱黏滯效應消耗損失，且可有效地對付低頻聲波，因此本文取其中間值 467 Hz 作為欲吸收的主要頻率，設計合適的吸音薄板。

4.2 寬頻吸音薄板的設計

4.2.1 吸音薄板與四分之一波長共振器之比較

在第二章與第三章利用阻抗匹配法與有限元素法對四分之一波長共振腔吸收率的計算有基本的了解與修正。薄型化的設計則參考 Cai 提出的螺線形共振腔，圖 4.2(a)為四分之一波長共振腔之外殼與空氣腔結構示意圖，圖 4.2(b)為薄型吸音板之外殼與空氣腔結構示意圖，兩者幾何比對方式為薄型吸音板螺線空氣腔之

中心線與四分之一波長空氣腔的長度一致，而螺線管空氣腔的高度與四分之一波長共振腔的開口直徑相同，兩者每單位面積之開口率也一致，而薄型吸音板的開口率定義為整個結構面積與開口面積的比值。考慮到兩者截面形狀的差異性，在此先針對方形截面與圓形截面之四分之一波長共振腔的吸收率做討論，為節省計算量，圓形截面的四分之一波長共振腔使用的是軸對稱模型模擬，如圖 4.3(c)，方形截面則用八分之一對稱模型，如圖 4.4(c)，此處幾何尺寸針對機場捷運噪音頻率 467 Hz 做設計，根據圖 3.26 與 3.28 得知合適的共振腔長度為 177 mm，開孔率為 0.017，圖 4.5 為圓形與方形截面之四分之一波長共振腔吸收率曲線，兩吸收曲線幾乎重疊，說明截面形狀對吸收率的影響不大。

然而實際上為方便一般性的製作，本文中薄型吸音板共振腔的設計為方形截面、圓形開口，因此在針對這樣的共振腔形狀再做一次討論，比較圖 4.6(a)為均勻方管與圖 4.6(b)為圓形開口方形截面之四分之一波長共振腔兩種模型，圖 4.7 為其吸收率曲線，兩共振腔的總長度與開口率相同，因此圖 4.6(a)與圖 4.6(b)的 D_i 不同，紅色線代表的是圓形開口方形截面之共振腔，藍色線則是均勻方管之共振腔，頻率誤差為 0.85%，這是由於圓形開口的模型中截面有一個落差所導致的現象，而圓形開口的吸收頻率略為下降，可理解成其共振腔之等效長度略為增長，連帶使開口率與共振腔長度從最佳處產生些微偏差，使吸收率下降 2.5 個百分比，但仍有 0.97 的表現。

圖 4.8 為吸音薄板與四分之一波長共振腔之吸收率比較，兩者的共振腔長度皆為 177 mm、開口率為 0.017，藍色線為吸音薄板三維的模擬結果，紅色線則是利用阻抗匹配法計算四分之一波長共振器之吸收率所得到的結果，吸音薄板之吸收率雖略為下降了 4.6 個百分比，但仍有 0.95 的吸收係數，而兩者吸收頻率誤差只有 0.21%，因此上述的幾何比對方式是可被接受的。另外，由於薄型吸音板無任何對稱特性，其有限元素法的計算量極大，所以後續在螺線型共振腔的設計上，則沿用四分之一波長共振腔之阻抗分析。



4.2.2 吸音薄板之寬頻化設計

由於每次捷運行經隔音牆時，會因為乘客數不同，每輛列車的狀況不盡相同，且環境空氣也隨每日天候狀況不同而改變，每次發出的噪音頻率非固定值，因此提出寬頻化的設計，觀察圖 4.2 (b) 薄型吸音板的示意圖發現，在適當的開口率下的單共振腔吸音薄板尚有可使用的面積，以 467 Hz 為例，校正後合適的共振腔長度為 177 mm，開孔率為 0.017，而共振腔覆蓋的面積約 30 %，因此可在未使用的區域增加共振腔，若使兩共振腔長度不同，即可達到寬頻化的效果，如圖 4.9，由於兩共振腔為獨立的，在設計上則可沿用前述對單共振腔的討論。圖 4.10 為利用阻抗匹配法計算寬頻吸音薄板之吸收率曲線，兩共振腔長度 L_{r1} 為 170 mm、 L_{r2} 為 181 mm，對應的開口率 ξ_1 為 0.0169、 ξ_2 為 0.0172，虛線為各別計算之結果。


4.3 寬頻吸音薄板吸音效率之量測

本節首先說明阻抗管的設計與實驗器材的配置，並以 LabVIEW 撰寫吸音率的程式，接著以建立好的實驗裝置量測寬頻吸音薄板的吸音效率，與無共振腔的薄板以及相同厚度的吸音棉做比較。

4.3.1 實驗裝置之建立

圖 4.11 為實驗架設示意圖、圖 4.12 為實驗架設實際情況。先以安捷倫 33500B 系列的訊號產生器發出訊號，經功率放大器 HA-405 使喇叭產生聲波並在阻抗管內傳遞，而 G.R.A.S. 的二分之一英吋麥克風則於阻抗管的側邊接收訊號，接著利用 NI USB-9162 的 C 系列模組接線盒搭配 NI 9233 的 C 系列模組做訊號擷取，最後進入筆電以 LabVIEW 軟體做訊號分析。

阻抗管的部分是根據 ASTM E1050-08 進行製作，設計要點如下：

- 
- (1) 阻抗管需為一截面均勻的直管，截面形狀可以是圓形或方形，但若是方形截面，其長寬比必須避免小於 1:2 或大於 2:1，且擁有光滑無孔隙的內表面，材料可以是金屬、塑膠、水泥或木材等。
 - (2) 為確保管內聲波以平面波的形式傳遞，最高工作頻率與管徑的關係須滿足 $f_u < \frac{Kc}{d}$ 的關係式，此處亦符合 2.2.2 小節的理論分析。
 - (3) 兩麥克風的間距則影響實驗準確度，兩麥克風的間距需小於最短波長的一半、大於最長波長的 0.01 倍，一般建議滿足 $\frac{c}{f_l} \times 1\% < s < \frac{c}{2f_u} \times 80\%$ 。
 - (4) 為使聲波在抵達麥克風與待測試件前，平面波能夠充分發展，聲源與其最近的麥克風距離需大於三倍管徑。
 - (5) 若不考慮穿透的部分，在待測試件的後方須加上一硬背板，以達到全反射的條件，建議使用厚度 20 mm 以上的金屬板。

其中

f_u 為最高工作頻率 (Hz)

f_l 為最低工作頻率 (Hz)

c 為聲速 (m/s)

s 為兩麥克風的間距 (m)

若阻抗管為圓形截面， K 為 0.586 (無單位)， d 為直徑 (m)

若阻抗管為方形截面， K 為 0.500 (無單位)， d 為截面的最大特徵長度 (m)

本實驗使用的阻抗管為圓形截面的壓克力管、厚度為 8 mm、直徑為 103 mm，總長度為 950 mm，第一支麥克風與聲源間距為 560 mm，兩麥克風距離為 50 mm，待測試件距第二支麥克風的距離為 340 mm，因此工作頻率為 70~1950 Hz。而硬背板的材料為鋁、厚度為 30 mm，符合上述第 5 點。其中麥克風的安裝方式如圖 4.13，為避免麥克風搖晃掉落，以鐵氟龍製作一固定套管，同時使麥克風垂直於管壁，因為阻抗管內的聲波是以平面波的形式傳遞，所以麥克風可以在阻抗管的

側邊接收訊號。圖 4.14 為共振腔安裝方式的示意圖，以一直徑落差的壓克力套管夾持住硬背板與吸音薄板，套管的大直徑與阻抗管的外直徑同，因此硬背板與吸音薄板的直徑也與阻抗管的外直徑相同，但吸音薄板開口率的計算方式仍以阻抗管內直徑為主，即吸音薄板的開口面積除以阻抗管內截面面積，而套管的小直徑則略小於硬背板的直徑，套管與阻抗管間則以螺桿搭配螺帽的方式彼此密合，此作法能適用於不同厚度的吸音薄板，以利實驗操作，圖 4.15 為實際情形。

接著將擷取麥克風收到的訊號，以 LabVIEW 撰寫程式分析其吸音效率。LabVIEW 是由美國國家儀器公司所開發的圖形化程式編譯平台，分為兩個面板，一是程式框圖 (Block Diagram)，一個前面板 (Front Panel)，程式框圖為開發介面可編輯程式，前面板為人機介面可直接進行控制。圖 4.16 (a) 為計算吸音係數的程式框圖，利用迴圈可進行掃頻實驗，快速得到各頻率的吸音係數，主要分為三部分，第一部分是將兩支麥克風所擷取到的聲音訊號做快速傅立葉轉換，其中每個迴圈的取樣頻率為 25000，取樣點為 25000，因此取樣時間為 1 秒，第二部分是將轉換後的值相除得到轉移函數，以 MATLAB 進行後處理，即可得到吸收係數，由於每次操作並不是從頻率最低的點開始，因此第三部分則是將吸收係數的對應頻率由低排序至高，方便畫圖。圖 4.16 (b) 為計算吸音係數的人機介面，在此面板上可顯示麥克風所量到的聲壓與頻率、吸音係數曲線以及迴圈數，及時觀察實驗操作的情況。

4.3.2 薄型吸音板吸音效率之量測

本實驗的共振腔是利用 3D 列印機印製而成，在進行實驗量測前，先對幾項實驗條件進行確認。首先是麥克風固定的部分，實驗時，會盡量將麥克風的邊緣切齊阻抗管內管壁，但每次安裝仍有些微差異，圖 4.17 即為重複六次相同的實驗，而每一次實驗都會將麥克風拆卸下來重新固定，由圖中六條曲線近乎重疊的結果得知麥克風安裝時些微的差異對實驗結果的影響不大。考慮到規範中以硬背板做為全反射的條件，在試件與硬背板間塗層耦合劑，使波在傳遞時較為順利，圖 4.18 為有無耦合劑之吸音薄板的正反面，圖 4.19 為硬背板與薄型吸音板間有

無耦合劑對實驗結果之影響，由圖 4.19 的結果得知有無耦合劑的條件同樣不影響實驗結果，這是由於吸音薄板與硬背板間有層空氣薄膜，而空氣與吸音薄板材料的聲阻抗差異極大，由式(2.73)與(2.74)得知，若第一個材料的聲阻抗遠大於第二個材料，則穿射係數為 0，而反射係數為負 1，因此後續實驗將不再塗耦合劑於吸音薄板與硬背板間。另外，為求共振腔之輕巧與便利，圖 4.20 討論了在 3D 列印中不同填充率之共振腔的吸音效率，填充率為 3D 列印時的其中一個設定參數，直接影響結構的強度，填充率越高強度越強，這邊呈現了填充率 100% 的實心列印與填充率 30% 的空心列印的結果，兩者得到的吸音曲線相似，因此選用吸音板材料時，其聲阻抗遠大於空氣即可，後續實驗吸音薄板的填充率皆為 30%，同時可節省列印時間。

確認以上實驗的基本條件後，方可進行吸音薄板的實驗量測，由於 4.2.1 小節確認過螺旋狀共振腔的模擬結果四分之一波長共振腔之阻抗匹配法得到的吸音係數曲線相似程度極高，因此在實驗的部分將直接與修正後的阻抗匹配法比較，首先進行薄型吸音板的實驗，實驗試件與共振腔形狀如圖 4.21(a)，共振腔長度為 177 mm，開孔率為 0.017，圖 4.22 為實驗與修正後之阻抗匹配法所得到的吸音係數曲線，實驗所得到的最大吸收係數為 0.91，阻抗匹配法則為 0.99，而實驗上擁有最大吸收率之頻率為 473 Hz，阻抗匹配法則為 468 Hz，主要吸收頻率的誤差為 1.06%，顯示實驗與模擬結果十分接近，些微差距應是來自 3D 列印的沉積現象。

寬頻化則採用雙共振腔的方式達成目的，同時可有效地利用每個吸音薄板的面積。實驗試件與共振腔形狀如圖 4.21(b)，兩共振腔長度分別為 170 與 181 mm，對應的開孔率為 0.0169 與 0.0172。圖 4.23 為寬頻吸音薄板之吸音係數曲線，其中阻抗匹配法是將兩共振腔之吸音曲線分別繪製而成的，實驗與阻抗匹配法所得到的吸音頻率十分接近，170 mm 與 181 mm 吸音頻率的誤差分別為 0.51% 與 0.87%，兩吸收係數也分別有 0.92 與 0.96 的表現。

