

國立臺灣大學工學院工程科學及海洋工程學系

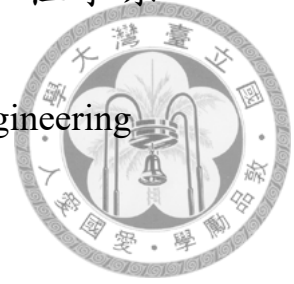
碩士論文

Department of Engineering Science and Ocean Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis



以時域有限差分方法求解三維馬克斯威爾方程組，探討手機于頭部之電磁波之比吸收率之分布

Calculation of Mobile Phone Induced Specific Absorption Rate Prediction in Phantom Head by a 3D FDTD code for Maxwell's equations

林緯皓

Wei-Hao Lin

指導教授：許文翰博士

Advisor: Tony Wen-Hann Sheu, Ph.D.

中華民國 107 年 7 月

July, 2018

國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書

論文中文題目：

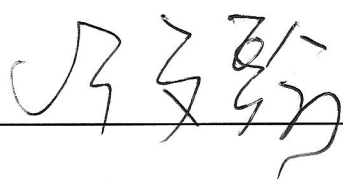
以時域有限差分方法求解三維馬克斯威爾方程組，探討
手機于頭部之電磁波比吸收率之分布

論文英文題目：

Calculation of Mobile Phone Induced Specific Absorption Rate
Prediction in Phantom Head by a 3D FDTD code for
Maxwell' s equations

本論文係林緯皓君（學號 R05525099）在國立臺灣大學工程科學
及海洋工程學系完成之碩士學位論文，於民國 107 年 6 月 21 日承下
列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：



（指導教授）





系主任

誌謝



光陰匆匆，霎那間，兩年的碩士班生涯也接近了尾聲。兩年的汗水、淚水與歷練，逐一記錄在這本碩士論文裡。

首先，我要將這兩年的一切成果與榮耀，歸功於 - 我的父親 - 林宏鈞 先生，與我的母親 - 鄧桂霞 女士。從我過去的不懂事到大學畢業，到當兵入伍，到退伍後出國長居，到考上台大，到我取得碩士學位。兒時的叛逆無知，年少輕狂，回首一望彷彿昨日。然而，父母從沒放棄過教養我、並導正我的價值觀，今日，我才有機會見到自己的蛻變。小時候，母親常常開玩笑的問我，我長大後會養爸媽嗎，當時不免擔心自己能有多少能力讓爸媽過好生活，現在終於可以很肯定的回答這個問題，讓爸媽未來的退休生活遊山玩水，衣食無虞，共享天倫之樂。

同時，我也要特別感謝我的指導教授 - 許文翰 恩師。記得當初來到台大，對許文翰 老師的研究相當有熱忱，唯恐基礎不佳，老師擔憂我是否能負荷，所幸，三顧茅廬之下，老師看見了我的決心，願意破例超收我這個大學成績不佳，又看起來混混的學生。然而，這兩年的時光裡，許文翰 老師，就像一個嚴父的角色，為了讓底子不好的我能夠步上軌道，給予我比其他同儕更多的關心與壓力，還能有幸跟老師一同前往青島做研討會報告，有鑑於老師願意給予我這樣的環境與充足的資源下，最初懵懂的我，才能快速的在碩一下學期上了軌道，順利的找到方向，最終完成了我的碩士論文，發生在我身上如此大的改變，除了感念老師對我的知遇之恩以及教養之恩，師恩浩蕩，著實無以回報，萬幸能在 TWSIAM 研討會中獲得了一個傑出碩士海報論文獎，為師爭光。惟學生畢業前，僅僅能將此獎項，獻給我的恩師 - 許文翰 老師，以表學生的感念之情。

謝謝共同指導老師 - 李佳翰 老師，願意不吝共同指導我，在每周的 meeting 上，給予我在研究上專業領域的幫助與建議，也感謝李佳翰 老師的緣故，讓我有機會能和張宏鈞 老師學習，謝謝李佳翰 老師兩年來的照顧。

謝謝電信所 - 張宏鈞 老師，在百忙之中能夠抽空給予我研究上的幫助與教學，更在口試期間擔任學生的口試委員，給予學生相當多的建議與肯定！讓我在研究上有更廣闊的視野。

謝謝我的妹妹林筱函，在我在台北求學的這段期間，下班之後都有好好陪伴爸媽！希望我經歷的故事與轉變，也能夠給予我妹妹在人生道路上一些方向與借鏡！你是我最優秀的妹妹。

在這個使我蛻變良多的環境裡，首先我要先感謝很照顧我的高仕超 學長，在我剛進實驗室人生地不熟的時候，鼓勵我好好念書，也分享自己的故事，告訴我不要受限於自己的過去，並開創自己的人生！超哥除了是我的學長，也是我人生的前輩，常常受你照顧，一日學長終生學長！

接著我要感謝同樣很照顧我的柳冠碩 學長，在實驗室與研究上，各種大大小小的事情中，幾乎透過請教你，都可以得到最有效率且最正確的答案，使得我也想成為 Rex 學長這樣能夠獨當一面解決問題的人！所以後來才能漸漸的憑自己的力量完成我的研究，謝謝 Rex 學長一路上的幫助與鼓勵！

同樣要特別感謝從 SCCS 實驗室畢業的張育璋 學長，一路上無條件的付出，給我專業知識上的協助，以及未來我的人生規劃上也給我很多很大的建議！在我口試期間一個禮拜，在百忙之中還願意撥空為我的口試進行預備練習，您真的是我人生中，遇過最無私付出，又有想法，並且有決心與毅力去做好每一件事的學長兼益友兼恩師！未來人生的道路，除了當一名好學弟之外，我一定會成為一名有能力回饋您的恩情的好朋友的。

另外，也要感謝實驗室畢業的林樂 學長，無私的分享給我未來就業的方向與建議，希望未來出去工作我有能力能夠幫上學長的忙。

特別感謝楊世銓 同學，在我剛來到這個環境，就把同學們都介紹給我認識，讓我很快的融入工科 B01 的大家庭，把我加入了你們班的群組裡，彷彿我就像同班同學一樣，另外在實驗室裡，你也常常勉勵我，給我許多研究上的資源與建議，一起生出很厲害的研究！其中最重要的是，你在實驗室準備的躺椅，結果都是我在用，多少個我和老鼠一起度過的夜晚，有你購置的這張躺椅在，如今，我才能在今年跟你一起順利畢業，以後人生的道路要一起加油，繼續戰鬥下去！我的好朋友！

感謝張育維 同學在我碩一的時候，無數個夜晚跟我一起熬夜奮鬥到四點多，很懷念那段我們熬夜跟研究奮鬥加上兩支啤酒的日子，真是一段前無古人後無來者的時光。你的努力與研究的天分，還有你對人生的態度，都激勵我堅持著往前走下去，你也是我學習的對象，謝謝有你跟楊世銓 同學在這裡的照顧，才有現在的我。

同時，感謝周書聖 同學，能夠認識你這樣有夢想的朋友，是相當難得的，碩一上也熱心的分享關於電磁學的細節觀念給我，使我如沐春風，後來，還記得聽你深聊過關於夢想與現實的故事，很讓我感動，每個禮拜二的光機電組 Meeting，兩年中，與你一起努力的過程也歷歷在目，未來畢業以後，也要常保持聯絡，謝謝你！

謝謝實驗室去德國念書的王智達 學長，您在實驗室的期間，也給了我許多鼓勵與建議，達哥的心路歷程，也給了我很多很多遇到困難時之正面的想法。

感謝碩一上時翁凡 學長與高千渝 學姊把我引薦進入 SCCS LAB 中！沒有你們的出現，我也不會在這麼好的環境中學習與成長。

謝謝吳政道 同學的教導一些關於 coding 方面的專業知識，讓我受益良多。謝謝聶廷叡 同學、王志明 同學、羅鈺棋 同學加入了 SCCS LAB，為實驗室增添了許多新的氣象。

感謝我的室友物理所的林合俊 同學，在我無數個深夜晚歸，但是並沒有因此而覺得我是不良室友，相反的我們反而很照顧彼此，也常常請教你一些關於國外學校與就業方面的事，相當感謝跟你住在同一間寢室的時光！良好的室友合俊！讓我有良好的休息環境，迎戰每一個明天的到來。

特別感謝 B01 的蔡宜芳 同學，沒有你的 Latex 格式照應，我可能要花兩倍的時間才能完成我的碩士論文，以及修資結的時候給我的資源與觀念上的幫助，讓我對資料結構有更進一步的了解！感謝 B01 的江明謙 同學，遠在西雅圖工作的你的故事，讓我看見會玩又會念書的表率，我會努力實現跟你的約定，美國見！謝謝 B01 的魏丞鴻 同學，在工科所畢業一肩擔起了負責人身分，讓大家能夠無憂的去著手自己的碩士論文。感謝光電所李家豪 同學，從碩一上認識到現在一起修課、一起去社團認識新朋友、一起畢業找工作！在兩年研究所中，許多個煩悶的日子，常常找你一起吃消夜聊天消除苦悶，謝謝你照應，才讓我度過那些苦難與低潮的時光。感謝電子所徐瑋澤 同學，跟我一起在念書念累了相約健身房，還有一起修課的時光，從你身上也學到很多，謝謝你！

謝謝光電所謝承哲 同學，在就業面試時給予我相當多的建議與幫助！未來再一起努力互相照應！謝謝化工系的曾耀賢 同學、中文系的翁翊傑 同學與會計系的吳妍庭 同學，能遇見有相同興趣的你們，在我碩班兩年的生涯中，能夠有一個情感的抒發去處！在社團認識你們，是我在台大兩年當中最大的收穫。

僅將此碩士論文獻給我的家人 - 林宏鈞 先生、鄧桂霞 女士與妹妹筱函。



摘要

本論文是在非交錯網格上發展一三維時域有限差分法 (FDTD)，以求解馬克斯威爾方程。本文的方法是在時域內，在滿足高斯定律 (即電場和磁場零散度條件) 的架構下求解法拉第定律和安培定律。

本文所提出的數值方法能在時間上和空間上保有相當好的理論收斂斜率，且能有效地減少實解相速度與數值相速度之間的誤差，而得以顯著地降低了因時域有限差分所造成的數值色散誤差以及各向異性誤差。本研究證實了所提出的數值方法在具辛結構與色散關係上皆具有良好的保持性，尤其在針對經長時間馬克斯威爾方程的數值模擬後，其效果尤為顯著。

本文進而將此數值方法針對人體頭部進行預測及數值分析其暴露在手機輻射 (RF) 下之特定比吸收率 (Specific Absorbtion Rate) 的電磁場與 SAR 場的在頭部各器官組織的分布情形。

人體在使用手機進行通話時，通常將手機聽筒貼置在左耳或右耳上，使得頭部將與手機直接貼觸，直接接受由手機天線發射出的低強度射頻電磁場 (RF-EMF) 曝曬。然而，電磁曝曬的強度，將與手機種類以及手機輻射功率和作用頻段相關聯。本文選用複雜幾何之 Apple iPhone4-like 模型，並與複雜幾何頭部組織進行電磁曝曬分析模擬，使用顯式非交錯 (或稱並列) 網格方法進行模擬計算。此方法相當適合使用多圖形處理單元 (GPUs) 平行計算，透過增加更多圖形處理單元減少計算時間，以換取計算空間之網格密度。

由於馬克斯威爾方程組屬於完全可積之方程，因此，我們採用具辛結構之 Runge-Kutta 方法來逼近時間導數項，並且保持馬克斯威爾方程組能量守恆的性質；同時透過最小化數值色散關係式與色散關係式之間的差，以減少數值色散誤差。結果顯示，所模擬行動電話的數值

結果與實驗測量值相當接近，顯示本文所使用之數值方法，可以準確的預測出低頻射頻場對人腦的影響。

關鍵字：馬克斯威爾方程；時域有限差分法；非交錯網格；人體特定比吸收率 (SAR)；實解與數值相速度；手機射頻電磁場分析；數值色散關係式





Abstract

An explicit finite-difference scheme for solving the three-dimensional Maxwell's equations in non-staggered grids is presented in time domain. Our aim is to solve the Faraday's law and Ampère's law in time domain under the constraint of Gauss' law.

The numerical method presented in this paper can maintain a fairly good theoretical convergence slope in time and in space. It can effectively reduce the error between the actual solution phase velocity and the numerical phase velocity by dispersion relation analysis. With the concept of phase velocity preserving, this numerical method can significantly reduce the numerical dispersion error and anisotropy error. This study confirms that the proposed numerical method can retain on symplectic structure and dispersion relationship.

Exposure to mobile (or cell) phone radiation will be numerically investigated in human head by solving the Maxwell's equation. Our aim is to get the distribution of the electrical field in the calculation of Specific Absorption Rate (SAR). Cell phone handset is normally placed over left/right ear. Exposure to low-intensity Radio Frequency - Electro/Magnetic Fields (RF-EMF) from cell phone is therefore a well localized issue. Moreover, the accompanied electrical field takes its highest magnitude in brain regions closest to cell phone antenna. The degree of exposure depends on the type of cell phone being used. As a result, Apple iPhone4 and a phantom head are chosen in this three-dimensional simulation of Maxwell's equations. For performing a computationally effective simulation of Maxwell's equations, calculation of Maxwell's solution will be performed in non-staggered (or collocated) grids using the explicit finite difference scheme. As the result of the employed

explicit discretization scheme in non-staggered grids, this simulation can be suitably executed in parallel on Graphic Process Units (GPUs), thereby reducing a dramatic amount of computing time. Maxwell's equations belong to a class of completely integrable equations. Symplectic Runge-Kutta temporal scheme is therefore adopted to approximate time derivative terms so as to be able to preserve the embedded Hamiltonians and invariants embedded in Maxwell's equations. In addition, the introduced numerical dispersion error is reduced by minimizing the difference between of numerical and exact dispersion relation equations. As a result, the emitted low-frequency radio frequency fields can be accurately predicted.

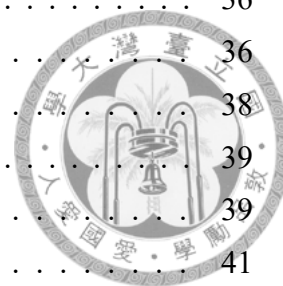
Keywords : Maxwell's equations; non-staggered grids; Finite difference time domain methods; Non-staggered grid; Specific absorption rate; dispersion relation equation; Exact and numerical phase velocities; Mobile radio frequency electromagnetic field analysis; Numerical dispersion relation equations.



目錄

摘要	v
Abstract	vii
目錄	x
圖目錄	xii
表目錄	1
Chapter 1 序論	2
1.1 前言	2
1.2 文獻回顧	4
1.3 研究動機	6
1.4 研究目標	7
1.5 論文大綱	8
Chapter 2 馬克斯威爾方程組	9
2.1 法拉第/安培/高斯方程組及其推導	9
2.2 法拉第/安培方程組之數學特性	10
2.3 色散介質	12
2.4 卷積完美匹配吸收層	13
Chapter 3 數值方法	19
3.1 非交錯網格系統下之 FDTD 離散方法	19
3.2 具辛結構之 PRK 時間離散方法	21
3.3 空間離散方程之推導	23
Chapter 4 具色散關係式保持特性之離散方法及其分析	28
4.1 三維空間離散方程之分析	28
4.1.1 積分域之影響	30
4.1.2 C_r 數之影響	31
4.1.3 角度變化下之係數分佈	31
4.2 數值分析之結果與討論	32

Chapter 5 數值方法之驗證	36
5.1 實解驗證	36
5.2 驗證結果與討論	38
Chapter 6 人體電磁比吸收率之分析	39
6.1 實際物理問題之描述	39
6.2 三維複雜幾何的散射體建模	41
6.3 波源的設置	44
6.3.1 硬波源 (hard-sourced)	44
6.3.2 軟波源 (soft-sourced)	44
6.4 波源的種類	45
6.4.1 時諧場源 (harmonic-sourced)	45
6.4.2 脈衝源 (implused-sourced)	45
6.5 模擬計算流程圖	47
6.6 Apple iPhone4-like phone	49
6.7 316L 不鏽鋼金屬邊框天線	50
6.8 電源項之選取與其參考電路	52
6.9 模擬頭部模型	53
6.10 大腦	55
6.11 特定比吸收率 (SAR)	55
Chapter 7 模擬實際問題之結果與分析	56
7.1 316L 邊框-訊號天線部之輻射情形分析	56
7.2 電磁輻射效應於頭部組織內之模擬結果	58
7.3 人體頭部骨骼的電磁輻射防護性	67
7.4 大腦/腦幹與小腦的電場強度分布之模擬結果	75
Chapter 8 結論	77
8.1 本文之貢獻	77
8.2 未來工作與展望	79

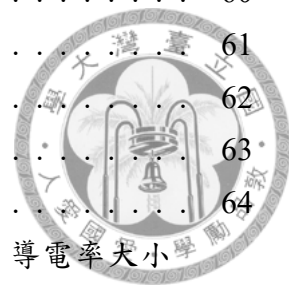




圖目錄

Fig 2.1	CPML 吸收邊界之示意圖。	18
Fig 2.2	求解電磁波傳遞問題的方程及計算空間之示意圖。	18
Fig 3.1	交錯式之 Yee 網格系統。	26
Fig 3.2	本文所採用之非交錯式網格系統。	26
Fig 3.3	非交錯網格內部節點之示意圖及編號。	26
Fig 3.4	座標系示意圖。	27
Fig 4.1	平面波在三維情況下傳遞時，定義出天頂角 (Zenith angle) θ ，方位角 (Azimuth angle) ϕ 。	34
Fig 4.2	固定 Cr 為 0.2 時，在不同積分範圍下之色散關係之實解與數值解的比較。	34
Fig 4.3	固定積分範圍 $\frac{-\pi}{2} \sim \frac{\pi}{2}$ 時，在不同 Cr 值情況下之色散關係之實解與數值解的比較。	35
Fig 6.1	吾人所討論之實際問題描述。	40
Fig 6.2	計算空間中節點 P 與三角面三點 ABC 之關係圖。	41
Fig 6.3	真實手機的各個部件。	42
Fig 6.4	計算空間中，手機各個部件的建模。	43
Fig 6.5	高斯脈衝函數之時域波型。	46
Fig 6.6	程式計算之流程圖。	48
Fig 6.7	iPhone4 316L 不鏽鋼邊框之模型。	51
Fig 6.8	iPhone4 UMTS/GSM 頻段之參考電路圖。	52
Fig 6.9	人體頭部之結構圖。	54
Fig 7.1	Apple iPhone4-like 的 316L 不鏽鋼金屬外框天線輻射部的結構，于 $T=100\Delta t$ 到 $T=500\Delta t$ 在五個不同時間點的電場傳播情形。	57
Fig 7.2	頭部組織內手機輻射之電場強度分布之模擬結果。	59

Fig 7.3	大腦及腦幹組織之電場強度分布情形。	60
Fig 7.4	小腦組織之電場強度分布情形。	61
Fig 7.5	顱骨之電場強度分布情形。	62
Fig 7.6	肌肉組織之電場強度分布情形。	63
Fig 7.7	皮膚組織之電場強度分布情形。	64
Fig 7.8	由左耳到右耳，所考慮之人體組織層的截面尺寸、導電率大小 以及電場強度分布。	65
Fig 7.9	人體組織最大 SAR 發生處在總模擬時間為 $5000\Delta t$ 的電場大小 值 $ E $ 。	66
Fig 7.10	移去顱骨後，頭部組織內手機輻射之電場強度分布之模擬結 果。	68
Fig 7.11	移去顱骨後，大腦及腦幹組織之電場強度分布情形。	69
Fig 7.12	移去顱骨後，小腦組織之電場強度分布情形。	70
Fig 7.13	移去顱骨後，肌肉組織之電場強度分布情形。	71
Fig 7.14	移去顱骨後，皮膚組織之電場強度分布情形。	72
Fig 7.15	移去顱骨後，由左耳到右耳，所考慮之人體組織層的截面尺 寸、導電率大小以及電場強度分布。	73
Fig 7.16	大腦內，SAR 最大值發生位置，在 $5000\Delta t$ 的時間範圍內，將 原本的模擬結果和移除顱骨後的模擬結果進行比較。	74
Fig 7.17	小腦內，SAR 最大值發生位置，在 $5000\Delta t$ 的時間範圍內，將 原本的模擬結果和移除顱骨後的模擬結果進行比較。	74
Fig 7.18	大腦及腦幹組織於各單位格點於計算時間為 $5000\Delta t$ ，比較有無 顱骨時的電場強度 $ E $ 之分布結果。	75
Fig 7.19	小腦組織於各單位格點於計算時間為 $5000\Delta t$ ，比較有無顱骨時 的電場強度 $ E $ 之分布結果。	76
Fig 8.1	在 log 尺度下，頭部組織 SAR 分布之模擬結果。	78





表目錄

Table 4.1	經長時間 (即 T 為 30(s)) 計算後, 在 $Cr = 0.2$ 及 $Cr = 0.05$ 情況下計算誤差以及所需 CPU TIME (s) 之比較。	33
Table 4.2	取天頂角 (Zenith angle) θ 為 0° 和 90° 、 30° 和 60° 以及 45° , 配合方位角 (Azimuth angle) ϕ 為 0° 和 90° 、 6° 和 84° 、 9° 和 81° 、 12° 和 78° 、 22.5° 以及 67.5° 、 30° 和 60° 、 36° 和 54° 、 6° 和 84° 以及 45° 所求係數 $a_1 \sim a_3$ 的分布情況。當天頂角 (Zenith angle) θ 為 90° 時, 可得到二維情況下的係數; 當天頂角 (Zenith angle) θ 為 90° 和方位角 (Azimuth angle) ϕ 為 0° 或 90° 時, 可得到一維情況下的係數。 . .	33
Table 4.3	在三維情況下, 本文所提出的 FDTD 數值方法與 Yee 方法的穩定性範圍比較。	33
Table 5.1	比較本文所使用的 PRK-DRP FDTD 與 ADI-FDTD [1] 在 $h = 0.01$ 情況下計算電場 E 與磁場 H 的最大誤差和時間收斂斜率。 . . .	37
Table 5.2	本文所使用的 PRK-DRP FDTD 當 $t = 1$, 並選取 CFL number = 0.2 時, 計算電場 E 與磁場 H 的最大誤差和空間收斂斜率。	37
Table 6.1	Apple iPhone4-like phone 所參考的材料性質.	49
Table 6.2	316L 不鏽鋼的電磁材料特性.[2, 3].	50
Table 6.3	本研究所使用的人體器官材料特性。	53
Table 7.1	Apple iPhone4 (model A1332) 產品的真實量測值 [4]。	57
Table 7.2	頭部各器官組織其電場強度、能量比、該器官組織內部最大電場強度以及該器官組織的於頭部之體積比。	58
Table 7.3	在 $5000\Delta t$ 的計算時間內, 不同器官組織的 SAR_{peak} 之模擬結果。	65
Table 7.4	不同器官組織的 SAR_{peak} 、 SAR_{1g} 和 SAR_{10g} 模擬結果。 . . .	65
Table 7.5	移去顱骨後, 頭部各器官組織其電場強度、能量比、該器官組織內部最大電場強度以及該器官組織的於頭部之體積比。	67



符號說明

符號對照表

E	電場強度 (Electric field intensity)	V/m
D	電通密度 (Electric flux density)	C/m ²
H	磁場強度 (Magnetic field intensity)	A/m
B	磁通密度 (Magnetic flux density)	W/m ²
J	電流密度 (Electric current density)	A/m ²
σ	電導率 (Conductivity)	S/m
ϵ_0	自由空間中的介電常數 (Permittivity of free space)	F/m
ϵ_r	相對介電常數 (Relative permittivity)	—
μ_0	自由空間中的磁導係數 (Permeability of free space)	H/m
μ_r	相對磁導係數 (Relative permeability)	—
k_0	自由空間中的波數 (Wavenumber in free space)	1/m
β	行進波數 (Propagation constant)	1/m
ω	角頻率 (Angular frequency)	rad/s
λ	波長 (Wavelength)	m
c	光速 (Speed of light in free space)	m/s



第一章 序論

1.1 前言

自 1873 年馬克斯威爾 (Maxwell) 建立電磁場基本方程組以來，電磁波理論與應用已經發展了一段相當長的時間，並已深入各個領域，應用範圍包括無線電波傳播、通訊、光纖、射頻電路、天線、微波、電動力學、地下電磁探測、電磁兼容、及電磁隱身應用等等。

實際上，電磁波在真實空間中的傳播過程，是具相當複雜之物理傳播特性，例如複雜結構的天線輻射、各種目標物的散射，以及波導和微帶天線中的傳播、城市複雜的地形、海面、亦對電磁波傳遞深具影響。

深入探討電磁波的物理現象，以及發展出各項針對電磁波的應用，對人類的科技具有十分深遠之影響性。因為環境或散射物體的幾何複雜性，因此通常必須經由數值模擬，才能得到於實際測量中所無法得知的電磁波傳遞現象，因此，結合科學計算、計算機硬體技術、和電磁理論等相關的知識的計算電磁學 (Computational Electromagnetics)，儼然是電磁領域中一個相當重要的研究領域。

在科學計算領域 (Scientific Computing)，數值分析是近幾年受益於計算機技術的快速發展，已演變成一個相當有效的科學研究手段。

對於計算電磁領域中的應用，係以電磁理論作為基礎，並透過高性能計算技術為手段，利用所開發之數值方法，以獲得準確度與計算效率和穩定性，最終在進行實際測量與量產前，可獲得符合成本與精確度的模擬結果。

計算電磁學可以根據計算域的不同，可分為頻域法與時域法兩大類。頻域法主要有頻域有限差分 (Frequency Dependent Finite Difference, FDFD) 方法、矩量法 (Moment Method, MoM) 和有限元素法 (Finite Element Method, FEM) 等；而時域法主要有時域有限差分 (Finite Difference Time Domain, FDTD) 方法、時域有限體積 (Finite Volume Time Domain, FVTD) 法、和時域積分方程 (Time Domain Integral Equation, TDIE) 法。其中，時域有限差分法 (FDTD) 是一種對馬克斯威爾方程組進行直接求解的數值方法，它既可以分析時諧場，又能計算寬頻帶的瞬態場，同時也能處理複雜外型目標的電磁散射或者非均勻、各向異性色散介質的電磁問題，對電磁散射以及近場總場的分析具有其優勢，目前是處理各類介質電磁散射與近

場問題的主要方法。

自從 1973 年，全世界第一支手機-Dyda TAC 8000X [黑金剛] 的誕生，經歷無線蜂巢行動通訊的發明，時至今日在全民手機時代，實際上，也代表電磁波早已遍布在我們生活周遭環境中。因此，開始有人關心，手機所產生的高功率輻射電磁能，對健康上的影響，已是需要進行研究的主題。然而，一些生物實驗已經指出，手機輻射或許是導致實驗樣本致病的一個原因，因此，了解手機設計、材質選擇、手機使用方式與距離，便成為一個值得探討的課題。

1.2 文獻回顧

1966年 Yee[5] 首次提出了時域有限差分 (Finite Difference Time Domain, FDTD) 方法，並將其應用於電磁波時域之計算，爾後這一研究取得非常迅速的發展與廣泛的應用。時域有限差分方法係直接由馬克斯威爾旋度方程出發，通過對電場 E 和磁場 H 的各分量在空間和時間上採取交替的離散方式，即每一個 E (或 H) 場分量周圍有四個 H (或 E) 場分量的環繞，此一電場與磁場交錯的方式被稱為 (Yee's cell)。使用這種離散方式，將含時間變量的馬克斯威爾旋度方程轉化為一組時域之離散差分方程，然後沿時間軸逐步推進地求解空間電磁場，此一方法清楚地顯示了電磁波傳遞的過程，亦便於分析與設計。在 1975 年 Taflove 等用 FDTD 計算非均勻介質在正弦波入射時的穩態時諧場電磁散射，並提出了數值穩定的分析方法。Taflove 于 1988 年詳細地探討了 Yee 算則的數值色散誤差。

當時由 Yee 所提出的 Yee's cell 僅用來模擬電磁波在空間上的傳遞；為了在有限計算區域內模擬無限空間中的電磁問題，必須在計算區域的截斷邊界上設置吸收邊界條件，自從 FDTD 方法誕出以來，對於吸收邊界的研究一直是個熱門且重要的研究課題。吸收邊界方法最初于 1969 年由 Taylor 所提出與插值方法有關的吸收邊界條件，後來並廣泛地被採用的 Mur 吸收邊界 (Absorbing Boundary Condition, ABC) [6]，及至於上世紀 90 年代所發展的完美匹配層 (Perfectly Matched Layer, PML) [7, 8]，其吸收的效果越來越好。

近年來，人們以 FDTD 方法應用於色散介質，並已進行了大量的研究。目前，FDTD 適用於截斷色散介質的最常用及有效的吸收邊界條件稱為卷積完全匹配層 (Convolutional Perfect Match Layer, CPML) [9]。

於射頻方面的應用，如完美電導體 (Perfect Electric Conductor) 此類的不連續性材質間，材質所造成之不連續性 [10][11][12][13]，在時域有限差分模擬上，已經獲得突破。此後，由 David M. Sheen 和 Sami M. Ali 等人 [14] 利用 Yee 所開發在交錯網格系統下的時域有限差分方法，針對微帶天線技術進行模擬，透過在 FDTD 網格計算域中設置一個極薄的介質基板上，底面以金屬薄層接地，其上則刻出一特定形狀之金屬貼片，並利用簡化微帶線，對金屬貼片進行饋電，其模擬結果和實驗值曲線相當的接近。

