

國立臺灣大學工學院機械工程學系

博士論文

Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Doctoral Dissertation

滾珠自動平衡機構應用於二維及三維系統偏心制振

之研究

Study of the Application of Ball-type Automatic
Balancers to the Vibration Suppression of
2D and 3D Rotors

王明正

Ming-Cheng Wang

指導教授：盧中仁 博士

Advisor: Chung-Jen Lu, Ph.D.

中華民國 99 年 7 月

July, 2010

國立臺灣大學博士學位論文
口試委員會審定書

滾珠自動平衡機構應用於二維及三維系統
偏心制振之研究

Study of the Application of Ball-type Automatic
Balancers to the Vibration Suppression of
2D and 3D Rotors

本論文係王明正君 (D92522009) 在國立臺灣大學機械
工程學系、所完成之博士學位論文，於民國九十九年七月二
十九日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

宋中仁

(簽名)

黃衍任 (指導教授)

吳文方

蘇春煒

何次堂

系主任：

張所鎔

(簽名)

滾珠自動平衡機構應用於二維及三維系統偏心制振之研究

摘 要

隨著微精密加工的需求，唯有高速平穩的機具運轉才能提供定位尺寸的精度與細緻的表面粗度，而不平衡的迴轉振動除了將誘發擾人的噪音、降低機械運轉的精確度更甚而導致機具的損壞。因而抑制迴轉機具的不平衡振動，進而提升高速運轉的可靠性，成了眾多研究人員與設計者的目標。

為了能消除轉子在加工製造時無可避免的偏心誤差，傳統偏心轉子的校正方法是在初始裝配使用之前，先透過迴轉量測，再藉由安置平衡配重或是移除局部質量的方式來平衡轉子的固有偏心量。但是，由於長時間運轉所導致的熱變形或材料磨耗等因素，使得轉子質量的分布可能隨時產生變化，因此何時、何處將再次引發偏心振動就變得難以估測，嚴重時則必須再次針對轉子的偏心情況實施量測與校正。因此，若能於轉子上裝配自動平衡機構，則不僅能避免傳統平衡校正的問題，更能隨時因應轉子偏心的變化，即時抑制偏心振動。

滾珠型自動平衡機構是常見的自動平衡裝置之一，目前已成功地應用於如光碟機（二維）與洗衣機（三維）等迴轉機具。滾珠型自動平衡機構乃由單一或數個軌道及可沿軌道自由移動的數顆滾珠所組成。該機構於過臨界轉速等速迴轉時，在適當的參數條件下，滾珠將移至適當位置以抑制系統的振動。

本論文主要研究滾珠型自動平衡機構應用於二維及三維系統的偏心制振行為與特性。針對不同的系統建構相對應的理論模型，再利用 Lagrange's equations 推導各系統的統御方程，同時解出其平衡解並分析各平衡位置的存在區間與條件，接著以 Routh-Hurwitz criterion 解析平衡解的穩定性，並且探討不同系統參數對穩定區域的影響。首先針對二維雙滾珠自動平衡系統平衡解的穩定性提出解析結果。接著將雙滾珠系統的固定軌道改以徑向彈簧取代，同樣以解析的方式探究此雙滾珠-

彈簧系統的穩定性，並比較兩者完全平衡解穩定區域的差異。然後探討剛性偏心長轉子三維制振系統的行為與特性，並於文中提出兩端面裝置雙滾珠自動平衡機構的偏心剛性長轉子系統在靜態不平衡(static unbalance)與力偶不平衡(couple unbalance)狀態下的解析解。最後則架構三維制振系統的實驗設施，同時另考量定子的影響，藉以修正原有的基本理論模型，使理論與實驗相互驗證。於結論中統整全文的結果，並提出滾珠型自動平衡機構應用於二維與三維系統設計的一般性準則。

關鍵詞：偏心振動、剛性長轉子、碟片、自動平衡裝置、穩定性



Study of the Application of Ball-type Automatic Balancers to the Vibration Suppression of 2D and 3D Rotors

Abstract

In many industrial applications mass imbalance is the primary cause of vibrations in rotating machines, which generates undesirable noises and compromising the efficiency of machines and eventually causes damages. Therefore, the balancing of rotors is important for the high-speed rotating machines. To eliminate the imbalance vibrations due to the unavoidable manufacture tolerance, rotors are typically balanced by adding or subtracting correction masses in two planes at an initial stage. However, if the unbalance is varied depending on working conditions, such as thermal deformation and material erosion etc, it is hard to predict when and where the imbalance will occur so that the balancing procedure may have to be repeated.

One method to counterbalance the variety imbalances is to equip rotors with ball-type automatic balancers. A ball-type automatic balancer is a simple device characterized by having several balls moving freely on a single or several circular orbits. Under proper working conditions, the balls will move to the other side of the imbalance mass and suppress the imbalance vibrations.

This study aims to investigate the application of ball-type automatic balancers to the vibration suppression of two and three dimensions rotors. A model of the 2D system which consists of an eccentric disk packed with an automatic balancer and suspension system is introduced first. A modified ball-type balancer composed of several ball-rod-spring units will be presented. We also propose a 3D theoretical model, where two automatic balancers are used to limit the vibrations of an eccentric long rigid rotor.

In order to investigate the effects of the automatic balancers, the governing equations of the theoretical models for these cases mentioned above are derived using Lagrange's equations. The closed-form formulas and the existence conditions for the equilibrium positions are presented. Moreover, the stability of each equilibrium position is determined by Routh-Hurwitz criterion. Finally, experiments are conducted to verify the theoretical results of the 3D system. To this end, conclusions and general guidelines are presented.

Keywords: imbalance vibration, rigid rotor, disk, automatic balancer, stability



目 錄

口試委員會審定書	i
中文摘要	ii
英文摘要	iv
目 錄	vi
圖目錄	ix
表目錄	xv
第一章 緒論	1
1-1 研究動機	1
1-2 文獻回顧	2
1-3 論文架構與說明	7
第二章 滾珠自動平衡機構應用於二維偏心系統之制振	8
2-1 滾珠自動平衡機構-偏心碟片二維制振系統	8
2-1-1 二維制振系統理論模型	10
2-1-2 統御方程	11
2-2 二維制振系統的平衡位置	14
2-2-1 平衡解的類型	14
2-2-2 平衡位置的解析解與存在區間	16
2-3 二維制振系統的穩定性分析	21
2-3-1 平衡解的穩定性解析	21
2-3-2 穩定平衡解的數值分析	25
2-3-3 系統參數對穩定區域的影響	26
第三章 滾珠-彈簧自動平衡機構應用於二維偏心系統之制振	33
3-1 滾珠-彈簧自動平衡機構-偏心碟片二維制振系統	33

3-1-1 滾珠-彈簧二維制振系統理論模型	34
3-1-2 統御方程	35
3-2 滾珠-彈簧二維制振系統的平衡位置	38
3-2-1 平衡解的類型	38
3-2-2 平衡位置的解析解與存在區間.....	41
3-3 滾珠-彈簧二維制振系統的穩定性分析	51
3-3-1 平衡解的穩定性解析	51
3-3-2 穩定平衡解的數值分析	54
3-3-3 系統參數對穩定區域的影響	56
3-4 滾珠-彈簧與固定軌道的滾珠自動平衡機構的穩定區域比較.....	64
第四章 滾珠自動平衡機構應用於三維偏心剛性轉子系統之制振	70
4-1 滾珠自動平衡機構-偏心轉子三維制振系統	70
4-1-1 剛性長轉子的偏心描述	70
4-1-2 自動平衡機構-偏心轉子三維制振系統的理论模型	72
4-1-3 自動平衡機構-偏心轉子三維制振系統的統御方程	76
4-2 三維制振系統的平衡位置	82
4-2-1 平衡解	82
4-2-2 完全平衡解	85
4-2-3 三維制振系統的靜態不平衡(static unbalance)解	89
4-2-4 三維制振系統的力偶不平衡(couple unbalance)解	93
4-3 三維制振系統完全平衡解的穩定性分析	96
第五章 三維偏心剛性轉子系統制振之實驗驗證	101
5-1 實驗機台設計	101
5-1-1 實驗機台的理论模型	101
5-1-2 支承彈簧的等效彈性模數	105

5-1-3 實驗機台的參數與臨界轉速設計	107
5-2 實驗設備與裝置	110
5-3 實驗結果與討論	111
5-3-1 轉子的平衡校正與自然頻率	111
5-3-2 實驗設計與說明	115
5-3-3 次臨界轉速的實驗與比較.....	117
5-3-4 過臨界轉速的實驗與比較.....	130
第六章 結論	155
參考文獻	159
附錄一	164
附錄二	165
附錄三	167
附錄四	170
附錄五	172
附錄六	182

圖目錄

圖 2-1 滾珠自動平衡機構與二維偏心碟片系統示意圖	9
圖 2-2 次臨界轉速時，滾珠的定位情形	9
圖 2-3(a) 過臨界轉速下，最大制振量大於偏心不平衡量時滾珠的定位情形	9
圖 2-3(b) 過臨界轉速下，最大制振量小於偏心不平衡量時滾珠的定位情形	9
圖 2-4 滾珠型自動平衡機構對二維制振系統的理论模型	11
圖 2-5 (a)完全平衡解，(b)~(d) 不完全平衡解	15
圖 2-6 六種平衡解在 $\Omega-\eta$ 平面上的存在區間	21
圖 2-7 平衡解在 $\Omega-\eta$ 平面上的穩定區域	26
圖 2-8 驗證完全平衡解的穩定性變化	27
圖 2-9 系統支承阻尼對平衡解穩定性的影響 (a). $\zeta = 0.02$ 、(b). $\zeta = 0.1$	28
圖 2-10 滾珠軌道阻尼對平衡解穩定性的影響(a). $\zeta_b = 0.1$ 、(b). $\zeta_b = 0.2$	29
圖 2-11 比較不同滾珠軌道阻尼對完全平衡解 P_0 的穩定區域的影響	29
圖 2-12 $\eta = 0.3$ 時，平衡解 P_{S1}^+ 的穩定區域	30
圖 2-13 $\eta = 0.5$ 時，平衡解 P_{S1}^+ 與 P_0 的穩定區域	31
圖 2-14 $\eta = 0.8$ 時，平衡解 P_{S1}^+ 與 P_0 的穩定區域	32
圖 3-1 滾珠、彈簧與徑向直桿的制振單元示意圖	34
圖 3-2 滾珠-彈簧自動平衡機構對二維制振系統的理论模型	35
圖 3-3 (a)~(c) 不完全平衡解，(d)完全平衡解	40
圖 3-4 六種平衡解在 $\Omega-\eta$ 平面上的存在區間	50
圖 3-5 可能穩定的平衡解類型及其存在邊界	54
圖 3-6 平衡解在 $\Omega-\eta$ 平面上的穩定區域	55
圖 3-7 驗證穩定區域內的平衡解的型態	56

圖 3-8(a)~(c) $\zeta = 0.05$ ，依序改變 $\zeta_b = 0.05$ 、 0.1 及 0.2 ，平衡解穩定區域比較58
圖 3-9(a)~(c) $\zeta = 0.1$ ，依序改變 $\zeta_b = 0.05$ 、 0.1 及 0.2 ，平衡解穩定區域比較59
圖 3-10(a)~(c) $\zeta = 0.2$ ，依序改變 $\zeta_b = 0.05$ 、 0.1 及 0.2 ，平衡解穩定區域比較60
圖 3-11 $\eta = 1$ ，考慮 $\zeta_b = 0.05$ 、 0.1 及 0.2 ，平衡解於 $\Omega - \zeta$ 平面的穩定區域61
圖 3-12 $\eta = 2$ ，考慮 $\zeta_b = 0.05$ 、 0.1 及 0.2 ，平衡解於 $\Omega - \zeta$ 平面的穩定區域62
圖 3-13 $\eta = 1$ ，考慮 $\zeta = 0.05$ 、 0.1 及 0.2 ，平衡解於 $\Omega - \zeta_b$ 平面的穩定區域63
圖 3-14 $\eta = 1$ ，考慮 $\zeta = 0.05$ 、 0.1 及 0.2 ，平衡解於 $\Omega - \zeta_b$ 平面的穩定區域63
圖 3-15(a)、(b) 比較兩類型自動平衡系統的完全平衡解於 $\zeta = 0.05$ 與 $\zeta = 0.1$ 時， $\Omega - \eta$ 平面的穩定區域65
圖 3-16(a)~(c) A、B 與 C 三點無因次化徑向振幅的時間響應66
圖 3-17(a)、(b) 比較兩類型自動平衡系統的完全平衡解於 $\eta = 1$ 與 $\eta = 2$ 時， $\Omega - \zeta$ 平面的穩定區域67
圖 3-18(a)、(b) 比較兩類型自動平衡系統的完全平衡解於 $\eta = 1$ 與 $\eta = 2$ 時， $\Omega - \zeta_b$ 平面的穩定區域68
圖 3-19 比較不同 f 值之下，完全平衡位置的穩定區域變化69
圖 4-1 靜態不平衡(Static unbalance)71
圖 4-2 力偶不平衡(Couple unbalance)71
圖 4-3 動態不平衡(Dynamic unbalance)71
圖 4-4 靜態不平衡偏心量等價至等距的兩端面上72
圖 4-5 以兩端面上的等價偏心質點描述動態不平衡72
圖 4-6 兩端面裝置滾珠型自動平衡機構的剛性轉子系統示意圖73
圖 4-7 描述轉子系統的座標系74
圖 4-8 旋轉座標系 $\hat{x} \hat{y} \hat{z}$ 與空間運動的轉子主軸方向保持平行75
圖 4-9 以兩組平面極座標來描述轉子於三維空間中的狀態83
圖 4-10 自動平衡機構對轉子質心位置的制振88

圖 4-11 自動平衡機構對轉子角度偏斜的制振	88
圖 4-12 滾珠的暫態行為與穩態定位情形	88
圖 4-13 三維制振系統於靜態不平衡時的穩態振幅與滾珠穩態定位情形	92
圖 4-14 三維制振系統於(a)次臨界轉速與(b)過臨界轉速時，靜態不平衡的穩態 振幅與滾珠定位.....	92
圖 4-15 三維制振系統於力偶不平衡時的穩態振幅與滾珠穩態定位情形	95
圖 4-16 三維制振系統於(a)次臨界轉速與(b)過臨界轉速時，力偶不平衡的穩態 振幅與滾珠定位.....	96
圖 4-17 ζ 對完全平衡解穩定性的影響	97
圖 4-18 系統支承阻尼比 ζ 與轉速比 Ω 平面的穩定區間	97
圖 4-19 滾珠軌道阻尼比 ζ_b 與轉速比 Ω 平面的穩定區間($\zeta = 0.01 \sim 0.04$)	98
圖 4-20 滾珠軌道阻尼比 ζ_b 與轉速比 Ω 平面的穩定區間($\zeta = 0.05 \sim 0.2$)	98
圖 4-21 $\zeta_b - \Omega$ 平面的穩定與不穩定區段	99
圖 4-22 P_1 、 P_2 、 P_3 及 P_4 的數值積分結果	99
圖 4-23 η 與轉速比 Ω 所構成的參數平面的穩定區域	100
圖 5-1 三維制振轉子自動平衡實驗機台示意圖	101
圖 5-2 定子及L型支承簧片變形的示意圖	106
圖 5-3 (a) 連接簧片與位移方向垂直	107
圖 5-3 (b) 連接簧片與位移方向平行	107
圖 5-4 三維制振的轉子自動平衡實驗機台	108
圖 5-5 轉子平衡實驗機台與量測設備	110
圖 5-6(a) 平衡校正後兩端面上的滾珠定位情形	112
圖 5-6(b) 平衡校正後兩端面的平均殘餘振幅	113
圖 5-7 轉子自動平衡實驗機台的頻率響應	113
圖 5-8 第一、二、三個自然頻率轉速下，加速規測得的波形	114

圖 5-9 單一端面完全平衡時，轉子兩端定子中心位置相角差為 (a) 0° 、(b) 180° ，的關聯示意	117
圖 5-10(a) SP2B 及 DP2B 於 U1L0 (400 rpm) 的滾珠定位	119
圖 5-10(b) NB、SP2B 及 DP2B 於 U1L0 (400 rpm) 時，加速規的量測結果	119
圖 5-10(c) NB、SP2B 及 DP2B 於 U1L0 (400 rpm) 時的理論振動歷時	120
圖 5-11 DP2B U0L2 (400 rpm) (a) 實驗-理論比較	121
圖 5-11 DP2B U0L2 (400 rpm) (b) 滾珠於軌道內的週期運動	121
圖 5-12(a) SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 0^\circ$ (400 rpm) 的滾珠定位	122
圖 5-12(b) NB、SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 0^\circ$ (400 rpm) 時，加速規的量測結果	122
圖 5-13 數值分析 SP2B 與 DP2B 於 Sub U2L1 $\angle 0^\circ$ 的理論滾珠定位	123
圖 5-14 SP2B 於 U2L1 $\angle 0^\circ$ (450 rpm) 加速規的量測結果與滾珠定位情形	124
圖 5-15(a) SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 60^\circ$ (400 rpm) 的滾珠定位	124
圖 5-15(b) NB、SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 60^\circ$ (400 rpm) 時，量測的結果比較	125
圖 5-16(a) 數值分析 SP2B 於 Sub U2L1 $\angle 60^\circ$ 的理論滾珠定位	126
圖 5-16(b) 數值分析 DP2B 於 Sub U2L1 $\angle 60^\circ$ 的理論滾珠定位	126
圖 5-17 SP2B 於 U2L1 $\angle 60^\circ$ (450 rpm) 的量測結果與滾珠定	127
圖 5-18(a) SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 180^\circ$ (400 rpm) 的滾珠定位	128
圖 5-18(b) NB、SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 180^\circ$ (400 rpm) 時的量測結果	128
圖 5-19(a) 數值分析 SP2B 於 Sub U2L1 $\angle 180^\circ$ 的理論滾珠定位	129
圖 5-19(b) 數值分析 DP2B U2L1 $\angle 180^\circ$ 滾珠定位的結果	129
圖 5-20 SP2B 及 DP2B 於 U1L0 (2400 rpm) 的滾珠定位	131
圖 5-21 SP2B 及 DP2B 於 U1L0 (2400 rpm) 的暫態響應與穩態平衡	131
圖 5-22 NB、SP2B 及 DP2B 於 U1L0 (2400 rpm) 的理論波形與實驗量測比較	133
圖 5-23(a) NB 與 SP2B 於 U1L0 (1600~2400 rpm) 的理論與實驗比較	134
圖 5-23(b) NB 與 DP2B 於 U1L0 (1600~2400 rpm) 的理論與實驗比較	134

圖 5-24 SP2B 及 DP2B 於 U2L0 (2400 rpm)的滾珠定位	135
圖 5-25 SP2B 及 DP2B 於 U2L0 (2400 rpm)的暫態響應與穩態行為	136
圖 5-26 轉速為 2400 rpm 時,SP2B-U2L0 上、下兩端面的穩態振動歷時	137
圖 5-27 NB、SP2B 及 DP2B 於 U2L0 (2400 rpm)的理論波形與實驗量測比較	138
圖 5-28(a) NB 與 SP2B 於 U2L0 (1600~2400 rpm)的理論與實驗比較	139
圖 5-28(b) NB 與 DP2B 於 U2L0 (1600~2400 rpm)的理論與實驗比較	139
圖 5-29 SP2B 及 DP2B 於 U0L1 (2400 rpm)的滾珠定位	140
圖 5-30 SP2B 及 DP2B 於 U0L1 (2400 rpm)的暫態響應與穩態行為	141
圖 5-31 NB、SP2B 及 DP2B 於 U0L1 (2400 rpm)的理論波形與實驗量測比較	142
圖 5-32(a) NB 與 SP2B 於 U0L1 (1600~2400 rpm)的理論與實驗比較	143
圖 5-32(b) NB 與 DP2B 於 U0L1 (1600~2400 rpm)的理論與實驗比較	143
圖 5-33 SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 0^\circ$ (2400 rpm)的滾珠定位	145
圖 5-34 SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 0^\circ$ (2400 rpm)的暫態響應與穩態行為	146
圖 5-35 NB、SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 0^\circ$ (2400 rpm)的理論與實驗比較	147
圖 5-36(a) NB 與 SP2B 於 U2L1 $\angle 0^\circ$ (1600~2400 rpm)的理論與實驗比較	148
圖 5-36(b) NB 與 DP2B 於 U2L1 $\angle 0^\circ$ (1600~2400 rpm)的理論與實驗比較	148
圖 5-37 SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 60^\circ$ (2400 rpm)的滾珠定位	149
圖 5-38 SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 60^\circ$ (2400 rpm)的暫態響應與穩態平衡	150
圖 5-39 NB、SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 60^\circ$ (2400 rpm)的理論與實驗比較	150
圖 5-40(a) NB 與 SP2B 於 U2L1 $\angle 60^\circ$ (1600~2400 rpm)的理論與實驗比較	151
圖 5-40(b) NB 與 DP2B 於 U2L1 $\angle 60^\circ$ (1600~2400 rpm)的理論與實驗比較	151
圖 5-41 SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 180^\circ$ (2400 rpm)的滾珠定位	152
圖 5-42 SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 180^\circ$ (2400 rpm)的暫態響應與穩態行為	153
圖 5-43 NB、SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 180^\circ$ (2400 rpm)的理論與實驗比較	153
圖 5-44(a) NB 與 SP2B 於 U2L1 $\angle 180^\circ$ (1600~2400 rpm)的理論與實驗比較	154

圖 5-44(b) NB 與 DP2B 於 U2L1 $\angle 180^\circ$ (1600~2400 rpm) 的理論與實驗比較	154
圖 A6-1 以皮帶間接傳動的轉子實驗機台	182
圖 A6-2 轉速 600 rpm, 偏心質量 m_{e1} 、 m_{e2} 及 m_{e3} 時, 兩端滾珠定位的情形	183
圖 A6-3 偏心質量呈 180° 相位差時, 兩端滾珠定位的情形與量測結果	183
圖 A6-4 制振比(a) $\eta_L = 0.86$ 、(b) $\eta_L = 0.52$ 時, 兩端滾珠的定位情形	184
圖 A6-5 $\eta_L = 0.86$ 時, 轉子系統上、下端面的振動量測值	185
圖 A6-6 $\eta_L = 0.86$ 時, 系統各動態參數的理論歷時圖	185
圖 A6-7 $\eta_L = 0.52$ 時, 轉子系統上、下端面的振動量測值	186
圖 A6-8 $\eta_L = 0.52$ 時, 系統各動態參數的理論歷時圖	186
圖 A6-9 制振比(a) $\eta_L = 0.29$ 、(b) $\eta_L = 0.14$ 時, 兩端滾珠的定位情形	187
圖 A6-10 $\eta_L = 0.29$ 時, 轉子系統上、下端面的振動量測值	188
圖 A6-11 $\eta_L = 0.29$ 時, 系統各動態參數的理論歷時圖	188
圖 A6-12 $\eta_L = 0.14$ 時, 轉子系統上、下端面的振動量測值	189
圖 A6-13 $\eta_L = 0.14$ 時, 系統各動態參數的理論歷時圖	189

表 目 錄

表 2-1 六種平衡解的存在區間與穩定性解析整理	25
表 3-1 系統參數的設定與對應的圖號	57
表 4-1 描述轉子系統的座標系間的轉換關係	75
表 4-2 轉子三維制振系統可能的解情形	85
表 5-1 實驗機台的主要參數	109
表 5-2 轉子平衡實驗設備說明	111
表 5-3 實驗參數與標示說明	116



第一章 緒論

1-1 研究動機

早在 1904 年，美國費城一家名為 William Sellers & Co. 的公司（由機械工程師暨發明家 William Sellers 所創立），為了解決蒸汽渦輪主軸的振動，進行了一連串的實驗，他們在蒸汽渦輪實驗機之主渦輪碟片（Main turbine disk）側邊套入三個與主軸配合精良並可自行繞軸心旋轉的偏心碟片（此時碟片與主軸及碟片與碟片間存在有摩擦現象）。從實驗中發現，當此系統加速至其工作轉速的過程中，這些偏心碟片將逐漸各自相對轉動，最後定位至主渦輪碟片與這些偏心碟片彼此平衡為止。關於此實驗過程的描述與自動平衡機構（Automatic Balancer or Self-Compensating Dynamic Balancer）的概念，於 1932 年由 Thearle 所發表的文章中首度被提及[1]。

長久以來，採用轉子系統做為動力傳遞與輸出連結的機構，一直被廣泛地應用於各類型的迴轉機械上。由於工業發展的長足進步，目前工程上所使用的各類型迴轉機具的轉速需求不斷提昇（CNC 高速加工機之主軸轉速可達 10000 ~ 20000 rpm），在如此的高轉速之下，即使是微小的偏心量，如加工製造之公差、非均質分佈、不對稱荷載、局部配合件長時間高頻率裝卸使用的不均勻磨耗與熱變形所引發的精度喪失…等，都可能引發煩人的噪音與振動，降低機械運轉的精確度與可靠性，甚而誘發轉子更進一步的振動破壞，造成嚴重的損害。因此對於抑制轉子於高速迴轉中因偏心所激發的振動噪音與破壞，始終是讓人關注的課題。

常見的轉子偏心校正方法是先透過迴轉量測，再藉由裝配平衡配重的方式來校正轉子固有的偏心量。但是，隨著負載的變動與長時間的運轉磨耗，在機具經過一定的使用期程後，必須再次針對轉子的偏心情況實施量測與校正。然而，若依上述傳統轉子平衡校正方式操作，除須面對自複雜機具中拆卸轉子的繁瑣程序

與停機損失，還須輔以適當的迴轉量測儀器始得以完成。因此，若能於轉子上裝配自動平衡機構，則不僅能避免傳統平衡校正的問題，更能隨時因應轉子偏心的變化，即時抑制偏心振動。

常見的自動平衡裝置之一是滾珠型自動平衡機構，滾珠型自動平衡機構乃由單一或數個軌道及可沿軌道自由移動的數顆滾珠所組成。該機構於等速迴轉時，系統動態平衡位置的穩定性與選取的工作條件極為相關。當轉速超過某一臨界轉速時，滾珠將移至適當位置以抑制系統的振動。此類型的自動平衡機構已經成功地應用在許多領域，例如洗衣機（Samsung Venus 滾筒型）與光碟機等。以光碟機為例，隨著資訊儲存量與讀取速度的需求增加，光碟片的資料儲存密度與光碟機主軸轉速相應地不斷提昇（52 倍速 CD-ROM 光碟機主軸轉速約 10350 rpm），唯有光學讀寫頭的精準定位與光碟片的平穩運轉才能確保高速讀寫資料的穩定與正確性，因此對於自動平衡機構的特性勢必要有更完整且精確的評估。

除了旋轉圓盤外，自動平衡機構也能應用於長轉子。剛性長轉子的偏心效應，可等價為位於轉子兩端截面上的偏心量，因此，如欲有效抑制長轉子的偏心振動，必須在兩個平面上進行動態平衡。一個推論可行的作法，是在長轉子的兩端面上各裝置一組滾珠型自動平衡機構。

總言之，滾珠型自動平衡機構必須在適當系統參數下才能有效抑制偏心迴轉所引發的振動。本研究即欲藉由光碟機（2D）或長轉子系統（3D）中自動平衡機構的研究與改善，進而有效解決這些系統於高速迴轉時所引發的振動問題，將不僅能使高速的運轉更趨穩定，更能延長迴轉機具的使用壽命。

1-2 文獻回顧

探究一般迴轉振動的成因，主要為轉子的質心偏移與軸線失準，若是單純的質心偏移（慣性軸與迴轉軸維持平行），則迴轉時通過質心的不平衡力，將造成轉子整體呈現平移旋轉（Cylindrical whirling）。如果是僅存在軸線失準（迴轉軸通過

轉子質心)，則迴轉運動產生不平衡力矩，使得轉子繞質心旋轉 (Conical whirling) [37]。而對於一般的迴轉振動而言，兩者可能同時存在。換言之，只要轉子的質量慣性主軸與迴轉軸不同軸時，迴轉振動隨即發生。對於一般平面運動的剛體，其中一慣性主軸始終保持與平面垂直，亦即與旋轉軸始終維持平行，因此，平面的迴轉振動可視為單純的質心偏移所造成，如果欲達成此二維平面系統的減振，只需要在該平面上配置一個自動平衡機構，即可能抑制質心偏移的不平衡力，使系統達到完全制振。針對滾珠型自動平衡裝置的制振特性與應用，近幾年來已有許多研究文獻與專利相繼發表。我們首先回顧以滾珠型自動平衡機構探討二維系統制振的相關研究，並依滾珠數量區分單滾珠、雙滾珠及多滾珠分述如下：

單滾珠系統具有構造簡單及易於分析與瞭解制振機制的特性，其相關論述有 Rajalingham 等人[2]推導包含無阻尼轉子與單滾珠自動平衡機構的三個自由度系統的非線性運動方程式，平衡解的穩定性則以線性系統的特徵值來決定，同時以數值方式繪出轉速-滾珠質量比平面的穩定邊界。Chao 和 Sung 等人[3]針對光碟機上配置單滾珠自動平衡機構的系統，由加速規的量測訊號經 Sliding-mode observer，線上即時評估滾珠的定位，藉由 Fuzzy speed regulator 修正滾珠的精確定位。Lu [4]以解析方式探討單滾珠自動平衡機構應用於二維偏心制振系統平衡解的穩定性，明確地指出當系統參數固定時，在任一轉速下至多僅對應存在一種穩定平衡位置。

然而單滾珠系統僅能針對特定的偏心量有效完全制振，若欲使自動平衡機構能因應不同偏心量，至少需要兩顆滾珠的作用，因此文獻大多探討配備兩顆滾珠的平衡機構。Alexander [5]與 Cade [6]提出滾珠型自動平衡機構理論分析的方式，以非自主系統 (non-autonomous systems) 探討裝置自動平衡機構的系統並提出其運作的必要條件。Bövik 與 Högfors [7]以 multiple scales 法分析完全平衡位置的穩定性，並指出當轉速高於某一臨界值時，完全平衡位置必然穩定。Lee 和 Moorhem [1]藉由 Floquet 理論與數值模擬方式，找出完全平衡的穩定區間，說明高於臨界轉速時系統的完全平衡解才可能穩定，並以實驗驗證。Kang 和 Chao 等人[8]研究光

碟機上裝配雙滾珠自動平衡機構的系統，利用 Multiple scales 方法求得穩定的平衡解，並藉以估測自動平衡機構的效能，另外以數值分析得到完全平衡解的穩定區域。Lu 與 Wang 等人[9]提出雙滾珠系統所有可能平衡解的存在區域，並以 Routh-Hurwitz Criterion 解析地判讀平衡解的穩定性，當中提出穩定的完全平衡解與不完全平衡解都分別僅具有唯一的形式，同時以數值分析及實驗結果驗證之。Chung [10]分別考慮滾珠自動平衡機構在水平與垂直擺置條件下，重力與角速度所造成的效應，由數值結果說明當自動平衡機構垂直擺置而呈完全平衡時，轉軸因重力作用而有靜態偏移，但無迴轉振動。

多滾珠的系統明顯增加了分析的困難度，然而實際應用於光碟機的平衡機構大多配備多顆滾珠。因此，有部份文獻針對多滾珠的制振行為加以探討。Lu 與 Hung [11]，以三顆滾珠的自動平衡系統進行研究，發現多滾珠系統的完全平衡位置的穩定區域較雙滾珠系統為大。完全平衡解的穩定區域影響自動平衡機構的效能，較大的穩定區域代表較強韌的自動平衡機構。Green 與 Champneys 等人[12] 針對多顆滾珠之系統提出研究結果，主要說明增加軌道內滾珠的數量，將使得系統增加了可能的平衡位置與完全平衡的自由度，讓系統具有更大的參數適用範圍。

同屬於二維制振範疇，另有些研究專注在某些進一步的行為特性，如光碟機承板的扭轉效應、滾珠的滾動摩擦以及軌道摩擦等。Kim 和 Chung [13]以光碟機的橡膠支承的剛性與阻尼係數為參數，比較完全平衡解的穩定區域的大小；他們認為光碟機內部承板的平移與旋轉共振頻率，均會影響自動平衡機構的平衡效能。Huang 和 Chao 等人[14]針對軌道偏心、滾動摩擦力以及軌道內流體的阻力進行研究，證實軌道偏心與滾動摩擦力將增加系統的徑向振幅，而軌道內的流體阻力能改善暫態響應，同時建立實驗驗證之。Chao 和 Sung 等人[15]、[16]針對光碟機的扭轉效應進行動態分析，求得穩態解並繪出穩定性的數值結果，結論中提出光碟機必須在高於扭轉共振頻率才可能平衡運轉，且完全平衡解是唯一存在的穩定平衡解[15]。同時探討滾珠滾動摩擦的效應，假設滾珠的驅動力小於磨擦力時即停止

滾動，利用 Multiple scales 做漸進分析，說明滾動摩擦對滾珠定位誤差的影響，並針對鋼、銅與鋁製軌道進行實驗[16]。Yang 和 Ong 等人[17] 以理論與實驗研究軌道摩擦對滾珠定位的影響，得知當系統的固有偏心率很小時，滾珠的驅動力會小於摩擦力，此時滾珠較難定位至理想的完全平衡位置。Van de Wouw 與 Van den Heuvel 等人[18]就乾摩擦（Coulomb friction model）假設下，自動平衡機構的效能提出見解，認為摩擦力的存在使得滾珠可能定位於平衡位置附近，而過大的滾珠定位範圍將造成平衡結果惡化，系統效能隨之下降。

另外，配置滾珠自動平衡機構的系統除了平衡解之外，亦可能出現滾珠繞軌道週期性運轉的穩態振動行為。對於包含週期解的全域研究如 Green 與 Champneys 等人[19]、[20]藉由 Pseudospectra 數值理論，討論滾珠平衡機構在不同初始條件下的暫態響應[19]並利用分歧圖呈現各參數平面上的穩定邊界[20]。結果顯示，在某些參數條件下，系統可能被吸引至穩態週期解。

當轉子系統的質心並不與自動平衡機構位於同一平面上時，系統將同時受到不平衡力與力矩的作用。對於此類型系統的非平面運動，亦有許多學者著墨。Chung 等人分別探討 Jeffcott rotor [21]與 Stodola-Green rotor model [22]加裝滾珠型自動平衡機構的系統，以極座標形式推導非線性運動方程，並針對穩定性提出討論，認為滾珠型自動平衡機構對這兩種轉子的制振情形同樣具有成效。Chao 和 Huang 等人[23]利用高階 Runge-Kutta 模擬光碟機非平面運動，指出在偏心碟片下方適當位置安裝自動平衡機構，有助於降低光碟機的傾斜角。DeSmidt [24]探討裝置雙滾珠自動平衡機構的彈性軸-偏心碟片系統在過臨界轉速下的制振行為。文中指出，只要適當選擇自動平衡機構與偏心碟片間軸向偏移的距離，則彈性軸側向振動與非平面的振動皆能予以抑制。Kim 和 Lee 等人[25]利用平移座標與尤拉角（Euler angles）描述光碟機的空間三維運動，提出平面運動的假設能有效簡化分析，且光碟機的迴轉運動不能被忽略，穩定的操作轉速應同時大於平移與迴轉共振頻率。Rajalingham 和 Bhat [26]探討垂直懸臂彈性轉軸配置雙滾珠型自動平衡機構的完全

平衡，利用非線性響應分析，說明系統可能完全平衡也可能呈現週期運動。

前述各文獻均是對配置單一個滾珠自動平衡機構的系統進行探討，但對於一般偏心轉子的三維制振，應考慮兩個平面以上的平衡，亦即須有兩個以上的自動平衡機構才能同時平衡轉子的質心偏移與軸線失準，使三維系統完全平衡，然而這類型的文章並不多見。Hedaya 和 Sharp [27]利用一對雙滾珠自動平衡機構，分別配置在近乎垂直的剛性轉子的兩水平面上，考慮作用於系統的不平衡力與力矩，推導此系統的平移與迴轉運動方程，並透過數值分析提出此轉子能否制振，關乎系統支承、轉速與滾珠軌道阻尼。Rodrigues 和 Champneys [28]等人研究自動平衡機構於兩平面間平衡的系統，探討其可能的平衡位置，並提出非線性分歧分析的結果。Ehyaei 與 Moghaddam [29]在具彈性的偏心旋轉軸上裝配 n 個滾珠型自動平衡機構，分析其動態穩定性與時間響應，當中指出軌道阻尼是獲致平衡的必要參數。

創新性的想法一直是各領域的研究與應用能否突破的關鍵，亦是專利所保護的精神。就光碟機自動平衡機構的構造與控制方法的改善，以國內專利為例，關於構造的改良如蔡震星與郭立華[31]、[32]在光碟機的轉盤或夾持座內設置大小不同的滾珠，讓不同滾珠有不同的釋放轉速，先前釋放的滾珠會因後釋放的滾珠撞擊所帶來的動能克服摩擦力，俾達到降低振動及噪音之功效[31]。另外在光碟機的轉盤或夾持座內設置一多極磁石及複數個滾珠，該多極磁石可使滾珠於釋放前能平均分佈，藉以降低釋放後對無偏心碟片造成不當的影響[32]。另一方面，就控制方法的改善，如廖正堯和陳子南[33]等人，在馬達轉速到達臨界速度前，加入一等速旋轉的步驟，之後再以馬達最大扭力加速通過系統的臨界速度，此時因慣性力的作用，增加了通過臨界速度的擾動力，使滾珠順利定位到碟片不平衡量反相的位置。在迴轉機具平衡改善的專利方面，如蔡俊毅[34]將滾珠軌道配置與鑽軸同心，利用滾珠在高速旋轉時之自動平衡功能，達到鑽軸運轉時的平衡。在期刊論文部分，Wang 和 Lu [30]提出單滾珠-彈簧自動平衡系統，利用與滾珠連接的徑向

彈簧來增加完全平衡解的自由度。其結論指出，將固定軌道改以徑向彈簧取代，可以增加完全平衡解的穩定區域。

總結而論，滾珠型自動平衡機構已被證實可有效的抑制二維平面上的偏心振動，目前更被廣泛的應用在光碟機的減振上。但是對於滾珠型自動平衡機構各平衡解的穩定性探討，以數值分析或微擾法為主，較少見以解析的方式得到明確的穩定或不穩定條件。另外，在剛性偏心長轉子三維制振與動態平衡上的應用，尚未有完整清楚的研究，尤其缺少實驗驗證。

1-3 論文架構與說明

本論文主要研究滾珠型自動平衡機構在二維偏心碟片與三維偏心轉子的制振特性，首先針對不同的系統建構相對應的理論模型，再利用 Lagrange's equations 推導各系統的統御方程，同時解出其平衡解並分析各平衡位置的存在區間與條件，接著以 Routh-Hurwitz criterion 解析平衡解的穩定性，並且探討不同系統參數對穩定區域的影響，最後架構三維轉子系統的制振實驗以驗證理論分析結果。綜觀先進之文獻論述，本文安排於二~五章中各提出一些進一步的研究成果，以期能略補疏漏。

第二章主要提出雙滾珠系統的平衡解穩定性的解析性研究。第三章則將雙滾珠系統的固定軌道改以徑向彈簧取代，同樣以解析的方式探究此雙滾珠-彈簧系統的穩定性，並比較兩者完全平衡解的穩定區域的差異。對於剛性偏心長轉子三維制振的應用則在第四章探討，並於文中提出兩端面裝置雙滾珠自動平衡機構的剛性偏心長轉子系統在靜態不平衡(static unbalance)與力偶不平衡(couple unbalance)狀態下的解析解。第五章則架構三維制振系統的實驗設施，考量定子的影響，修正第四章的基本理論模型，使理論與實驗相互驗證。最後在第六章結論中統整全文的結果，並提出滾珠型自動平衡機構應用於二維與三維系統設計的一般性準則。

第二章 滾珠自動平衡機構應用於二維偏心系統之制振

2-1 滾珠自動平衡機構-偏心碟片二維制振系統

光碟片的偏心質量在高速運轉下會造成嚴重的偏心振動，進而影響資料的存取。抑制因碟片偏心而導致的旋轉振動的方法之一是在光碟機馬達主軸上裝置一個滾珠型自動平衡機構。此自動平衡機構乃由單一或數個軌道及可沿軌道自由移動的數顆滾珠所組成。圖 2-1 所示為一典型滾珠型自動平衡機構的示意圖。首先簡單說明滾珠型自動平衡機構的作動原理，考慮一個具等向彈性支承且無阻尼的二維偏心碟片旋轉系統。系統靜止時碟片的幾何中心 C 位於固定點 O ，質心 G 偏離幾何中心。在等速運轉時，由於偏心不平衡量的作用，使得 C 點以相同於碟片旋轉的角速度繞著 O 點迴轉。碟片的質心 G 位於 OC 線上，當轉速低於系統的自然角頻率（次臨界轉速）時，質心 G 相較於碟片中心遠離 O 點，定位在線段 OC 外；相反的當轉速高於系統的自然角頻率（過臨界轉速）時，質心 G 定位於線段 OC 內[35]。另一方面，不論轉速高低，可自由滾動的滾珠的質心都定位於線段 OC 外。因為滾珠和碟片質心在高轉速時的定位不同使得滾珠在高轉速時可以平衡碟片的偏心量。更明確說明如下，次臨界轉速時（圖 2-2），質心和滾珠都定位於線段 OC 外，此時滾珠會加大偏心振動。另一方面，過臨界轉速時（圖 2-3），滾珠的質心仍位於線段 OC 外，但平衡後的質心轉而定位於線段 OC 內。換言之滾珠和碟片質心位於碟片直徑的兩端。此時如果滾珠所能提供的最大制振平衡量（滾珠質量與滾珠運行軌跡半徑的乘積）大於碟片的偏心不平衡量（偏心質量與偏心距離的乘積），滾珠會張開適量的幅角，使碟片呈現完全平衡，如圖 2-3(a)所示；如果滾珠的最大制振平衡量小於碟片偏心不平衡量，滾珠將緊靠在一起盡最大可能地抑制系統的偏心振動，如圖 2-3(b)所示。

總而言之，當光碟機的主軸轉速為過臨界轉速時，自動平衡機構內的滾珠將

定位至適當位置以平衡系統的偏心不平衡量。但在次臨界轉速時，卻反將因滾珠的定位而導致更大的振動。

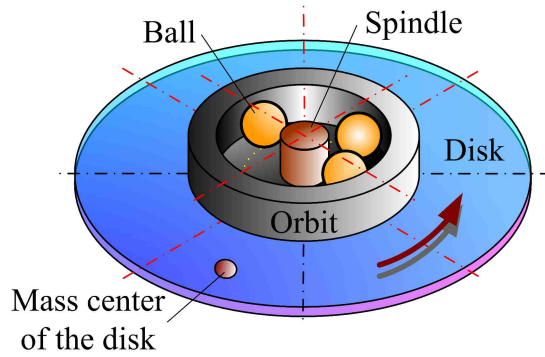


圖 2-1 滾珠自動平衡機構與二維偏心碟片系統示意圖

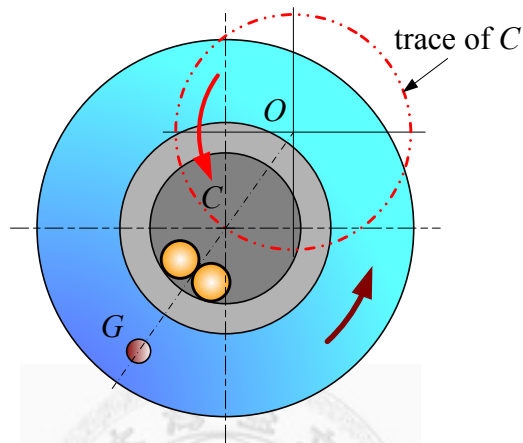


圖 2-2 次臨界轉速時，滾珠的定位情形

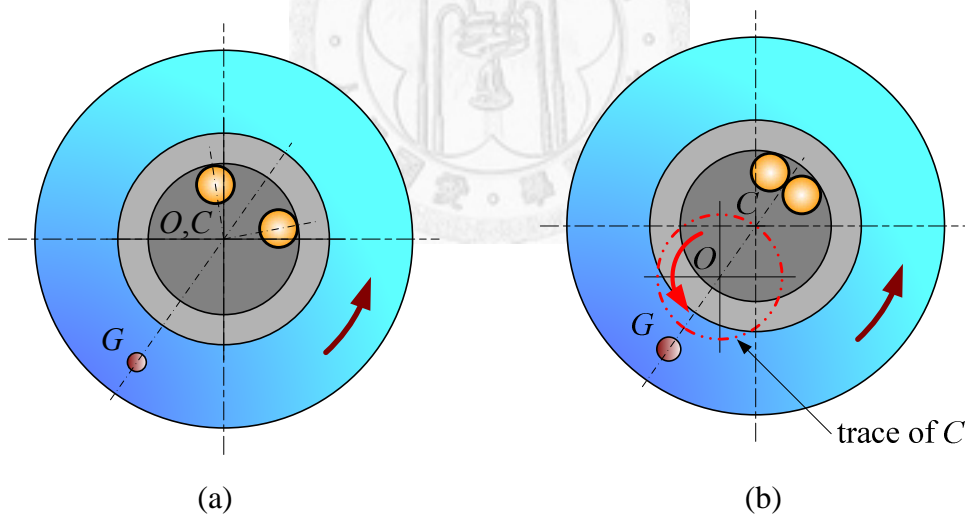


圖 2-3 過臨界轉速下，滾珠的最大制振平衡量大於(a)及小於(b)偏心不平衡量時滾珠的定位情形

另一個影響滾珠型自動平衡機構效能的是平衡位置的穩定性。平衡位置的穩定性和選取的工作條件極為相關，對此前人利用數值分析已有相當多的探討（[1]、[2]、[8]等）。然而由數值分析的結果，較難完整確認各參數對系統平衡位置穩定性的影響。本章針對二維制振系統的理论模型與各動態平衡位置進行討論，著重在以解析的方式探討平衡位置的穩定性，進而提出判斷準據。並佐以數值方式定量探討系統參數-轉速平面上各平衡位置的穩定區域。這個結果將有助於正確選取系統參數，使系統具有更大且更明確的轉速適用範圍。

2-1-1 二維制振系統理論模型

為了解滾珠型自動平衡機構對二維系統的制振行為，建構滾珠自動平衡機構、偏心碟片與支承系統的模型如圖 2-4 所示。質量為 m_d 的碟片以固定角速度 ω 迴轉， G 與 C 分別代表碟片的質心與其幾何中心。質心 G 的偏心距離為 e ，因此碟片的偏心不平衡量為 $m_d e$ 。自動平衡機構所含各滾珠的質量均為 m_b ，滾珠軌道半徑為 d 。假設滾珠和軌道間的能量消散機制可以黏滯阻尼來描述，對應的阻尼係數為 c_b 。將滾珠視為質點，則 n 顆滾珠的自動平衡機構所能提供的最大制振平衡量為 $n m_b d$ 。系統的支承可以等向性的線性彈簧與黏滯阻尼來描述，分別假設其彈性模數為 k ，阻尼係數為 c 。

為描述此系統的運動狀態，令直角座標 OXY 為固定參考座標系。當系統轉速為零時，支承彈簧沒有變形，此時碟片中心 C 與座標原點 O 重合。另外定義以固定 O 點為座標原點的迴轉座標系 Oxy ， Oxy 以相同於碟片的角速度 ω 等速迴轉， \overline{CG} 和正 x 軸平行。碟片中心 C 相對於迴轉座標系 Oxy 的座標值為 (\hat{x}, \hat{y}) ，則碟片質心 G 位於 $(\hat{x}+e, \hat{y})$ 。滾珠的位置由相對於碟片質心 G 的超前角 β_i ($i=1 \cdots n$) 來表示。選用迴轉座標系來描述系統行為的好處為統御方程式能以自主 (autonomous)

方程的形式呈現。

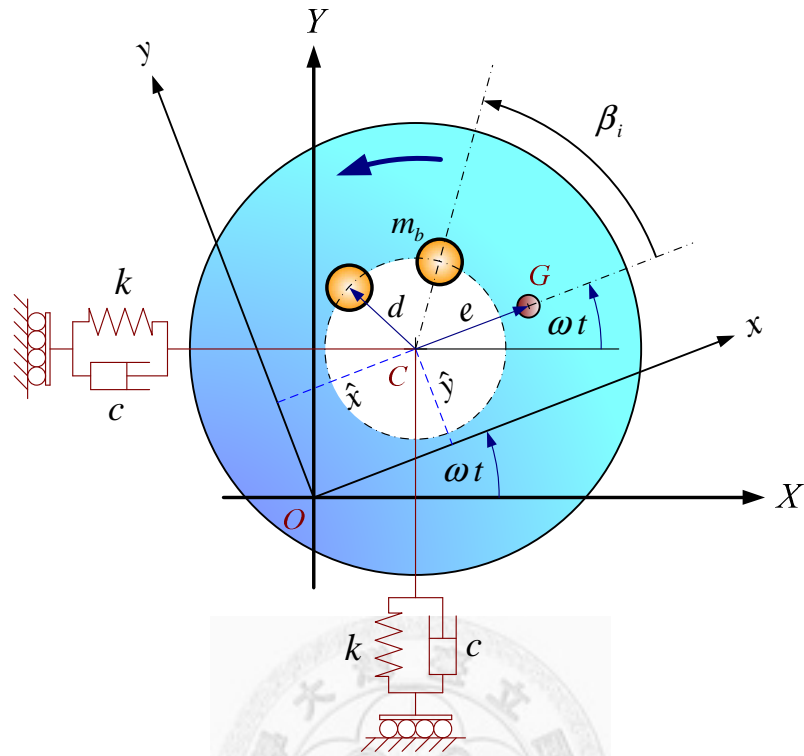


圖 2-4 滾珠型自動平衡機構對二維制振系統的理论模型

2-1-2 統御方程

利用 Lagrange's equations

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (2-1)$$

推導系統的統御方程式，其中 q_k 為廣義座標、 T 代表系統動能、 V 代表系統位能、

R 為 Rayleigh's dissipation function。系統的動能為

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} M \left[\dot{\hat{x}}^2 + \dot{\hat{y}}^2 + 2(\hat{x} \dot{\hat{y}} - \dot{\hat{x}} \hat{y}) \omega + (\hat{x}^2 + \hat{y}^2) \omega^2 \right] + \\ & \frac{1}{2} m_d (2 \hat{x} e \omega^2 + e^2 \omega^2 + 2 e \dot{\hat{y}} \omega) + \frac{1}{2} m_b \sum_{i=1}^n \left[d^2 (\dot{\beta}_i + \omega)^2 + \right. \\ & \left. 2 d (\dot{\hat{y}} + \omega \hat{x}) (\dot{\beta}_i + \omega) \cos \beta_i + 2 d (\omega \hat{y} - \dot{\hat{x}}) (\dot{\beta}_i + \omega) \sin \beta_i \right] \end{aligned} \quad (2-2)$$

其中 J 為等效轉子的轉動慣量、 M 表示系統總質量。系統位能為

$$V = \frac{1}{2} k (\hat{x}^2 + \hat{y}^2) \quad (2-3)$$

最後，Rayleigh's dissipation function 可整理成

$$R = \frac{1}{2}c \left[\dot{\hat{x}}^2 + \dot{\hat{y}}^2 + 2(\hat{x}\dot{\hat{y}} - \dot{\hat{x}}\hat{y})\omega + (\hat{x}^2 + \hat{y}^2)\omega^2 \right] + \frac{1}{2}c_b d^2 \sum_{i=1}^n \dot{\beta}_i^2 \quad (2-4)$$

將式(2-2)~(2-4)代入式(2-1)中，同時針對雙滾珠系統令 $n=2$ ，可得非線性統

御方程式：

$$M \ddot{\hat{x}} - m_b d \sum_{i=1}^2 \left[(\dot{\beta}_i + \omega)^2 \cos \beta_i + \ddot{\beta}_i \sin \beta_i \right] - m_d e \omega^2 + c \dot{\hat{x}} - 2M \omega \dot{\hat{y}} + (k - M \omega^2) \hat{x} - c \omega \hat{y} = 0 \quad (2-5)$$

$$M \ddot{\hat{y}} - m_b d \sum_{i=1}^2 \left[(\dot{\beta}_i + \omega)^2 \sin \beta_i - \ddot{\beta}_i \cos \beta_i \right] + c \dot{\hat{y}} + 2M \omega \dot{\hat{x}} + (k - M \omega^2) \hat{y} + c \omega \hat{x} = 0 \quad (2-6)$$

$$m_b d \left[(\ddot{\hat{y}} + 2\omega \dot{\hat{x}} - \omega^2 \hat{y}) \cos \beta_i - (\ddot{\hat{x}} - 2\omega \dot{\hat{y}} - \omega^2 \hat{x}) \sin \beta_i + d \ddot{\beta}_i \right] + c_b d^2 \dot{\beta}_i = 0 \quad i=1, 2 \quad (2-7)$$

為簡化後續的分析，引入下列無因次化參數

$$x = \frac{\hat{x}}{d}, \quad y = \frac{\hat{y}}{d}, \quad \tau = \omega_n t, \quad c = 2M \zeta \omega_n, \quad c_b = 2m_b \zeta_b \omega_n \quad (2-8)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}}, \quad \mu_b = \frac{m_b}{M}, \quad \eta = \frac{m_b d}{m_d e}$$

其中 ζ 與 ζ_b 分別表示系統支承阻尼比與滾珠軌道阻尼比， Ω 代表工作轉速與系統自然頻率的比值， η 為單一滾珠的最大制振量與偏心不平衡量的比值。將式(2-8)所列的無因次化參數代換至式(2-5)~(2-7)，可得無因次化的統御方程式如下：

$$x'' - \mu_b \sum_{i=1}^2 \left[(\beta_i' + \Omega)^2 \cos \beta_i + \beta_i'' \sin \beta_i \right] + 2\zeta x' - 2\Omega y' + (1 - \Omega^2) x - 2\zeta \Omega y = \frac{\mu_b \Omega^2}{\eta} \quad (2-9)$$

$$y'' - \mu_b \sum_{i=1}^2 \left[(\beta_i' + \Omega)^2 \sin \beta_i - \beta_i'' \cos \beta_i \right] + 2\zeta y' + 2\Omega x' + (1 - \Omega^2) y + 2\zeta \Omega x = 0 \quad (2-10)$$

$$\mu_b \left[(y'' + 2\Omega x' - \Omega^2 y) \cos \beta_i - (x'' - 2\Omega y' - \Omega^2 x) \sin \beta_i + \beta_i'' \right] + 2\zeta_b \mu_b \beta_i' = 0 \quad i=1, 2 \quad (2-11)$$