為探討雙共振腔的吸音曲線與單共振腔的關係，以下操作兩個實驗。首先，分別印製相同長度、相同開口率與相同幾何形狀的單支與雙支螺旋共振腔，圖 4.24(a)為雙共振腔的寬頻吸音薄板與圖 4.24(b)為單共振腔的吸音薄板示意圖，圖 4.25 為其吸音曲線，紅色實線為圖 4.24(a)的情況，藍色虛線則為圖 4.24(b)的，其中雙共振腔之幾何尺寸與前述相同，兩共振腔長度分別為 170 與 181 mm，對應的開孔率為 0.0169 與 0.0172，而單共振腔則有兩個試件，其尺寸對應至雙共振腔，也就是說一個共振腔長度為 170 mm、開口率為 0.0169，另一個的共振腔長度為 181 mm、開口率為 0.0172，由圖 4.25 發現實線的峰值部分幾乎是與虛線重疊，而其餘的部分傾向於兩虛線相加後的值，為再次確認此現象，因此嘗試另一組實驗情況，將雙共振腔的其中一個開口以薄塑膠片遮蔽，僅使另一個共振腔發揮作用，圖 4.26(a)雙共振單開口的實驗試件，將開口輪流遮蔽的吸音係數呈現於圖 4.27 的虛線，圖 4.27 的實線則為圖 4.26 (b)兩開口皆打開的結果，同樣發現在主要吸收頻率的部分，實線的結果仍是兩虛線重疊的樣子，而在雙共振腔沒有吸收率的部分則與圖 4.25 略有不同，這是由於塑膠片黏貼所造成的。由這兩個實驗所得到的結論為在主要吸收頻率發生時，雙共振腔的吸音效率由該尺寸的單共振腔所控制，其餘在非主要吸收頻率處，雙共振腔的吸音效率由兩單共振腔同時作用，若以電路的觀點解釋，電流會往阻抗低的路線行走，對於聲波也是如此，例如：181 mm 共振腔的聲阻抗對於 462 Hz 的聲波而言非常小，因此當頻率為 462 Hz 聲波入射至兩開口時，聲波會集中流入共振腔長度為 181 mm 的開口，而另一支長度 170 mm 的共振腔對能量消耗的貢獻極小，但若是 475 Hz 的聲波入射的話，能量會分散進入兩共振腔，這是由於兩共振腔的聲阻抗大小對 475 Hz 的聲波而言是差不多的，此時的吸音係數傾向於相加的結果，由此實驗得知雙共振腔的吸音效率傾向分別獨立的狀況。

接著比較單共振腔與雙共振腔在中心吸收頻率為 470Hz 時的頻寬，圖 4.28 為單共振腔與雙共振腔之吸收率比較，單共振腔的實驗試件如圖 4.21(a)，共振腔

長度為 177 mm，雙共振腔如圖 4.21(b)，兩共振腔長度分別為 170 與 181mm，對應的開孔率為 0.0169 與 0.0172，由圖中發現吸收係數達 0.5 以上的頻寬明顯增加，由單共振腔的 30 Hz 增大至 54Hz，此寬頻化的設計將有利於機場捷運吸音牆的使用。最後，為證實此共振腔有吸音的效果，圖 4.29 為有無共振腔之實驗試件，圖 4.30 為有無共振腔之吸音效率比較，其中無共振腔的試件是利用 3D 列印而成的純平板，由於純平板無任何機制可消耗聲波能量，因此幾乎無吸音效果。另外，聲音防制上也經常使用吸音棉達成吸音的目的，因此比較了共振式吸音薄板與吸音棉的吸音效率，吸音薄板的外殼厚度為 1 mm，總厚度為 15 mm，吸音棉的厚度則分別為 15 mm 及 37.5 mm，如圖 4.31，圖 4.32 則為寬頻吸音薄板與吸音棉之吸音效率的比較，圖 4.32 顯示同樣厚度的吸音棉對 400 至 600 Hz 的聲波吸音效率極差，吸音係數約 0.1，而 2.5 倍厚的吸音棉在同樣範圍內吸音係數約 0.35，吸音棉雖對各頻率的聲波都有吸音的效果，但效率皆不佳，若要提高吸音效率，就要增加吸音棉的厚度，造成空間的浪費與使用的不便，而吸音薄板則可以在有限厚度的狀況下對特定的低頻聲波有良好的吸音效果。

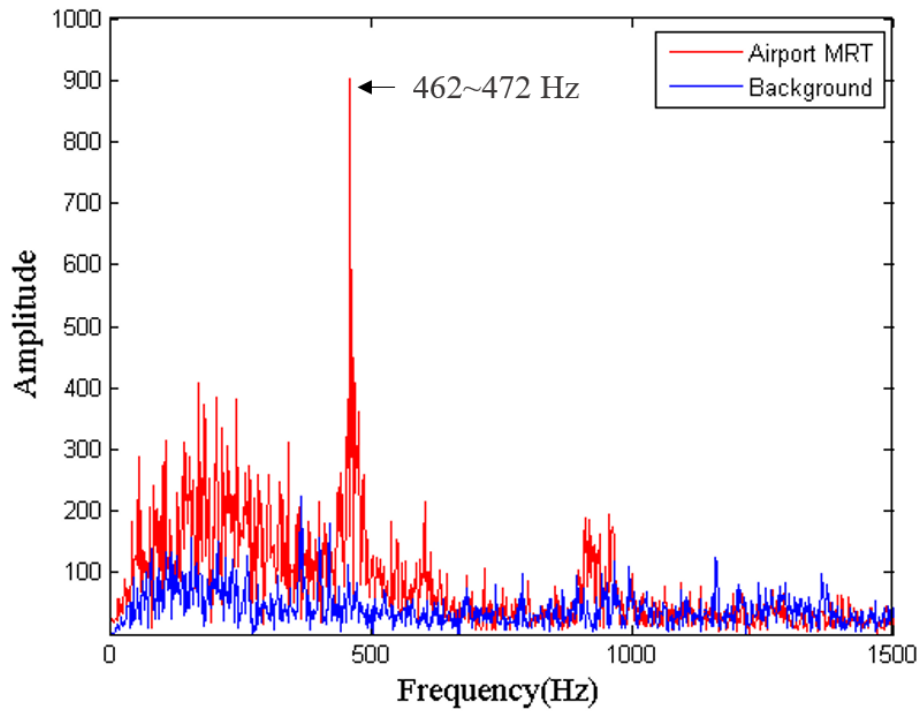
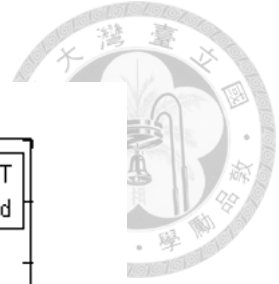


圖 4.1 機場捷運噪音頻譜圖

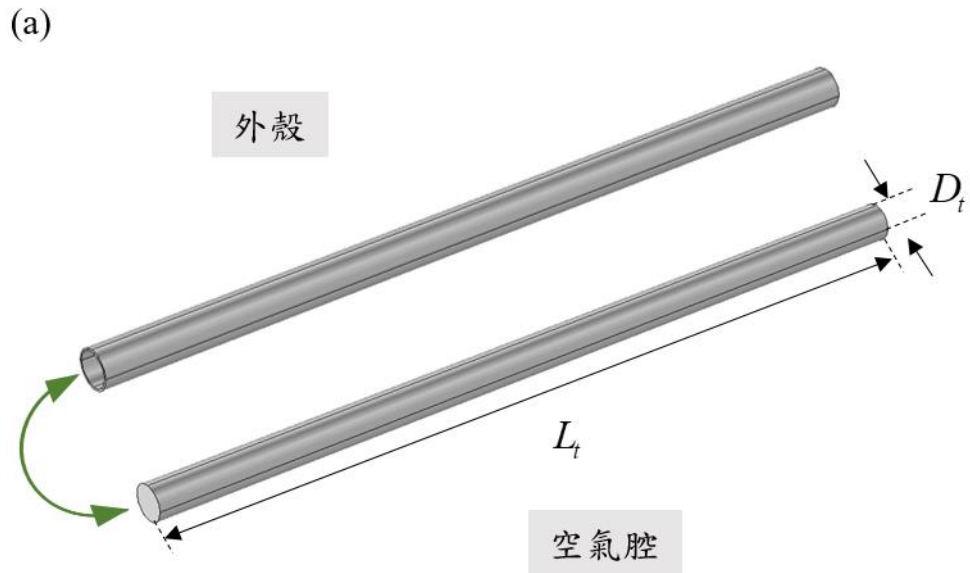


圖 4.2 (a)四分之一波長共振腔外殼與空氣腔結構示意圖

(b)