同時，在傳輸線方面的應用 [15]，其線內與外部環境的不連續性也在計算電磁學的領域獲得突破，並且在模擬時，可作為天線的瞬態源項。

上述的射頻應用，可知電磁輻射已被大量的應用，利用時域有限差分法進行模擬，可以節省研究人力與實驗經費。

隨著這些電磁輻射的科技開發，日常生活中開始充滿各種來源的低頻電磁輻射，電磁輻射造成人體潛在的危險，例如手機和基地台天線所發出的電磁場，已

被大量的關注。目前，比吸收率 (Specific Absorption Rate, SAR) 是國際上公認的有關電磁輻射計量標準。日常環境中，人體輻射曝曬所受到頻率範圍 1 MHz 至 1 GHz 之間，並使用了 30 MHz 時的參考輻射功率 0.4 W，針對身體各組織進行了一系列模擬觀察各部位的 SAR 分布的模擬研究 [16]。然而，由於手機在使用上，會直接靠近人體頭部進行通話，針對不同手機通信之工作頻段 (通常介於 900 MHz 至 1800 MHz) 與不同手機之發射功率，經常通過實驗 [17] 與模擬 [18] 兩種方式，以觀察或預測出手機對於人體頭部之電磁比吸收率的分布。因此，SAR 作為輻射的安全標準，在學術與業界亦被大量的用來作為評估與設計手機的安全規範。

1.3 研究動機

就物理意義而言，電磁波傳遞行為之時間與空間有一定的相關性，即角頻率 (Angular frequency) 與波數 (Wave number) 的關係；傳統的 FDTD 方法一般採用蛙跳格式 (即空間與時間離散階為二階準確之中央差分格式)，嚴格看來，其所使用的數值方法與物理意義上顯然並無實質的連結，為了彌補這些方法在物理意義上的不足，本文嘗試以電磁波之色散關係為方法開發的核心，將在時間與空間離散上取得直接的連結，並利用具守恆性質的時間離散，在空間上搭配具最佳色散關係保持之非交錯網格的空間離散，以期電磁波傳遞行為在時間與空間有著更正確的緊密結合，旨在確保每一個模擬的時間過程中，皆能得到具物理意義的最佳色散關係解。

本文所使用之數值方法，具備時間及空間相關聯之物理特性。並且利用模擬預測電磁輻射的實際問題，得以符合物理意義地去佐證本文所使用之方法的實用性，透過非交錯網格系統進行程式的實作，這樣的結構有助於高速平行計算的發展，進而使得原本交錯網格系統下，因平行計算程式的不易編寫及較複雜物理量儲存特性所造成之昂貴計算量，透過本文在非交錯網格架構下所開發之數值方法，有助於未來在計算電磁領域上能有更多元的發展性。

1.4 研究目標

目前時域有限差分法大多沿用 Yee [5] 所提出之交錯式網格 (Yee's cell) 來求解馬克斯威爾方程組，並能適當地模擬電磁波的行為。但大部的時域有限差分方法其時間離散與空間離散卻是彼此獨立，即僅僅針對數值求解安培定律即法拉第定律。然而，在電磁波傳遞的物理行為上，時間與空間必須是具相依的關係；換言之，與波數與角頻率之間的關係 (亦稱為色散關係，Dispersion relation) 在模擬的過程中是需要被考慮的。

我們以理想的馬克斯威爾方程為核心的概念，使用具辛結構 (symplecticity) 的時間離散方法，以確保滿足方程中所當具有的守恆性質，並以能量守恆的觀點檢驗時間格式是否滿足守恆性質。往外延伸至色散介質中傳播的電磁波方程，進而處理色散介質所造成的極化電流項 (Polarization current density)。對於波傳遞之時間與空間的相依關係，我們以色散關係保持 (Dispersion relation preserving) 式作為核心，並且引入平面波的概念於方程式中，如此，可取得時間與空間合乎物理的正確聯結，發展出一具最佳色散關係保持性之馬克斯威爾方程的離散方法。

為證明此一數值方法的實用性，本論文將進一步討論手機輻射對人體頭部的吸收情形，並且觀察人體組織器官與手機間的距離、人體組織以及手機的材料性質，是否將影響組織器官的電磁輻射吸收，考慮一般手機通話時的使用方式，並透過結果與實際測量值進行對照，通過本論文探討人體電磁特定比吸收率的模擬結果，並加以思考手機輻射是否會對人體造成不良的影響。

1.5 論文大綱

本文本諸理想的馬克斯威爾方程與其色散關係方程式的核心概念，發展出一具最佳數值色散關係式之非交錯格式的空間離散方法。首先，於第一章中介紹計算電磁波的相關背景與發展之文獻回顧，以及本研究的動機與目標。本文的第二章介紹三維的馬克斯威爾方程組，以及在時域中，開發時間與空間具物理相關特徵的顯式有限差分離散格式。第三章中，為了有效的執行有限差分法，此章節簡要的描述了非交錯網格中所使用的數值模型。然而，所提出的 FDTD (時域有限差分法) 數值模型滿足了具辛結構以及數值色散關係方程的性質。此外，也針對被卷積完全匹配層 (CPML) [9] 所包圍的三維計算空間中進行了簡要的描述。第四章中，詳細敘述了吾人所開發之數值方法，將時間與空間之離散的方法進行推導。在第五章，透過實解驗證，並且與 ADI-FDTD [1] 交替方向隱式的時域有限差分方法進行時間及空間上收斂斜率之比較，同時驗證了本文所開發之方法準確性，以及程式的可信度。第六章中，詳細介紹了正在研究的問題，其中包括貼置在模擬人頭部耳上的 Apple iPhone4-like phone 的模型建模，以及建模方法。並且回顧了大腦組織的主要組成。在第七章中，詳細討論了透過求解馬克斯威爾方程組模擬手機對人腦之輻射問題的模擬結果。最後，我們將在第八章中給出結論以及未來的展望。



第二章 馬克斯威爾方程組

2.1 法拉第/安培/高斯方程組及其推導

馬克斯威爾方程組係由法拉第定律、安培定律及高斯定律所組成。在時域中，分別可以表示為如下的安培定律及法拉第定律表示式，

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{J}_m, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}, \quad (2.2)$$

以及高斯定律所組成的限制方程式

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho. \quad (2.4)$$

上述方程組中， \vec{H} 為磁場強度 (Magnetic field intensity)、 \vec{E} 為電場強度 (Electrical field intensity)、 \vec{B} 、磁位移 (Magnetic displacement) 和 \vec{D} 電位移 (Electrical displacement)。式 (2.2) 與 (2.1) 中之 \vec{J} 和 \vec{J}_m 分別代表電流密度 (Electric current density) 和磁流密度 (Equivalent magnetic current density)。于 (2.4) 之 ρ 代表電荷密度 (Electrical charge density)。在各向同性 (Isotropic) 的線性介質中需滿足如下的本構關係式

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \vec{B} = \mu \vec{H}, \vec{J} = \sigma \vec{E}, \vec{J}_m = \sigma_m \vec{H}. \quad (2.5)$$

上式中， ϵ 和 μ 分別表示介電係數 (Electric permittivity) 和磁導係數 (Magnetic permeability)， σ 和 σ_m 分別為電導率 (Electric conductivity) 和磁導率 (Equivalent magnetic loss)，兩者分別代表介質的損耗和磁損耗。本文將所推導的馬克斯威爾方程之離散方法係居于顯式的格式，用來模擬電磁波於簡單介質 (Simple medium) 中的傳播行為。主要探討之材料性質係數中的導磁係數 (Magnetic permeability, μ) 以及介電係數 (Electric conductivity, ϵ) 皆視為常數，此二材料性質係數主要是在

描述材料之介電性質以及導磁特性且皆為正其中， $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ 而 $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ ；兩材料性質係數決定了波的傳播速度 c ($c \equiv 1/\sqrt{\epsilon\mu} (\approx 3.0 \times 10^8 m/s)$)，然而，針對色散介質而言，介質的介電常數，以及波在色散介質內之傳播速度，將與頻率相關，我們將透過頻域下之馬克斯威爾方程組進行離散推導，並透過使用吾人針對色散介質所開發的高階顯式輔助差分方法 ADE-FDTD [19] 進行額外處理。



2.2 法拉第/安培方程組之數學特性

依上節所述之假設情況下，在無源且均勻各向同性簡單介質下之馬克斯威爾方程組可以改寫為

$$\frac{1}{\mu}(\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{\epsilon}(\nabla \times \vec{H}) = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0. \quad (2.9)$$

式 (2.8-2.9) 以及式 (2.5) 並非獨立於馬克斯威爾方程組 [20] 之外；即式 (2.8-2.9) 可視為馬克斯威爾方程組之限制條件。將式 (2.6) 及 (2.7) 兩端分別取散度算子 (divergence operator)，可得知出高斯定律係隱含於法拉第定律與安培定律之中。

在非交錯網格系統中，吾人可直接地求解雙曲線之系統方程 (2.6-2.7) 得到瞬時之電場與磁場。對於式 (2.8-2.9) 之無散度條件 (divergence-free constraint conditions) 之限制，吾人將於程式驗證中進行分析。

馬克斯威爾方程組可以利用漢彌爾頓動力系統 (Hamiltonian dynamical system) 表示之，即

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \vec{H} \\ \vec{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{0} & -\underline{I} \\ \underline{I} & \underline{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta H / \delta \vec{H} \\ \delta H / \delta \vec{E} \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

其中，漢彌爾頓方程 (Hamiltonian function, H) 可以下式表示之 [21]

$$H(\vec{H}, \vec{E}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{H} + \frac{1}{\mu} \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{E} \right) d\Omega. \quad (2.11)$$

根據 Kole 等人之研究 [22]，式 (2.6-2.7) 可寫成 $\frac{\partial}{\partial t} \vec{\psi}(t) = \underline{G} \vec{\psi}(t)$ ，其中 $\vec{\psi}(t) \equiv (\vec{m}(t), \vec{n}(t))^T = (\mu^{1/2} \vec{H}(t), \epsilon^{1/2} \vec{E}(t))^T$ 。上述之 \underline{G} 矩陣，它可以如下之反

對稱矩陣 (skew-symmetric matrix) 表式之 [22]

$$\underline{\underline{G}} = \begin{pmatrix} 0 & -\mu^{-1/2} \nabla \times (\epsilon^{-1/2}) \\ \epsilon^{-1/2} \nabla \times (\mu^{-1/2}) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

馬克斯威爾方程組可由 $\partial \vec{\psi}(t) / \partial t = \underline{\underline{G}} \vec{\psi}(t)$ 表示之，如此吾人可得該方程之通解 $\vec{\psi}(t) = \exp(t \underline{\underline{G}}) \vec{\psi}(t=0)$ ，其中 $\exp(t \underline{\underline{G}})$ 顯示了馬克斯威爾方程組之解係隨時間演進呈指數的變化。將向量 $\vec{\psi}$ 特徵化為 $\int_{\Omega} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{E} + \mu \vec{H} \cdot \vec{H} d\Omega$ ，它與電磁場之能量密度 (energy density, $w(t)$) 存在直接的理論關聯，即

$$w(t) = \int_{\Omega} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{E} + \mu \vec{H} \cdot \vec{H} d\Omega. \quad (2.13)$$

式 (2.13) 之能量密度不會隨時間而改變。對於式 (2.11) 及 (2.13) 隨時間皆不變之性質，吾人可將其作為程式驗證之用。

2.3 色散介質



常見的色散介質模型包括德拜模型 (Debye model)、洛倫茲模型 (Lorentz model) 和德魯模型 (Drude)，它們所對應的單極介電係數表達式如下：

(1) Debye 介質

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + I\omega\tau} + \frac{\sigma}{I\omega\epsilon_0} \equiv \epsilon_\infty + \frac{\Delta\epsilon}{1 + I\omega\tau} + \frac{\sigma}{I\omega\epsilon_0} \quad (2.14)$$

(2) Lorentz 介質

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon_\infty + \frac{\Delta\omega_p^2}{\epsilon_p^2 + 2I\omega\delta_p - \omega^2} + \frac{\sigma}{I\omega\epsilon_0} \quad (2.15)$$

(3) Drude 介質

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon_\infty + \frac{\omega_p^2}{I\omega\gamma_p - \omega^2} + \frac{\sigma}{I\omega\epsilon_0} \quad (2.16)$$

其中， $\Delta\epsilon = \epsilon_s - \epsilon_\infty$ 。 ϵ_s 為靜態或零頻時的相對介電係數、 ϵ_∞ 為無窮大頻率時的相對介電係數、 δ_p 為阻尼係數、 ω_p 為媒質的諧振頻率 (Resonant frequency)、 τ 為鬆弛時間 (Relaxation time)、且 $\gamma_p = 1/\tau$ 為鬆弛時間的倒數。

考慮式 (2.14-2.16)，式 (2.2) 安培定律旋度方程均可表示為

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon_0\epsilon_\infty \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} + \vec{J}_d, \quad (2.17)$$

其中 \vec{J}_d 項為介質的色散極化所引起的極化電流項 (Polarization current density)，對於不同類型的色散介質，它們分別滿足如下的不同輔助偏微分方程

$$\vec{J}_d + \tau \frac{\partial \vec{J}_d}{\partial t} = \epsilon_0 \Delta\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (Debye) \quad (2.18)$$

$$\omega_p^2 \vec{J}_d + 2\delta_p \frac{\partial \vec{J}_d}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{J}_d}{\partial t^2} = \epsilon_0 \Delta\epsilon \omega_p^2 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (Lorentz) \quad (2.19)$$

$$\gamma_p \frac{\partial \vec{J}_d}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{J}_d}{\partial t^2} = \epsilon_0 \omega_p^2 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (Drude) \quad (2.20)$$

在色散介質的 FDTD 計算方面，如前章所述，有遞推卷積 (RC) 法、輔助方程 (ADE) 法、Z 變換法、分段線性遞推卷積 (PLRC) 等方法。本文在色散介質的研究將採用二階輔助方程 (ADE) 法 [19]，其中，在實際題目應用上，將引用輔助方程法，在模擬計算時，針對 Drude model 色散介質進行特別的處理。

2.4 卷積完美匹配吸收層



在自然界中，大部分電磁波問題需要在無限域下模擬方可捕捉其真實的物理本質，礙於電腦的記憶體之限制，理論上吾人不可能於無限大空間內進行計算，及儲存大量的數據。當初 Yee 所提出的 FDTD 方法時，計算區域的人為截斷所導致的數值回波問題即已顯現，並導致了 FDTD 在最初的十多年發展較為緩慢，直到 1981 年荷蘭科學家 G.Mur 提出了 Mur 吸收邊界條件 [6], 1994 年 Berenger 提出了高吸收效能的完美匹配層 (Perfectly Matched Layer, PML) 邊界條件 [7]，才使得 FDTD 方法煥發出新的生命力。目前，已發展出數種 PML 方法，即 Gedney 所提出的軸向完美匹配層 (uniaxial PML, UPML) [23]，Abarbanel 所提出的各向異性完美匹配層 (anisotropic PML, APML) [24] 等方法。本文所使用的吸收邊界稱為卷積完美匹配層 (convolution PML, CPML) [9]，其優點在於它對於消逝波 (evanescent wave) 具有很好的吸收能力，此外它尚能大幅度減少記憶體的占用。除了吸收效果較好之外，亦具普適性，CPML 吸收邊界完全獨立於 FDTD 計算域內的介質，可以不做任何修改地應用到各向同性、各向異性、吸收、色散或是非線性介質的計算中。因此，CPML 相對於 UPML 吸收邊界而言，更適用於非自由空間中目標散射特性的研究。在此，我們給出了其張量係數 (tensor coefficient) s_w 的形式 [25]

$$s_w = \kappa_w + \frac{\sigma_w}{a_w + j\omega\epsilon_0}; \quad w = x, y, z \quad (2.21)$$

式 (2.21) 所描述的是電參數沿某方向的一個空間函數。首先，引入擴展座標 (stretched-coordinate) 轉換關係式

$$\tilde{w} \rightarrow \int_0^w s_w(w') dw'; \quad w = x, y, z, \quad (2.22)$$

透過傅立葉轉換關係，取 \mathfrak{S}^{-1} 為傅立葉逆變換算子，定義

$$\begin{aligned} \bar{s}_w &= \mathfrak{S}^{-1} \left(\frac{1}{\kappa_w + \sigma_w} \right) \\ &= \frac{\delta(t)}{\kappa_w} - \frac{\sigma_w}{\epsilon_0 \kappa_w^2} \exp \left[- \left(\frac{\sigma_w}{\epsilon_0 \kappa_w} + \frac{a_w}{\epsilon_w} \right) t \right] u(t) \equiv \frac{\delta t}{\kappa_w} + \zeta_w(t) \end{aligned} \quad (2.23)$$

(其中 $u(t)$ 和 $\delta(t)$ 分別是單位步階函數 (Unit step function) 和脈衝函數 (Delta function))，可得馬克斯威爾方程組的時域形式：

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_x}{\partial t} &= \left(\frac{1}{k_x} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{1}{k_z} \frac{\partial H_y}{\partial z} + \zeta_y * \frac{\partial H_z}{\partial y} - \zeta_z * \frac{\partial H_y}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial D_y}{\partial t} &= \left(\frac{1}{k_z} \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{1}{k_x} \frac{\partial H_z}{\partial x} + \zeta_z * \frac{\partial H_x}{\partial z} - \zeta_x * \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial D_z}{\partial t} &= \left(\frac{1}{k_x} \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{1}{k_y} \frac{\partial H_x}{\partial y} + \zeta_x * \frac{\partial H_y}{\partial x} - \zeta_y * \frac{\partial H_x}{\partial y} \right),\end{aligned}\quad (2.24)$$



$$\begin{aligned}\frac{\partial B_x}{\partial t} &= - \left(\frac{1}{k_x} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{1}{k_z} \frac{\partial E_y}{\partial z} + \zeta_y * \frac{\partial E_z}{\partial y} - \zeta_z * \frac{\partial E_y}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} &= - \left(\frac{1}{k_z} \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{1}{k_x} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \zeta_z * \frac{\partial E_x}{\partial z} - \zeta_x * \frac{\partial E_z}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} &= - \left(\frac{1}{k_x} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{1}{k_y} \frac{\partial E_x}{\partial y} + \zeta_x * \frac{\partial E_y}{\partial x} - \zeta_y * \frac{\partial E_x}{\partial y} \right).\end{aligned}\quad (2.25)$$

在 FDTD 的模擬中，CPML 吸收邊界內電磁場的迭代計算可透過 (2.24) 和 (2.25) 的離散式來實現。計算主要的困難是離散卷積 $\zeta_w * (\partial_v / \partial w)$ 的執行，因為直接進行卷積項的計算，將會消耗大量的記憶體和計算時間。透過 Luebbers 和 Hunsberger [26] 所採用的遞推卷積 (RC) 技術，可以有效的解決此一問題。

定義式 (2.23) 中脈衝 $\zeta(t)$ 的離散響應 $Z_w(m)$ 為

$$Z_w(m) = \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \zeta_w(\tau) d\tau \approx -\frac{\sigma_w}{\epsilon_0 \kappa_w^2} \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \exp \left[- \left(\frac{\sigma_w}{\epsilon_0 \kappa_w} + \frac{a_w}{\epsilon_0} \right) \tau \right] d\tau \quad (2.26)$$

$$= c_w \exp \left[- \left(\frac{\sigma_w}{\epsilon_0 \kappa_w} + \frac{a_w}{\epsilon_0} \right) m\Delta t \right] \quad (2.27)$$

其中

$$c_w = \frac{\sigma_w}{\sigma_w \kappa_w + \kappa_w^2 a_w} \left[\exp \left(- \left(\frac{\sigma_w}{\epsilon_0 \kappa_w} + \frac{a_w}{\epsilon_0} \right) \Delta t \right) - 1 \right] \quad (2.28)$$

式 (2.24) 中 ζ_w 和 $\partial H_v / \partial w$ 卷積離散形式可以近似成

$$\psi_{w,v}(n) = \zeta_w(t) * \frac{\partial}{\partial w} H_v(t) |_{t=n\Delta t} \approx \sum_{m=0}^{n-1} Z_w(m) \frac{\partial}{\partial w} H_v(n-m) \quad (2.29)$$

由式 (2.29) 可看出，計算 $n\Delta t$ 時刻的離散卷積 ψ 需經 n 次的乘法和加法，這在實

際的計算中將嚴重地影響計算速度。Luebbers 和 Hunsberger 將式 (2.29) 寫為以下的遞推形式:

$$\psi_{w,v}(n) = b_w \psi_{w,v}(n-1) + c_w \frac{\partial}{\partial w} H_v(n) \quad (2.30)$$

其中， c_w 如式 (2.28)， b_w 為

$$b_w = \exp \left[- \left(\frac{\sigma_w}{\epsilon_0 \kappa_w} + \frac{a_w}{\epsilon_0} \right) \Delta t \right]. \quad (2.31)$$

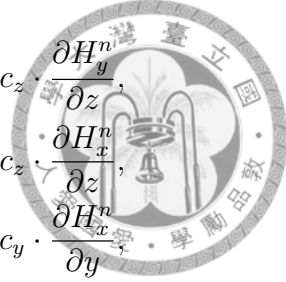
如此一來，式 (2.30) 中的 $\psi_{w,v}$ 可以透過簡單的時間循環迭代來實現應用 CPML 吸收邊界。最後，我們將 ζ_w 和 $\partial H_v / \partial w$ 的卷積離散由 $\psi_{w,v}(n)$ 取而代之，並延伸至具不同材料色散介質特性之應用，可得到如下具 CPML 吸收邊界層之馬克斯威爾方程組的時域形式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{1}{k_y} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{1}{k_z} \frac{\partial H_y}{\partial z} - J_{d,x} + \psi_{E_{x,y}} - \psi_{E_{x,z}} \right), \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{1}{k_z} \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{1}{k_x} \frac{\partial H_z}{\partial x} - J_{d,y} + \psi_{E_{y,z}} - \psi_{E_{y,x}} \right), \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{1}{k_x} \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{1}{k_y} \frac{\partial H_x}{\partial y} - J_{d,z} + \psi_{E_{z,x}} - \psi_{E_{z,y}} \right), \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \left(\frac{1}{k_y} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{1}{k_z} \frac{\partial E_y}{\partial z} + \psi_{H_{x,y}} - \psi_{H_{x,z}} \right), \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \left(\frac{1}{k_z} \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{1}{k_x} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \psi_{H_{y,z}} - \psi_{H_{y,x}} \right), \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \left(\frac{1}{k_x} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{1}{k_y} \frac{\partial E_x}{\partial y} + \psi_{H_{z,x}} - \psi_{H_{z,y}} \right). \end{aligned} \quad (2.33)$$



其中



$$\begin{aligned}
 \psi_{E_{x,y}}^n &= b_y \cdot \psi_{E_{x,y}}^{n-1} + c_y \cdot \frac{\partial H_z^n}{\partial y}, & \psi_{E_{x,z}}^n &= b_z \cdot \psi_{E_{x,z}}^{n-1} + c_z \cdot \frac{\partial H_y^n}{\partial z}, \\
 \psi_{E_{y,x}}^n &= b_x \cdot \psi_{E_{y,x}}^{n-1} + c_x \cdot \frac{\partial H_z^n}{\partial x}, & \psi_{E_{y,z}}^n &= b_z \cdot \psi_{E_{y,z}}^{n-1} + c_z \cdot \frac{\partial H_x^n}{\partial z}, \\
 \psi_{E_{z,x}}^n &= b_x \cdot \psi_{E_{z,x}}^{n-1} + c_x \cdot \frac{\partial H_y^n}{\partial x}, & \psi_{E_{z,y}}^n &= b_y \cdot \psi_{E_{z,y}}^{n-1} + c_y \cdot \frac{\partial H_x^n}{\partial y}, \\
 \psi_{H_{x,y}}^{n+\frac{1}{2}} &= b_y \cdot \psi_{H_{x,y}}^{n-\frac{1}{2}} + c_y \cdot \frac{\partial E_z^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y}, & \psi_{H_{x,z}}^{n+\frac{1}{2}} &= b_z \cdot \psi_{H_{x,z}}^{n-\frac{1}{2}} + c_z \cdot \frac{\partial E_y^{n+\frac{1}{2}}}{\partial z}, \\
 \psi_{H_{y,x}}^{n+\frac{1}{2}} &= b_x \cdot \psi_{H_{y,x}}^{n-\frac{1}{2}} + c_x \cdot \frac{\partial E_z^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x}, & \psi_{H_{y,z}}^{n+\frac{1}{2}} &= b_z \cdot \psi_{H_{y,z}}^{n-\frac{1}{2}} + c_z \cdot \frac{\partial E_x^{n+\frac{1}{2}}}{\partial z}, \\
 \psi_{H_{z,x}}^{n+\frac{1}{2}} &= b_x \cdot \psi_{H_{z,x}}^{n-\frac{1}{2}} + c_x \cdot \frac{\partial E_y^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x}, & \psi_{H_{z,y}}^{n+\frac{1}{2}} &= b_y \cdot \psi_{H_{z,y}}^{n-\frac{1}{2}} + c_y \cdot \frac{\partial E_x^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y}.
 \end{aligned}$$

(2.34)

式 (2.34) 中所述之 b_w 及 c_w ($w = x$ or y)，可表示成：

$$b_w = e\left(-\left(\frac{\sigma_w}{\epsilon_0 k_w} + \frac{a_w}{\epsilon_0}\right)\Delta t\right); c_w = \frac{\sigma_w}{\sigma_w k_w + k_w^2 a_w} \left(e\left(-\left(\frac{\sigma_w}{\epsilon_0 k_w} + \frac{a_w}{\epsilon_0}\right)\Delta t\right) - 1 \right). \quad (2.35)$$

其中

$$\begin{aligned}\sigma_w &= \sigma_{w,max} \left(\frac{d-w}{d} \right)^m, \\ a_w &= a_{w,max} \left(\frac{d-w}{d} \right)^{m_a}; 0 \leq w \leq d, \\ k_w &= 1 + (k_{w,max} - 1) \cdot \left(\frac{d-w}{d} \right)^m.\end{aligned}\tag{2.36}$$



式 (2.36) 中的 d 代表 CPML 厚度，而 σ_{max} 之大小可以下式計算之

$$\sigma_{w,max} = \frac{0.8(m+1)}{\eta_0 \Delta \sqrt{\epsilon_r \mu_r}},\tag{2.37}$$

其中 $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ 為真空中的波阻抗。

圖2.1為 CPML 之示意圖，利用圖2.2說明了以理想馬克斯威爾方程為核心概念，並延伸至具不同材料色散介質特性的應用。CPML 的概念圖如下。

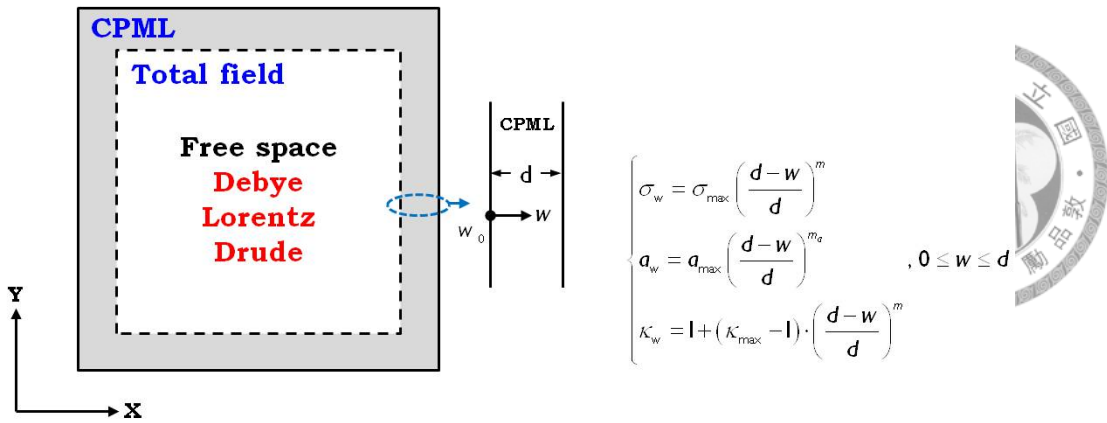


Fig 2.1: CPML 吸收邊界之示意圖。

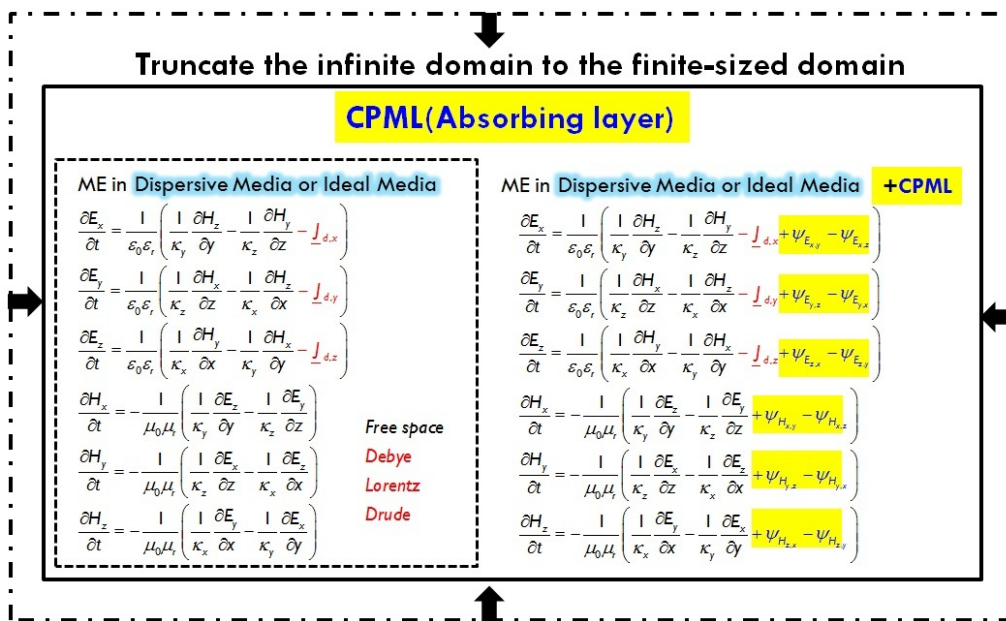


Fig 2.2: 求解電磁波傳遞問題的方程及計算空間之示意圖。



第三章 數值方法

求解電磁波方程的數值方法主要可分為時域和頻域兩大類。頻域法包括有矩量法 (Moment method, MoM)、有限元素法 (Finite element method, FEM) 等；時域法包括有時域有限差分法 (Finite difference time domain, FDTD)、時域積分方程法 (Time domain integral equation, TDIE) 等。本論文根據差分理論 (difference theory)，利用泰勒級數展開式 (Taylor series) 將微分方程轉換成差分方程。計算區域將劃分成有限個網格點，然後於網格點上對統御方程進行離散與計算。