其中 $(\quad)' = \frac{d(\quad)}{d\tau}$ ，表示對參數 τ （定義如式(2-8)）的微分。最後，令

$\mathbf{q} = [x, y, \beta_1, \beta_2]^T$ ，可將無因次化的統御方程式表為矩陣形式

$$\mathbf{M}_{TD} \mathbf{q}'' + \mathbf{D}_{TD} \mathbf{q}' + \mathbf{g}_{TD} + \mathbf{f}_{TD} = \mathbf{0} \quad (2-12)$$

其中，

$$\mathbf{M}_{TD} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\mu_b \sin \beta_1 & -\mu_b \sin \beta_2 \\ 0 & 1 & \mu_b \cos \beta_1 & \mu_b \cos \beta_2 \\ -\mu_b \sin \beta_1 & \mu_b \cos \beta_1 & \mu_b & 0 \\ -\mu_b \sin \beta_2 & \mu_b \cos \beta_2 & 0 & \mu_b \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{TD} = \begin{bmatrix} 2\zeta & -2\Omega & -2\mu_b \Omega \cos \beta_1 & -2\mu_b \Omega \cos \beta_2 \\ 2\Omega & 2\zeta & -2\mu_b \Omega \sin \beta_1 & -2\mu_b \Omega \sin \beta_2 \\ 2\mu_b \Omega \cos \beta_1 & 2\mu_b \Omega \sin \beta_1 & 2\mu_b \zeta_b & 0 \\ 2\mu_b \Omega \cos \beta_2 & 2\mu_b \Omega \sin \beta_2 & 0 & 2\mu_b \zeta_b \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_{TD} = \begin{bmatrix} -\mu_b \sum_{i=1}^2 (\beta_i')^2 \cos \beta_i \\ -\mu_b \sum_{i=1}^2 (\beta_i')^2 \sin \beta_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{TD} = \begin{bmatrix} (1-\Omega^2)x - 2\zeta\Omega y - \mu_b \Omega^2 \sum_{i=1}^2 \cos \beta_i - \frac{\mu_b \Omega^2}{\eta} \\ 2\zeta\Omega x + (1-\Omega^2)y - \mu_b \Omega^2 \sum_{i=1}^2 \sin \beta_i \\ \mu_b \Omega^2 (x \sin \beta_1 - y \cos \beta_1) \\ \mu_b \Omega^2 (x \sin \beta_2 - y \cos \beta_2) \end{bmatrix}$$

下標「 TD 」表示描述的系統為傳統（Traditional）固定軌道型式的滾珠自動平衡機構應用於二維碟片（Disk）制振的系統。

2-2 二維制振系統的平衡位置

2-2-1 平衡解的類型

分析非線性系統的首要步驟是確認系統的平衡位置，對自主系統而言，當描述系統行為的廣義座標不隨時間變化時，即代表此系統達到平衡狀態。令式(2-12)中時間微分項為0，而 $\bar{\mathbf{q}} = [\bar{x}, \bar{y}, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2]^T$ 代表系統的平衡位置，得到平衡方程式 $f_{TD}(\bar{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}$ 如下，

$$\begin{cases} (1-\Omega^2)\bar{x} - 2\zeta\Omega\bar{y} - \mu_b\Omega^2\sum_{i=1}^2\cos\bar{\beta}_i - \frac{\mu_b\Omega^2}{\eta} = 0 \\ 2\zeta\Omega\bar{x} + (1-\Omega^2)\bar{y} - \mu_b\Omega^2\sum_{i=1}^2\sin\bar{\beta}_i = 0 \\ \mu_b\Omega^2(\bar{x}\sin\bar{\beta}_1 - \bar{y}\cos\bar{\beta}_1) = 0 \\ \mu_b\Omega^2(\bar{x}\sin\bar{\beta}_2 - \bar{y}\cos\bar{\beta}_2) = 0 \end{cases} \quad (2-13)$$

為便於求解平衡位置，利用極座標形式變數代換

$$\bar{x} = \bar{r}\cos\bar{\theta}, \quad \bar{y} = \bar{r}\sin\bar{\theta}$$

其中 \bar{r} 為碟片的徑向穩態振幅， $\bar{\theta}$ 為OC相對於正x軸的夾角。將式(2-13)改寫以極座標描述，

$$\begin{cases} (1-\Omega^2)\bar{r}\cos\bar{\theta} - 2\zeta\Omega\bar{r}\sin\bar{\theta} - \mu_b\Omega^2\sum_{i=1}^2\cos\bar{\beta}_i - \frac{\mu_b\Omega^2}{\eta} = 0 \\ 2\zeta\Omega\bar{r}\cos\bar{\theta} + (1-\Omega^2)\bar{r}\sin\bar{\theta} - \mu_b\Omega^2\sum_{i=1}^2\sin\bar{\beta}_i = 0 \\ \mu_b\Omega^2\bar{r}\sin(\bar{\beta}_1 - \bar{\theta}) = 0 \\ \mu_b\Omega^2\bar{r}\sin(\bar{\beta}_2 - \bar{\theta}) = 0 \end{cases} \quad (2-14)$$

值得注意的是， ζ_b 並未出現在平衡方程式中。此意謂著滾珠和軌道間的黏滯阻尼不會影響系統的平衡位置。再者，由於 $\mu_b > 0$ 且 $\Omega > 0$ ，因此由式(2-14)-3與(2-14)-4得到

$$\bar{r}\sin(\bar{\beta}_i - \bar{\theta}) = 0 \quad i=1, 2 \quad (2-15)$$

滿足式(2-15)的平衡解可分為兩類：其一為 $\bar{r} = 0$ ，稱為完全平衡解，如圖 2-5(a)所示。其二為 $\sin(\bar{\beta}_i - \bar{\theta}) = 0$ 的解，此時 $\bar{r} \neq 0$ ，稱為不完全平衡解。由於兩滾珠不可區分，因此不完全平衡解可再區分為 (i) $\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = \bar{\theta}$ 、(ii) $\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = \bar{\theta} + \pi$ 及 (iii) $\bar{\beta}_1 = \bar{\theta}$ 且 $\bar{\beta}_2 = \bar{\theta} + \pi$ ，分別示於圖 2-5(b)~(d)。加上完全平衡解 (iv) $\bar{r} = 0$ ，此系統共有上述 (i) ~ (iv) 四組可能的平衡解。

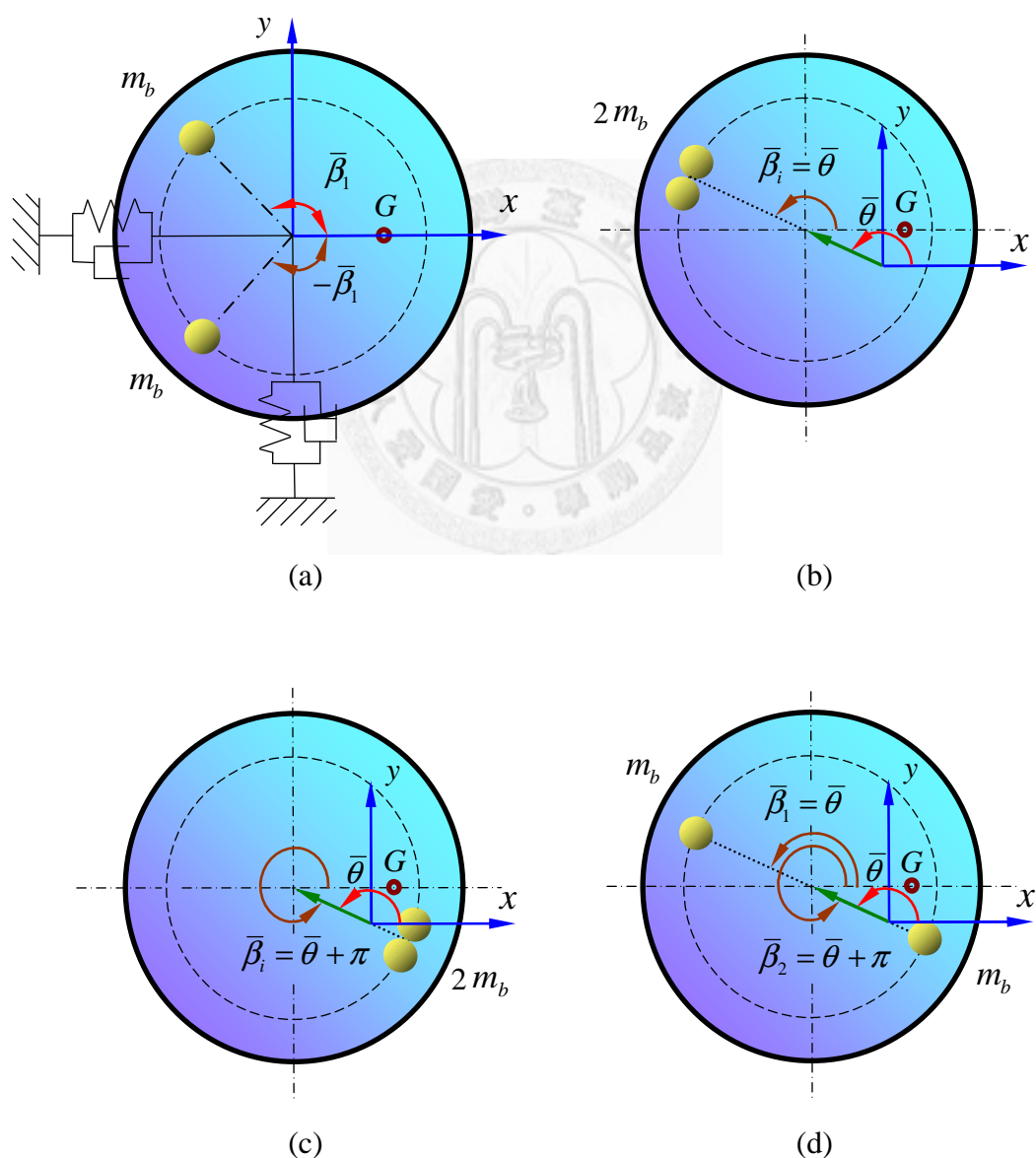


圖 2-5 (a)完全平衡解，(b)~(d) 不完全平衡解

為使各平衡解型態的區分更為簡潔，且便於後續討論，依其特性以代號來表示。第 (i) 與 (ii) 類型平衡解的兩滾珠均緊靠在一起，其型式同於質量為 $2m_b$ 的單 (Single) 滾珠系統，因此將其平衡位置 (Position) 分別以 P_{S1} 與 P_{S2} 來表示。第 (iii) 類型平衡解的兩滾珠定位在碟片直徑的兩端，彼此間的效應相互抵銷，其效應等同於無 (No) 滾珠系統，因此將其平衡位置以 P_{NO} 表示。最後，由於完全平衡解最重要的特性為其穩態振幅值為 0，故而以 P_0 來表示。

2-2-2 平衡位置的解析解與存在區間

本節推導系統四種類型的平衡位置的解析解。分別說明如下：

(i) P_{S1} ($\bar{r} \neq 0$ 且 $\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = \bar{\theta}$)

將 $\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = \bar{\theta}$ 代入方程式(2-14)-1 與(2-14)-2，並經計算化簡可得

$$\begin{cases} (\Omega^2 - 1)\bar{r} + 2\mu_b \Omega^2 = \frac{-\mu_b \Omega^2}{\eta} \cos \bar{\theta} \\ 2\zeta \Omega \bar{r} = \frac{-\mu_b \Omega^2}{\eta} \sin \bar{\theta} \end{cases} \quad (2-16)$$

由式(2-16)-2 可知 $\sin \bar{\theta} \leq 0$ ，亦即 $-\pi \leq \bar{\theta} \leq 0$ 。再者，由式(2-16)-1 可知，若 $\Omega > 1$ 則 $\cos \bar{\theta} < 0$ ，由於需同時滿足聯立式，所以 $-\pi \leq \bar{\theta} < -\frac{\pi}{2}$ 。

將式(2-16)等號兩邊各自平方後相加，可解得兩個可能的平衡位置，以 P_{S1}^{\pm} 表

示，其所對應的徑向振幅 \bar{r}_{S1}^+ 與 \bar{r}_{S1}^- 分別為

$$\left. \begin{matrix} \bar{r}_{S1}^+ \\ \bar{r}_{S1}^- \end{matrix} \right\} = \mathbf{R}_{TD} \left(-2\eta p_T \pm \sqrt{\mathbf{D}_{TD}} \right) \quad (2-17)$$

其中，

$$\mathbf{R}_{TD} = \frac{\Omega^2 \mu_b}{\eta (p_T^2 + q_T^2)}, \quad \mathbf{D}_{TD} = p_T^2 + q_T^2 - 4\eta^2 q_T^2 \quad (2-18)$$

而 p_T 與 q_T 可表為 Ω 的函數如下，

$$p_T = \Omega^2 - 1, \quad q_T = 2\zeta\Omega \quad (2-19)$$

此外， \bar{r}_{S1}^\pm 對應的相角 $\bar{\theta}_{S1}^\pm$ 可表為

$$\bar{\theta}_{S1}^\pm = \tan^{-1} \frac{-q_T \bar{r}_{S1}^\pm}{-p_T \bar{r}_{S1}^\pm - 2\mu_b \Omega^2} \quad (2-20)$$

由於 \bar{r} 為徑向振幅，必須為正實數。由式(2-17)可知， \bar{r}_{S1}^\pm 為實數，若且唯若 $D_{TD} \geq 0$ ，

亦即 $p_T^2 + q_T^2 - 4\eta^2 q_T^2 \geq 0$ ，換言之，

$$\eta \leq \eta_{Tcr} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{p_T^2}{q_T^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{(\Omega^2 - 1)^2}{4\zeta^2 \Omega^2}} \quad (2-21)$$

顯而易見地 $\eta_{Tcr} \geq \frac{1}{2}$ ，而且當 $\Omega = 1$ 時，其值為最小值 $\frac{1}{2}$ 。同時由 \bar{r} 應為正實數，可

分別推論出各平衡解在次臨界和過臨界轉速下的存在條件。

(i.a) \bar{r}_{S1}^+ 為正實數 ($\bar{r}_{S1}^+ = \mathbf{R}_{TD} (-2\eta p_T + \sqrt{D_{TD}})$)

- 當 $0 < \Omega < 1$ 時 ($p_T < 0$)，只要 $\eta \leq \eta_{Tcr}$ ，則必然滿足 $-2\eta p_T + \sqrt{D_{TD}} > 0$ 使 \bar{r}_{S1}^+ 為正實數。
- 當 $\Omega \geq 1$ 時 ($p_T \geq 0$)，必須滿足 $\sqrt{D_{TD}} > 2\eta p_T$ 方能使 \bar{r}_{S1}^+ 為正實數，可推得 $\eta < \frac{1}{2}$ 為其限制範圍。

(i.b) \bar{r}_{S1}^- 為正實數 ($\bar{r}_{S1}^- = \mathbf{R}_{TD} (-2\eta p_T - \sqrt{D_{TD}})$)

- 當 $0 < \Omega < 1$ 時 ($p_T < 0$)，必須滿足 $-2\eta p_T > \sqrt{D_{TD}}$ 方能使 \bar{r}_{S1}^- 為正實數，可推得 $\frac{1}{2} < \eta \leq \eta_{Tcr}$ 為其限制範圍。
- 當 $\Omega \geq 1$ 時 ($p_T \geq 0$)， \bar{r}_{S1}^- 不存在正實數解。

將 P_{S1} 的平衡解的限制條件整理如下

$$\bar{r}_{S1}^+ > 0 : \begin{cases} \eta \leq \eta_{Tcr} & \text{for } 0 < \Omega < 1 \\ \eta < \frac{1}{2} & \text{for } \Omega \geq 1 \end{cases} \quad (2-22)$$

$$\bar{r}_{S1}^- > 0 : \frac{1}{2} < \eta \leq \eta_{Tcr} \quad \text{for } 0 < \Omega < 1 \quad (2-23)$$

(ii) P_{S2} ($\bar{r} \neq 0$ 且 $\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = \bar{\theta} + \pi$)

將 $\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = \bar{\theta} + \pi$ 代入方程式(2-14)-1 與(2-14)-2，並經計算化簡可得

$$\begin{cases} (\Omega^2 - 1)\bar{r} - 2\mu_b \Omega^2 = \frac{-\mu_b \Omega^2}{\eta} \cos \bar{\theta} \\ 2\zeta \Omega \bar{r} = \frac{-\mu_b \Omega^2}{\eta} \sin \bar{\theta} \end{cases} \quad (2-24)$$

由式(2-24)-2 可知 $-\pi \leq \bar{\theta} \leq 0$ 。將式(2-24)等號兩邊各自平方後相加，以 P_{S2}^\pm 表示解

得的兩個平衡位置， \bar{r}_{S2}^+ 與 \bar{r}_{S2}^- 分別為對應的徑向振幅

$$\left. \begin{matrix} \bar{r}_{S2}^+ \\ \bar{r}_{S2}^- \end{matrix} \right\} = \mathbf{R}_{TD} \left(2\eta p_T \pm \sqrt{\mathbf{D}_{TD}} \right) \quad (2-25)$$

其中 \mathbf{R}_{TD} 、 \mathbf{D}_{TD} 以及 p_T 、 q_T 與式(2-18)、式(2-19)定義相同；此外， \bar{r}_{S2}^\pm 對應的相角

$\bar{\theta}_{S2}^\pm$ 亦可表為

$$\bar{\theta}_{S2}^\pm = \tan^{-1} \frac{-q_T \bar{r}_{S2}^\pm}{-p_T \bar{r}_{S2}^\pm + 2\mu_b \Omega^2} \quad (2-26)$$

接著考慮 \bar{r}_{S2}^\pm 為正實數，推論各平衡解在次、過臨界轉速下的存在條件。

(ii.a) \bar{r}_{S2}^+ 為正實數 ($\bar{r}_{S2}^+ = \mathbf{R}_{TD} (2\eta p_T + \sqrt{\mathbf{D}_{TD}})$)

- 當 $0 < \Omega \leq 1$ 時，必須滿足 $\sqrt{\mathbf{D}_{TD}} > -2\eta p_T$ 方能使 \bar{r}_{S2}^+ 為正實數，可推得 $\eta < \frac{1}{2}$

為其限制範圍。

- 當 $\Omega > 1$ 時，若 $\eta \leq \eta_{Tcr}$ ，則 \bar{r}_{S2}^+ 為正實數。

(ii.b) \bar{r}_{S2}^- 為正實數 ($\bar{r}_{S2}^- = \mathbf{R}_{TD} (2\eta p_T - \sqrt{\mathbf{D}_{TD}})$)

- 當 $0 < \Omega \leq 1$ 時， \bar{r}_{S2}^- 不存在正實數解。
- 當 $\Omega > 1$ 時，必須滿足 $2\eta p_T > \sqrt{\mathbf{D}_{TD}}$ 方能使 \bar{r}_{S2}^- 為正實數，可推得 $\frac{1}{2} < \eta \leq \eta_{Tcr}$ 為其限制範圍。

將 P_{S2} 的平衡解的限制條件整理如下

$$\bar{r}_{S2}^+ > 0 : \begin{cases} \eta < \frac{1}{2} & \text{for } 0 < \Omega \leq 1 \\ \eta \leq \eta_{Tcr} & \text{for } \Omega > 1 \end{cases} \quad (2-27)$$

$$\bar{r}_{S2}^- > 0 : \frac{1}{2} < \eta \leq \eta_{Tcr} \quad \text{for } \Omega > 1 \quad (2-28)$$

(iii) P_{NO} ($\bar{r} \neq 0$ 且 $\bar{\beta}_1 = \bar{\theta}$ 、 $\bar{\beta}_2 = \bar{\theta} + \pi$)

將 $\bar{\beta}_1 = \bar{\theta}$ 與 $\bar{\beta}_2 = \bar{\theta} + \pi$ 代入方程式(2-14)-1 與(2-14)-2，並化簡為

$$\begin{cases} (\Omega^2 - 1)\bar{r} = \frac{-\mu_b \Omega^2}{\eta} \cos \bar{\theta} \\ 2\zeta \Omega \bar{r} = \frac{-\mu_b \Omega^2}{\eta} \sin \bar{\theta} \end{cases} \quad (2-29)$$

解得平衡位置的徑向振幅 \bar{r}_{NO} 為

$$\bar{r}_{NO} = \mathbf{R}_{TD} \sqrt{p_T^2 + q_T^2} \quad (2-30)$$

其中 \mathbf{R}_{TD} 、 p_T 及 q_T 與前述定義相同。 \bar{r}_{NO} 對應的相角 $\bar{\theta}_{NO}$ 為

$$\bar{\theta}_{NO} = \tan^{-1} \frac{q_T}{p_T} \quad (2-31)$$

由式(2-30)可知 \bar{r}_{NO} 必然為正實數。此外，因為兩滾珠所有的特性一致，因此

$\begin{cases} \bar{\beta}_1 = \bar{\theta} \\ \bar{\beta}_2 = \bar{\theta} + \pi \end{cases}$ 與 $\begin{cases} \bar{\beta}_1 = \bar{\theta} + \pi \\ \bar{\beta}_2 = \bar{\theta} \end{cases}$ 就系統的平衡解而言，是完全相同的。

(iv) P_0 ($\bar{r} = 0$)

此時系統達完全平衡，其振動量為 0。將 $\bar{r} = 0$ 代入式(2-14)-1 與(2-14)-2 中，並化簡為

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^2 \cos \bar{\beta}_i = -\frac{1}{\eta} \\ \sum_{i=1}^2 \sin \bar{\beta}_i = 0 \end{cases} \quad (2-32)$$

可解得

$$\bar{\beta}_1 = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2\eta}\right), \bar{\beta}_2 = -\bar{\beta}_1 \quad (2-33)$$

由式(2-33)可知，唯有當 $\eta \geq \frac{1}{2}$ 時 $\bar{\beta}_1$ 才存在，意即 $\eta \geq \frac{1}{2}$ 為 P_0 解存在的限制條件；同時可得， $\frac{\pi}{2} \leq \bar{\beta}_1 \leq \frac{3\pi}{2}$ 。此結果指出，當系統完全平衡時，具有下列特性

- 當 $\eta = \frac{1}{2}$ 時， $\bar{\beta}_1 = \pi$ 、 $\bar{\beta}_2 = -\pi$ ；此時兩滾珠緊靠一起且相對於碟片中心 C 平衡於碟片質心 G 的徑向對邊端點。
- 當 $\eta > \frac{1}{2}$ 時，兩滾珠相對於碟片中心定位在碟片質心的異側，且相對於 CG 具有大小相同但方向相異的夾角。
- 隨著 η 值增加，兩滾珠間的幅角跟著增加，但始終平衡於碟片偏心的異側。此意謂著，滾珠自動平衡機構藉由兩滾珠張開幅角所提供的分量和，完美地平衡了碟片偏心所造成的不平衡量。

由上述關於平衡位置的解析與存在區間的分析可知， η 、 Ω 與 ζ 為影響系統平衡位置的主要參數，且系統共存在有六種可能的平衡位置，每個平衡位置均能在 $\Omega-\eta$ 平面上推論出其存在區間。圖 2-6 所示為當 $\zeta = 0.1$ 時，六種平衡位置在 $\Omega-\eta$ 平面上的存在區間。其中 η_{Tcr} 所描繪的曲線與水平線 $\eta = \frac{1}{2}$ ，將 $\Omega-\eta$ 平面劃分為四個區域，每個區域內存在的平衡位置的種類和數目都不同。單一區域最多

有四種不同的平衡位置。分別描述各區域內的平衡位置如後。水平線 $\eta = \frac{1}{2}$ 以下為區域 (I)，此區域中不存在完全平衡解，只有 P_{S1}^+ 、 P_{S2}^+ 與 P_{NO} 三種解可能存在。 η_{Tcr} 在 $0 < \Omega < 1$ 區間為單調遞減，當 $\Omega > 1$ 時則為單調遞增，並且當 $\Omega = 1$ 時與 $\eta = \frac{1}{2}$ 相切。因此當 $\eta > \frac{1}{2}$ 時， η_{Tcr} 定義的曲線將 $\Omega - \eta$ 平面劃分成三個區域，依照 Ω 增加的方向分別為區域 (II)、(III) 與 (IV)，各區域可能存在的平衡解如圖所標示。圖中被“□”框起的平衡位置將於後續討論中，解析地證明出其為不穩定平衡。

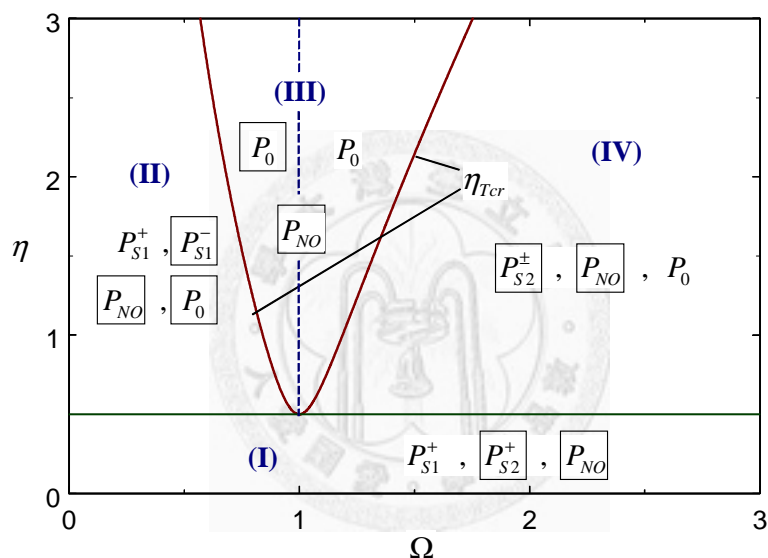


圖 2-6 六種平衡解在 $\Omega - \eta$ 平面上的存在區間

2-3 二維制振系統的穩定性分析

2-3-1 平衡解的穩定性解析

自主系統平衡位置的穩定性可由系統方程式在平衡位置上線性化後的特徵值來決定，而特徵值即為下列特徵多項式的根；

$$F(s) = \bar{a}_0 s^n + \bar{a}_1 s^{n-1} + \bar{a}_2 s^{n-2} + \cdots + \bar{a}_{n-1} s + \bar{a}_n \quad (2-34)$$

若所有特徵值的實部均為負值，則此平衡位置為穩定。特徵多項式的係數 \bar{a}_i 和平

衡位置及系統參數有關。依據 Routh-Hurwitz Criterion，系統平衡位置的穩定性可直接由特徵多項式的係數來判讀[36]，而判斷平衡位置穩定與否的一項必要條件是特徵多項式的所有係數都必須具有相同的正負號。配備雙滾珠自動平衡機構的旋轉碟片系統的特徵多項式的所有係數分別為

$$a_0 = (1 - 2\mu_b) + \frac{1}{2}\mu_b^2 [1 - \cos 2(\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2)] \quad (2-35)$$

$$a_1 = 4(1 - \mu_b) \cdot (\zeta + \zeta_b) \quad (2-36)$$

$$a_2 = (1 - \mu_b) \cdot \left[2(1 + \Omega^2 + 4\zeta\zeta_b) + \bar{r}\Omega^2 (\cos(\bar{\beta}_1 - \bar{\theta}) + \cos(\bar{\beta}_2 - \bar{\theta})) \right] + 4(\zeta + \zeta_b)^2 + 2\mu_b^2\Omega^2 [1 - \cos 2(\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2)] \quad (2-37)$$

$$a_3 = 2 \left\{ 2 \left[4\zeta^2\zeta_b + \zeta_b(2 - \mu_b)(1 + \Omega^2) + \zeta(1 + 4\zeta_b^2 + (1 + 2\mu_b)\Omega^2) \right] + \bar{r}\Omega^2 [\zeta(2 - \mu_b) + \zeta_b] (\cos(\bar{\beta}_1 - \bar{\theta}) + \cos(\bar{\beta}_2 - \bar{\theta})) \right\} \quad (2-38)$$

$$a_4 = (\Omega^2 - 1)^2 + 8\zeta_b [\zeta_b + 2\zeta(1 + \zeta\zeta_b)] + 4[\zeta^2 + 3\mu_b + 4\zeta\zeta_b(1 + \mu_b) + 2\zeta_b^2]\Omega^2 + 2\mu_b\Omega^4 + 3\mu_b^2\Omega^4 (1 - \cos 2(\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2)) + \bar{r}^2\Omega^4 \cos(\bar{\beta}_1 - \bar{\theta}) \cos(\bar{\beta}_2 - \bar{\theta}) + \bar{r}\Omega^2 [4\zeta(\zeta + 2\zeta_b) + (2 - \mu_b)(1 + \Omega^2)] (\cos(\bar{\beta}_1 - \bar{\theta}) + \cos(\bar{\beta}_2 - \bar{\theta})) \quad (2-39)$$

$$a_5 = 4 \left\{ \bar{r}^2\zeta\Omega^4 \cos(\bar{\beta}_1 - \bar{\theta}) \cos(\bar{\beta}_2 - \bar{\theta}) + \zeta_b(\Omega^2 - 1)^2 + 4\zeta\zeta_b(1 + \Omega^2) + 2(2\zeta^2 + 3\mu_b)\zeta_b\Omega^2 + \mu_b(3\zeta + \zeta_b)\Omega^4 + \bar{r}\Omega^2 [\zeta + (1 + 2\zeta^2)\zeta_b + (\zeta + \zeta\mu_b + \zeta_b)\Omega^2] (\cos(\bar{\beta}_1 - \bar{\theta}) + \cos(\bar{\beta}_2 - \bar{\theta})) \right\} \quad (2-40)$$

$$a_6 = 24\zeta\zeta_b\mu_b\Omega^4 + 2\mu_b\Omega^4 \left[(\Omega^2 - 1) + 2\mu_b\Omega^2 \sin^2(\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2) \right] + 4\zeta_b^2 \left[(\Omega^2 - 1)^2 + 4\zeta^2\Omega^2 \right] + 2\bar{r}^2\Omega^4 (1 + \Omega^2 + 2\zeta^2) \cos(\bar{\beta}_1 - \bar{\theta}) \cos(\bar{\beta}_2 - \bar{\theta}) + \bar{r}\Omega^2 \left[(\Omega^2 - 1)^2 + 4\zeta^2\Omega^2 + 8\zeta\zeta_b(1 + \Omega^2) + \mu_b\Omega^2(6 + \Omega^2) \right] (\cos(\bar{\beta}_1 - \bar{\theta}) + \cos(\bar{\beta}_2 - \bar{\theta})) \quad (2-41)$$

$$a_7 = 2\Omega^2 \left\{ 2\mu_b \zeta_b \Omega^2 (\Omega^2 - 1) + \bar{r} \left[2\bar{r} \zeta \Omega^2 (1 + \Omega^2) \cos(\bar{\beta}_1 - \bar{\theta}) \cos(\bar{\beta}_2 - \bar{\theta}) \right. \right. \\ \left. \left. + \left[\zeta_b (\Omega^2 - 1)^2 + \zeta \Omega^2 (4\zeta \zeta_b + 3\mu_b \Omega^2) \right] (\cos(\bar{\beta}_1 - \bar{\theta}) + \cos(\bar{\beta}_2 - \bar{\theta})) \right] \right\} \quad (2-42)$$

$$a_8 = \Omega^4 \left\{ \bar{r}^2 \left[(\Omega^2 - 1)^2 + 4\zeta^2 \Omega^2 \right] \cos(\bar{\beta}_1 - \bar{\theta}) \cos(\bar{\beta}_2 - \bar{\theta}) \right. \\ \left. + \mu_b \Omega^2 \left[\bar{r} (\Omega^2 - 1) \cdot (\cos(\bar{\beta}_1 - \bar{\theta}) + \cos(\bar{\beta}_2 - \bar{\theta})) + \mu_b \Omega^2 \sin^2(\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2) \right] \right\} \quad (2-43)$$

很明顯地， a_0 與 a_1 永遠為正，因此若將平衡位置代入 $a_2 \sim a_8$ (式(2-37)~(2-43))，而能於其中判斷出任意一個係數為負值，則該平衡位置必然為不穩定。依此為判斷準據，針對二維制振系統的平衡解以解析方式進行穩定性分析，結果如下：

(1). 平衡位置 P_{S1}^- 為不穩定平衡

將 P_{S1}^- 的平衡解 \bar{r}_{S1}^- 、 $\bar{\theta}_{S1}^-$ (式(2-17)、(2-20)) 及 $\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = \bar{\theta}_{S1}^-$ 代入式(2-43)可得到

$$\bar{a}_8 = \bar{r}_{S1}^- \mu_b^2 \Omega^4 \left[2\mu_b \Omega^2 p_T + \frac{\mu_b \Omega^2}{\eta} (-2\eta p_T - \sqrt{D_{TD}}) \right] \\ = -\bar{r}_{S1}^- \mu_b^3 \Omega^6 \frac{\sqrt{D_{TD}}}{\eta} < 0 \quad (2-44)$$

因此，平衡位置 P_{S1}^- 為不穩定平衡。

(2). 平衡位置 P_{S2}^- 為不穩定平衡

將 P_{S2}^- 的平衡解 \bar{r}_{S2}^- (如式(2-25)) 及其對應的相角 $\bar{\theta}_{S2}^-$ (如式(2-26)) 與

$\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = \bar{\theta}_{S2}^- + \pi$ 代入特徵方程式的係數式中，可得

$$\begin{aligned}\bar{a}_8 &= \bar{r}_{S2}^- \mu_b^2 \Omega^4 \left[-2\mu_b \Omega^2 p_T + \frac{\mu_b \Omega^2}{\eta} (2\eta p_T - \sqrt{D_{TD}}) \right] \\ &= -\bar{r}_{S2}^- \mu_b^3 \Omega^6 \frac{\sqrt{D_{TD}}}{\eta} < 0\end{aligned}\quad (2-45)$$

故平衡位置 P_{S2}^- 為不穩定平衡。

(3). 平衡位置 P_{S2}^+ 為不穩定平衡

此平衡狀態下兩滾珠緊靠在一起，相對於碟片質心位置有相同幅角

$\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = \bar{\theta} + \pi$ 。此時雙滾珠碟片系統相當於兩倍質量的單一滾珠定位於 $\theta + \pi$ 的單滾珠碟片系統。換言之，若限制兩滾珠一起運動，雙滾珠碟片系統的動態行為將與單滾珠碟片系統完全一致。而單滾珠碟片系統當滾珠定位在 $\theta + \pi$ 的平衡解的穩定性可由 Routh-Hurwitz Criterion 證明為不穩定[4]。故對雙滾珠碟片系統而言，平衡解 P_{S2}^+ 亦不穩定。

(4). 平衡位置 P_{NO} 為不穩定平衡

將 P_{NO} 的平衡解 \bar{r}_{NO} (如式(2-30))、 $\bar{\theta}_{NO}$ (如式(2-31)) 及其滾珠定位 $\bar{\beta}_1 = \bar{\theta}$ 、

$\bar{\beta}_2 = \bar{\theta} + \pi$ 代入特徵方程式的係數式，得到

$$\bar{a}_8 = -\bar{r}_{NO}^2 \mu_b^2 \Omega^4 (p_T^2 + q_T^2) < 0$$

所以平衡位置 P_{NO} 為不穩定平衡。

(5). 當 $\Omega < 1$ 時，平衡位置 P_0 為不穩定平衡

將 P_0 的平衡解 $\bar{r} = 0$ 、 $\bar{\alpha} = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{2\eta}\right)$ 、 $\bar{\beta} = -\bar{\alpha}$ 代入特徵方程式的係數式中，

並同時考慮其限制條件 $\eta > \frac{1}{2}$ ，發現

$$\bar{a}_7 = 4\mu_b \zeta_b \Omega^4 (\Omega^2 - 1) < 0 \quad \text{for } \Omega < 1$$

因此，當 $\Omega < 1$ 時，平衡位置 P_0 為不穩定平衡。

為能更清楚呈現各個平衡解的穩定性解析結果，將圖 2-6 中不穩定平衡解以“□”框起。表 2-1 則依 η 和 Ω 值區分各平衡位置的存在區間，並標示其穩定性。需注意沒有“□”標示的平衡解並不表示必然為穩定，只是無法以解析方式證明其為不穩定。

表 2-1 六種平衡解的存在區間與穩定性解析整理

$\eta < \frac{1}{2}$		$\eta = \frac{1}{2}$		$\eta_{Tcr1} > \eta > \frac{1}{2}$		$\eta > \eta_{Tcr1}$	
$\Omega < 1$	$\Omega > 1$	$\Omega < 1$	$\Omega > 1$	$\Omega < 1$	$\Omega > 1$	$\Omega < 1$	$\Omega > 1$
----	----	P_0	P_0	P_0	P_0	P_0	P_0
P_{S1}^+	P_{S1}^+	P_{S1}^+	----	P_{S1}^+	----	----	----
----	----	----	----	P_{S1}^-	----	----	----
P_{S2}^+	P_{S2}^+	----	P_{S2}^+	----	P_{S2}^+	----	----
----	----	----	----	----	P_{S2}^-	----	----
P_{NO}							

2-3-2 穩定平衡解的數值分析

前一節的分析顯示，雙滾珠自動平衡機構與旋轉碟片系統具有四組平衡類型、六種平衡解，而其中只有兩種平衡解（ P_0 與 P_{S1}^+ ）可能是穩定的，並且在 $\Omega-\eta$ 平面上，此兩種平衡解的存在區域不重疊。換言之， P_0 是唯一可能的完全平衡解，而 P_{S1}^+ 則是唯一可能的不完全平衡解。

前一節的解析方式無法明確地得到 P_0 和 P_{S1}^+ 的穩定區域。因此利用數值分析方式，於 $\Omega-\eta$ 平面上逐點掃描，在每個點上計算對應特徵多項式的係數，並經由

Routh-Hurwitz Criterion 法判別各平衡位置的穩定性，藉以建立各平衡位置的穩定區域。圖 2-7 為 $\mu_b = 0.1$ 、 $\zeta = 0.1$ 及 $\zeta_b = 0.1$ 時系統平衡解在 $\Omega-\eta$ 平面上的穩定區域，其結果與解析穩定性時所推論的現象一致，六種平衡解當中， P_{S1}^- 、 P_{S2}^+ 、 P_{S2}^- 與 P_{NO} 完全不存在任何穩定參數點，唯有 P_{S1}^+ 及 P_0 兩種解具穩定性。圖中空白處代表不穩定區域、斜線部分代表不存在任何平衡解的區域，而淺灰及深灰色區域則分別為 P_{S1}^+ 與 P_0 的穩定區域。簡言之，當 η 值固定時，在任一操作轉速下，系統至多僅存在一個穩定的平衡位置。

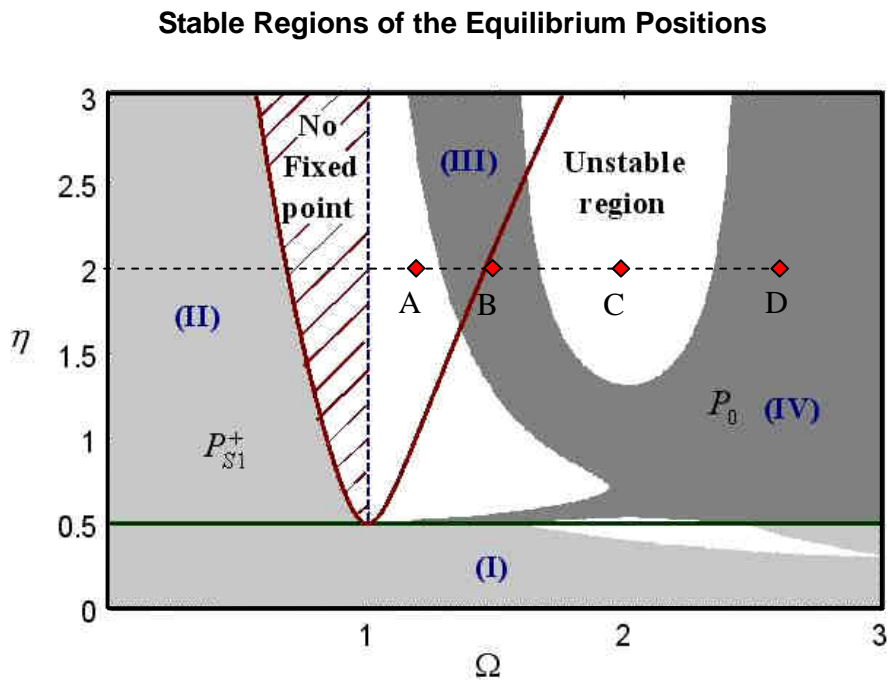


圖 2-7 平衡解在 $\Omega-\eta$ 平面上的穩定區域

另一方面，利用數值積分求得系統的運動歷程，以驗證圖 2-7 的結果。當 $\eta = 2$ ，在完全平衡位置加上小擾動為初始條件，考慮轉速比在 $\Omega = 1.2$ 、 1.5 、 2.0 及 $\Omega = 2.7$ 時完全平衡解的穩定性變化，其參數位置點分別如圖 2-7 中的 A、B、C、D 所示。圖 2-8 為 A、B、C、D 四種轉速下，系統的無因次化徑向振幅 r 的運動歷程。結果顯示 B、D 收斂至完全平衡，而 A、C 則趨近週期運動，代表完全平衡解

為不穩定。

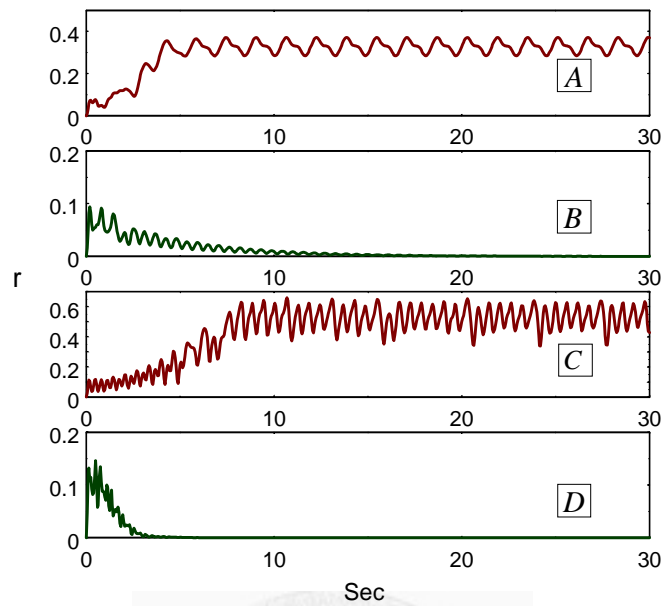


圖 2-8 驗證完全平衡解的穩定性變化

2-3-3 系統參數對穩定區域的影響

前兩節的結果顯示（參考圖 2-7），系統的完全平衡解只可能存在於 $\Omega > 1$ 處的區域（III）與區域（IV）內；而當系統為不完全平衡時，其穩定平衡解必然以 P_{S1}^+ 的解形式存在，並且僅可能位於區域（I）與區域（II）的範圍內。除了 η 、 Ω 外，其它系統參數對於平衡解的穩定區域也具有明顯的影響，因此接著考慮在不同參數條件下，以數值分析的方式分別探討系統支承阻尼 ζ 與滾珠軌道阻尼 ζ_b 對穩定區域的效應。

（1）系統支承阻尼 ζ 對穩定區域的影響

當 $\mu_b = 0.1$ 、 $\zeta_b = 0.5$ 時，依據 Routh-Hurwitz Criterion 分別於 $\zeta = 0.02$ 及 $\zeta = 0.1$ 條件下，繪出系統在 $\Omega-\eta$ 平面上各平衡解的穩定區域，結果如圖 2-9(a)、(b)所示。由 η_{Tcr} （式(2-21)）的定義可知在相同轉速之下，系統支承阻尼越小，則對應的臨界值 η_{Tcr} 越大，亦即在 $\Omega-\eta$ 平面上可能存在穩定平衡解的區域越大。由數值分析

結果顯示，當 $\Omega < 1$ 時唯一可能穩定性的平衡解 P_{S1}^+ ，其穩定區域確實因支承阻尼的減少（不存在平衡解的區域縮減）而增加。但當 $\Omega > 1$ 時，平衡解 P_0 與 P_{S1}^+ 的穩定區域則隨著支承阻尼的增加而擴大。換言之，當滾珠軌道阻尼夠大（如 $\zeta_b = 0.5$ ）時，若欲使系統能在較低轉速下（如 $\Omega = 2$ ）以完全平衡型態運轉，則適當增加系統支承阻尼是必要的。另一方面，若系統支承阻尼很小（如 $\zeta = 0.02$ ），則較大的滾珠質量或軌道半徑（意即較大的制振比 η ），均須在較高轉速下始得以獲致穩定的完全平衡解。

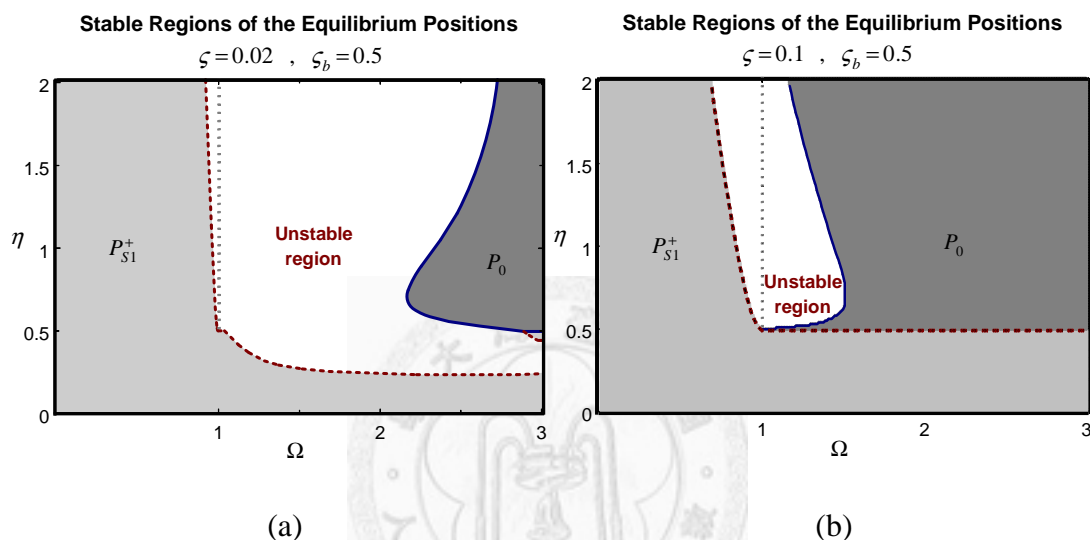


圖 2-9 系統支承阻尼對平衡解穩定性的影響 (a). $\zeta = 0.02$ 、(b). $\zeta = 0.1$

(2) 滾珠軌道阻尼 ζ_b 對穩定區域的影響

滾珠軌道阻尼的大小雖然不影響系統的平衡位置，卻能顯著地改變平衡解的穩定性。固定 $\mu_b = 0.1$ 、 $\zeta = 0.1$ ，分別討論滾珠軌道阻尼 $\zeta_b = 0.1$ 及 0.2 時，系統各平衡解在 $\Omega - \eta$ 平面上的穩定區域，結果如圖 2-10(a)、(b) 所示。由於 ζ_b 的改變並不影響 η_{Tcr} （不存在平衡解的區域不變），因此可以推論當 $\Omega < 1$ 時平衡解 P_{S1}^+ 可能穩定存在的區域範圍不變。數值分析結果也證實， P_{S1}^+ 於 $\Omega < 1$ 範圍內的穩定區域，幾乎不隨滾珠軌道阻尼的改變而改變。另一方面，當 $\Omega > 1$ 時，平衡解 P_0 與 P_{S1}^+ 的穩定

區域則隨著 ζ_b 的增加而擴大。完全平衡解 P_0 在 $\zeta_b = 0.1$ 、 0.2 及 0.5 的穩定區域邊界（分別以中心線、虛線及實線描述）整理於圖 2-11 中，由其穩定區域分布結果可知，適當增加滾珠軌道阻尼將有助於使系統在較低轉速下完全平衡運轉。

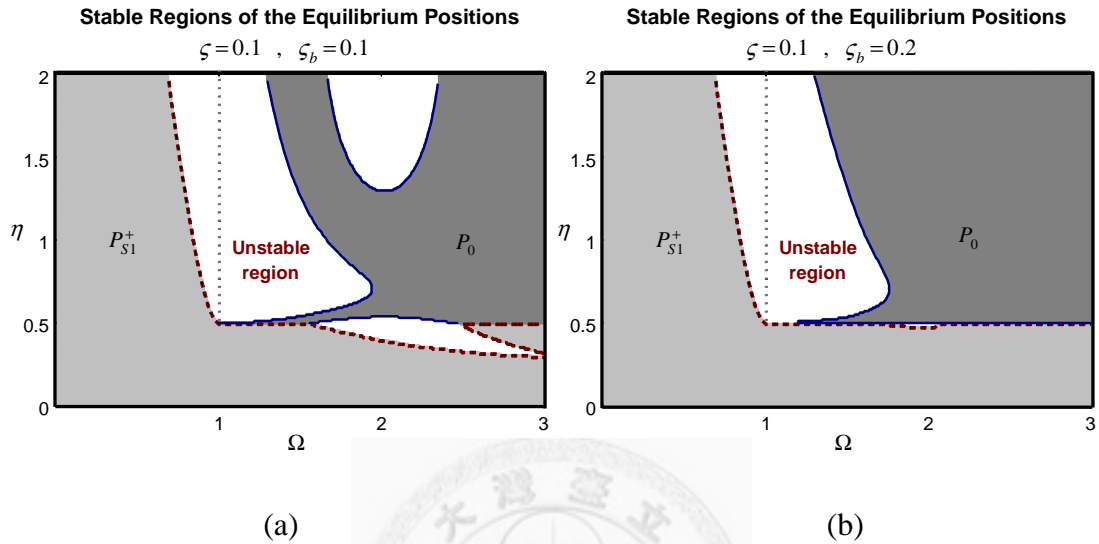


圖 2-10 滾珠軌道阻尼對平衡解穩定性的影響(a). $\zeta_b = 0.1$ 、(b). $\zeta_b = 0.2$

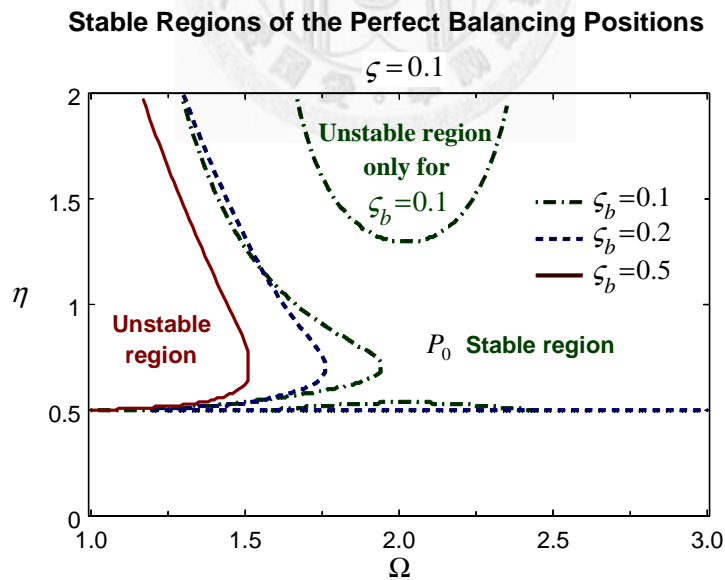


圖 2-11 比較不同滾珠軌道阻尼對完全平衡解 P_0 的穩定區域的影響

接著同時考慮 ζ 與 ζ_b 對於各平衡解穩定區域的影響。在 $\eta < 0.5$ 、 $\eta = 0.5$ 及 $\eta > 0.5$ 三種情況下，針對 $\zeta_b = 0.1$ 、 0.2 及 0.5 ，於 $\Omega - \zeta$ 平面上繪出系統平衡解的

穩定區域。首先討論 $\eta = 0.3$ (< 0.5) 的情形，此時滾珠所能提供的最大制振平衡量無法完全抑制碟片的偏心不平衡量，由前一節討論可知，此時系統唯一可能存在的穩定平衡解為 P_{S1}^+ 。圖 2-12 為 $\Omega - \zeta$ 平面上平衡解 P_{S1}^+ 的穩定區域，圖中顯示 $\Omega < 1$ 時 P_{S1}^+ 均呈穩定平衡，而當 $\Omega > 1$ 時，無論滾珠軌道阻尼的大小為何，系統支承阻尼越低則 P_{S1}^+ 的不穩定區域越大，甚而當 $\zeta = 0$ 時， P_{S1}^+ 在 $\Omega > 1$ 的轉速範圍內完全不存在穩定解。

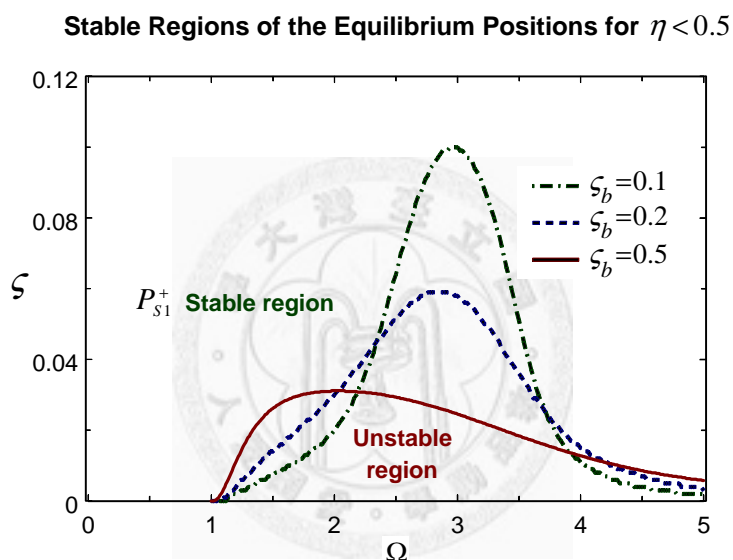


圖 2-12 $\eta = 0.3$ 時，平衡解 P_{S1}^+ 的穩定區域

接著討論 $\eta = 0.5$ 的情形，此時滾珠的最大制振平衡量恰等於碟片的偏心不平衡量。圖 2-13 為 $\Omega - \zeta$ 平面上平衡解 P_{S1}^+ 與 P_0 的穩定區域，圖中顯示 $\Omega < 1$ 時 P_{S1}^+ 的穩定平衡狀態不受 ζ 與 ζ_b 的影響，而當 $\Omega > 1$ 時，完全平衡解 P_0 在 $\Omega - \zeta$ 平面上的穩定區域特性與 $\eta < 0.5$ 的不完全平衡解 P_{S1}^+ 相同，亦即無論 ζ_b 的大小為何，系統阻尼越低則 P_0 的不穩定區域越大，並且當 $\zeta = 0$ 時， P_0 在 $\Omega > 1$ 的轉速範圍內同樣不具穩定性。