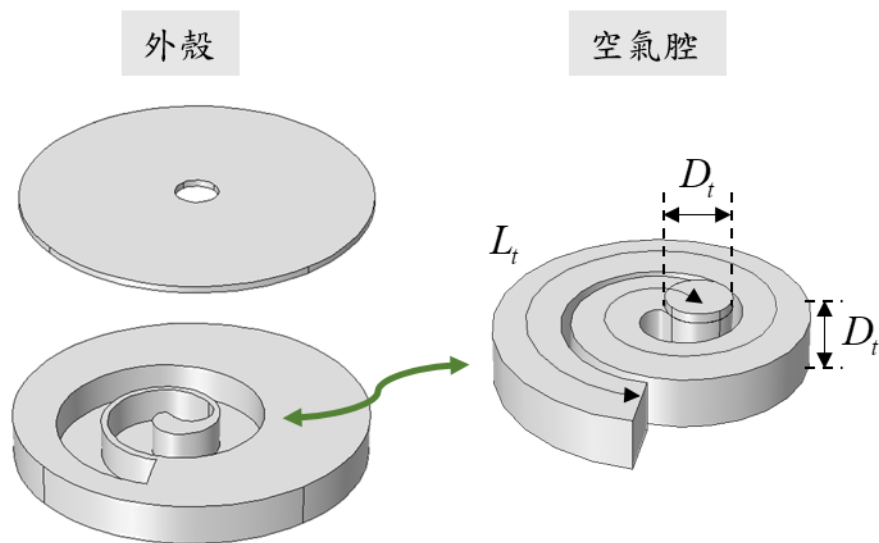


圖 4.2 (b)薄型吸音板外殼與空氣腔結構示意圖

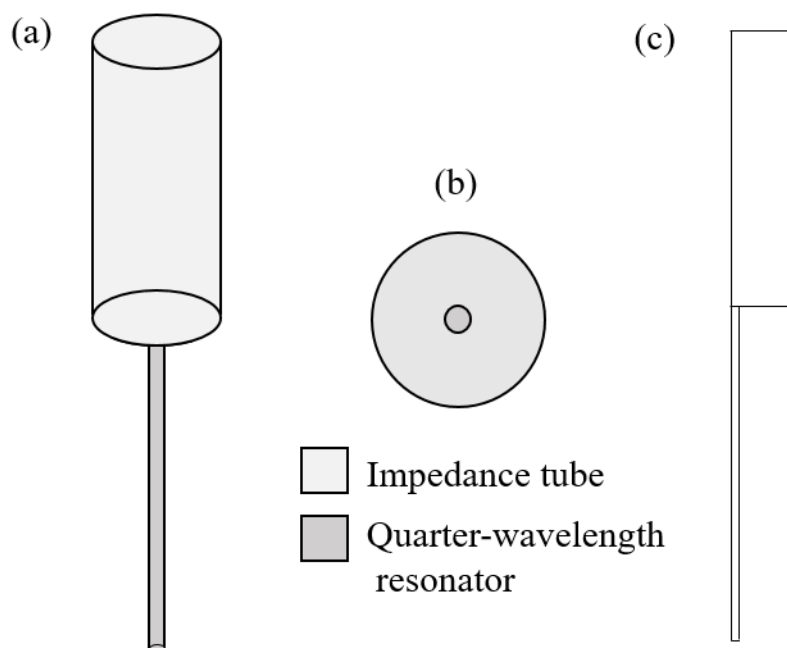


圖 4.3 圓形截面之四分之一波長共振腔 (a)完整模型
(b)上視圖 (c)軸對稱模擬模型

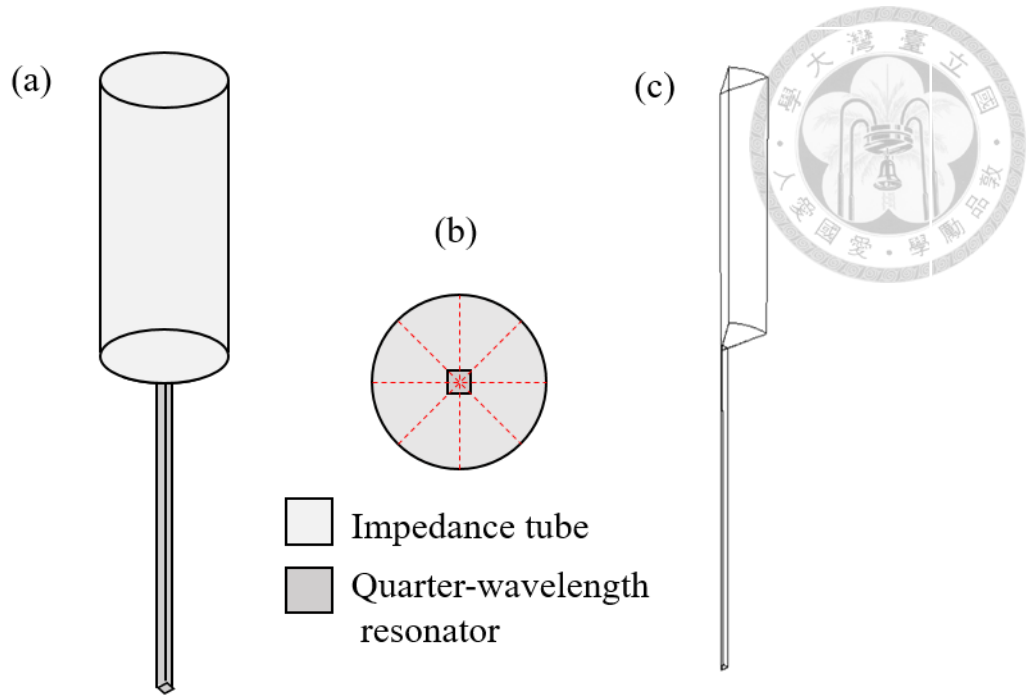


圖 4.4 方形截面之四分之一波長共振腔 (a)完整模型
(b)上視圖 (c)八分之一對稱模擬模型

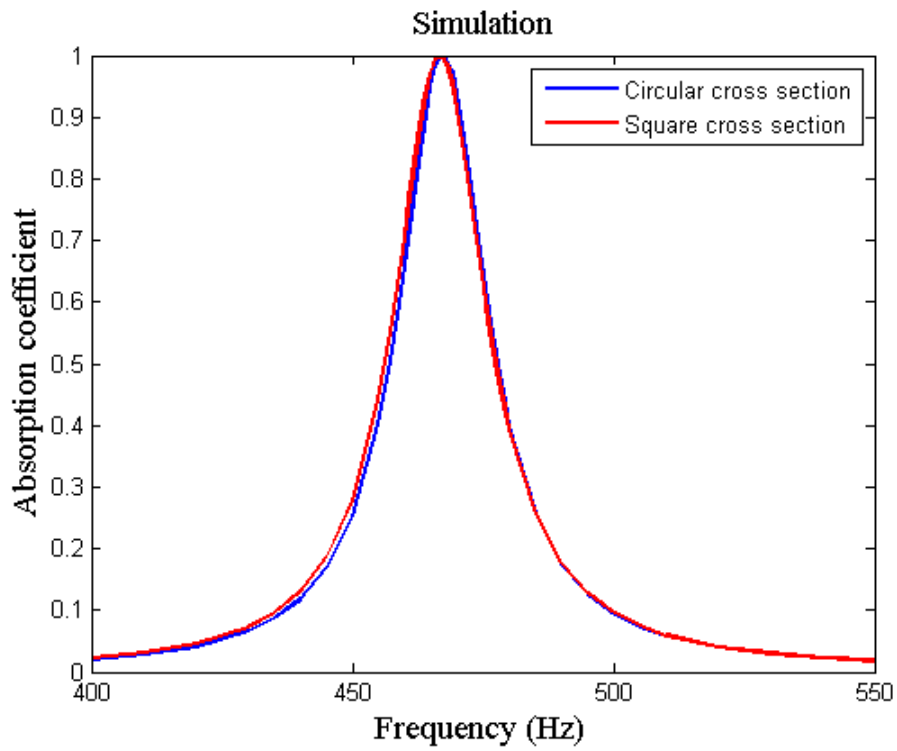


圖 4.5 圓形與方形截面之四分之一波長共振腔吸收率曲線

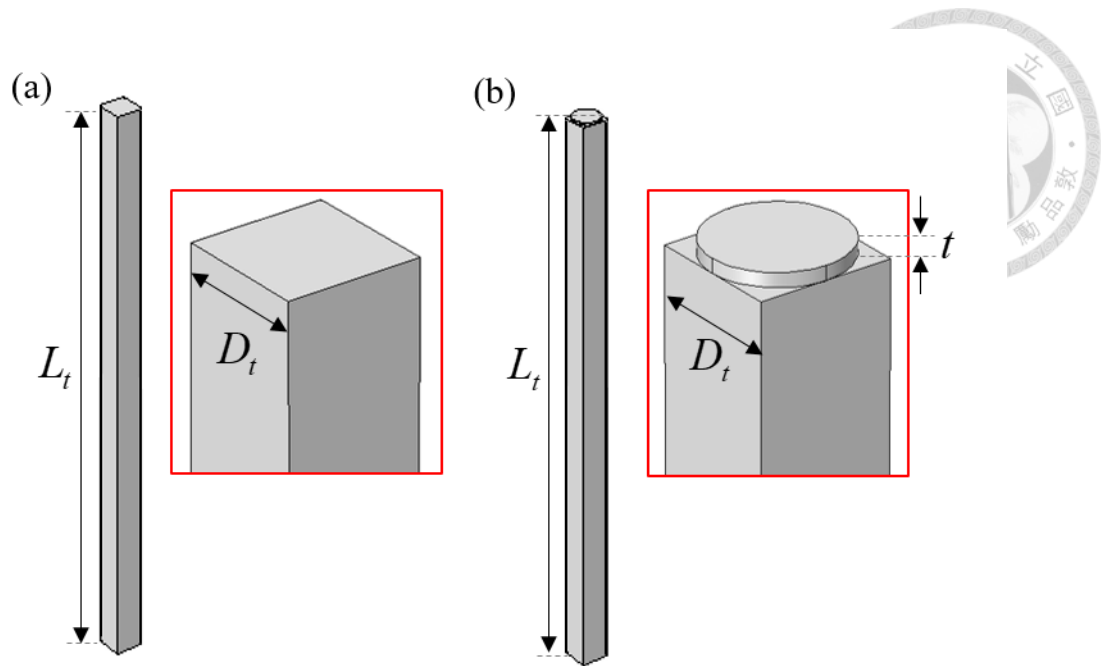


圖 4.6 (a)均勻方形截面 (b)圓形開口方形截面 之四分之一波長共振腔

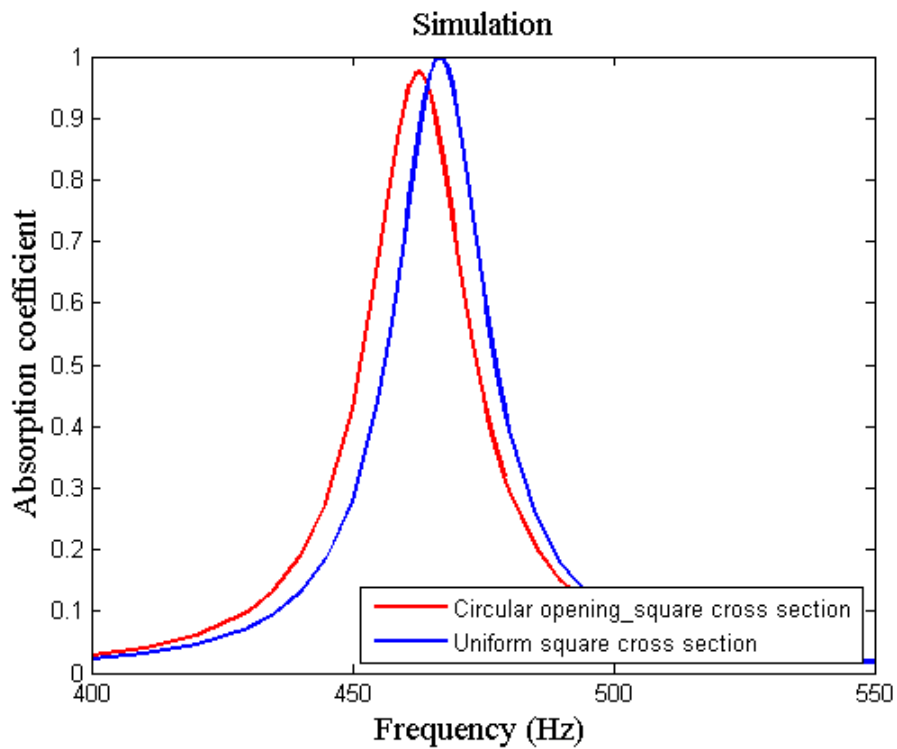


圖 4.7 均勻方形截面與圓形開口方形截面共振腔之吸收率

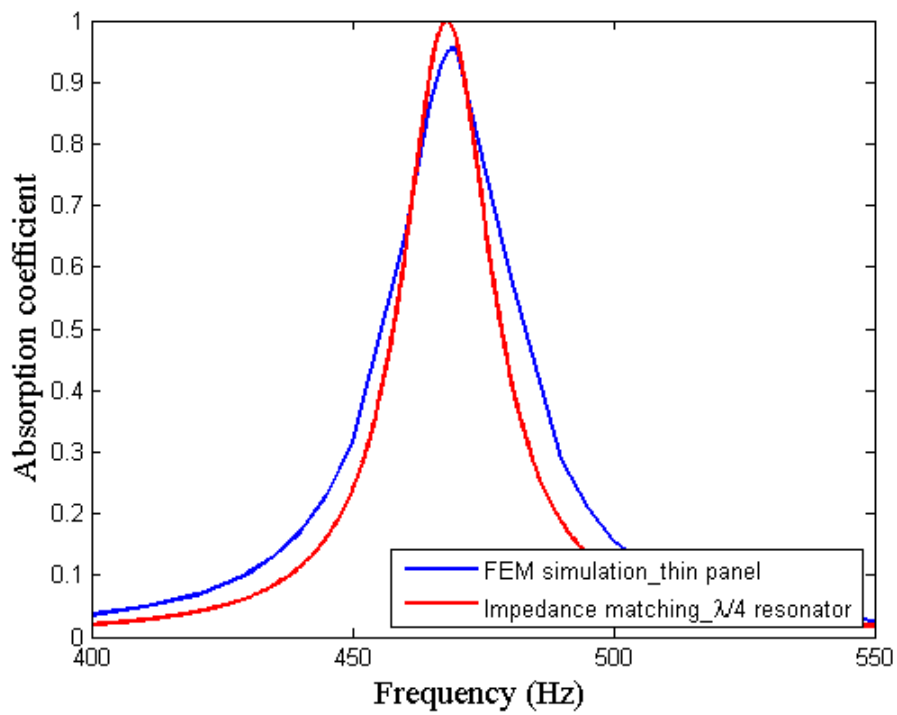


圖 4.8 吸音薄板與四分之一波長共振腔之吸收率比較

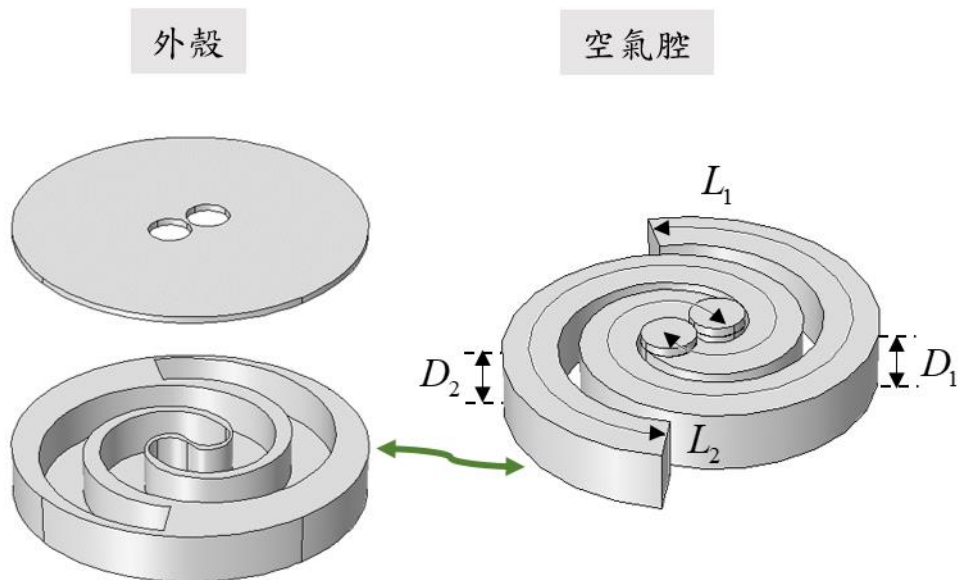


圖 4.9 寬頻吸音薄板意圖之示意圖

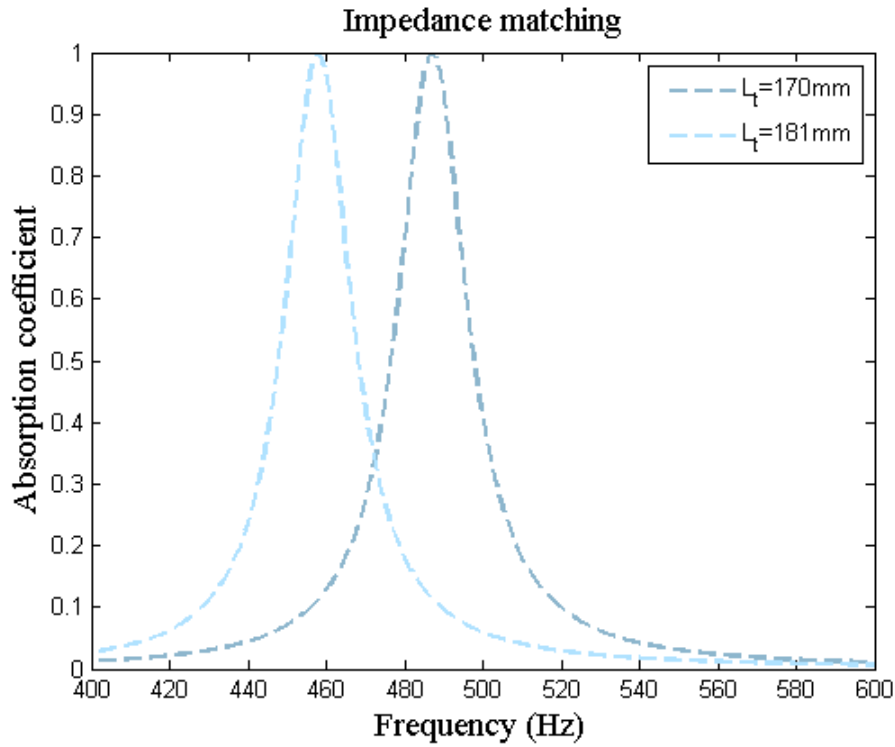


圖 4.10 寬頻吸音薄板之吸收率曲線

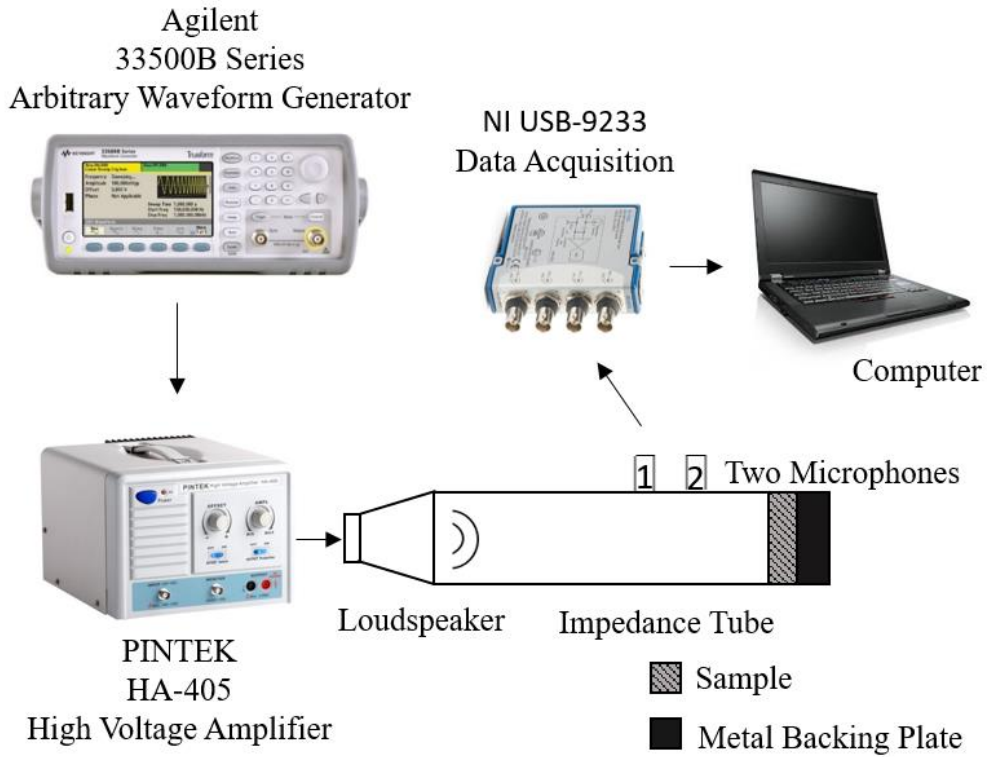


圖 4.11 實驗架設之示意圖



圖 4.12 實驗架設之實際情況

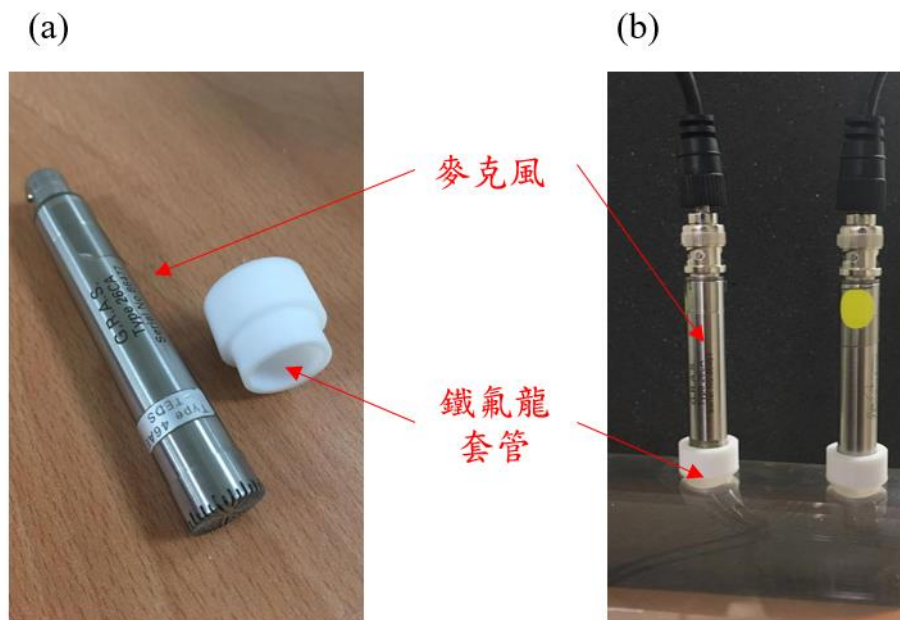


圖 4.13 (a)麥克風與鐵氟龍套管 (b)實驗安裝情形

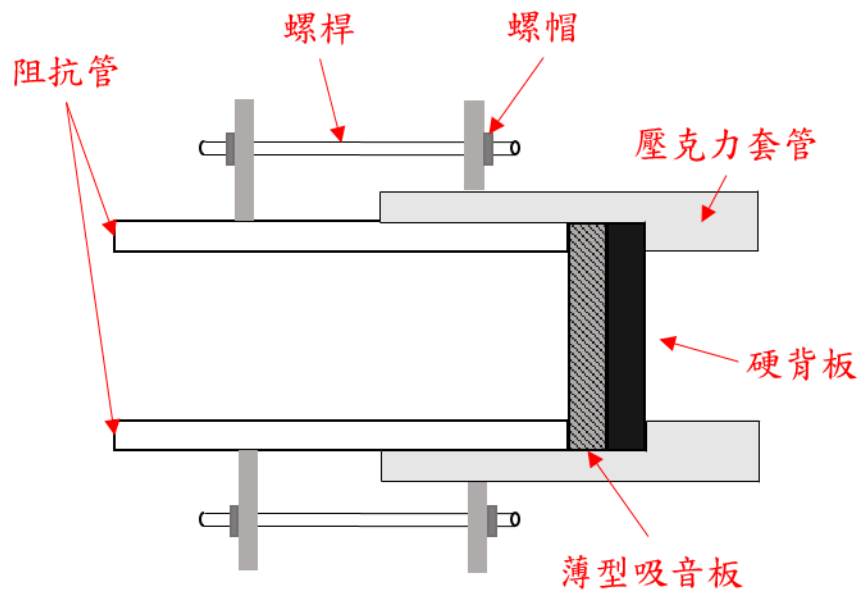


圖 4.14 共振腔安裝方式之剖面示意圖

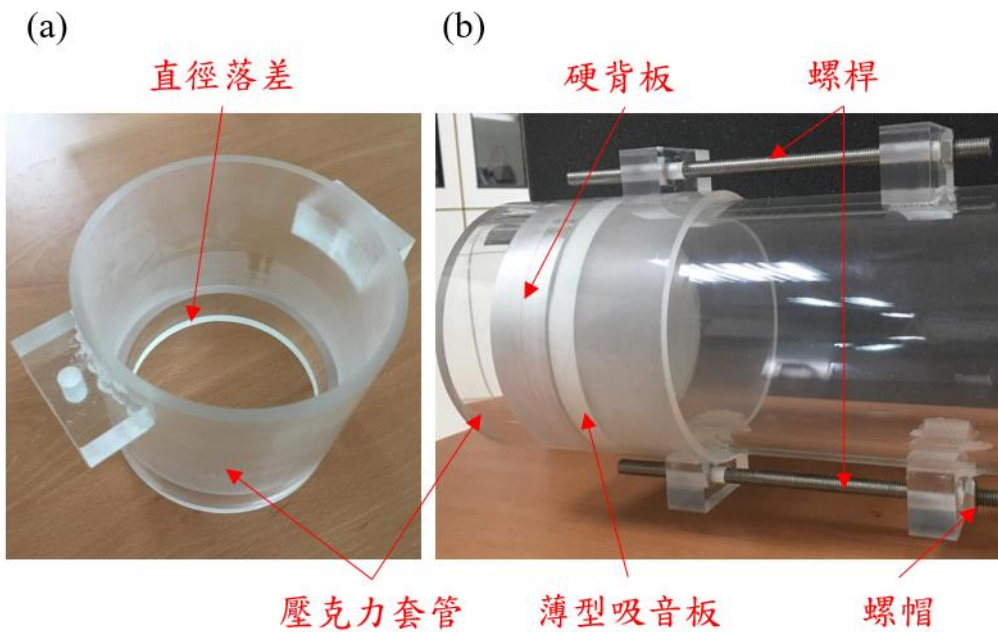


圖 4.15 (a)直徑落差的壓克力套管 (b)吸音薄板之實驗安裝情形

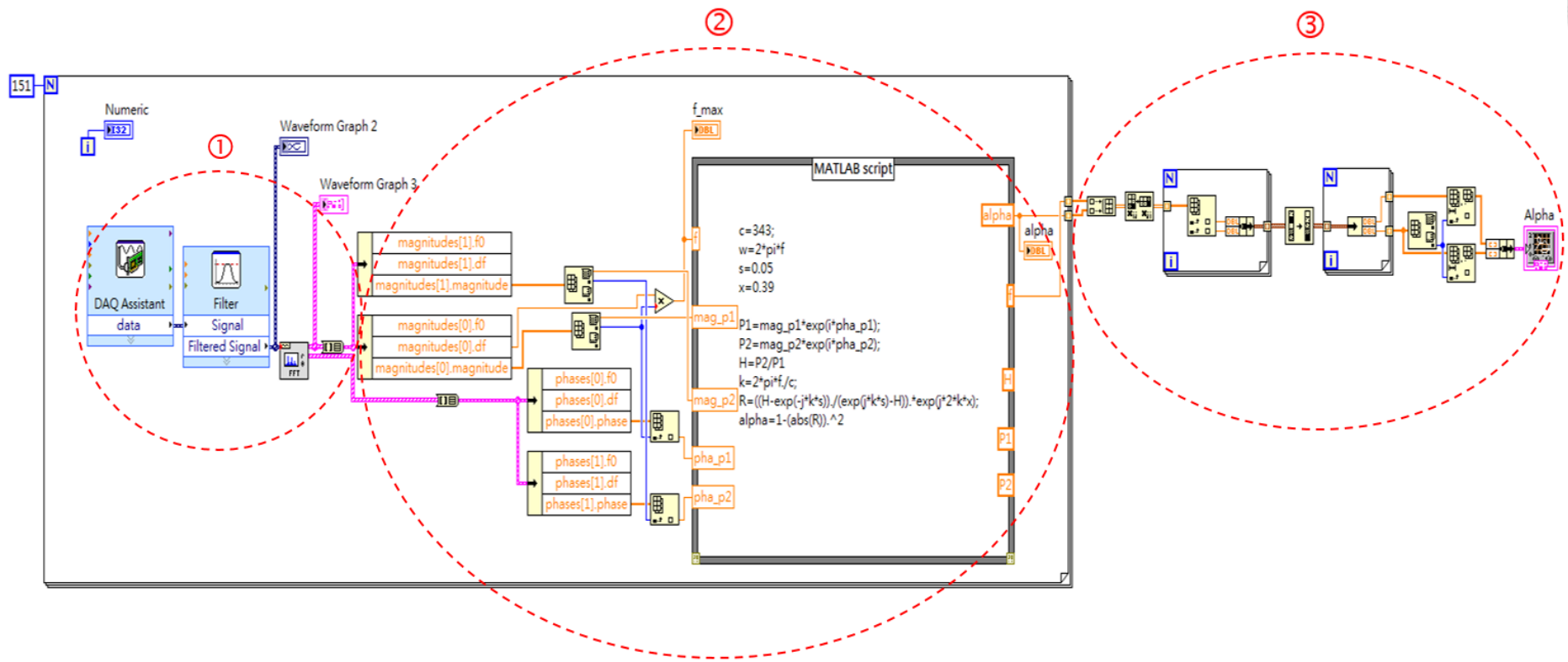


圖 4.16 (a) LabVIEW 之程式框圖

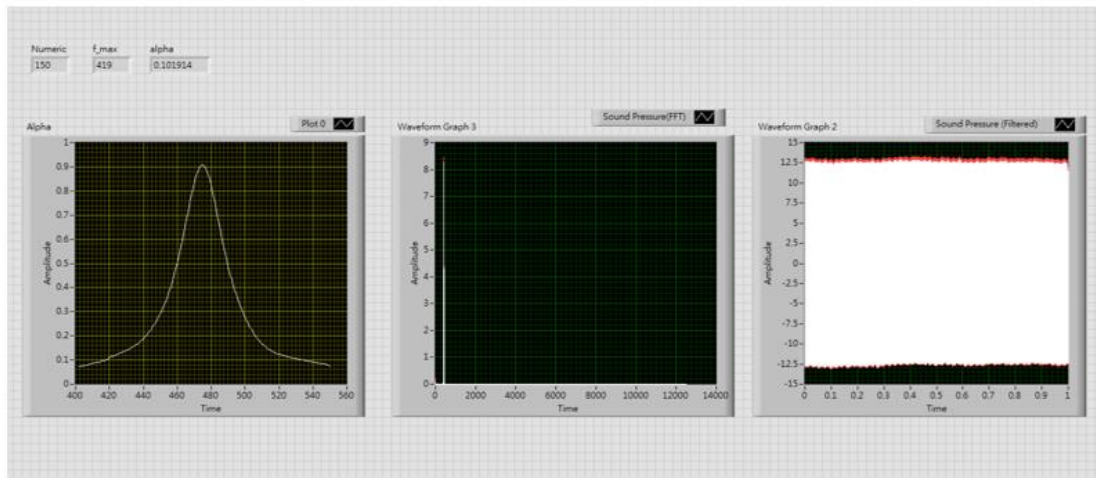


圖 4.16 (b) LabVIEW 之人機介面

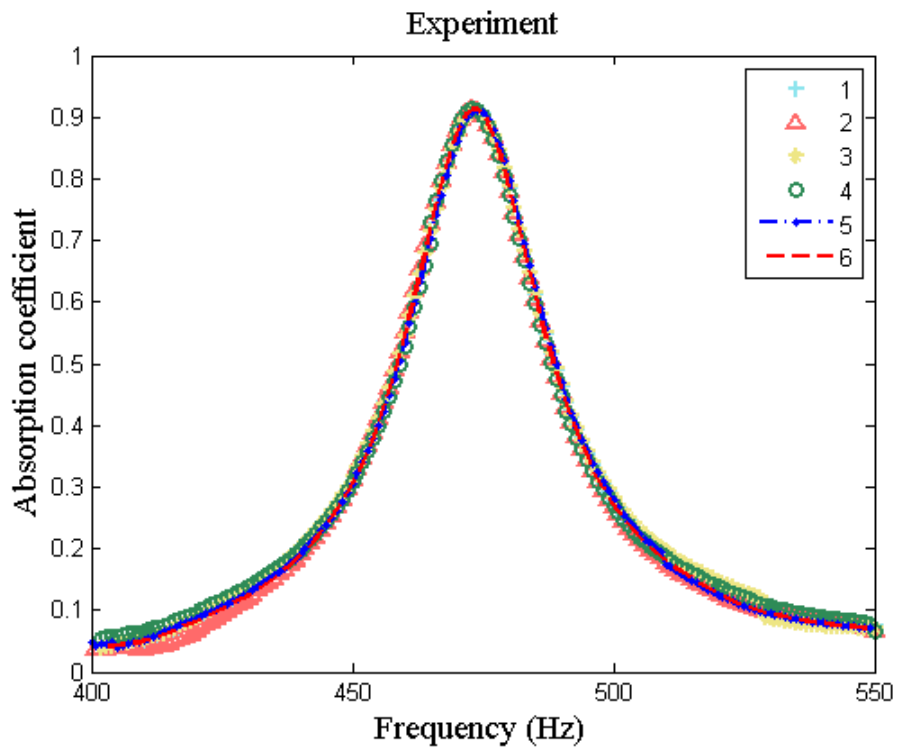


圖 4.17 麥克風重複安裝對實驗結果之影響

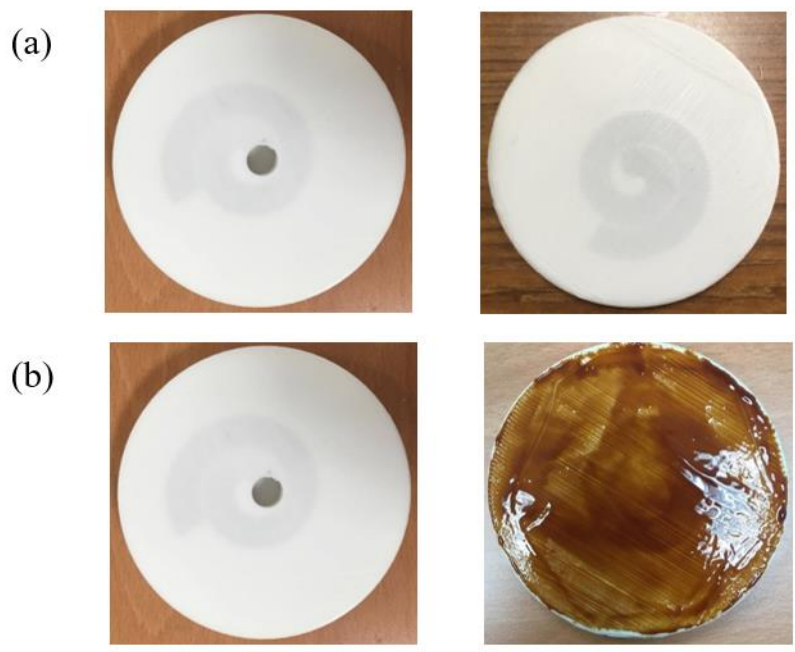


圖 4.18 (a)未塗有耦合劑與 (b)塗有耦合劑 之試件正反面

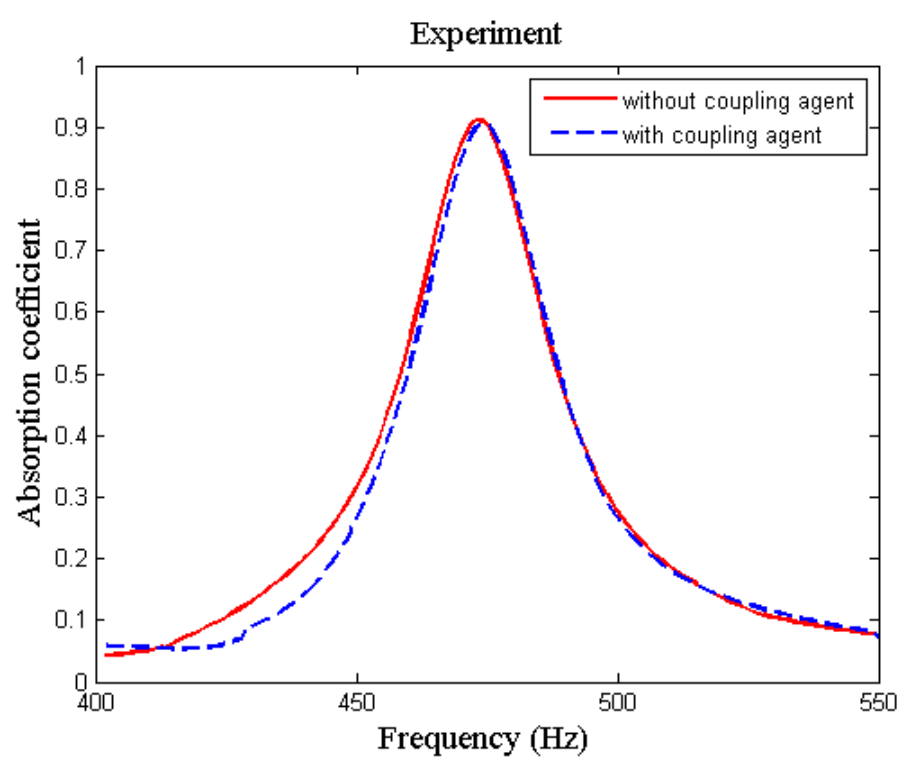


圖 4.19 吸音薄板與硬背板間有無耦合劑之比較

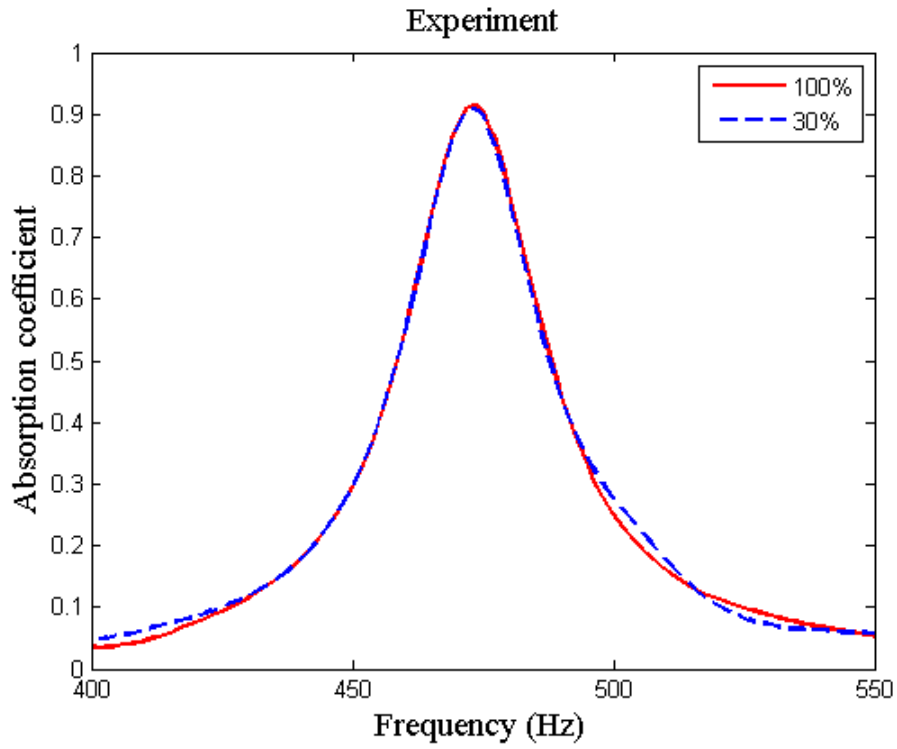


圖 4.20 3D 列印材料不同填充率之吸音係數比較

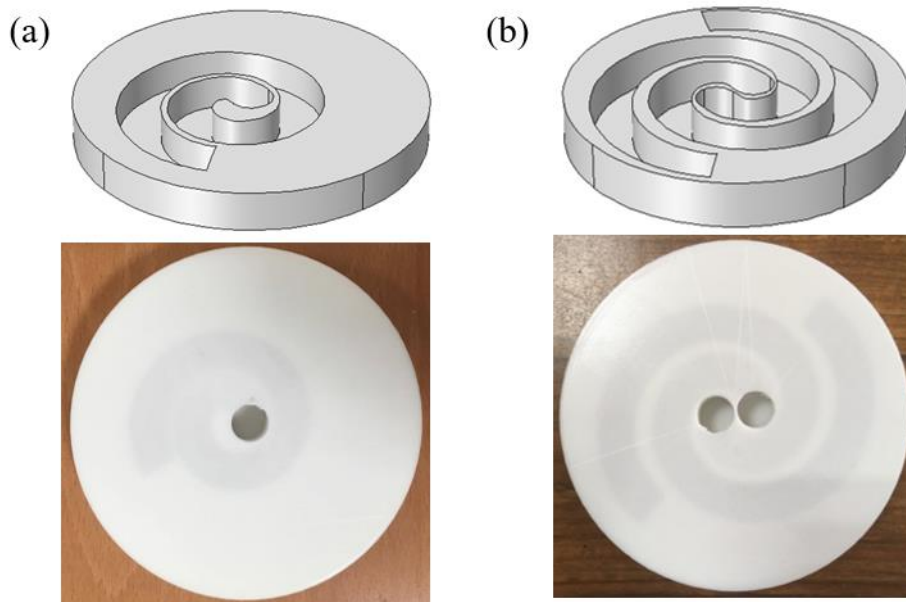


圖 4.21 (a)吸音薄板與 (b)寬頻吸音薄板 之共振腔示意圖與實驗試件