3.1 非交錯網格系統下之 FDTD 離散方法

在卡氏座標下，于理想介質下考慮無源之馬克斯威爾方程式 (2.6-2.7)，可以將安培定律及法拉第定律之旋度方程展開成

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right)\end{aligned}\tag{3.1}$$

由式 (3.1) 可知，馬克斯威爾方程式可區分為橫向電場極化 (transverse electric polarization, TE mode)，其方程由 (E_x, E_y, H_z) 所組成

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (3.2)$$



同樣地，由 (3.1) 之方程組可得橫向磁場極化 (transverse magnetic polarization, TM mode)，其方程由 (H_x, H_y, E_z) 所組成

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (3.3)$$

於 (3.1) 之馬克斯威爾方程組可整理成 $\partial \vec{\phi} / \partial t = \vec{f}$ 之形式，其中

$$\vec{\phi} = (E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z)^T \quad (3.4)$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

式 (3.5) 代表式 (3.1) 之一階空間微分導數方程系統。

圖3.1表示 Yee's cell 的交錯式網格系統。不同於 Yee's cell 將電場與磁場錯離存放的作法 (staggered grid)；本文是將電場與磁場存放在同一點 (non-staggered grid)，圖3.2表示非交錯式網格系統。以非交錯網格系統處理空間離散時，必須特別注意是否會引起不必要之非物理性的誤差 (奇偶次項震盪所造成的問題)。以 $\partial H_x / \partial y$ 於 (i, j, k) 點離散展開為例，需將參考點 $\partial H_x / \partial y|_{(i,j,k)}$ 本身也納入考慮，以避免奇偶震盪問題 (even-odd decoupling problem)；為了提升數值穩定性，吾人

引入了緊緻格式 (compact scheme) 的方式 [??]。參閱圖3.3， $\frac{\partial H_y}{\partial x}|_{i,j,k}$ 和 $\frac{\partial H_x}{\partial y}|_{i,j,k}$ 在網格大小為 dx 、 dy 之下的離散式為：

$$\frac{\partial H_y}{\partial x}|_{i,j,k} = \frac{1}{dx} \left[a_1 (H_y|_{i+3,j,k} - H_y|_{i-3,j,k}) + a_2 (H_y|_{i+2,j,k} - H_y|_{i-2,j,k}) + a_3 (H_y|_{i+1,j,k} - H_y|_{i-1,j,k}) \right] \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y}|_{i,j,k} = \frac{1}{dy} \left[a_1 (H_x|_{i,j+3,k} - H_x|_{i,j-3,k}) + a_2 (H_x|_{i,j+2,k} - H_x|_{i,j-2,k}) + a_3 (H_x|_{i,j+1,k} - H_x|_{i,j-1,k}) \right] \quad (3.7)$$

其中 $a_1 \sim a_3$ 為待定之係數。為了使一次微分項之求解更符合物理意義，必須將電磁波傳遞行為在時間與空間上取得正確的聯結，故吾人將利用泰勒展開式，並透過第二類型之修正方程 (Modified equation of second kind) 以及色散關係保持 (Dispersion relation preserving, DRP) 的觀念，以求得具最佳色散關係保持性的離散方程式。

3.2 具辛結構之 PRK 時間離散方法

馬克斯威爾方程敘述了電磁波於空間和時間之傳播，它們必須滿足漢彌爾頓結構 (Hamiltonian structure) 的性質 [27, 28]。於 [29, 30] 等文章中，說明了若要得到具漢彌爾頓的性質，需引入具辛結構 (symplectic) 之時間格式，方能比未引入之時間格式得到較佳之理論守恆性質。本論文將使用具辛結構性質之時間離散格式。在時間離散得以保持辛結構性質的情況下，吾人同時考慮引入配合保持空間離散之色散性質。

本論文在離散的過程中所採用的核心理念是盡可能地改善或減少數值色散關係方程與實解色散關係方程之間的誤差。換言之，於波數空間下，將直接導出數值角頻率 ω_{num} 與 x 、 y 及 z 方向之波數關係，並使數值色散關係式得以盡可能地貼近實解之色散關係式。

於卡氏座標上，于理想介質中之無源馬克斯威爾方程組 (2.6-2.7)，存在如下的漢彌爾頓關係式，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} &= \frac{\partial \underline{H}}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} &= -\frac{\partial \underline{E}}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.8)$$

其中，漢彌爾頓系統 H 可寫成如下的分離格式

$$\begin{aligned} H(p, q) &= T(p) + V(q) \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{V'(q)}{dq} \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{T'(p)}{dp} \end{aligned}$$



為了保持在每一時間步的演進過程中皆具最佳之色散關係，吾人使用顯式 (explicit) 之時間格式；對於具分離結構之漢彌爾頓系統之時間演進，可以使用具辛結構的顯式時間格式 (explicit symplectic time integrator) [31]。本文的時間離散使用二階段 (two-stage) 二階準確 (second-order accurate) 之具辛結構之顯式分離 Runge-Kutta 方法 (explicit symplectic partitioned Runge-Kutta method)，即

$$\begin{aligned} Q_0 &= q^n \\ P_1 &= p^n \\ Q_1 &= Q_0 + \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial T}{\partial p}(P_1) \\ P_2 &= P_1 - \Delta t \frac{\partial V}{\partial q}(Q_1, t_{n+\frac{1}{2}}) \\ Q_2 &= Q_1 + \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial T}{\partial p}(P_2) \\ q^{n+1} &= Q_2 \\ p^{n+1} &= P_2 \end{aligned}$$

其中， p 、 q 代表實際之離散值，上標 n 及 $n+1$ 代表時間步； P 、 Q 代表暫存點之值，下標 1 及 2 代表階數。

在無源及簡單介質的假設下，三維馬克斯威爾方程組可表示成如下之半離散 (semi-discretization) 式

$$\underline{H}^{n+1/2} = \underline{H}^n - \frac{dt}{2\mu} \nabla \times \underline{E}^n \quad (3.7a)$$

$$\underline{E}^{n+1} = \underline{E}^n + \frac{dt}{\epsilon} \nabla \times \underline{H}^{n+1/2} \quad (3.7b)$$

$$\underline{H}^{n+1} = \underline{H}^{n+1/2} - \frac{dt}{2\mu} \nabla \times \underline{E}^{n+1} \quad (3.7c)$$

本論文將以此為基礎，於章節 3.3 中推導三維馬克斯威爾之第二類修正方程

(Modified equation of second kind) 式。



3.3 空間離散方程之推導

本章節將在空間離散格式 (3.6-3.7) 以及具辛結構之時間顯示離散格式 (explicit symplectic partitioned Runge-Kutta) 的基礎下，利用第二類修正方程之分析 (Modified equation of second kind analysis)，推導空間之離散方程，

首先，將式 (3.7c)，回推一個時間步，可得 $\underline{H}^n = \underline{H}^{n-1/2} - \frac{dt}{2\mu} \nabla \times \underline{E}^n$ 。將上述方程代入式 (3.7a)，可得 $\underline{H}^{n+1/2} = \underline{H}^{n-1/2} - \frac{dt}{\mu} \nabla \times \underline{E}^n$ 。同樣地，將式 (3.7b) 回推半個時間步，可得 $\underline{E}^{n+1/2} = \underline{E}^{n-1/2} + \frac{dt}{\epsilon} \nabla \times \underline{H}^n$ 。因此，吾人可將安培定律在卡式座標下寫出如下的 z 、 x 和 y 三個分量表示式

$$E_z|_{i,j,k}^{n+1/2} = E_z|_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{dt}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x}|_{i,j,k}^n - \frac{\partial H_x}{\partial y}|_{i,j,k}^n \right), \quad (3.3.1a)$$

$$E_x|_{i,j,k}^{n+1/2} = E_x|_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{dt}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y}|_{i,j,k}^n - \frac{\partial H_y}{\partial z}|_{i,j,k}^n \right), \quad (3.3.1b)$$

$$E_y|_{i,j,k}^{n+1/2} = E_y|_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{dt}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z}|_{i,j,k}^n - \frac{\partial H_z}{\partial x}|_{i,j,k}^n \right). \quad (3.3.1c)$$

吾人取 z 方向之安培定律分量 (3.3.1a)，針對空間項次以 3.1 節所推導出之緊緻格式於非交錯網格系統 (3.6-3.7) 中展開，可得

$$\begin{aligned} E_z|_{i,j,k}^{n+1/2} = E_z|_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{dt}{\epsilon} \frac{1}{dx} & \left[a_1(H_y|_{i+3,j,k}^n - H_y|_{i-3,j,k}^n) + a_2(H_y|_{i+2,j,k}^n - H_y|_{i-2,j,k}^n) \right. \\ & \left. + a_3(H_y|_{i+1,j,k}^n - H_y|_{i-1,j,k}^n) \right] - \frac{dt}{\epsilon} \frac{1}{dy} \left[a_1(H_x|_{i,j+3,k}^n - H_x|_{i,j-3,k}^n) + a_2(H_x|_{i,j+2,k}^n - H_x|_{i,j-2,k}^n) \right. \\ & \left. + a_3(H_x|_{i,j+1,k}^n - H_x|_{i,j-1,k}^n) \right]. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

對於式 (3.3.2)，利用如下之泰勒級數 (Taylor series) 針對 $E_z|_{i,j,k}^{n+1/2}$ ， $H_y|_{i\pm 3,j,k}^n$ ， $H_y|_{i\pm 2,j,k}^n$ ， $H_y|_{i\pm 1,j,k}^n$ ， $H_x|_{i,j\pm 3,k}^n$ ， $H_x|_{i,j\pm 2,k}^n$ ， $H_x|_{i,j\pm 1,k}^n$ 等項次對時間 n 及空間 i, j, k 點展開之，可得



$$\begin{aligned}
E_z|_{i,j,k}^{n\pm 1/2} &= E_z|_{i,j,k}^n \pm \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial E_z}{\partial t}|_{i,j,k}^n + \frac{1}{8}\Delta t^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}|_{i,j,k}^n \pm \frac{1}{48}\Delta t^3 \frac{\partial^3 E_z}{\partial t^3}|_{i,j,k}^n + \dots \\
H_y|_{i\pm 3,j,k}^n &= H_y|_{i,j,k}^n \pm 3\Delta x \frac{\partial H_y}{\partial x}|_{i,j,k}^n + \frac{9}{2}\Delta x^2 \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}|_{i,j,k}^n \pm \frac{9}{2}\Delta x^3 \frac{\partial^3 H_y}{\partial x^3}|_{i,j,k}^n + \dots \\
H_y|_{i\pm 2,j,k}^n &= H_y|_{i,j,k}^n \pm 2\Delta x \frac{\partial H_y}{\partial x}|_{i,j,k}^n + 2\Delta x^2 \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}|_{i,j,k}^n \pm \frac{4}{3}\Delta x^3 \frac{\partial^3 H_y}{\partial x^3}|_{i,j,k}^n + \dots \\
H_y|_{i\pm 1,j,k}^n &= H_y|_{i,j,k}^n \pm \Delta x \frac{\partial H_y}{\partial x}|_{i,j,k}^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}|_{i,j,k}^n \pm \frac{1}{6}\Delta x^3 \frac{\partial^3 H_y}{\partial x^3}|_{i,j,k}^n + \dots \\
H_x|_{i,j\pm 3,k}^n &= H_x|_{i,j,k}^n \pm 3\Delta y \frac{\partial H_x}{\partial y}|_{i,j,k}^n + \frac{9}{2}\Delta y^2 \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2}|_{i,j,k}^n \pm \frac{9}{2}\Delta y^3 \frac{\partial^3 H_x}{\partial y^3}|_{i,j,k}^n + \dots \\
H_x|_{i,j\pm 2,k}^n &= H_x|_{i,j,k}^n \pm 2\Delta y \frac{\partial H_x}{\partial y}|_{i,j,k}^n + 2\Delta y^2 \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2}|_{i,j,k}^n \pm \frac{4}{3}\Delta y^3 \frac{\partial^3 H_x}{\partial y^3}|_{i,j,k}^n + \dots \\
H_x|_{i,j\pm 1,k}^n &= H_x|_{i,j,k}^n \pm \Delta y \frac{\partial H_x}{\partial y}|_{i,j,k}^n + \frac{1}{2}\Delta y^2 \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2}|_{i,j,k}^n \pm \frac{1}{6}\Delta y^3 \frac{\partial^3 H_x}{\partial y^3}|_{i,j,k}^n + \dots
\end{aligned}$$

經由離散後，將以上所展開之泰勒級數代入式 (3.3.2)，經過整理後可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial E_z}{\partial t}|_{i,j,k}^n + \frac{dt^2}{24} \frac{\partial^3 E_z}{\partial t^3}|_{i,j,k}^n + \frac{dt^4}{1920} \frac{\partial^5 E_z}{\partial t^5}|_{i,j,k}^n + \frac{dt^6}{322560} \frac{\partial^7 E_z}{\partial t^7}|_{i,j,k}^n + \dots = \\
&\frac{1}{\epsilon} \left[(6a_1 + 4a_2 + 2a_3) \frac{\partial H_y}{\partial x}|_{i,j,k}^n + \left(9a_1 + \frac{8}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_3 \right) dx^2 \frac{\partial^3 H_y}{\partial x^3}|_{i,j,k}^n \right. \\
&+ \left. \left(\frac{81}{20}a_1 + \frac{8}{15}a_2 + \frac{1}{60}a_3 \right) dx^4 \frac{\partial^5 H_y}{\partial x^5}|_{i,j,k}^n + \left(\frac{243}{280}a_1 + \frac{16}{315}a_2 + \frac{1}{2520}a_3 \right) dx^6 \frac{\partial^7 H_y}{\partial x^7}|_{i,j,k}^n \right. \\
&+ \dots \left. \right] - \frac{1}{\epsilon} \left[(6a_1 + 4a_2 + 2a_3) \frac{\partial H_x}{\partial y}|_{i,j,k}^n + \left(9a_1 + \frac{8}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_3 \right) dy^2 \frac{\partial^3 H_x}{\partial y^3}|_{i,j,k}^n \right. \\
&+ \left. \left(\frac{81}{20}a_1 + \frac{8}{15}a_2 + \frac{1}{60}a_3 \right) dy^4 \frac{\partial^5 H_x}{\partial y^5}|_{i,j,k}^n + \left(\frac{243}{280}a_1 + \frac{16}{315}a_2 + \frac{1}{2520}a_3 \right) dx^6 \frac{\partial^7 H_x}{\partial x^7}|_{i,j,k}^n + \dots \right].
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

式 (3.3.3) 中之高階時間微分項 $\frac{\partial^3 E_z}{\partial t^3}|_{i,j,k}^n$ ， $\frac{\partial^5 E_z}{\partial t^5}|_{i,j,k}^n$ ， $\frac{\partial^7 E_z}{\partial t^7}|_{i,j,k}^n$ ，可經由馬克斯威爾方程組推導出的電場或磁場波動方程式 (wave equation)，並將其使用泰勒級數展開，將上述之高階時間微分項轉為空間微分項，所得的代換結果如下

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_z}{\partial t}|_{i,j,k}^n &= \frac{1}{\epsilon} \left[(6a_1 + 4a_2 + 2a_3) \frac{\partial H_y}{\partial x}|_{i,j,k}^n + \left(9a_1 + \frac{8}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_3 - \frac{Cr_x^2}{24} (6a_1 + 4a_2 + 2a_3) \right) dx^2 \frac{\partial^3 H_y}{\partial x^3}|_{i,j,k}^n \right. \\
&+ \left. \left(\frac{81}{20}a_1 + \frac{8}{15}a_2 + \frac{1}{60}a_3 - \frac{Cr_x^2}{24} \left(9a_1 + \frac{8}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_3 \right) - \frac{Cr_x^4}{1920} (6a_1 + 4a_2 + 2a_3) \right) dx^4 \frac{\partial^5 H_y}{\partial x^5}|_{i,j,k}^n + \dots \right] \\
&- \frac{1}{\epsilon} \left[(6a_1 + 4a_2 + 2a_3) \frac{\partial H_x}{\partial y}|_{i,j,k}^n + \left(9a_1 + \frac{8}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_3 - \frac{Cr_y^2}{24} (6a_1 + 4a_2 + 2a_3) \right) dy^2 \frac{\partial^3 H_x}{\partial y^3}|_{i,j,k}^n \right. \\
&+ \left. \left(\frac{81}{20}a_1 + \frac{8}{15}a_2 + \frac{1}{60}a_3 - \frac{Cr_y^2}{24} \left(9a_1 + \frac{8}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_3 \right) - \frac{Cr_y^4}{1920} (6a_1 + 4a_2 + 2a_3) \right) dy^4 \frac{\partial^5 H_x}{\partial y^5}|_{i,j,k}^n + \dots \right].
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

接著，強迫式 (3.3.4) 滿足原方程 $\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$ ，即可推導出在三維情況下的兩條代數方程

$$3a_1 + 2a_2 + a_3 = \frac{1}{2} \quad (3.3.5)$$

$$9a_1 + \frac{8}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_3 - \frac{Cr_x^2}{12}(3a_1 + 2a_2 + a_3) = 0$$

or

$$9a_1 + \frac{8}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_3 - \frac{Cr_y^2}{12}(3a_1 + 2a_2 + a_3) = 0 \quad (3.3.6)$$

其中 $Cr_x \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ ， $Cr_y \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta y}$ 為主導方程式之無因次參數。透過其他方向分量之安培定律式 ((3.3.1b)-(3.3.1c))，同樣能推導出如上述之代數方程組。此時，仍缺少一條代數方程式，方得以求解三個未知數。最後一條方程式的推導，係利用波動方程 (wave equation) 離散式，引入平面波的概念，以推導出數值色散關係方程式 (Dispersion relation equation)，將計算域的時間、空間同步地導入頻域中的角頻率與波數，以提高格式對波數的保持能力，參閱圖3.4。關於波動方程離散式以及色散關係分析將於下一章節進行討論。



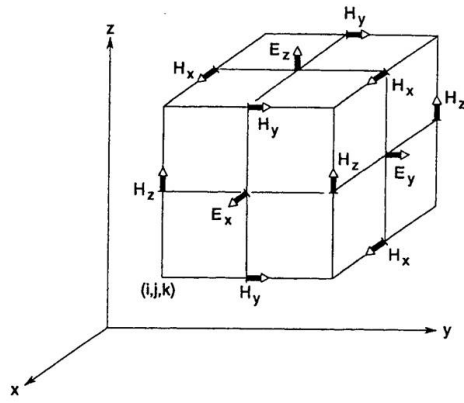


Fig 3.1: 交錯式之 Yee 網格系統。

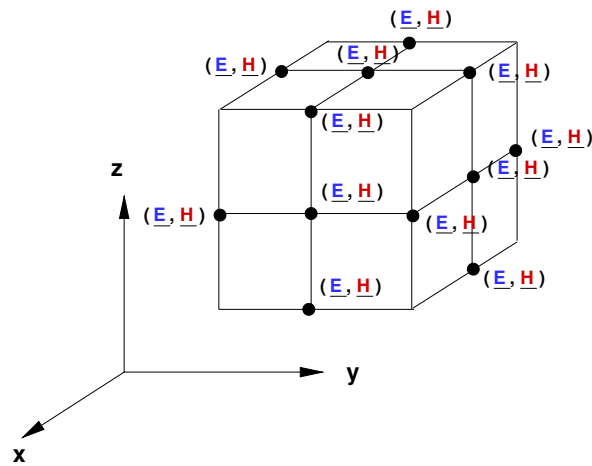


Fig 3.2: 本文所採用之非交錯式網格系統。

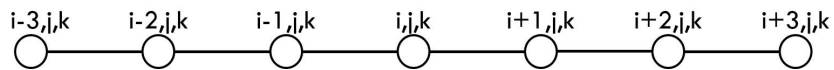
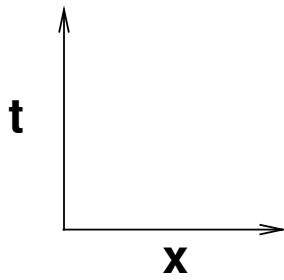
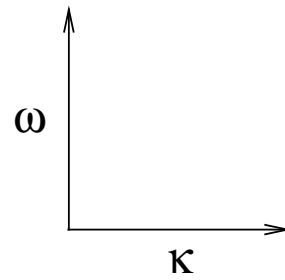


Fig 3.3: 非交錯網格內部節點之示意圖及編號。



(a) 時間與空間座標系之示意圖。



(b) 角頻率與波數座標系之示意圖。

Fig 3.4: 座標系示意圖。



第四章 具色散關係式保持特性之離散方法及其分析

本文將在本章節中引入于第三章所推導之格式 (3.6-3.7)，針對波動方程式 (Wave equation) 整理出差分離散式。對於具色散關係保持性的離散方程 (Dispersion relation equation, DRE)，引入平面波的概念，將原本時間 (time) 對應空間 (space) 之座標系統轉換為角頻率 (Angular frequency) 對應波數 (Wavenumber) 的座標系統，使得時間與空間在計算上得以取得更正確的聯結。為了避免數值色散誤差 (dispersion error) 的累積，本文將導入可以精確描述相速度的概念，進而求得具最佳色散關係保持性的離散方程，以提高空間離散格式與時間格式的合宜連結。此外，差分方程的穩定性、色散誤差以及各向異性做一完整的分析。

4.1 三維空間離散方程之分析

透過無源、均勻且各向同性簡單介質下之馬克斯威爾方程組 (2.6-2.7)，可推導出如下的二階微分形式的波動方程式

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \nabla^2 \phi \quad (4.1)$$

其中 c 為波之傳播速度。 ϕ 可代表電場 \vec{E} 或磁場 \vec{H} 。考慮在三維情況下之波動方程式，在卡式座標下可展開為

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (4.2)$$

代入平面波的解 $\phi = \phi_0 e^{-I(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$ 於式 (4.2) 中，可得理論的色散關係式

$$\omega_{exact}^2 = c^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \quad (4.3)$$

為了讓時間與空間取得正確及緊密的聯結，在離散過程中引入平面波的概念。將三維離散轉換式 $\phi|_i^n = \phi_0 e^{-I(\omega_{num} n \Delta t - k_x i \Delta x - k_y i \Delta y - k_z i \Delta z)}$ ，代入本文所推導出

的時間離散格式 $\frac{\partial \phi}{\partial t}|_i^n = \frac{\phi_i^{n+1/2} - \phi_i^{n-1/2}}{\Delta t}$ ，空間離散格式 $\frac{\partial \phi}{\partial x}|_{i,j,k}^n = \frac{1}{\Delta x} \left[a_1 (\phi_{i+3,j,k}^n - \phi_{i-3,j,k}^n) + a_2 (\phi_{i+2,j,k}^n - \phi_{i-2,j,k}^n) + a_3 (\phi_{i+1,j,k}^n - \phi_{i-1,j,k}^n) \right]$ 、 $\frac{\partial \phi}{\partial y}|_{i,j,k}^n = \frac{1}{\Delta y} \left[a_1 (\phi_{i,j+3,k}^n - \phi_{i,j-3,k}^n) + a_2 (\phi_{i,j+2,k}^n - \phi_{i,j-2,k}^n) + a_3 (\phi_{i,j+1,k}^n - \phi_{i,j-1,k}^n) \right]$ 、 $\frac{\partial \phi}{\partial z}|_{i,j,k}^n = \frac{1}{\Delta z} \left[a_1 (\phi_{i,j,k+3}^n - \phi_{i,j,k-3}^n) + a_2 (\phi_{i,j,k+2}^n - \phi_{i,j,k-2}^n) + a_3 (\phi_{i,j,k+1}^n - \phi_{i,j,k-1}^n) \right]$ ，可得

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}|_{i,j,k}^n = -I \frac{2 \sin(\omega_{num} \Delta t / 2)}{\Delta t} \phi \quad (4.1.4a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}|_{i,j,k}^n = 2I \frac{a_1 \sin(3k_x \Delta x) + a_2 \sin(2k_x \Delta x) + a_3 \sin(k_x \Delta x)}{\Delta x} \phi \quad (4.1.4b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}|_{i,j,k}^n = 2I \frac{a_1 \sin(3k_y \Delta y) + a_2 \sin(2k_y \Delta y) + a_3 \sin(k_y \Delta y)}{\Delta y} \phi \quad (4.1.4c)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}|_{i,j,k}^n = 2I \frac{a_1 \sin(3k_z \Delta z) + a_2 \sin(2k_z \Delta z) + a_3 \sin(k_z \Delta z)}{\Delta z} \phi \quad (4.1.4d)$$

接著，可求得如下的二階微分項 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ 、 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ 、 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$ 、 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}|_i^n = 4 \left[\frac{\sin(\omega_{num} \Delta t / 2)}{\Delta t} \right]^2 \phi \quad (4.1.5a)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}|_i^n = -4 \left[\frac{a_1 \sin(3k_x \Delta x) + a_2 \sin(2k_x \Delta x) + a_3 \sin(k_x \Delta x)}{\Delta x} \right]^2 \phi \quad (4.1.5b)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}|_i^n = -4 \left[\frac{a_1 \sin(3k_y \Delta y) + a_2 \sin(2k_y \Delta y) + a_3 \sin(k_y \Delta y)}{\Delta y} \right]^2 \phi \quad (4.1.5c)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}|_i^n = -4 \left[\frac{a_1 \sin(3k_z \Delta z) + a_2 \sin(2k_z \Delta z) + a_3 \sin(k_z \Delta z)}{\Delta z} \right]^2 \phi \quad (4.1.5d)$$

將上述的二階微分 (4.1.5a-4.1.5d) 代入式 (4.2)，可得如下的三維數值色散關係式 (Dispersion relation equation)

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\sin^2(\omega_{num} \Delta t / 2)}{\Delta t^2} &= \left[\frac{a_1 \sin(3k_x \Delta x) + a_2 \sin(2k_x \Delta x) + a_3 \sin(k_x \Delta x)}{\Delta x} \right]^2 \\ &+ \left[\frac{a_1 \sin(3k_y \Delta y) + a_2 \sin(2k_y \Delta y) + a_3 \sin(k_y \Delta y)}{\Delta y} \right]^2 \\ &+ \left[\frac{a_1 \sin(3k_z \Delta z) + a_2 \sin(2k_z \Delta z) + a_3 \sin(k_z \Delta z)}{\Delta z} \right]^2 \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

在模擬三維波傳問題時，吾人需定義出波數向量 (wavenumber vector) $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z) = |k|(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ ，其中 θ 為天頂角 (Zenith angle)， ϕ 為

方位角 (Azimuth angle)，參考圖4.1。式 (4.1.6) 經整理後，可得

$$\begin{aligned} & \omega_{num} \Delta t \\ &= \sin^{-1} \left[\left(Cr_x^2 (a_1 \sin(3k \sin \theta \cos \phi \Delta x) + a_2 \sin(2k \sin \theta \cos \phi \Delta x) + a_3 \sin(k \sin \theta \cos \phi \Delta x))^2 \right. \right. \\ &+ Cr_y^2 (a_1 \sin(3k \sin \theta \sin \phi \Delta y) + a_2 \sin(2k \sin \theta \sin \phi \Delta y) + a_3 \sin(k \sin \theta \sin \phi \Delta y))^2 \\ &+ Cr_z^2 (a_1 \sin(3k \cos \theta \Delta z) + a_2 \sin(2k \cos \theta \Delta z) + a_3 \sin(k \cos \theta \Delta z))^2 \left. \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

其中， $Cr_x \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ ， $Cr_y \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta y}$ ， $Cr_z \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta z}$ 。在均勻網格 ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$) 的情況下， $Cr_x = Cr_y = Cr_z = Cr$ 。數值相速度可由式 (4.1.6) 代入定義式 ($|\frac{\omega_{num}}{k}|$) 中求出。

為了盡量提高並保持準確的色散關係式，首先定義誤差方程 (Error function) 為 $\left[\left| \frac{\omega_{num}}{k} \right| - \left| \frac{\omega_{exact}}{k} \right| \right]^2$ 。誤差方程於 $0 \leq kh \leq \pi$ 區間內將盡量的保持最小值。接著，在波數空間下，考慮所有的誤差值，即

$$E = \int_{-m\pi}^{m\pi} \left[\left| \frac{\omega_{num}}{k} \right| - \left| \frac{\omega_{exact}}{k} \right| \right]^2 W(kh) dkh \quad (4.1.8)$$