Stable Regions of the Equilibrium Positions for $\eta = 0.5$

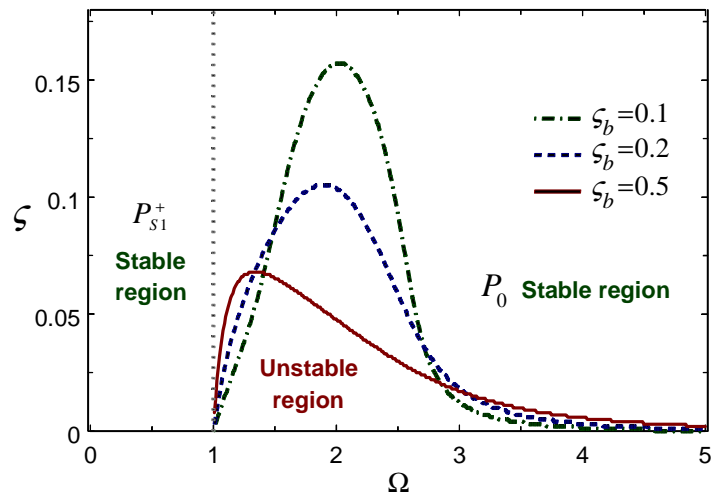


圖 2-13 $\eta = 0.5$ 時，平衡解 P_{S1}^+ 與 P_0 的穩定區域

最後討論 $\eta = 0.8$ (> 0.5) 的情形，此時滾珠的最大制振平衡量大於碟片的偏心不平衡量，不完全平衡解 P_{S1}^+ 僅存在於 $\Omega < 1$ 且 $\eta \leq \eta_{Tcr}$ 的範圍內，而當 $\Omega > 1$ 時，系統僅可能出現完全平衡解 P_0 。圖 2-14 為 $\eta = 0.8$ 時 $\Omega - \zeta$ 平面上平衡解 P_{S1}^+ 與 P_0 的穩定區域，圖中顯示 $\Omega < 1$ 時 P_{S1}^+ 的穩定平衡區域受支承阻尼 ζ 的影響，隨著 ζ 增加而範圍縮減。而當 $\Omega > 1$ 時，完全平衡解 P_0 在 $\Omega - \zeta$ 平面上的穩定區域將因滾珠軌道阻尼 ζ_b 的大小不同而有明顯的改變。 ζ_b 越低 P_0 的穩定區域越小。觀察圖 2-13 可知，對固定的軌道阻尼 ζ_b ，存在一臨界的支承阻尼 ζ 值，當 ζ 大於這臨界值時，完全平衡解在過臨界轉速時即為穩定。舉例而言，當 $\zeta_b = 0.2$ 時，這個臨界的 ζ 值約為 0.11。臨界支承阻尼值隨著軌道阻尼值的增加而降低。這顯示，為了保持完全平衡位置的穩定性，適當的能量消散是必需的。

Stable Regions of the Equilibrium Positions for $\eta > 0.5$

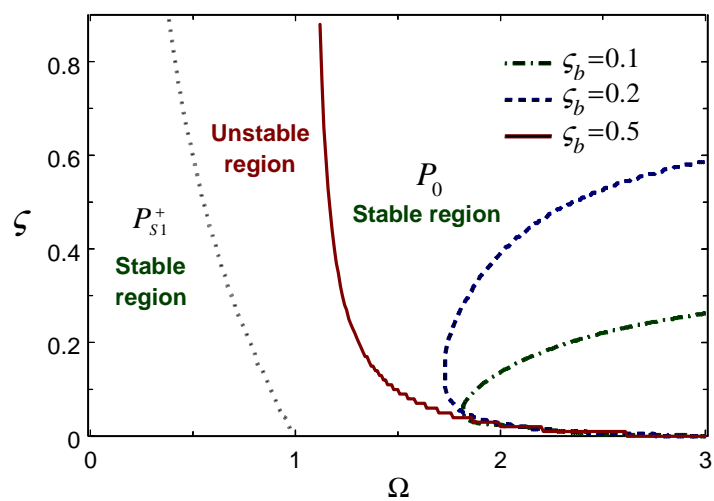
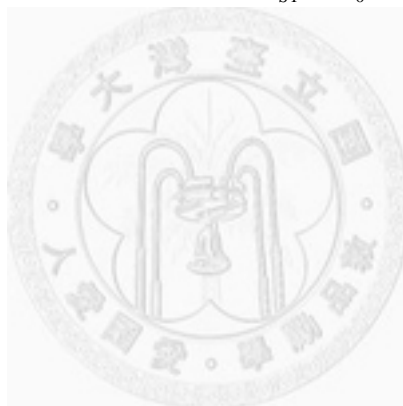


圖 2-14 $\eta = 0.8$ 時，平衡解 P_{s1}^+ 與 P_0 的穩定區域



第三章 滾珠-彈簧自動平衡機構應用於二維偏心系統 之制振

第二章中探討固定軌道的滾珠型自動平衡機構應用在二維偏心系統的制振問題，結果顯示，滾珠型自動平衡機構可以有效抑制因碟片偏心所引發的振動，然而要達到減振的目的，在工作轉速下的各個系統參數必需位於參數空間內平衡位置的穩定區域內。顯然的較大的穩定區域可以使得光碟機的運作更為強韌，因此增進自動平衡機構效能的方式之一是擴大完全平衡位置穩定區域。為了達到這個目的，一個可行的方式是將固定軌道改為包含徑向約束彈簧的自由旋轉直桿。根據這個概念，我們對單一滾珠-直桿-彈簧單元應用於二維偏心系統的制振進行了初步的研究[30]。我們提出系統平衡解的解析型式以及各平衡解穩定性的解析結果，同時以數值方式證明這個設計相較於傳統固定軌道的單滾珠系統，可以增加完全平衡時的穩定區域。眾所周知，只包含單一自由移動質量的自動平衡機構，無法平衡任意的偏心量。因此本章中我們將先前的研究拓展至包含兩組滾珠-直桿-彈簧單元的自動平衡機構。首先介紹滾珠-直桿-彈簧單元的構造，接著提出這種平衡機構和旋轉碟片系統的理论模型，分析平衡解，討論穩定性並和傳統固定軌道的滾珠平衡機構相比較。

3-1 滾珠-直桿-彈簧自動平衡機構

圖 3-1 所示為滾珠-直桿-彈簧單元的示意圖，其中徑向直桿的一端與彈簧的端點固定在一起。將穿孔的滾珠套入直桿中，並將朝向彈簧的一側固定於小軸承內環上，而軸承外環則與彈簧連接，使滾珠能繞直桿自由轉動，同時沿直桿方向的運動可受彈簧所箝制。使用時，將這個單元的中心環套接於主軸上，使得整個單元可以繞主軸自由迴轉。這同時，滾珠可以在直桿上滑動。換言之，滾珠可同

時有徑向和圓周向的運動。由於滾珠的徑向運動受制於彈簧，彈簧將因滾珠的離心力作用而伸長。當系統達到穩態，整個單元以等速繞主軸迴轉，彈簧的伸長量為定值。此時滾珠將以彈簧的平衡長度為半徑，繞主軸迴轉。

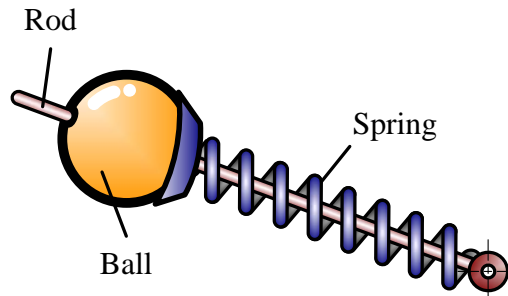


圖 3-1 滾珠、彈簧與徑向直桿的制振單元示意圖

為後續討論方便，將這個由滾珠、彈簧與徑向直桿所組成的新設計簡稱為滾珠-彈簧自動平衡機構。

3-1-1 滾珠-彈簧二維制振系統理論模型

為了探討滾珠-彈簧自動平衡機構對二維系統的制振行為與效能，建構滾珠-彈簧自動平衡機構、偏心碟片與支承系統模型如圖 3-2 所示。質量為 m_d 的碟片以固定角速度 ω 迴轉，碟片的質心 G 與其幾何中心 C 的偏心距離為 e 。滾珠-彈簧自動平衡機構末端光滑銷接於碟片的幾何中心 C ，使所有制振單元都能繞著 C 點自由迴轉，其中滾珠（含連接的軸承）的質量為 m_b ，連結滾珠的徑向彈簧（其質量不計）未變形時的初始長度為 \hat{a} ，彈簧常數為 k_b 。假設滾珠運動時的能量消散機制可以阻尼係數為 c_b 的黏滯阻尼來描述。我們選用與第二章相同的迴轉座標系 Oxy 來描述系統行為，碟片中心 C 的相對於迴轉座標系 Oxy 的座標值為 (\hat{x}, \hat{y}) 。滾珠除繞 C 迴轉外也可沿著直桿徑向運動，因此以彈簧變形後的全長 $\hat{\delta}_i$ 與相對於碟片質心 G 的超前角 β_i ($i=1 \cdots n$) 來描述各滾珠的位置。最後，假設系統的支承可以等向性的線性彈簧與黏滯阻尼來描述，其彈性模數為 k ，阻尼係數為 c 。

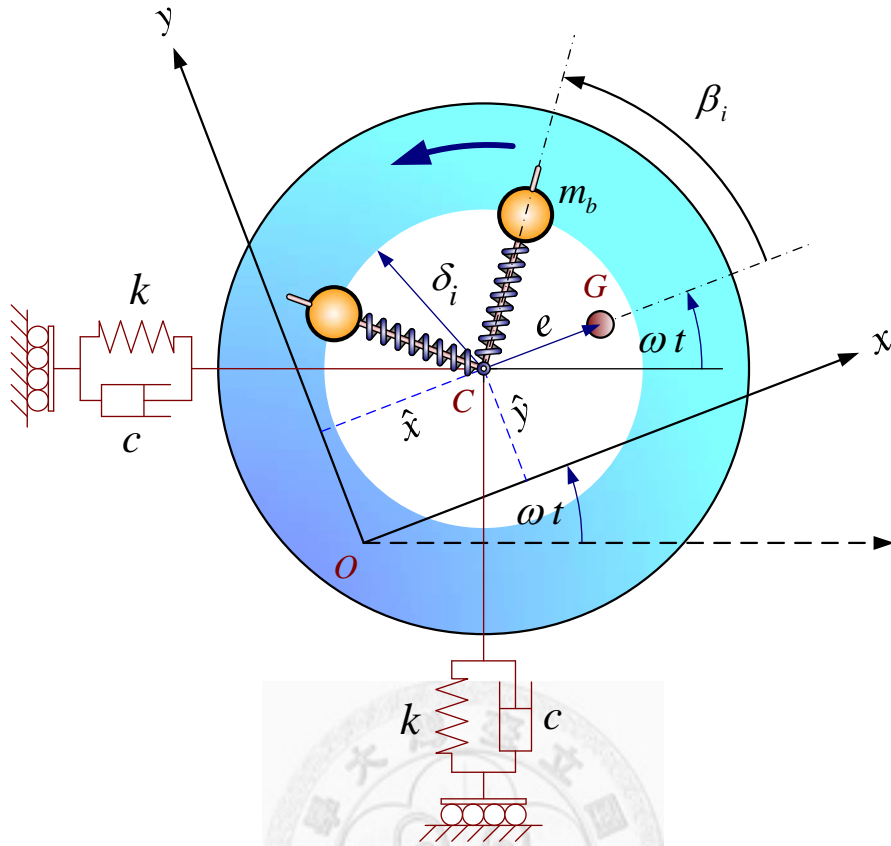


圖 3-2 滾珠-彈簧自動平衡機構對二維制振系統的理论模型

3-1-2 統御方程

利用 Lagrange's equations

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (3-1)$$

推導此系統的統御方程式，其中 T 、 V 、 R 與 q_k 分別代表系統動能、位能、Rayleigh's dissipation function 及系統廣義座標。系統的動能為

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} M \left[\dot{\hat{x}}^2 + \dot{\hat{y}}^2 + 2(\hat{x} \dot{\hat{y}} - \dot{\hat{x}} \hat{y}) \omega + (\hat{x}^2 + \hat{y}^2) \omega^2 \right] \\ & + \frac{1}{2} m_b \left(2 \hat{x} e \omega^2 + e^2 \omega^2 + 2 e \dot{\hat{y}} \omega \right) \\ & + \frac{1}{2} m_b \sum_{i=1}^2 \left[2 \hat{\delta}_i (\dot{\beta}_i + \omega) (\dot{\hat{y}} + \omega \hat{x}) \cos \beta_i - 2 \hat{\delta}_i (\dot{\beta}_i + \omega) (\dot{\hat{x}} - \omega \hat{y}) \sin \beta_i \right. \\ & \left. + \hat{\delta}_i^2 (\dot{\beta}_i + \omega)^2 + \hat{\delta}_i^2 + 2 \hat{\delta}_i (\dot{\hat{x}} - \omega \hat{y}) \cos \beta_i + 2 \hat{\delta}_i (\dot{\hat{y}} + \omega \hat{x}) \sin \beta_i \right] \end{aligned} \quad (3-2)$$

其中 J 為等效轉子的轉動慣量、 M 表示系統總質量。系統位能為

$$V = \frac{1}{2}k(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) + \frac{1}{2}k_b \sum_{i=1}^2 (\hat{\delta}_i - \hat{a})^2 \quad (3-3)$$

Rayleigh's dissipation function 可整理成

$$R = \frac{1}{2}c \left[\dot{\hat{x}}^2 + \dot{\hat{y}}^2 + 2(\hat{x}\dot{\hat{y}} - \dot{\hat{x}}\hat{y})\omega + (\hat{x}^2 + \hat{y}^2)\omega^2 \right] + \frac{1}{2}c_b \sum_{i=1}^2 (\dot{\hat{\delta}}_i^2 + \hat{\delta}_i^2 \dot{\beta}_i^2) \quad (3-4)$$

將式(3-2)~(3-4)代入式(3-1)中，同時針對雙滾珠-彈簧系統令 $n=2$ ，可得非線性統御方程式

$$M\ddot{\hat{x}} + m_b \sum_{i=1}^2 \left\{ \left[\ddot{\hat{\delta}}_i - \hat{\delta}_i (\dot{\beta}_i + \omega)^2 \right] \cos \beta_i - \left[\hat{\delta}_i \ddot{\beta}_i + 2\dot{\hat{\delta}}_i (\dot{\beta}_i + \omega) \right] \sin \beta_i \right\} \quad (3-5)$$

$$- m_d e \omega^2 + c\dot{\hat{x}} - 2M\omega\dot{\hat{y}} + (k - M\omega^2)\hat{x} - c\omega\hat{y} = 0$$

$$M\ddot{\hat{y}} + m_b \sum_{i=1}^2 \left\{ \left[\ddot{\hat{\delta}}_i - \hat{\delta}_i (\dot{\beta}_i + \omega)^2 \right] \sin \beta_i + \left[\hat{\delta}_i \ddot{\beta}_i + 2\dot{\hat{\delta}}_i (\dot{\beta}_i + \omega) \right] \cos \beta_i \right\} \quad (3-6)$$

$$+ c\dot{\hat{y}} + 2M\omega\dot{\hat{x}} + (k - M\omega^2)\hat{y} + c\omega\hat{x} = 0$$

$$m_b \hat{\delta}_i \left[(\ddot{\hat{y}} + 2\omega\dot{\hat{x}} - \omega^2 \hat{y}) \cos \beta_i - (\ddot{\hat{x}} - 2\omega\dot{\hat{y}} - \omega^2 \hat{x}) \sin \beta_i + \hat{\delta}_i \ddot{\beta}_i + 2\dot{\hat{\delta}}_i (\dot{\beta}_i + \omega) \right] \quad (3-7)$$

$$+ c_b \hat{\delta}_i^2 \dot{\beta}_i = 0, \quad i = 1, 2$$

$$m_b \left[(\ddot{\hat{x}} - 2\omega\dot{\hat{y}} - \omega^2 \hat{x}) \cos \beta_i + (\ddot{\hat{y}} + 2\omega\dot{\hat{x}} - \omega^2 \hat{y}) \sin \beta_i - \hat{\delta}_i (\dot{\beta}_i + \omega)^2 + \ddot{\hat{\delta}}_i \right] \quad (3-8)$$

$$+ c_b \hat{\delta}_i + k_b (\hat{\delta}_i - \hat{a}) = 0, \quad i = 1, 2$$

對於滾珠、彈簧與徑向直桿組成的制振單元而言，在穩定的工作轉速之下，滾珠離心力對彈簧的作用將由彈簧變形產生的回復力予以平衡，此時彈簧的平衡長度為

$$\lambda = \frac{k_b \hat{a}}{k_b - m_b \omega^2} \quad (3-9)$$

為簡化後續的分析，引入下列無因次化參數

$$\begin{aligned} x &= \hat{x} / \lambda, & y &= \hat{y} / \lambda, & \delta_1 &= \hat{\delta}_1 / \lambda, & \delta_2 &= \hat{\delta}_2 / \lambda, & a &= \hat{a} / \lambda \\ \Lambda &= e / \lambda, & c &= 2M\zeta\omega_n, & c_b &= 2m_b\zeta_b\omega_n, & \tau &= \omega_n t \\ \omega_n &= \sqrt{k/M}, & \omega_b &= \sqrt{k_b/m_b}, & \mu_b &= m_b/M \\ \eta &= (m_b\lambda)/(m_d e), & \Omega &= \omega/\omega_n, & f &= \omega_b/\omega_n \end{aligned} \quad (3-10)$$

η 為在工作轉速 ω 等速運轉下，單一滾珠配合其彈簧的平衡長度所能提供的最大制振量與偏心不平衡量的比。 ω_n 為系統自然頻率， ω_b 為滾珠-彈簧制振單元自然頻率，而 f 為制振單元自然頻率與系統自然頻率的比值。式(3-9)可重寫成

$$\lambda = \frac{\omega_b^2 \hat{a}}{\omega_b^2 - \omega^2} = \frac{f^2 \hat{a}}{f^2 - \Omega^2} \quad (3-11)$$

由於 λ 代表彈簧的平衡長度，必為正值，且 f 與 Ω 均大於 0，因此必須滿足

$$f > \Omega \quad (3-12)$$

將式(3-10)所列的無因次化參數代換至式(3-5)~(3-8)，可得無因次化的統御方程式

如下：

$$\begin{aligned} x'' + \mu_b \sum_{i=1}^2 \left\{ \left[\delta_i'' - \delta_i (\beta_i' + \Omega)^2 \right] \cos \beta_i - \left[\delta_i \beta_i'' + 2 \delta_i' (\beta_i' + \Omega) \right] \sin \beta_i \right\} \\ - \frac{\mu_b \Omega^2}{\eta} + 2\zeta x' - 2\Omega y' + (1 - \Omega^2)x - 2\zeta \Omega y = 0 \end{aligned} \quad (3-13)$$

$$\begin{aligned} y'' + \mu_b \sum_{i=1}^2 \left\{ \left[\delta_i'' - \delta_i (\beta_i' + \Omega)^2 \right] \sin \beta_i + \left[\delta_i \beta_i'' + 2 \delta_i' (\beta_i' + \Omega) \right] \cos \beta_i \right\} \\ + 2\zeta y' + 2\Omega x' + (1 - \Omega^2)y + 2\zeta \Omega x = 0 \end{aligned} \quad (3-14)$$

$$\begin{aligned} \mu_b \delta_i \left[(y'' + 2\Omega x' - \Omega^2 y) \cos \beta_i - (x'' - 2\Omega y' - \Omega^2 x) \sin \beta_i + \delta_i \beta_i'' \right. \\ \left. + 2\delta_i' (\beta_i' + \Omega) \right] + 2\zeta_b \mu_b \delta_i^2 \beta_i' = 0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3-15)$$

$$\begin{aligned} \mu_b \left[(x'' - 2\Omega y' - \Omega^2 x) \cos \beta_i + (y'' + 2\Omega x' - \Omega^2 y) \sin \beta_i - \delta_2 (\beta_i' + \Omega)^2 \right. \\ \left. + \delta_i'' \right] + 2\zeta_b \mu_b \delta_i' + \mu_b f^2 (\delta_i - 1) + \mu_b \Omega^2 = 0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3-16)$$

其中 $(\)' = \frac{d(\)}{d\tau}$ ，表示對參數 τ 的微分。接著，令 $\mathbf{q} = [x, y, \beta_1, \beta_2, \delta_1, \delta_2]^T$ ，

可將無因次化的統御方程式表為矩陣形式

$$\mathbf{M}_{ND} \mathbf{q}'' + \mathbf{D}_{ND} \mathbf{q}' + \mathbf{g}_{ND} + \mathbf{f}_{ND} = \mathbf{0} \quad (3-17)$$

其中，

$$\mathbf{M}_{ND} = \mu_b \begin{bmatrix} 1/\mu_b & 0 & -\delta_1 \sin \beta_1 & -\delta_2 \sin \beta_2 & \cos \beta_1 & \cos \beta_2 \\ 0 & 1/\mu_b & \delta_1 \cos \beta_1 & \delta_2 \cos \beta_2 & \sin \beta_1 & \sin \beta_2 \\ -\delta_1 \sin \beta_1 & \delta_1 \cos \beta_1 & \delta_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta_2 \sin \beta_2 & \delta_2 \cos \beta_2 & 0 & \delta_2^2 & 0 & 0 \\ \cos \beta_1 & \sin \beta_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cos \beta_2 & \sin \beta_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-18)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{ND} &= 2\mu_b \\
&\begin{bmatrix}
\zeta/\mu_b & -\Omega/\mu_b & -\delta_1\Omega \cos \beta_1 & -\delta_2\Omega \cos \beta_2 & -\Omega \sin \beta_1 & -\Omega \sin \beta_2 \\
\Omega/\mu_b & \zeta/\mu_b & -\delta_1\Omega \sin \beta_1 & -\delta_2\Omega \sin \beta_2 & \Omega \cos \beta_1 & \Omega \cos \beta_2 \\
\delta_1\Omega \cos \beta_1 & \delta_1\Omega \sin \beta_1 & \delta_1^2 \zeta_b & 0 & \delta_1\Omega & 0 \\
\delta_2\Omega \cos \beta_2 & \delta_2\Omega \sin \beta_2 & 0 & \delta_2^2 \zeta_b & 0 & \delta_2\Omega \\
\Omega \sin \beta_1 & -\Omega \cos \beta_1 & -\delta_1\Omega & 0 & \zeta_b & 0 \\
\Omega \sin \beta_2 & -\Omega \cos \beta_2 & 0 & -\delta_2\Omega & 0 & \zeta_b
\end{bmatrix} \quad (3-19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_{ND} &= \mu_b \begin{bmatrix}
-\sum_{i=1}^2 \left\{ \delta_i (\beta_i')^2 \cos \beta_i - 2\delta_i' \beta_i' \sin \beta_i \right\} \\
-\sum_{i=1}^2 \left\{ \delta_i (\beta_i')^2 \sin \beta_i + 2\delta_i' \beta_i' \cos \beta_i \right\} \\
2\delta_1 \delta_1' \beta_1' \\
2\delta_2 \delta_2' \beta_2' \\
-\delta_1 (\beta_1')^2 \\
-\delta_2 (\beta_2')^2
\end{bmatrix} \quad (3-20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{ND} &= \begin{bmatrix}
(1-\Omega^2)x - 2\zeta\Omega y - \mu_b \Omega^2 (\delta_1 \cos \beta_1 + \delta_2 \cos \beta_2) - \mu_b \Omega^2 / \eta \\
2\zeta\Omega x + (1-\Omega^2)y - \mu_b \Omega^2 (\delta_1 \sin \beta_1 + \delta_2 \sin \beta_2) \\
\mu_b \delta_1 \Omega^2 (x \sin \beta_1 - y \cos \beta_1) \\
\mu_b \delta_2 \Omega^2 (x \sin \beta_2 - y \cos \beta_2) \\
-\mu_b \Omega^2 (x \cos \beta_1 + y \sin \beta_1) + \mu_b (f^2 - \Omega^2) (\delta_1 - 1) \\
-\mu_b \Omega^2 (x \cos \beta_2 + y \sin \beta_2) + \mu_b (f^2 - \Omega^2) (\delta_2 - 1)
\end{bmatrix} \quad (3-21)
\end{aligned}$$

下標「 ND 」表示描述的系統為新設計（New）的滾珠-彈簧自動平衡機構應用於二維碟片（Disk）制振的系統。

3-2 滾珠-彈簧二維制振系統的平衡位置

3-2-1 平衡解的類型

令 $\tilde{\mathbf{q}} = [\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2]^T$ 代系統的平衡位置，由式(3-17)可知 $\tilde{\mathbf{q}}$ 滿足平衡方程式 $\mathbf{f}_{ND}(\tilde{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}$ 。詳細列出平衡方程，

$$\begin{cases}
(1-\Omega^2)\tilde{x}-2\zeta\Omega\tilde{y}-\mu_b\Omega^2\sum_{i=1}^2(\tilde{\delta}_i\cos\tilde{\beta}_i)-\frac{\mu_b\Omega^2}{\eta}=0 \\
2\zeta\Omega\tilde{x}+(1-\Omega^2)\tilde{y}-\mu_b\Omega^2\sum_{i=1}^2(\tilde{\delta}_i\sin\tilde{\beta}_i)=0 \\
\mu_b\Omega^2\tilde{\delta}_i(\tilde{x}\sin\tilde{\beta}_i-\tilde{y}\cos\tilde{\beta}_i)=0, \quad i=1,2 \\
\mu_b[(f^2-\Omega^2)(\tilde{\delta}_i-1)-\Omega^2(\tilde{x}\cos\tilde{\beta}_i+\tilde{y}\sin\tilde{\beta}_i)]=0, \quad i=1,2
\end{cases} \quad (3-22)$$

為了求解方便採用極座標變換，令 $\tilde{x}=\tilde{r}\cos\tilde{\theta}$ ， $\tilde{y}=\tilde{r}\sin\tilde{\theta}$ ，其中 \tilde{r} 為碟片中心的徑向穩態振幅， $\tilde{\theta}$ 為 OC 相對於正 x 軸的夾角。將式(3-22)改寫以極座標描述，

$$\begin{cases}
(1-\Omega^2)\tilde{r}\cos\tilde{\theta}-2\zeta\Omega\tilde{r}\sin\tilde{\theta}-\mu_b\Omega^2\sum_{i=1}^2(\tilde{\delta}_i\cos\tilde{\beta}_i)-\frac{\mu_b\Omega^2}{\eta}=0 \\
2\zeta\Omega\tilde{r}\cos\tilde{\theta}+(1-\Omega^2)\tilde{r}\sin\tilde{\theta}-\mu_b\Omega^2\sum_{i=1}^2(\tilde{\delta}_i\sin\tilde{\beta}_i)=0 \\
\mu_b\Omega^2\tilde{\delta}_i\tilde{r}\sin(\tilde{\beta}_i-\tilde{\theta})=0, \quad i=1,2 \\
\mu_b[(f^2-\Omega^2)(\tilde{\delta}_i-1)-\Omega^2\tilde{r}\cos(\tilde{\beta}_i-\tilde{\theta})]=0, \quad i=1,2
\end{cases} \quad (3-23)$$

注意， ζ_b 並未出現在平衡方程式中，換言之 ζ_b 並不影響平衡位置。再者，由於 μ_b 、 Ω 與 $\tilde{\delta}_i$ 均大於 0，因此式(3-23)-3 可寫為

$$\tilde{r}\sin(\tilde{\beta}_i-\tilde{\theta})=0 \quad i=1, 2 \quad (3-24)$$

滿足式(3-24)的平衡解同樣可分為 (i) $\tilde{\beta}_1=\tilde{\beta}_2=\tilde{\theta}$ 、(ii) $\tilde{\beta}_1=\tilde{\beta}_2=\tilde{\theta}+\pi$ (iii)

$\tilde{\beta}_1=\tilde{\theta}$ ， $\tilde{\beta}_2=\tilde{\theta}+\pi$ 及 (iv) $\tilde{r}=0$ ，四種可能的情形，分別如圖 3-3(a)~(d)所示。其中 (i)~(iii) 類型的 $\tilde{r}\neq 0$ ，屬於不完全平衡解，相對地，第 (iv) 類型 $\tilde{r}=0$ 則為完全平衡解。

雖然滾珠定位的特性與第二章所論及的傳統雙滾珠自動平衡機構系統平衡解相同，但由於制振單元的彈簧的效應，使得滾珠-彈簧自動平衡機構在此四類型平衡解中提供不同的制振量。因為 $\mu_b\neq 0$ ，故由式(3-23)-4 可知，

$$\tilde{\delta}_i=1+\frac{\Omega^2\tilde{r}\cos(\tilde{\beta}_i-\tilde{\theta})}{f^2-\Omega^2} \quad (3-25)$$

第 (i)、(ii) 類型平衡解的 $\tilde{\delta}_i$ 分別大於及小於 1，代表此兩類型平衡解的制振單元的彈簧平衡長度相較於式(3-9)所描述的彈簧平衡長度分別有伸長與縮短的差异。而第 (iii) 類型平衡解 ($\tilde{\beta}_1 = \tilde{\theta}, \tilde{\beta}_2 = \tilde{\theta} + \pi$) 的 $\tilde{\delta}_1$ 與 $\tilde{\delta}_2$ 則是一者大於 1，另一者小於 1，其呈現的行為與無滾珠系統完全不同。唯有第 (iv) 類型平衡解的 $\tilde{\delta}_i = 1$ ，與傳統雙滾珠自動平衡機構系統相較，同樣呈現完全平衡。

將此系統的平衡位置代號統一以「NP」(其中 N 代表新設計 (New)，P 代表平衡位置) 標示，而 (i) ~ (iv) 類型的平衡解於後續的討論中分別以 NP_{S1} 、 NP_{S2} 、 NP_{S3} 與 NP_0 表示

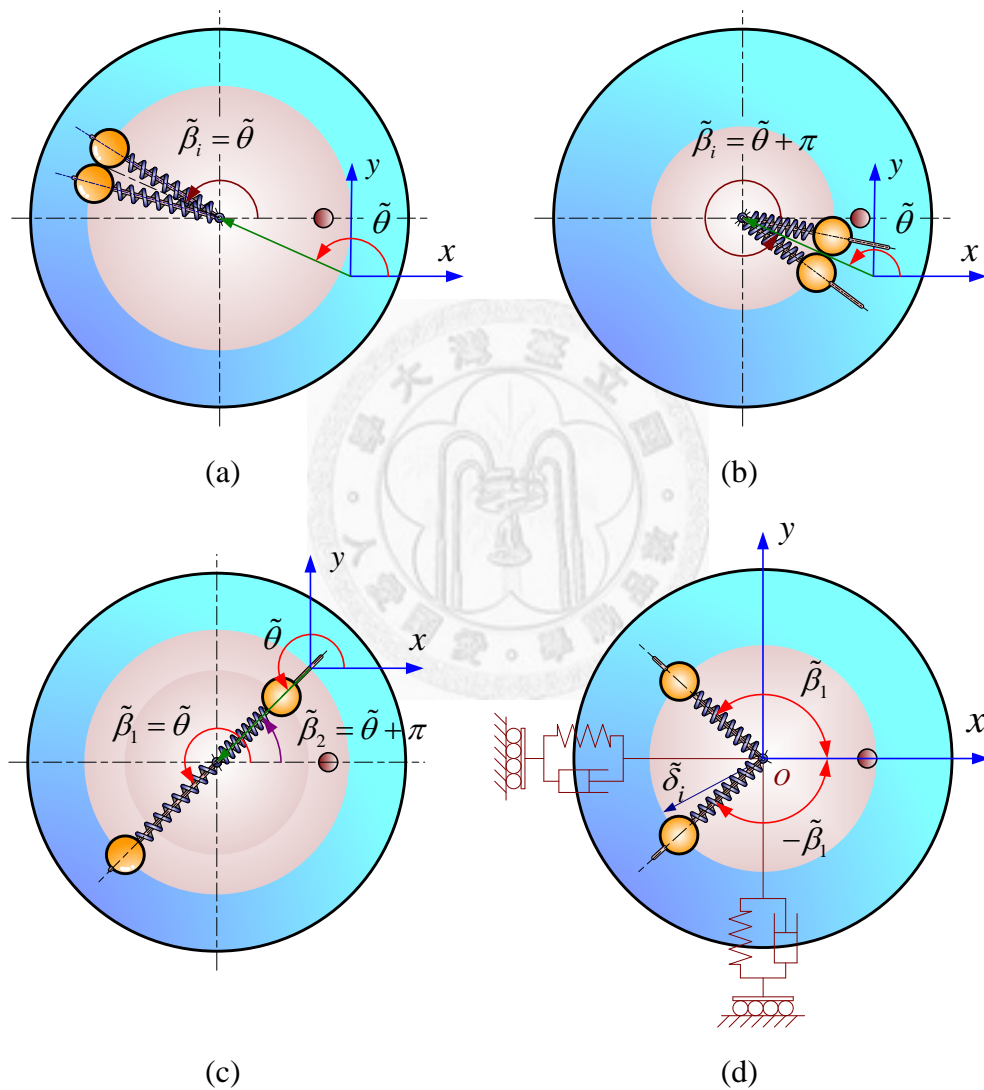


圖 3-3 (a) ~ (c) 不完全平衡解，(d) 完全平衡解

3-2-2 平衡位置的解析解與存在區間

上面的討論顯示雙滾珠-彈簧自動平衡機構可能的平衡位置可區分為四組，分別推導其解析解與存在區間如下。

$$(i) NP_{S1} : (\tilde{r} \neq 0 \text{ 且 } \tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = \tilde{\theta})$$

將 $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = \tilde{\theta}$ 代入方程式(3-23)-1、(3-23)-2 與(3-23)-4，並經計算化簡可得

$$\begin{cases} (\Omega^2 - 1)\tilde{r} \cos \tilde{\theta} + 2\zeta \Omega \tilde{r} \sin \tilde{\theta} + \mu_b \Omega^2 (\tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2) \cos \tilde{\theta} = \frac{-\mu_b \Omega^2}{\eta} \\ (\Omega^2 - 1)\tilde{r} \sin \tilde{\theta} - 2\zeta \Omega \tilde{r} \cos \tilde{\theta} + \mu_b \Omega^2 (\tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2) \sin \tilde{\theta} = 0 \\ (f^2 - \Omega^2)(\tilde{\delta}_i - 1) - \Omega^2 \tilde{r} = 0, \quad i=1,2 \end{cases} \quad (3-26)$$

藉由式(3-26)-1、2 可解得兩個可能的平衡位置，分別以 NP_{S1}^{\pm} 表示，其所對應的徑

向振幅 \tilde{r}_{S1}^+ 與 \tilde{r}_{S1}^- 為

$$\left. \begin{matrix} \tilde{r}_{S1}^+ \\ \tilde{r}_{S1}^- \end{matrix} \right\} = \mathbf{R}_{ND} \left(-2\eta p_N \pm \sqrt{\mathbf{D}_{ND}} \right) \quad (3-27)$$

其中，

$$\mathbf{R}_{ND} = \frac{\Omega^2 \mu_b (f^2 - \Omega^2)}{\eta (p_N^2 + q_N^2)}, \quad \mathbf{D}_{ND} = p_N^2 + q_N^2 - 4\eta^2 q_N^2 \quad (3-28)$$

而 p_N 與 q_N 可表為 Ω 的函數如下，

$$p_N = (f^2 - \Omega^2)(\Omega^2 - 1) + 2\Omega^4 \mu_b, \quad q_N = 2\zeta \Omega (f^2 - \Omega^2) \quad (3-29)$$

$$\text{注意式(3-27)等號右側可重新寫成 } (f^2 - \Omega^2) \mathbf{R}_{ND} \left(-2\eta \frac{p_N}{f^2 - \Omega^2} \pm \frac{\sqrt{\mathbf{D}_{ND}}}{f^2 - \Omega^2} \right),$$

當彈簧為剛性 ($f \rightarrow \infty$) 時，

$$\lim_{f \rightarrow \infty} \frac{p_N}{f^2 - \Omega^2} = (\Omega^2 - 1) = p_T, \quad \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{q_N}{f^2 - \Omega^2} = 2\zeta \Omega = q_T,$$

$$\lim_{f \rightarrow \infty} (f^2 - \Omega^2) \mathbf{R}_{ND} = \mathbf{R}_{TD}, \quad \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\mathbf{D}_{ND}}}{f^2 - \Omega^2} = \sqrt{\mathbf{D}_{TD}},$$

其中 p_T 、 q_T 以及 R_{TD} 、 D_{TD} 分別由第二章的式(2-19)與式(2-18)所定義，上式顯示當彈簧的變形量可忽略時，滾珠-彈簧自動平衡系統回復為傳統固定軌道的自動平衡系統。此外， \tilde{r}_{S1}^\pm 對應的相角 $\tilde{\theta}_{S1}^\pm$ 為

$$\tilde{\theta}_{S1}^\pm = \tan^{-1} \frac{q_N \tilde{r}_{S1}^\pm}{p_N \tilde{r}_{S1}^\pm + 2\mu_b \Omega^2 (f^2 - \Omega^2)} \quad (3-30)$$

最後由式(3-26)-3，得知此平衡解 \tilde{r}_{S1}^\pm 對應的彈簧平衡長度為

$$\tilde{\delta}_{1S1}^\pm = \tilde{\delta}_{2S1}^\pm = 1 + \frac{\Omega^2 \tilde{r}_{S1}^\pm}{f^2 - \Omega^2} \quad (3-31)$$

接著討論這組平衡解存在的條件。對於不完全平衡解而言，徑向振幅 \tilde{r}_{S1}^\pm 和彈簧的平衡長度 $\tilde{\delta}_{1S1}^\pm = \tilde{\delta}_{2S1}^\pm$ 必須為正實數。由式(3-31)可知，當 $\tilde{r}_{S1}^\pm > 0$ 和式(3-12) $\Omega < f$ 的轉速限制下，對應的彈簧平衡長度 $\tilde{\delta}_{1S1}^\pm$ 、 $\tilde{\delta}_{2S1}^\pm$ 必為正值。因此只需討論 \tilde{r}_{S1}^\pm 為正實數的條件。由式(3-27)可知， \tilde{r}_{S1}^\pm 為實數，若且唯若 $D_{ND} \geq 0$ ，亦即

$$p_N^2 + q_N^2 - 4\eta^2 q_N^2 \geq 0, \text{ 換言之}$$

$$\eta \leq \eta_{Ncr1} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{p_N^2}{q_N^2}} \quad (3-32)$$

顯而易見地 $\eta_{Ncr1} \geq \frac{1}{2}$ ，而且當 $p_N = 0$ 時， η_{Ncr1} 達到最小值 $\frac{1}{2}$ 。由式(3-29)可得 $p_N = 0$ 時的轉速比 Ω 為

$$\Omega = \sqrt{\frac{f^2 + 1 \pm \sqrt{(f^2 - 1)^2 + 8f^2 \mu_b}}{2(1 - 2\mu_b)}}, \quad (3-33)$$

討論這兩個解的範圍。因為 $(f^2 - 1)^2 + 8f^2 \mu_b > (f^2 - 1)^2$ ，所以

$$f^2 + 1 + \sqrt{(f^2 - 1)^2 + 8f^2 \mu_b} > f^2 + 1 + \sqrt{(f^2 - 1)^2} = 2f^2$$

由 $1 - 2\mu_b < 1$ ，因此式(3-33)中取 “+” 的轉速比為

$$\sqrt{\frac{f^2 + 1 + \sqrt{(f^2 - 1)^2 + 8f^2\mu_b}}{2(1 - 2\mu_b)}} > f ,$$

這違反式(3-12)對轉速比的限制。而另一解（取“-”）

$$\Omega_{Ncr} = \sqrt{\frac{f^2 + 1 - \sqrt{(f^2 - 1)^2 + 8f^2\mu_b}}{2(1 - 2\mu_b)}} \quad (3-34)$$

可改寫成

$$\Omega_{Ncr} = \sqrt{\frac{f^2 + 1 - \sqrt{(f^2 + 1)^2 - 4f^2(1 - 2\mu_b)}}{2(1 - 2\mu_b)}} > 0 \quad (3-35)$$

檢查 Ω_{Ncr} 是否滿足式(3-12)對轉速比的限制。上式中

$$\begin{aligned} (f^2 + 1)^2 - 4f^2(1 - 2\mu_b) &= [f^2 + 1 - 2f^2(1 - 2\mu_b)]^2 + 8f^4\mu_b(1 - 2\mu_b) \\ &> [f^2 + 1 - 2f^2(1 - 2\mu_b)]^2 \end{aligned}$$

所以

$$f^2 + 1 - \sqrt{(f^2 + 1)^2 - 4f^2(1 - 2\mu_b)} < 2f^2(1 - 2\mu_b) ,$$

因此 $0 < \Omega_{Ncr} < f$ 。換言之 Ω_{Ncr} 是唯一滿足 $p_N = 0$ 且滿足 $\Omega < f$ 的解。另外由

$$\left. \frac{dp_N}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_{Ncr}} = 2\Omega_{Ncr} \left(\sqrt{(f^2 - 1)^2 + 8f^2\mu_b} \right) > 0 ,$$

可知當 $0 < \Omega < \Omega_{Ncr}$ 時 $p_N < 0$ ，而當 $f > \Omega > \Omega_{Ncr}$ 時 $p_N > 0$ 。

為了更明確討論 Ω_{Ncr} 的範圍，將式(3-34)改寫成

$$\Omega_{Ncr} = \sqrt{\frac{f^2 + 1 - \sqrt{(f^2 - 1 + 4\mu_b)^2 + 8\mu_b(1 - 2\mu_b)}}{2(1 - 2\mu_b)}} ,$$

上式中

$$(f^2 - 1 + 4\mu_b)^2 + 8\mu_b(1 - 2\mu_b) > (f^2 - 1 + 4\mu_b)^2 ,$$

所以

$$f^2 + 1 - \sqrt{(f^2 - 1 + 4\mu_b)^2 + 8\mu_b(1 - 2\mu_b)} < 2(1 - 2\mu_b) ,$$

由此

$$\Omega_{Ncr} < 1 \quad (3-36)$$

總結 \tilde{r}_{S1}^{\pm} 為正實數的條件如下。

(i.a) \tilde{r}_{S1}^+ 為正實數 ($\tilde{r}_{S1}^+ = \mathbf{R}_{ND}(-2\eta p_N + \sqrt{\mathbf{D}_{ND}})$)

- 當 $0 < \Omega < \Omega_{Ncr}$ 時 ($p_N < 0$)，若 $\eta \leq \eta_{Ncr1}$ ，則必然滿足 $-2\eta p_N + \sqrt{\mathbf{D}_{ND}} > 0$ 使 \tilde{r}_{S1}^+ 為正實數。
- 當 $\Omega \geq \Omega_{Ncr}$ 時 ($p_N \geq 0$)，必須滿足 $\sqrt{\mathbf{D}_{ND}} > 2\eta p_N$ 方能使 \tilde{r}_{S1}^+ 為正實數，可推得 $\eta < \frac{1}{2}$ 為其限制範圍。

(i.b) \tilde{r}_{S1}^- 為正實數 ($\tilde{r}_{S1}^- = \mathbf{R}_{ND}(-2\eta p_N - \sqrt{\mathbf{D}_{ND}})$)

- 當 $0 < \Omega < \Omega_{Ncr}$ 時 ($p_N < 0$)，必須滿足 $-2\eta p_N > \sqrt{\mathbf{D}_{ND}}$ 方能使 \tilde{r}_{S1}^- 為正實數，可推得 $\frac{1}{2} < \eta \leq \eta_{Ncr1}$ 為其限制範圍。
- 當 $\Omega \geq 1$ 時 ($p_N \geq 0$)， \tilde{r}_{S1}^- 不存在正實數解。

將平衡解 NP_{S1} 的限制條件整理如下

$$NP_{S1}^+ : \begin{cases} 0 < \eta \leq \eta_{Ncr1} & \text{for } 0 < \Omega < \Omega_{Ncr} \\ 0 < \eta < \frac{1}{2} & \text{for } \Omega_{Ncr} \leq \Omega < f \end{cases} \quad (3-37)$$

$$NP_{S1}^- : \frac{1}{2} < \eta \leq \eta_{Ncr1} \quad \text{for } 0 < \Omega < \Omega_{Ncr} \quad (3-38)$$

接著用類似方法討論其它組的平衡解：

(ii) $NP_{S2} : (\tilde{r} \neq 0 \text{ 且 } \tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = \tilde{\theta} + \pi)$

將 $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = \tilde{\theta} + \pi$ 代入方程式(3-23)-1、(3-23)-2 與(3-23)-4 中，並經計算化簡

可得

$$\begin{cases} (\Omega^2 - 1)\tilde{r} \cos \tilde{\theta} + 2\zeta \Omega \tilde{r} \sin \tilde{\theta} - \mu_b \Omega^2 (\tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2) \cos \tilde{\theta} = \frac{-\mu_b \Omega^2}{\eta} \\ (\Omega^2 - 1)\tilde{r} \sin \tilde{\theta} - 2\zeta \Omega \tilde{r} \cos \tilde{\theta} - \mu_b \Omega^2 (\tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2) \sin \tilde{\theta} = 0 \\ (f^2 - \Omega^2)(\tilde{\delta}_i - 1) + \Omega^2 \tilde{r} = 0, \quad i=1,2 \end{cases} \quad (3-39)$$

藉由式(3-39)-1 與式(3-39)-2 同樣可解得兩個平衡位置，以 $NP_{S_2}^\pm$ 表示，對應的徑向

振幅 $\tilde{r}_{S_2}^+$ 與 $\tilde{r}_{S_2}^-$ 為

$$\begin{cases} \tilde{r}_{S_2}^+ \\ \tilde{r}_{S_2}^- \end{cases} = \mathbf{R}_{ND} \left(2\eta p_N \pm \sqrt{\mathbf{D}_{ND}} \right) \quad (3-40)$$

其中 \mathbf{R}_{TD} 、 \mathbf{D}_{TD} 以及 p_T 、 q_T 由式(3-28)、式(3-29)定義。 $\tilde{r}_{S_2}^\pm$ 對應的相角 $\tilde{\theta}_{S_2}^\pm$ 為

$$\tilde{\theta}_{S_2}^\pm = \tan^{-1} \frac{q_N \tilde{r}_{S_2}^\pm}{p_N \tilde{r}_{S_2}^\pm - 2\mu_b \Omega^2 (f^2 - \Omega^2)} \quad (3-41)$$

而相對應的彈簧平衡長度可由式(3-39)-3 得知

$$\tilde{\delta}_{1S_2}^\pm = \tilde{\delta}_{2S_2}^\pm = 1 - \frac{\Omega^2 \tilde{r}_{S_2}^\pm}{f^2 - \Omega^2} \quad (3-42)$$

由 $\tilde{r}_{S_2}^\pm$ 與 $\tilde{\delta}_{iS_2}^\pm$ 均為正實數，推論各平衡解存在的限制範圍。

(ii.a) $\tilde{r}_{S_2}^+$ 為正實數 ($\tilde{r}_{S_2}^+ = \mathbf{R}_{ND} (2\eta p_N + \sqrt{\mathbf{D}_{ND}})$)

- 當 $0 < \Omega \leq \Omega_{Ncr}$ 時，必須滿足 $\sqrt{\mathbf{D}_{ND}} > -2\eta p_N$ 方能使 $\tilde{r}_{S_2}^+$ 為正實數，可推得

$$\eta < \frac{1}{2} \text{ 為其限制範圍。}$$

- 當 $\Omega > \Omega_{Ncr}$ 時，僅須滿足 $\eta \leq \eta_{Ncr1}$ ，則 $\tilde{r}_{S_2}^+$ 必然為正實數。

(ii.b) $\tilde{\delta}_{iS_2}^+ \geq 0$

將 $\tilde{r}_{S_2}^+ = \mathbf{R}_{ND} (2\eta p_N + \sqrt{\mathbf{D}_{ND}})$ 代入式(3-42)可得知 $\tilde{\delta}_{iS_2}^+ \geq 0$ 須滿足

$$\frac{\Omega^2 \mathbf{R}_{ND} (2\eta p_N + \sqrt{\mathbf{D}_{ND}})}{f^2 - \Omega^2} \leq 1 \quad (3-43)$$

其中 \mathbf{R}_{ND} 如式(3-28)所定義，代回式(3-43)並經整理為

$$\eta \mathbf{P}_{ND} \geq \Omega^4 \mu_b \sqrt{\mathbf{D}_{ND}} \quad (3-44)$$

其中

$$\mathbf{P}_{ND} = p_N (f^2 - \Omega^2)(\Omega^2 - 1) + q_N^2 \quad (3-45)$$

當 $\mathbf{P}_{ND} < 0$ 時， $\tilde{\delta}_{iS2}^+$ 不存在能滿足式(3-44)的實數解；另一方面若 $\mathbf{P}_{ND} \geq 0$ ，將式(3-44)

兩邊平方後繼續推論可得， $\tilde{\delta}_{iS2}^+ \geq 0$ 的限制條件為 $\eta \geq \eta_{Ncr2}$ ，其中

$$\eta_{Ncr2} = \frac{\Omega^4 \mu_b}{\sqrt{(p_N - 2\Omega^4 \mu_b)^2 + q_N^2}} \quad (3-46)$$

整理 $\tilde{\delta}_{iS2}^+ \geq 0$ 的存在區域如下

- 當 $\mathbf{P}_{ND} < 0$ 時， $\tilde{\delta}_{iS2}^+$ 非負實數解。
- 當 $\mathbf{P}_{ND} \geq 0$ 時， $\eta \geq \eta_{Ncr2}$ 為其限制範圍
- 當 $0 < \Omega \leq \Omega_{Ncr}$ 時 ($p_N \leq 0$ 、 $\Omega^2 - 1 < 0$)， $\mathbf{P}_{ND} \geq 0$ ，須滿足 $\eta \geq \eta_{Ncr2}$ 。
- 當 $\Omega_{cr1} < \Omega < 1$ 時 ($p_N > 0$ 、 $\Omega^2 - 1 < 0$)，若 $\mathbf{P}_{ND} < 0$ ， $\tilde{\delta}_{iS2}^+$ 不存在非負實數解；若 $\mathbf{P}_{ND} \geq 0$ ，須滿足 $\eta \geq \eta_{Ncr2}$
- 當 $1 \leq \Omega < f$ 時 ($p_N > 0$ 、 $\Omega^2 - 1 \geq 0$)， $\mathbf{P}_{ND} \geq 0$ ，因而須滿足 $\eta \geq \eta_{Ncr2}$ 。

(ii.c) \tilde{r}_{S2}^- 為正實數 ($\tilde{r}_{S2}^- = \mathbf{R}_{ND} (2\eta p_N - \sqrt{\mathbf{D}_{ND}})$)

- 當 $0 < \Omega \leq \Omega_{Ncr}$ 時， \tilde{r}_{S2}^- 不存在正實數解。
- 當 $\Omega > \Omega_{Ncr}$ 時，必須滿足 $2\eta p_N > \sqrt{\mathbf{D}_{ND}}$ 方能使 \tilde{r}_{S2}^- 為正實數，可推得

$$\frac{1}{2} < \eta \leq \eta_{Ncr1} \text{ 為其限制範圍。}$$

(ii.d) $\tilde{\delta}_{iS2}^-$ 為正實數

將 $\tilde{r}_{S_2}^- = \mathbf{R}_{ND} \left(2\eta p_N - \sqrt{\mathbf{D}_{ND}} \right)$ 代入式(3-42)可知 $\tilde{\delta}_{i S_2}^- \geq 0$ 須滿足

$$\frac{\Omega^2 \mathbf{R}_{ND} \left(2\eta p_N - \sqrt{\mathbf{D}_{ND}} \right)}{f^2 - \Omega^2} \leq 1 \quad (3-47)$$

\mathbf{R}_{ND} 如式(3-28)所定義，代回式(3-43)可得

$$-\eta \mathbf{P}_{ND} \leq \Omega^4 \mu_b \sqrt{\mathbf{D}_{ND}} \quad (3-48)$$

依相似方式討論 $\tilde{\delta}_{i S_2}^- \geq 0$ 的存在區域，將結果整理如下

- 當 $\mathbf{P}_{ND} < 0$ 時， $\eta \leq \eta_{Ncr1}$ 且 $\eta \leq \eta_{Ncr2}$ 為其限制範圍。

當 $\mathbf{P}_{ND} \geq 0$ 時， $\tilde{\delta}_{i S_2}^-$ 必然為非負實數解。

- 當 $0 < \Omega \leq \Omega_{Ncr}$ 時， $\tilde{r}_{S_2}^-$ 不存在正實數解，故 $\tilde{\delta}_{i S_2}^-$ 亦然。

當 $\Omega_{cr1} < \Omega < 1$ 時，若 $\mathbf{P}_{ND} < 0$ ， $\eta \leq \eta_{Ncr1}$ 且 $\eta \leq \eta_{Ncr2}$ 為其限制範圍；若

$\mathbf{P}_{ND} \geq 0$ ， $\tilde{\delta}_{i S_2}^-$ 必然為非負實數解。

當 $1 \leq \Omega < f$ 時，使得 $\mathbf{P}_{ND} \geq 0$ ， $\tilde{\delta}_{i S_2}^-$ 必然非負實數解。

為能明確在 $\Omega - \eta$ 平面上整理出 NP_{S_2} 平衡解的存在區域，必須比較 $\eta = \eta_{Ncr1}$ 、

$\eta = \eta_{Ncr2}$ 與 $\eta = \frac{1}{2}$ 三條邊界的關係，由式(3-32)及式(3-46)相除可得

$$\frac{\eta_{Ncr1}}{\eta_{Ncr2}} = \frac{\sqrt{(2\mu_b \Omega^4 q_N)^2 + (\mathbf{P}_{ND})^2}}{2\mu_b \Omega^4 q_N} \geq 1 \quad (3-49)$$

因此 $\eta_{Ncr1} \geq \eta_{Ncr2}$ 。其次當 $0 < \Omega \leq \Omega_{cr}$ 時 $p_N \leq 0$ ，由式(3-46)可知 $\eta_{Ncr2} < \frac{1}{2}$ 。而當

$\Omega_{cr} < \Omega < 1$ 時 $p_N > 0$ ，若 $\mathbf{P}_{ND} < 0$ 則由式(3-45)與式(3-46)可知

$$\eta_{Ncr2} = \frac{\Omega^4 \mu_b}{\sqrt{\mathbf{P}_{ND} - 2\Omega^4 \mu_b p_N + (2\Omega^4 \mu_b)^2}} > \frac{1}{2} \quad (3-50)$$