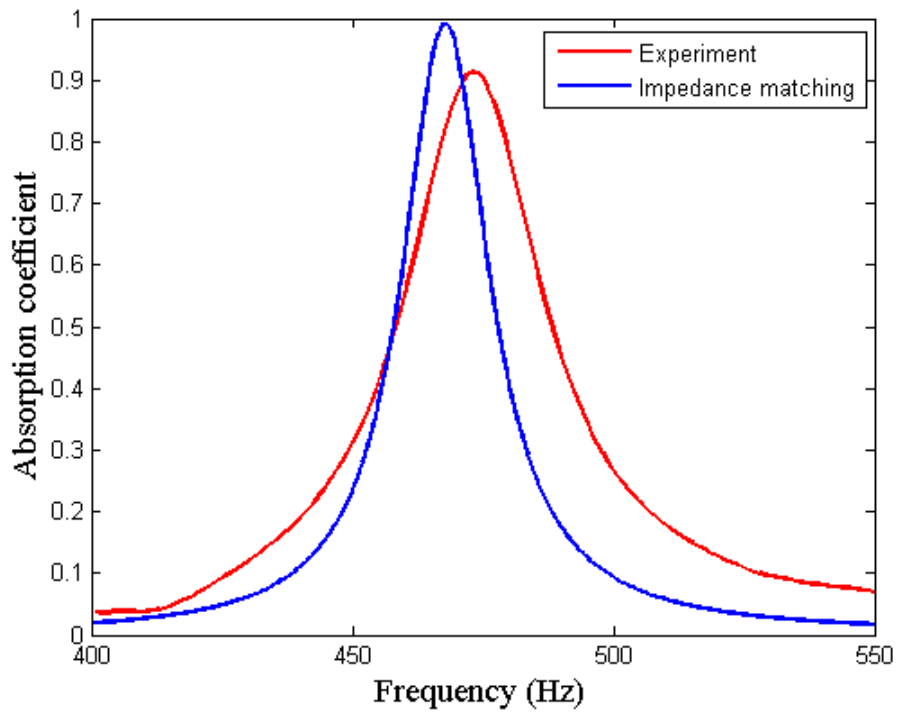


圖 4.22 薄型吸音板實驗與阻抗匹配法之吸音係數比較

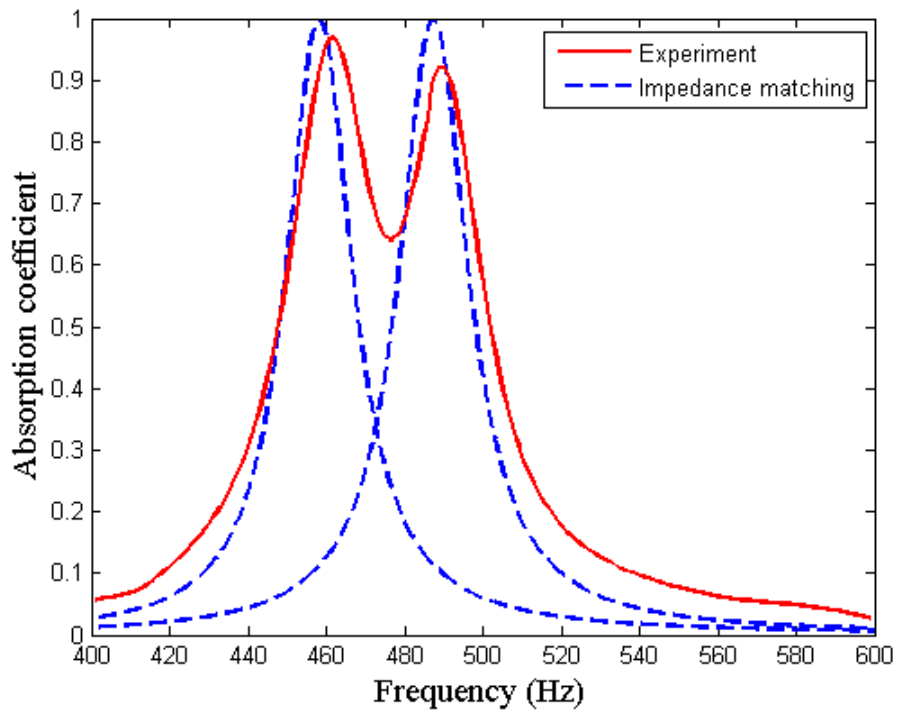


圖 4.23 寬頻吸音薄板實驗與阻抗匹配法之吸音係數比較

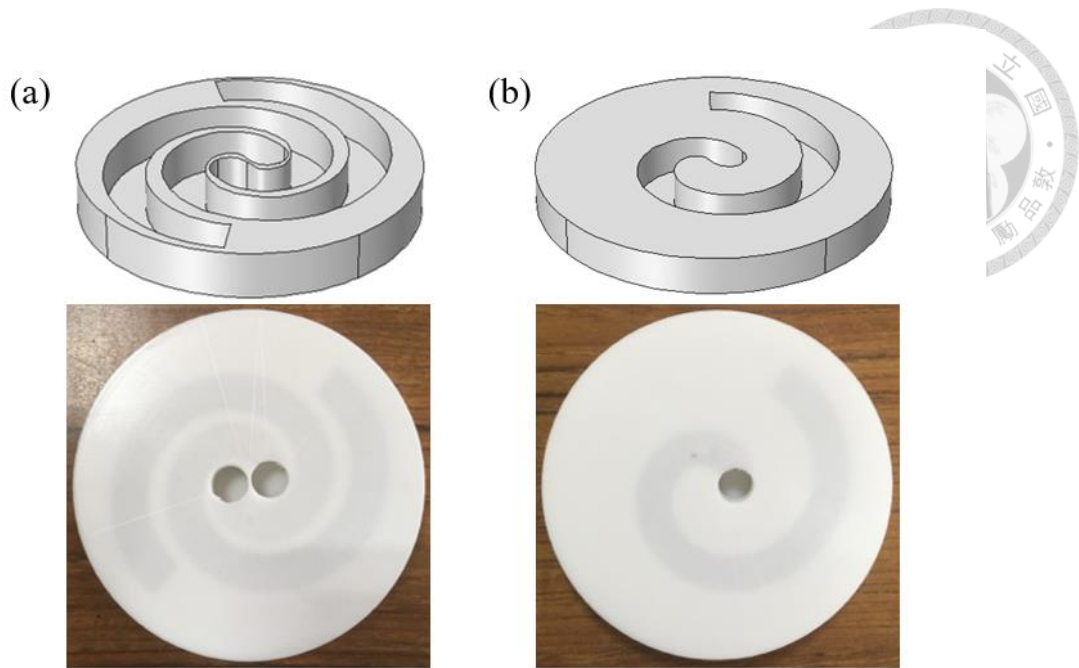


圖 4.24 相同幾何形狀 (a)雙共振腔與 (b)單共振腔 之示意圖與實驗試件

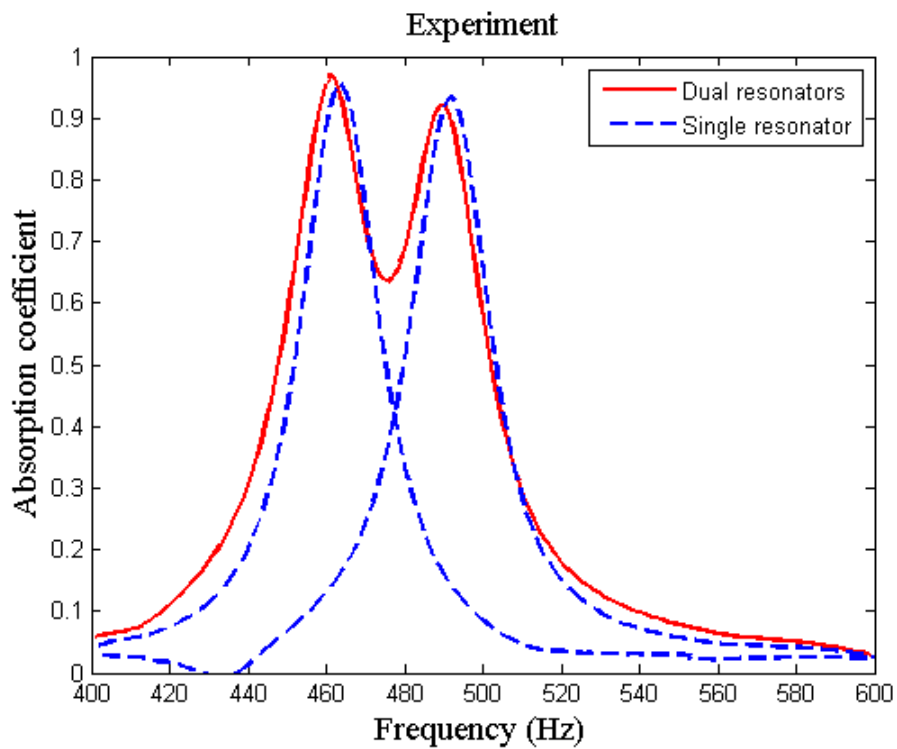


圖 4.25 相同幾何形狀之雙支與單支共振腔之吸收率比較

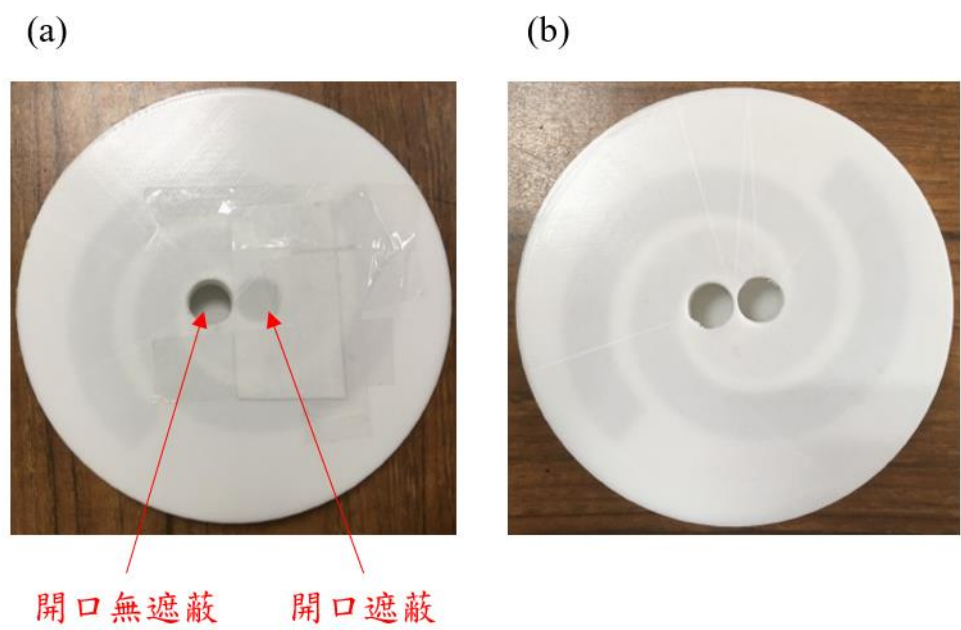


圖 4.26 (a)雙共振腔單開口 (b)雙共振腔雙開口 之吸音薄板

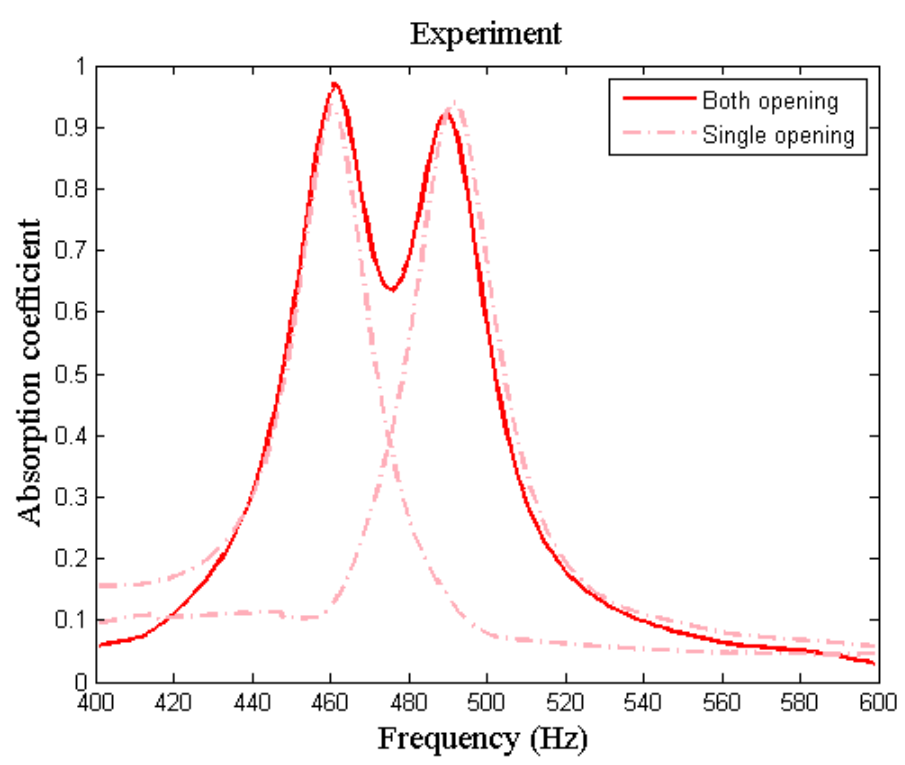


圖 4.27 雙共振腔之單開口與雙開口之吸音效果

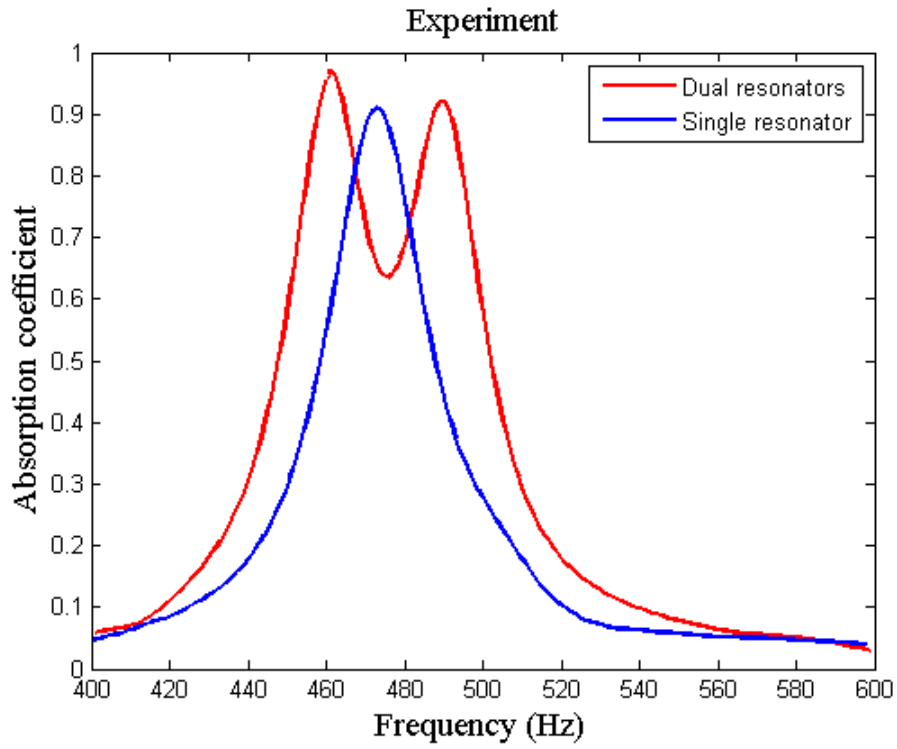


圖 4.28 單共振腔及雙共振腔之吸音薄板吸音效率比較

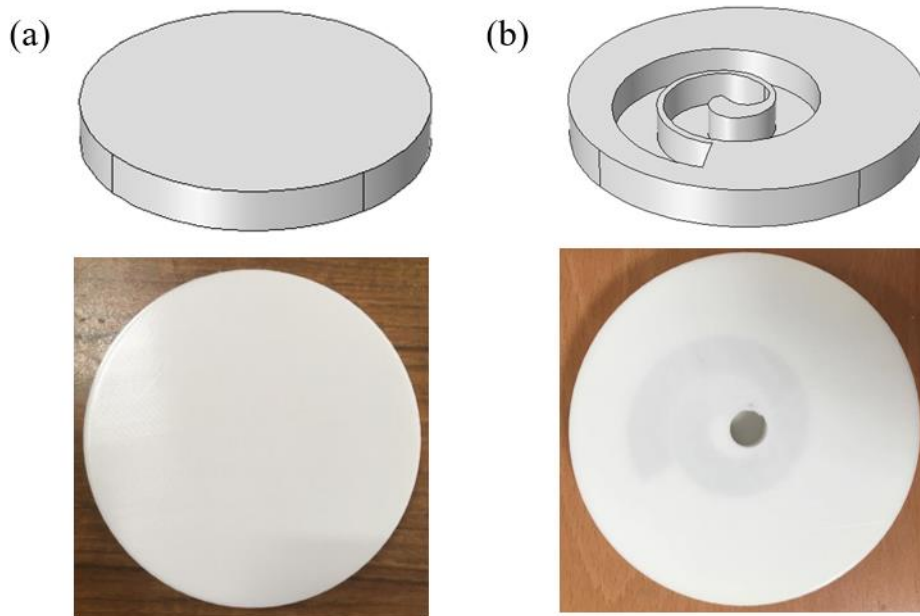


圖 4.29 (a)無共振腔 (b)有共振腔 之實驗試件

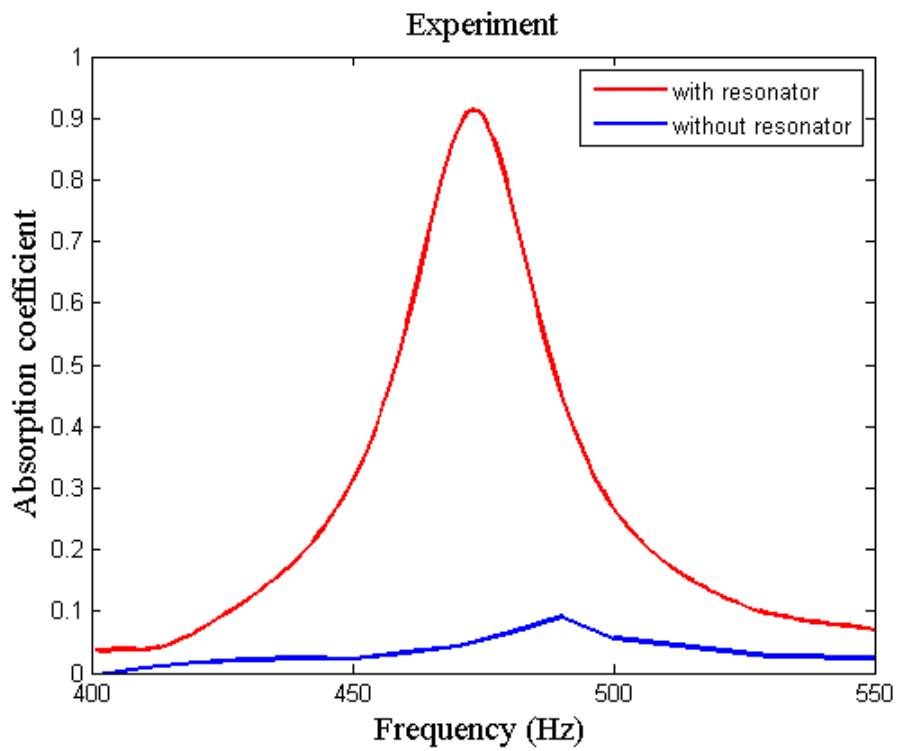


圖 4.30 有無共振腔之吸音係數比較

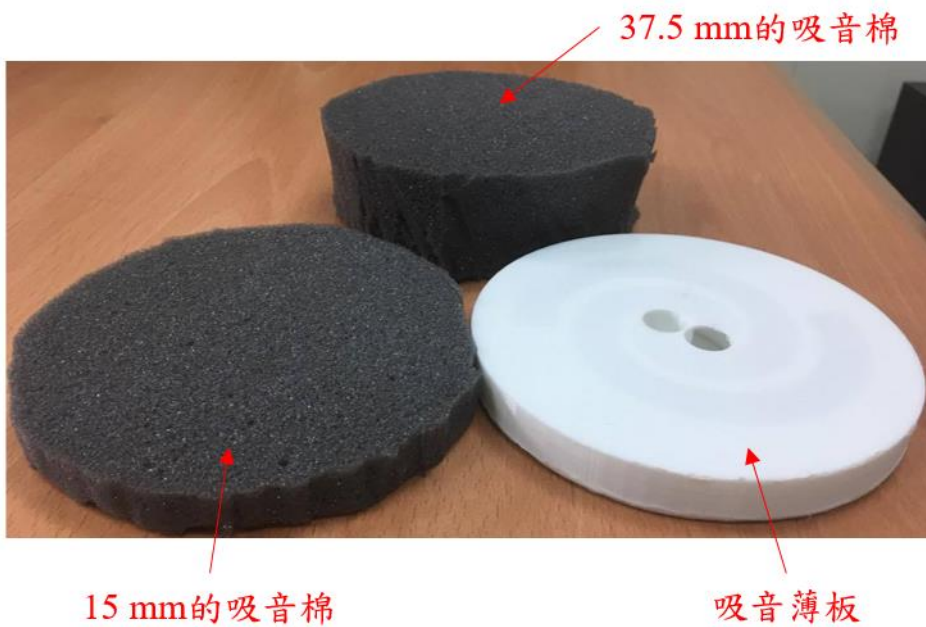


圖 4.31 吸音棉及薄型吸音版之實驗試件

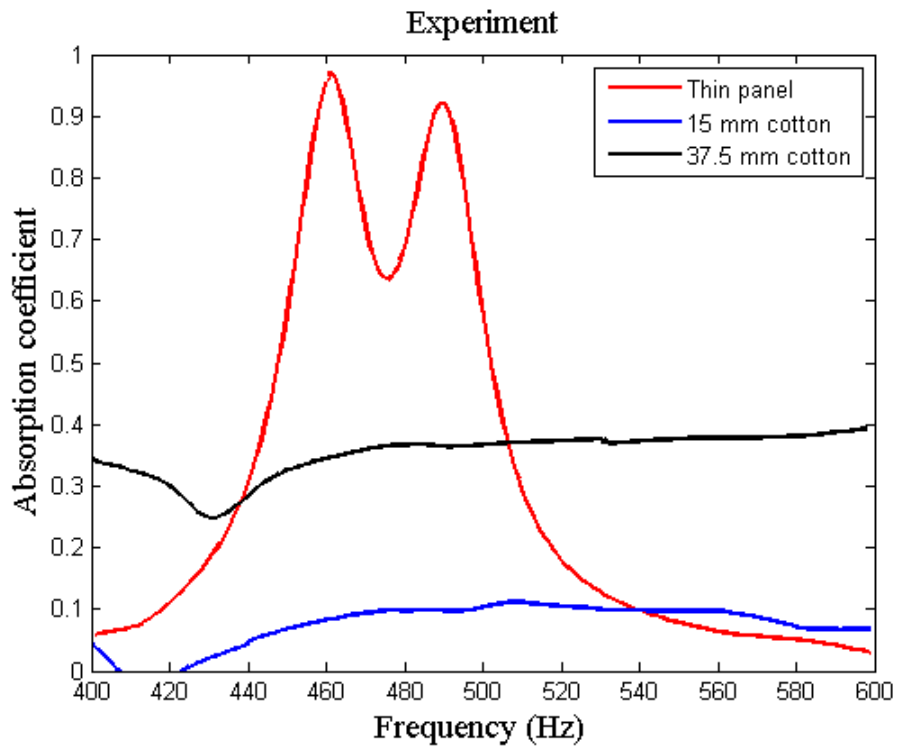


圖 4.32 寬頻吸音薄板與吸音棉之吸音係數比較

第五章 結果討論與未來展望



5.1 結論

此節將依本文的順序總述各章重點。首先於第二章建立基本的聲學觀念，了解基本的實驗方法，並以聲阻抗的觀點分析四分之一波長共振腔對於各頻率聲波的吸音效果。接著運用雙麥克風轉移函數法搭配 COMSOL 多物理耦合軟體模擬四分之一波長共振腔的吸音效率，並將模擬結果與阻抗匹配法比較，發現因阻抗分析在熱黏滯效應上的簡化而與模擬有些差距，便針對阻抗匹配法提出共振腔長度與開口率的修正公式，雖修正公式中的共振腔長度只涵蓋 50~700 mm，但頻率已跨足 50~1500 Hz，作為共振式的吸音板的使用範圍已相當足夠。

薄型化方面沿用 Cai 提出的螺線形共振腔，經由模擬分析得知其吸音係數曲線與四分之一波長共振腔的相似度極高，因此可經由修正後的阻抗匹配法作為設計共振腔的準則，免去有限元素法在三維模擬時計算量過大的限制。本文以機場捷運噪音頻率 467 Hz 為例，設計共振腔的幾何尺寸，並進一步提出雙共振腔的設計，使吸音頻寬大幅增加，有利於機場捷運吸音牆的使用，而由於兩共振腔為獨立的，在設計上可沿用前述對單共振腔的討論。

實驗則根據美國材料試驗協會(ASTM)所提出的測試規範製作聲學阻抗管，以量測吸音薄板吸音效率。實驗結果發現不論是單螺旋或雙螺旋共振腔的吸音薄板，其吸音效率皆與修正後的阻抗匹配法吻合度極高，實驗中單螺旋共振腔的最大吸收係數為 0.91，阻抗匹配法則為 0.99，兩者主要吸收頻率的誤差為 1.06%，而雙螺旋共振腔的設計，可將吸收係數達 0.5 以上的頻寬範圍由單螺旋共振腔的 30 Hz 增大至 54 Hz，說明雙螺旋共振腔的設計能達到寬頻且薄型化的特點，並有效吸收特定之低頻波，後續其他頻率之噪音也可依此方法設計合適的共振腔，達到噪音控制的目的。