其中 $W(kh)$ 為權重函數。接下來，令 $\frac{\partial E(a_1, a_2, a_3, m, Cr, \theta, \phi)}{\partial a_3} = 0$ ，可求得所需的第三條代數方程。配合式 (3.3.5) 及 (3.3.6)，即可求出具 DRP 性質之 a_1, a_2 和 a_3 的係數。所導出三維具 DRP 性質之 a_1, a_2 和 a_3 係數，與其相關的積分域 m 、 Cr 值、天頂角 (zenith angle) θ 與方位角 (azimuth angle) ϕ 之選取將影響結果。以下將針對上述選取作一系列之分析。

4.1.1 積分域之影響

在決定了誤差方程後，對於積分域的選擇，為了配合雙曲線方程於空間離散的特性 (求解之離散點為對稱展開之型式)，故誤差方程 (Error function) 的積分範圍必須配合雙曲線方程之特性，即將積分域設計為對稱之型式。積分過程中，常需伴隨著混疊誤差 (aliasing error)；為了能描述一完整波形，整個積分範圍將盡量地保持或貼近 π 。圖4.2為固定 $Cr = 0.2$ 時，積分域 m 為 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{3}{7}$ 、 $\frac{2}{5}$ 、 $\frac{3}{8}$ ，以及 $\frac{1}{3}$ 與實解之色散關係之比較圖，橫軸及縱軸分別代表了修正的波數 (modified wavenumber) kh 和角頻率 (angular frequency)。

吾人的目標是儘可能地使數值的色散關係貼近實解的色散關係，以提高相位的正確性。當積分域越趨近完整波形 π 時，越能保持離散方程的色散關係。

4.1.2 Cr 數之影響

$Cr \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ 係數為一無因次項，它代表時間步長 Δt 與網格長度 h 之關係，對於顯式 (explicit) 時間離散方法，在選取滿足穩定性條件的 Cr 值後，亦需考慮 Cr 值對於數值色散誤差之影響。

本文所提出具 DRP 性質之空間離散為一系統方程，隱含與穩定性有關之 Cr 係數；圖4.3為當積分域 m 為 $\frac{1}{2}$ 時， Cr 為 0.6、0.5、0.4、0.3、0.2 和 0.05 之色散關係實解與數值解之比較圖；當 Cr 值越小時，數值色散關係式與實解色散關係式越形貼近，它代表了系統方程之色散關係越得以保持； Cr 值為 0.2 與 Cr 值為 0.05 比較，可知趨勢接近；當數值波數與角頻率和實解之趨勢接近至一定程度時，計算成本便需納入考量，表4.1說明計算長時間 ($T = 30(s)$) 之驗證題目，當 Cr 值分別為 0.2 與 0.05， Cr 值為 0.2 所花費的計算時間 (CPU TIME) 僅為 Cr 值為 0.05 時之 25%。因此，當同時地考量數值色散關係保持的程度及所需的計算時間時，本文所選擇使用之 Cr 值為 0.2。

4.1.3 角度變化下之係數分佈

對於空間的一階微分項以離散格式的方式 [32, 33] 展開，會有 $a_1 \sim a_3$ 的待定係數。將泰勒展開式代入離散式，並將時間微分項轉為空間微分項，在強迫低階微分項為零後，可得到 (3.3.5-3.3.6) 式的兩條修正方程。依波傳遞的觀點，若僅消去泰勒級數 (Taylor series) 中的低階誤差項次並不能將時域與頻域作一物理的聯結。因此，配合顯式具辛結構時間格式 (explicit symplectic time integrator)[31?]，可推導出具色散關係之離散方程 (Dispersion relation equation, DRE)。以此方程再將數值相速度與實解相速度之間誤差作一優化，可以求得具色散關係式保持的第三條方程，由此三條方程，可求解出具最佳色散關係保持之 $a_1 \sim a_3$ 係數。在求得第三條色散關係保持方程的過程中，透過上述的討論，考量了積分域 m 以及 Cr 對整體數值色散關係表現之影響及計算成本，吾人選定了 $m = \frac{1}{2}$ 以及 $Cr = 0.2$ 。至此，可以整理出針對不同天頂角 (zenith angle) θ 與方位角 (azimuth angle) ϕ 皆具有最佳數值色散關係的係數 $a_1 \sim a_3$ 。

表4.2為選取天頂角 (Zenith angle) 為 $0^\circ \& 90^\circ$ 、 $30^\circ \& 60^\circ$ 和 45° ，配合方位角 (Azimuth angle) 為 $0^\circ \& 90^\circ$ 、 $6^\circ \& 84^\circ$ 、 $9^\circ \& 81^\circ$ 、 $12^\circ \& 78^\circ$ 、 $22.5^\circ \& 67.5^\circ$ 、 $30^\circ \& 60^\circ$ 、 $36^\circ \& 54^\circ$ 、 $6^\circ \& 84^\circ$ 和 45° 所求得的係數 $a_1 \sim a_3$ 之情況。在方位角 (Azimuth angle) 為 $90^\circ \sim 360^\circ$ 時，廣義三角函數定義，可將式 (4.1.7) 恆等地轉換至 $0^\circ \sim 90^\circ$ 之區間。而透過表4.2可看出，當天頂角 (Zenith angle) 為 90° 時，可得到簡化為二維情況下的係數；當天頂角 (Zenith angle) θ 為 0° 時，可得到簡化為一維情況下的係數。

4.2 數值分析之結果與討論

本文對於空間的一次微分項，在緊緻格式的架構下 [32, 33]，配合顯式具辛結構時間格式 (explicit symplectic time integrator) [31]，利用降低數值相速度與實解相速度之間誤差的原理，求得了具色散關係式保持性質的係數 $a_1 \sim a_3$ 。本文所開發的具色散關係保持性質之空間離散系統，特別針對在不同天頂角 (Zenith angle) 和方位角 (azimuth angle) 的情況下，開發各天頂角 (Zenith angle) 和方位角 (azimuth angle) 所對應的係數，以確保波在不同的傳播角度時皆能得到色散關係得以完美的保持，以降低因各向異性 (anisotropy) 所造成的誤差。

對於因差分離散格式所引入的非物理性數值色散現象，透過前兩章節的分析，可知本文所發展之具色散關係保持性質的數值方法，對於因數值色散所引起的色散誤差以及各向異性皆具有良好的色散保持效果。針對不同傳播角度所求得相對應具色散關係保持的係數，能夠有效地減少因各向異性所造成的誤差。



Cr	$E_z L_2$ -error norm	CPU TIME(s)
0.2	2.60336×10^{-4}	46.34
0.05	3.21679×10^{-5}	192.78

Table 4.1: 經長時間 (即 T 為 30(s)) 計算後，在 $Cr = 0.2$ 及 $Cr = 0.05$ 情況下計算誤差以及所需 CPU TIME (s) 之比較。

	$\theta = 0^\circ, 180^\circ$	$\theta = 30^\circ, 150^\circ$	$\theta = 45^\circ, 135^\circ$	$\theta = 60^\circ, 120^\circ$	$\theta = 90^\circ$
$\phi = 0^\circ, 90^\circ$ = $180^\circ, 270^\circ$	$a_1 = 0.023854$ $a_2 = -0.17792$ $a_3 = 0.784271$	$a_1 = 0.020878$ $a_2 = -0.166014$ $a_3 = 0.769392$	$a_1 = 0.018315$ $a_2 = -0.15576$ $a_3 = 0.756574$	$a_1 = 0.020878$ $a_2 = -0.166014$ $a_3 = 0.769392$	$a_1 = 0.023854$ $a_2 = -0.177916$ $a_3 = 0.784271$
$\phi = 6^\circ, 84^\circ$ = $96^\circ, 174^\circ$ = $186^\circ, 264^\circ$ = $276^\circ, 354^\circ$	$a_1 = 0.023743$ $a_2 = -0.177471$ $a_3 = 0.7837133$	$a_1 = 0.020766$ $a_2 = -0.165564$ $a_3 = 0.76883$	$a_1 = 0.0182556$ $a_2 = -0.155522$ $a_3 = 0.756278$	$a_1 = 0.020879$ $a_2 = -0.166017$ $a_3 = 0.769397$	$a_1 = 0.023854$ $a_2 = -0.177916$ $a_3 = 0.784271$
$\phi = 9^\circ, 81^\circ$ = $99^\circ, 171^\circ$ = $189^\circ, 261^\circ$ = $279^\circ, 351^\circ$	$a_1 = 0.023603$ $a_2 = -0.176912$ $a_3 = 0.783015$	$a_1 = 0.0206242$ $a_2 = -0.164997$ $a_3 = 0.7681209$	$a_1 = 0.0181826$ $a_2 = -0.15523$ $a_3 = 0.755913$	$a_1 = 0.02088$ $a_2 = -0.1660218$ $a_3 = 0.769402$	$a_1 = 0.023854$ $a_2 = -0.177916$ $a_3 = 0.784271$
$\phi = 12^\circ, 78^\circ$ = $102^\circ, 168^\circ$ = $192^\circ, 258^\circ$ = $282^\circ, 348^\circ$	$a_1 = 0.023406$ $a_2 = -0.176126$ $a_3 = 0.7820323$	$a_1 = 0.020423$ $a_2 = -0.164194$ $a_3 = 0.767117$	$a_1 = 0.018082$ $a_2 = -0.154829$ $a_3 = 0.755411$	$a_1 = 0.020882$ $a_2 = -0.166028$ $a_3 = 0.769411$	$a_1 = 0.023854$ $a_2 = -0.177916$ $a_3 = 0.784271$
$\phi = 22.5^\circ, 67.5^\circ$ = $112.5^\circ, 157.5^\circ$ = $202.5^\circ, 247.5^\circ$ = $292.5^\circ, 337.5^\circ$	$a_1 = 0.022238$ $a_2 = -0.171452$ $a_3 = 0.77619$	$a_1 = 0.0192028$ $a_2 = -0.1593112$ $a_3 = 0.761014$	$a_1 = 0.0175488$ $a_2 = -0.1526952$ $a_3 = 0.752744$	$a_1 = 0.0208917$ $a_2 = -0.166067$ $a_3 = 0.769459$	$a_1 = 0.023854$ $a_2 = -0.177916$ $a_3 = 0.784271$
$\phi = 30^\circ, 60^\circ$ = $120^\circ, 150^\circ$ = $210^\circ, 240^\circ$ = $300^\circ, 330^\circ$	$a_1 = 0.020878$ $a_2 = -0.16601$ $a_3 = 0.76939$	$a_1 = 0.017748$ $a_2 = -0.153492$ $a_3 = 0.753740$	$a_1 = 0.0170712$ $a_2 = -0.150785$ $a_3 = 0.750356$	$a_1 = 0.0209008$ $a_2 = -0.166103$ $a_3 = 0.7695043$	$a_1 = 0.023854$ $a_2 = -0.177916$ $a_3 = 0.784271$
$\phi = 36^\circ, 54^\circ$ = $126^\circ, 144^\circ$ = $216^\circ, 234^\circ$ = $306^\circ, 324^\circ$	$a_1 = 0.019542$ $a_2 = -0.160668$ $a_3 = 0.76271$	$a_1 = 0.016313$ $a_2 = -0.14775$ $a_3 = 0.746566$	$a_1 = 0.016727$ $a_2 = -0.149407$ $a_3 = 0.748634$	$a_1 = 0.020907$ $a_2 = -0.166129$ $a_3 = 0.769537$	$a_1 = 0.023854$ $a_2 = -0.177916$ $a_3 = 0.784271$
$\phi = 45^\circ, 135^\circ$ = $225^\circ, 315^\circ$	$a_1 = 0.018314$ $a_2 = -0.15576$ $a_3 = 0.75657$	$a_1 = 0.015007$ $a_2 = -0.14253$ $a_3 = 0.740037$	$a_1 = 0.016489$ $a_2 = -0.148457$ $a_3 = 0.747446$	$a_1 = 0.0209117$ $a_2 = -0.166147$ $a_3 = 0.769558$	$a_1 = 0.023854$ $a_2 = -0.177916$ $a_3 = 0.784271$

Table 4.2: 取天頂角 (Zenith angle) θ 為 0° 和 90° 、 30° 和 60° 以及 45° ，配合方位角 (Azimuth angle) ϕ 為 0° 和 90° 、 6° 和 84° 、 9° 和 81° 、 12° 和 78° 、 22.5° 以及 67.5° 、 30° 和 60° 、 36° 和 54° 、 6° 和 84° 以及 45° 所求係數 $a_1 \sim a_3$ 的分布情況。當天頂角 (Zenith angle) θ 為 90° 時，可得到二維情況下的係數；當天頂角 (Zenith angle) θ 為 90° 和方位角 (Azimuth angle) ϕ 為 0° 或 90° 時，可得到一維情況下的係數。

	present	Yee's method
1D	$\Delta t \leq 1.167132 \frac{h}{c}$	$\Delta t \leq \frac{h}{c}$
2D	$\Delta t \leq 0.825287 \frac{h}{c}$	$\Delta t \leq 0.707107 \frac{h}{c}$
3D	$\Delta t \leq 0.673844 \frac{h}{c}$	$\Delta t \leq 0.57735 \frac{h}{c}$

Table 4.3: 在三維情況下，本文所提出的 FDTD 數值方法與 Yee 方法的穩定性範圍比較。

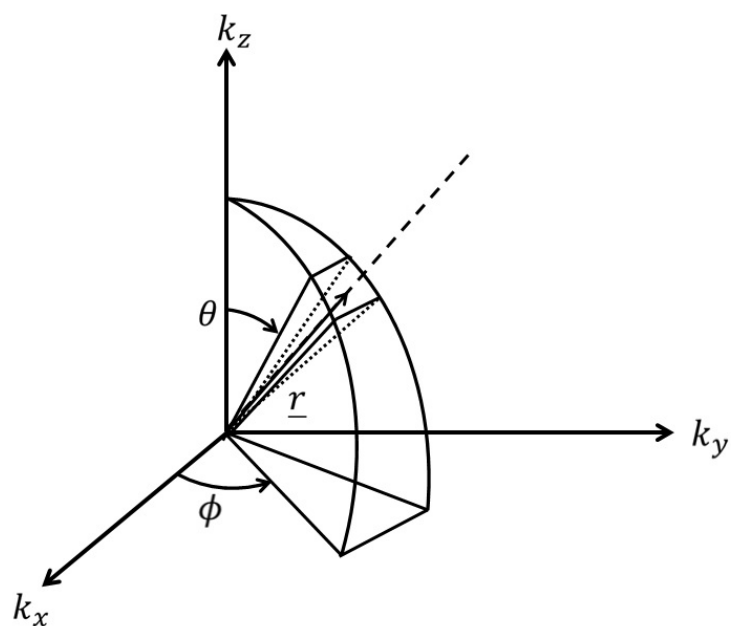


Fig 4.1: 平面波在三維情況下傳遞時，定義出天頂角 (Zenith angle) θ ，方位角 (Azimuth angle) ϕ 。

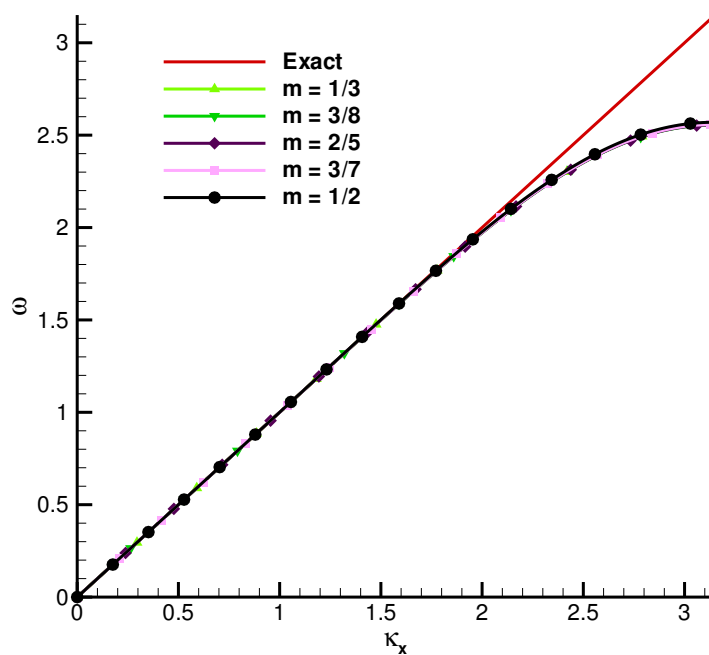


Fig 4.2: 固定 Cr 為 0.2 時，在不同積分範圍下之色散關係之實解與數值解的比較。

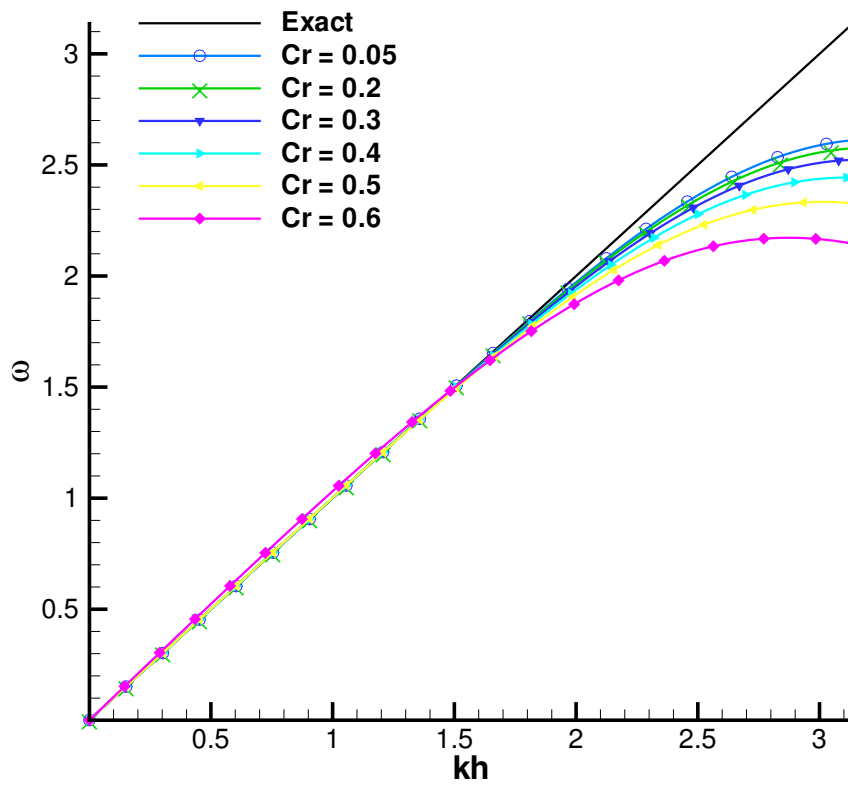


Fig 4.3: 固定積分範圍 $-\frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi}{2}$ 時，在不同 Cr 值情況下之色散關係之實解與數值解的比較。



第五章 數值方法之驗證

在進行電磁波問題的模擬前，為了確保分析結果之正確性，必須先對數值程式作一驗證。本章節將以具解析解之三維馬克斯威爾方程來驗證本文所提出之顯式 (explicit) 具辛結構 (symplectic) 的時間離散與具 DRP 性質之空間離散的格式；本論文所使用之數值方法為直接求解法拉第定律與安培定律以得到電場與磁場，故需驗證高斯定律，即 $(\nabla \cdot \vec{H}) = 0$ ，是否仍得以經長時間計算後仍得以保持。

5.1 實解驗證

吾人將利用所開發出具 DRP 性質之顯式 FDTD 程式驗證所開發出具色散保持性質的數值方法是否符合漢彌爾頓的性質。首先，在完美電導體邊界條件為前提下，模擬驗證本文所使用之於非交錯網格導出的具有最佳數值相速度的顯式具辛結構之 PRK-FDTD 方法。作為驗證，以下給出適用於解析解的三維馬克斯威爾方程組在 $0 \leq x \leq 1$ 、 $0 \leq y \leq 1$ 和 $0 \leq z \leq 1$ 的計算域中給定 $dx = dy = dz = h = 0.01$ ，給定介電常數 $\epsilon = 1$ ，及介磁常數 $\mu = 1$ ，

其隨時間改變的實解為

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z, t) &= \frac{1}{4}\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}\pi t)\cos(\pi(1-x))\sin(\pi(1-y))\sin(\pi(1-z)) \\ E_y(x, y, z, t) &= \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}\pi t)\sin(\pi(1-x))\cos(\pi(1-y))\sin(\pi(1-z)) \\ E_z(x, y, z, t) &= -\frac{3}{4}\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}\pi t)\sin(\pi(1-x))\sin(\pi(1-y))\cos(\pi(1-z)) \\ H_x(x, y, z, t) &= -\frac{5}{4}\sin(\sqrt{3}\pi t)\sin(\pi(1-x))\cos(\pi(1-y))\cos(\pi(1-z)) \\ H_y(x, y, z, t) &= \sin(\sqrt{3}\pi t)\cos(\pi(1-x))\sin(\pi(1-y))\cos(\pi(1-z)) \\ H_z(x, y, z, t) &= \frac{1}{4}\sin(\sqrt{3}\pi t)\cos(\pi(1-x))\cos(\pi(1-y))\sin(\pi(1-z)) \end{aligned} \quad (5.2)$$

對此實解題目進行分析時，吾人將驗證本方法在時間離散之收斂階數，並且與交替方向隱式時域有限差分法 ADI-FDTD[1] 作一比較。比較時，所選取之 dt 、

電場、磁場與時間收斂階數之比較結果如表5.1所示。並針對吾人所開發之方法，對於空間離散之實際收斂階數與理論上吾人所推導出之空間收斂階數進行比較，吾人所選取之 h 、電場、磁場與空間收斂階數之結果如表5.2所示。

<i>Scheme</i>	dt	E-maxError	H-maxError	E-T.r.o.c	H.T.r.o.c
PRK-FDTD	$0.5h$	6.5922E-06	7.8720E-05	-	-
	$0.25h$	1.6816E-06	2.0362E-05	1.9709	1.9509
	$0.125h$	5.1574E-07	5.7744E-06	1.7051	1.8181
ADI-FDTD	$0.5h$	1.673E-04	1.511E-04	-	-
	$0.25h$	1.135E-04	1.015E-04	0.5595	0.5736
	$0.125h$	1.001E-04	8.939E-05	0.1818	0.1839

Table 5.1: 比較本文所使用的 PRK-DRP FDTD 與 ADI-FDTD [1] 在 $h = 0.01$ 情況下計算電場 E 與磁場 H 的最大誤差和時間收斂斜率。

<i>Scheme</i>	h	E-maxError	H-maxError	E-S.r.o.c	H.S.r.o.c
PRK-FDTD	1/10	3.0899E-05	1.0312E-04	-	-
	1/20	2.5787E-06	1.1957E-05	3.5828	3.1084
	1/30	5.2522E-07	3.4710E-06	3.9244	3.0505
	1/40	2.3758E-07	2.1476E-06	2.7576	1.6688

Table 5.2: 本文所使用的 PRK-DRP FDTD 當 $t = 1$ ，並選取 CFL number =0.2 時，計算電場 E 與磁場 H 的最大誤差和空間收斂斜率。

5.2 驗證結果與討論

藉由實解驗證的結果，可以確保本文所開發之具辛結構 (symplectic) 的時間離散與具 DRP 性質之空間離散的數值方法，在求解馬克斯威爾方程問題時，能量密度經長時間後仍得以保持漢彌爾頓之守恆性質。此外，利用磁場的散度隨時間的變化，可以證明此數值方法在僅求解法拉第定律和安培定律的情況下，仍可滿足馬克斯威爾方程組中的高斯定律。與傳統之 Yee 離散方法做一比較後可知，此方法具有更準確且更高之空間收斂階數。

透過實解驗證，可以確保本論文開發之具辛結構的時間離散格式，以及具備最佳數值色散關係之空間離散格式的數值方法，在非交錯網格下求解馬克斯威爾方程組問題時，具有良好的效果。由結果可以得知，吾人所開發之 PRK-DRP FDTD，在時間上具有二階準確，在空間上更具有四階準確。此外，在和 ADI-FDTD [1] 結果比較後，可知 PRK-DRP FDTD 具備更佳的收斂性以及準確度。在接下來的章節，將使用本文所開發之 PRK-DRP FDTD 進行實際問題的模擬應用。



第六章 人體電磁比吸收率之分析

6.1 實際物理問題之描述

隨著科技日新月異，目前手機在我們的日常生活中已被廣泛的使用，然而手機因發射與接收訊號時的輻射可能會引起健康問題的疑慮，是一項相當值得重視的議題。由於使用手機時，人體將暴露在近場電磁場之輻射中，其中是否將引起與導致癌症風險的問題，也引起了學界與業界大量的討論。本研究題目之目的，是模擬手機射頻所導致的電磁場 (electromagnetic field, EMF)。輻射的程度受到許多因素影響，包括手機的種類，參考的發射頻率，以及手機所使用的功率等等。為了使我們的模擬能呈現出真實的情況，針對其中一款目前市售的手機進行其複雜幾何之模擬 [34]。為此，本研究將參考 Apple iPhone4-like phone 之結構圖以及其所發射之 EMF 進行模擬與分析。此外，使用者距離手機天線的距離、手機的使用時間，以及手機與人體之間的介質，決定了電磁對人體之曝曬程度的另外兩個重要參考因素，在以下的小節，我們將介紹所模擬的手機，並且詳細的描述涉及的模擬問題之各項係數，以進行接近真實情況的模擬預測。

圖6.1描述了吾人所欲探討之問題，在一般的情況下，使用手機通話的情形，進行趨近真實情況的模擬。吾人假設手機緊貼於頭部耳朵一側，且手機相對於人體呈 45 度角，手機波源的選取，取工作頻段 900Mhz、600mW 之功率的正弦波，作用於 UMTS/GSM 手機天線輻射部上進行天線輻射，以觀察手機全場輻射對於頭部之分布。

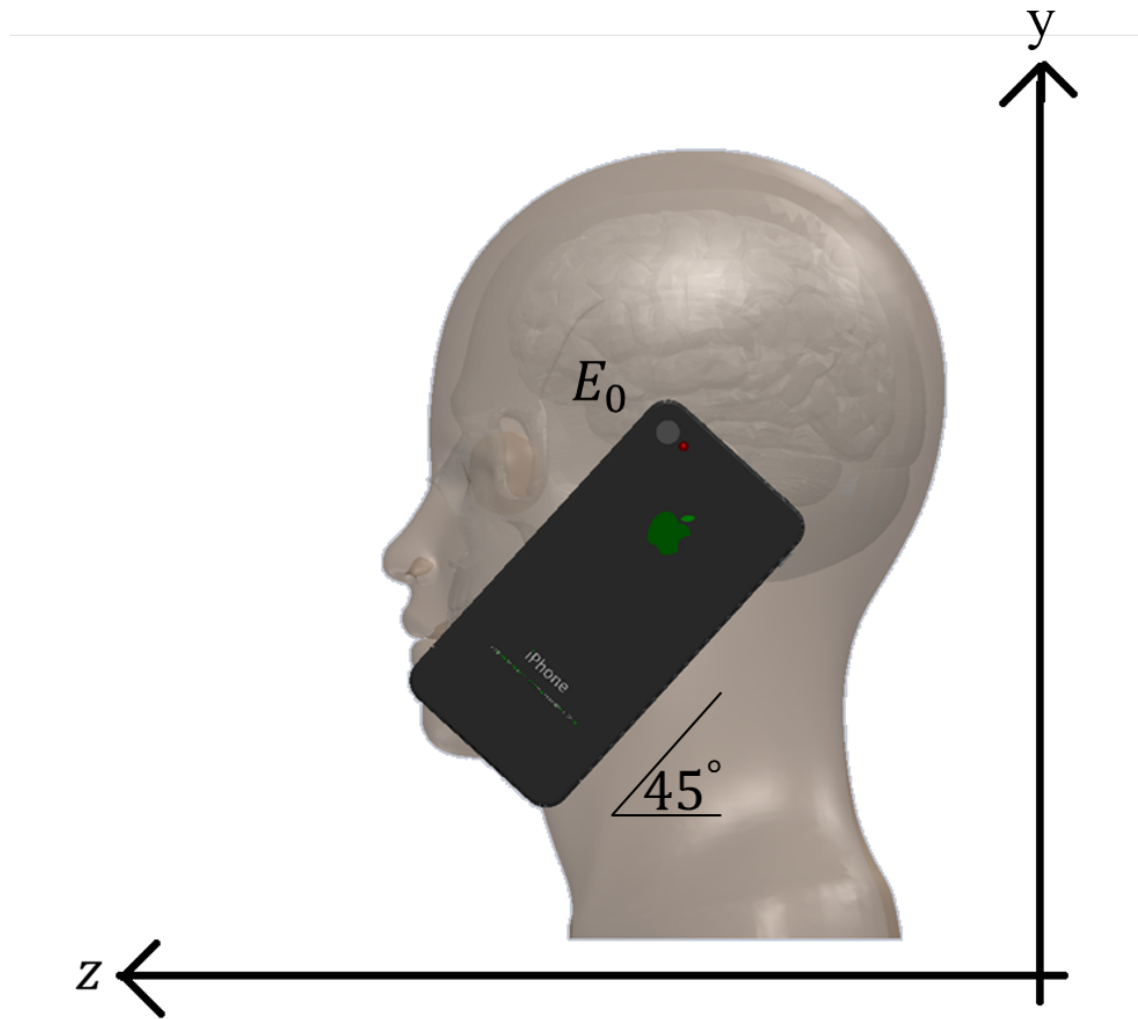


Fig 6.1: 吾人所討論之實際問題描述。

6.2 三維複雜幾何的散射體建模

首先，吾人利用 CAD 設計圖，可以獲取複雜物體各部位的幾何結構。接著，將複雜物體進行拆解，分別對每個部件進行建模與設置參數。並將個別部件之 CAD 設計圖轉換為 .STL (STereoLithography, 立體光刻) 的 3D 列印格式檔，可以得到以三角形網格作為結構的 3D 物體的節點資訊。最後，將這些節點資訊引入計算空間中，可以建立在空間網格中所需的模型與其材料參數。