最後，將 NP_{S_2} 平衡解的限制條件整理如下

$$NP_{S_2}^+ : \begin{cases} \eta_{Ncr2} \leq \eta < 1/2 & \text{for } 0 < \Omega \leq \Omega_{Ncr} \\ \eta_{Ncr2} \leq \eta \leq \eta_{Ncr1} & \text{for } \Omega_{Ncr} < \Omega < 1 \text{ and } P_{ND} \geq 0 \\ \eta_{Ncr2} \leq \eta \leq \eta_{Ncr1} & \text{for } 1 \leq \Omega < f \end{cases} \quad (3-51)$$

$$NP_{S_2}^- : \begin{cases} 1/2 < \eta \leq \eta_{Ncr1} & \text{for } \Omega_{Ncr} < \Omega < 1 \text{ and } P_{ND} \geq 0 \\ 1/2 < \eta < \eta_{Ncr2} & \text{for } \Omega_{Ncr} < \Omega < 1, \text{ and } P_{ND} < 0 \\ 1/2 < \eta \leq \eta_{Ncr1} & \text{for } 1 \leq \Omega < f \end{cases} \quad (3-52)$$

(iii) $NP_{S_3} : (\tilde{r} \neq 0 \text{ 且 } \tilde{\beta}_1 = \tilde{\theta}、\tilde{\beta}_2 = \tilde{\theta} + \pi)$

將 $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\theta}$ 與 $\tilde{\beta}_2 = \tilde{\theta} + \pi$ 代入方程式(3-23)-1、(3-23)-2 與(3-23)-4 中，並化簡為

$$\begin{cases} (\Omega^2 - 1)\tilde{r} \cos \tilde{\theta} + 2\zeta \Omega \tilde{r} \sin \tilde{\theta} + \mu_b \Omega^2 (\tilde{\delta}_1 - \tilde{\delta}_2) \cos \tilde{\theta} = \frac{-\mu_b \Omega^2}{\eta} \\ (\Omega^2 - 1)\tilde{r} \sin \tilde{\theta} - 2\zeta \Omega \tilde{r} \cos \tilde{\theta} + \mu_b \Omega^2 (\tilde{\delta}_1 - \tilde{\delta}_2) \sin \tilde{\theta} = 0 \\ (f^2 - \Omega^2)(\tilde{\delta}_1 - 1) - \Omega^2 \tilde{r} = 0 \\ (f^2 - \Omega^2)(\tilde{\delta}_2 - 1) + \Omega^2 \tilde{r} = 0 \end{cases} \quad (3-53)$$

解得平衡位置的徑向振幅 \tilde{r}_{S_3} 為

$$\tilde{r}_{S_3} = R_{ND} \sqrt{p_N^2 + q_N^2} \quad (3-54)$$

其中 R_{ND} 、 p_N 及 q_N 與先前定義相同。 \tilde{r}_{S_3} 對應的相角 $\tilde{\theta}_{S_3}$ 為

$$\tilde{\theta}_{S_3} = \tan^{-1} \frac{q_N}{p_N} \quad (3-55)$$

此平衡解對應的彈簧平衡長度可從式(3-53)-3、式(3-53)-4 得出

$$\tilde{\delta}_{1S_3} = 1 + \frac{\Omega^2 \tilde{r}_{S_3}}{f^2 - \Omega^2} \quad (3-56)$$

$$\tilde{\delta}_{2S_3} = 1 - \frac{\Omega^2 \tilde{r}_{S_3}}{f^2 - \Omega^2} \quad (3-57)$$

由式(3-54)與式(3-56)可知 \tilde{r}_{S_3} 必然為正實數且 $\tilde{\delta}_{1S_3} > 1$ 。因此僅需討論滿足 $\tilde{\delta}_{2S_3} \geq 0$ 的

存在區域即可。

將式(3-54)代入式(3-57)中，並以先前類似方式整理出滿足 $\tilde{\delta}_{2, s3} \geq 0$ 的限制條件

為

$$\eta \geq \eta_{Ncr3} \quad (3-58)$$

其中

$$\eta_{Ncr3} = \frac{\Omega^4 \mu_b}{\sqrt{p_N^2 + q_N^2}} \quad (3-59)$$

故而 NP_{S3} 平衡解的限制條件甚為簡潔

$$NP_{S3} : \eta \geq \eta_{Ncr3} \quad \text{for } 0 < \Omega < f$$

$$(iv) NP_0 : (\tilde{r} = 0)$$

此類型解所描述的系統達完全平衡；將 $\tilde{r} = 0$ 代入方程式(3-23)-1、(3-23)-2 與 (3-23)-4 中，並化簡為

$$\begin{cases} -\mu_b \Omega^2 \sum_{i=1}^2 (\tilde{\delta}_i \cos \tilde{\beta}_i) - \mu_b \Omega^2 / \eta = 0 \\ -\mu_b \Omega^2 \sum_{i=1}^2 (\tilde{\delta}_i \sin \tilde{\beta}_i) = 0 \\ \mu_b (f^2 - \Omega^2) (\tilde{\delta}_i - 1) = 0, \quad i = 1, 2 \end{cases} \quad (3-60)$$

可解得

$$\tilde{\delta}_1 = \tilde{\delta}_2 = 1, \quad \tilde{\beta}_1 = \cos^{-1} \left(\frac{-1}{2\eta} \right) \text{ 及 } \tilde{\beta}_2 = -\tilde{\beta}_1 \quad (3-61)$$

由式(3-61)可知，當此系統呈現完全平衡時，制振單元的彈簧平衡長度與式(3-9)所描述的彈簧平衡長度一致，相當於在不同的工作轉速下，滾珠以相對應於彈簧平衡長度的固定軌道運行。同時亦能得知，唯有當 $\eta \geq \frac{1}{2}$ 時 $\tilde{\beta}_1$ 才會存在，意即 $\eta \geq \frac{1}{2}$ 為 NP_0 解存在的必要條件。

上面的分析結果顯示，此二維制振系統同樣存在六種可能的平衡解，每個解均能清楚地在 $\Omega - \eta$ 平面上推論出其存在區域。圖 3-4 為在 $\mu_b = 0.05$ 、 $\zeta = 0.1$ 與

$f = 5$ 的情形下平衡解在 $\Omega - \eta$ 平面的存在區域。 $\Omega - \eta$ 平面，以 η_{Ncr1} 、 η_{Ncr2} 、 η_{Ncr3} 及 $\eta = \frac{1}{2}$ 為邊界，分成七個區域，首先取 $\eta = \frac{1}{2}$ 為基準劃分出上、下兩區塊，接著由左至右、由上到下分別以區域 I ~ VII 表示，每個區域內可能存在的平衡解各不相同，整理如式(3-62)所列。結果顯示，每個區域內存在最少一種、最多四種平衡解。若與傳統固定軌道的自動平衡系統相比較，由 η_{Ncr1} 及 $\eta = \frac{1}{2}$ 所劃分出的四個區域內的平衡解，與第二章中圖 2-5 由 η_{Tcr} 及 $\eta = \frac{1}{2}$ 所劃分存在區域的平衡解比較，具有相同的滾珠定位型態。而最大的差異在於 NP_{S2}^+ 必須 $\geq \eta_{Ncr2}$ (式(3-51))，且 NP_{S3} 必須 $\geq \eta_{Ncr3}$ (式(3-59))。簡言之，隨著轉速增加而經過 η_{Ncr2} 與 η_{Ncr3} 的結果，分別過濾掉了平衡解 NP_{S2}^+ 及 NP_{S3} 。

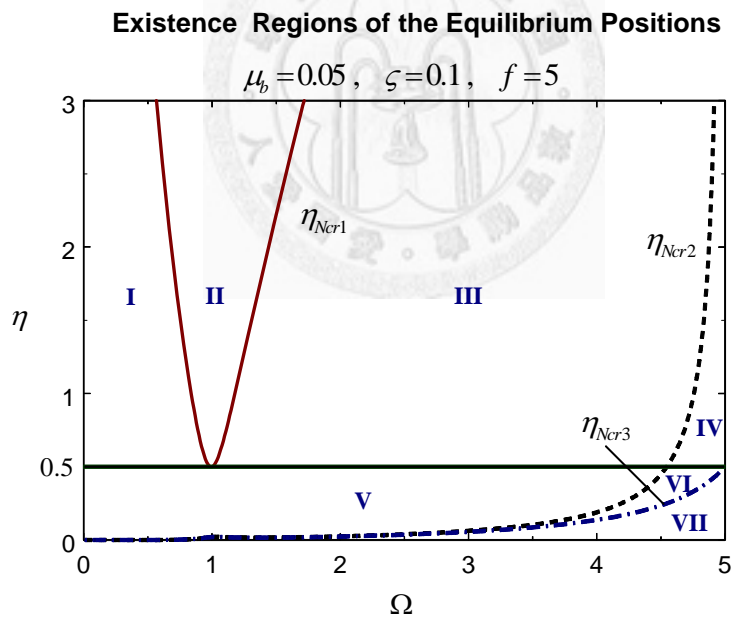


圖 3-4 六種平衡解在 $\Omega - \eta$ 平面上的存在區間

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{I} : NP_{S1}^{\pm}, NP_{S3} \text{ and } NP_0 \\
\text{II} : NP_{S3} \text{ and } NP_0 \\
\text{III} : NP_{S2}^{\pm}, NP_{S3} \text{ and } NP_0 \\
\text{IV} : NP_{S2}^{-}, NP_{S3} \text{ and } NP_0 \\
\text{V} : NP_{S1}^{+}, NP_{S2}^{+} \text{ and } NP_{S3} \\
\text{VI} : NP_{S1}^{+} \text{ and } NP_{S3} \\
\text{VII} : NP_{S1}^{+}
\end{array} \right. \quad (3-62)$$

3-3 滾珠-彈簧二維制振系統的穩定性分析

接著討論平衡解的穩定性。和前一章的方法類似，我們先用 Routh-Hurwitz Criterion 由解析的方式得到穩定性的通則，接著由數值方法分析各平衡解在參數平面上的穩定區域。

3-3-1 平衡解的穩定性解析

非線性系統的行為與各平衡位置的穩定性相關，依據 Routh-Hurwitz Criterion 可知系統平衡位置的穩定性能直接由特徵多項式的係數判別，我們可將滾珠-彈簧自動平衡系統的特徵多項式寫成如下列型式

$$F(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n \quad (3-63)$$

其係數 a_i ($i=0 \sim 12$) 為系統參數與平衡位置的函數，將 a_0 、 a_1 、 a_{11} 及 a_{12} 的詳細函數形式列於附錄一。由式(A1.1)與式(A1.2)可知， a_0 與 a_1 對於任意系統參數與平衡位置均為正值，因此根據 Routh-Hurwitz Criterion，若能判斷出係數 a_{11} 式(A1.3) 或 a_{12} 式(A1.4) 其中任意一個為負值，則該平衡位置必然為不穩定。結果如下：

(1). 平衡位置 NP_{S1}^{-} 為不穩定平衡

$$\text{將 } r = \tilde{r}_{S1}^{-} \text{ (式(3-27))、} \beta_1 = \beta_2 = \theta \text{ (} \tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = \tilde{\theta} \text{)} \text{ 及 } \delta_1 = \delta_2 = \tilde{\delta}_{1S1}^{-} = \tilde{\delta}_{2S1}^{-} \text{ (式(3-31))}$$

代入式(A1.4)並考慮其存在區域，可整理得

$$a_{12} = \frac{\tilde{r}_{S1}^- \Omega^6 \mu_b^5 (f^2 - \Omega^2 + \tilde{r}_{S1}^- \Omega^2)^2 \sqrt{D_{ND}}}{-\eta (f^2 - \Omega^2)} < 0 \quad (3-64)$$

因此平衡解 NP_{S1}^- 為不穩定。

(2). 平衡位置 NP_{S2}^- 為不穩定平衡

將 $r = \tilde{r}_{S2}^-$ (式(3-40))、 $\beta_1 = \beta_2 = \theta + \pi$ ($\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = \tilde{\theta} + \pi$) 及 $\delta_1 = \delta_2 = \tilde{\delta}_{1S2}^- = \tilde{\delta}_{2S2}^-$

(式(3-42)) 代入式(A1.4)並考慮其存在區域，得到

$$a_{12} = \frac{\tilde{r}_{S2}^- \Omega^6 \mu_b^5 (\Omega^2 - f^2 + \tilde{r}_{S2}^- \Omega^2)^2 \sqrt{D_{ND}}}{-\eta (f^2 - \Omega^2)} < 0 \quad (3-65)$$

故而平衡解 NP_{S2}^- 為不穩定。

(3). 平衡位置 NP_{S3} 為不穩定平衡

將 $r = \tilde{r}_{S3}$ (式(3-54))、 $\beta_1 = \theta$ 及 $\beta_2 = \theta + \pi$ ($\tilde{\beta}_1 = \tilde{\theta}$ 、 $\tilde{\beta}_2 = \tilde{\theta} + \pi$) 與 $\delta_1 = \tilde{\delta}_{1S3}$ 及

$\delta_2 = \tilde{\delta}_{2S3}$ (式(3-56)、式(3-57)) 代入式(A1.4)，同時考慮其存在區域，可得知

$$a_{12} = \frac{\tilde{r}_{S3}^2 \Omega^4 \mu_b^4 \left(-(f^2 - \Omega^2)^2 + \tilde{r}_{S3}^2 \Omega^4 \right) (p_N^2 + q_N^2)}{(f^2 - \Omega^2)^2} \quad (3-66)$$

由於 $\tilde{\delta}_{2S3} > 0$ ，因此由式(3-57)可推論出 $f^2 - \Omega^2 > \Omega^2 \tilde{r}_{S3} > 0$ ，故而 $a_{12} < 0$ ，亦

即平衡解 NP_{S3} 為不穩定。

(4). 當 $0 < \Omega < \Omega_{Ncr}$ 時，平衡位置 NP_0 為不穩定平衡

將 $r = \tilde{r} = 0$ 、 $\delta_1 = \delta_2 = \tilde{\delta}_1 = \tilde{\delta}_2 = 1$ 、 $\beta_1 = \tilde{\beta}_1 = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{2\eta}\right)$ 及 $\beta_2 = \tilde{\beta}_2 = -\tilde{\beta}_1$ 代入式

(A1.3)，可化簡成

$$a_{11} = 4\zeta_b \Omega^4 \mu_b^5 (f^2 - \Omega^2) p_N \quad (3-67)$$

當 $0 < \Omega < \Omega_{Ncr}$ 時 $p_N < 0$ ，因此 $a_{12} < 0$ ，所以在區間 $0 < \Omega < \Omega_{Ncr}$ ，平衡位置 NP_0

為不穩定。此結果部份說明了新設計的自動平衡機構 ($\Omega_{Ncr} < 1$) 相較於傳統固定軌道的自動平衡機構 ($\Omega_{Tcr} = 1$)，在 $\Omega = 1$ 附近，可能具有較大的完全平衡解範圍。

(5). 平衡位置 $NP_{S_2}^+$ 為不穩定平衡

於此平衡解中，兩彈簧具相同平衡長度 $\tilde{\delta}_{1S_2}^+ = \tilde{\delta}_{2S_2}^+ = 1 - \frac{\Omega^2 \tilde{r}_{S_2}^+}{f^2 - \Omega^2}$ ，且兩滾珠皆與碟片偏心位置以 $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = \tilde{\theta} + \pi$ 的幅角緊靠在一起；此時可以兩倍質量的單一滾珠（等效質量為 $2m_b$ ）及一等效彈簧（等效彈簧常數為 $2k_b$ ）的單滾珠-彈簧自動平衡系統平衡於 $\tilde{\theta} + \pi$ 幅角處的平衡解來說明。如果兩滾珠被限制必須一起運動，則其動態行為將與單滾珠-彈簧自動平衡系統完全一致。然而單滾珠-彈簧系統對應的平衡解為不穩定[30]。故對雙滾珠-彈簧系統而言，平衡位置 $NP_{S_2}^+$ 亦為不穩定。

為能更清楚的顯示上述平衡解的穩定性的解析結果，在圖 3-4 的 $\Omega-\eta$ 參數平面上將不穩定的平衡解移除，僅繪出可能穩定的平衡解的存在區域，結果如圖 3-5。 $\Omega-\eta$ 平面可分為三個區域，其中以斜線表示的區域不存在任何穩定平衡解，而另兩個區域分別僅有 $NP_{S_1}^+$ 及 NP_0 可能為穩定。換言之，當系統的 η 值固定時，在任一操作轉速下，系統至多僅對應一個穩定平衡位置。

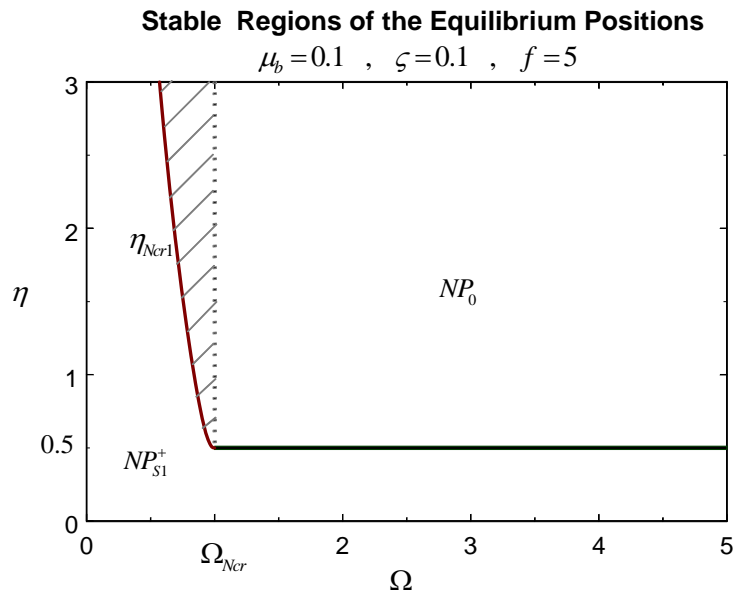


圖 3-5 可能穩定的平衡解類型及其存在邊界

3-3-2 穩定平衡解的數值分析

對於雙滾珠-彈簧自動平衡機構應用於二維偏心碟片的系統而言，同樣具有四組平衡類型、六種平衡解，由各平衡解的解析穩定性討論可知，只有兩種平衡解（ NP_0 與 NP_{S1}^+ ）可能是穩定的，其中 NP_0 是唯一可能的穩定完全平衡解，而 NP_{S1}^+ 則是唯一可能的穩定不完全平衡解，並且在 $\Omega-\eta$ 平面上各有其所屬的穩定平衡區域。

前一節採用穩定性檢驗判準是平衡解穩定的必要條件，換言之，無法證明平衡解為穩定。依據 Routh's criteria 平衡解穩定的充要條件為 Routh 陣列的各個元素需同號。因為 Routh 陣列過於複雜，無法由解析方式證明，本節採用數值方法檢測 Routh 陣列各元素的值，由此判別各平衡解的穩定存在區域。在我們測試的參數範圍內，除 NP_0 與 NP_{S1}^+ 外，其餘四種平衡位置均找不到穩定解，這證實前一節的解析結果。圖 3-6 為在 $\mu_b = 0.05$ 、 $\zeta = 0.05$ 、 $\zeta_b = 0.1$ 以及 $f = 5$ 的系統參數條件下，雙滾珠-彈簧自動平衡系統在 $\Omega-\eta$ 平面上的平衡解的穩定存在區域。圖中『Stable

『*Stable Region I*』代表不完全平衡解 NP_{S1}^+ 的穩定區域，而『*Stable Region II*』則為完全平衡解 NP_0 的穩定區域。為了驗證這個結果，於 *Stable Region I* 與 *Stable Region II* 內各選取一點，分別為“A” ($\eta = 2$ 、 $\Omega = 0.5$) 與“B” ($\eta = 2$ 、 $\Omega = 2.5$)。藉由數值積分計算在 A、B 兩點系統參數值下碟片形心徑向振幅的時間響應，結果如圖 3-7。A 點所在參數位置的平衡解為不完全平衡解 NP_{S1}^+ ，隨著時間的增加，系統無因次化徑向振幅逐漸收斂至 $\tilde{r}_{S1}^+ = 0.0412$ ，而 B 點所在參數位置的平衡解為完全平衡解 NP_0 ，其系統無因次化徑向振幅則隨時間收斂至 $\tilde{r} = 0$ 。

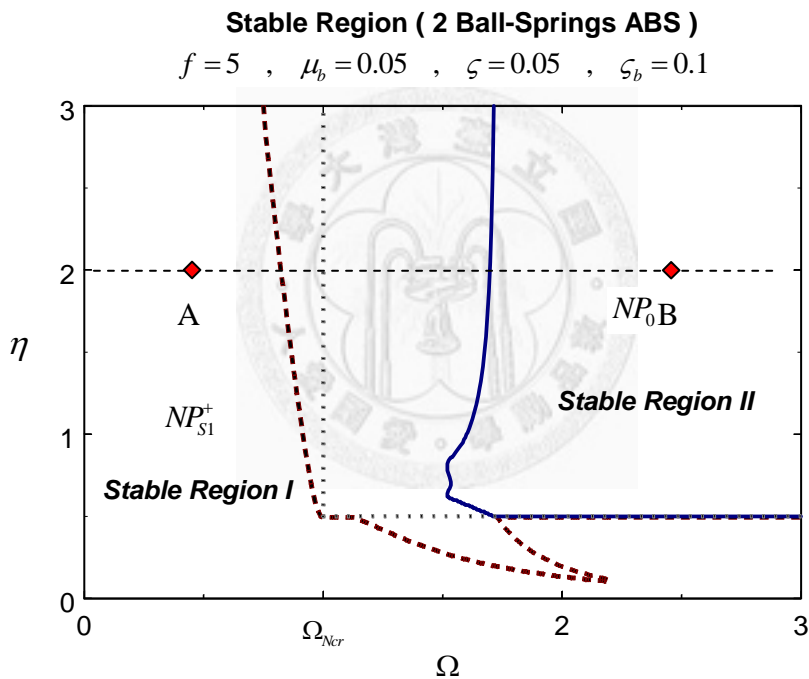


圖 3-6 平衡解在 $\Omega - \eta$ 平面上的穩定區域

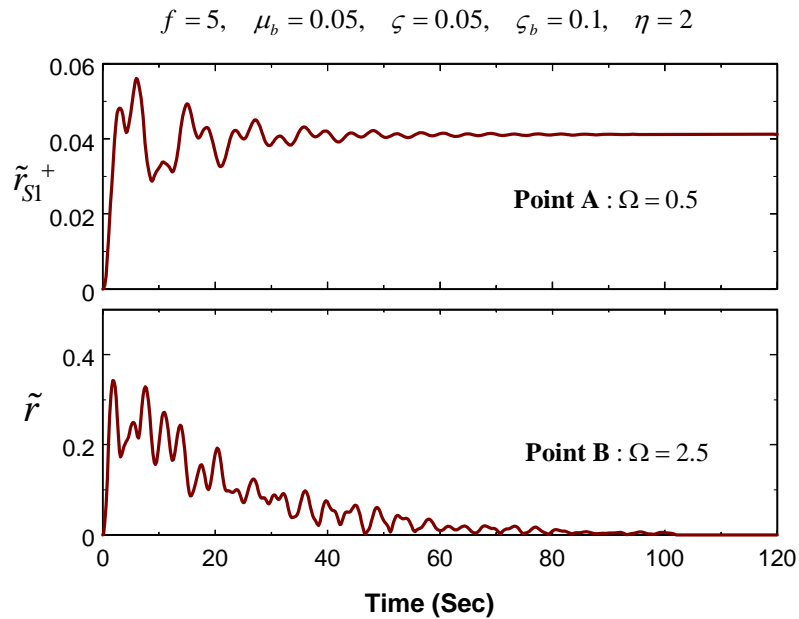


圖 3-7 驗證穩定區域內的平衡解的型態

3-3-3 系統參數對穩定區域的影響

滾珠-彈簧自動平衡機構的平衡位置的穩定性與系統參數極為相關。前一節的結果顯示此系統僅可能存在兩種可能的穩定平衡解：不完全平衡解 NP_{S1}^+ 及完全平衡解 NP_0 。這兩種平衡解於 $\Omega-\eta$ 平面的存在區域不相重疊，而且在不同系統參數下，有不同的穩定區域。本節沿續前一節的穩定性判別方法，更仔細探討系統參數對穩定區域的影響。

固定 $\mu_b = 0.05$ 及 $f = 5$ ，討論不同的 ζ 、 ζ_b 值下，不完全平衡解 NP_{S1}^+ 及完全平衡解 NP_0 在 $\Omega-\eta$ 平面上的穩定區域。不同參數組合與對應的穩定區域圖號列於表 3-1。

表 3-1 系統參數的設定與對應的圖號

		Stable Regions of the system on $\Omega-\eta$ plane		
		$\zeta_b = 0.05$	$\zeta_b = 0.1$	$\zeta_b = 0.2$
$\mu_b = 0.05$ $f = 5$	$\zeta = 0.05$	圖 3-8(a)	圖 3-8(b)	圖 3-8(c)
	$\zeta = 0.1$	圖 3-9(a)	圖 3-9(b)	圖 3-9(c)
	$\zeta = 0.2$	圖 3-10(a)	圖 3-10(b)	圖 3-10(c)

綜合比較所列各圖，將結果整理如下：

1. 適當地增加制振單元的阻尼 ζ_b ，幾乎均能擴大完全平衡解的穩定區域。這個效果在較大的系統支承阻尼時（ $\zeta = 0.1$ 或 0.2 ），尤為明顯（參考圖 3-9 與 3-10）。
2. 比較圖 3-8(a)、圖 3-9(a) 及圖 3-10(a) 可知，在較低的制振比 η 下（ $\frac{1}{2} < \eta < 1$ ），當制振單元的阻尼較小（ $\zeta_b = 0.05$ ），則增加系統支承阻尼 ζ 反將造成完全平衡解的穩定區域大幅減少。
3. 綜合各圖比較，在較高的制振比 η 條件下（ $\eta = 2 \sim 3$ ），增加制振單元的阻尼 ζ_b 或系統支承阻尼 ζ ，均能增加完全平衡解的穩定區域。
4. 由圖 3-9(a)~(c) 可看出，在 $1 < \Omega < 2$ 區間，出現另一個不穩定區域，且此區域將隨 ζ_b 增加而減小。
5. 當 $0 < \Omega < \Omega_{Ncr}$ 時，不完全平衡解 NP_{S1}^+ 的穩定平衡邊界幾乎完全貼合於 η_{Ncr1} 的曲線，亦即在此區域內，必然存在（且唯一）穩定的不完全平衡解。
6. 當 $\Omega > \Omega_{Ncr}$ 且 $\eta < \frac{1}{2}$ 時，不完全平衡解 NP_{S1}^+ 的不穩定區域將同樣隨著 ζ 或 ζ_b 值的增加而逐漸減小。

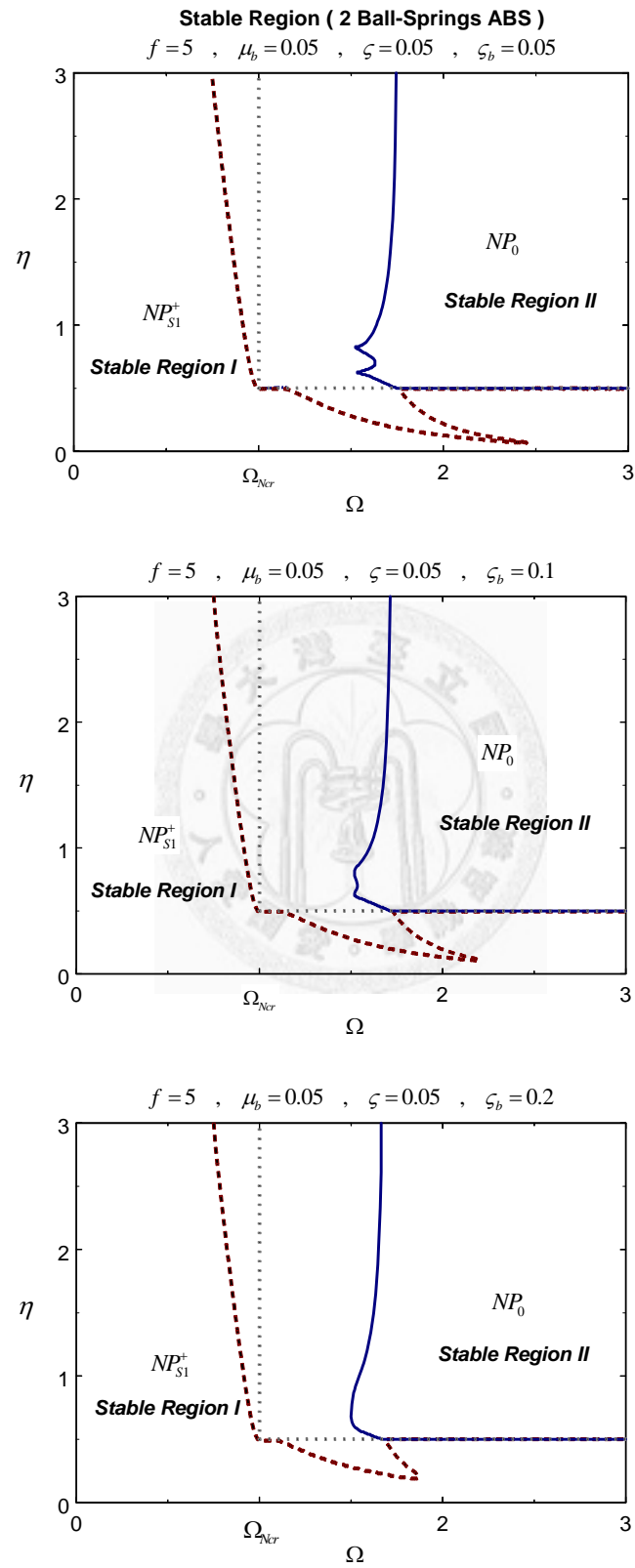


圖 3-8(a)~(c) $\zeta=0.05$, 依序改變 $\zeta_b=0.05$ 、0.1 及 0.2 , 平衡解的穩定區域比較

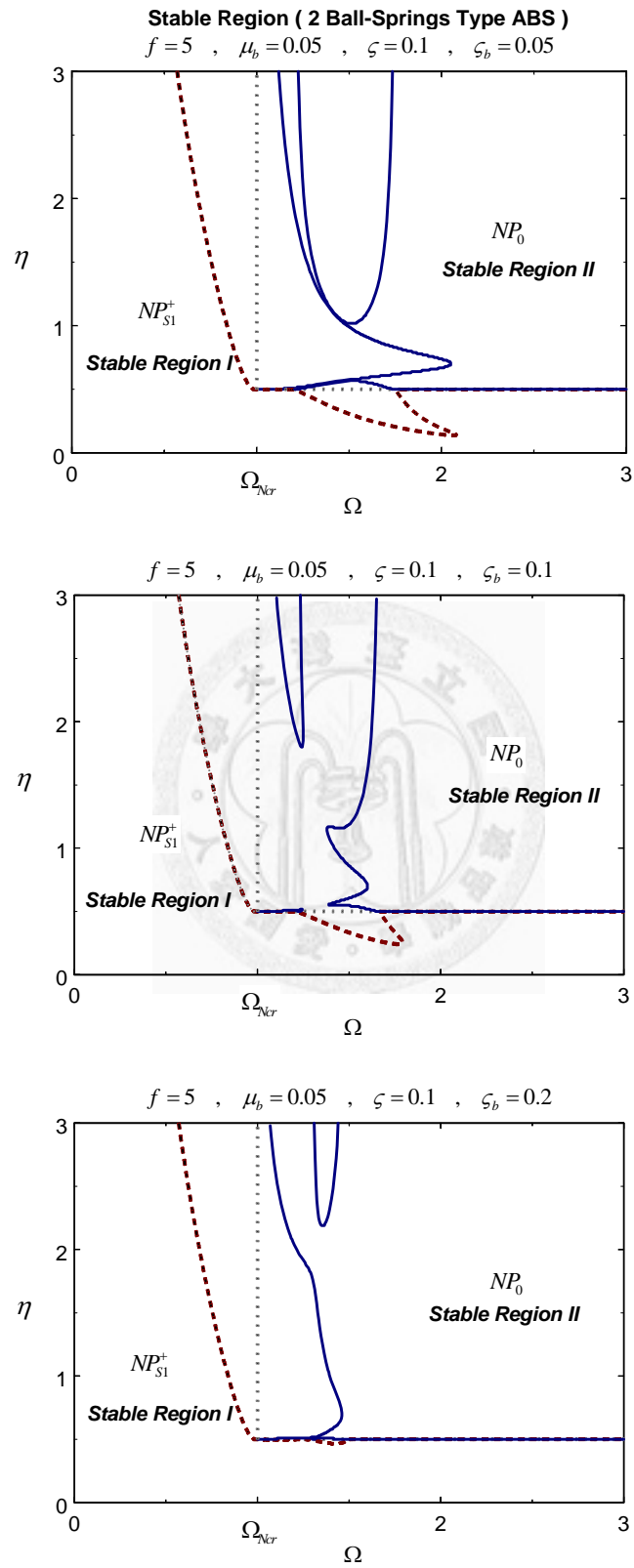


圖 3-9(a)~(c) $\zeta = 0.1$, 依序改變 $\zeta_b = 0.05$ 、 0.1 及 0.2 , 平衡解的穩定區域比較

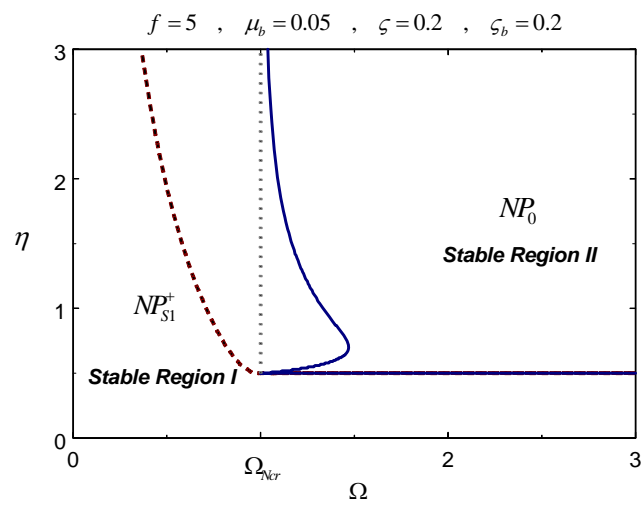
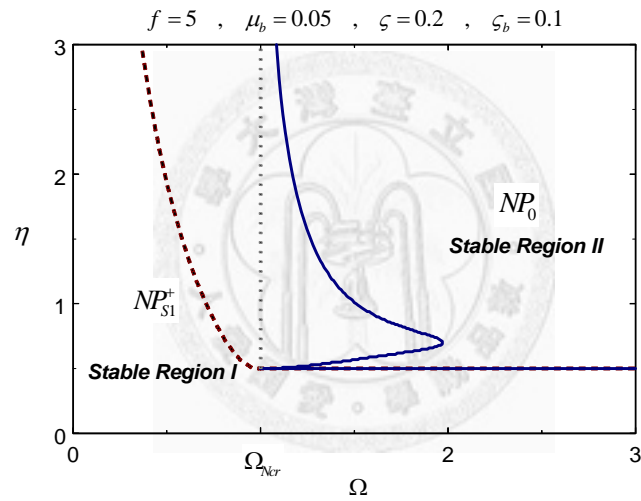
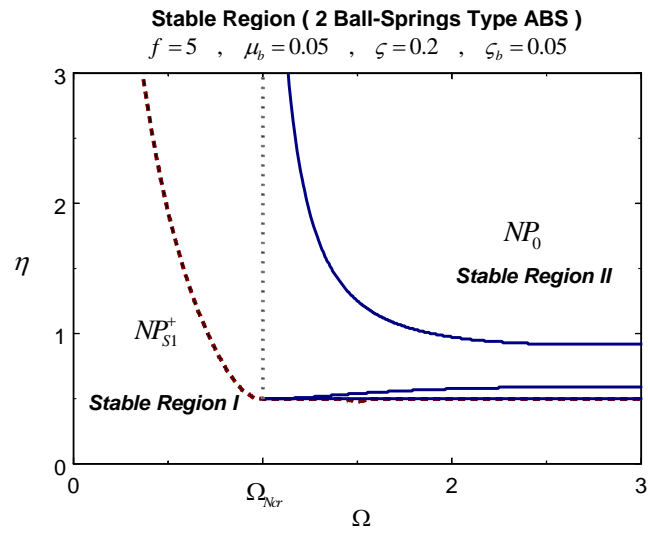


圖 3-10(a)~(c) $\zeta=0.2$, 依序改變 $\zeta_b=0.05$ 、 0.1 及 0.2 , 平衡解的穩定區域比較

由於不完全平衡解的穩定區域隨 ζ 與 ζ_b 的變化較為單純，且一般設計自動平衡機構應用的系統，均預期能在穩定的完全平衡條件下運作，因此針對完全平衡解在 $\Omega-\zeta$ 及 $\Omega-\zeta_b$ 平面上的穩定區域再做進一步的探討。

圖 3-11 與圖 3-12 分別為 $\eta=1$ 及 $\eta=2$ 時，在 $\Omega-\zeta$ 平面上不同 ζ_b 值下完全平衡解的穩定區域。由圖中不難發現，於此例中約莫以 $\zeta=0.025$ 為界，當 $\zeta>0.025$ ，較大的系統支承阻尼 ζ 搭配較大的制振單元阻尼 ζ_b 可獲致較大的穩定平衡轉速範圍；另一方面，當 $\zeta<0.025$ ，降低 ζ_b 值會稍微擴大完全平衡解的穩定區域。此外，當系統支承阻尼為 0 時，無論 ζ_b 值為何，在所有轉速下均無穩定的完全平衡解。最後，增加 η 值應可增加穩定區域，唯需考慮轉速在 $1<\Omega<2$ 區間，可能出現的不穩定平衡區域。

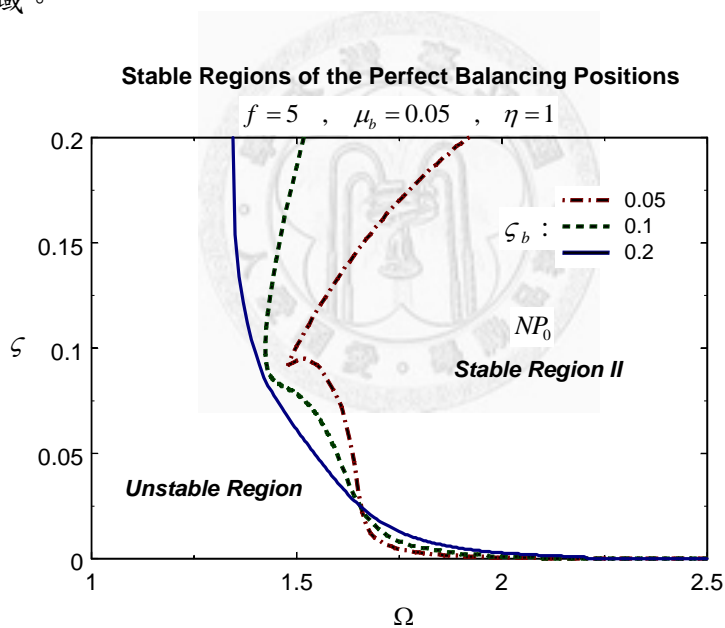


圖 3-11 $\eta=1$ ，考慮 $\zeta_b=0.05$ 、 0.1 及 0.2 ，平衡解於 $\Omega-\zeta$ 平面的穩定區域

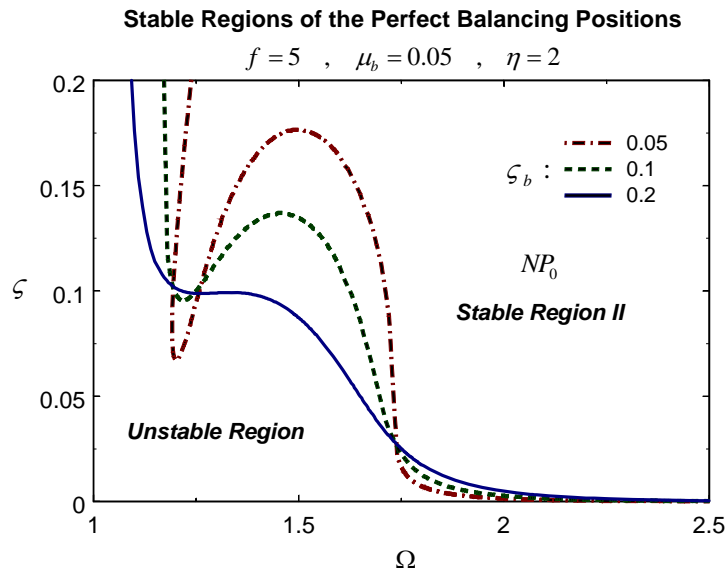


圖 3-12 $\eta = 2$ ，考慮 $\zeta_b = 0.05$ 、 0.1 及 0.2 ，平衡解於 $\Omega - \zeta$ 平面的穩定區域

接著探討完全平衡解的穩定區域在 $\Omega - \zeta_b$ 平面上呈現的變化。圖 3-13 與圖 3-14 分別為 $\eta = 1$ 及 $\eta = 2$ 時，不同 ζ 值下，完全平衡解穩定區域的變化。由圖 3-13 可以清楚地看出，於此數值範例中當 $\zeta_b = 0.025$ 而 $\zeta = 0.2$ 時，系統並無穩定的完全平衡解存在，亦即較小的滾珠阻尼 ζ_b 必須搭配較小的系統支承阻尼 ζ ，才可能使系統呈現穩定平衡。但當滾珠阻尼 ζ_b 為 0 時，無論 ζ 的大小，在所有轉速下均無穩定的完全平衡解。另外，同時比較兩圖在相同 ζ 值的穩定區域變化可知，提升制振比 η 對於高支承阻尼的系統的穩定區域大小，有較為顯著的改善。

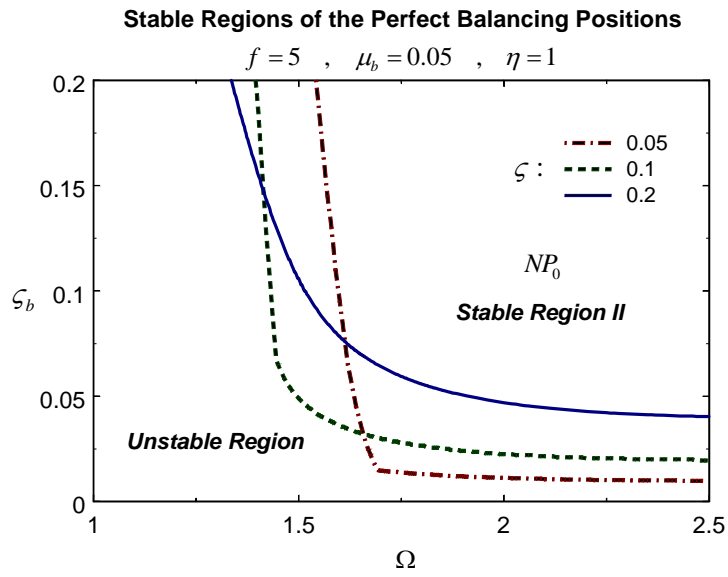


圖 3-13 $\eta = 1$ ，考慮 $\zeta = 0.05$ 、 0.1 及 0.2 ，平衡解於 $\Omega - \zeta_b$ 平面的穩定區域

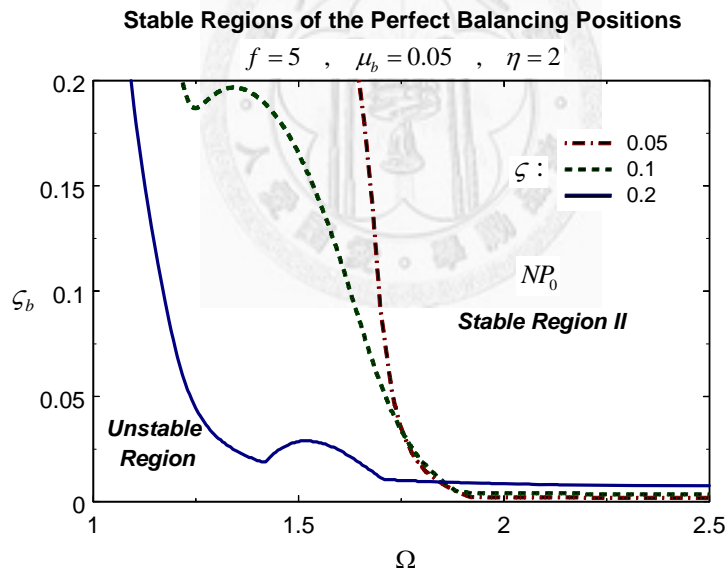


圖 3-14 $\eta = 2$ ，考慮 $\zeta = 0.05$ 、 0.1 及 0.2 ，平衡解於 $\Omega - \zeta_b$ 平面的穩定區域

3-4 滾珠-彈簧與固定軌道的滾珠自動平衡機構的穩定區域比較

本節探討雙滾珠-彈簧系統相較於固定軌道的雙滾珠系統的性能差異，比較兩者完全平衡位置的穩定區域。圖 3-15(a)、(b)為兩組參數值下， $\Omega-\eta$ 平面上的穩定區域，其中實線表示雙滾珠-彈簧 (2 Ball-Springs) 系統的穩定邊界，虛線則為固定軌道的雙滾珠 (2 Balls) 系統的穩定邊界。邊界右側為穩定區域，左側為不穩定區域。可以明顯看出雙滾珠-彈簧 (2 Ball-Springs) 系統的穩定區域大於固定軌道的雙滾珠 (2 Balls) 系統的穩定區域，而更大的穩定區域代表工作轉速與系統參數有更大的適用範圍。為能更明確驗證上述結果，於圖 3-15(a)中選取不同穩定特性的三點，分別位於(A) $\eta=2$ 、 $\Omega=1.5$ ，兩類型的系統均不穩定、(B) $\eta=2$ 、 $\Omega=1.8$ ，雙滾珠-彈簧系統穩定但雙滾珠系統不穩定，以及 (C) $\eta=2$ 、 $\Omega=2$ ，兩類型的系統均位於穩定的區域內。由數值積分求得在此三點參數條件下，兩類型系統碟片形心徑向振幅的時間響應，結果如圖 3-16(a)~(c)所示。此結果說明了雙滾珠-彈簧系統確實較雙滾珠系統在 $\Omega-\eta$ 平面上有更大的穩定區域。

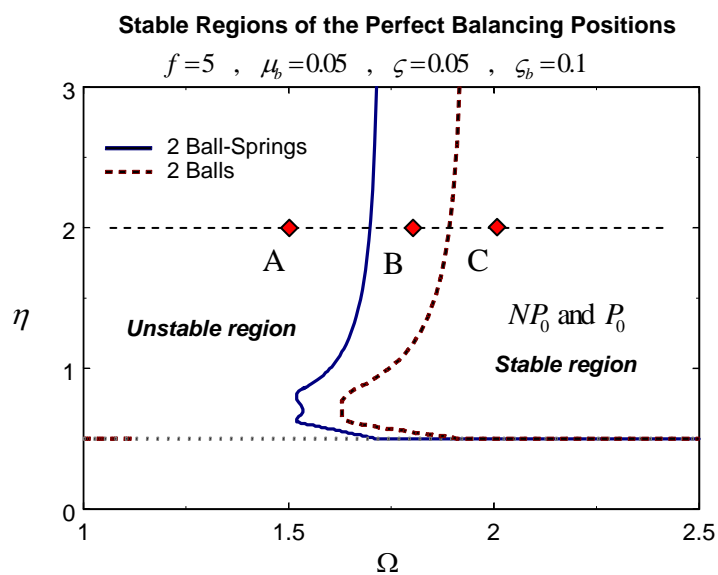


圖 3-15(a) 比較兩類型自動平衡系統的完全平衡解於 $\zeta = 0.05$ 時，

在 $\Omega-\eta$ 平面的穩定區域

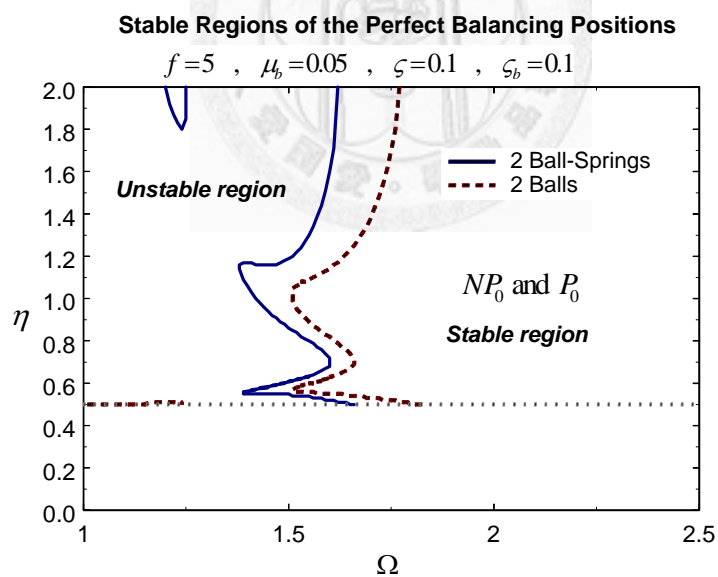


圖 3-15(b) 比較兩類型自動平衡系統的完全平衡解於 $\zeta = 0.1$ 時，在

$\Omega-\eta$ 平面的穩定區域

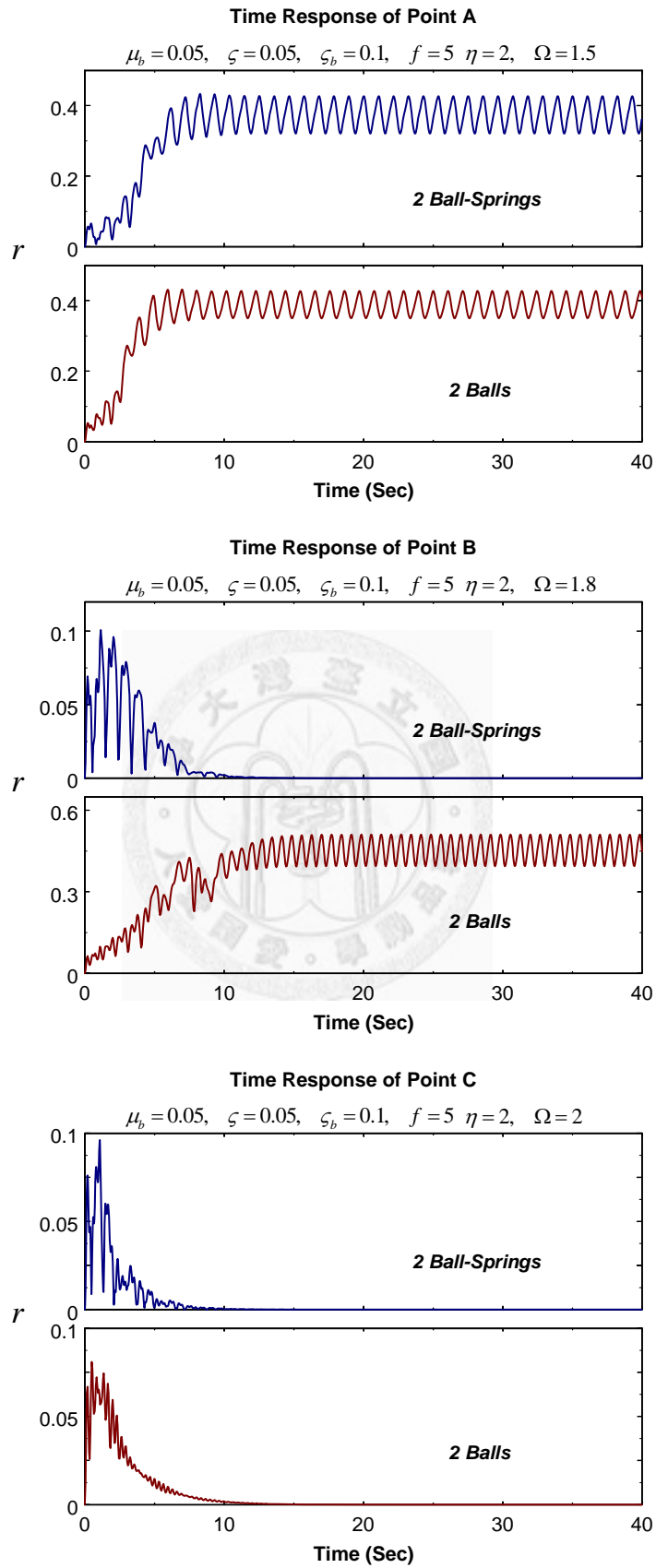


圖 3-16(a)~(c) A、B 與 C 三點無因次化徑向振幅的時間響應

系統支承阻尼 ζ 與滾珠阻尼 ζ_b 亦為影響系統穩定與否的重要參數，圖 3-17(a)、(b)與圖 3-18(a)、(b)分別為比較兩類型系統的完全平衡解於 $\eta=1$ 及 $\eta=2$ 時，在 $\Omega-\zeta$ 與 $\Omega-\zeta_b$ 平面的穩定區域。由這些結果可再次確認雙滾珠-彈簧系統無論在 $\Omega-\zeta$ 與 $\Omega-\zeta_b$ 平面上都較雙滾珠系統具有更大的穩定區域。