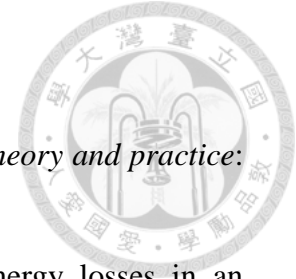
5.2 未來展望

本文已針對機場捷運噪音頻率進行吸音板的設計與實驗量測，未來在實際應用的部分，可將吸音薄板改為矩形設計，方便拼湊成一面牆，另外由圖 3.20 得知即使開口率產生偏差，對於吸收係數的影響幅度不大，因此可犧牲些微的開口率，使吸音板的厚度更為輕薄，而實驗上是以 3D 列印機製作一單元的吸音薄板，若要拼接出一整面的吸音牆耗時過久，需找尋其它能快速製作的方式，並保證共振腔有足夠的氣密性，才能使聲波在腔體內快速來回振動以消耗能量。

寬頻化的部分，本文僅以雙共振腔的方式達成目的，但效果有其極限，若能基於此設計形狀引入多元的吸音途徑，如同荷姆霍茲共振器般與吸音棉的搭配使用，或是以多種形態的共振腔耦合的方式創造多個相近之共振頻率，皆可使吸音頻寬的擴展更為顯著，並保持結構輕薄的特性，使用上的限制將為大為降低。


另外，聲波進入共振腔後，能量經由熱黏滯效應轉換為熱散失至空間中，參考文獻[33,34]，若能將此部分的能量收集起來，供其他元件使用，也可為綠色能源盡一份貢獻。

參考文獻



- [1] D. A. Bies and C. H. Hansen, *Engineering noise control: theory and practice*: CRC press, 2009.
- [2] Y. A. Ilinskii, B. Lipkens, and E. A. Zabolotskaya, "Energy losses in an acoustical resonator," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 109, pp. 1859-1870, 2001.
- [3] D. T. Blackstock, *Fundamentals of Physical Acoustics*: Wiley, 2000.
- [4] H. Von Helmholtz, *On the Sensations of Tone as a Physiological Basis for the Theory of Music*: Longmans, Green, 1912.
- [5] U. Ingard, "On the theory and design of acoustic resonators," *The Journal of the acoustical society of America*, vol. 25, pp. 1037-1061, 1953.
- [6] A. Norris and G. Wickham, "Elastic Helmholtz resonators," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 93, pp. 617-630, 1993.
- [7] A. Selamet, P. M. Radavich, N. Dickey, and J. Novak, "Circular concentric Helmholtz resonators," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 101, pp. 41-51, 1997.