考慮計算空間中的一點 P ，欲判斷 P 點是否位於三角形之內，可以透過 xOy 面 (或 yOz 和 xOz) 的投影來分析。首先假設三角面 ABC 和空間中一點 P 在 xOy 面內的投影分別為 A' 、 B' 、 C' 和 P' 。點 P' 和 A' 、 B' 、 C' 可分別構成向量 $\vec{P'A'}$ 、 $\vec{P'B'}$ 和 $\vec{P'C'}$ ，最後依次做向量外積，分別為 $\vec{P'A'} \times \vec{P'B'}$ 、 $\vec{P'B'} \times \vec{P'C'}$ 和 $\vec{P'C'} \times \vec{P'A'}$ 。如果三個向量外積後為同號，則 P 點位於三角形內，反之， P 點位於三角形外。倘若三個向量外積後其中一者為零，則該點位於三角形邊界上。

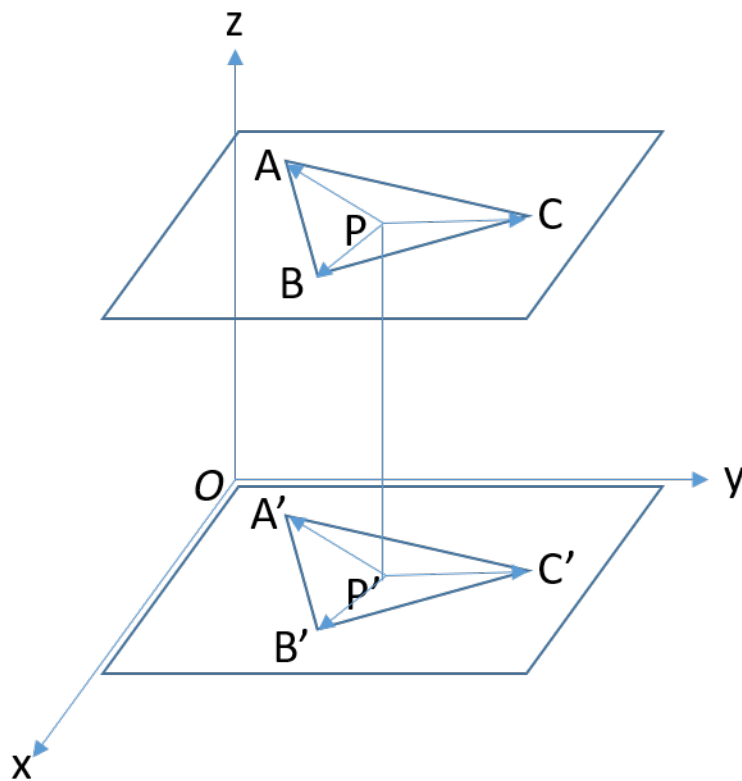


Fig 6.2: 計算空間中節點 P 與三角面三點 ABC 之關係圖。



Fig 6.3: 真實手機的各個部件。

一般在計算網格空間中判斷網格線是否與三角面具有交點時，有以下的四種可能，其中包括

- A：只有一個交點，表示網格線與目標之表面相切；
- B：共有兩個交點，表示直線貫穿目標表面；
- C：共有三個交點，表示直線與目標只有一個相切點
- D：共有四個或以上之交點，表示目標具有多個”凸起” (鋸齒狀幾何，例如：鋸子或梳子上之紋路)。

將不同材質的部件分別進行材質的內外點判斷，最後，將部件內部點及部件邊界紀錄為 1，部件的外部點紀錄為 0，設定部件內部點以及部件邊界上的材料性質 (包括相對介電常數、相對磁導係數、導電率、密度等所需材料參數) 最後輸出作為材料檔。

計算空間內，吾人所建立之模擬 iPhone4-like phone 模型如圖6.4所示。

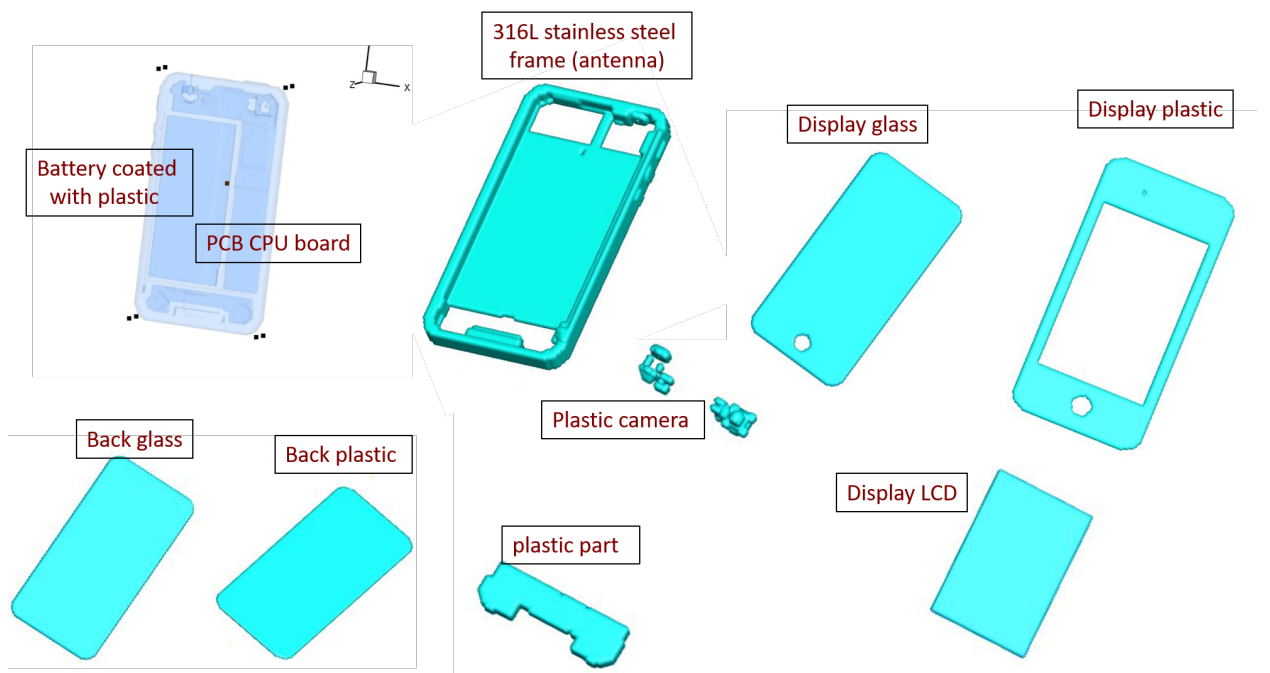


Fig 6.4: 計算空間中，手機各個部件的建模。

6.3 波源的設置

時域有限差分法在模擬電磁波傳遞時，對於觀察場，若要求得下一個時間步的電場或磁場值，必定是以上一個時間步所得到的答案計算出的，因此，如果沒有源項，透過時域有限差分法計算出的任何時刻位置的電場或磁場的值必定等於零。因此，有效且正確的選取合適的波源，是能否完成一個正確的計算程序的重要因素之一，以下將以常見的波源設置方法簡要介紹之。



6.3.1 硬波源 (hard-sourced)

硬波源屬於最簡易的源項處理方式，只需要在 FDTD 的計算流程中，在波源位置處，插入欲使用的離散波函數當作源項即可，它可以是以電場或磁場作為源項。以正弦波函數為例，源項可以寫成：

$$E_z = E_0 \sin(\omega_0 t). \quad (6.1)$$

將時間離散化後可得

$$E_z|_{i_s}^n = E_0 \sin(2\pi f_0 n \cdot \Delta t). \quad (6.2)$$

其中 i_s 為波源的源點， ω_0 、 f_0 為正弦波的角頻率與頻率， n 為時間迭代的步數， Δt 為時間的間隔。硬波源雖然在程式撰寫上相當的簡單，由於波源是在固定的空間中隨時間變化，如果遇到散射體將會導致二次反射，使得求解結果不正確。解決的辦法為反射波到達波源前關閉源項並作更新，以確保不會造成二次的反射。

6.3.2 軟波源 (soft-sourced)

軟波源又稱附加源，在安培定律或法拉第定律中加入電流源 (J_{source}) 或磁流源 (M_{source}) 做為電磁或磁場的能量。當反射波傳遞到此波源區域時，會直接與電流源或磁流源做一疊加，而不致于造成計算時的反射。

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} [\nabla \times H - J_{source}], \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} [\nabla \times E - M_{source}]. \quad (6.4)$$

6.4 波源的種類

使用時域有限差分法分析電磁問題時，針對不同問題，選擇合適的入射波作為波源種類。將入射波加入到 FDTD 之時間疊代過程中，可以更方便的針對不同的電磁問題進行分析。波源主要包括兩種，一種是隨時間週期變化的時諧場源，另一種是對時間行進過程，呈現鐘型高斯函數的波源。以下進行兩種波源的簡要介紹



6.4.1 時諧場源 (harmonic-sourced)

以單調正弦波 (式6.2) 為例，使用此時諧場波源，一般若在計算域中欲使系統達到穩態，通常需要經過 3 至 5 個週期，其達到穩態的所需時間，也與散射物體所需的週期，以及散射物體的形狀和大小有關 [35]。

6.4.2 脈衝源 (impulsed-sourced)

脈衝源的頻譜範圍通常具有一定的頻寬，通過了解脈衝源，以及其頻譜特性，對於 FDTD 的計算上十分重要，以高斯脈衝函數為例，高斯脈衝在時域下的型式為：

$$E_i(t) = \exp\left(-\frac{4\pi(t-t_0)^2}{\tau^2}\right). \quad (6.5)$$

其中 τ 為常數，它決定了高斯脈衝函數的頻寬。脈衝的最大值出現在 $t = t_0$ 的時刻，時域下之高斯函數隨時間變化圖如圖6.5 所示。由於高斯函數經過傅立葉變換後，在頻域下，其波型仍然為一個高斯脈衝，因此可利用此一性質，方便的求出一個波源，在所關注的頻寬下的頻譜圖，進行進一步的分析。

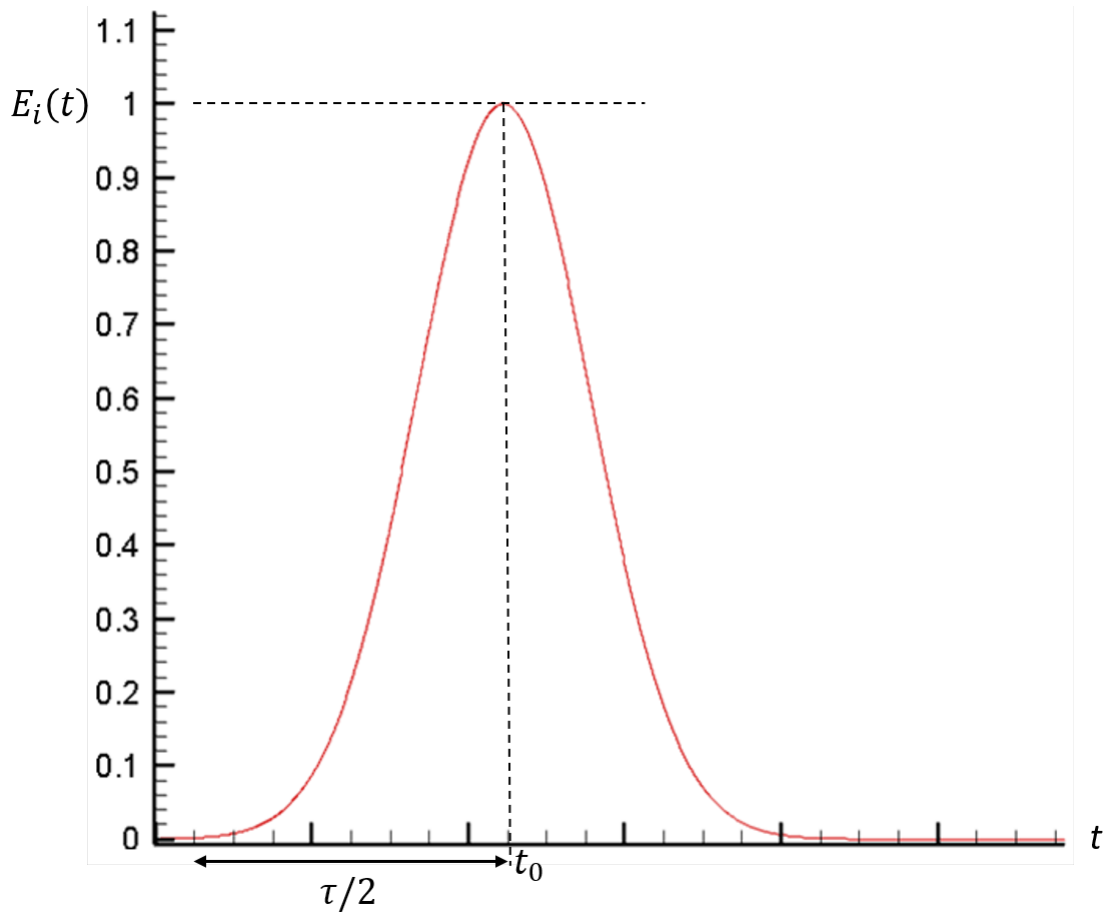


Fig 6.5: 高斯脈衝函數之時域波型。

6.5 模擬計算流程圖



圖6.6為本研究所開發之程式計算流程圖，且可求解全場/散射場問題，若所求解之問題與散射場無關，則可跳過第 E、G 以及 I 的步驟。以下為步驟流程說明：

A：引入材料檔至計算空間中

B：設定計算空間周圍的 PML 參數

C：設定計算空間中各節點位置之材料系數為 FDTD 之更新係數

D：在時間迴圈外 ($T = 0$)，給定一個入射波函數 (硬波源)，作為初始條件。

E：在時間迴圈外，把 ($T = 0$) 與時間迴圈內的第一個時間步 ($T = 1$)

切分成 100 個等分，透過入射波疊代副程式，使得曲線足夠的平滑。如果入射波曲線足夠平滑，則進入時間迴圈內進行 FDTD 疊代。

F：進入時間迴圈，呼叫 PRK-DRP FDTD 取得全場電場的一階微分項

G：呼叫全場/散射場副程式 (TFSF)，將散射場區域全場電場的一階微分項扣掉入射波電場的一階微分項，可得散射場電場之一階微分項，並儲存給下一步驟使用。若求解之問題不需考慮散射場，則跳過此步驟。

H：使用 ($T = n$) 電場之一階微分項儲存值進行疊代，可得 ($T = n$) 磁場的一階微分項，並更新 PML 係數

I：呼叫全場/散射場副程式 (TFSF)，將散射場區域全場磁場的一階微分項扣掉入射波磁場的一階微分項，可得散射場磁場之一階微分項，並儲存給下一步驟使用。若求解之問題不需考慮散射場，則跳過此步驟。

J：使用 ($T = n$) 磁場之一階微分項儲存值進行疊代，可得 ($T = n + 1$) 電場的一階微分項，並更新 PML 係數

I：呼叫全場/散射場副程式 (TFSF)，將散射場區域全場電場的一階微分項扣掉入射波電場的一階微分項，可得散射場磁場之一階微分項，並儲存給下一步驟使用。若求解之問題不需考慮散射場，則跳過此步驟。

L：使用 ($T = n + 1$) 電場之一階微分項儲存值進行疊代，可得 ($T = n + 1$) 磁場的一階微分項，並更新 PML 係數。

M：如果還沒完成疊代，則回到步驟 F；如果已經完成疊代，則輸出結果。

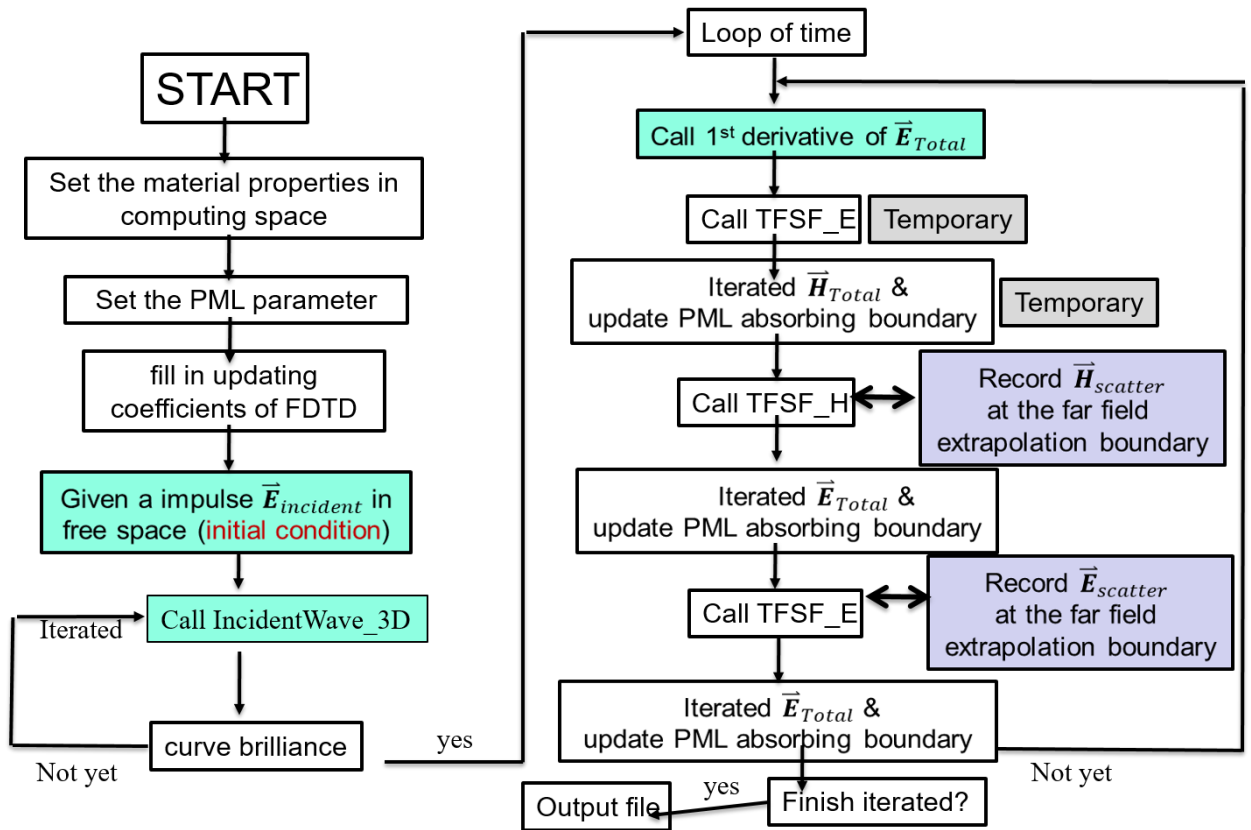


Fig 6.6: 程式計算之流程圖。

6.6 Apple iPhone4-like phone

我們所模擬的手機是 Apple iPhone4-like phone。手機的天線部分，利用了金屬外框作為天線的接收部以及輻射部，如圖6.7所示。通過主機板上的 RF-IC 將電信信號轉換為無線電波，並且透過內部的微帶貼片金屬天線輻射電路作為源項，透過位於微帶天線附近的發射端，將連續的正弦波無線電波，藉由 316L 不鏽鋼金屬材質邊框，作為輻射部發射與接收。本文考慮的連續正弦波之無線電波是由已經經過 RF-IC 轉換後的 900Mhz，600Mw 的 GSM 訊號以穩定正弦波動的模式，藉由天線的輻射性質，並且在天線輻射域中均勻的傳播出去 [36]。本文所模擬的手機 Apple iPhone4，是由天線、印刷電路板、LCD 液晶螢幕、面板外玻璃，以及正反面之塑膠外殼所組成。另外，針對色散介質-316L 不鏽鋼的手機框架 (包含外框輻射部) 的模擬方法，在接下來的章節裡將會進行特別討論。

<i>Material</i>	導電率 $\sigma(s/m)$	相對介電常數
Plastic	0.005	2.5
Air	0.0	1.00054
LCD Display	0.02	3.0
Circuit Board	0.05	4.4
Glass(Pyrex)	0	4.7

Table 6.1: Apple iPhone4-like phone 所參考的材料性質.

6.7 316L 不鏽鋼金屬邊框天線

iPhone4 的天線設計，是智能手機技術的一個劃時代的創新技術。在 iPhone4 發布之後，所有的智能手機公司開始使用與研發這樣的外框天線輻射部設計。有別於過往將手機天線置於手機內部，直接將輻射部作為邊框的天線設計，有效的利用了原需大量耗費在無線訊號上的手機功率，使得手機的能源更有效的利用，並且能夠獲得較佳的訊號收訊。Apple iPhone4-like phone 的所考慮的外殼部份，主要由三個部份所組成，其中包括兩塊強化玻璃分別位於 Apple iPhone4-like phone 的正面與背面，中間邊框的部分，則由 316L 材質的不鏽鋼金屬作為此一手機的天線輻射部。手機的外框依據不同功能，被分成了兩個主要的區塊；一個頻段區塊負責收發 Wifi、Bluetooth 和 GPS 信號，另一個頻段區塊負責收發 UMTS/GSM 信號。本文將研究重點著重於 UMTS/GSM 頻段之天線部所造成的輻射曝曬情形。表6.2中表示了 316L 的各項材質與參數。其中 ω_p 為 316L 之等離子震盪頻率、 γ_p 為阻尼係數 [2, 3]。求解此實際應用問題時，本文將特別針對 316L 不鏽鋼金屬邊框的色散介質材料部分，使用吾人所開發之可應用於色散介質上的二階 ADE-FDTD 方法 [19] 進行處理。

<i>Material</i>	ω_p (rad/s)	γ_p (rad/s)	σ (s/m)
316L Stainless steel	2.33E+16	9.74E+15	13.2E+06

Table 6.2: 316L 不鏽鋼的電磁材料特性.[2, 3]

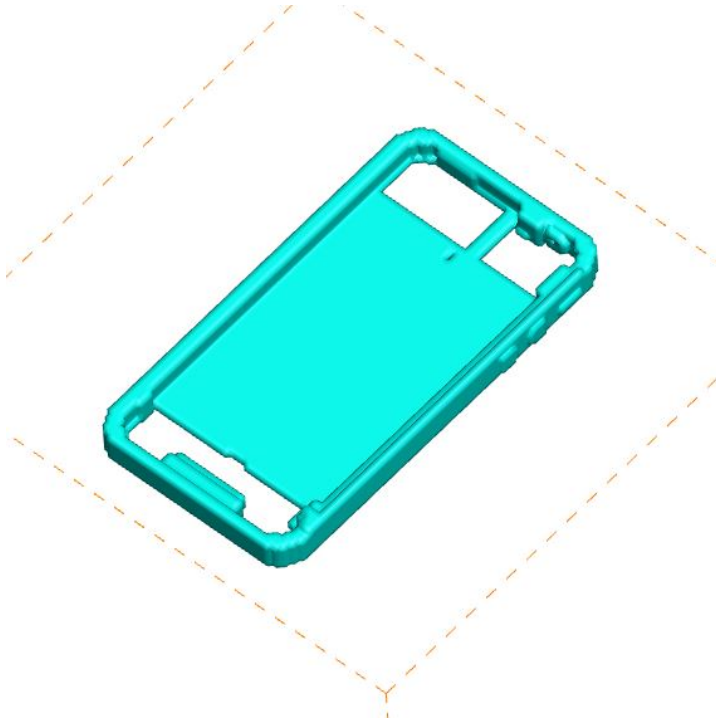


Fig 6.7: iPhone4 316L 不鏽鋼邊框之模型。

6.8 電源項之選取與其參考電路

本研究考慮 UMTS/GSM 頻段，發射功率為 600mW，工作頻段為 900Mhz。其中，電路圖如圖6.8所示 [37]。位於主機板上的射頻積體電路 (RF-IC)，將輸入訊號電流源轉換為射頻電流，最後通過傳輸線，將訊號傳送至塑膠塗料所包覆的微帶天線處 (即圖6.8的 Plastic component)。在微帶天線與金屬邊框之間，有一個饋電點，本文由功率為 600mW，頻率為 900Mhz，作為饋電點處的簡化電源正弦訊號，並且將訊號直接饋入了 316L 金屬邊框的饋電點，作為所使用之電壓源，並進行模擬預測。

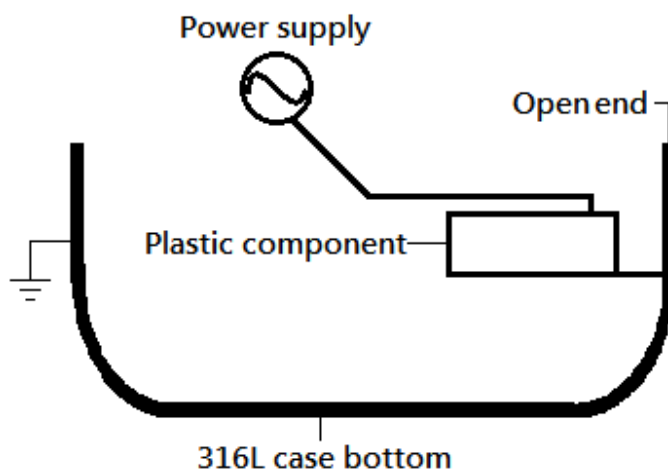


Fig 6.8: iPhone4 UMTS/GSM 頻段之參考電路圖。

6.9 模擬頭部模型

在進行手機通話的過程中，手機通常緊貼在頭部一側的耳朵上，我們考慮手機直接接觸頭部的姿勢進行了分析。這樣的握姿，手機與頭部之間沒有其餘介質，因此，由天線處所直接發射出的近場電磁場的能量將會被頭部大量的吸收，少部分能量則被人體吸收，其餘的低頻電磁波將於自由空間中傳播至訊號台。然而，被人腦大量吸收的 RF-EMF，將通過正弦發射波的穩定震盪，直接影響了大腦神經元的活動，並且將接收來自手機收受低頻電磁場輻射之信號後，藉由低頻電磁場所轉換而來的聲音訊號，將訊息傳送至被顱骨所環繞其周圍的人腦。因此，手機所產生出的電磁能量，在使用過程中，有可能會影響了腦細胞。由於一些生物實驗已經證實，曝曬在近場電磁場下的白老鼠將會有比較高的癌症發生率。因此，我們考慮最直接影響人頭部的手機使用姿勢進行模擬。我們所考慮的人頭部器官與組織圖 [38] 是參考了 grabcad.com 的 CAD 模擬頭部，這個完整的頭部模型在計算空間中由 256 層切片所組成，並且，每個切片由 256x256 的網格密度所組成，每一個邊界面都由 22 層 CPML 所包圍。本研究考慮 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.001m$ ， $CFLnumber = 0.2$ ， $t = 6.67E - 13$ 秒，計算時間長為 5000 個 Δt 。圖 6.9 中顯示了所考慮的模型組成。由皮膚、肌肉、頭部骨骼，以及大腦、小腦、腦幹的個別組織亦被考慮在內。其中，這些器官在頻率為 900Mhz 情況下的相對介電常數、密度、以及導電率如下表 6.3 所示。

<i>Organs</i>	ϵ_r	ρ (kg/m ³)	σ (s/m)
Skin	41.4	1010	0.87
Muscle	55.0	1040	0.94
Bone	21.0	1810	0.32
Brain	54.7	1040	1.19
Cerebellum	49.6	1040	1.03
Hypophysis	49.6	1040	1.03