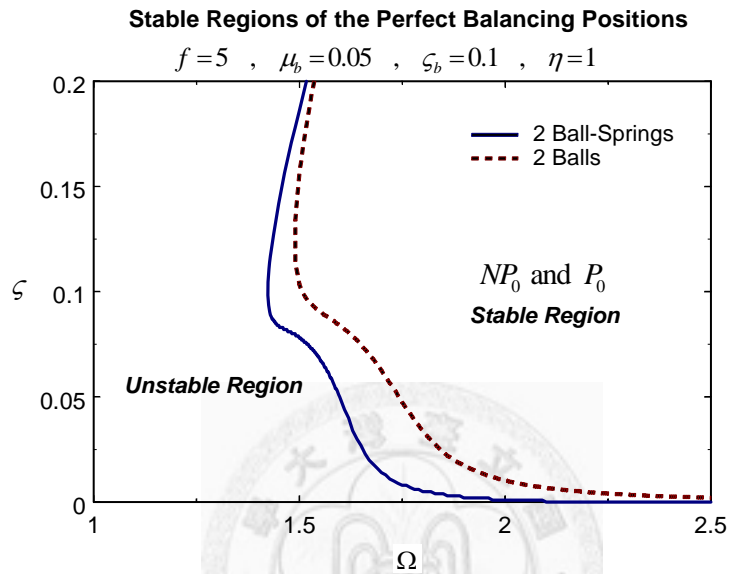


圖 3-17(a) 比較兩類型自動平衡系統的完全平衡解於 $\eta=1$ 時，在 $\Omega-\zeta$ 平面的穩定區域

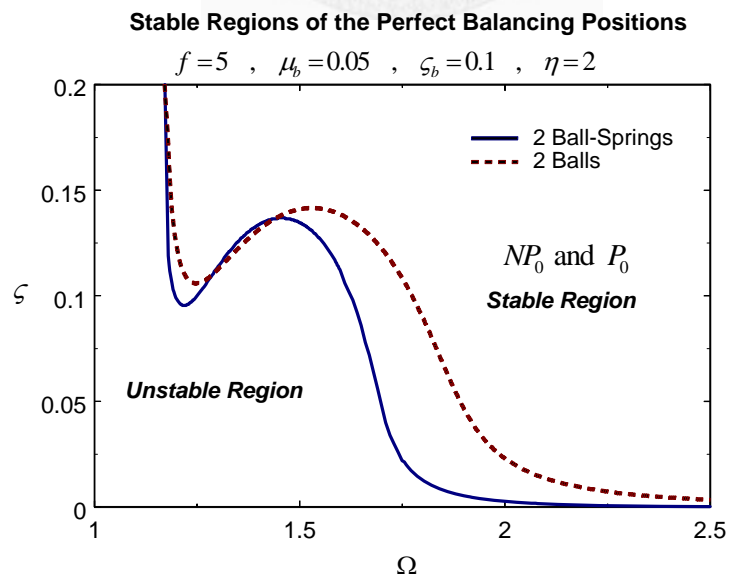


圖 3-17 (b) 比較兩類型自動平衡系統的完全平衡解於 $\eta=2$ 時，在 $\Omega-\zeta$ 平面的穩定區域

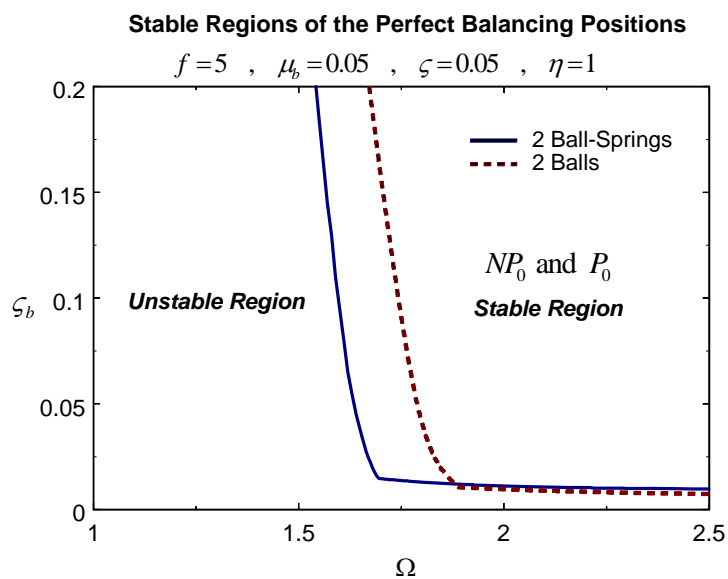


圖 3-18(a) 比較兩類型自動平衡系統的完全平衡解於 $\eta=1$ 時，在

$\Omega-\zeta_b$ 平面的穩定區域

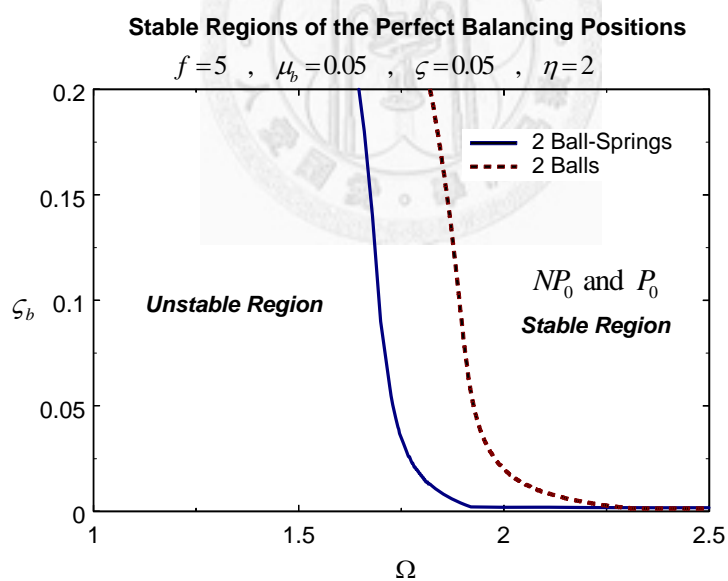


圖 3-18 (b) 比較兩類型自動平衡系統的完全平衡解於 $\eta=2$ 時，在

$\Omega-\zeta_b$ 平面的穩定區域

在固定的工作轉速下，若滾珠-彈簧系統制振單元的徑向彈簧的彈性係數 k_b 改變，將直接影響了彈簧的平衡長度，進而造成滾珠以不同的迴轉半徑運行。由式

(3-10)對於無因次化參數的定義可知， f 為制振單元自然頻率與系統自然頻率的比值，而 k_b 項僅影響 f 參數值的大小。圖 3-19 為雙滾珠-彈簧系統在不同 f 值下，於 $\zeta - \zeta_b$ 平面上所求得完全平衡位置的穩定區域。圖中顯示系統完全平衡解的穩定區域隨著 f 值的增加而縮小。當 f 值很大時（如 $f = 100$ ），代表制振單元的徑向彈簧具有極大的剛性，此時滾珠的行為類同在固定軌道上運行一般。由於 $f = 4$ 、 $f = 5$ 以及 $f = 8$ 條件下的穩定區域均相對大於 $f = 100$ 時的穩定區域，因此可總結地說明，在適當系統參數下，滾珠沿碟片中心徑向的自由度有助於增加系統完全平衡位置的穩定範圍。

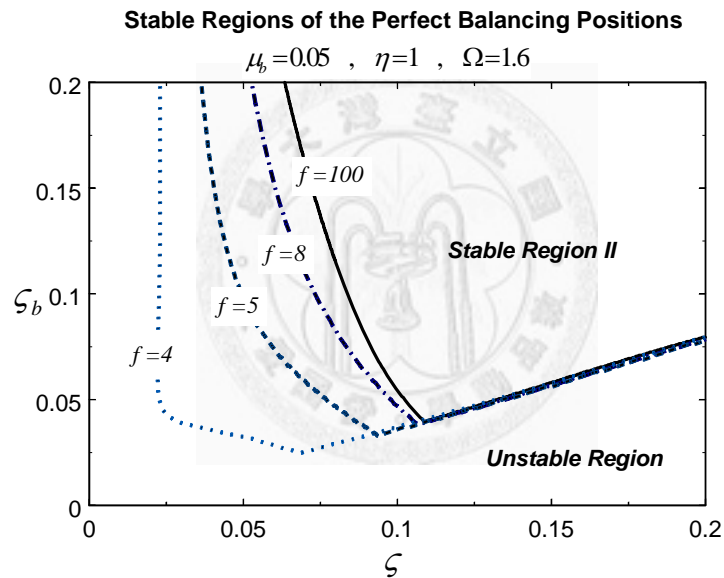


圖 3-19 比較不同 f 值之下，完全平衡位置的穩定區域變化

第四章 滾珠自動平衡機構應用於三維偏心剛性轉子系統 之制振

對於加工機具而言，刀具的不均勻磨耗與主軸的裝配誤差，均可能致使偏心振動的發生。由切削理論可知，工具機的主軸轉速必須考量加工料件的材料性質與刀具的種類與型式，若能使主軸穩定的轉速範圍越大，則越能適應不同的切削條件，因此有必要針對三維轉子的偏心制振進行研究。當轉子的偏心量隨工作條件與時間而有所改變時，可自動調整並抑制偏心旋轉振動的自動平衡裝置，對轉子系統而言是極有幫助的。滾珠型自動平衡機構已證實可有效的抑制二維平面上的偏心振動，但是對於在剛性長轉子三維制振與動態平衡上的應用，則尚未有完整清楚的研究。本章主要在逐步探討於端面上配置滾珠型平衡機構的長轉子系統的動態特性。除解得完全平衡的條件外，也分析無法完全平衡時系統的行為特性。

4-1 滾珠自動平衡機構-偏心轉子三維制振系統

4-1-1 剛性長轉子的偏心描述

繞長軸向以等角速度旋轉的剛性長轉子的偏心不平衡基本上有三種型式，分別為靜態不平衡(Static unbalance)、力偶不平衡(Couple unbalance)以及動態不平衡(Dynamic unbalance)[37]。圖 4-1 描述的是轉子靜態不平衡的情形。轉子受偏心不平衡量（質點 m_s 所造成）的影響，質心 G 偏離旋轉軸中心但主軸與旋轉軸平行，其作用於轉子上的合力矩為 0，但合力不為 0。此時轉子長軸向的慣性主軸與旋轉軸間存在一平移量，造成轉子繞著旋轉軸等距平行地迴轉，於空間中形成一圓柱型軌跡。圖 4-2 顯示的是轉子力偶不平衡。此情形相當於在離轉子質心等距的兩端面上，存在一對大小相等且相角差 180° 的不平衡量（質量為 $m_c/2$ 的一對質點所造

成)，其作用於轉子上的合力為 0，但合力矩不為 0。此時轉子的質心雖與形心重合，然其長軸向的慣性主軸與旋轉軸間形成一交角，於空間中形成兩個同軸且頂點相對的等大圓錐。圖 4-3 為轉子動態不平衡的情形。由於一般偏心不平衡量的影響，作用於轉子上的合力與合力矩均不為 0，可將之視為由靜態不平衡與力偶不平衡所合成。

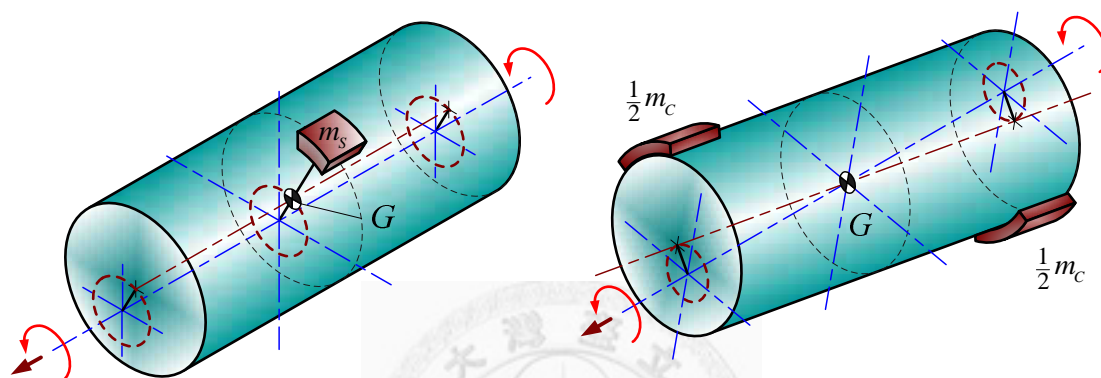


圖 4-1 靜態不平衡(Static unbalance)

圖 4-2 力偶不平衡(Couple unbalance)

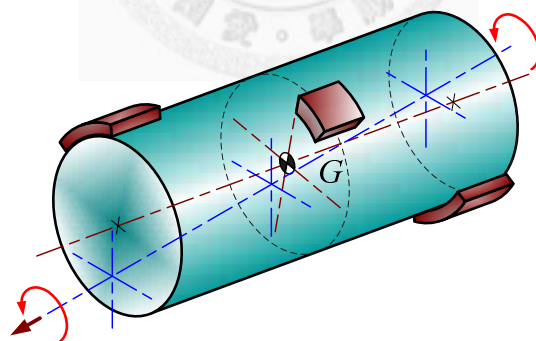


圖 4-3 動態不平衡(Dynamic unbalance)

對於不平衡偏心轉子的迴轉運動而言，在等向支承彈簧作用下，靜態不平衡產生的是轉子隨質心的圓周平移運動，而力偶不平衡引發的是轉子繞質心的角運動。就動力學的觀點而言，若兩個等質量的剛體繞同樣旋轉軸等速旋轉時所受的合力（由靜態不平衡造成）與合力矩（由力偶不平衡造成）相同，則這兩個剛體

間是等價的。首先考慮如圖 4-4，將靜態不平衡的偏心量，等價在離轉子質心同樣等距的兩端面上(僅需將靜態不平衡量 m_s 沿長軸向均分至兩端面，此時轉子繞長軸向等速旋轉的合力在等價前後是相等的，且合力矩依舊為 0)。接著如圖 4-5 所示；於兩端面上同時考量合力與合力矩的效應，分別以 m_L 及 m_R 等價質點取代左、右兩端面上的不平衡量，此時的系統與一般動態不平衡具有相同的合力與合力矩。簡言之，對於轉子一般動態不平衡的情形，可以兩端面上的等價偏心質點描述之。

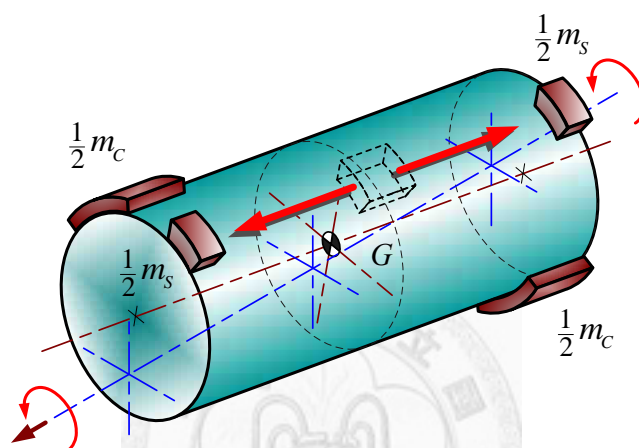


圖 4-4 靜態不平衡偏心量等價至等距的兩端面上

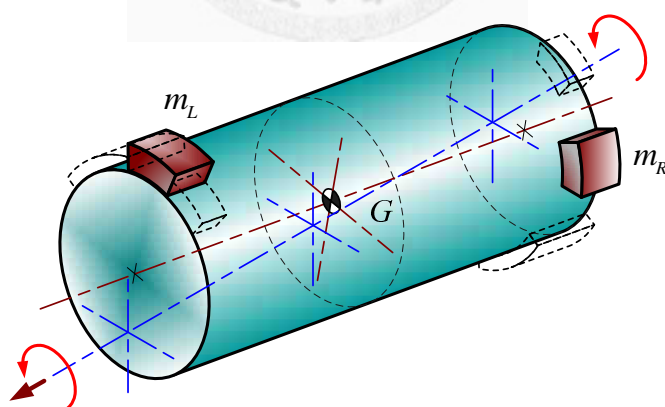


圖 4-5 以兩端面上的等價偏心質點描述動態不平衡

4-1-2 自動平衡機構-偏心轉子三維制振系統的理论模型

轉子的一般偏心動態不平衡型態，可以一均質軸再加上兩橫截面上的等價偏心質量描述之。為了解偏心轉子兩端面裝置自動平衡機構對轉子三維振動的影響，

建構如圖 4-6 所示系統的理論模型，主要包含均質剛性長轉子、滾珠型自動平衡機構、偏心質量及系統的承載機構。其中，均質剛性長轉子半徑為 R ，長度 L 且質量為 m 。轉子的偏心不平衡量以左、右兩端面上的等價偏心質量 m_L 及 m_R 描述，其相對於個別端面中心的偏心距離分別為 ε_L 與 ε_R ，兩者間的相位角差為 ϕ 。我們藉由兩端面上垂直於軸線的滾珠型自動平衡機構，來平衡上述偏心轉子的固有不平衡量。自動平衡機構的滾珠軌道半徑為 R (將自動平衡機構的滾珠視為沿軌道自由運動的質點，其半徑相較於轉子軸徑而言甚小，故自動平衡機構的軌道半徑相當近似於轉子軸徑[21, 22])，軌道中心與轉子兩端面形心重合；軌道阻尼為黏滯阻尼 c_b 且軌道內各滾珠的質量均為 m_b 。兩端面上各類滾珠的位置，分別以相對於所在端面上等價偏心質量的超前角 $\alpha_i(t)$ 與 $\beta_i(t)$ ($i=1 \cdots n$) 描述之，並假設滾珠的半徑相較於系統各尺度而言得以忽略。長度為 L 的轉子以固定角速度 ω 迴轉， C 代表均質轉子的形心(與質心重合)。轉子兩端的等向性支承系統以線性彈簧 k 與黏滯阻尼 c 來描述。

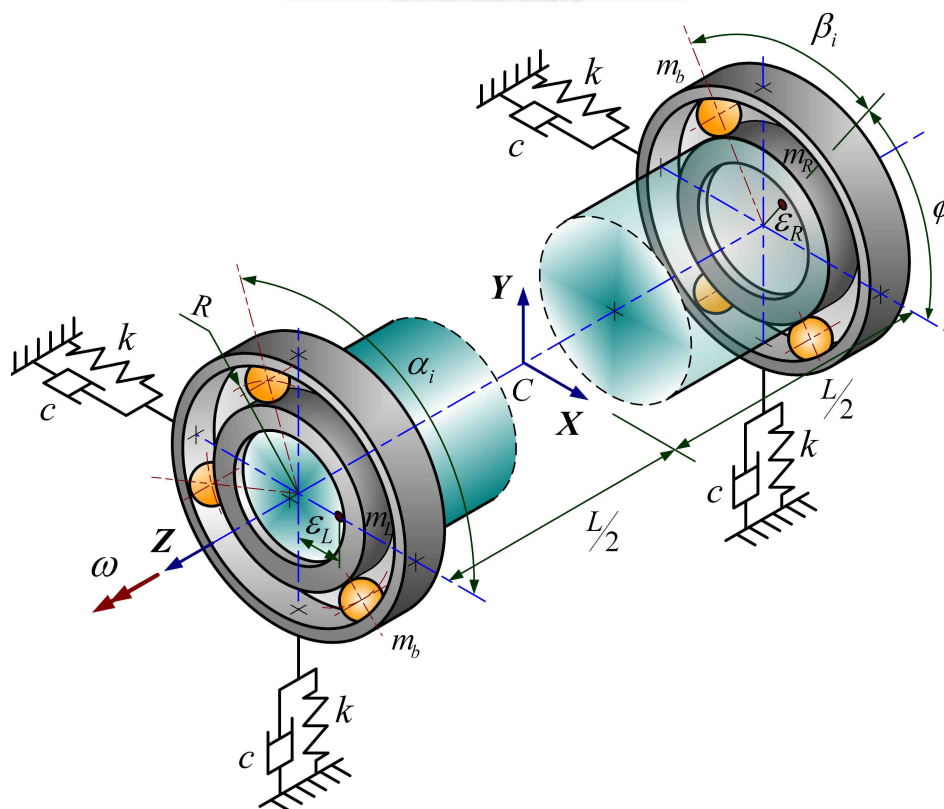


圖 4-6 兩端面裝置滾珠型自動平衡機構的剛性轉子系統示意圖

參考圖 4-7，為描述此系統的運動狀態，我們選用直角座標 $OXYZ$ 為固定參考座標系，其座標原點 O 位於兩端支承彈簧均未變形時轉子形心 C 的位置，而 Z 軸則沿著轉子靜止時的長軸向並指向左端面中心。一般的剛體運動，可視為剛體質心的平移運動和剛體繞質心的角運動的合成。為完整說明轉子於三維空間的動態行為，首先定義相對於固定參考座標系 $OXYZ$ ，繞 Z 軸以同步於轉子長軸向的等角速度 ω 旋轉的旋轉座標系 $O\tilde{x}\tilde{y}Z$ 。接著定義剛體繞質心的角運動。令轉子於空間運動中繞通過質心且平行於 \tilde{x} 軸向旋轉的小角度為 $\gamma_1(t)$ 。因此，我們可以將前述的旋轉座標系 $O\tilde{x}\tilde{y}Z$ ，同樣繞 \tilde{x} 軸向旋轉 $\gamma_1(t)$ ，得到另一組旋轉座標系 $O\tilde{x}y^*z^*$ 。最後，再令轉子於空間運動中繞通過質心且平行於 y^* 軸向旋轉的小角度為 $\gamma_2(t)$ ，此時轉子的空間型態可藉由從座標系 $O\tilde{x}y^*z^*$ 再繞 y^* 軸旋轉 $\gamma_2(t)$ 所得到的旋轉座標系 $O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ （其中 $\hat{y} = y^*$ ）來表示。

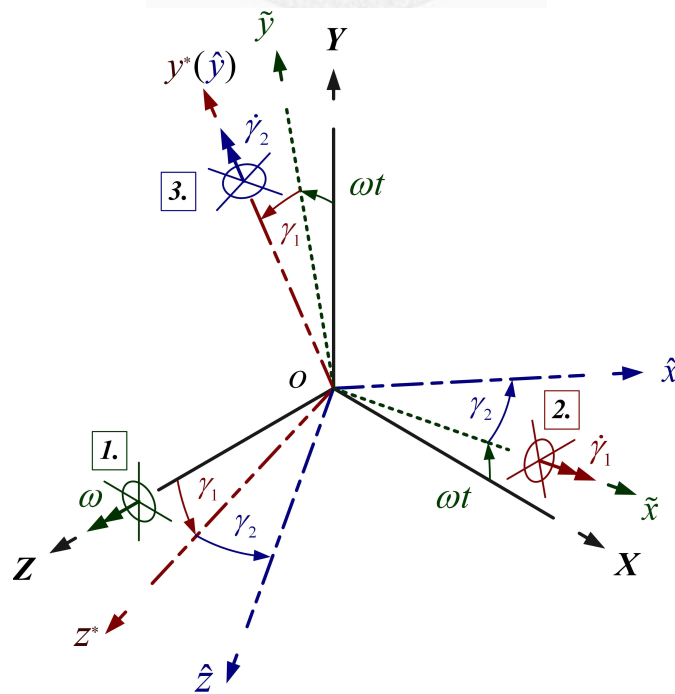


圖 4-7 描述轉子系統的座標系

值得注意的是，經上述三個步序的轉換，最後形成的旋轉座標系 $O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ ，始終繞著固定點 O 旋轉且各座標軸與轉子的主軸方向保持平行，如圖 4-8 所示，其能有效用以描述轉子繞其質心的空間角運動。

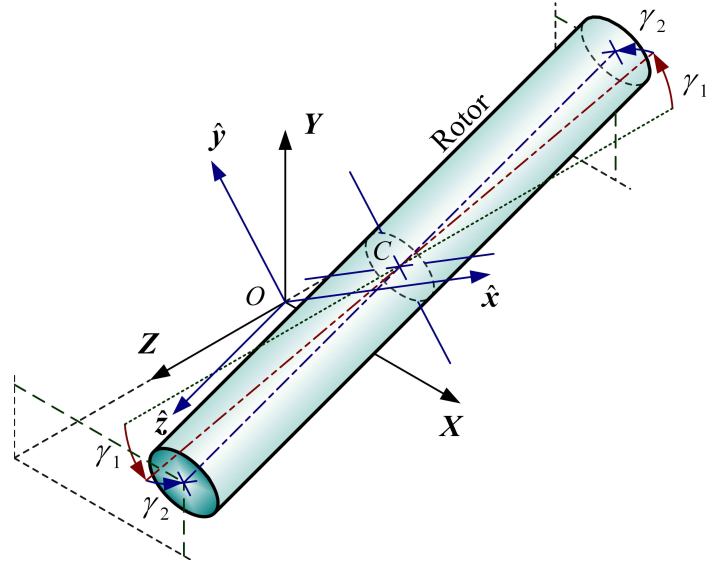


圖 4-8 旋轉座標系 $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ 與空間運動的轉子主軸方向保持平行

前述各座標系間的轉換關係如表 4-1 所列：

表 4-1 描述轉子系統的座標系間的轉換關係

	From	To	Transfer
1.	XYZ	$\tilde{x}\tilde{y}Z$	T_ω
2.	$\tilde{x}\tilde{y}Z$	$\tilde{x}y^*z^*$	T_1
3.	$\tilde{x}y^*z^*$	$\hat{x}\hat{y}\hat{z}$	T_2

其中，

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ Z \end{bmatrix}_{\tilde{x}\tilde{y}Z} = T_\omega \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{XYZ} ; T_\omega = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-1)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix}_{\tilde{x}y^*z^*} = \mathbf{T}_1 \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ Z \end{bmatrix}_{\tilde{x}\tilde{y}Z} ; \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_1(t) & \sin \gamma_1(t) \\ 0 & -\sin \gamma_1(t) & \cos \gamma_1(t) \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}_{\hat{x}\hat{y}\hat{z}} = \mathbf{T}_2 \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix}_{\tilde{x}y^*z^*} ; \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \cos \gamma_2(t) & 0 & -\sin \gamma_2(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma_2(t) & 0 & \cos \gamma_2(t) \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

4-1-3 自動平衡機構-偏心轉子三維制振系統的統御方程

假設系統 Z 軸向的運動可忽略，轉子質心、兩端偏心質量以及所有滾珠的運動軌跡均維持在 XY 平面上，視之為平面運動[28, 29]。另外，尤拉角 $\gamma_1(t)$ 及 $\gamma_2(t)$ 為小角位移，故與其相關的三角函數可簡化成 $\sin \gamma_1(t) = \gamma_1(t)$ 、 $\sin \gamma_2(t) = \gamma_2(t)$ 以及 $\cos \gamma_1(t) = \cos \gamma_2(t) = 1$ 。依此假設可將系統有效簡化。

首先，將質心的位置向量經座標轉換至固定座標系下可表示為

$$(\bar{\mathbf{r}}_c)_{XYZ} = \mathbf{T}_\omega^{-1} \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{T}_2^{-1} \begin{bmatrix} x_c(t) \\ y_c(t) \\ 0 \end{bmatrix}_{\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}} = \begin{bmatrix} x_c(t) \cos \omega t - y_c(t) \sin \omega t \\ x_c(t) \sin \omega t + y_c(t) \cos \omega t \\ 0 \end{bmatrix}_{XYZ} \quad (4-4)$$

$O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ 為在固定原點 O 上隨著轉子同步旋轉(與轉子各主軸方向平行)的座標系。

參考圖 4-6，轉子左、右兩端面上的偏心質量相對於固定座標系的位置向量 $(\bar{\mathbf{r}}_{GL})_{XYZ}$

及 $(\bar{\mathbf{r}}_{GR})_{XYZ}$ ，可分別描述成

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{r}}_{GL})_{XYZ} &= (\bar{\mathbf{r}}_c)_{XYZ} + \mathbf{T}_\omega^{-1} \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{T}_2^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ 0 \\ L/2 \end{bmatrix}_{\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}} \\ &= \begin{bmatrix} \left(x_c(t) + \frac{L}{2} \gamma_2(t) + \varepsilon_L \right) \cos \omega t - \left(y_c(t) - \frac{L}{2} \gamma_1(t) \right) \sin \omega t \\ \left(x_c(t) + \frac{L}{2} \gamma_2(t) + \varepsilon_L \right) \sin \omega t + \left(y_c(t) - \frac{L}{2} \gamma_1(t) \right) \cos \omega t \\ \frac{L}{2} \end{bmatrix}_{XYZ} \end{aligned} \quad (4-5)$$

$$\begin{aligned}
(\bar{\mathbf{r}}_{GR})_{XYZ} &= (\bar{\mathbf{r}}_c)_{XYZ} + \mathbf{T}_\omega^{-1} \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{T}_2^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_R \cos \phi \\ \varepsilon_R \sin \phi \\ -L/2 \end{bmatrix}_{\hat{x} \hat{y} \hat{z}} \\
&= \begin{bmatrix} \left(x_C(t) - \frac{L}{2} \gamma_2(t) \right) \cos \omega t + \varepsilon_R \cos(\omega t + \phi) - \left(y_C(t) + \frac{L}{2} \gamma_1(t) \right) \sin \omega t \\ \left(x_C(t) - \frac{L}{2} \gamma_2(t) \right) \sin \omega t + \varepsilon_R \sin(\omega t + \phi) + \left(y_C(t) + \frac{L}{2} \gamma_1(t) \right) \cos \omega t \\ -\frac{L}{2} \end{bmatrix}_{XYZ} \quad (4-6)
\end{aligned}$$

同樣地，轉子左、右兩端面的自動平衡機構上的各滾珠位置向量相對於固定座標系 $OXYZ$ 的座標分別為

$$\begin{aligned}
(\bar{\mathbf{r}}_{BLi})_{XYZ} &= (\bar{\mathbf{r}}_c)_{XYZ} + \mathbf{T}_\omega^{-1} \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{T}_2^{-1} \begin{bmatrix} R \cos \alpha_i(t) \\ R \sin \alpha_i(t) \\ \frac{L}{2} \end{bmatrix}_{\hat{x} \hat{y} \hat{z}} \\
&= \begin{bmatrix} \left(x_C(t) + \frac{L}{2} \gamma_2(t) \right) \cos \omega t + R \cos(\omega t + \alpha_i(t)) - \left(y_C(t) - \frac{L}{2} \gamma_1(t) \right) \sin \omega t \\ \left(x_C(t) + \frac{L}{2} \gamma_2(t) \right) \sin \omega t + R \sin(\omega t + \alpha_i(t)) + \left(y_C(t) - \frac{L}{2} \gamma_1(t) \right) \cos \omega t \\ \frac{L}{2} \end{bmatrix}_{XYZ} \quad (4-7) \\
(\bar{\mathbf{r}}_{BRi})_{XYZ} &= (\bar{\mathbf{r}}_c)_{XYZ} + \mathbf{T}_\omega^{-1} \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{T}_2^{-1} \begin{bmatrix} R \cos(\phi + \beta_i(t)) \\ R \sin(\phi + \beta_i(t)) \\ -\frac{L}{2} \end{bmatrix}_{\hat{x} \hat{y} \hat{z}} \\
&= \begin{bmatrix} \left(x_C(t) - \frac{L}{2} \gamma_2(t) \right) \cos \omega t + R \cos(\omega t + \phi + \beta_i(t)) - \left(y_C(t) + \frac{L}{2} \gamma_1(t) \right) \sin \omega t \\ \left(x_C(t) - \frac{L}{2} \gamma_2(t) \right) \sin \omega t + R \sin(\omega t + \phi + \beta_i(t)) + \left(y_C(t) + \frac{L}{2} \gamma_1(t) \right) \cos \omega t \\ -\frac{L}{2} \end{bmatrix}_{XYZ} \quad (4-8)
\end{aligned}$$

為便於描述均質剛性轉子的旋轉角動量，我們利用平行且隨著轉子各主軸向旋轉的座標系 $O\hat{x} \hat{y} \hat{z}$ 為參考座標系。轉子的角速度在 $\hat{x} \hat{y} \hat{z}$ 的座標基底下可描述成

$$(\bar{\Phi})_{\hat{x}\hat{y}\hat{z}} = \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}_{\hat{x}\hat{y}\hat{z}} + \mathbf{T}_2 \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\hat{x}\hat{y}^*\hat{z}^*} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\gamma}_2(t) \\ 0 \end{bmatrix}_{\hat{x}\hat{y}\hat{z}} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_1(t) - \gamma_2(t)\omega \\ \dot{\gamma}_2(t) + \gamma_1(t)\omega \\ \omega + \dot{\gamma}_1(t)\gamma_2(t) \end{bmatrix}_{\hat{x}\hat{y}\hat{z}} \quad (4-9)$$

一般而言，探討迴轉運動動態平衡的系統，可忽略重力的影響。由上述討論結果，可寫出系統的總動能(T)為

$$T = \frac{1}{2} \bar{\Phi} \cdot \mathbf{H}_G + \frac{1}{2} m (\dot{\bar{\mathbf{r}}}_c \cdot \dot{\bar{\mathbf{r}}}_c) + \frac{1}{2} \left[m_L (\dot{\bar{\mathbf{r}}}_{GL} \cdot \dot{\bar{\mathbf{r}}}_{GL}) + m_R (\dot{\bar{\mathbf{r}}}_{GR} \cdot \dot{\bar{\mathbf{r}}}_{GR}) \right] + \frac{1}{2} m_b \sum_{i=1}^2 (\dot{\bar{\mathbf{r}}}_{BLi} \cdot \dot{\bar{\mathbf{r}}}_{BLi} + \dot{\bar{\mathbf{r}}}_{BRi} \cdot \dot{\bar{\mathbf{r}}}_{BRi}) \quad (4-10)$$

其中 \mathbf{H}_G 為均質轉子的角動量

$$\mathbf{H}_G = \begin{bmatrix} J_T & 0 & 0 \\ 0 & J_T & 0 \\ 0 & 0 & J_p \end{bmatrix} \bar{\Phi} \quad (4-11)$$

圓柱轉子的橫向慣性矩 $J_T = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} mL^2$ 、極慣性矩 $J_p = \frac{1}{2} mR^2$ 。系統的總動能 T 詳列於附錄二。

接著為瞭解轉子兩端線性支承對系統產生的總位能與 Rayleigh's dissipation function，我們需先求出轉子左、右兩端面中心相對於固定參考座標系的座標。令 $(\bar{\mathbf{r}}_{LC})_{XYZ}$ 及 $(\bar{\mathbf{r}}_{RC})_{XYZ}$ 分別代表左、右兩端面中心的位置向量，則

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{r}}_{LC})_{XYZ} &= (\bar{\mathbf{r}}_c)_{XYZ} + \mathbf{T}_\omega^{-1} \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{T}_2^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L/2 \end{bmatrix}_{\hat{x}\hat{y}\hat{z}} \\ &= \begin{bmatrix} \left(x_C(t) + \frac{L}{2} \gamma_2(t) \right) \cos \omega t - \left(y_C(t) - \frac{L}{2} \gamma_1(t) \right) \sin \omega t \\ \left(x_C(t) + \frac{L}{2} \gamma_2(t) \right) \sin \omega t + \left(y_C(t) - \frac{L}{2} \gamma_1(t) \right) \cos \omega t \\ \frac{L}{2} \end{bmatrix}_{XYZ} \end{aligned} \quad (4-12)$$

$$\begin{aligned}
(\bar{\mathbf{r}}_{RC})_{XYZ} &= (\bar{\mathbf{r}}_C)_{XYZ} + \mathbf{T}_\omega^{-1} \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{T}_2^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L/2 \end{bmatrix}_{\hat{x}\hat{y}\hat{z}} \\
&= \begin{bmatrix} \left(x_C(t) - \frac{L}{2}\gamma_2(t)\right)\cos\omega t - \left(y_C(t) + \frac{L}{2}\gamma_1(t)\right)\sin\omega t \\ \left(x_C(t) - \frac{L}{2}\gamma_2(t)\right)\sin\omega t + \left(y_C(t) + \frac{L}{2}\gamma_1(t)\right)\cos\omega t \\ -\frac{L}{2} \end{bmatrix}_{XYZ} \quad (4-13)
\end{aligned}$$

為了簡化方程式的描述，令 δ_{XL} 、 δ_{YL} 以及 δ_{XR} 、 δ_{YR} 分別代表轉子左、右兩端面中心相對於固定參考座標 X 與 Y 軸向上的位移量，由式(4-12)及式(4-13)可得

$$\delta_{XL} = \left(x_C(t) + \frac{L}{2}\gamma_2(t)\right)\cos\omega t - \left(y_C(t) - \frac{L}{2}\gamma_1(t)\right)\sin\omega t \quad (4-14)$$

$$\delta_{YL} = \left(x_C(t) + \frac{L}{2}\gamma_2(t)\right)\sin\omega t + \left(y_C(t) - \frac{L}{2}\gamma_1(t)\right)\cos\omega t \quad (4-15)$$

$$\delta_{XR} = \left(x_C(t) - \frac{L}{2}\gamma_2(t)\right)\cos\omega t - \left(y_C(t) + \frac{L}{2}\gamma_1(t)\right)\sin\omega t \quad (4-16)$$

$$\delta_{YR} = \left(x_C(t) - \frac{L}{2}\gamma_2(t)\right)\sin\omega t + \left(y_C(t) + \frac{L}{2}\gamma_1(t)\right)\cos\omega t \quad (4-17)$$

由此系統總位能 (V) 與 Rayleigh's dissipation function (F) 可分別表示為

$$V = \frac{1}{2}k(\delta_{XL}^2 + \delta_{YL}^2 + \delta_{XR}^2 + \delta_{YR}^2) = k \left[x_C^2(t) + y_C^2(t) + \left(\frac{L}{2}\right)^2 (\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t)) \right] \quad (4-18)$$

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{2}c \left[(\dot{\delta}_{XL})^2 + (\dot{\delta}_{YL})^2 + (\dot{\delta}_{XR})^2 + (\dot{\delta}_{YR})^2 \right] + \frac{1}{2}c_b R^2 \sum_{i=1}^2 [\dot{\alpha}_i^2(t) + \dot{\beta}_i^2(t)] \\
&= c \left\{ (\dot{x}_C(t) - \omega y_C(t))^2 + (\dot{y}_C(t) + \omega x_C(t))^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 [(\dot{\gamma}_1(t) - \omega \gamma_2(t))^2 + \right. \\
&\quad \left. (\dot{\gamma}_2(t) + \omega \gamma_1(t))^2] \right\} + \frac{1}{2}c_b R^2 (\dot{\alpha}_1^2(t) + \dot{\alpha}_2^2(t) + \dot{\beta}_1^2(t) + \dot{\beta}_2^2(t)) \quad (4-19)
\end{aligned}$$

藉由 Lagrange's equations

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (4-20)$$

可推得此系統的非線性運動方程式，其中廣義座標 q_k 為 $x_C(t)$ 、 $y_C(t)$ 、 $\gamma_1(t)$ 、 $\gamma_2(t)$ 、

$\alpha_i(t)$ 及 $\beta_i(t)$ ($i=1,2$)。為了便於討論，引入以下所列無因次化參數

$$\begin{aligned} x &= x_C / R, \quad y = y_C / R, \quad \Lambda_L = \varepsilon_L / R, \quad \Lambda_R = \varepsilon_R / R \\ \rho &= L / R, \quad c = M \zeta \omega_n, \quad c_b = 2m_b \zeta_b \omega_n, \quad \omega_n = \sqrt{2k / M} \\ \mu_b &= m_b / M, \quad \mu_{eL} = m_{eL} / M, \quad \mu_{eR} = m_{eR} / M, \quad \tau = \omega_n t \\ \Omega &= \omega / \omega_n, \quad J_1 = J_T / (M R^2), \quad J_3 = J_P / (M R^2) \end{aligned} \quad (4-21)$$

$M = m + m_{eL} + m_{eR} + 4m_b$ 為此系統的總質量。

並且令

$$\mathbf{q} = [x, \gamma_2, y, -\gamma_1, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2]^T \quad (4-22)$$

忽略小角位移 γ_1 與 γ_2 的三階項，經整理後可得矩陣形式的無因次運動方程式為

$$\mathbf{M}_{DR} \mathbf{q}'' + \mathbf{D}_{DR} \mathbf{q}' + \mathbf{g}_{DR} + \mathbf{f}_{DR} = \mathbf{0} \quad (4-23)$$

其中 ()' 表示對無因次時間參數 τ 的微分，而

$$\mathbf{M}_{DR} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{dr} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{LS} & \mathbf{B}_{RS} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{dr} & \mathbf{B}_{LC} & \mathbf{B}_{RC} \\ \mathbf{B}_{LS}^T & \mathbf{B}_{LC}^T & \mu_b \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{RS}^T & \mathbf{B}_{RC}^T & \mathbf{0} & \mu_b \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4-24)$$

$$\mathbf{D}_{DR} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{r1} & -2\Omega(\mathbf{M}_{dr} - \mathbf{D}_{r2}) & -2\Omega \mathbf{B}_{LC} & -2\Omega \mathbf{B}_{RC} \\ 2\Omega(\mathbf{M}_{dr} - \mathbf{D}_{r2}) & \mathbf{D}_{r1} & 2\Omega \mathbf{B}_{LS} & 2\Omega \mathbf{B}_{RS} \\ 2\Omega(\mathbf{B}_{LC}^T) & -2\Omega(\mathbf{B}_{LS}^T) & 2\zeta_b \mu_b \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ 2\Omega(\mathbf{B}_{RC}^T) & -2\Omega(\mathbf{B}_{RS}^T) & \mathbf{0} & 2\zeta_b \mu_b \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4-25)$$

$$\mathbf{g}_{DR} = [g_{dr1}, g_{dr2}, g_{dr3}, g_{dr4}, 0, 0, 0, 0]^T \quad (4-26)$$

$$\mathbf{f}_{DR} = [f_{dr1}, f_{dr2}, f_{dr3}, f_{dr4}, f_{dr5}, f_{dr6}, f_{dr7}, f_{dr8}]^T \quad (4-27)$$

式(4-24)中， \mathbf{M}_{DR} 與 \mathbf{D}_{DR} 的組成矩陣分別為

$$\mathbf{M}_{dr} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho}{2}(\mu_{eL} - \mu_{eR}) \\ \frac{\rho}{2}(\mu_{eL} - \mu_{eR}) & J_1 + \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 (4\mu_b + \mu_{eL} + \mu_{eR}) \end{bmatrix} \quad (4-28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{LS} &= -\mu_b \begin{bmatrix} \sin \alpha_1 & \sin \alpha_2 \\ \frac{\rho}{2} \sin \alpha_1 & \frac{\rho}{2} \sin \alpha_2 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{RS} = \mu_b \begin{bmatrix} -\sin(\phi + \beta_1) & -\sin(\phi + \beta_2) \\ \frac{\rho}{2} \sin(\phi + \beta_1) & \frac{\rho}{2} \sin(\phi + \beta_2) \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{LC} &= \mu_b \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 \\ \frac{\rho}{2} \cos \alpha_1 & \frac{\rho}{2} \cos \alpha_2 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{RC} = \mu_b \begin{bmatrix} \cos(\phi + \beta_1) & \cos(\phi + \beta_2) \\ -\frac{\rho}{2} \cos(\phi + \beta_1) & -\frac{\rho}{2} \cos(\phi + \beta_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-29)$$

以及

$$\mathbf{D}_{r1} = 2\zeta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{r2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{J_3}{2} \end{bmatrix} \quad (4-30)$$

另外，式(4-26)與式(4-27)中，向量 \mathbf{g}_R 與 \mathbf{f}_R 的各個元素分別為

$$g_{dr1} = -\mu_b \sum_{i=1}^2 \left[(\alpha'_i)^2 \cos \alpha_i + (\beta'_i)^2 \cos(\phi + \beta_i) \right] \quad (4-31)$$

$$g_{dr2} = -\frac{\rho}{2} \mu_b \sum_{i=1}^2 \left[(\alpha'_i)^2 \cos \alpha_i - (\beta'_i)^2 \cos(\phi + \beta_i) \right] \quad (4-32)$$

$$g_{dr3} = -\mu_b \sum_{i=1}^2 \left[(\alpha'_i)^2 \sin \alpha_i + (\beta'_i)^2 \sin(\phi + \beta_i) \right] \quad (4-33)$$

$$g_{dr4} = -\frac{\rho}{2} \mu_b \sum_{i=1}^2 \left[(\alpha'_i)^2 \sin \alpha_i - (\beta'_i)^2 \sin(\phi + \beta_i) \right] \quad (4-34)$$

$$\begin{aligned} f_{dr1} &= -(\Omega^2 - 1)x - 2\zeta \Omega y - \Omega^2 \left\{ \mu_b \sum_{i=1}^2 [\cos \alpha_i + \cos(\phi + \beta_i)] + \left(\frac{\rho}{2}\right) \gamma_2 + \Lambda_L \mu_{eL} - \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\rho}{2}\right) \gamma_2 - \Lambda_R \cos \phi \mu_{eR} \right\} \end{aligned} \quad (4-35)$$

$$\begin{aligned} f_{dr2} &= -\Omega^2 \gamma_2 \left[J_1 + \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 (4\mu_b + \mu_{eL} + \mu_{eR}) \right] - \frac{\rho}{2} \Omega^2 \left\{ \mu_b \sum_{i=1}^2 [\cos \alpha_i - \cos(\phi + \beta_i)] + \right. \\ &\quad \left. (x + \Lambda_L) \mu_{eL} - (x + \Lambda_R \cos \phi) \mu_{eR} \right\} + \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 (2\zeta \Omega \gamma_1 + \gamma_2) \end{aligned} \quad (4-36)$$

$$\begin{aligned} f_{dr3} &= -(\Omega^2 - 1)y + 2\zeta \Omega x - \Omega^2 \left\{ \mu_b \sum_{i=1}^2 [\sin \alpha_i + \sin(\phi + \beta_i)] - \frac{\rho}{2} \gamma_1 \mu_{eL} + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\rho}{2}\right) \gamma_1 + \Lambda_R \sin \phi \mu_{eR} \right\} \end{aligned} \quad (4-37)$$

$$\begin{aligned} f_{dr4} &= \Omega^2 \gamma_1 \left[J_1 + \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 (4\mu_b + \mu_{eL} + \mu_{eR}) \right] - \frac{\rho}{2} \Omega^2 \left\{ \mu_b \sum_{i=1}^2 [\sin \alpha_i - \sin(\phi + \beta_i)] + \right. \\ &\quad \left. y \mu_{eL} - (y + \Lambda_R \sin \phi) \mu_{eR} \right\} + \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 (2\zeta \Omega \gamma_2 - \gamma_1) \end{aligned} \quad (4-38)$$

$$f_{dr5} = -\Omega^2 \mu_b \left[\left(y - \frac{\rho}{2} \gamma_1 \right) \cos \alpha_1 - \left(x + \frac{\rho}{2} \gamma_2 \right) \sin \alpha_1 \right] \quad (4-39)$$

$$f_{dr6} = -\Omega^2 \mu_b \left[\left(y - \frac{\rho}{2} \gamma_1 \right) \cos \alpha_2 - \left(x + \frac{\rho}{2} \gamma_2 \right) \sin \alpha_2 \right] \quad (4-40)$$

$$f_{dr7} = -\Omega^2 \mu_b \left[\left(y + \frac{\rho}{2} \gamma_1 \right) \cos(\phi + \beta_1) - \left(x - \frac{\rho}{2} \gamma_2 \right) \sin(\phi + \beta_1) \right] \quad (4-41)$$

$$f_{dr8} = -\Omega^2 \mu_b \left[\left(y + \frac{\rho}{2} \gamma_1 \right) \cos(\phi + \beta_2) - \left(x - \frac{\rho}{2} \gamma_2 \right) \sin(\phi + \beta_2) \right] \quad (4-42)$$

4-2 三維制振系統的平衡位置

4-2-1 平衡解

對自主系統而言，當描述此系統的廣義座標不隨時間變化時，代表此系統達到平衡狀態。令 $\bar{\mathbf{q}} = [\bar{x} \quad \bar{\gamma}_2 \quad \bar{y} \quad -\bar{\gamma}_1 \quad \bar{\alpha}_1 \quad \bar{\alpha}_2 \quad \bar{\beta}_1 \quad \bar{\beta}_2]^T$ 代入式(4-23)中，令所有微分項為 0，得到平衡方程式 $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}$ 詳列如下

$$-(\Omega^2 - 1)\bar{x} - 2\zeta \Omega \bar{y} - \Omega^2 \left\{ \mu_b \sum_{i=1}^2 [\cos \bar{\alpha}_i + \cos(\phi + \bar{\beta}_i)] + \left(\frac{\rho}{2} \bar{\gamma}_2 + \Lambda_L \right) \mu_{eL} - \left(\frac{\rho}{2} \bar{\gamma}_2 - \Lambda_R \cos \phi \right) \mu_{eR} \right\} = 0 \quad (4-43)$$

$$-\Omega^2 \bar{\gamma}_2 \left[J_1 + \left(\frac{\rho}{2} \right)^2 (4\mu_b + \mu_{eL} + \mu_{eR}) \right] - \frac{\rho}{2} \Omega^2 \left\{ \mu_b \sum_{i=1}^2 [\cos \bar{\alpha}_i - \cos(\phi + \bar{\beta}_i)] + (\bar{x} + \Lambda_L) \mu_{eL} - (\bar{x} + \Lambda_R \cos \phi) \mu_{eR} \right\} + \left(\frac{\rho}{2} \right)^2 (2\zeta \Omega \bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2) = 0 \quad (4-44)$$

$$-(\Omega^2 - 1)\bar{y} + 2\zeta \Omega \bar{x} - \Omega^2 \left\{ \mu_b \sum_{i=1}^2 [\sin \bar{\alpha}_i + \sin(\phi + \bar{\beta}_i)] - \frac{\rho}{2} \bar{\gamma}_1 \mu_{eL} + \left(\frac{\rho}{2} \bar{\gamma}_1 + \Lambda_R \sin \phi \right) \mu_{eR} \right\} = 0 \quad (4-45)$$

$$\Omega^2 \bar{\gamma}_1 \left[J_1 + \left(\frac{\rho}{2} \right)^2 (4\mu_b + \mu_{eL} + \mu_{eR}) \right] - \frac{\rho}{2} \Omega^2 \left\{ \mu_b \sum_{i=1}^2 [\sin \bar{\alpha}_i - \sin(\phi + \bar{\beta}_i)] + \bar{y} \mu_{eL} - (\bar{y} + \Lambda_R \cos \phi) \mu_{eR} \right\} + \left(\frac{\rho}{2} \right)^2 (2\zeta \Omega \bar{\gamma}_2 - \bar{\gamma}_1) = 0 \quad (4-46)$$

$$-\Omega^2 \mu_b \left[\left(\bar{y} - \frac{\rho}{2} \bar{\gamma}_1 \right) \cos \bar{\alpha}_1 - \left(\bar{x} + \frac{\rho}{2} \bar{\gamma}_2 \right) \sin \bar{\alpha}_1 \right] = 0 \quad (4-47)$$

$$-\Omega^2 \mu_b \left[\left(\bar{y} - \frac{\rho}{2} \bar{\gamma}_1 \right) \cos \bar{\alpha}_2 - \left(\bar{x} + \frac{\rho}{2} \bar{\gamma}_2 \right) \sin \bar{\alpha}_2 \right] = 0 \quad (4-48)$$

$$-\Omega^2 \mu_b \left[\left(\bar{y} + \frac{\rho}{2} \bar{\gamma}_1 \right) \cos(\phi + \bar{\beta}_1) - \left(\bar{x} - \frac{\rho}{2} \bar{\gamma}_2 \right) \sin(\phi + \bar{\beta}_1) \right] = 0 \quad (4-49)$$

$$-\Omega^2 \mu_b \left[\left(\bar{y} + \frac{\rho}{2} \bar{\gamma}_1 \right) \cos(\phi + \bar{\beta}_2) - \left(\bar{x} - \frac{\rho}{2} \bar{\gamma}_2 \right) \sin(\phi + \bar{\beta}_2) \right] = 0 \quad (4-50)$$

由於忽略剛性長轉子以及轉子兩端面上的等價偏心不平衡量與自動平衡機構軌道內各滾珠於 Z 軸向上的運動，因此轉子於三維空間中的狀態可以轉子兩端面中心的位置來描述。令 $(\bar{r}_L, \bar{\theta}_L)$ 以及 $(\bar{r}_R, \bar{\theta}_R)$ 分別代表轉子左、右端面中心相對於 $O\bar{x}\bar{y}\bar{Z}$ 的極座標，如圖 4-9 所示；

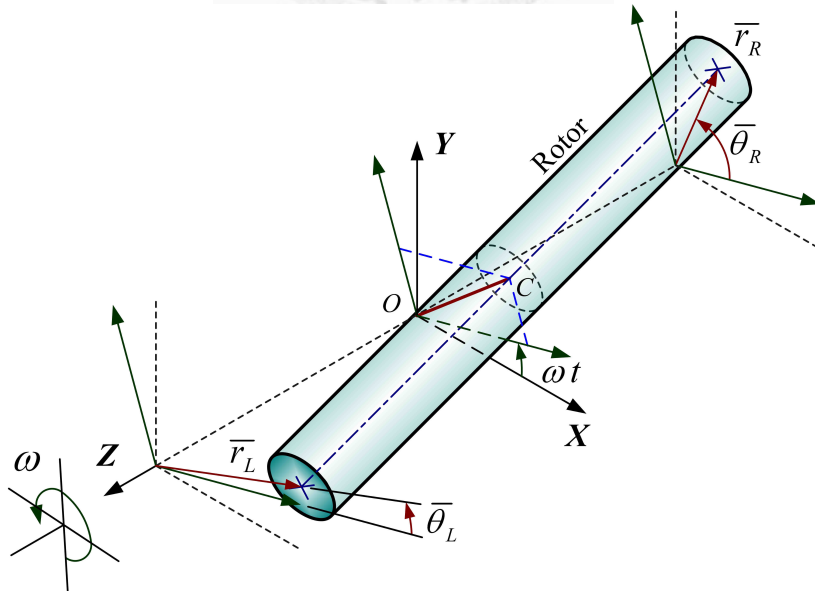


圖 4-9 以兩組平面極座標來描述轉子於三維空間中的狀態

其中，

$$\bar{r}_L \cos \bar{\theta}_L = \bar{x} + \frac{\rho}{2} \bar{\gamma}_2, \quad \bar{r}_L \sin \bar{\theta}_L = \bar{y} - \frac{\rho}{2} \bar{\gamma}_1 \quad (4-51)$$

$$\bar{r}_R \cos \bar{\theta}_R = \bar{x} - \frac{\rho}{2} \bar{\gamma}_2, \quad \bar{r}_R \sin \bar{\theta}_R = \bar{y} + \frac{\rho}{2} \bar{\gamma}_1 \quad (4-52)$$