- [8] M. Alster, "Improved calculation of resonant frequencies of Helmholtz resonators," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 24, pp. 63-85, 1972.
- [9] A. Selamet and I. Lee, "Helmholtz resonator with extended neck," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 113, pp. 1975-1985, 2003.
- [10] S. Tang, "On Helmholtz resonators with tapered necks," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 279, pp. 1085-1096, 2005.
- [11] X. Wu, C. Fu, X. Li, Y. Meng, Y. Gao, J. Tian, *et al.*, "Low-frequency tunable acoustic absorber based on split tube resonators," *Applied Physics Letters*, vol. 109, p. 043501, 2016.
- [12] S. Kim, Y.-H. Kim, and J.-H. Jang, "A theoretical model to predict the low-frequency sound absorption of a Helmholtz resonator array," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 119, pp. 1933-1936, 2006.
- [13] Z. G. Wang, S. H. Lee, C. K. Kim, C. M. Park, K. Nahm, and S. Nikitov,

- "Acoustic wave propagation in one-dimensional phononic crystals containing Helmholtz resonators," *Journal of Applied Physics*, vol. 103, p. 064907, 2008.
- [14] M. Xu, A. Selamet, and H. Kim, "Dual Helmholtz resonator," *Applied Acoustics*, vol. 71, pp. 822-829, 2010.
- [15] A. Sanada and N. Tanaka, "Extension of the frequency range of resonant sound absorbers using two-degree-of-freedom Helmholtz-based resonators with a flexible panel," *Applied Acoustics*, vol. 74, pp. 509-516, 2013.