Table 6.3: 本研究所使用的人體器官材料特性。

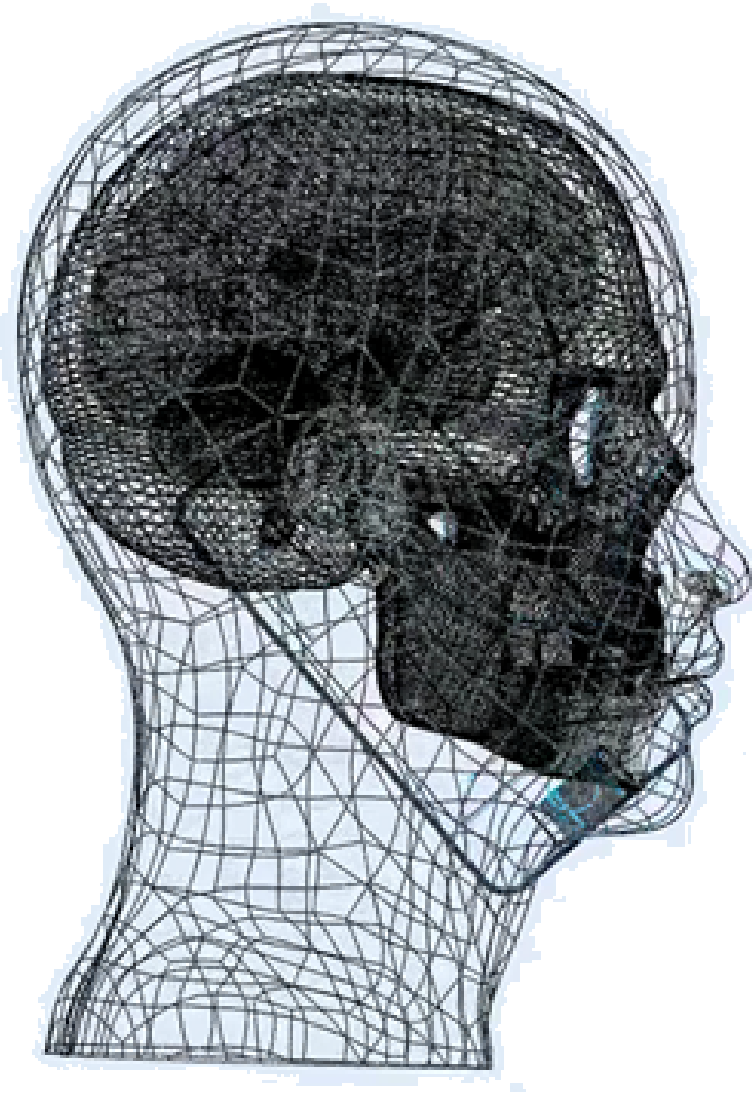


Fig 6.9: 人體頭部之結構圖。

6.10 大腦

人腦是由大腦、腦幹、間腦以及小腦所組成。腦幹包括中腦、腦神經以及髓質。其中，大腦佔據了腦部的最大體積。大腦的兩個腦葉主要負責了人類認知能力以及意識。如果腦中的灰質吸收了夠多的手機輻射，是否有可能影響了視覺、聽覺、語言和記憶等等感覺的處理，是人類一直以來所待確定的問題。灰質佔據了腦部約 40% 的比例，主要分布在大腦外部，其餘部份則為大腦的白質，用來傳遞灰質所接收到的區域訊息。小腦則是與人體姿勢協調與運動相關。腦幹則是維持了生命機能以及神經系統，主要功能是調節人體呼吸、心跳速度以及管理消化的功能。



6.11 特定比吸收率 (SAR)

為了了解從手機發射的近場射頻電磁波對人體的生物效應，必須知道被人體所吸收的能量，以及近場射頻電磁波在人體組織吸收過程的分布。定義電磁特定比吸收率 (SAR)，以作為人體組織在近場射頻電磁場曝曬時，為了計算上使用，近場射頻電磁波被吸收之標準公式被定義如下 [39]。

$$SAR = \frac{\sigma|E|^2}{2\rho} \quad (6.6)$$

SAR 的單位是瓦特/每千克 (W/kg)。其中 σ 是人體組織導電率，E 是電場強度， ρ 是人體組織密度。其中表 5 中的組織密度與工作頻率無關，相對介電常數以及導電率的選取，使用工作頻段為 900Mhz 時之測量值，在固定工作頻段為 900Mhz 時作為常數。本研究將針對顱骨、肌肉組織、皮膚和腦部，進行 SAR 的模擬預測。根據 Citkaya 和 Seker [36] 的文獻指出，使用人體頭部模型進行電磁波模擬時，必須謹慎選擇合適的位置、範圍、以及符合一般模擬所使用之 SAR 相關組織參數與合理的電磁頻段進行模擬，本研究所參考之 GSM 工作頻段為 900Mhz 介於 100Khz 到 6-10Ghz 之間，確實被包含在有意義的質量平均 SAR [40] 範圍內。



第七章 模擬實際問題之結果與分析

透過第二章所描述的電磁波模型系統，以及第三章所提出的顯式 FDTD 數值模型，連同人體頭部組織參數以及所選取的手機及其工作頻段，我們通過求解三維非交錯網格下之馬克斯威爾方程組，並綜合討論不同人體組織內的 SAR 分布，與相關文獻中的實驗結果，和本文的模擬結果進行比較，並且針對幾項對 SAR 具有重要影響的人體參數進行觀察與討論。

7.1 316L 邊框-訊號天線部之輻射情形分析

圖7.1顯示了所考慮的 GSM 手機天線的外框天線輻射部，透過饋電點輸入至天線輻射部的電場傳遞情形，從時間 $T=100\Delta t$ 到 $T=500\Delta t$ 的五個不同時間步。圖示中清楚的表現出，所參考使用的 316L 不鏽鋼金屬外框天線確實具備了區分 Wifi、Bluetooth 和 GPS 信號區塊以及 UMTS/GSM 的頻段區塊，且兩個不同頻段區段的天線作用時將不會互相影響。

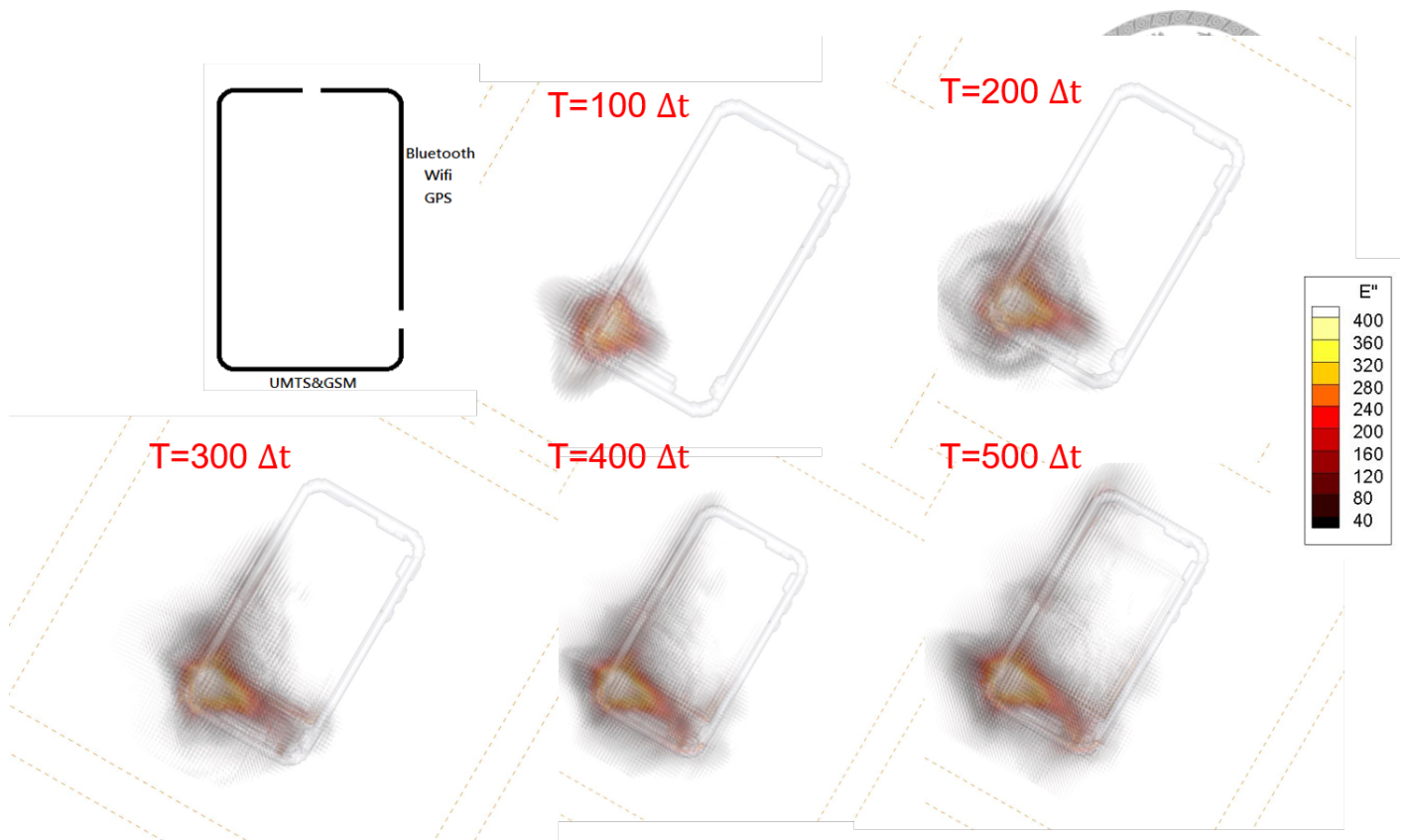


Fig 7.1: Apple iPhone4-like 的 316L 不鏽鋼金屬外框天線輻射部的結構，于 $T=100\Delta t$ 到 $T=500\Delta t$ 在五個不同時間點的電場傳播情形。

根據 IEEE 標準 (IEEE Std C95.1-2005) [41]，平均每十克人體組織，其 SAR 值的安全標準不得超過 2.0W/kg 。另外，根據 FCC (聯邦通信委員會) 的安全規定，要求手機對人體的 SAR 曝曬程度不得超過 1.6W/kg [42]。根據表 7.1 可以看出，Apple iPhone4 (型號 A1332) 的手機測量 SAR 值符合了射頻電磁場暴露的上述規定。

The highest SAR values of Apple iPhone4 (model A1332)	
1.6W/kg (over 1g) SAR limit	1.17
2.0W/kg (over 10g) SAR limit	0.93

Table 7.1: Apple iPhone4 (model A1332) 產品的真實量測值 [4]。

7.2 電磁輻射效應於頭部組織內之模擬結果



本章節將介紹模擬預測的結果。表7.2 表示了頭部各器官組織其電場強度、能量比、該器官組織內部最大電場強度以及該器官組織的於頭部之體積比。圖7.2 為使用者在進行手持手機通話時，頭部組織內之手機輻射電場強度分布情形，並分別觀察表7.2 中，各器官組織之 $|E_{max}|$ 之 30% 以上能量分布情形，如圖7.3 至圖7.3。圖7.8為使用者在手持手機進行通話時，由左耳到右耳的剖面尺寸、各個器官組織導電率，以及在第 $5000\Delta t$ 時的電場強度在不同器官組織的分布情形。

在總計算時間，將各個組織分別 SAR 最大值的發生位置的座標點記錄下來。接著把注意力放在這些最大值發生的位置作為觀察點。然後，我們將 SAR 的峰值記錄下來，如表7.3所示。記錄以該紀錄點為圓心，針對周圍球面積，取每單位克組織以及每十克組織的 SAR 值平均值，如表7.4所示。如圖7.9所示，我們針對這些觀察點，吾人審視在 Δt 到 $5000\Delta t$ 的時間內，電場強度之變化情形。

<i>organ</i>	<i>total E </i>	<i>energy ratio</i>	$ E _{max}$	<i>volume ratio</i>
brain	456.0319	8.38%	0.223075	18.34%
cerebellum	161.9135	2.98%	0.35528	2.66%
bone	838.2882	15.41%	1.14534	15.71%
muscle	2151.4652	39.54%	1.81865	42.95%
skin	1832.7249	33.69%	30.85192	20.34%
all of head	5440.4237	100.0%	30.85192	100.0%