將式(4-51)與(4-52)代入平衡方程式(4-43)~(4-50)式中，因為 $\mu_b > 0$ 且 $\Omega > 0$ ，經整

理可得

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{r}_L}{2} \left\{ \left[\Omega^2 - 1 + \Omega^2 (\mu_{eL} - \mu_{eR}) \right] \cos \bar{\theta}_L + 2\zeta \Omega \sin \bar{\theta}_L \right\} + \\ & \frac{\bar{r}_R}{2} \left\{ \left[\Omega^2 - 1 - \Omega^2 (\mu_{eL} - \mu_{eR}) \right] \cos \bar{\theta}_R + 2\zeta \Omega \sin \bar{\theta}_R \right\} + \\ & \Omega^2 \left[\sum_{i=1}^2 \left(\cos \bar{\alpha}_i + \cos(\phi + \bar{\beta}_i) \right) \mu_b + \Lambda_L \mu_{eL} + \Lambda_R \mu_{eR} \cos \phi \right] = 0 \end{aligned} \quad (4-53)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{r}_L}{4\rho} \left\{ \left[4\Omega^2 J_1 + \rho^2 (2\Omega^2 (2\mu_b + \mu_{eL}) - 1) \right] \cos \bar{\theta}_L + 2\zeta \Omega \rho^2 \sin \bar{\theta}_L \right\} - \\ & \frac{\bar{r}_R}{4\rho} \left\{ \left[4\Omega^2 J_1 + \rho^2 (2\Omega^2 (2\mu_b + \mu_{eR}) - 1) \right] \cos \bar{\theta}_R + 2\zeta \Omega \rho^2 \sin \bar{\theta}_R \right\} + \\ & \frac{\rho \Omega^2}{2} \left[\sum_{i=1}^2 \left(\cos \bar{\alpha}_i - \cos(\phi + \bar{\beta}_i) \right) \mu_b + \Lambda_L \mu_{eL} - \Lambda_R \mu_{eR} \cos \phi \right] = 0 \end{aligned} \quad (4-54)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{r}_L}{2} \left\{ - \left[\Omega^2 - 1 + \Omega^2 (\mu_{eL} - \mu_{eR}) \right] \sin \bar{\theta}_L + 2\zeta \Omega \cos \bar{\theta}_L \right\} + \\ & \frac{\bar{r}_R}{2} \left\{ - \left[\Omega^2 - 1 - \Omega^2 (\mu_{eL} - \mu_{eR}) \right] \sin \bar{\theta}_R + 2\zeta \Omega \sin \bar{\theta}_R \right\} - \\ & \Omega^2 \left[\sum_{i=1}^2 \left(\sin \bar{\alpha}_i + \sin(\phi + \bar{\beta}_i) \right) \mu_b + \Lambda_R \mu_{eR} \sin \phi \right] = 0 \end{aligned} \quad (4-55)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{r}_L}{4\rho} \left\{ - \left[4\Omega^2 J_1 + \rho^2 (2\Omega^2 (2\mu_b + \mu_{eL}) - 1) \right] \sin \bar{\theta}_L + 2\zeta \Omega \rho^2 \cos \bar{\theta}_L \right\} - \\ & \frac{\bar{r}_R}{4\rho} \left\{ - \left[4\Omega^2 J_1 + \rho^2 (2\Omega^2 (2\mu_b + \mu_{eR}) - 1) \right] \sin \bar{\theta}_R + 2\zeta \Omega \rho^2 \cos \bar{\theta}_R \right\} - \\ & \frac{\rho \Omega^2}{2} \left[\sum_{i=1}^2 \left(\sin \bar{\alpha}_i - \sin(\phi + \bar{\beta}_i) \right) \mu_b - \Lambda_R \mu_{eR} \sin \phi \right] = 0 \end{aligned} \quad (4-56)$$

$$\bar{r}_L \sin(\bar{\alpha}_i - \bar{\theta}_L) = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (4-57)$$

$$\bar{r}_R \sin(\phi + \bar{\beta}_i - \bar{\theta}_R) = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (4-58)$$

式(4-57)及(4-58)，描述滾珠相對於端面中心的平衡位置，此方程組的解可依 \bar{r}_L 與 \bar{r}_R 是否為0，區分為表4-2所列的十種可能解情形。其中 $\bar{r}_L = 0$ 且 $\bar{r}_R = 0$ 的解形式稱之為完全平衡解，而其餘的解情形則統稱為不完全平衡解，或稱之為動態不平衡解。由於此系統一般動態不平衡的公式解不易求得，因此我們只針對完全平衡解、靜態不平衡解以及力偶不平衡解討論。

表 4-2 轉子三維制振系統可能的解情形

	左端面	右端面
1	$\bar{r}_L = 0$	$\bar{r}_R = 0$
2	$\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = \bar{\theta}_L$	
3	$\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = \bar{\theta}_L + \pi$	
4	$\bar{\alpha}_1 = \bar{\theta}_L$ 、 $\bar{\alpha}_2 = \bar{\theta}_L + \pi$	
5	$\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = \bar{\theta}_L$	$\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = (\bar{\theta}_R - \phi)$
6	$\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = \bar{\theta}_L + \pi$	
7	$\bar{\alpha}_1 = \bar{\theta}_L$ 、 $\bar{\alpha}_2 = \bar{\theta}_L + \pi$	
8	$\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = \bar{\theta}_L + \pi$	$\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = (\bar{\theta}_R - \phi) + \pi$
9	$\bar{\alpha}_1 = \bar{\theta}_L$ 、 $\bar{\alpha}_2 = \bar{\theta}_L + \pi$	
10	$\bar{\alpha}_1 = \bar{\theta}_L$ 、 $\bar{\alpha}_2 = \bar{\theta}_L + \pi$	

4-2-2 完全平衡解

當 $\bar{r}_L = 0$ 且 $\bar{r}_R = 0$ ($\bar{x} = \bar{y} = 0$ 、 $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = 0$)，此時轉子沒有任何偏心振動，稱之為完全平衡解。令 $\bar{r}_L = 0$ 及 $\bar{r}_R = 0$ ，並引入參數 η_L 與 η_R ，分別描述轉子左、右端面上單一顆滾珠最大制振平衡量與偏心不平衡量的比值，其定義如下

$$\eta_L = (m_b R) / (m_L \varepsilon_L) = \mu_b / (\mu_{eL} \Lambda_L) \quad (4-59)$$

$$\eta_R = (m_b R) / (m_R \varepsilon_R) = \mu_b / (\mu_{eR} \Lambda_R) \quad (4-60)$$

則式(4-53)~(4-56)可化簡為

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \bar{\alpha}_1 + \cos \bar{\alpha}_2 + \cos(\phi + \bar{\beta}_1) + \cos(\phi + \bar{\beta}_2) + \left(\frac{1}{\eta_L} + \frac{\cos \phi}{\eta_R} \right) = 0 \\ \cos \bar{\alpha}_1 + \cos \bar{\alpha}_2 - \cos(\phi + \bar{\beta}_1) - \cos(\phi + \bar{\beta}_2) + \left(\frac{1}{\eta_L} - \frac{\cos \phi}{\eta_R} \right) = 0 \\ \sin \bar{\alpha}_1 + \sin \bar{\alpha}_2 + \sin(\phi + \bar{\beta}_1) + \sin(\phi + \bar{\beta}_2) + \frac{\sin \phi}{\eta_R} = 0 \\ \sin \bar{\alpha}_1 + \sin \bar{\alpha}_2 - \sin(\phi + \bar{\beta}_1) - \sin(\phi + \bar{\beta}_2) - \frac{\sin \phi}{\eta_R} = 0 \end{array} \right. \quad (4-61)$$

解得轉子三維制振系統的完全平衡解為

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = \bar{y} = \bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = 0 \\ \bar{\alpha}_1 = \cos^{-1} \left(\frac{-1}{2\eta_L} \right) \\ \bar{\alpha}_2 = -\bar{\alpha}_1 \\ \bar{\beta}_1 = \cos^{-1} \left(\frac{-1}{2\eta_R} \right) \\ \bar{\beta}_2 = -\bar{\beta}_1 \end{array} \right. \quad (4-62)$$

其特性討論如下：

(i). 存在完全平衡的條件：

由式(4-62)可知 $\eta_L \geq \frac{1}{2}$ 且 $\eta_R \geq \frac{1}{2}$ ，意即轉子系統欲達完全平衡，則兩端自動平衡機構所能提供的最大制振平衡量，必須大於等於個別端面的偏心不平衡量。

(ii). 滾珠平衡位置：

- η_L 與 η_R (式(4-59)及式(4-60)) 的值必然為正，由式(4-62)可知 $\cos \bar{\alpha}_i < 0$ 且 $\cos \bar{\beta}_i < 0$ ，即滾珠相對於偏心不平衡量的相角 $\bar{\alpha}_i$ 與 $\bar{\beta}_i$ ，均位於第二或第三象限。換言之，滾珠平衡於個別端面上偏心不平衡量的異側，且同一端面上的兩滾珠相對於偏心質量的位置，分別往兩側張開等大的幅角。
- 當 $\eta_L = \frac{1}{2}$ (或 $\eta_R = \frac{1}{2}$) 時， $\bar{\alpha}_1 = \pi$ 、 $\bar{\alpha}_2 = -\pi$ (或 $\bar{\beta}_1 = \pi$ 、 $\bar{\beta}_2 = -\pi$)。此時兩滾珠緊靠一起，且相對於轉子端面中心，平衡於偏心不平衡量的徑向對邊端點處。

- 隨著 η 值增加，兩滾珠間平衡夾角跟著增加，但始終平衡於偏心不平衡量的異側。此意謂著，滾珠平衡裝置藉由兩滾珠張開幅角所提供的分量和，在其最大制振範圍內，完美地平衡了轉子偏心所造成的不平衡量。

接著以數值方法驗證先前的結果，令 $\eta_L = 1$ 、 $\eta_R = 2$ 經數值積分式(4-23)得到系統運動歷程圖，如圖 4-10 與圖 4-11，其中 r 為轉子質心振動的振幅

$$r = \sqrt{x_C^2 + y_C^2} \quad (4-63)$$

γ_1 及 γ_2 代表偏斜角。虛線與實線分別表示裝置自動平衡機構前（Without ABS）及裝置自動平衡機構後（With ABS）轉子的響應情形。數值模擬結果顯示，加入自動平衡機構後，轉子質心的振動量和轉子偏轉角都趨近於0。換言之，自動平衡機構能有效抑制轉子系統的振動。轉子系統左、右兩端面滾珠的歷時圖與穩態定位情形如圖 4-12，顯示在穩態完全平衡時，兩端面上的滾珠張開適當的角度，

$$\alpha_1 = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{2\eta_L}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right) = 0.667\pi ; \alpha_2 = -\alpha_1 = -0.667\pi$$

$$\beta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{2\eta_R}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{4}\right) = 0.58\pi ; \beta_2 = -\beta_1 = -0.58\pi$$

恰好抵消系統的偏心率。

Transient Response (Central Displacements)

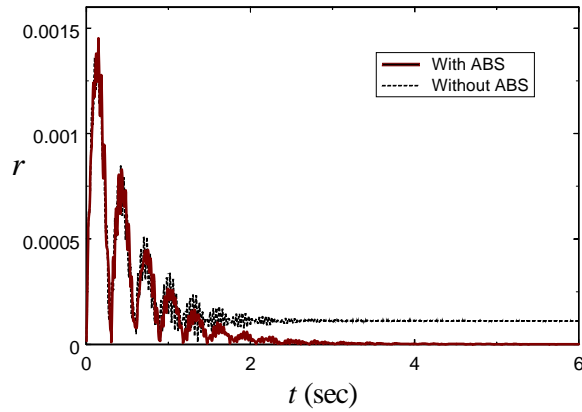


圖 4-10 自動平衡機構對轉子質心位置的制振

Transient Response (Inclined Angles of the Rotor)

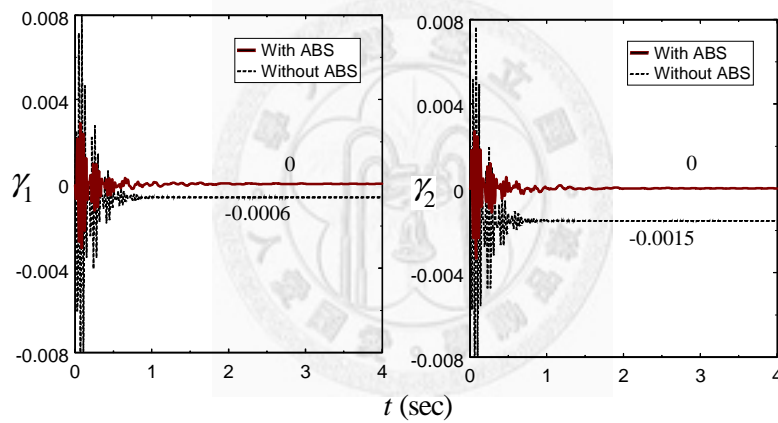


圖 4-11 自動平衡機構對轉子角度偏斜的制振

Transient Response (Positions of Balls)

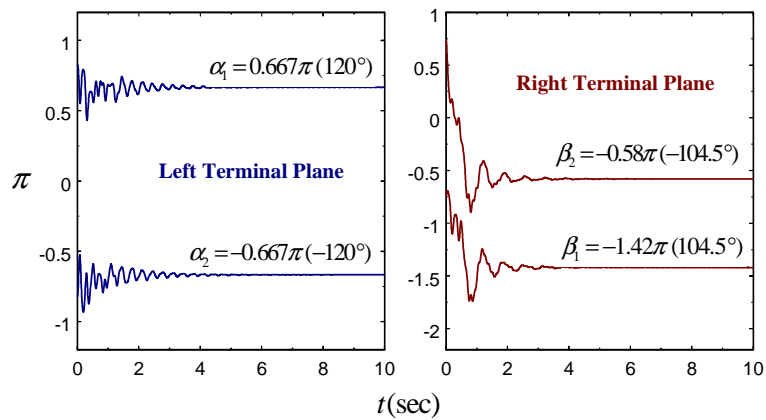


圖 4-12 滾珠的暫態行為與穩態定位情形

由 4-1-1 節對轉子的偏心描述可知，一般轉子的動態不平衡可由靜態不平衡與力偶不平衡所合成。前述各節中的推論指出，轉子兩端面上的滾珠型自動平衡機構在其最大制振範圍內，能有效抑制此三維轉子系統的一般動態不平衡，並求得完全平衡解。本節將接續討論當自動平衡機構的最大制振量小於轉子不平衡量時，前述系統的動態行為。因此，將分別針對三維制振系統在靜態不平衡與力偶不平衡的條件下進行討論。

4-2-3 三維制振系統的靜態不平衡(static unbalance)解

首先考慮靜態不平衡的情形，此時轉子左、右端面上的等價不平衡量具有相同的大小與相角，亦即 $m_L = m_R$ 、 $\varepsilon_L = \varepsilon_R$ 及 $\phi = 0$ 。接著考慮轉子系統呈靜態不平衡 ($\bar{r}_L = \bar{r}_R = \bar{r}$ 、 $\bar{\theta}_L = \bar{\theta}_R = \bar{\theta}$)，並以極座標形式描述之。則其平衡方程式成為

$$\bar{r} \left[(\Omega^2 - 1) \cos \bar{\theta} + 2\zeta \Omega \sin \bar{\theta} \right] + \Omega^2 \left[\sum_{i=1}^2 (\cos \bar{\alpha}_i + \cos \bar{\beta}_i) \mu_b + 2\Lambda \mu_e \right] = 0 \quad (4-64)$$

$$\frac{\rho \Omega^2}{2} \sum_{i=1}^2 (\cos \bar{\alpha}_i - \cos \bar{\beta}_i) \mu_b = 0 \quad (4-65)$$

$$\bar{r} \left[(\Omega^2 - 1) \sin \bar{\theta} - 2\zeta \Omega \cos \bar{\theta} \right] + \Omega^2 \sum_{i=1}^2 (\sin \bar{\alpha}_i + \sin \bar{\beta}_i) \mu_b = 0 \quad (4-66)$$

$$\frac{\rho \Omega^2}{2} \sum_{i=1}^2 (\sin \bar{\alpha}_i - \sin \bar{\beta}_i) \mu_b = 0 \quad (4-67)$$

$$\bar{r} \sin(\bar{\alpha}_i - \bar{\theta}) = 0 \quad (4-68)$$

$$\bar{r} \sin(\bar{\beta}_i - \bar{\theta}) = 0 \quad (4-69)$$

由式(4-68)與(4-69)可知，當 $\bar{r} \neq 0$ 時具有三種解型態； $\begin{cases} \bar{\alpha}_1 = \bar{\beta}_1 = \bar{\theta} \\ \bar{\alpha}_2 = \bar{\beta}_2 = \bar{\theta} + \pi \end{cases}$ 、

$\bar{\alpha}_i = \bar{\beta}_i = \bar{\theta}$ 以及 $\bar{\alpha}_i = \bar{\beta}_i = \bar{\theta} + \pi$ 。分別討論如下：

1. $\bar{r} \neq 0$ 、 $\begin{cases} \bar{\alpha}_1 = \bar{\beta}_1 = \bar{\theta} \\ \bar{\alpha}_2 = \bar{\beta}_2 = \bar{\theta} + \pi \end{cases}$

將 $\bar{\alpha}_1 = \bar{\beta}_1 = \bar{\theta}$ 及 $\bar{\alpha}_2 = \bar{\beta}_2 = \bar{\theta} + \pi$ 代入式(4-64)與(4-66)中，可得

$$\begin{cases} \bar{r} [p_T \cos \bar{\theta} + q_T \sin \bar{\theta}] + 2\Omega^2 \Lambda \mu_e = 0 \\ \bar{r} [p_T \sin \bar{\theta} - q_T \cos \bar{\theta}] = 0 \end{cases} \quad (4-70)$$

其中 p_T 與 q_T 同於二維制振系統的定義式(2-19)，此時滾珠的作用僅增加了系統的總質量，於平衡方程式中不存在滾珠激振或制振的項，亦即滾珠於各端面上彼此平衡。(4-70)式與一般轉子靜態不平衡結果相同(詳於附錄三)，其平衡解為

$$\bar{r}_{SU} = \frac{2\Omega^2 \Lambda \mu_e \sqrt{p_T^2 + q_T^2}}{p_T^2 + q_T^2}, \quad \bar{\theta}_{SU} = \tan^{-1} \frac{q_T}{p_T} \quad (4-71)$$

下標 SU 代表靜態不平衡(Static Unbalance)時的解

2. $\bar{r} \neq 0$ 、 $\bar{\alpha}_i = \bar{\beta}_i = \bar{\theta}$

將 $\bar{\alpha}_i = \bar{\beta}_i = \bar{\theta}$ 代入(4-64)與(4-66)式中，可得

$$\begin{cases} \bar{r} (p_T \cos \bar{\theta} + q_T \sin \bar{\theta}) + 2\Omega^2 (2\mu_b \cos \bar{\theta} + \Lambda \mu_e) = 0 \\ \bar{r} (p_T \sin \bar{\theta} - q_T \cos \bar{\theta}) + 4\Omega^2 \mu_b \sin \bar{\theta} = 0 \end{cases} \quad (4-72)$$

此時兩端面上的滾珠位於同相角，且各端面上的滾珠均緊靠在一起。若將緊靠的兩滾珠視為兩倍質量的單一滾珠代換之，則(4-72)式經整理後與 2-2-2 節的二維制振系統所推論的方程式(2-16)相同。其平衡解為

$$\bar{r}_{SU1}^{\pm} = \frac{(2\mu_b)\Omega^2 \left[-2\eta p_T \pm \sqrt{p_T^2 + q_T^2 - 4\eta^2 q_T^2} \right]}{\eta (p_T^2 + q_T^2)} \quad (4-73)$$

$$\bar{\theta}_{SU1}^{\pm} = \tan^{-1} \frac{q_T \bar{r}_{SU1}^{\pm}}{p_T \bar{r}_{SU1}^{\pm} + 4\Omega^2 \mu_b} \quad (4-74)$$

3. $\bar{r} \neq 0$ 、 $\bar{\alpha}_i = \bar{\beta}_i = \bar{\theta} + \pi$

將 $\bar{\alpha}_i = \bar{\beta}_i = \bar{\theta} + \pi$ 代入(4-53)與(4-66)式中，可得

$$\begin{cases} \bar{r}(p_T \cos \bar{\theta} + q_T \sin \bar{\theta}) - 2\Omega^2(2\mu_b \cos \bar{\theta} - \Lambda\mu_e) = 0 \\ \bar{r}(p_T \sin \bar{\theta} - q_T \cos \bar{\theta}) - 4\Omega^2\mu_b \sin \bar{\theta} = 0 \end{cases} \quad (4-75)$$

此時各端面上的滾珠亦緊靠在一起。同理可整理式(4-75)與二維制振系統所推論的方程式(2-24)相同。其平衡解為

$$\bar{r}_{SU2}^{\pm} = \frac{4\Omega^2\mu_b \left[\eta p_T + \sqrt{p_T^2 + q_T^2 - \eta^2 q_T^2} \right]}{\eta(p_T^2 + q_T^2)} \quad (4-76)$$

$$\bar{\theta}_{SU2}^{\pm} = \tan^{-1} \frac{q_T \bar{r}_{SU2}^{\pm}}{p_T \bar{r}_{SU2}^{\pm} - 4\Omega^2\mu_b} \quad (4-77)$$

由前述的討論可知，三維制振系統於靜態不平衡時可簡化為二維系統，兩者具有相同的平衡方程與平衡解。於 2-3 節中已解析了二維制振系統平衡解的穩定性，證明了當自動平衡機構的最大制振量小於轉子不平衡量($\eta < \frac{1}{2}$)時， \bar{r}_{S1}^- 與 \bar{r}_{S2}^- 不存在正實數解，並且 \bar{r}_{S2}^+ 為非穩定解。換言之， \bar{r}_{S1}^+ 為唯一存在的穩定平衡解。因此，對於三維制振系統而言，當 $\eta < \frac{1}{2}$ 時， \bar{r}_{SU1}^- 與 \bar{r}_{SU2}^- 同樣不存在正實數解。圖 4-13 左圖中顯示，將 \bar{r}_{SU1}^+ 與 \bar{r}_{SU2}^+ 的理論值分別以實線和虛線表示，而圈點則代表三維制振系統的統御方程經數值積分後呈現的穩態平衡振幅大小，可看出其中 \bar{r}_{SU1}^+ 為唯一存在的穩定平衡解。右圖為 Ω 與滾珠穩態平衡定位的相角關係；當系統轉速低於靜態不平衡振動的臨界轉速時，滾珠定位於與轉子不平衡量同側，但當系統轉速高於此臨界轉速時，滾珠則定位於轉子不平衡量的異側，其能有效降低轉子靜態不平衡所引發的振動。三維制振系統靜態不平衡於次臨界轉速與過臨界轉速時的穩態振幅與滾珠定位，分別示意如圖 4-14(a)、(b)。

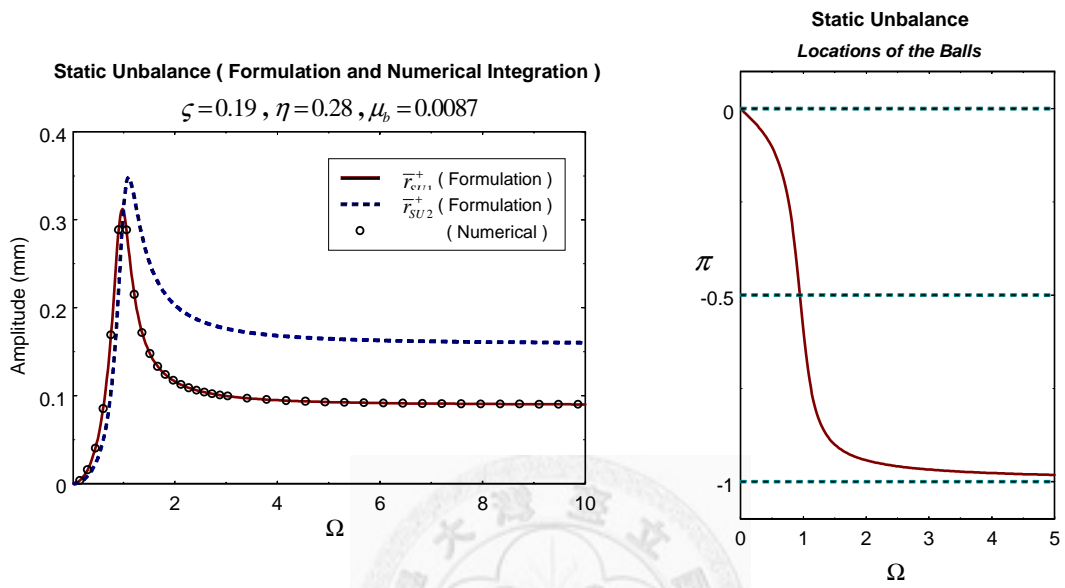


圖 4-13 三維制振系統於靜態不平衡時的穩態振幅與滾珠穩態定位情形

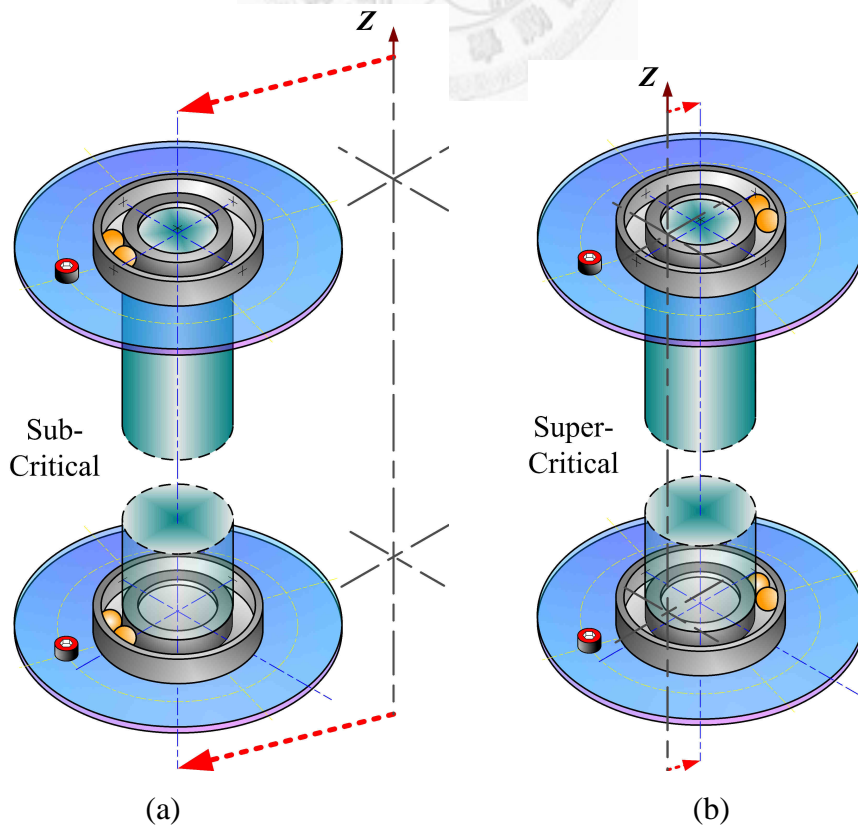


圖 4-14 三維制振系統於(a)次臨界轉速與(b)過臨界轉速時，靜態不平衡示意

4-2-4 三維制振系統的力偶不平衡(couple unbalance)解

首先，將轉子力偶不平衡的偏心率，以離質心等距的兩端面上的不平衡量描述。此時轉子左、右端面上的不平衡量具有相同的大小與 180° 相角差，亦即

$m_L = m_R$ 、 $\varepsilon_L = \varepsilon_R$ 及 $\phi = \pi$ 。接著考慮轉子系統呈力偶不平衡 ($\bar{\theta}_L = \bar{\theta}$ 、 $\bar{\theta}_R = \bar{\theta} + \pi$ 以及 $\bar{r}_L = \bar{r}_R = \bar{r}$)。為簡化後續方程式的描述，令

$$p_c = 4\Omega^2 J_1 - \rho^2 [1 - 2\Omega^2 (2\mu_b + \mu_e)] \quad (4-78)$$

$$q_c = 2\zeta \Omega \rho^2 \quad (4-79)$$

則平衡方程式成為

$$\Omega^2 \sum_{i=1}^2 (\cos \bar{\alpha}_i - \cos \bar{\beta}_i) \mu_b = 0 \quad (4-80)$$

$$\bar{r} (p_c \cos \bar{\theta} + q_c \sin \bar{\theta}) + \rho^2 \Omega^2 \left[\sum_{i=1}^2 (\cos \bar{\alpha}_i + \cos \bar{\beta}_i) \mu_b + 2\Lambda \mu_e \right] = 0 \quad (4-81)$$

$$\Omega^2 \sum_{i=1}^2 (\sin \bar{\alpha}_i - \sin \bar{\beta}_i) \mu_b = 0 \quad (4-82)$$

$$\bar{r} (p_c \sin \bar{\theta} - q_c \cos \bar{\theta}) + \rho^2 \Omega^2 \sum_{i=1}^2 (\sin \bar{\alpha}_i + \sin \bar{\beta}_i) \mu_b = 0 \quad (4-83)$$

$$\bar{r} \sin(\bar{\alpha}_i - \bar{\theta}) = 0 \quad (4-84)$$

$$\bar{r} \sin(\bar{\beta}_i - \bar{\theta}) = 0 \quad (4-85)$$

由式(4-84)與(4-85)可知，力偶不平衡具有同樣三種解型態，討論如下

$$1. \bar{r} \neq 0, \begin{cases} \bar{\alpha}_1 = \bar{\beta}_1 = \bar{\theta} \\ \bar{\alpha}_2 = \bar{\beta}_2 = \bar{\theta} + \pi \end{cases}$$

將 $\bar{\alpha}_1 = \bar{\beta}_1 = \bar{\theta}$ 及 $\bar{\alpha}_2 = \bar{\beta}_2 = \bar{\theta} + \pi$ 代入(4-81)與(4-83)式中，可得

$$\begin{cases} \bar{r} (p_c \cos \bar{\theta} + q_c \sin \bar{\theta}) + 2\Omega^2 \rho^2 \Lambda \mu_e = 0 \\ \bar{r} (p_c \sin \bar{\theta} - q_c \cos \bar{\theta}) = 0 \end{cases} \quad (4-86)$$

式(4-86)與一般轉子力偶不平衡結果相同(詳於附錄三)，其平衡解為

$$\bar{r}_{CU} = \frac{2\Omega^2 \rho^2 \Lambda \mu_e \sqrt{p_c^2 + q_c^2}}{p_c^2 + q_c^2} \quad , \quad \bar{\theta}_{CU} = \tan^{-1} \frac{q_c}{p_c} \quad (4-87)$$

下標 CU 代表力偶不平衡(Couple Unbalance)時的解

$$2. \quad \bar{r} \neq 0 \quad , \quad \bar{\alpha}_i = \bar{\beta}_i = \bar{\theta}$$

將 $\bar{\alpha}_i = \bar{\beta}_i = \bar{\theta}$ 代入(4-81)與(4-83)式中，可得

$$\begin{cases} \bar{r} (p_c \cos \bar{\theta} + q_c \sin \bar{\theta}) + 2\Omega^2 \rho^2 (2\mu_b \cos \bar{\theta} + \Lambda \mu_e) = 0 \\ \bar{r} (p_c \sin \bar{\theta} - q_c \cos \bar{\theta}) + 4\Omega^2 \rho^2 \mu_b \sin \bar{\theta} = 0 \end{cases} \quad (4-88)$$

此時兩端面上的滾珠位於同相角，且各端面上的滾珠均緊靠在一起。可解得其平衡解為

$$\bar{r}_{CU1}^{\pm} = \frac{2\Omega^2 \rho^2 \mu_b (-2\eta p_c \pm \sqrt{p_c^2 + q_c^2 - 4\eta^2 q_c^2})}{\eta (p_c^2 + q_c^2)} \quad (4-89)$$

$$\bar{\theta}_{CU1}^{\pm} = \tan^{-1} \frac{q_c \bar{r}_{CU1}^{\pm}}{p_c \bar{r}_{CU1}^{\pm} + 4\Omega^2 \rho^2 \mu_b} \quad (4-90)$$

$$3. \quad \bar{r} \neq 0 \quad , \quad \bar{\alpha}_i = \bar{\beta}_i = \bar{\theta} + \pi$$

將 $\bar{\alpha}_i = \bar{\beta}_i = \bar{\theta} + \pi$ 代入(4-81)與(4-83)式中，可得

$$\begin{cases} \bar{r} [p_c \cos \bar{\theta} + q_c \sin \bar{\theta}] - 2\Omega^2 \rho^2 (2\mu_b \cos \bar{\theta} - \Lambda \mu_e) = 0 \\ \bar{r} [p_c \sin \bar{\theta} - q_c \cos \bar{\theta}] - 4\Omega^2 \rho^2 \mu_b \sin \bar{\theta} = 0 \end{cases} \quad (4-91)$$

各端面上的滾珠亦位於同相角且緊靠在一起。其平衡解為

$$\bar{r}_{CU2}^{\pm} = \frac{2\Omega^2 \rho^2 \mu_b [2\eta p_c \pm \sqrt{p_c^2 + q_c^2 - 4\eta^2 q_c^2}]}{\eta (p_c^2 + q_c^2)} \quad (4-92)$$

$$\bar{\theta}_{CU2}^{\pm} = \tan^{-1} \frac{q_c \bar{r}_{CU2}^{\pm}}{p_c \bar{r}_{CU2}^{\pm} - 4\Omega^2 \rho^2 \mu_b} \quad (4-93)$$

當 $\eta < \frac{1}{2}$ 時，由(4-89)及(4-92)可知 \bar{r}_{CU1}^- 與 \bar{r}_{CU2}^- 不存在正實數解。將 \bar{r}_{CU1}^+ 與 \bar{r}_{CU2}^+ 的理論值分別以實線和虛線表示於圖 4-15 左圖中，而圈點則代表數值積分的結果，可看出 \bar{r}_{CU1}^+ 為唯一存在的穩定平衡解。右圖為 Ω 與滾珠穩態平衡定位的相角關係；當系統轉速低於力偶不平衡振動的臨界轉速時，滾珠定位於與轉子不平衡量同側，但當系統轉速高於此臨界轉速時，滾珠則定位至轉子不平衡量的異側，同樣能有效抑制力偶不平衡轉子的穩態振幅。圖 4-16(a)、(b)分別為此三維制振系統於次臨界轉速與過臨界轉速時，力偶不平衡的穩態振幅與滾珠定位示意。

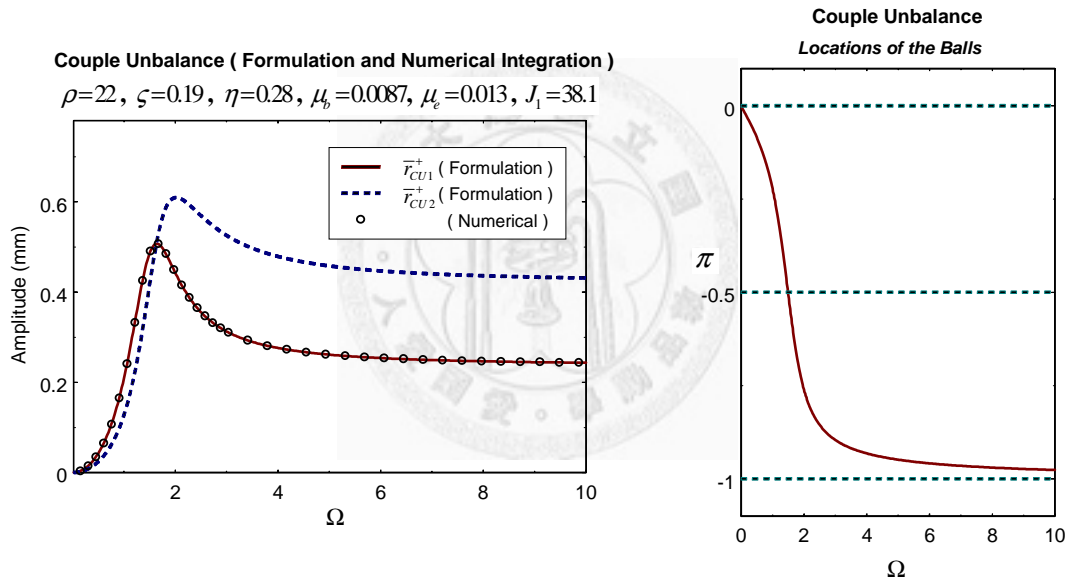


圖 4-15 三維制振系統於力偶不平衡時的穩態振幅與滾珠穩態定位情形

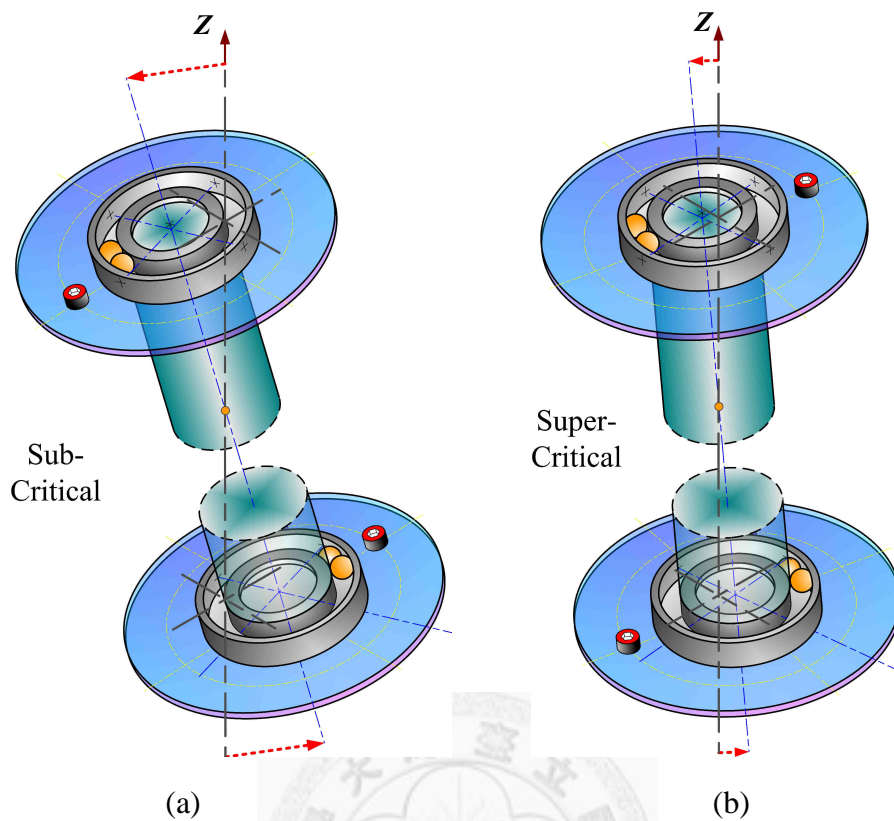


圖 4-16 三維制振系統於(a)次臨界轉速與(b)過臨界轉速時，力偶不平衡示意

4-3 三維制振系統完全平衡解的穩定性分析

當滾珠型自動平衡機構的制振量大於轉子系統的固有不平衡量時，在適當的系統參數條件下，各端面上的兩滾珠將定位至個別等價不平衡量的對邊，並張開適量幅角以有效抑制轉子的三維偏心振動。然而，若系統參數選用不佳，則自動平衡機構將無法使轉子系統獲致完全平衡的穩定定位。以系統參數 $\mu_b = 0.04$ 、 $\rho = 100$ 、 $\phi = \frac{\pi}{6}$ 、 $\eta_L = 1$ 以及 $\eta_R = 1.5$ 為例，在轉速 $\Omega = 3.2$ 、 $\zeta = 0.12$ 時轉子振動幅度 r_{Av} ($r_{Av} = \sqrt{\bar{r}_L^2 + \bar{r}_R^2}$) 的歷時圖如圖 4-17 實線所示，在這個狀態下，轉子振動趨近於 0，換言之，完全平衡位置為穩定。相反地，若降低 ζ 到 $\zeta = 0.06$ ，轉子振動響應如虛線所示，此時完全平衡位置為不穩定。由此可知，系統參數的設計與選用將直接影響完全平衡解的穩定性。

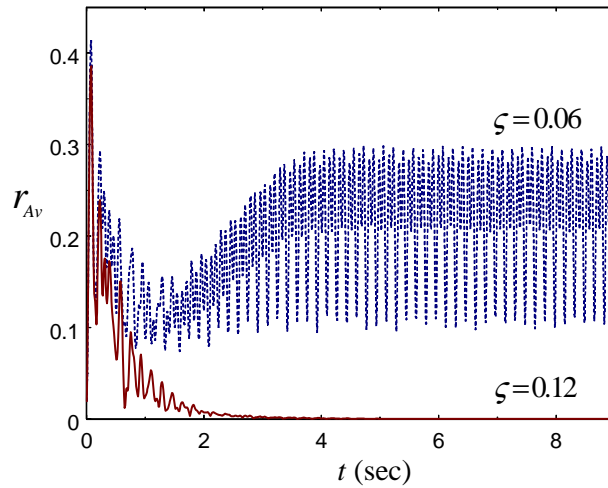


圖 4-17 ζ 對完全平衡解穩定性的影響

前例顯示，自動平衡機構要能發揮功效必須慎選系統參數，使得完全平衡位置為穩定。依據 Routh-Hurwitz Criterion，藉由特徵方程式的係數項可判讀平衡位置的穩定性。利用這個方法，我們針對三維制振系統的完全平衡解以數值方式進行穩定區域探討。圖 4-18 為系統支承阻尼比 ζ 與轉速 Ω 所構成的參數平面上的穩定區域，圖中實線、虛線與中心線分別代表滾珠軌道阻尼比 $\zeta_b = 0.05$ 、 $\zeta_b = 0.1$ 以及 $\zeta_b = 0.2$ 時穩定區域的邊界。結果顯示，三維制振系統完全平衡解的穩定範圍，隨滾珠軌道阻尼增加而增大。

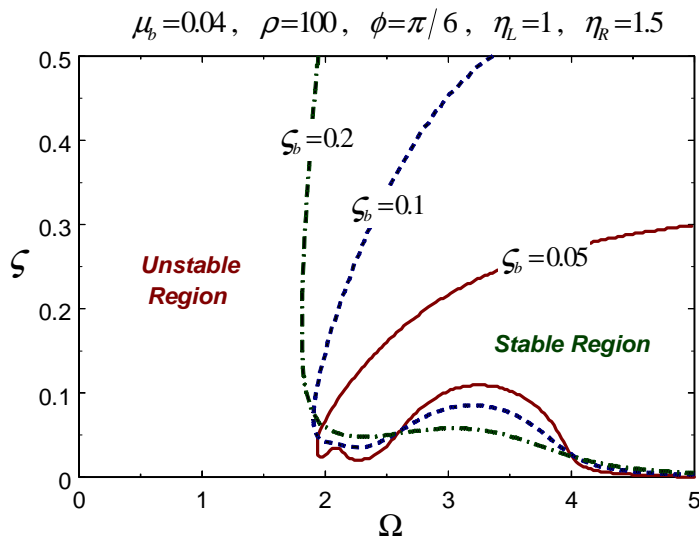


圖 4-18 系統支承阻尼比 ζ 與轉速比 Ω 平面的穩定區間

圖 4-19 與圖 4-20 分別為滾珠軌道阻尼比 ζ_b 與轉速 Ω 所構成的參數平面上，在不同支承阻尼條件下的穩定邊界，圖 4-19 的 $\zeta = 0.01 \sim 0.04$ ，而圖 4-20 的 $\zeta = 0.05 \sim 0.2$ 。結果顯示，當支承阻尼比 $\zeta < 0.05$ 時，系統的穩定區域隨著 ζ 的降低，明顯地縮減；但當 $\zeta > 0.06$ 後，穩定區域大小的改變則漸趨和緩。

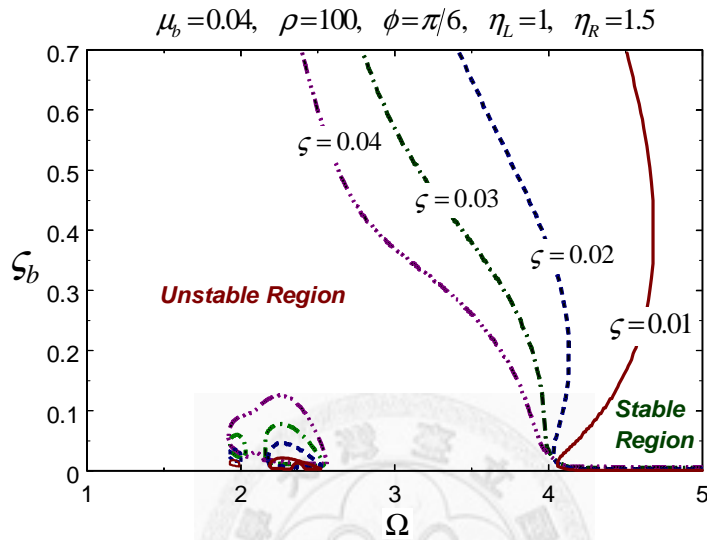


圖 4-19 滾珠軌道阻尼比 ζ_b 與轉速比 Ω 平面的穩定區間 ($\zeta = 0.01 \sim 0.04$)

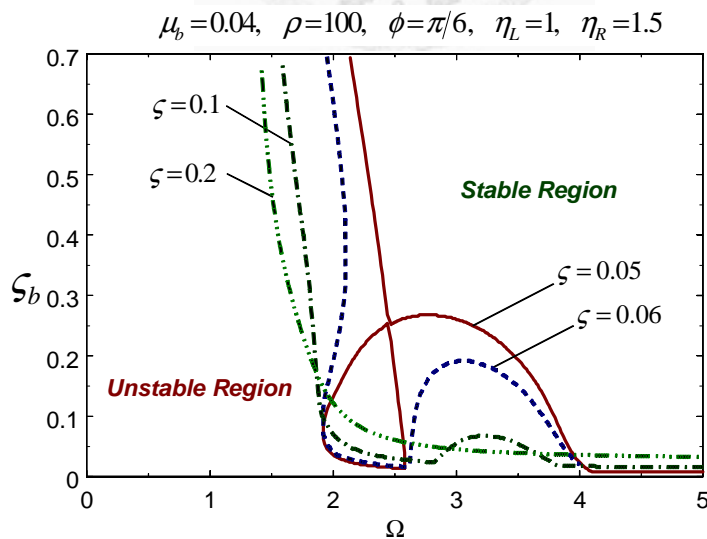


圖 4-20 滾珠軌道阻尼比 ζ_b 與轉速比 Ω 平面的穩定區間 ($\zeta = 0.05 \sim 0.2$)

另外，由圖 4-19 可看出在所設定的參數條件下，當 ζ 與 ζ_b 都不大時，隨著轉

速比的增加，完全平衡解會出現不穩定-穩定-不穩定-穩定交錯出現的情形。為驗證此結果，在各穩定與不穩定區段內藉由數值積分結果觀測其時間響應。當 $\zeta = 0.04$ 時 $\Omega - \zeta_b$ 平面上的穩定區域如圖 4-21 所示。當 $\zeta_b = 0.066$ 時， $P_1(\Omega = 1.5)$ 及 $P_3(\Omega = 3.0)$ 位於不穩定區域，而 $P_2(\Omega = 2.3)$ 及 $P_4(\Omega = 4.5)$ 則位於穩定區域。這四個參數點在相同的初始條件下，系統的振動歷程如圖 4-22。結果證實 P_2 與 P_4 時完全平衡位置為穩定，而 P_1 與 P_3 時則否。

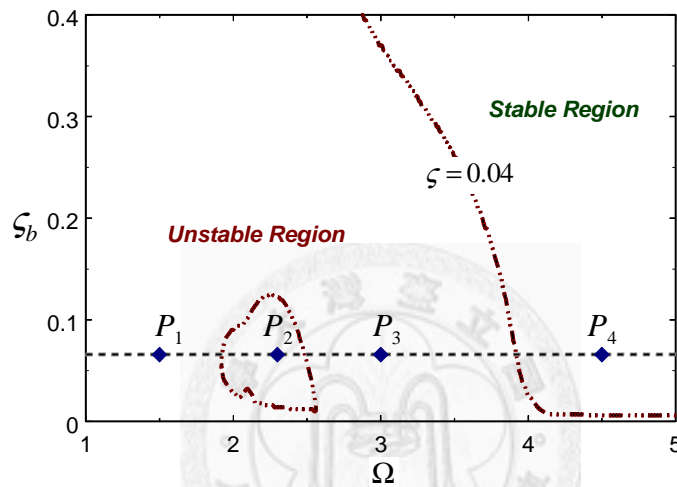


圖 4-21 $\zeta_b - \Omega$ 平面的穩定與不穩定區段

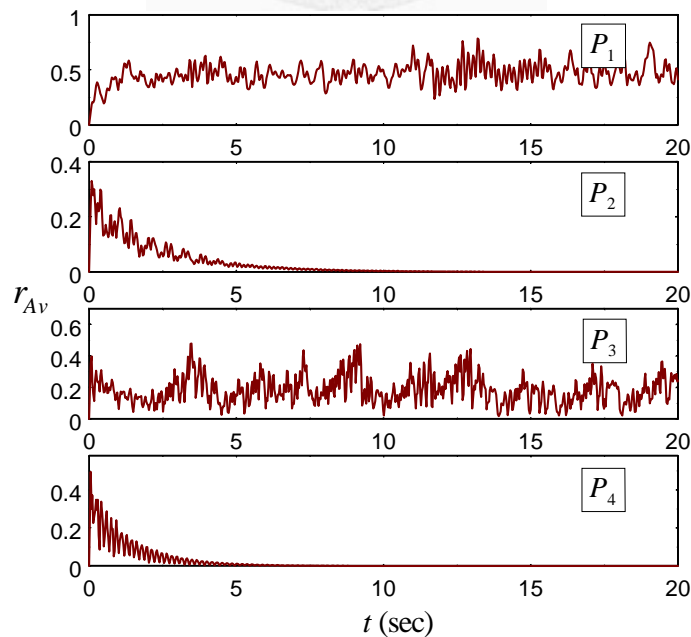


圖 4-22 P_1 、 P_2 、 P_3 及 P_4 的數值積分結果

一般而言，轉子系統的偏心率會隨著長時間運轉磨耗等因素而改變，因此自動平衡機構的制振量與不平衡量的比值 η 便會隨之調整，然而只要 η 仍大於0.5，系統就可能呈現完全平衡狀態。由圖4-23， η 與轉速比 Ω 所構成的參數平面的穩定區域可以得知，當 $0.5 < \eta < 2.5$ 時，穩定區域隨 η 的改變有明顯的變化，而且必須在較高的系統工作轉速下，完全平衡解才能位於穩定區域內。當 $\eta > 2.5$ 時，穩定區域隨 η 的改變變得相當有限。整體而言只要系統工作轉速夠高， $\eta > 0.5$ 均能落於穩定區域內。

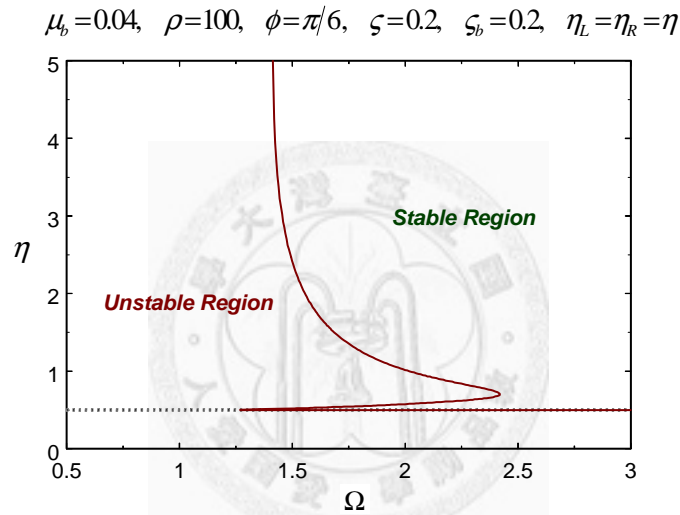


圖 4-23 η 與轉速比 Ω 所構成的參數平面的穩定區域

第五章 三維偏心剛性轉子系統制振之實驗驗證

5-1 實驗機台設計

5-1-1 實驗機台的理論模型

由第四章的討論可知，兩端面裝置滾珠型自動平衡機構的偏心轉子系統，於適當參數條件下可有效抑制轉子的三維振動。為實際了解配置滾珠型自動平衡機構的偏心轉子系統的動態特性與制振行為，設計三維制振的轉子自動平衡實驗機台。參考圖 5-1，機台主要由轉子、滾珠型自動平衡裝置、可調整偏心量的碟片、軸承(座)、馬達以及支承彈簧等所組成。

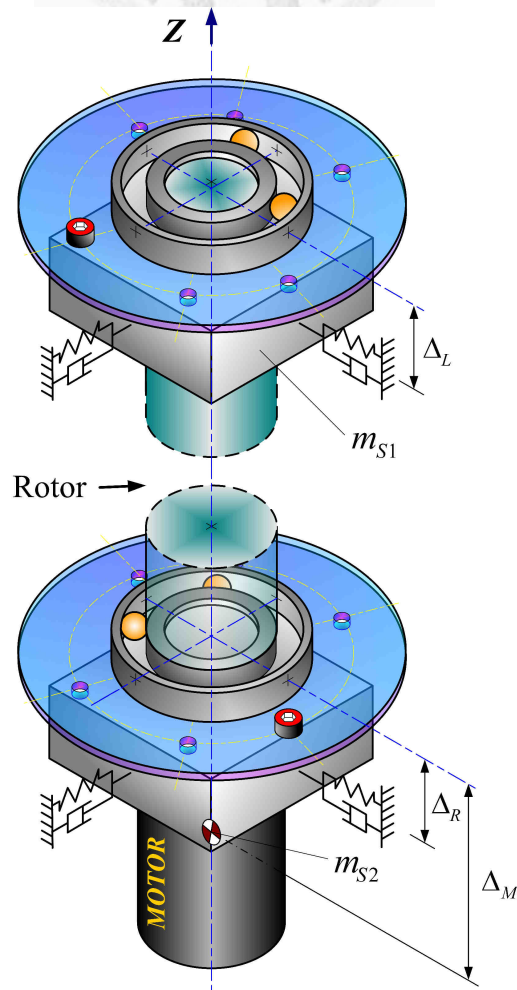


圖 5-1 三維制振轉子自動平衡實驗機台示意圖

實驗機台的定子支承座和馬達，會使得機台的行為和第四章所建立的均勻長轉子模型有所不同。為了建立更貼近實驗機台的理論架構，需於第四章的系統模型中加入兩端等效定子的效應。上端的等效定子包含軸承、軸承座以及支承彈簧的固定機件，其整體質量以 m_{S1} 表示，並假設其質心與上端支承同平面，位於轉子的上端面中心下方相距 Δ_L 處。而下端的等效定子除包含前述上端等效定子的構件外，另需考慮馬達的質量與尺寸。參考圖 5-1，假設下端支承與轉子下端面中心相距 Δ_R ，下端面等效定子的總質量為 m_{S2} ，其質心位於轉子軸線上且與轉子下端面中心相距 Δ_M 值。

和 4-1-2 節中藉由理論模型所建構的自動平衡機構-偏心轉子系統相比，機台兩端等效定子的質量與運動會導致額外的動能，並且須修正系統的位能和 Rayleigh's dissipation function。接著依據 4-1-3 節推導自動平衡機構-偏心轉子系統統御方程相同的程序，同時考慮兩端等效定子的效應，代入 Lagrange's equations 中求得修正後的統御方程式。