- [16] J.-P. Groby, C. Lagarrigue, B. Brouard, O. Dazel, V. Tournat, and B. Nennig, "Enhancing the absorption properties of acoustic porous plates by periodically embedding Helmholtz resonators," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 137, pp. 273-280, 2015.
- [17] H. Long, Y. Cheng, J. Tao, and X. Liu, "Perfect absorption of low-frequency sound waves by critically coupled subwavelength resonant system," *Applied Physics Letters*, vol. 110, p. 023502, 2017.
- [18] A. Selamet, M. Xu, I.-J. Lee, and N. Huff, "Helmholtz resonator lined with absorbing material," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 117, pp. 725-733, 2005.
- [19] D.-Y. Maa, "Theory and design of microperforated panel sound-absorbing constructions," *Scientia Sinica*, vol. 18, pp. 55-71, 1975.
- [20] D.-Y. Maa, "Potential of microperforated panel absorber," *the Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 104, pp. 2861-2866, 1998.
- [21] C. H. Sohn and J. H. Park, "A comparative study on acoustic damping induced by half-wave, quarter-wave, and Helmholtz resonators," *Aerospace Science and Technology*, vol. 15, pp. 606-614, 2011.
- [22] X. Cai, Q. Guo, G. Hu, and J. Yang, "Ultrathin low-frequency sound absorbing panels based on coplanar spiral tubes or coplanar Helmholtz resonators," *Applied Physics Letters*, vol. 105, p. 121901, 2014.
- [23] Y. Li and B. M. Assouar, "Acoustic metasurface-based perfect absorber with deep subwavelength thickness," *Applied Physics Letters*, vol. 108, p. 063502, 2016.

- 
- [24] L. E. Kinsler, *Fundamentals of acoustics*: Wiley, 1982.