Table 7.2: 頭部各器官組織其電場強度、能量比、該器官組織內部最大電場強度以及該器官組織的於頭部之體積比。

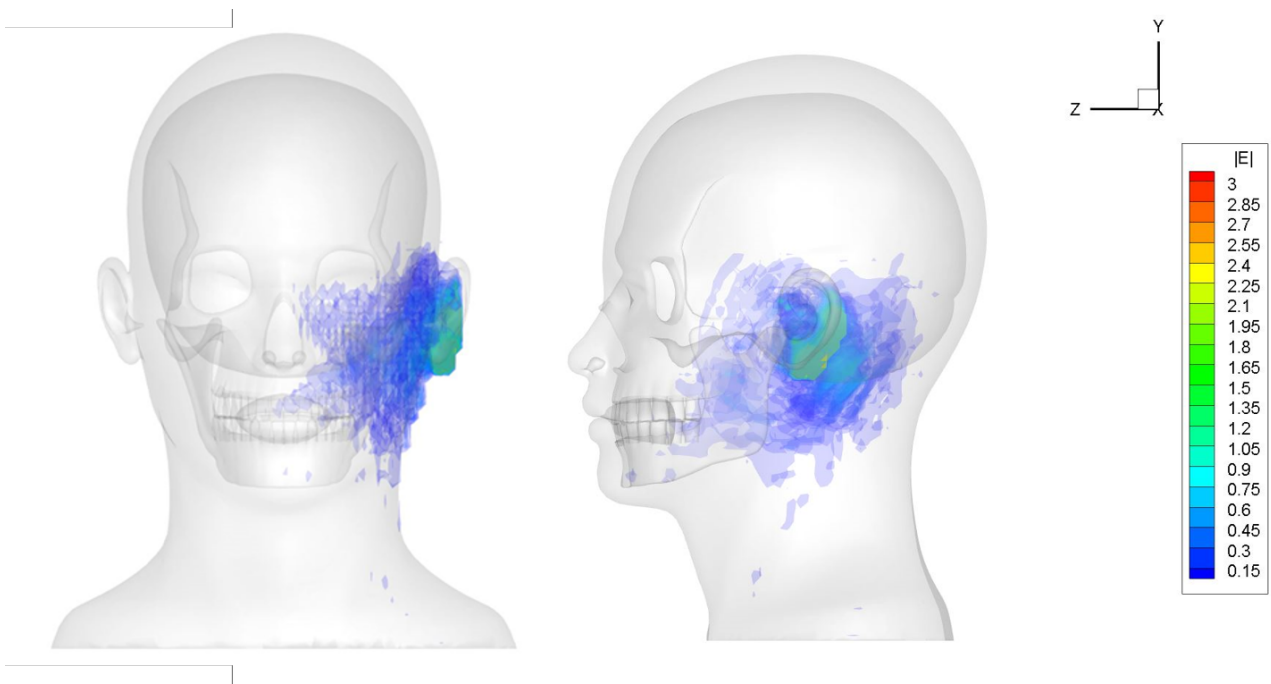


Fig 7.2: 頭部組織內手機輻射之電場強度分布之模擬結果。

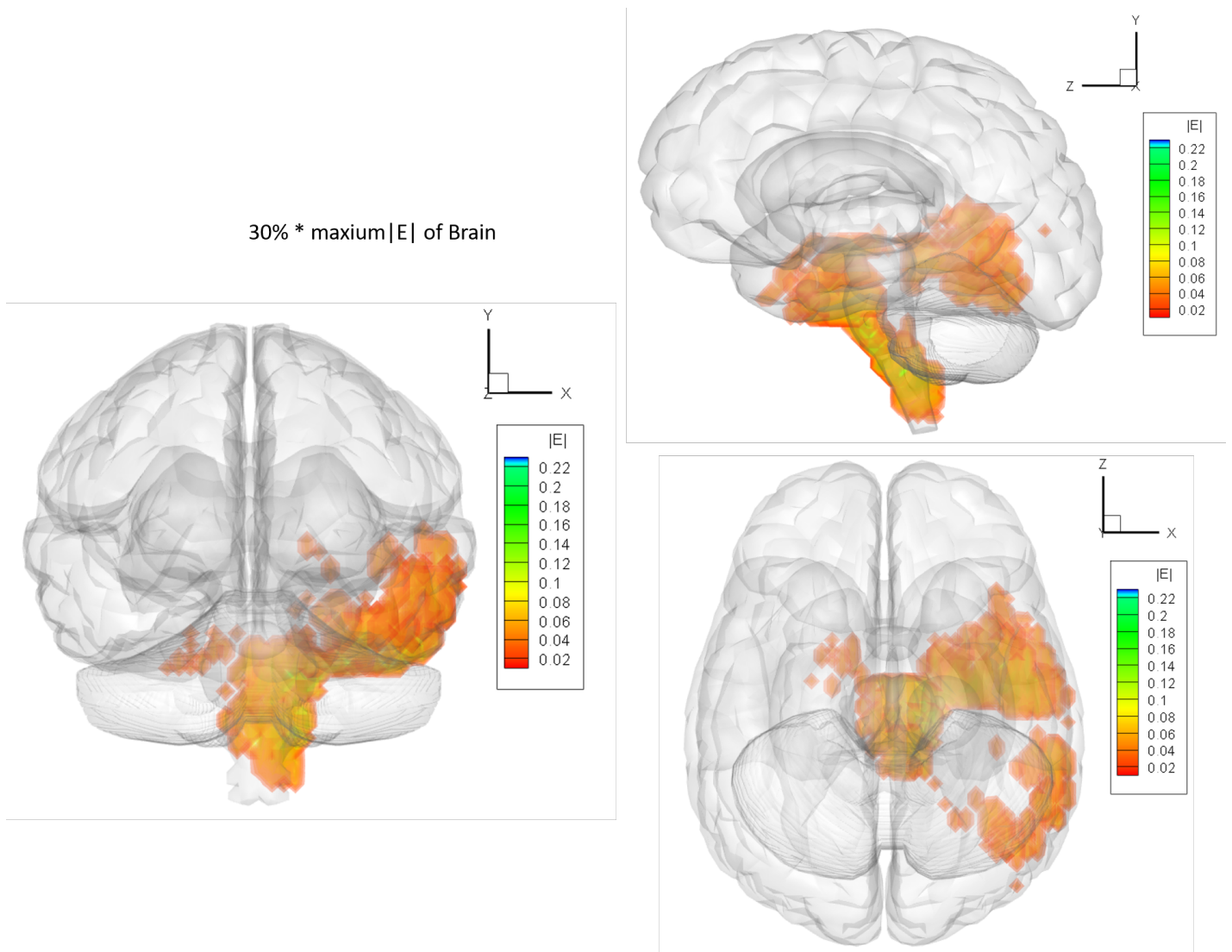


Fig 7.3: 大腦及腦幹組織之電場強度分布情形。

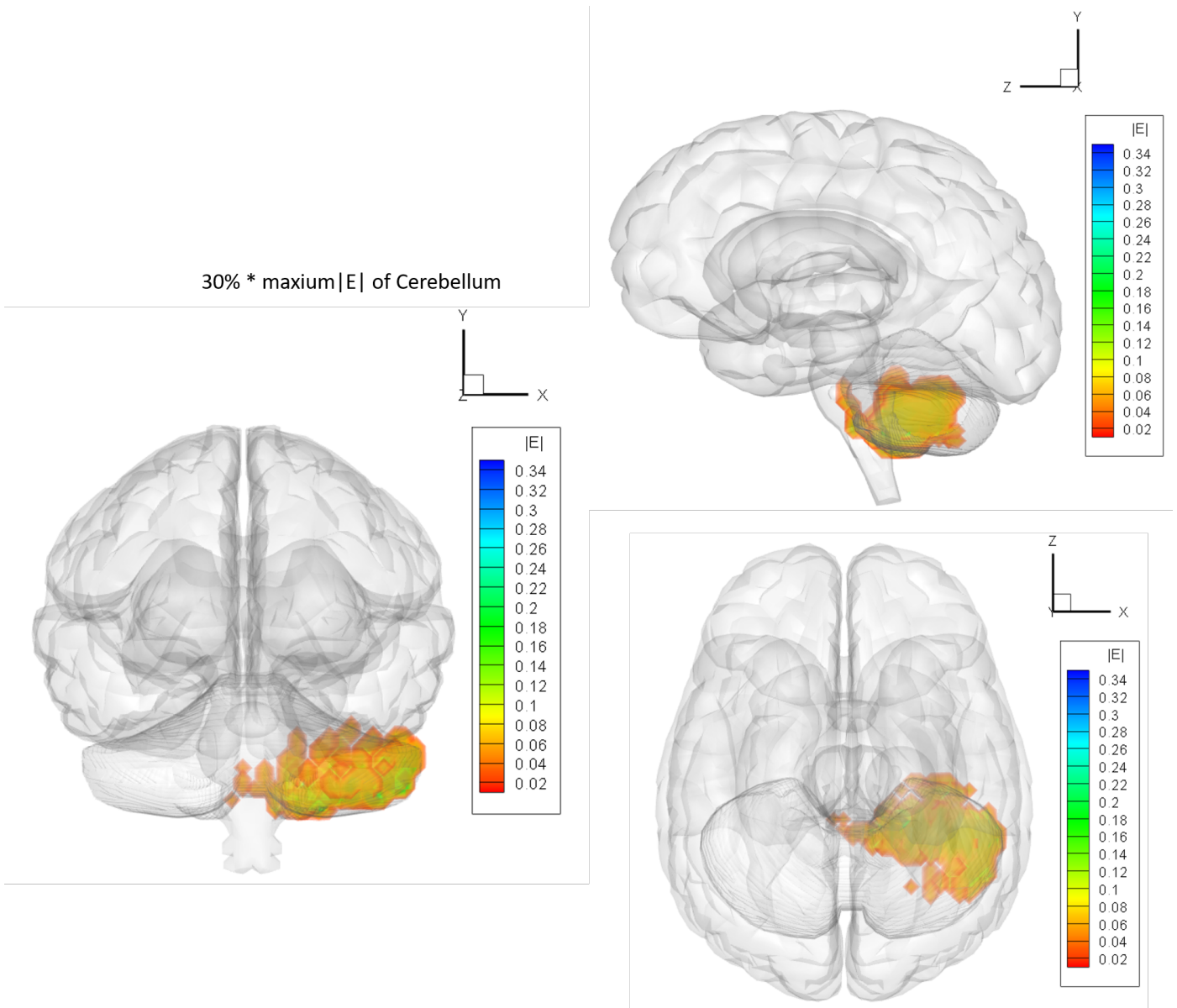


Fig 7.4: 小腦組織之電場強度分布情形。

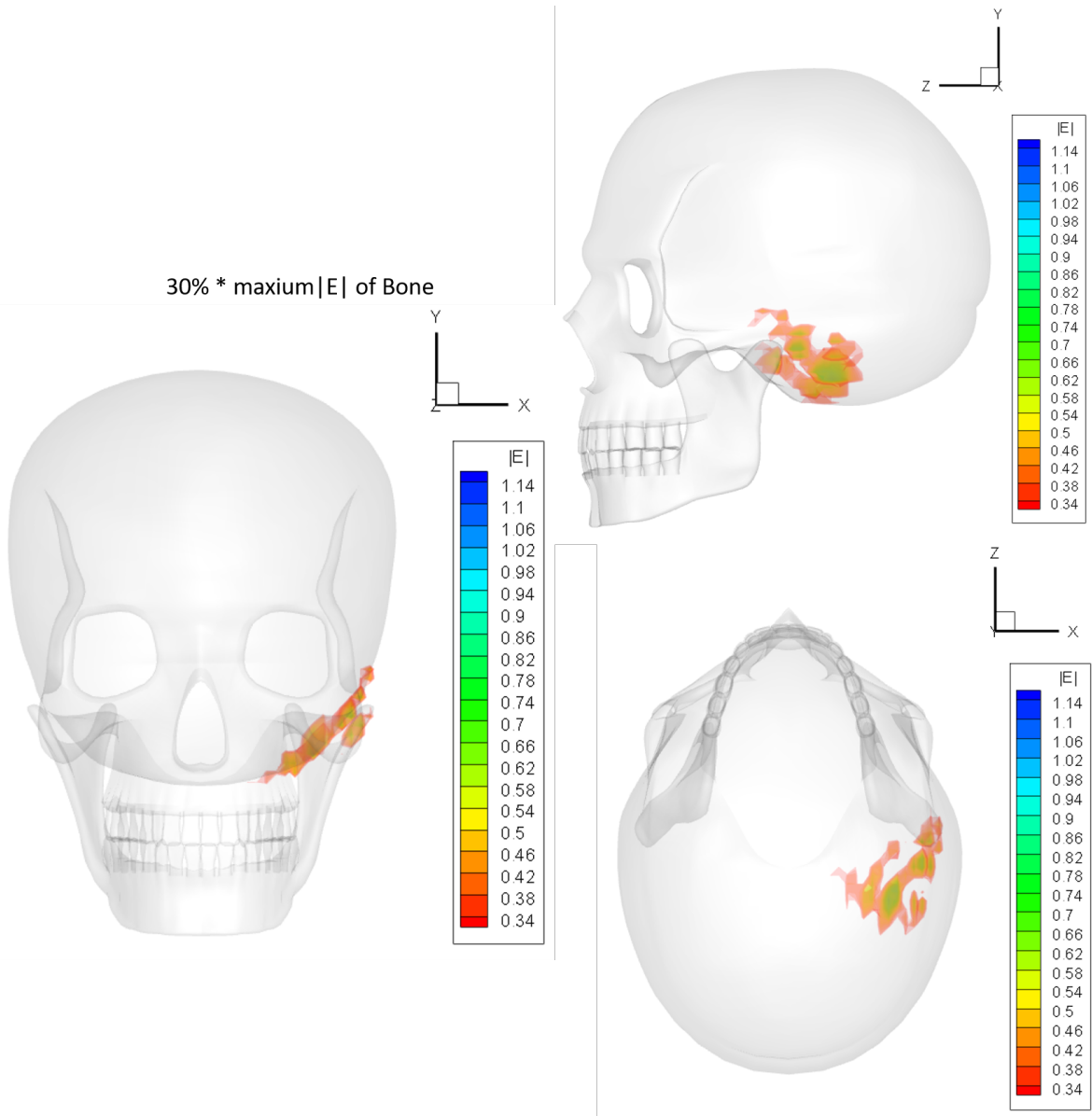


Fig 7.5: 顱骨之電場強度分布情形。



30% * maxium|E| of Muscle

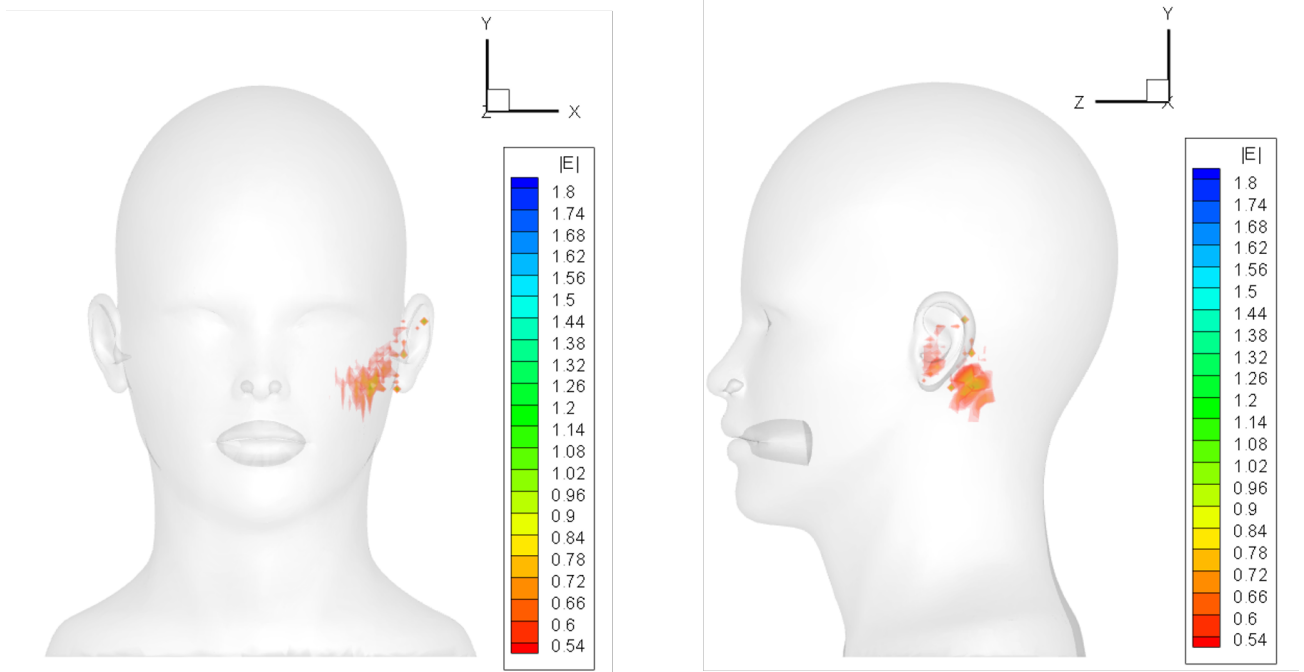


Fig 7.6: 肌肉組織之電場強度分布情形。



30% * maxium|E| of skin

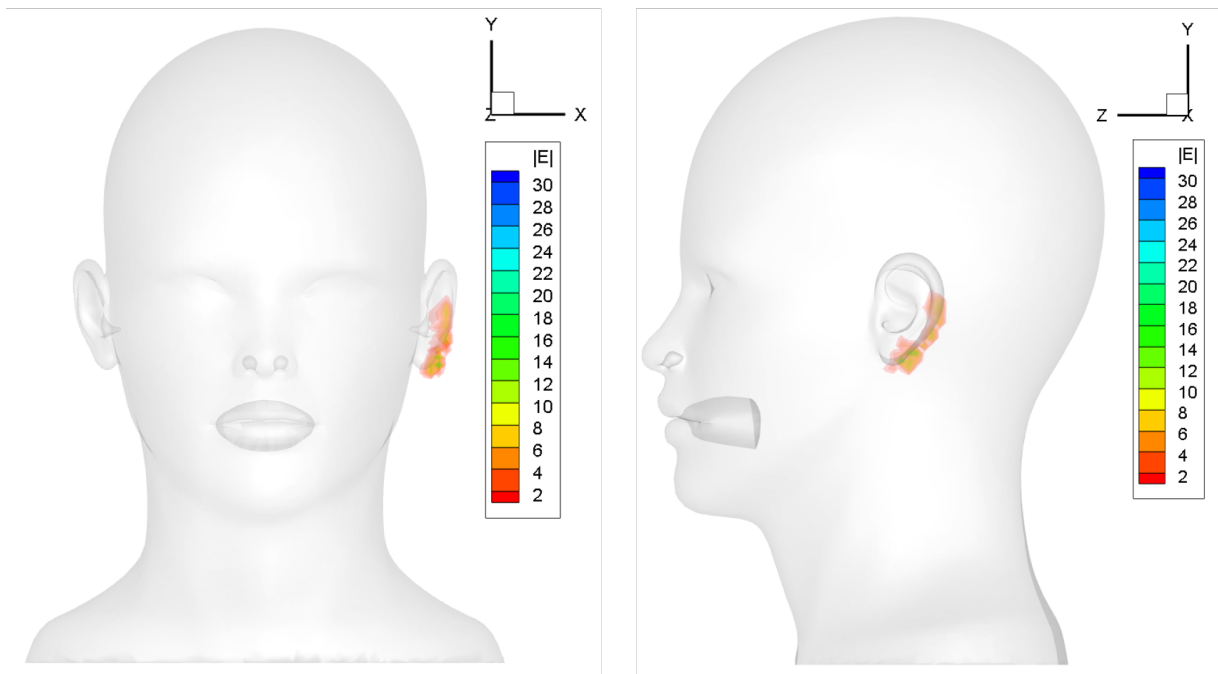


Fig 7.7: 皮膚組織之電場強度分布情形。

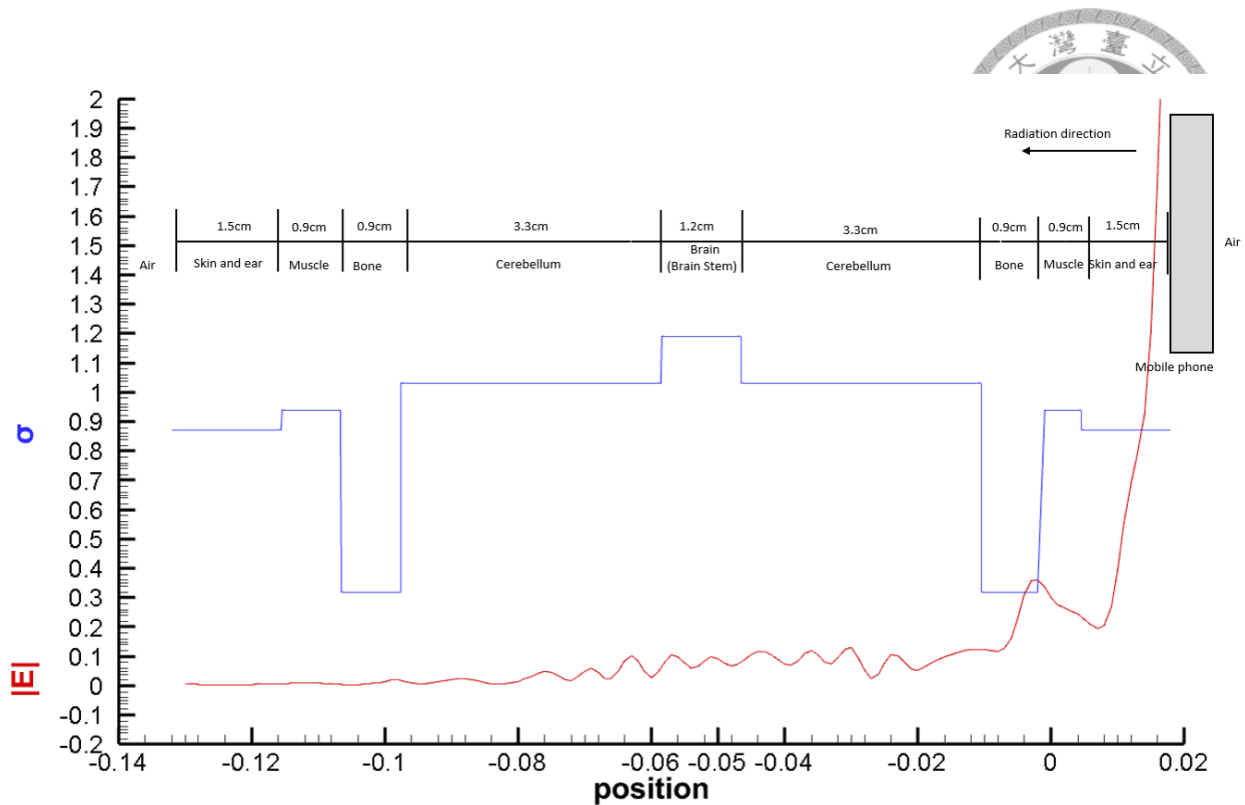


Fig 7.8: 由左耳到右耳，所考慮之人體組織層的截面尺寸、導電率大小以及電場強度分布。

<i>Organ</i>	SAR_{peak}
Skin	1.17983
Muscle	9.89E-03
Bone	1.84E-04
Brain	1.24E-05
Cerebellum	1.06E-04

Table 7.3: 在 $5000\Delta t$ 的計算時間內，不同器官組織的 SAR_{peak} 之模擬結果。

<i>Organ</i>	SAR_{peak}	SAR_{1g}	SAR_{10g}
Skin	1.17983	6.49E-02	1.26E-02
Muscle	9.89E-03	6.05E-03	4.10E-03
Bone	1.84E-04	1.81E-04	1.39E-04
Brain	1.24E-05	6.65E-05	7.95E-05
Cerebellum	1.06E-04	3.68E-05	4.70E-05

Table 7.4: 不同器官組織的 SAR_{peak} 、 SAR_{1g} 和 SAR_{10g} 模擬結果。

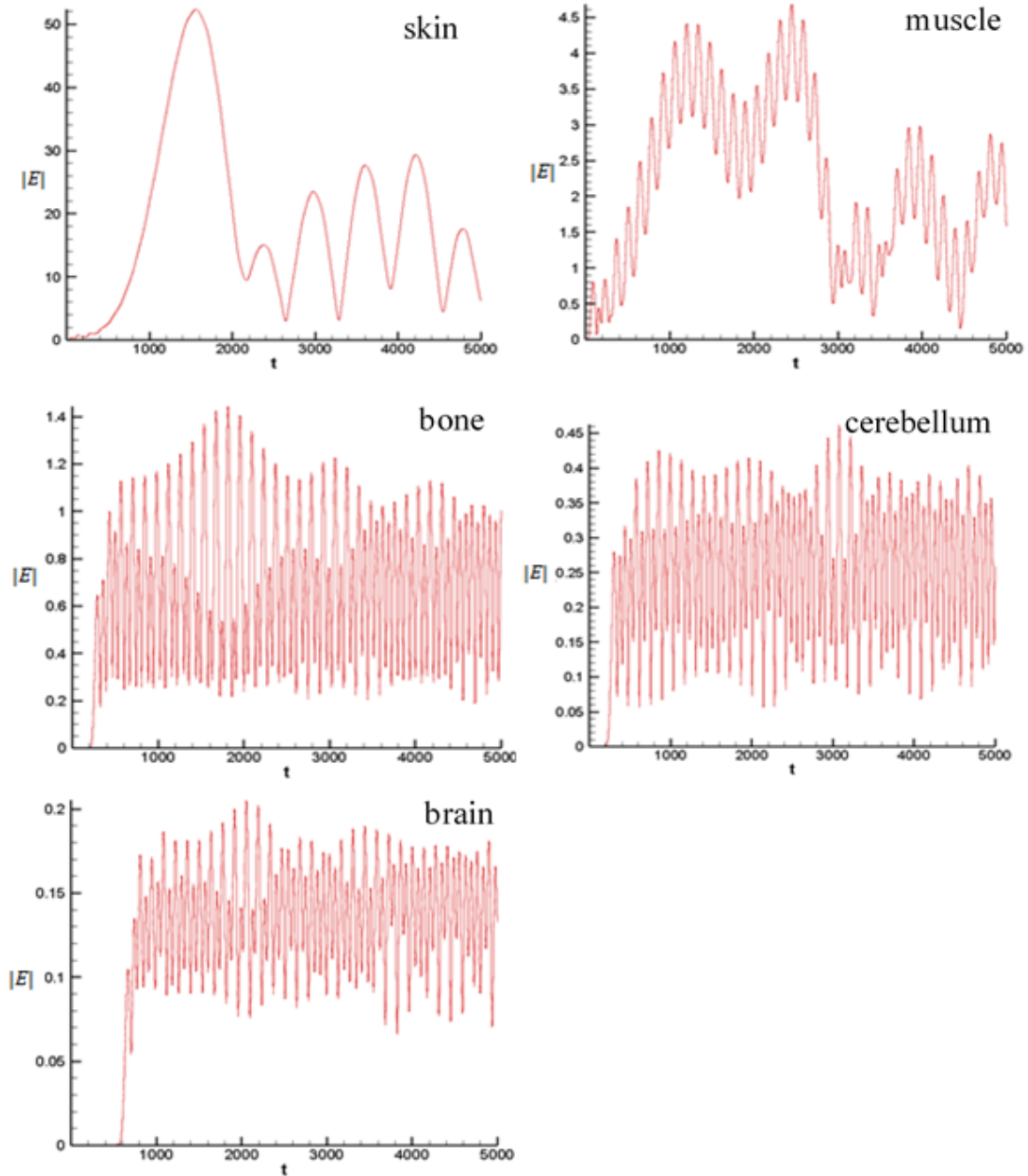


Fig 7.9: 人體組織最大 SAR 發生處在總模擬時間為 $5000\Delta t$ 的電場大小值 $|E|$ 。

7.3 人體頭部骨骼的電磁輻射防護性

本章節是為探討顱骨是否具有對大腦的輻射保護能力，因此，吾人透過將顱骨的材質移除，並由肌肉組織代替，再一次進行了模擬預測。其中，無顱骨的情況下，表7.5表示了頭部各器官組織其電場強度、能量比、該器官組織內部最大電場強度以及該器官組織的於頭部之體積比。圖7.10為移去顱骨後，頭部組織內手機輻射之電場強度分布之模擬結果。頭部剖面尺寸圖以及不同器官組織的導電率大小及電場強度分布情形，如圖7.15所示。圖7.16、7.17則顯示了當移除顱骨後，大腦與小腦中，吾人的注意力集中之觀察點位置，其電場大小與原始模型之比較圖。比較後，可以清楚的發現，當去除顱骨後，與有顱骨的模擬情形下，相同觀察點的電場大小之振幅明顯的增高，由此結果可得知，顱骨具有一定程度之防護人腦受輻射曝曬的作用。

<i>organ</i>	<i>total E </i>	<i>energy ratio</i>	$ E _{max}$	<i>volume ratio</i>
brain	457.1899	9.03%	0.2883	18.34%
cerebellum	157.7191	3.11%	0.4170	2.66%
bone	-	-	-	-
muscle	2702.5209	53.35%	1.8554	58.66%
skin	1747.8232	34.51%	30.86763	20.34%
all of head	5065.2530	100.0%	30.86763	100.0%