同樣令 XYZ 代表以靜止時轉子質心為原點的固定座標系（ Z 軸指向上端面）， $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ 代表隨著轉子同步旋轉（與轉子各主軸方向平行）的旋轉座標系。轉子上、下端支承中心與下端等效定子質心，相對於固定座標系的位置向量 $(\vec{r}_{SL})_{XYZ}$ 、 $(\vec{r}_{SR})_{XYZ}$ 及 $(\vec{r}_M)_{XYZ}$ ，可分別描述為

$$\begin{aligned}
 (\vec{r}_{SL})_{XYZ} &= (\vec{r}_C)_{XYZ} + T_\omega^{-1} T_1^{-1} T_2^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (L-2\Delta_L)/2 \end{bmatrix}_{\hat{x}\hat{y}\hat{z}} \\
 &= \begin{bmatrix} \left(x_C(t) + \frac{L-2\Delta_L}{2} \gamma_2(t) \right) \cos \omega t - \left(y_C(t) - \frac{L-2\Delta_L}{2} \gamma_1(t) \right) \sin \omega t \\ \left(x_C(t) + \frac{L-2\Delta_L}{2} \gamma_2(t) \right) \sin \omega t + \left(y_C(t) - \frac{L-2\Delta_L}{2} \gamma_1(t) \right) \cos \omega t \\ \frac{L-2\Delta_L}{2} \end{bmatrix}_{XYZ} \quad (5-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{\mathbf{r}}_{SR})_{XYZ} &= (\bar{\mathbf{r}}_C)_{XYZ} + \mathbf{T}_\omega^{-1} \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{T}_2^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(L+2\Delta_R)/2 \end{bmatrix}_{\hat{x}\hat{y}\hat{z}} \\
&= \begin{bmatrix} \left(x_C(t) - \frac{L+2\Delta_R}{2} \gamma_2(t)\right) \cos \omega t - \left(y_C(t) + \frac{L+2\Delta_R}{2} \gamma_1(t)\right) \sin \omega t \\ \left(x_C(t) - \frac{L+2\Delta_R}{2} \gamma_2(t)\right) \sin \omega t + \left(y_C(t) + \frac{L+2\Delta_R}{2} \gamma_1(t)\right) \cos \omega t \\ -\frac{L+2\Delta_R}{2} \end{bmatrix}_{XYZ} \quad (5-2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{\mathbf{r}}_M)_{XYZ} &= (\bar{\mathbf{r}}_C)_{XYZ} + \mathbf{T}_\omega^{-1} \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{T}_2^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(L+2\Delta_M)/2 \end{bmatrix}_{\hat{x}\hat{y}\hat{z}} \\
&= \begin{bmatrix} \left(x_C(t) - \frac{L+2\Delta_M}{2} \gamma_2(t)\right) \cos \omega t - \left(y_C(t) + \frac{L+2\Delta_M}{2} \gamma_1(t)\right) \sin \omega t \\ \left(x_C(t) - \frac{L+2\Delta_M}{2} \gamma_2(t)\right) \sin \omega t + \left(y_C(t) + \frac{L+2\Delta_M}{2} \gamma_1(t)\right) \cos \omega t \\ -\frac{L+2\Delta_M}{2} \end{bmatrix}_{XYZ} \quad (5-3)
\end{aligned}$$

其中 $(\bar{\mathbf{r}}_C)_{XYZ}$ 為轉子質心在固定座標系下的位置向量，同式(4-4)的定義。兩端等效定子所產生的額外動能為 $\frac{1}{2} \left[m_{S1} (\dot{\bar{\mathbf{r}}}_{SL} \cdot \dot{\bar{\mathbf{r}}}_{SL}) + m_{S2} (\dot{\bar{\mathbf{r}}}_M \cdot \dot{\bar{\mathbf{r}}}_M) \right]$ ，而系統支承彈簧的彈性位能函數則需改寫成

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2} k \left[\left(x_C(t) + \frac{L-2\Delta_L}{2} \gamma_2(t) \right)^2 + \left(y_C(t) - \frac{L-2\Delta_L}{2} \gamma_1(t) \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. \left(x_C(t) - \frac{L+2\Delta_R}{2} \gamma_2(t) \right)^2 + \left(y_C(t) + \frac{L+2\Delta_R}{2} \gamma_1(t) \right)^2 \right] \quad (5-4)
\end{aligned}$$

此外，支承阻尼的 Rayleigh's dissipation function 也需改寫為 $\frac{1}{2} c (\dot{\bar{\mathbf{r}}}_{SL} \cdot \dot{\bar{\mathbf{r}}}_{SL} + \dot{\bar{\mathbf{r}}}_{SR} \cdot \dot{\bar{\mathbf{r}}}_{SR})$ 。將這些修正項代入 Lagrange's equations 後可得機台的統御方程式。

接著導入新增參數的無因次量

$$\mu_{S1} = \frac{m_{S1}}{M}, \quad \mu_{S2} = \frac{m_{S2}}{M}, \quad \delta_L = \frac{\Delta_L}{R}, \quad \delta_R = \frac{\Delta_R}{R}, \quad \delta_M = \frac{\Delta_M}{R} \quad (5-5)$$

其中修正總質量 $M = m + 4m_b + m_{eL} + m_{eR} + m_{S1} + m_{S2}$ 。可以得到實驗機台矩陣形式的無因次運動方程式

$$\mathbf{M}_{Ex} \mathbf{X}'' + \mathbf{D}_{Ex} \mathbf{X}' + \mathbf{g}_{Ex} + \mathbf{f}_{Ex} = \mathbf{0} \quad (5-6)$$

其中，

$$\mathbf{M}_{Ex} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_e & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{LS} & \mathbf{B}_{RS} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_e & \mathbf{B}_{LC} & \mathbf{B}_{RC} \\ \mathbf{B}_{LS}^T & \mathbf{B}_{LC}^T & \mu_b \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{RS}^T & \mathbf{B}_{RC}^T & \mathbf{0} & \mu_b \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

$$\mathbf{D}_{Ex} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_e & -2\Omega(\mathbf{M}_e - \mathbf{D}_{r2}) & -2\Omega \mathbf{B}_{LC} & -2\Omega \mathbf{B}_{RC} \\ 2\Omega(\mathbf{M}_e - \mathbf{D}_{r2}) & \mathbf{D}_e & 2\Omega \mathbf{B}_{LS} & 2\Omega \mathbf{B}_{RS} \\ 2\Omega(\mathbf{B}_{LC}^T) & -2\Omega(\mathbf{B}_{LS}^T) & 2\zeta_b \mu_b \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ 2\Omega(\mathbf{B}_{RC}^T) & -2\Omega(\mathbf{B}_{RS}^T) & \mathbf{0} & 2\zeta_b \mu_b \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (5-8)$$

$$\mathbf{f}_{Ex} = [f_{e1}, f_{e2}, f_{e3}, f_{e4}, f_{dr5}, f_{dr6}, f_{dr7}, f_{dr8}]^T \quad (5-9)$$

為便於簡化表示式，定義兩個分別與質量一次矩與質量二次矩相關的函數

$$\Pi_1 = \frac{\rho}{2}(\mu_{eL} - \mu_{eR}) + \left(\frac{\rho}{2} - \delta_L\right) \mu_{S1} - \left(\frac{\rho}{2} + \delta_M\right) \mu_{S2} \quad (5-10)$$

$$\Pi_2 = J_1 + \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 (4\mu_b + \mu_{eL} + \mu_{eR}) + \left(\frac{\rho}{2} - \delta_L\right)^2 \mu_{S1} + \left(\frac{\rho}{2} + \delta_M\right)^2 \mu_{S2} \quad (5-11)$$

則 \mathbf{M}_{Ex} 與 \mathbf{D}_{Ex} 組成矩陣中的 \mathbf{M}_e 與 \mathbf{D}_e 可表示為

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} 1 & \Pi_1 \\ \Pi_1 & \Pi_2 \end{bmatrix} \quad (5-12)$$

$$\mathbf{D}_e = \zeta \begin{bmatrix} 2 & -(\delta_L + \delta_R) \\ -(\delta_L + \delta_R) & \left(\frac{\rho}{2} - \delta_L\right)^2 + \left(\frac{\rho}{2} + \delta_R\right)^2 \end{bmatrix} \quad (5-13)$$

另外，向量 \mathbf{f}_{Ex} 的各個元素可分別表示為

$$f_{e1} = -(\Omega^2 - 1)x - 2\zeta\Omega y - \Omega^2 \left\{ \mu_b \sum_{i=1}^2 [\cos \alpha_i + \cos(\phi + \beta_i)] + \Pi_1 \gamma_2 + \Lambda_L \mu_{eL} + \Lambda_R \mu_{eR} \cos \phi \right\} - \frac{1}{2}(\delta_L + \delta_R)(2\zeta\Omega\gamma_1 + \gamma_2) \quad (5-14)$$

$$f_{e2} = -\Omega^2 \Pi_2 \gamma_2 - \frac{\rho}{2} \Omega^2 \left\{ \mu_b \sum_{i=1}^2 [\cos \alpha_i - \cos(\phi + \beta_i)] + \Lambda_L \mu_{eL} - \Lambda_R \mu_{eR} \cos \phi \right\} - \Omega^2 \Pi_1 x + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho}{2} - \delta_L \right)^2 + \left(\frac{\rho}{2} + \delta_R \right)^2 \right] (2\zeta\Omega\gamma_1 + \gamma_2) + \frac{1}{2}(\delta_L + \delta_R)(2\zeta\Omega y - x) \quad (5-15)$$

$$f_{e3} = 2\zeta\Omega x - (\Omega^2 - 1)y - \Omega^2 \left\{ \mu_b \sum_{i=1}^2 [\sin \alpha_i + \sin(\phi + \beta_i)] - \Pi_1 \gamma_1 + \Lambda_R \mu_{eR} \sin \phi \right\} + \frac{1}{2}(\delta_L + \delta_R)(\gamma_1 - 2\zeta\Omega\gamma_2) \quad (5-16)$$

$$f_{e4} = \Omega^2 \gamma_1 \Pi_2 - \frac{\rho}{2} \Omega^2 \left\{ \mu_b \sum_{i=1}^2 [\sin \alpha_i - \sin(\phi + \beta_i)] - \Lambda_R \mu_{eR} \sin \phi \right\} - \Omega^2 \Pi_1 y + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho}{2} - \delta_L \right)^2 + \left(\frac{\rho}{2} + \delta_R \right)^2 \right] (2\zeta\Omega\gamma_2 - \gamma_1) - \frac{1}{2}(\delta_L + \delta_R)(2\zeta\Omega x + y) \quad (5-17)$$

其餘參數均與 4-1-3 節的定義相同。

裝置於偏心轉子兩端面的自動平衡機構並非完全獨立運作，為能更清楚分析與說明自動平衡機構對偏心轉子系統三維制振的行為，故考慮僅於偏心轉子單一端面裝置自動平衡機構的系統。因此另外推導僅於上端面裝置自動平衡機構的機台的統御方程式，將結果列於附錄四中，以便於和實驗量測數據結果比對。

5-1-2 支承彈簧的等效彈性模數

由於此動態實驗的等向支承需同時能承載轉子自重，因此採用 L 型平板簧片。為了便於簧片材料的選取與尺寸的設計，必需瞭解 L 型平板簧片等效彈性模數和簧片材料以及尺寸間的關係式。

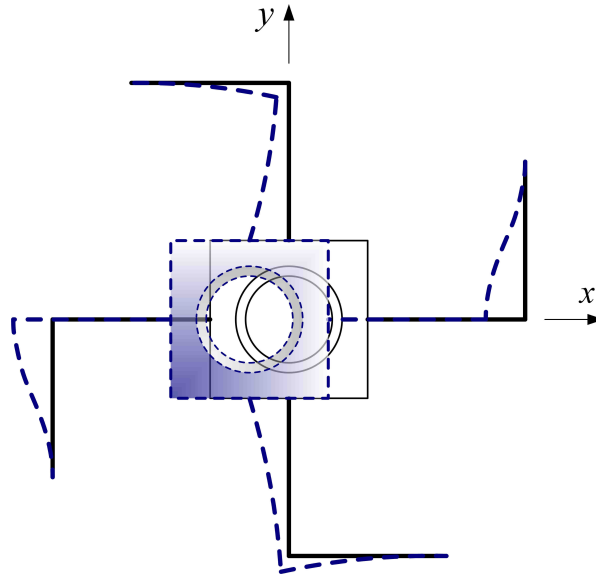


圖 5-2 定子及 L 型支承簧片變形的示意圖

圖 5-2 所示為軸承座在 x 軸方向平移運動時連接簧片變形的示意圖，此時垂直和平行兩組簧片的變形分別如圖 5-3 (a) 及圖 5-3 (b)。在支承彈簧微小變形量的條件下，藉由考慮兩種 L 型簧片的受力型式，計算彈性樑受力 P 與變形 u 的關係式，可以求得實驗系統支承的等效彈性模數。假設選用簧片材質的彈性模數為 E 、L 型的各邊長為 l 且斷面慣性矩為 I 。圖 5-3 (a) 所示垂直向支承簧片受力與變形的關係式可寫為

$$u = \left(\frac{Pl^2}{EI} \right) l + \frac{Pl^3}{3EI} \quad (5-18)$$

對應的等效彈性模數 k_{s1} 為，

$$k_{s1} = \frac{Ebh^3}{16l^3} \quad (5-19)$$

另一方面，圖 5-3 (b) 所示平行向支承簧片受力與變形的關係式可表示成

$$u = \frac{Pl^3}{12EI} \quad (5-20)$$

對應的等效彈性模數 k_{s2} 為

$$k_{s2} = \frac{Ebh^3}{l^3} \quad (5-21)$$

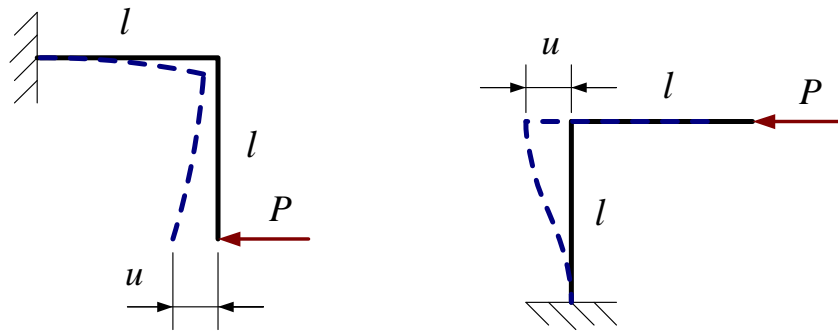


圖 5-3 (a) 連接簧片與位移方向垂直 圖 5-3 (b) 連接簧片與位移方向平行

由此可得同一端面上所有 L 型支承簧片作用下的等效彈性模數為

$$k_x = k_y = k = 2(k_{s1} + k_{s2}) = \frac{17Ebh^3}{8l^3} \quad (5-22)$$

此關係式可作為彈簧材料選用與 L 型支承簧片尺寸設計的計算依據。

5-1-3 實驗機台的參數與臨界轉速設計

關於動態實驗機台的設計，首先需考量實驗操作轉速的範圍與系統共振的效應。由前一章的理論分析可知，滾珠型自動平衡機構必須在高於臨界轉速（轉子系統的第一個共振頻率）下才可能達到完全平衡。此外，由完全平衡位置的穩定區域和系統參數的關係，設定實驗機台的最高操作轉速為系統臨界轉速的五倍，使這個轉速範圍能包含各個重要的動態特性區間，以利於實驗觀察與討論。本實驗選用的直流伺服馬達（Maxon 250247 263349）於無負載時的建議操作轉速上限為 9660 rpm（馬達的額定最大輸出功率 20 W）。在本實驗中，為了簡化機台的機構，避免驅動裝置所產生的複雜動態效應，將馬達連接於轉子端面下方，直接驅動轉子。此外為了避免偏心轉子系統的動態不平衡負載對馬達輸出扭矩的影響，設定 2400rpm 為實驗系統的最高操作轉速。因此實驗機台的臨界轉速應小於 480rpm。

依據 5-1-1 節提出的理論模型，設計實驗機台的各部分構件，設計圖詳於附錄五。圖 5-4 為此三維制振的轉子自動平衡實驗機台，而表 5-1 則列出此實驗機台的主要參數。

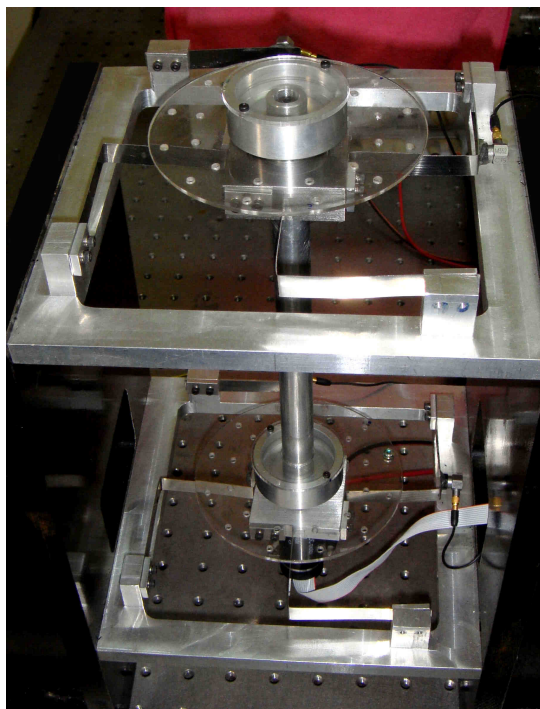


圖 5-4 三維制振的轉子自動平衡實驗機台

由量測結果得知系統總質量(含轉子、碟片、軌道及上、下端定子)為 735 g。為使系統的第一個自然頻率接近但小於 480 rpm，經計算後選用不銹鋼為簧片材料，其彈性模數 $E=18.5 \times 10^3 \text{ kgf/mm}^2 \approx 181 \text{ GPa}$ 。由(5-22)式並參考一般材料規格，設計簧片寬度 $b=10 \text{ mm}$ 、厚度 $h=0.3 \text{ mm}$ 以及 L 型的各邊長 $l=50 \text{ mm}$ 。藉此計算出彈性支承的等效彈性模數 $k=830.8 \text{ N/m}$ ，因而可推估得此實驗系統的第一個自然頻率應為 454 rpm，第二個自然頻率為 642 rpm。

表 5-1 實驗機台的主要參數

	名稱	參數值	說明
1	轉子質量(m)	272 g	含軌道及碟片質量
2	轉子長度(L)	216 mm	
3	轉子半徑(R)	8 mm	軌道內徑與轉子半徑相同
4	滾珠質量(m_b)	4.09 g (直徑 10 mm)	忽略滾珠半徑計算所得的 滾珠等效質量 7.16 g
5	偏心質量(m_L 、 m_R)	$m_1=1.37$ g $m_2=3.57$ g	以螺釘、螺帽及墊圈鎖固於 碟片螺紋孔位置
6	偏心距離(ε_L 、 ε_R)	36 mm、48 mm	螺紋孔中心位置的半徑值
7	上端定子質量(m_{S1})	247 g	包含軸承、軸承座(鋼質配 重)以及固定機件
8	上端支承與上端面的 偏距(Δ_L)	26 mm	上端定子質心與上端支承 同高度
9	下端定子質量(m_{S2})	216 g	包含軸承、軸承座、馬達以 及固定機件
10	下端支承與下端面的 偏距(Δ_R)	29 mm	
11	下端定子質心與端 面的偏距(Δ_M)	45 mm	

5-2 實驗設備與裝置

於防振平台上架設三維制振的轉子自動平衡實驗機台與量測設備如圖 5-5，實驗裝置的規格如表 5-2。

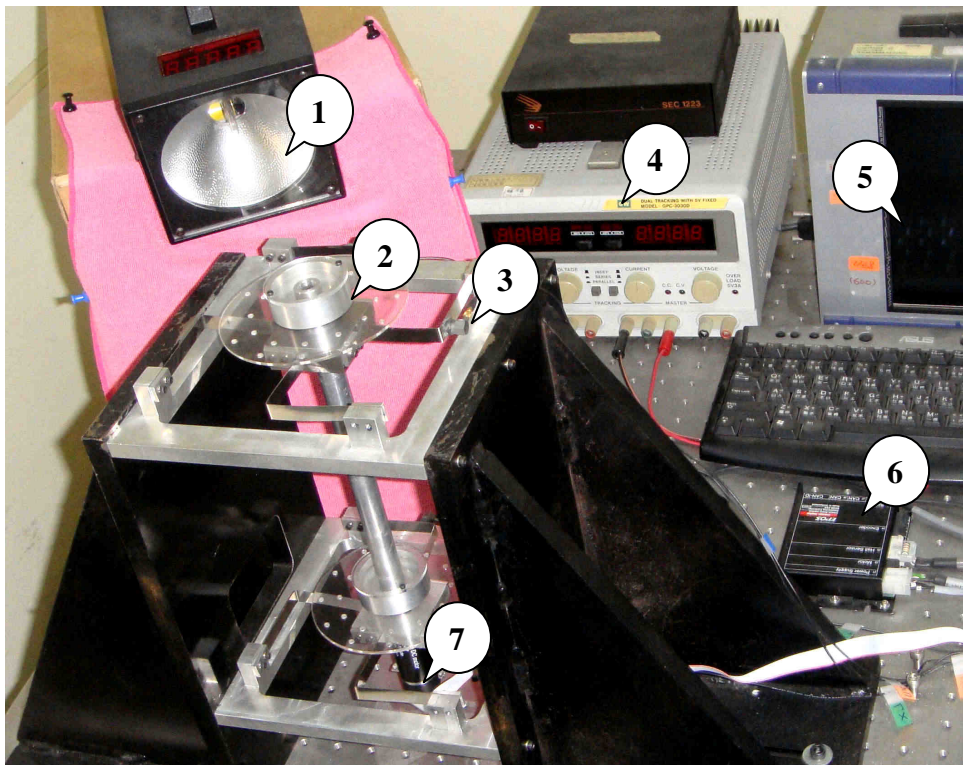


圖 5-5 轉子平衡實驗機台與量測設備

轉子以兩軸承安置於裝有彈性支承的上、下承架間，並於轉子上、下兩端面分別架設滾珠型自動平衡機構與可調整偏心質量的碟片。電源供應器配合直流伺服馬達為此實驗系統的迴轉動力源，透過譯碼器 (Encoder) 取得馬達轉速資料後傳輸至馬達控制器，並利用驅動軟體控制轉速。最後藉由加速規配合訊號擷取設備來量測並紀錄轉子上、下兩端面振動的情形，同時透過同步閃頻儀以觀察滾珠的平衡定位。

表 5-2 轉子平衡實驗設備說明

編號	設備名稱	型號 (規格)
1	同步閃頻儀	POKAI PK-DS-170
2	轉子實驗機台	-----
3	加速規	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px;">PCB M352C15</div> SN 98319 : 9.80 mV/g SN 99775 : 9.97 mV/g SN 105940 : 10.32 mV/g SN 105941 : 9.95 mV/g
4	電源供應器	GW GPC-3030D
5	馬達轉速控制軟體	EPOS UserInterface
6	馬達控制器	EPOS 24/5 275512
7	伺服馬達	Maxon 250247 263349

5-3 實驗結果與討論

5-3-1 轉子的平衡校正與自然頻率

此實驗系統中造成轉子振動的激振力包含轉子的不平衡量、不穩定動力源及製造與安裝誤差等。而滾珠型自動平衡機構主要針對轉子的不平衡量，利用軌道半徑與滾珠質量及其定位特性所產生的平衡量來加以制振。由於滾珠與軌道間的滾動磨擦是影響滾珠定位誤差的主要因素，故於實驗機台架設完成後，先行箝制定子的運動以增加支承剛性、提高系統臨界轉速；接著讓鋼製滾珠以高轉速繞軌道運行一段時間，迫使軌道內壁產生局部應變硬化，最後再使用潤滑劑擦拭滾珠與軌道，以減少兩者間的摩擦。

為了準確控制外加偏心質量(實驗控制的變數)，必須在實驗進行之前，校正轉

子系統的固有偏心。先前的分析顯示，當轉子的偏心不平衡量很小時，在完全平衡的狀態下，各端面上的兩滾珠間的夾角近乎 180° 。利用這個現象可以由兩端面滾珠夾角來判別轉子的偏心不平衡量是否已校準至可接受的程度。實際操作時，於兩端面碟片上逐量調整加掛的平衡校正質量，直至各端面上的兩滾珠均張開 180° 為止。圖 5-6(a) 為轉子系統經上述平衡校正後，於 2400 rpm 等速迴轉下拍攝的滾珠定位情形，箭頭所指為加掛的校正質量。結果顯示兩端面上的滾珠的夾角皆為 180° ，代表轉子的固有偏心已經由加掛的校正質量加以平衡。換言之，此時實驗系統所量測得的殘餘振動已不包含轉子的偏心激振。圖 5-6(b) 為此平衡校正後的轉子系統，在 2400 rpm 的轉速下，(將量測結果換算為振幅大小後，計算出各端面兩垂直方向上的平方和並取其方根值，再求得兩端面的平均)，兩端面振動量測結果的平均殘餘振幅。量測結果顯示，經平衡校正後的平均殘餘振幅約為 0.05 mm，這個殘餘振動量主要由馬達的扭矩變動、轉子系統製造裝配誤差與環境雜訊等所造成。在後續的實驗結果討論中，利用系統的振動量是否低於這個殘餘振動量來判別自動平衡機構是否已到達完全平衡狀態。

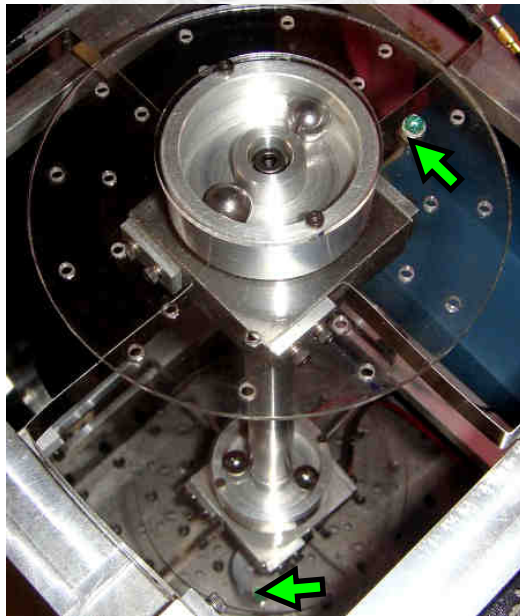


圖 5-6(a) 平衡校正後兩端面上的滾珠定位情形

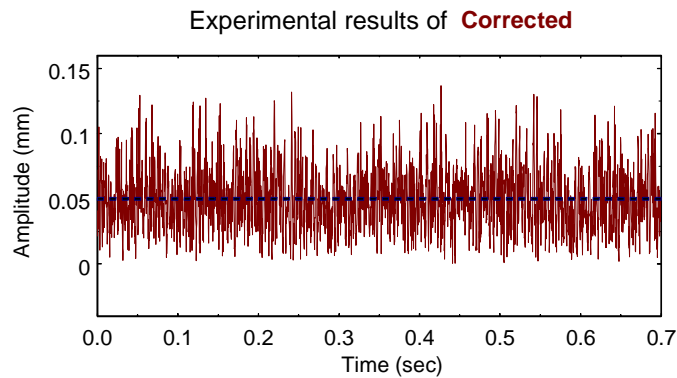


圖 5-6(b) 平衡校正後兩端面的平均殘餘振幅

接著量測實驗機台的自然頻率。將平衡校正後實驗機台軌道內的滾珠移除，固定馬達轉速量測系統的穩態振幅，記錄不同轉速下的穩態振幅得到頻譜圖如圖 5-7。在轉速 400 至 900 rpm 區間內每間隔 10 rpm 量測一次；900 至 2400 rpm 的區間內間隔 50 rpm 量測一次。結果顯示第一個自然頻率約為 460 rpm，和設計實驗機台時所推算的第一個自然頻率 454 rpm 甚為接近，而第二、三個自然頻率則分別位於 590 rpm 與 810 rpm。

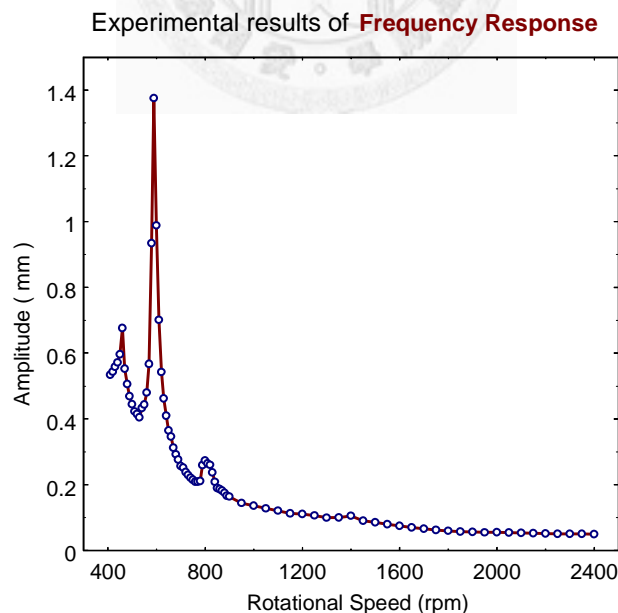


圖 5-7 轉子自動平衡實驗機台的頻率響應

圖 5-8 顯示此實驗機台在第一、二、三個自然頻率轉速下，加速規測得的振動

波形，其中，實、虛線分別代表上、下端面於 X 方向的測量值。第一個自然頻率（轉速 460 rpm）時，實、虛線呈現同相位振盪，代表轉子以近似軸線平移的型態共振。第二個自然頻率（轉速 590 rpm）時，實、虛線以 180° 相位差振盪，代表轉子兩端面中心往相反方向偏移，其軸線的運動於空間中的軌跡形成兩頂點相對的錐形。第三個自然頻率（轉速 810 rpm）對應的振形無法由加速規測得的波形判讀，但由後續增加偏心質量的實驗觀察中，當轉速為 810 rpm 時，轉子的上下跳動以及所引發的簧片破壞形式可判斷，第三個模態為 L 型支承簧片的扭轉共振型態。由於建構理論模型的彈性支承時，除彈性模數與等向性假設外，一般而言，並不特別針對彈簧的型式予以限定，且由於實驗所紀錄的過臨界轉速範圍在 1600 rpm ~ 2400 rpm 區間（1600 rpm 以下的轉速無法於實驗中獲致穩定的完全平衡），遠高於前三個自然頻率，因此由 L 型簧片寬度所造成的簧片扭轉行為，於本文的討論中可不納入考量。

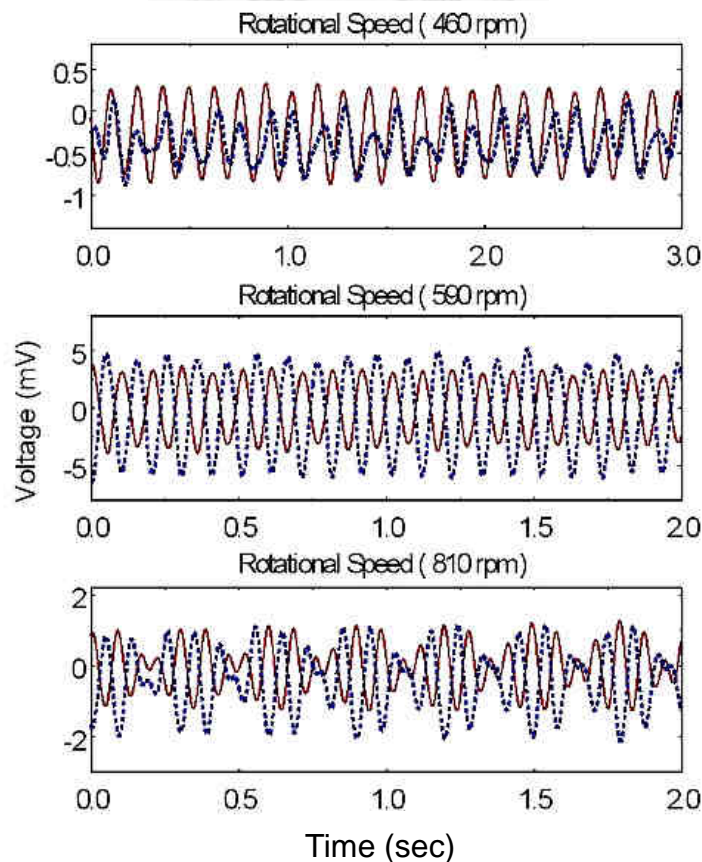


圖 5-8 第一、二、三個自然頻率轉速下，加速規測得的波形

5-3-2 實驗設計與說明

由 2-3-1 節對於雙滾珠自動平衡機構的制振系統的穩定性解析可知，操作轉速必須大於系統的第一個自然頻率，始可能存在穩定的完全平衡解。為能了解滾珠型自動平衡機構對三維偏心系統的制振行為，以系統的第一個自然頻率為臨界轉速，分別考慮下列幾種不同的測試狀況及其組合：(1) 在次臨界轉速與過臨界轉速條件下，(2) 單一端面與兩端面裝置雙滾珠自動平衡機構的系統，(3) 當滾珠最大制振平衡量與偏心不平衡量的比值大於及小於 0.5。並與 5-1-1 節所建立理論模型的數值分析結果相互比較。

實驗所採用的滾珠半徑為 5 mm、質量 4.09 g，以滾珠質心繞行的軌道半徑為 14 mm，計算得單一顆滾珠在任一端面上的最大平衡制振量為 $4.09 \times 14 = 57.26$ g-mm。在兩端面的碟片上半徑 48 mm 處，以固定螺栓搭配不同數量的墊片來改變系統的不平衡量。本實驗採用兩種不同的偏心質量分別為 $m_1 = 1.37$ g 和 $m_2 = 3.57$ g。當端面上的偏心質量為 1.37 g 時，此端面上的偏心不平衡量為 $1.37 \times 48 = 65.76$ g-mm，對應的制振比 $\eta = 0.87 (>0.5)$ ，代表該端面得以完全制振。另一方面，如果偏心質量為 3.57 g，其偏心不平衡量為 171.36 g-mm，對應的制振比 $\eta = 0.33 (<0.5)$ ，此時該端面上的自動平衡機構將無法完全抑制偏心振動。

為便於討論，採用表 5-3 所列的符號來標示不同的實驗參數條件。

表 5-3 實驗參數與標示說明

	參數 (型式)				標示
轉速	次臨界轉速 (Sub-Critical)				Sub
	過臨界轉速 (Super-Critical)				Sup
平衡機構	未裝置自動平衡機構				NB
	單一端面裝置雙滾珠自動平衡機構				SP2B
	兩端面裝置雙滾珠自動平衡機構				DP2B
偏心不平衡量	偏心質量		制振比		-
	上端面	下端面	上端面	下端面	
	m_1	0	0.87	--	U1L0
	m_2	0	0.33	--	U2L0
	0	m_1	--	0.87	U0L1
	0	m_2	--	0.33	U0L2
	m_2	m_1	0.33	0.87	U2L1 $\angle 0^\circ$
					U2L1 $\angle 60^\circ$
U2L2 $\angle 180^\circ$					
比對	實驗量測結果 (Experimental)				Ex-
	理論數值分析 (Theoretical)				Th-

另外，由於量測位置的限制（加速規無法安裝於碟片所在平面），致使加速規所測得的值是兩端定子位置的加速度變化。以單一端面完全平衡時為例，定子中心位置的振幅與轉子兩端面振幅的關聯如圖 5-9(a)、(b)所示。於圖 5-9(a)中，此時轉子上端面（碟片與自動平衡機構所在平面）雖已完全平衡，但上端所測得定子（碟片下方 26 mm 處）的振幅卻不為 0，轉子兩端定子中心位置相角差為 0° ，且下端定子位置所量測而得的振幅，亦較下端碟片位置的振幅為大。而於圖 5-9(b)

中，轉子下端面已完全平衡，但下端定子（碟片下方 29 mm 處）所測得的振幅仍然存在，且轉子兩端定子中心位置相角差為 180° 。此時，上端定子位置的振幅，小於上端面碟片中心的振幅。但若是當轉子系統兩端面都達到完全平衡時，兩端定子的振幅當然同時為 0。為使理論值能與量測結果進行比較，需考慮滾珠與偏心質量所在平面與定子（支承簧片）中心的高度差，可先計算出穩態時轉子質心的位置 x_c 、 y_c 與軸線偏斜角度 γ_1 、 γ_2 ，再藉由式(5-1)及(5-2)解得 X 、 Y 方向的分量，或經合成求得轉子上、下端定子（支承）中心的理論振幅。

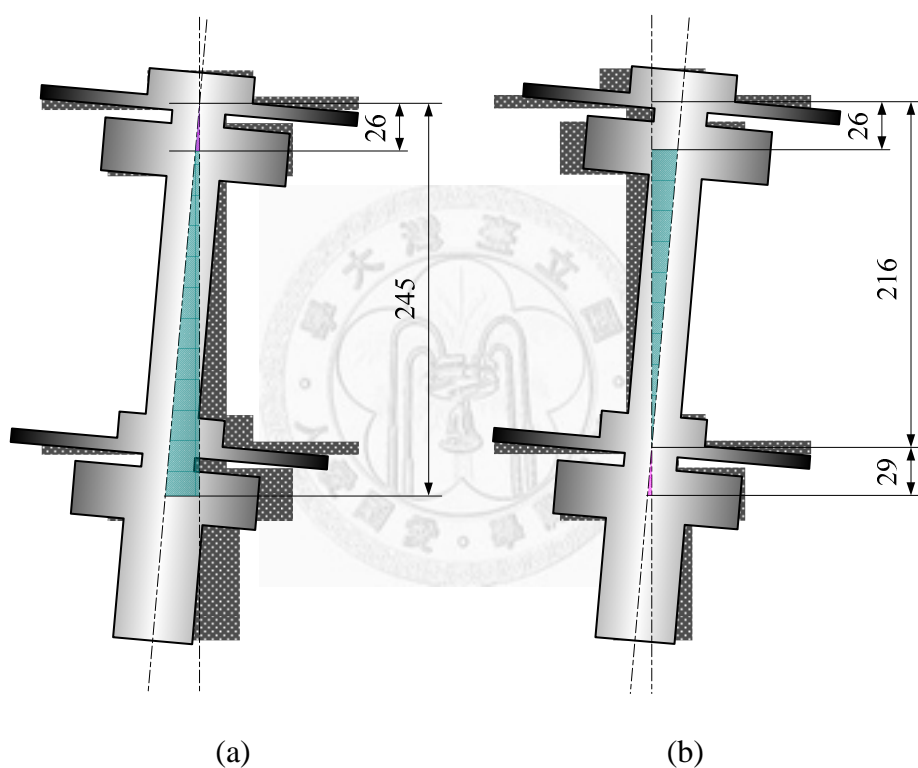


圖 5-9 單一端面完全平衡時，轉子兩端定子中心位置相角差為
(a) 0° 、(b) 180° ，的關聯示意

簡言之，由於「量測平面」無法位於「制振平面」上，因此只要透過兩平面高度差所構成的幾何關係，便能確知自動平衡機構所在的「制振平面」是否已完全制振。以下分別討論不同條件下的實驗結果，並和數值分析的預測相比對。

5-3-3 次臨界轉速的實驗與比較

當轉子系統的工作轉速低於臨界轉速時，自動平衡機構的滾珠將定位於偏心不平衡量的同一側，因而導致振動加劇。為觀察上述現象並探討只於單一端面裝置自動平衡機構以及兩端面都裝置自動平衡機構時抑制偏心振動的效果，分別針對兩端面無滾珠(NB)、上端面裝置雙滾珠(SP2B)以及兩端面裝置雙滾珠(DP2B)的狀況，於低於臨界轉速(400 rpm)及不同制振比條件下，記錄轉子上、下兩端面加速規的量測值，進行比較與分析。實驗結果逐項討論如下：

1. Sub-U1L0

首先考慮僅於單一端面上存在偏心質量的情形。在實驗機台上端碟片，半徑 48 mm 處鎖上 m_1 偏心質量，並且設定馬達以 400 rpm 等速旋轉。由 5-1-1 節以及附錄四中推論的結果，配合表 5-1 所列的參數，利用數值積分可得穩態時上端面裝置自動平衡裝置 (SP2B) 的兩滾珠定位於 $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.025 \pi$ (-4.5°)。另一方面，若兩端都裝置自動平衡裝置 (DP2B)，則穩態時上下兩端面的滾珠分別定位於 $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.028 \pi$ (-5°)，以及 $\beta_1 = \beta_2 = -0.037 \pi$ (-6.7°)。圖 5-10(a) 為實驗機台在上述參數設置下，轉速為 400 rpm 時，經瞬時拍攝而得 SP2B 及 DP2B 滾珠的定位情形。結果顯示兩滾珠確實緊靠在一起，且相對於上端面偏心質量(箭頭指示的螺栓)，往順時方向略為偏移。為能在定性上比較實驗與理論結果的特性，圖 5-10(b) 與 5-10(c) 分別為 NB、SP2B 及 DP2B，上、下端面的加速規的量測結果以及穩態時理論振動的歷時情形。由兩圖中測量值或理論值大小的變化可知，SP2B 與 DP2B 的振幅明顯大於 NB，亦即在次臨界轉速下，滾珠的定位確實致使振幅加大。再者，當偏心量位於轉子單一端面上時(如此例中的 NB 及 SP2B)，偏心量產生的力矩使轉子軸線偏斜，導致上下兩端面間存在 180° 的相位差。然而當兩端面同時有滾珠作用時，上下兩端面呈現同相位的振動。另外，相較於 SP2B 而言，由於 DP2B 下端面滾珠的效應，拉近了上、下端振幅差距，使轉子質心振幅增加，軸線偏斜降低。

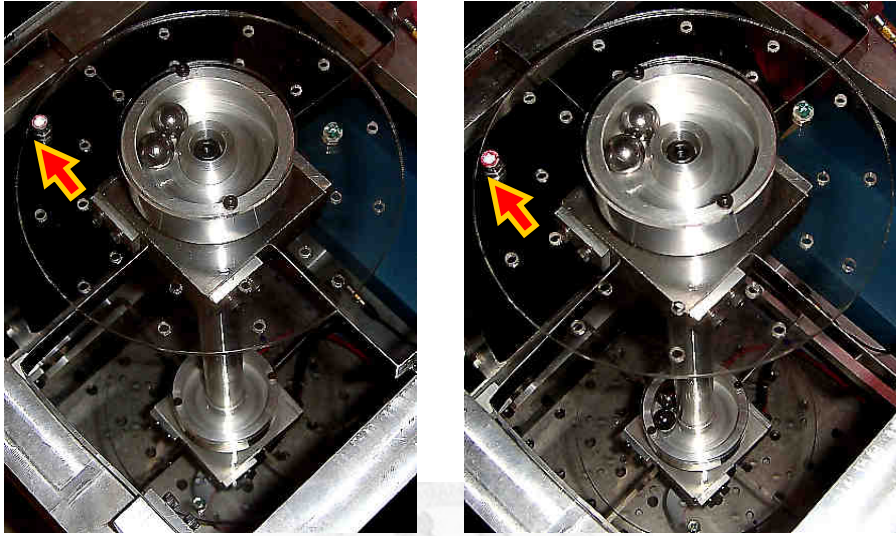


圖 5-10(a) SP2B 及 DP2B 於 U1L0 (400 rpm) 的滾珠定位

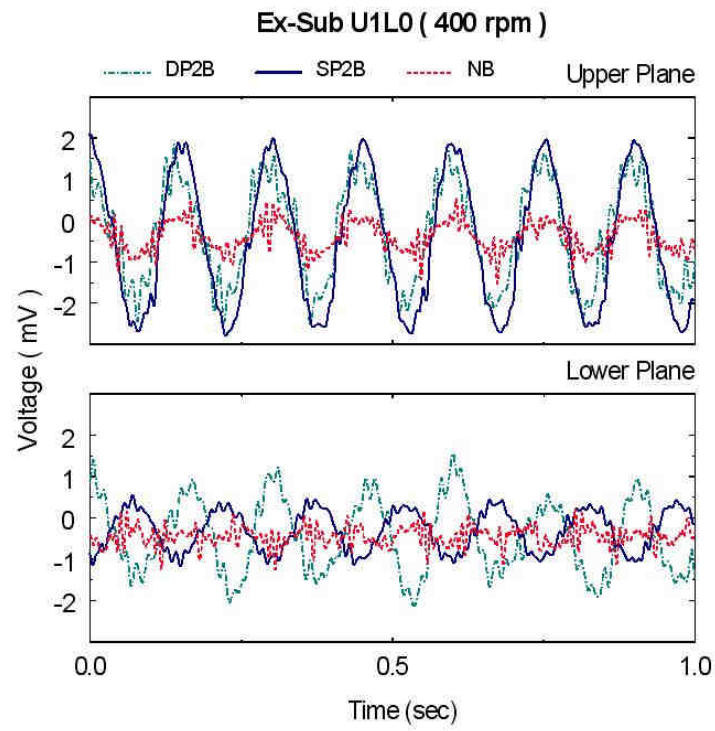


圖 5-10(b) NB、SP2B 及 DP2B 於 U1L0 (400 rpm) 時，加速規的量測結果

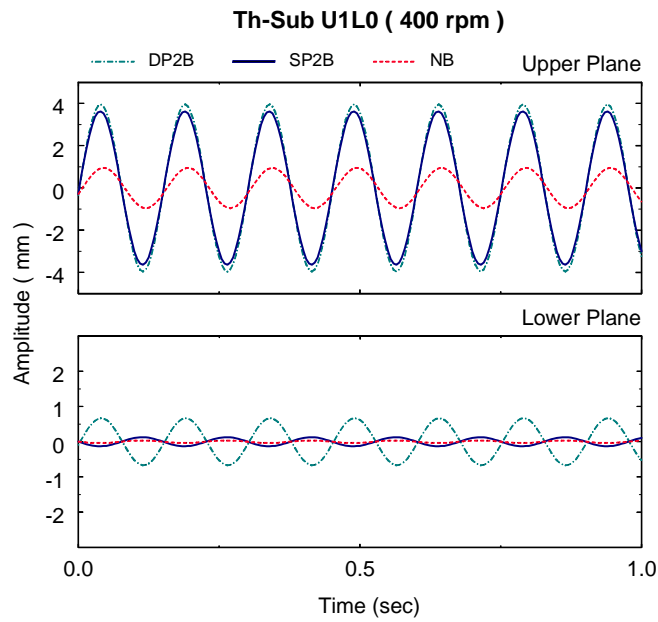


圖 5-10(c) NB、SP2B 及 DP2B 於 U1L0 (400 rpm)時的理論振動歷時

2. Sub-U0L2

接著討論操作轉速低於臨界轉速且自動平衡機構裝置在偏心質量另一端面時系統的行為（在上端面裝置自動平衡機構，下端面加上偏心質量）。代號 U0L2 代表下端面的偏心質量為 $m_2=3.57\text{g}$ 的情形。由於 400 rpm 轉速條件下，僅上端面裝置自動平衡機構的系統(SP2B)，其軌道內的滾珠無法出現穩定行為，故難以進行討論。但對於兩端面裝置自動平衡機構的系統(DP2B)，由實驗的觀察可看出其上端面的兩滾珠緊靠在一起，且不斷週期性地繞著軌道運行，始終無法於 400 rpm 轉速下穩定定位。因此，我們僅針對 DP2B 的系統的週期性行為與理論分析的現象進行比較。圖 5-11(a)與(b)分別為 DP2B 系統的實驗-理論比較以及兩端面滾珠的數值歷時結果。由圖 5-11(b)的數值分析同樣顯示，上端面滾珠的相位隨著時間而遞增，此意謂著滾珠沿著軌道不斷繞行。另一方面，下端面的滾珠則以約 35 次/min 的頻率，一直左右地小幅度來回擺盪。

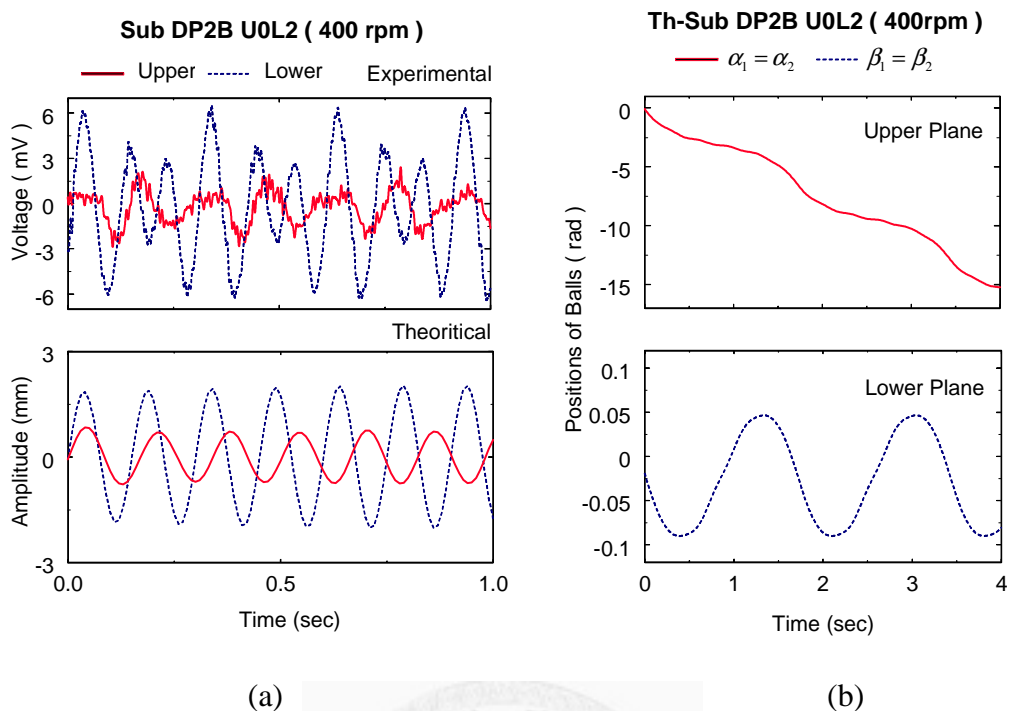


圖 5-11 DP2B U0L2 (400 rpm) (a)實驗-理論比較、(b)滾珠於軌道內的週期運動

對於滾珠型自動平衡機構週期解的探討，足以再獨立撰文說明，本文僅提出實驗觀察現象，故不再深究。

接著探討兩端面上均存在偏心不平衡量的情形。一般而言，轉子兩端面的等效偏心量各異，且兩者間的相角可為任意值。然而先前實驗結果顯示，次臨界轉速下，滾珠的定位致使轉子兩端面振幅加劇的現象類似，因此以下僅列舉三種不同相角：U2L1($\angle 0^\circ$)、U2L1($\angle 60^\circ$)以及 U2L1($\angle 180^\circ$)的實驗結果說明。

3. Sub-U2L1 ($\angle 0^\circ$)

於實驗機台上、下碟片相同相角，半徑 48mm 處，分別鎖上不同的偏心質量 m_2 以及 m_1 。圖 5-12(a)分別為 SP2B 及 DP2B 於偏心質量 U2L1 $\angle 0^\circ$ 在 400 rpm 轉速下，滾珠穩態定位的情形。圖 5-12(b)為 NB、SP2B 及 DP2B 三個情形下，轉子兩端面的加速規的量測結果。上端面因具有較大的偏心量因而相較於下端面有較大

的振幅。穩態時所有滾珠與偏心質量的相角極為接近，因此轉子上、下端面始終保持幾乎相同的相角振盪。換言之，轉子的運動近似於平移迴轉。

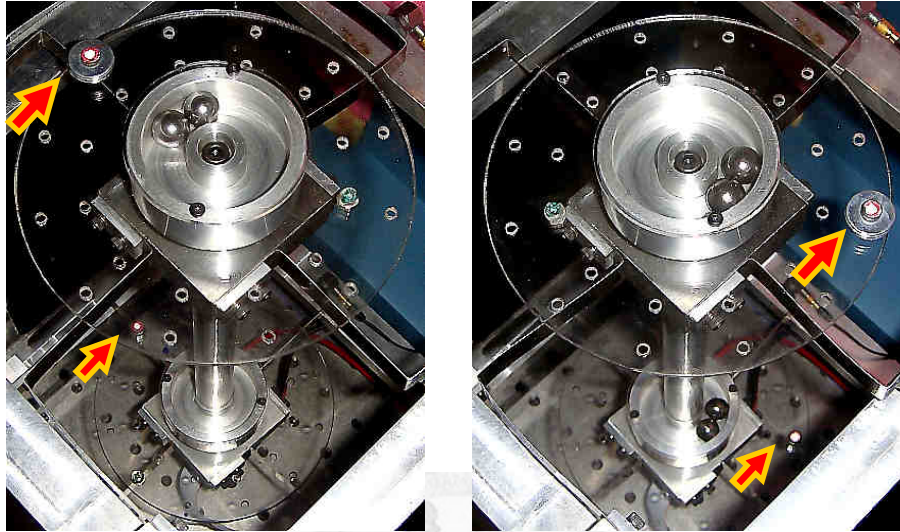


圖 5-12(a) SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 0^\circ$ (400 rpm) 的滾珠定位

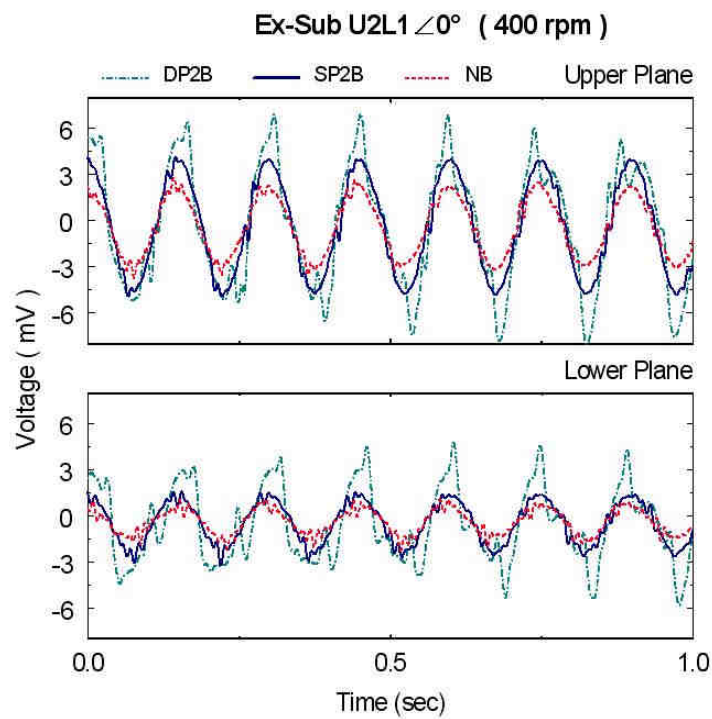


圖 5-12(b) NB、SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 0^\circ$ (400 rpm) 時，加速規的量測結果