- [25] ASTM E1050-08, " Standard test method for impedance and absorption of acoustical materials using a tube, two microphones and a digital frequency analysis system."
- [26] J. Allard and N. Atalla, *Propagation of Sound in Porous Media: Modelling Sound Absorbing Materials 2e*: Wiley, 2009.
- [27] M. R. Stinson, "The propagation of plane sound waves in narrow and wide circular tubes, and generalization to uniform tubes of arbitrary cross-sectional shape," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 89, pp. 550-558, 1991.
- [28] COMSOL Multiphysics, "Acoustics module user guide version 4.2," *User's manual*, 2011.
- [29] J. D. Anderson and J. Wendt, *Computational fluid dynamics* vol. 206: Springer, 1995.
- [30] P. M. Morse and K. U. Ingard, *Theoretical acoustics*: Princeton university press, 1968.
- [31] R. G. Campbell, *Foundations of fluid flow theory*: Addison-Wesley Publishing Company, 1973.
- [32] G. K. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*: Cambridge university press, 2000.
- [33] B. Li, A. J. Laviage, J. H. You, and Y.-J. Kim, "Harvesting low-frequency acoustic energy using quarter-wavelength straight-tube acoustic resonator," *Applied Acoustics*, vol. 74, pp. 1271-1278, 2013.
- [34] M. A. Pillai and D. Ezhilarasi, "Improved Acoustic Energy Harvester Using Tapered Neck Helmholtz Resonator and Piezoelectric Cantilever Undergoing Concurrent Bending and Twisting," *Procedia Engineering*, vol. 144, pp. 674-681, 2016.