Table 7.5: 移去顱骨後，頭部各器官組織其電場強度、能量比、該器官組織內部最大電場強度以及該器官組織的於頭部之體積比。

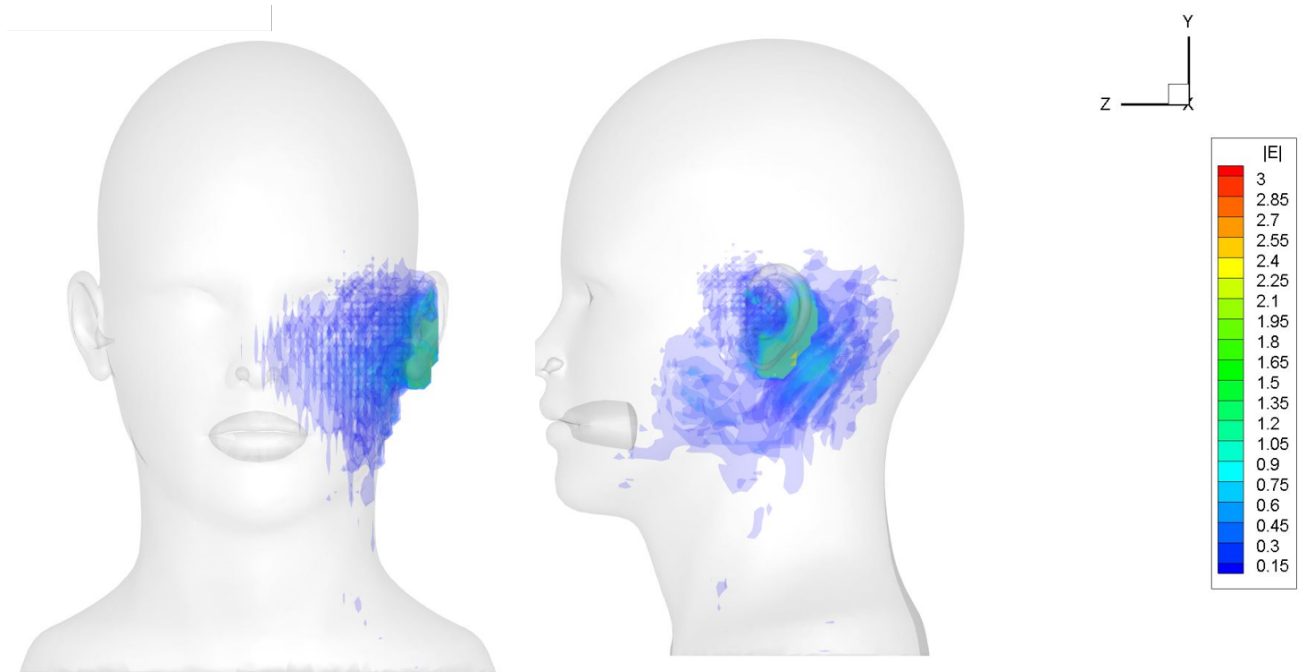


Fig 7.10: 移去顱骨後，頭部組織內手機輻射之電場強度分布之模擬結果。

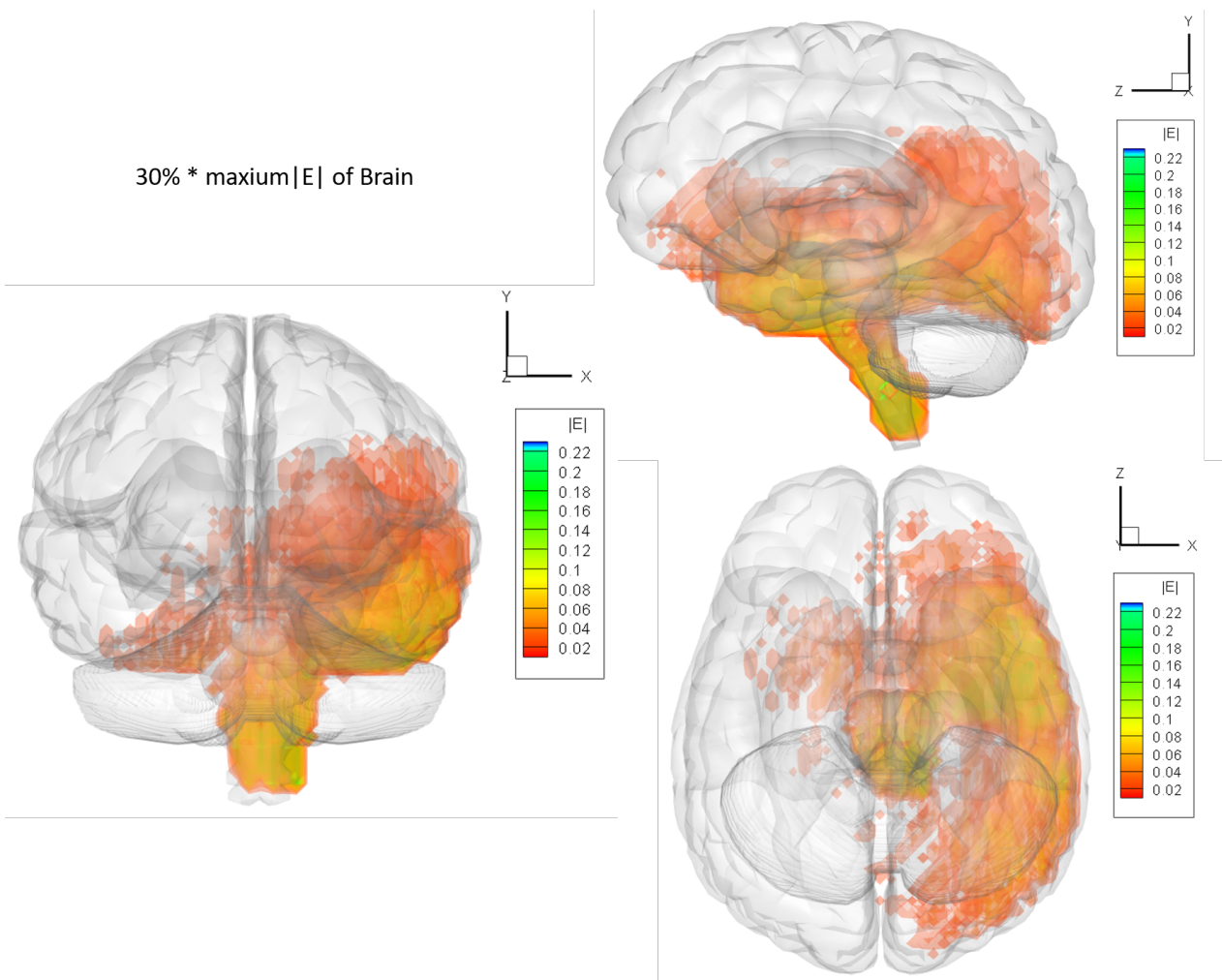


Fig 7.11: 移去顱骨後，大腦及腦幹組織之電場強度分布情形。

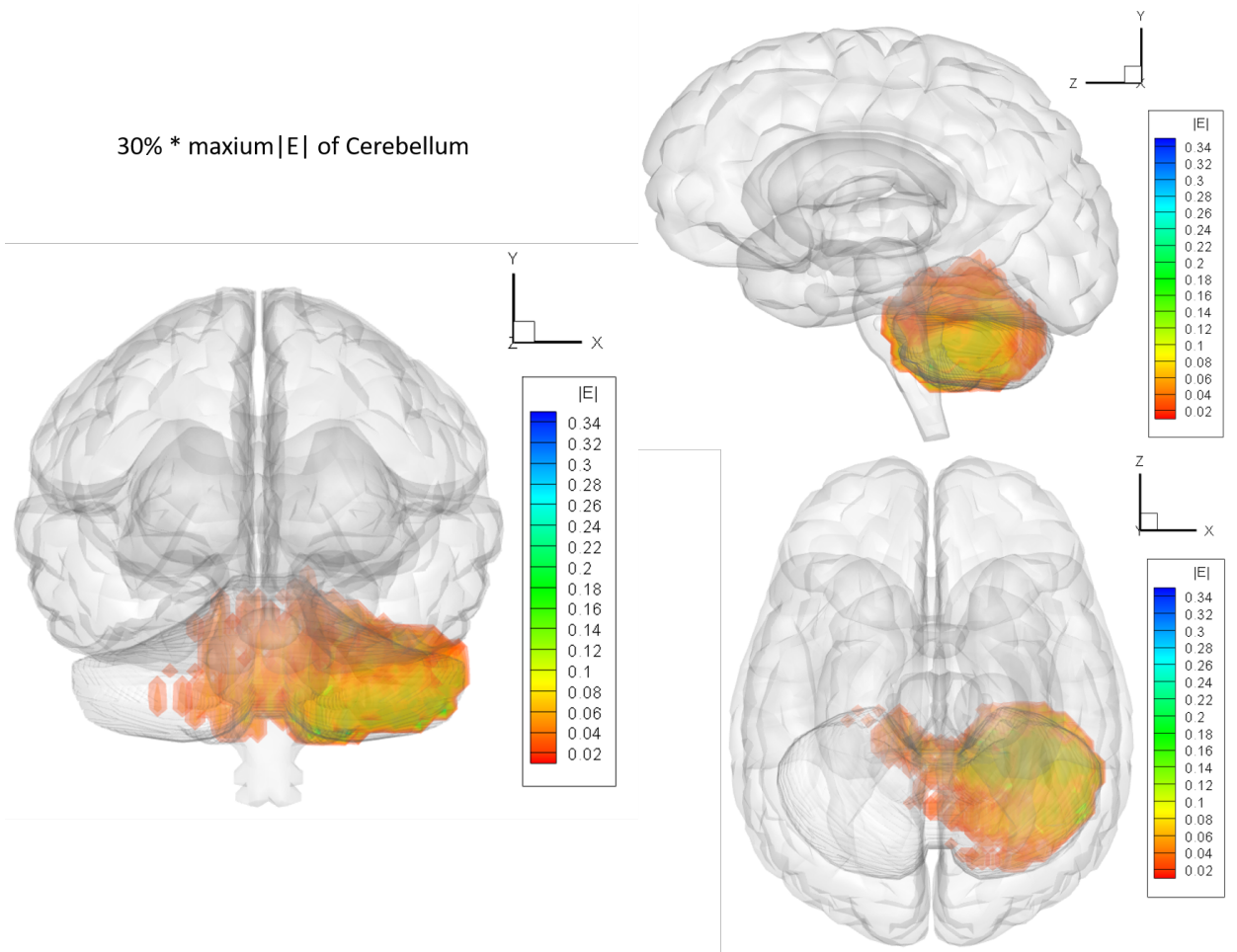


Fig 7.12: 移去顱骨後，小腦組織之電場強度分布情形。



30% * maxium|E| of Muscle

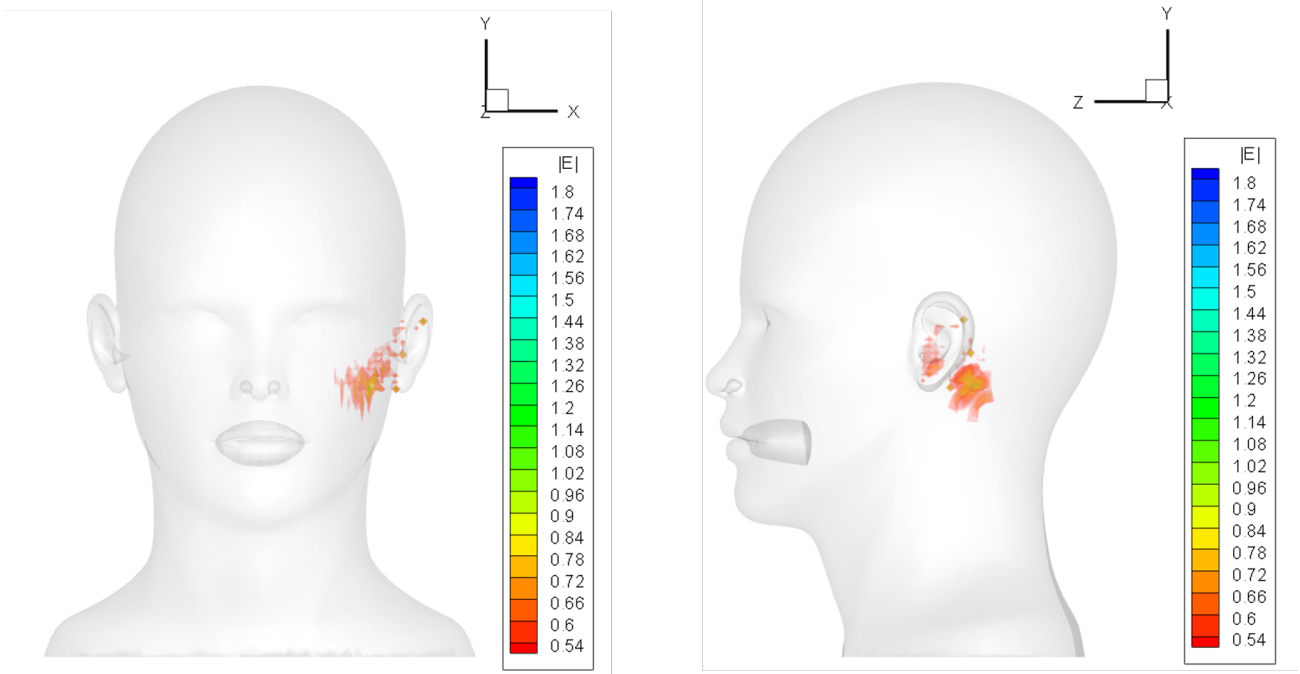


Fig 7.13: 移去顱骨後，肌肉組織之電場強度分布情形。



30% * maxium|E| of skin

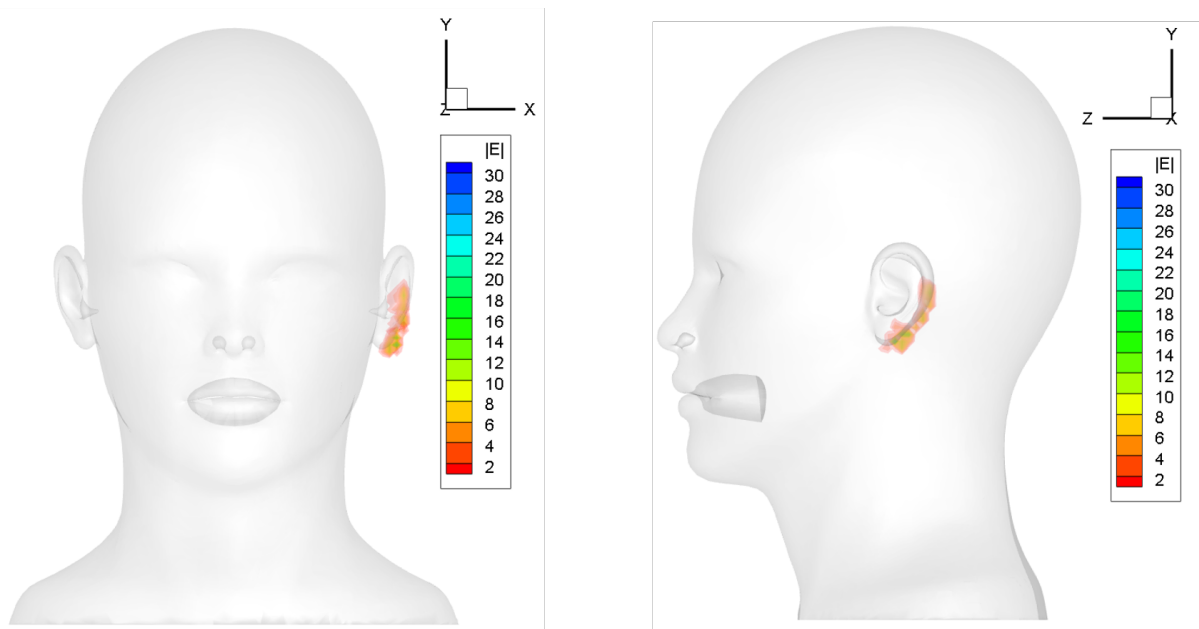


Fig 7.14: 移去顱骨後，皮膚組織之電場強度分布情形。

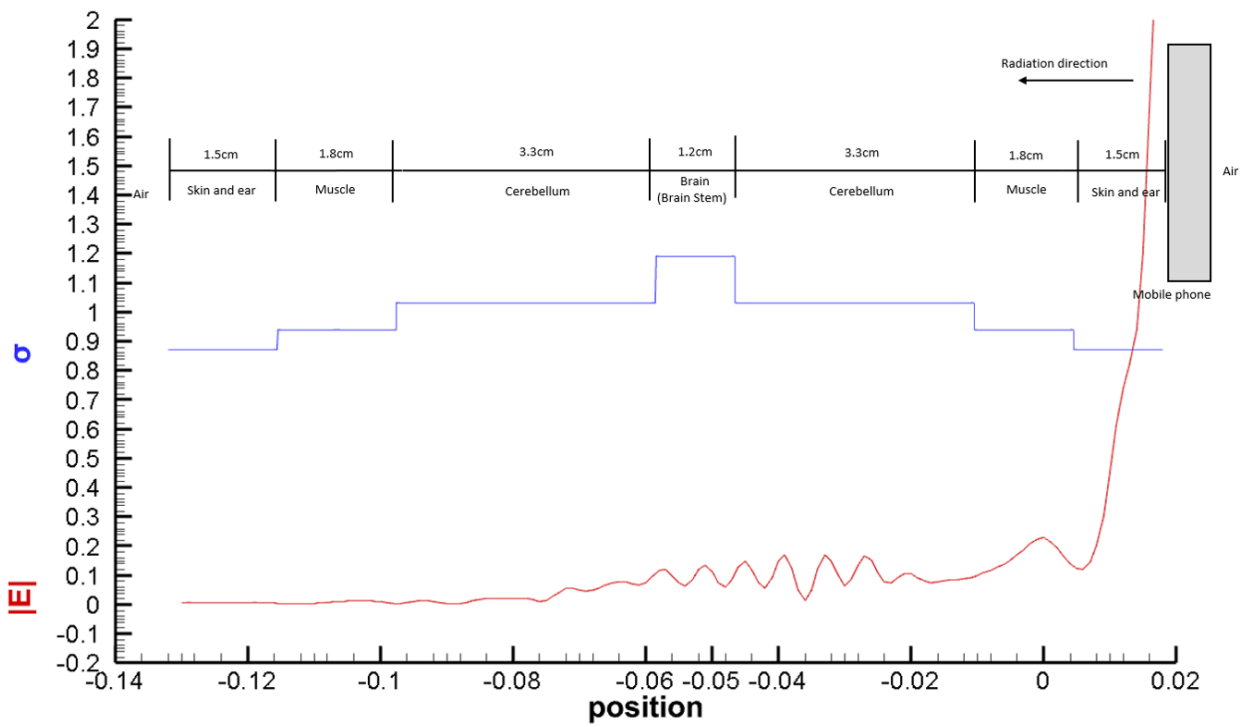


Fig 7.15: 移去顱骨後，由左耳到右耳，所考慮之人體組織層的截面尺寸、導電率大小以及電場強度分布。

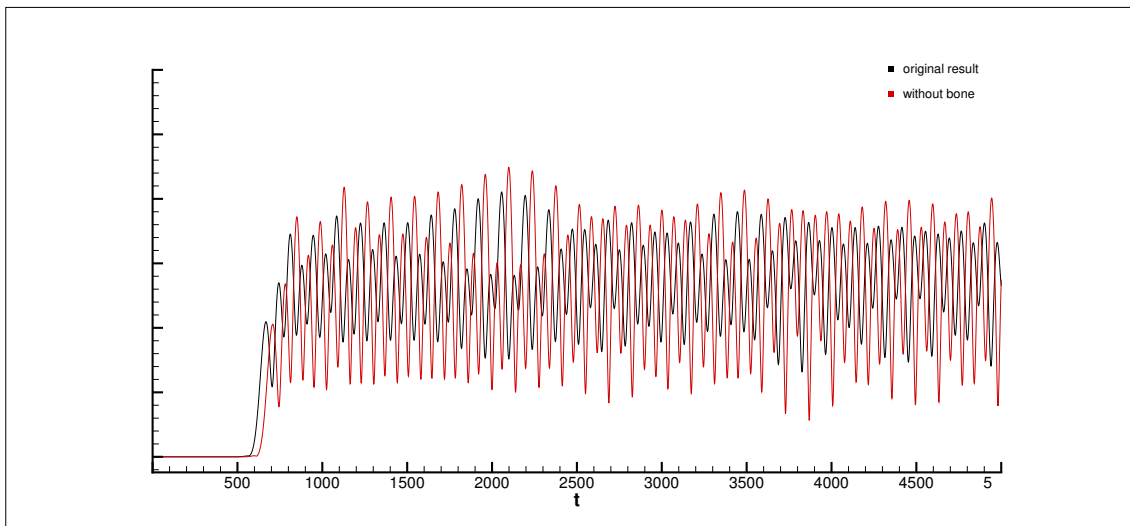


Fig 7.16: 大腦內，SAR 最大值發生位置，在 $5000\Delta t$ 的時間範圍內，將原本的模擬結果和移除顱骨後的模擬結果進行比較。

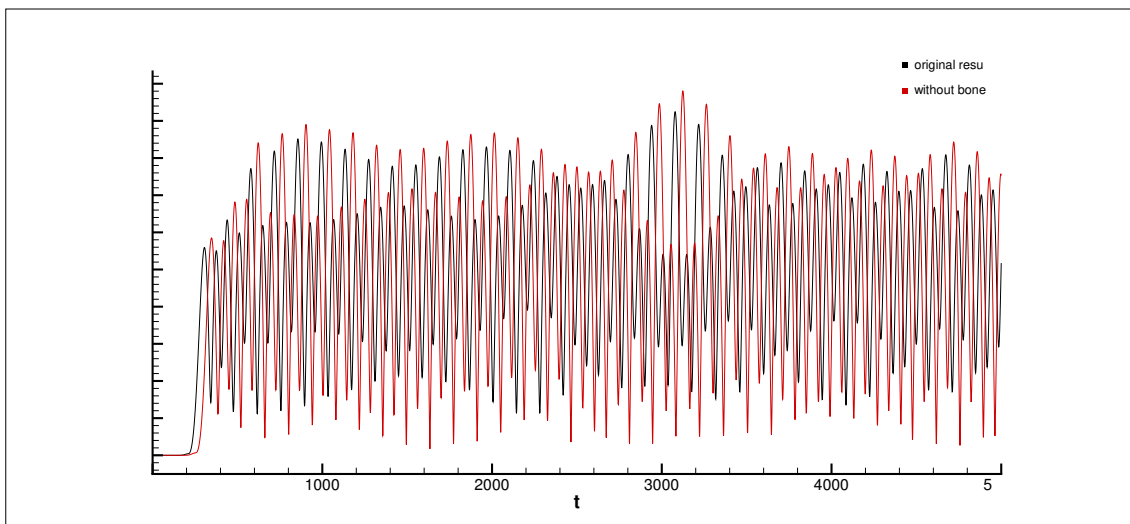


Fig 7.17: 小腦內，SAR 最大值發生位置，在 $5000\Delta t$ 的時間範圍內，將原本的模擬結果和移除顱骨後的模擬結果進行比較。

7.4 大腦/腦幹與小腦的電場強度分布之模擬結果

在一些研究中，顯示了暴露在低頻射頻電磁場的生物實驗樣本，其癌症發病率高於正常樣本 [43]。對吾人所關心的人體組織器官而言，SAR 值的分布將受到電場強度大小的直接影響。圖 7.19 中顯示針對腦組織部分，包括大腦含腦幹，以及小腦的電場強度分布的模擬結果，吾人得以觀察出，在靠近輻射源的一側，大腦的側葉、腦幹、以及小腦的後葉，分別具有明顯的電場吸收累積情形。其中腦幹負責維持生命，大腦側葉負責聽覺，小腦的後葉負責人體的內分泌系統。因此，為了防止與避免輻射的危害，吾人應避免手機使用者在使用手機通話的時候把手機緊貼在耳朵上，或建議使用免持聽筒，這樣的方式，可以避免當人體組織或頭部組織直接曝曬在手機的近場低頻電磁輻射場下。

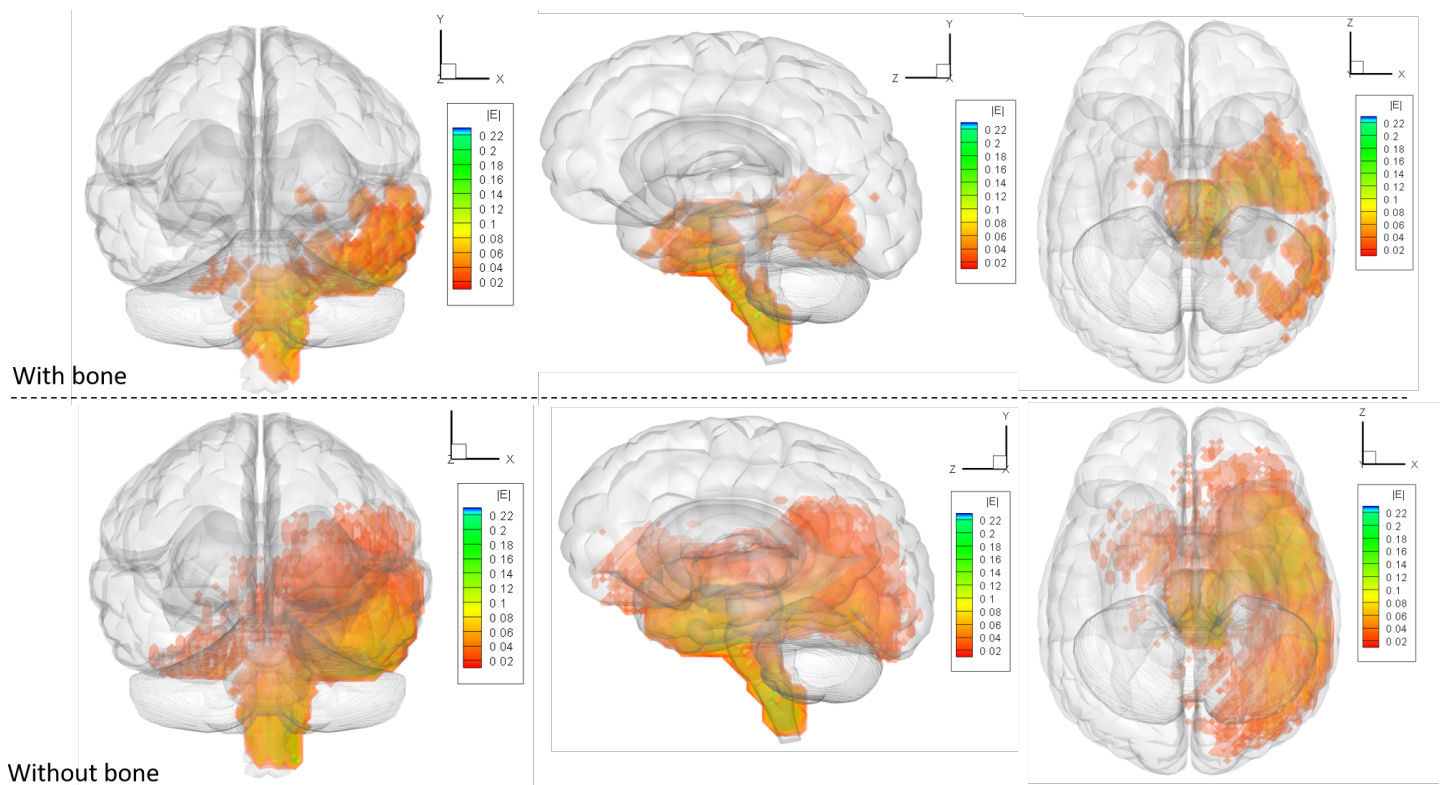


Fig 7.18: 大腦及腦幹組織於各單位格點於計算時間為 $5000\Delta t$ ，比較有無顱骨時的電場強度 $|E|$ 之分布結果。

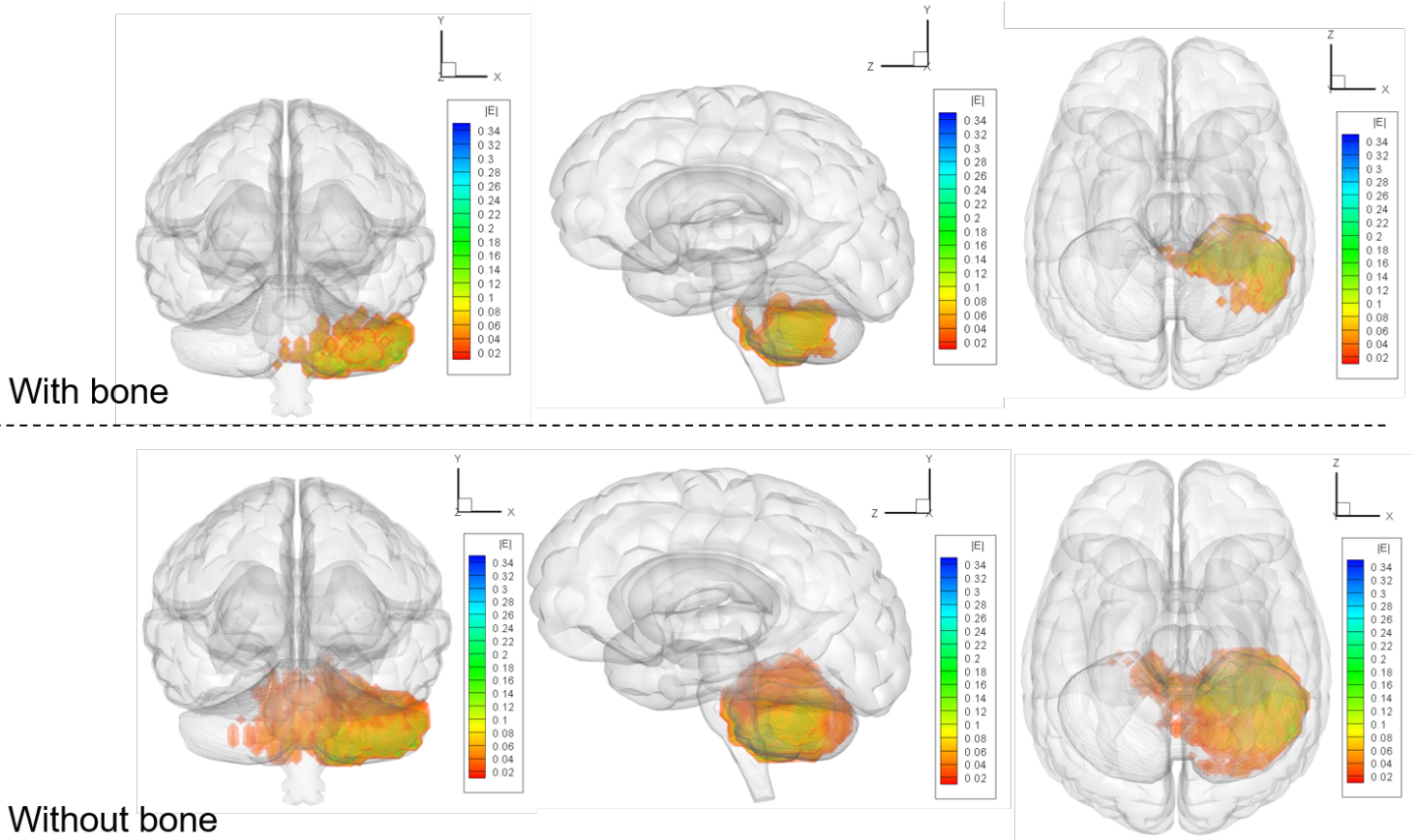


Fig 7.19: 小腦組織於各單位格點於計算時間為 $5000\Delta t$ ，比較有無顱骨時的電場強度 $|E|$ 之分布結果。



第八章 結論

8.1 本文之貢獻

在經過實解驗證吾人所開發之數值方法的準確性後，進行了人體特定比吸收率 SAR 的模擬。首先，本論文求得了人體頭部各組織的最大 SAR 值。可以清楚的看到，使用手機通話時，比較靠近手機的組織器官(皮膚與肌肉)較內部器官(腦部組織與顱骨)，具有較高的 SAR 值。此外，本文的模擬結果與實際產品測量值相比(7.1 節)相比，可以發現，兩者相當的接近，這驗證了吾人所開發之數值方法進行模擬的可行性與可信度。

其次，在研究中，由頭部各器官組織之電場強度分布情形可以得之，SAR 在腦部組織依舊具有吸收的情形，如果長時間使用手機進行通話時，更加必須注意的是，手機輻射將會直接對頭部造成熱損害 [44]，根據本文之模擬結果，吾人參考了低頻射頻電磁場曝曬下的生物研究 [43]，我們接著討論了腦部各個組織中的電場強度的分布情形，並且觀察顱骨的存在，是否會影響腦部的電磁場強度分布情形，結果是肯定的，由於顱骨的材料係數(導電率與介電常數)與相鄰組織之材料係數的明顯差異，進而增加穿透頭骨時所發生的電磁散射，導致入射至腦部的電場強度，可以發現，與無顱骨的模擬情況比較，電場強度吸收情形明顯降低許多。最後，我們給出了手機的使用方式建議，在手機收發訊號時，當手機緊貼耳朵，低頻射頻電磁場直接曝曬頭部或人體時，靠近手機的一側，會直接受到低頻射頻電磁場的影響。使用者可選擇避免將手機與人體直接接觸；然而，業界在手機設計時，通過天線設計、手機材質、輻射功率以及工作頻段的選取，也是至關重要的考量因素，為了輻射安全，必須遵守手機的 SAR 安全標準。綜合以上所述，本論文的模擬預測結果表明，在設計手機時，可優先進行數值模擬。手機的材質、工作頻段、輻射功率，對於預測手機的 SAR 值結果亦至關重要。這樣的結論，對於降低手機設計成本以及降低實驗測試次數皆有相當的幫助。

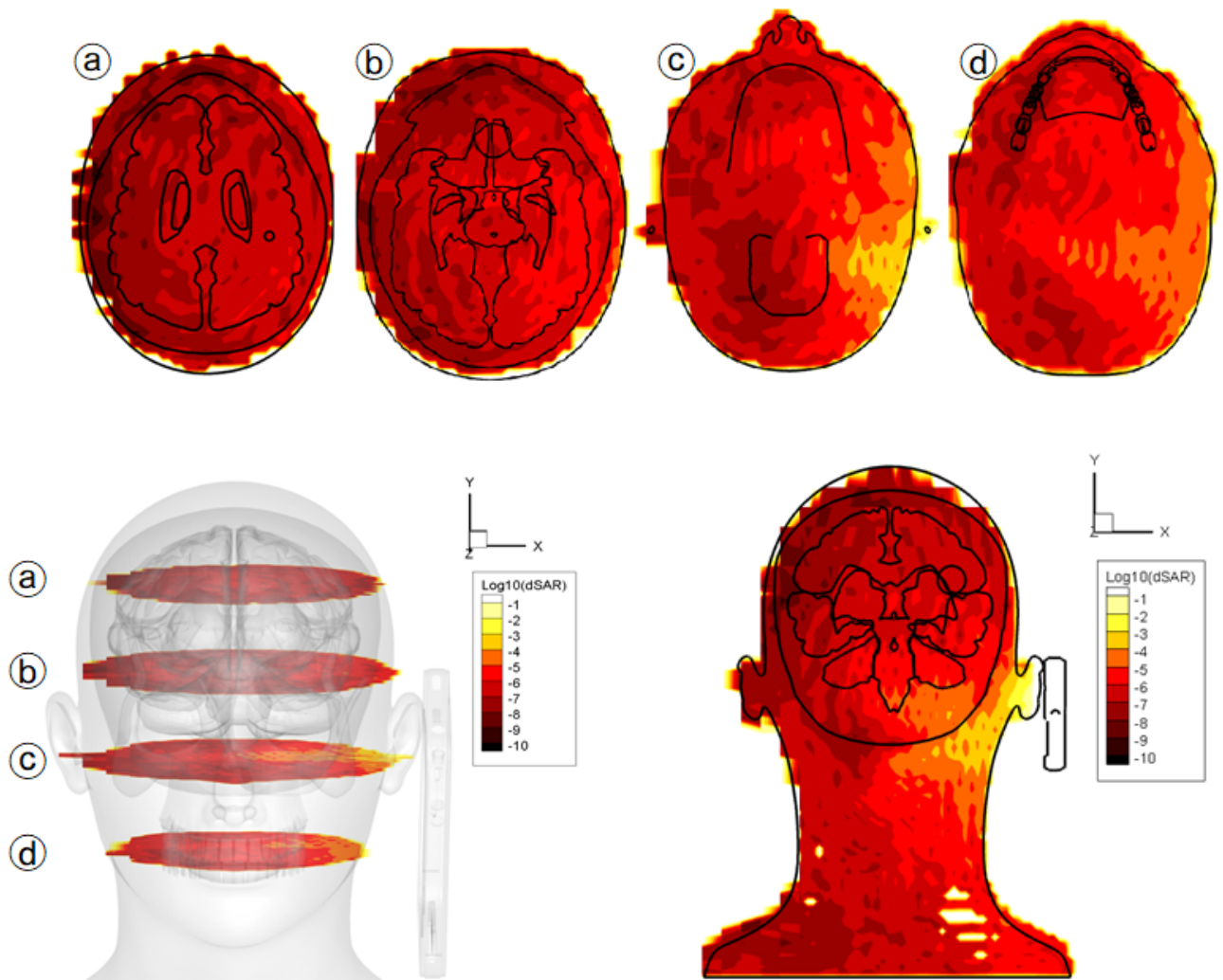


Fig 8.1: 在 log 尺度下，頭部組織 SAR 分布之模擬結果。

8.2 未來工作與展望

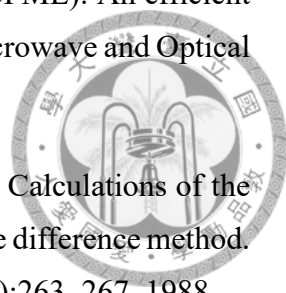
本論文中，吾人所開發之數值方法，對求解三維馬克斯威爾方程組以模擬實際的複雜幾何物理問題，已經得到了良好的驗證，並且證實了我們的模擬結果，與實際物理上之實驗測量結果數值相當接近，這樣的結果，亦證實了吾人所開發之 PRK-DRP FDTD 具備一定的實用性以及優秀的準確度，並且在計算複雜幾何散射物體之物理問題中，可針對在計算空間中，吾人所關注之散射物體或區域，進行求解其電磁場之全場/散射場 (Total-Field / Scattered-Field) 並進行分離，進一步將問題複雜化。例如求解天線輻射問題，藉由近場外推遠場，求得感興趣的天線輻射場型，或藉此技術，以分析天線的輻射效率以及其天線指向性。另外，本文所探討之頭部比吸收率問題為總場問題，在本研究中，複雜幾何散射體以及金屬等色散介質材料之數值處理方法，亦已通過整合，已經成熟發展，足以解決深入之電磁物理現象。由於所有的電器和電子設備，在其工作時，都會產生間歇或連續性的電壓 / 電流變化，這將導致在不同頻帶內產生電磁能量，在電子電路產業中，諸如此類需要特別關注之電磁現象，分為電磁相容性 (EMC) 與電磁干擾 (EMI) 兩樣重點，為了降低電路中所產生之 EMI 效應，與產品所選擇之屏蔽材料與電路佈局息息相關。因此，透過吾人所開發之數值方法，未來可應用在電子電路設計。吾人所開發之非交錯網格下之時域有限差分程式較適合執行平行計算於 GPU 上，藉由於實際測試前先行模擬並優化產品，以期降低研究經費與所需時間。

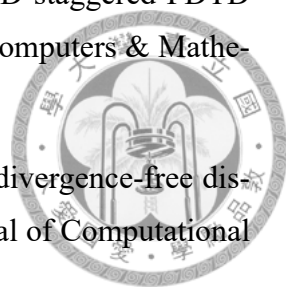




參考文獻

- [1] Liping Gao, Bo Zhang, and Dong Liang. Splitting finite difference methods on staggered grids for the three-dimensional time-dependent Maxwell's equations. *Commun. Comput. Phys*, 4:405–432, 2008.
- [2] Yanyan Huo, Tianqing Jia, Donghai Feng, Shian Zhang, Jukun Liu, Jia Pan, Kan Zhou, and Zhenrong Sun. Formation of high spatial frequency ripples in stainless steel irradiated by femtosecond laser pulses in water. *Laser Physics*, 23(5):056101, 2013.
- [3] TIBTECH Innovations. Properties table of stainless steel, metals and other conductive materials. printed from <http://www.tibtech.com/conductivity.php> on Aug, 19:1, 2011.
- [4] iphone 4 RF Exposure Information. <https://www.apple.com-/legal/rfexposure/iphone3,1/en/>.
- [5] Kane Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 14(3):302–307, 1966.
- [6] Gerrit Mur. Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, (4):377–382, 1981.
- [7] Jean-Pierre Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114(2):185–200, 1994.
- [8] J-P Berenger. Perfectly matched layer for the FDTD solution of wave-structure interaction problems. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 44(1):110–117, 1996.

- 
- [9] J Alan Roden, Stephen D Gedney, et al. Convolutional PML (CPML): An efficient FDTD implementation of the CFS-PML for arbitrary media. *Microwave and Optical Technology Letters*, 27(5):334–338, 2000.
- [10] Xiaolei Zhang, Jiayuan Fang, Kenneth K Mei, and Yaowu Liu. Calculations of the dispersive characteristics of microstrips by the time-domain finite difference method. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 36(2):263–267, 1988.
- [11] X Zhang and KK Mei. Time-domain finite difference approach for the calculation of microstrip open-circuit end effect. In *Microwave Symposium Digest, 1988.*, IEEE MTT-S International, pages 363–366. IEEE, 1988.
- [12] Zhang Xiaolei and Kenneth K Mei. Time-domain finite difference approach to the calculation of the frequency-dependent characteristics of microstrip discontinuities. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 36(12):1775–1787, 1988.
- [13] Dok Hee Choi and Wolfgang JR Hoefer. The finite-difference-time-domain method and its application to eigenvalue problems. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 34(12):1464–1470, 1986.
- [14] David M Sheen, Sami M Ali, Mohamed D Abouzahra, and Jin Au Kong. Application of the three-dimensional finite-difference time-domain method to the analysis of planar microstrip circuits. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 38(7):849–857, 1990.
- [15] James G Maloney, Kurt L Shlager, and Glenn S Smith. A simple FDTD model for transient excitation of antennas by transmission lines. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 42(2):289–292, 1994.
- [16] PJ Dimbylow. FDTD calculations of the whole-body averaged SAR in an anatomically realistic voxel model of the human body from 1 MHz to 1 GHz. *Physics in Medicine & Biology*, 42(3):479, 1997.
- [17] 吳宗霖, 鄭博仁, 黃竣南, 張孝甄, 林彥輝, et al. 行動電話及基地臺電磁波對人體健康之影響程度評估及其防範措施. 2001.
- [18] Mohammad Tariqul Islam, Mohammad Rashed Iqbal Faruque, and Norbahiah Misran. Design analysis of ferrite sheet attachment for SAR reduction in human head. *Progress In Electromagnetics Research*, 98:191–205, 2009.

- 
- [19] Tony W. H, Sheu, YC Wang, and JH Li. Development of a 3D staggered FDTD scheme for solving Maxwell's equations in Drude medium. *Computers & Mathematics with Applications*, 71(6):1198–1226, 2016.
- [20] Bernardo Cockburn, Fengyan Li, and Chi-Wang Shu. Locally divergence-free discontinuous Galerkin methods for the Maxwell equations. *Journal of Computational Physics*, 194(2):588–610, 2004.
- [21] N Anderson and AM Arthurs. Helicity and variational principles for Maxwell's equations. *International Journal of Electronics*, 54(6):861–864, 1983.
- [22] JS Kole, MT Figge, and Hans De Raedt. Higher-order unconditionally stable algorithms to solve the time-dependent Maxwell equations. *Physical Review E*, 65(6):066705, 2002.
- [23] Stephen D Gedney. An anisotropic perfectly matched layer-absorbing medium for the truncation of FDTD lattices. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 44(12):1630–1639, 1996.
- [24] Saul Abarbanel, D Gottlieb, and Jan S Hesthaven. Non-linear PML equations for time dependent electromagnetics in three dimensions. *Journal of Scientific Computing*, 28(2):125–137, 2006.
- [25] Mustafa Kuzuoglu and Raj Mittra. Frequency dependence of the constitutive parameters of causal perfectly matched anisotropic absorbers. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, 6(12):447–449, 1996.
- [26] Raymond Luebbers, Forrest P Hunsberger, Karl S Kunz, Ronald B Standler, and Michael Schneider. A frequency-dependent finite-difference time-domain formulation for dispersive materials. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 32(3):222–227, 1990.
- [27] Philip J Morrison. The Maxwell-Vlasov equations as a continuous Hamiltonian system. *Physics Letters A*, 80(5-6):383–386, 1980.
- [28] Jerrold E Marsden and Alan Weinstein. The Hamiltonian structure of the Maxwell-Vlasov equations. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 4(3):394–406, 1982.
- [29] XW Lu and R Schmid. Symplectic algorithms for Maxwell's equations. In *Proceedings of the International Conference on New Applications of Multisymplectic Field Theories*, pages 10–12, 1999.

- [30] Zhi-Xiang Huang and Xian-Liang Wu. Symplectic partitioned Runge-Kutta scheme for Maxwell's equations. *International Journal of Quantum Chemistry*, 106(4):839–842, 2006.
- [31] Ikuo Saitoh, Yoshio Suzuki, and Norio Takahashi. The symplectic finite difference time domain method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 37(5):3251–3254, 2001.
- [32] Tony W. H, Sheu and R. K Lin. An incompressible Navier-Stokes model implemented on nonstaggered grids. *Numerical Heat Transfer: Part B: Fundamentals*, 44(3):277–394, 2003.
- [33] P. H Chiu, Tony W. H, Sheu, and R. K Lin. Development of a Dispersion Relation-Preserving Upwinding Scheme for Incompressible Navier-Stokes Equations on Non-Staggered Grids. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 48(6):543–569, 2005.
- [34] Dejan Krstić, Darko Zigar, Dejan Petković, Dušan Sokolović, Boris Đinđić, Nenad Cvetković, Jovica Jovanović, and Nataša Đinđić. Predicting the biological effects of mobile phone radiation absorbed energy linked to the MRI-obtained structure. *Archives of Industrial Hygiene and Toxicology*, 64(1):159–168, 2013.
- [35] Allen Taflove and Susan C Hagness. *Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method*. Artech house, 2005.
- [36] A Yasin Citkaya and S Selim Seker. FEM modeling of SAR distribution and temperature increase in human brain from RF exposure. *International Journal of Communication Systems*, 25(11):1450–1464, 2012.
- [37] iPhone4 circuit diagram. <http://win.archimedesys.it/Share/forum/4ant.jpg>.
- [38] Phantom head model of human. <http://grabcad.com>.
- [39] MR Iqbal-Faruque, N Aisyah-Husni, Md Iqbal-Hossain, M Tariqul-Islam, and Norbahiah Misran. Effects of mobile phone radiation onto human head with variation of holding cheek and tilt positions. *Journal of Applied Research and Technology*, 12(5):871–876, 2014.
- [40] Akimasa Hirata and Osamu Fujiwara. The correlation between mass-averaged SAR and temperature elevation in the human head model exposed to RF near-fields from 1 to 6 GHz. *Physics in Medicine & Biology*, 54(23):7227, 2009.

- [41] IEEE Standards Coordinating Committee et al. Ieee standard for safety levels with respect to human exposure to radio frequency electromagnetic fields, 3kHz to 300GHz. IEEE C95. 1-1991, 1992.
- [42] Radiofrequency Electromagnetic Fields. Evaluating compliance with FCC guidelines for human exposure to radiofrequency electromagnetic fields. OET Bulletin, 65:10, 1997.
- [43] DABT Michael Wyde, PhD. NTP Toxicology and Carcinogenicity Studies of Cell Phone Radiofrequency Radiation. pages 1–32, 2016.
- [44] Deshan Yang, Mark C Converse, David M Mahvi, and John G Webster. Expanding the bioheat equation to include tissue internal water evaporation during heating. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 54(8):1382–1388, 2007.