在同樣參數條件下進行數值分析，可得 SP2B 與 DP2B 時的滾珠定位和轉速的關係如圖 5-13。結果顯示，只要略低於臨界轉速，所有滾珠的定位便非常靠近於偏心質量的相角位置(0°)，且轉速越低滾珠越接近偏心質量。當轉速為 400 rpm 時，SP2B 的滾珠定位理論值 $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.016 \pi$ (-2.9°)，而 DP2B 滾珠定位的理論值為 $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.0165 \pi$ (-3°)、 $\beta_1 = \beta_2 = -0.016 \pi$ (-2.9°)，這與實驗呈現的狀況（參考圖 5-12(a)）頗為接近。

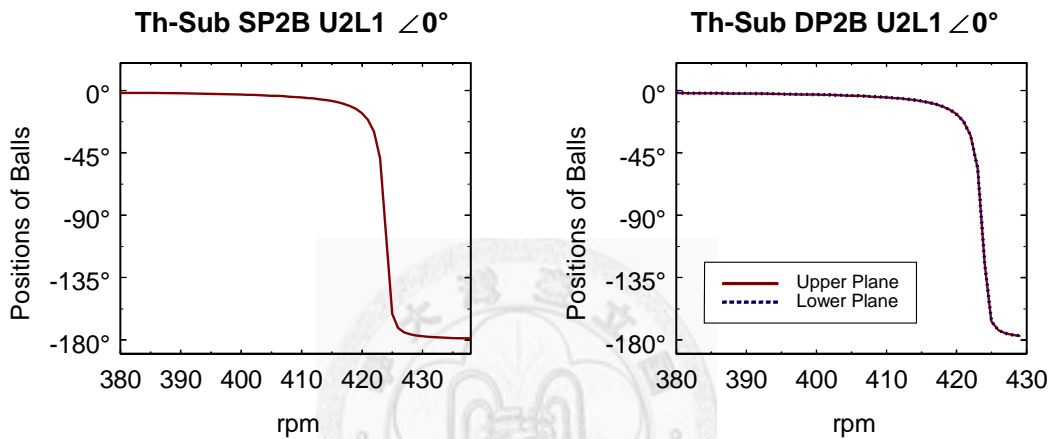


圖 5-13 數值分析 SP2B 與 DP2B 於 Sub U2L1 $\angle 0^\circ$ 的理論滾珠定位

為了能更進一步看出接近臨界轉速時滾珠的定位是否與理論現象吻合，圖 5-14 為 SP2B 於 U2L1 $\angle 0^\circ$ 在轉速為 450 rpm 下，加速規的量測結果與滾珠定位情形。這個操作轉速十分接近第一個共振頻率，此時實驗機台的支承簧片產生極大的變形，轉子兩端呈現同相位劇烈振盪，且滾珠幾乎定位於 -90° 相角處。

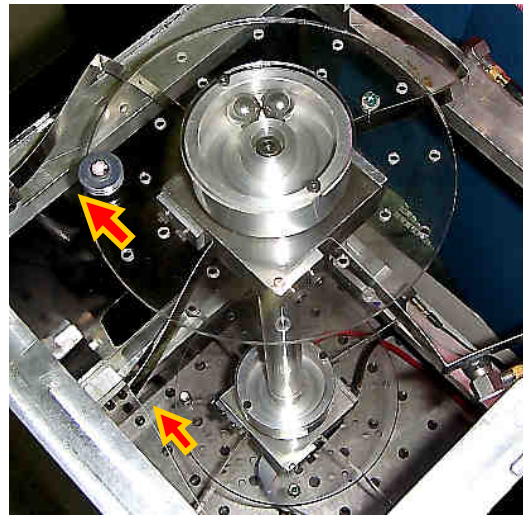
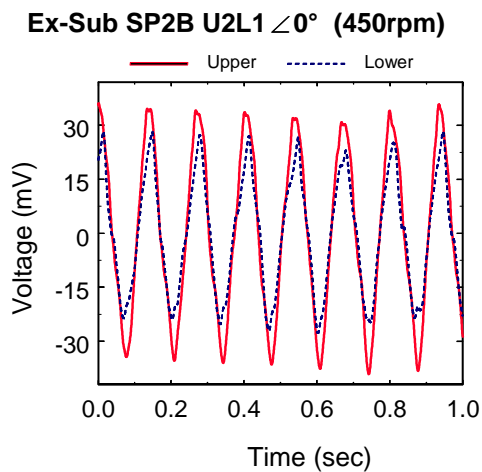


圖 5-14 SP2B 於 U2L1 $\angle 0^\circ$ (450 rpm) 加速規的量測結果與滾珠定位情形

4. Sub-U2L1 ($\angle 60^\circ$)

在同樣的偏心半徑下，改變上下兩端面偏心質量的位置，使下端面的 m_1 質量相較於上端面的 m_2 質量相差 60° 相角，同樣維持以 400 rpm 等速旋轉。圖 5-15(a) 為 SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 60^\circ$ 在轉速 400 rpm 時滾珠的穩態定位結果。值得注意的是，DP2B 下端面滾珠並非定位在偏心質量附近，而是往順時方向有明顯的偏離。圖 5-15(b) 為 NB、SP2B 及 DP2B 三個情形下，上、下兩端面量測的振幅，結果顯示上端面仍舊較下端面有較大的振幅。

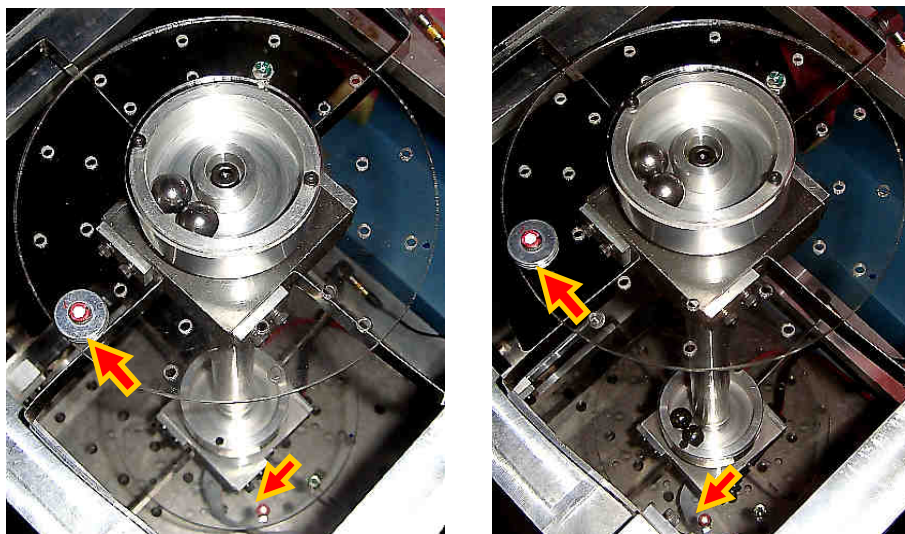


圖 5-15(a) SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 60^\circ$ (400 rpm) 的滾珠定位

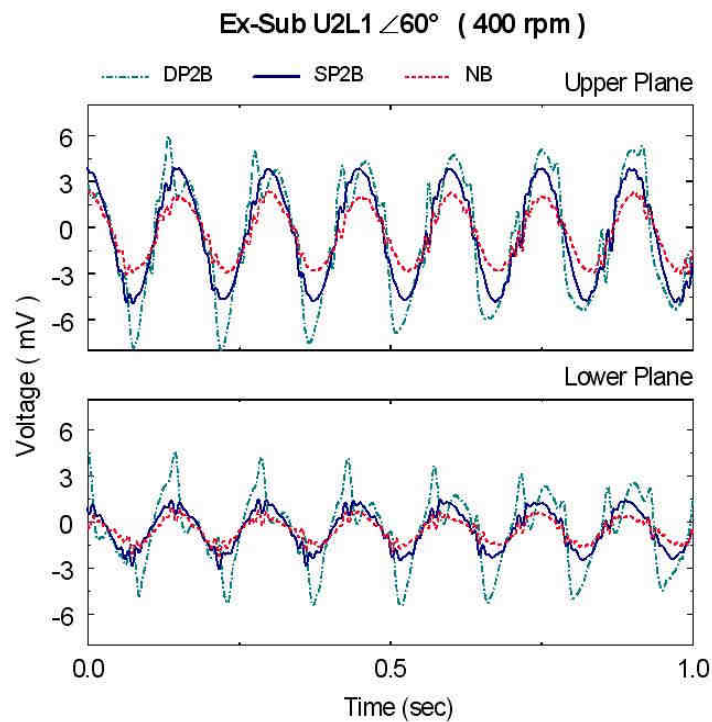


圖 5-15(b) NB、SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 60^\circ$ (400 rpm)時，量測的結果比較

接著用數值分析探討兩偏心質量間有 60° 的相角差時滾珠的定位。圖 5-16(a)為 SP2B 於同樣參數條件下滾珠定位和轉速的關係圖。滾珠的定位同樣的在接近臨界轉速時才發生急劇的相位角改變。於轉速 400 rpm 時對應的理論值為 $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.006 \pi$ (-1°)。圖 5-16(b)為 DP2B 於 Sub U2L1 $\angle 60^\circ$ 的滾珠理論定位情形，由圖中可看出當偏心質量間的相位差不為零時，兩端面滾珠定位的特性；其一是即使在較低轉速區間，轉子下端面的滾珠始終與偏心質量間維持至少一定角度的差距。其二是隨著操作轉速逐步提高以接近臨界轉速的過程中，上、下端面的滾珠由原本張開的幅角，逐漸接近對齊(參考圖 5-15(a)與圖 5-16(b)，在 400 rpm 轉速下，兩端面滾珠定位理論值分別為 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0^\circ$ 以及 $\beta_1 = \beta_2 = -0.24 \pi$ (-43.2°)。上下兩端面偏心質量原有 60° 相位差，而下端面滾珠以該偏心質量位置起算定位至 -43.2° ，使上下端面的滾珠間僅剩 16.8° 相位差，與實驗觀察的滾珠定位非常相近)。

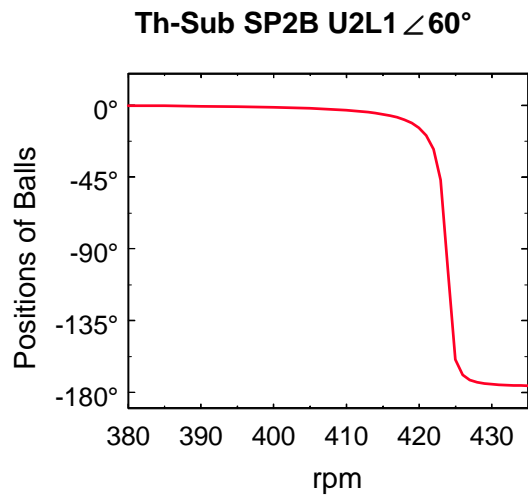


圖 5-16(a) 數值分析 SP2B 於 Sub U2L1 $\angle 60^\circ$ 的理論滾珠定位

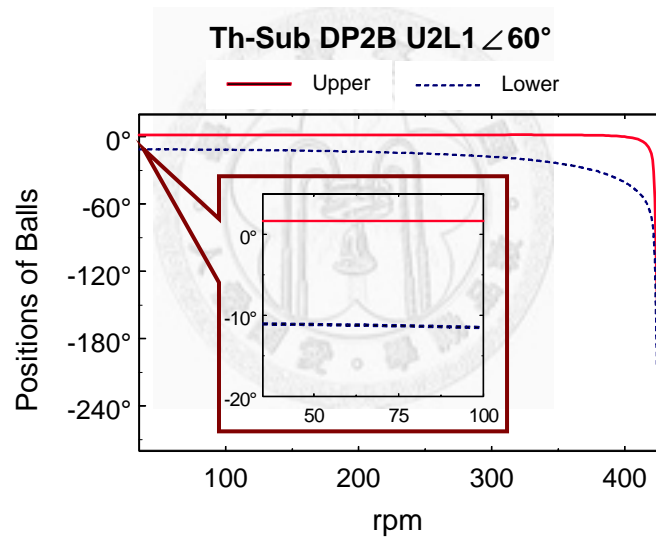


圖 5-16(b) 數值分析 DP2B 於 Sub U2L1 $\angle 60^\circ$ 的理論滾珠定位

圖 5-17 為 SP2B 於 U2L1 $\angle 60^\circ$ 在轉速為 450 rpm 下，加速規的量測結果與滾珠定位情形，同樣可以驗證滾珠接近臨界轉速時的定位情形（滾珠幾乎定位於 -90° 相角處），此時轉子兩端亦呈現同相位劇烈振盪。

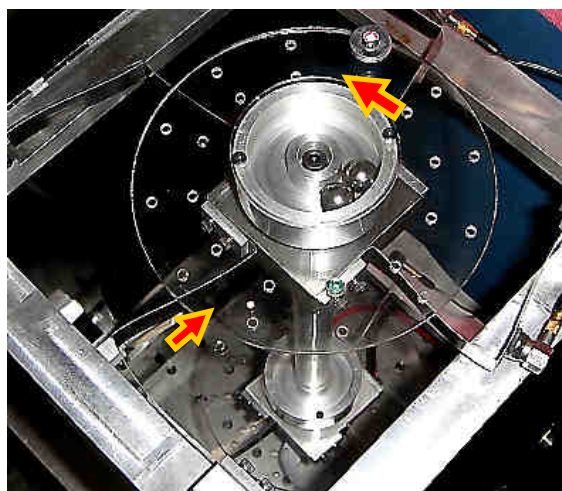
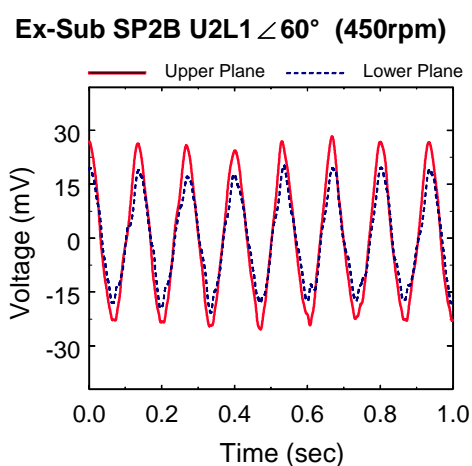


圖 5-17 SP2B 於 U2L1 $\angle 60^\circ$ (450 rpm) 的量測結果與滾珠定位

5. Sub-U2L1 ($\angle 180^\circ$)

最後考慮上、下端面的偏心質量相差 180° 的情況。下端面的偏心質量為 m_1 而上端面的偏心質量為 m_2 ，兩者間的相角為 180° ，同樣使轉子維持在 400 rpm 等速旋轉。圖 5-18(a) 顯示穩態時 SP2B 及 DP2B 兩者的滾珠定位情形。注意 DP2B 下端面的滾珠，定位至靠近偏心質量的對邊位置。圖 5-18(b) 為 NB、SP2B 及 DP2B 三個情形下，轉子上、下端面的振動情形。由於下端面滾珠的定位抵銷了該端面上原有偏心質量所造成的偏心不平衡量 ($\eta > \frac{1}{2}$)，因此下端面的激振力僅剩下部分滾珠殘餘的偏心量。由圖 5-18(b) 的量測結果亦定性地呈現出上、下端面振幅極大差異的現象。

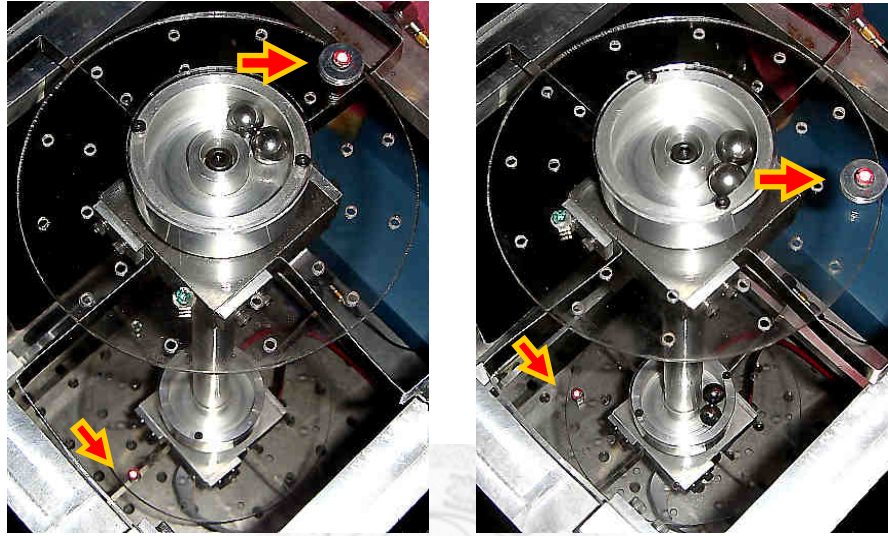


圖 5-18(a) SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 180^\circ$ (400 rpm) 的滾珠定位

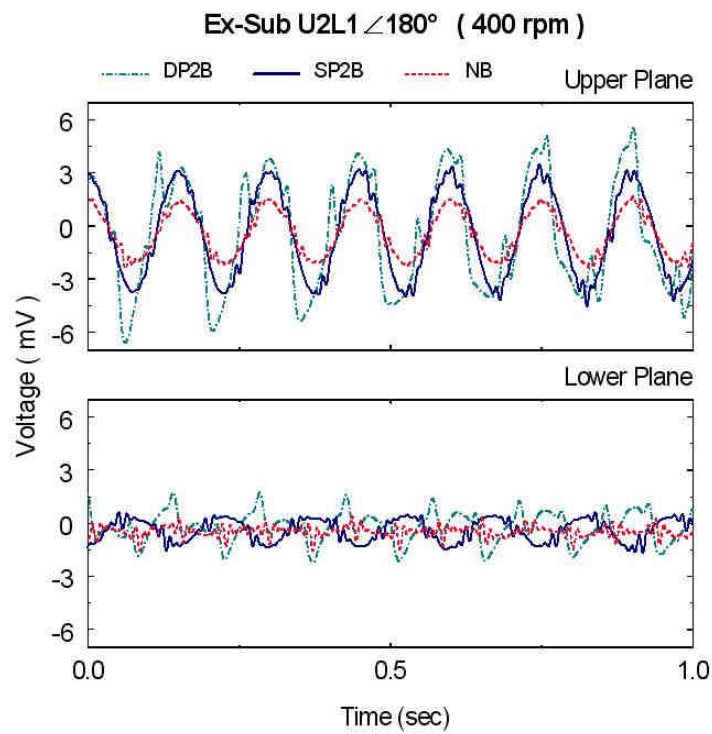


圖 5-18(b) NB、SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 180^\circ$ (400 rpm) 時的量測結果

以數值分析 SP2B 與 DP2B 於 Sub U2L1 $\angle 180^\circ$ 滾珠定位的結果分別如圖 5-19(a)、(b) 所示，當轉速 400 rpm 時 SP2B 滾珠定位的理論值為 $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.016 \pi$ (-2.9°)，以及 DP2B 的滾珠定位理論值 $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.02 \pi$ (-3.6°)、 $\beta_1 = \beta_2 = 0.95 \pi$

(171°)，其中 DP2B 下端面的滾珠與偏心質量的相角差接近 180°，與實驗觀察的滾珠定位十分近似。但當 DP2B 轉速為 300 rpm 時， $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.003 \pi$ 、 $\beta_1 = \beta_2 = -0.004 \pi$ ，可得知在較低轉速時上下端面的滾珠幾乎都定位於與偏心質量同一相角位置。由於此實驗系統受限於馬達低轉速時不穩定的扭矩變化，無法驗證滾珠定位於與偏心質量同一相位的特性，故另設計以皮帶間接傳動的實驗系統（設計圖詳如附錄五，實驗驗證簡述於附錄六），其結果可補充說明之。

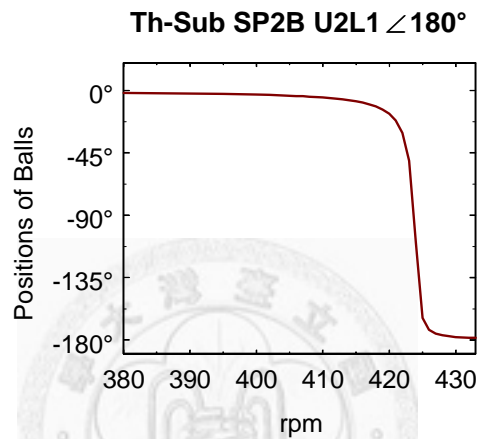


圖 5-19(a) 數值分析 SP2B 於 Sub U2L1 $\angle 180^\circ$ 的理論滾珠定位

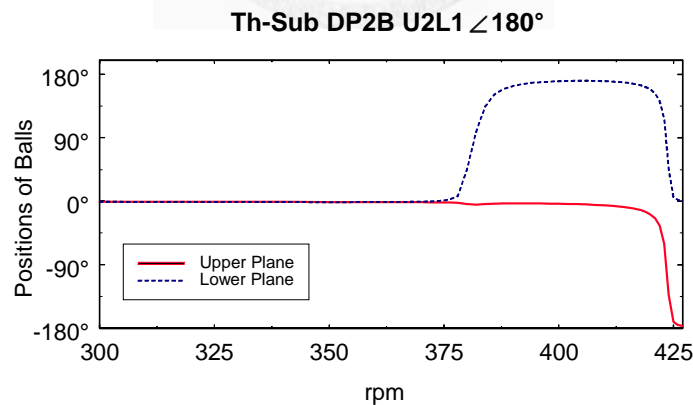


圖 5-19(b) 數值分析 DP2B U2L1 $\angle 180^\circ$ 滾珠定位的結果

5-3-4 過臨界轉速的實驗與比較

當轉子系統的工作轉速高於臨界轉速且落於完全平衡位置的穩定區間時，自動平衡機構的滾珠將定位至偏心不平衡量的異側因而抑制偏心振動。接續 5-3-3 節所討論的各個偏心條件，將轉速提升至高於臨界轉速的穩定區間，再分別針對 NB、SP2B 以及 DP2B 的狀況，探討制振比大於及小於 0.5 的條件下，滾珠的定位與制振的效應，並與理論分析結果相比較。由於此實驗系統所設定的參數條件絕大部份在轉速 1600 rpm 以上，自動平衡機構的滾珠幾乎都能呈現穩定定位現象，因此僅就 1600~2400 rpm 區間，每間隔 100 rpm 記錄一次量測的結果。另外為降低高頻雜訊的判讀干擾，針對所列實驗紀錄的波形均已濾掉 20 倍基頻以上的高頻影響。接著依偏心條件分類逐項討論如下；

1. Sup-U1L0

首先討論當偏心質量僅位於轉子上端面，且滾珠的制振量大於偏心不平衡量時的情形。於上端面碟片半徑 48 mm 處，鎖固偏心質量 $m_1=1.37$ g，由於單一端面上的雙滾珠所能提供的最大平衡制振量為 114.52 g.mm，可求得此端面的制振比為 $\eta=0.87$ ，代表轉子上端面的自動平衡機構已足以完全抑制該端面上的偏心激振。圖 5-20 為 SP2B 及 DP2B 於 U1L0 且轉速為 2400 rpm 時拍攝的滾珠定位。SP2B 時上端面兩滾珠位於偏心質量的異側且張開適當的角度；DP2B 時上端面的滾珠定位情形和 SP2B 類似，而下端面的兩滾珠則張開近 180°。另外由數值方法分析 SP2B 及 DP2B 時，上、下兩端面的振動和滾珠定位隨時間變化的情形，結果如圖 5-21 所示。由於在實驗機台理論模型中，下端面滾珠的位置是由相對於該端面偏心質量的相角所定義，因此對於本章數值分析所討論下端面無偏心質量的情形，其滾珠位置的描述則與上端面滾珠位置的定義相同（以 \hat{x} 軸為基準）。由圖 5-21 的結果可以看出，不論是 DP2B 或是 SP2B 上端面的兩滾珠均分別定位在 $\alpha_1=0.695\pi$ 以及 $\alpha_2=-0.695\pi$ ，意即當自動平衡機構的制振比為 $\eta=0.87$ 時，兩滾珠將定位在偏

心量的異側且張開 110° 的幅角以完全抑制上端面的偏心激振。另一方面，DP2B 轉子下端面的兩滾珠 ($\beta_1 = -0.533\pi$ 、 $\beta_2 = -1.533\pi$) 張開幅角 180° ，和實驗結果相合。

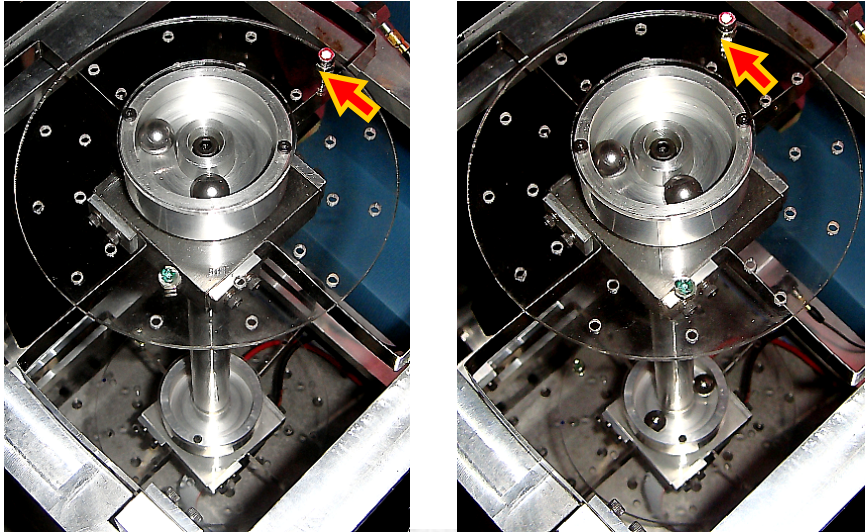


圖 5-20 SP2B 及 DP2B 於 U1L0 (2400 rpm) 的滾珠定位

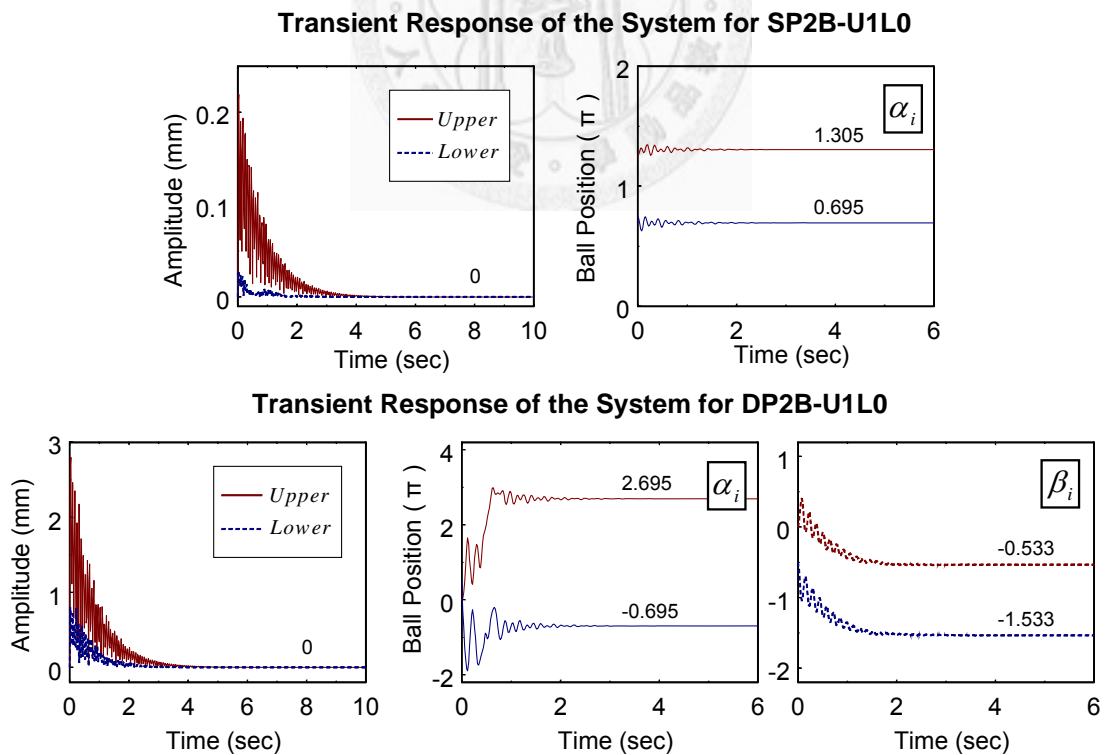


圖 5-21 SP2B 及 DP2B 於 U1L0 (2400 rpm) 的暫態響應與穩態平衡

為能定性驗證自動平衡機構的制振效應，並且與理論分析進行比較，在相同偏心量下分別針對 NB、SP2B、DP2B 進行實驗，同時利用上、下端支承簧片（定子）位置處各兩個加速規來量得轉子的動態行為，並且藉由加速規的特性值（參考表 5-2）將量測結果轉換為振幅大小，再與數值模擬的振動波形相互比對。圖 5-22 為 NB、SP2B 及 DP2B 於 U1L0 (2400 rpm) 的理論波形與實驗量測的比較。由圖中實驗量測結果可看出，未裝置自動平衡機構的轉子系統，由於上端面偏心質量的激振作用，該端面上出現明顯較大的振幅，且下端面同時存在另一較小但反相的振動，此振動現象由轉子系統質量的分佈及兩端面的運動關聯所造成，並非下端面偏心不平衡量所引發。而在配置自動平衡裝置後，因為摩擦力或軌道偏心等影響，造成滾珠定位的些許誤差（[14]、[16]、[17]及[18]），無法使得加速規完全靜止，然而其制振效果仍舊相當明確。

數值分析的結果顯示，當上端面裝置自動平衡機構(SP2B)時，由於其制振比大於 0.5，因此上端面的偏心不平衡量得以藉由滾珠的適當定位而完全抵銷，因而下端面原有的振動隨之消失，轉子呈現完全平衡。另外，當兩端面均裝設自動平衡機構(DP2B)時，由於上端面已能完全制振，且下端面並不存在任何偏心不平衡量，所以下端面的平衡機構已無需提供任何制振平衡量，因而兩滾珠分開至徑向對邊，彼此平衡。圖 5-22 理論數值所描繪上、下端振幅為 0 的水平線，實則為 SP2B 與 DP2B 均完全制振的重合結果。

Theoretical and Experimental Results of U1L0 (2400 rpm)

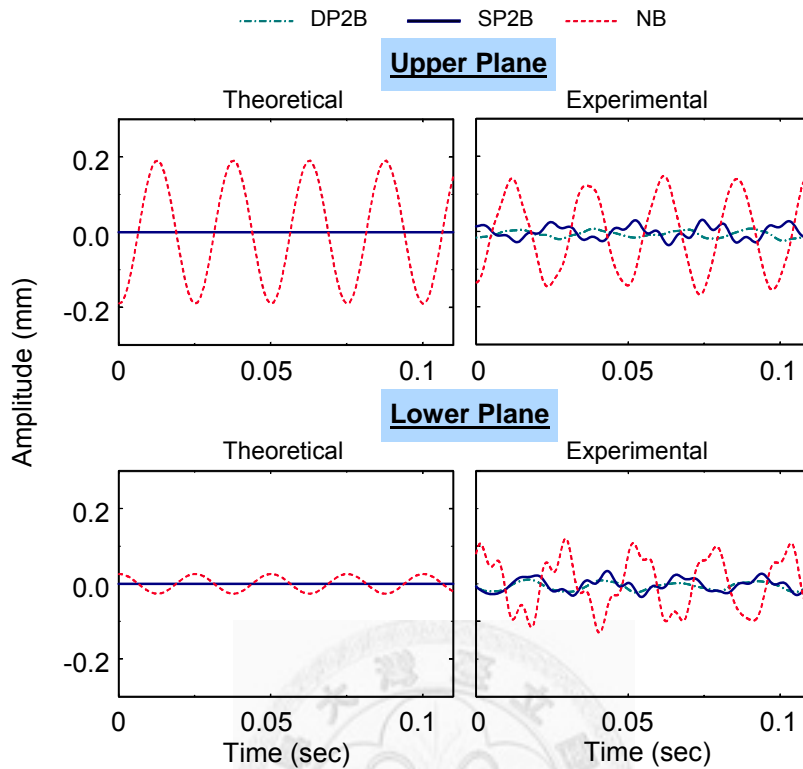


圖 5-22 NB、SP2B 及 DP2B 於 U1L0 (2400 rpm) 的理論波形與實驗量測比較

上述關於自動平衡機構制振效應的討論，適用於在過臨界轉速且在穩定區間的系統。圖 5-23(a)、(b)分別為 SP2B 與 DP2B 於 U1L0 的偏心率下在 1600~2400 rpm 轉速區間內的振動頻譜，並和理論結果相比對。雖然量測值的大小與理論值間有所誤差，且在理論達完全平衡時，實驗機台仍有殘存的振動量，但就振幅變化的趨向以及自動平衡機構制振效果而言，其定性行為是相符的。

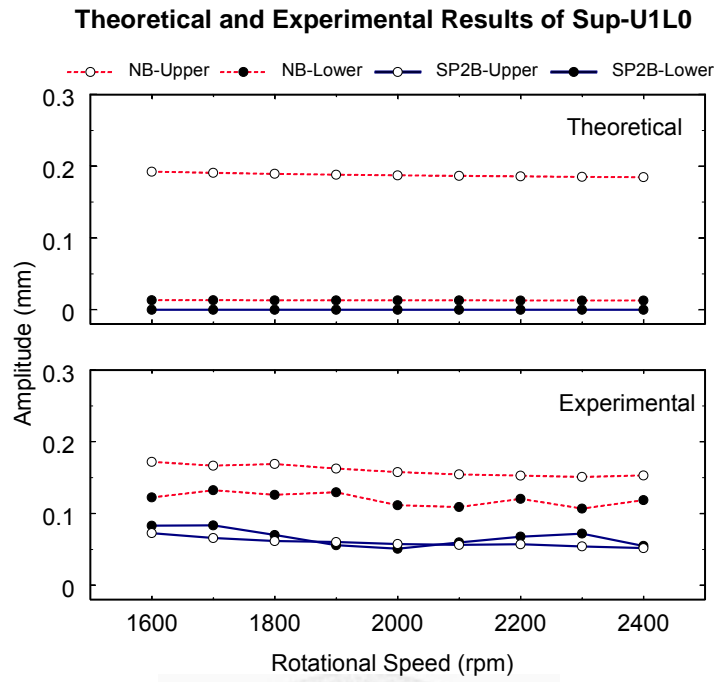


圖 5-23(a) NB 與 SP2B 於 U1L0 (1600~2400 rpm) 的理論與實驗比較

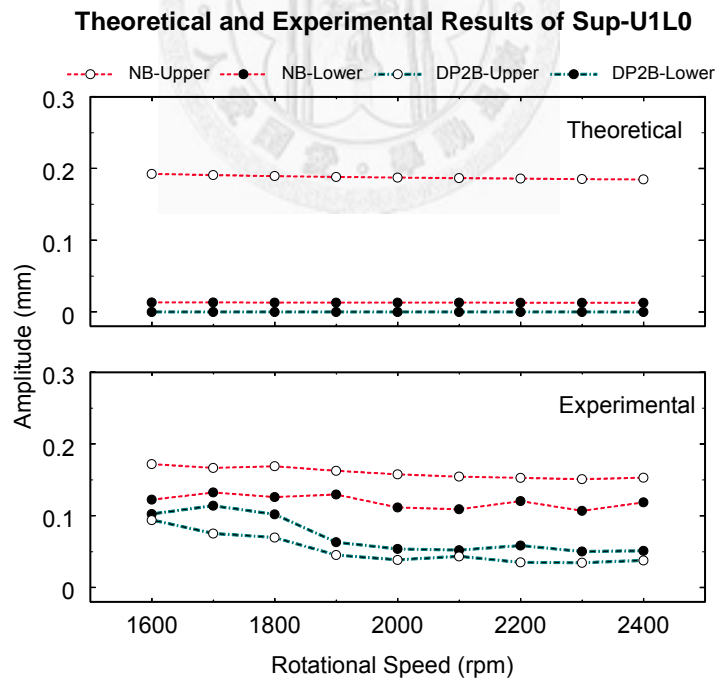


圖 5-23(b) NB 與 DP2B 於 U1L0 (1600~2400 rpm) 的理論與實驗比較

2. Sup-U2L0

前述 U1L0 (此時制振比大於 0.5) 的實驗結果顯示，上端面的自動平衡機構足以抑制上端面的偏心不平衡量，使得下端面的自動平衡機構無需提供額外的制振效果。然而當上端面的制振比小於 0.5 時，因自動平衡機構無法完全抑制而殘餘的偏心量，將引發下端面的振動。此時下端面滾珠的因應行為與自動平衡機構的制振效果，可透過 U2L0 的實驗與理論分析來了解。於上端面 48mm 偏心距處，鎖固偏心質量 $m_2=3.57\text{ g}$ ，對應的偏心不平衡量為 $173.36\text{ g}\cdot\text{mm}$ ，制振比 $\eta=0.33$ 。圖 5-24 為 SP2B 及 DP2B 於 U2L0 (2400 rpm) 的滾珠定位情形，上端面的兩滾珠緊靠在一起且定位於偏心質量對邊，而 DP2B 下端面的滾珠則相對於偏心質量與上端面滾珠連線方向往左右張開至接近 180° 的幅角。

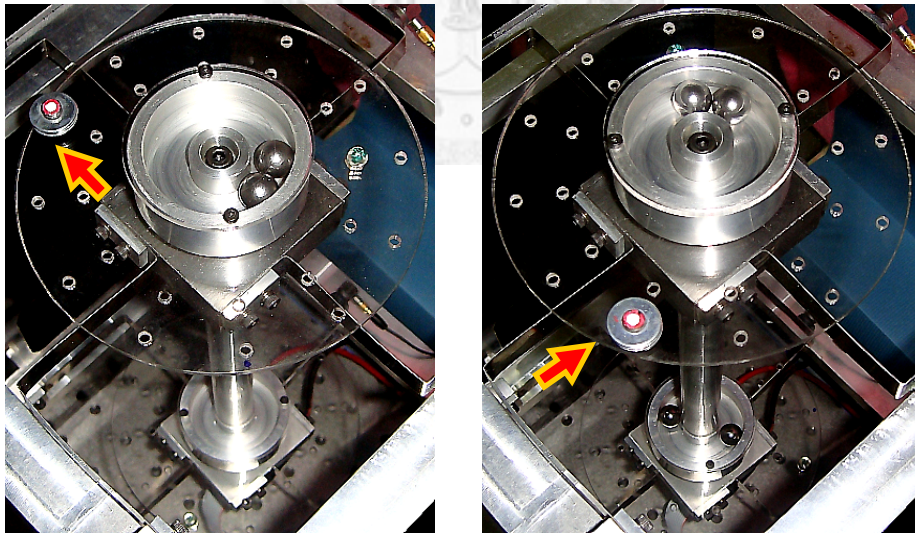


圖 5-24 SP2B 及 DP2B 於 U2L0 (2400 rpm) 的滾珠定位

圖 5-25 為數值分析 SP2B 及 DP2B 於 U2L0 (2400 rpm) 下的暫態響應與穩態行為。由於在理論模型中考慮了滾珠與偏心質量所在平面與定子中心的高度差 (亦即制振平面與量測平面的差距)，因此實驗與數值結果所呈現的均是上、下端定子中心位置的振幅。圖中可看出 SP2B 與 DP2B 下端定子位置處的理论振幅分別為 0.0214 與 0.0237 mm ，經計算 (參考 5-3-2 節實驗設計與說明) 可得到 SP2B 的下端面 (滾珠與偏心質量所在平面) 殘餘振幅為 0.0023 mm ，而 DP2B 的下端面則呈

完全平衡。為了更清楚描述 DP2B 的下端面制振時滾珠的行為，圖 5-26 為 SP2B (即下端面裝置自動平衡機構之前)，上、下兩端面的穩態振動歷時，圖中顯示了上、下端面的振幅雖有極大差異，但兩者間以接近相同的相角振動。換言之，在下端面未裝置自動平衡機構之前，上端面的殘餘振動引發了下端面同相位振動。若於下端面加上平衡機構後要能完全抑制上述的同相位振動，則下端面的兩滾珠勢必往振動的反相位略為靠攏，這個現象可以由圖 5-25 中 DP2B 下端面滾珠的定位 ($\beta_1 = -0.503 \pi$ 、 $\beta_2 = -1.498 \pi$) 得到驗證。此理論分析結果顯示當上端面的自動平衡機構無法完全抑制上端面的偏心不平衡量時，殘餘的偏心量會導致轉子整體的振動，此時若下端面裝置有另一自動平衡機構，則下端面的振動將誘發下端面滾珠的適當定位，抑制該端面上的振動。

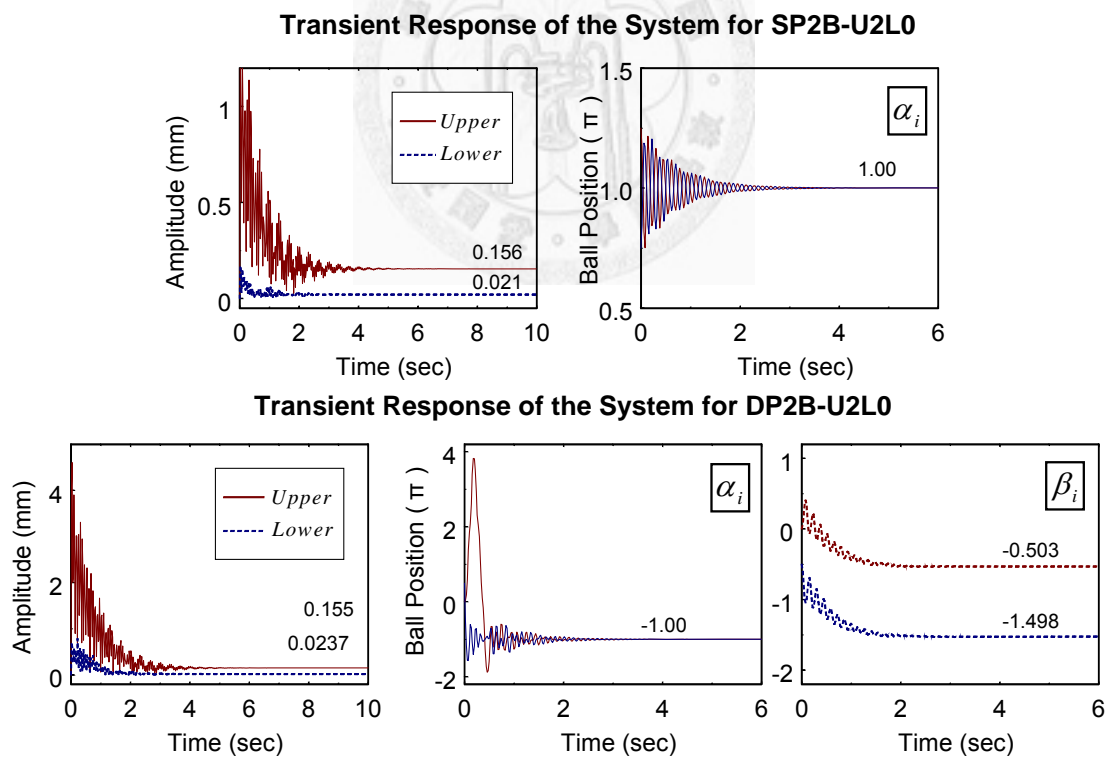


圖 5-25 SP2B 及 DP2B 於 U2L0 (2400 rpm) 的暫態響應與穩態行為

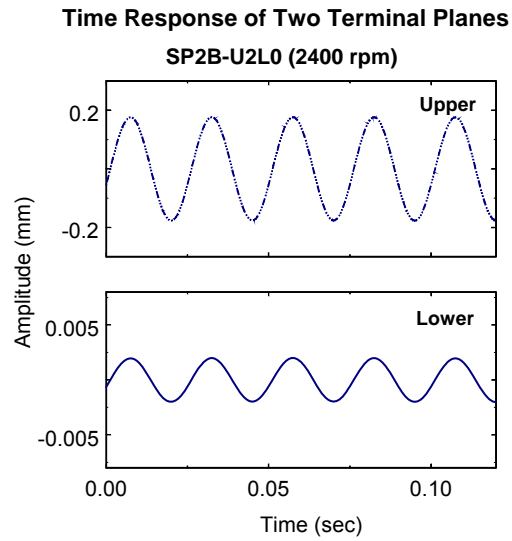


圖 5-26 轉速為 2400 rpm 時，SP2B-U2L0 上、下兩端面的穩態振動歷時

圖 5-27 為 NB、SP2B 及 DP2B 於 U2L0 在轉速 2400 rpm 等速運轉下，實驗系統上下兩端定子位置的理論波形與實驗量測的比較。由圖中可看出，在較大偏心質量作用下，其它干擾因素的影響相對較小，因此實驗量測所得的振幅大小及波形變化，與數值模擬的結果十分相似。

Theoretical and Experimental Results of U2L0 (2400 rpm)

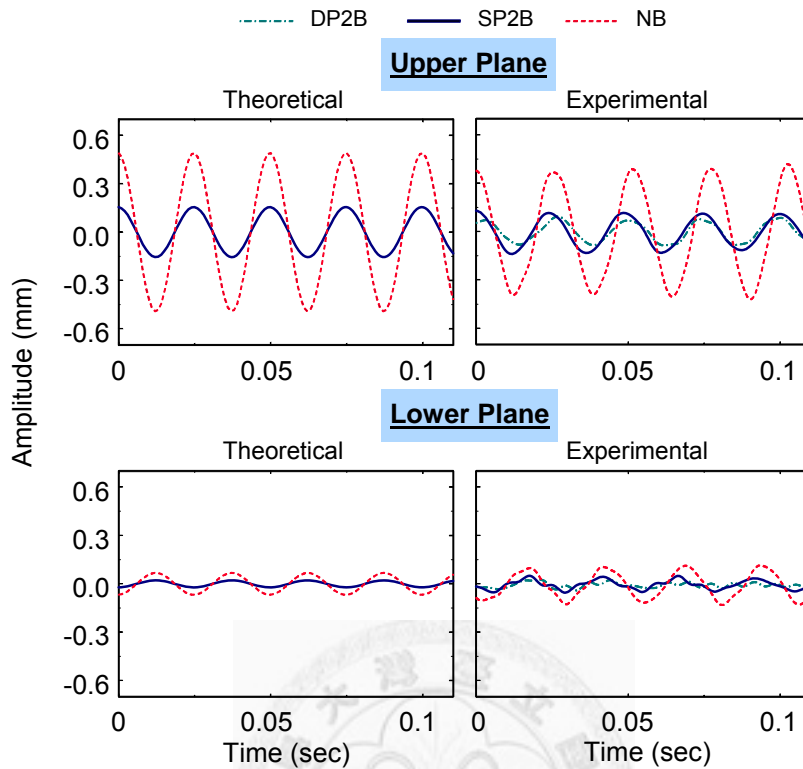


圖 5-27 NB、SP2B 及 DP2B 於 U2L0 (2400 rpm) 的理論波形與實驗量測比較

此實驗機台上、下端定子對於通過轉子質心且垂直於軸心的軸（ \hat{x} 或 \hat{y} 軸）的質量慣性矩相較於偏心激振力於此軸所產生的力矩而言甚大，再加上馬達質量與其質心至下端中心高度差的影響，使得下端面誘發的振幅極小，故前段所述下端面滾珠的定位相角變化差距不易觀察（僅靠擺約 1° ）。為強化此一現象的論述，另設計一組大幅降低定子質量且藉由固定於機架上的馬達與通過質心的皮帶間接傳動的自動平衡實驗機台加以驗證，實驗的觀察與量測結果詳於附錄六。

圖 5-28(a)、(b) 分別為 SP2B 與 DP2B 於 U2L0 在 1600~2400 rpm 轉速區間量測整理所得的結果。圖中顯示自動平衡機構在過臨界轉速下的減振效果，其理論與實驗的結果一致。

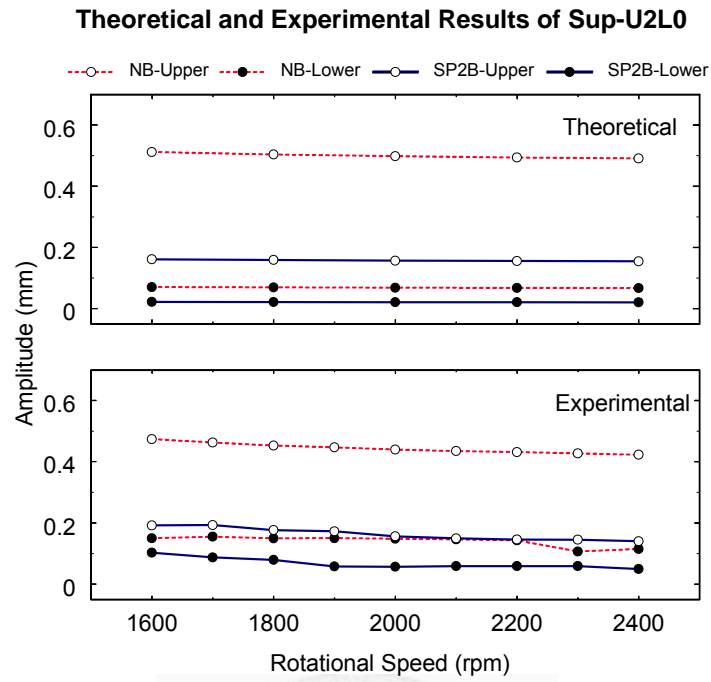


圖 5-28(a) NB 與 SP2B 於 U2L0 (1600~2400 rpm) 的理論與實驗比較

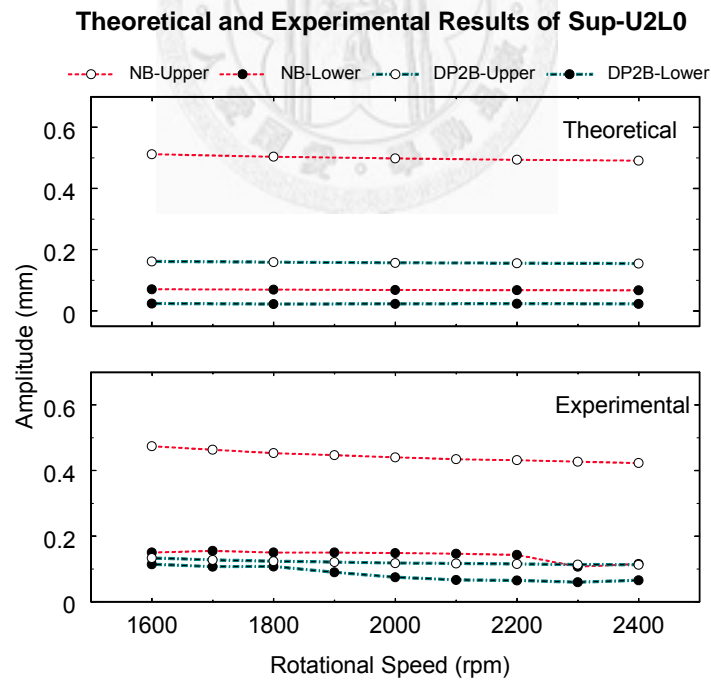


圖 5-28(b) NB 與 DP2B 於 U2L0 (1600~2400 rpm) 的理論與實驗比較

3. Sup-U0L1

對於偏心質量與單一自動平衡機構位於不同端面上時的制振行為，可由 SP2B-U0L1 的實驗與理論分析來了解，同時和 NB 與 DP2B 在同樣參數條件下的結果相互比較。首先架構 U0L1 的偏心量，將 m_1 偏心質量裝置於下端面碟片，使得制振比為 $\eta=0.58$ 。在過臨界轉速區間分別針對 NB、SP2B 與 DP2B 進行實驗。圖 5-29 為 SP2B 及 DP2B 於 U0L1 時，在 2400 rpm 轉速下的滾珠定位。由圖左可知，SP2B 兩滾珠間幾乎是呈 180° 的定位，而圖右顯示 DP2B 實驗所得的現象，轉子下端面滾珠定位在偏心量的異側且張開約 110° 的幅角，而上端面兩滾珠則分開至徑向對邊。

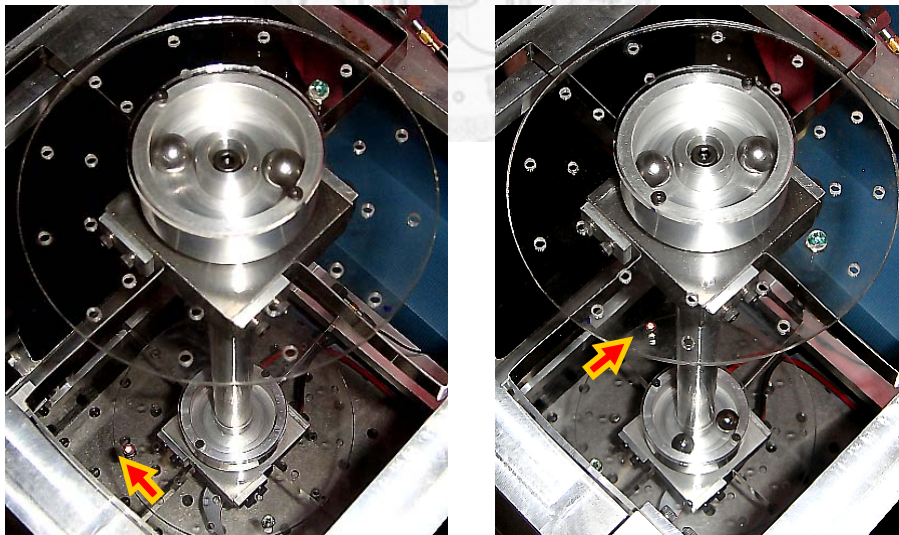


圖 5-29 SP2B 及 DP2B 於 U0L1 (2400 rpm) 的滾珠定位

由數值積分得到 SP2B 及 DP2B 於 U0L1 (2400 rpm) 的暫態響應與穩態行為如圖 5-30 所示。圖 5-31 則為 NB、SP2B 及 DP2B 於 U0L1 (2400 rpm) 的理論波形與實驗量測比較。由圖 5-31 可得知，在此參數條件下，NB 與 SP2B 的波形甚為接近 (NB 上、下端定子中心的振幅分別為 0.021 及 0.179 mm，SP2B 上、下端定子中心的振幅分別為 0.019 及 0.179 mm)。換言之，於上端面裝置自動平衡機構對上、下端定子中心的振動似乎沒有影響。這個奇特的現象是因為在轉子、兩端定子與馬達質

量的影響下，在未裝配自動平衡機構(NB)時，下端面偏心率所誘發的轉子振動型態，近似於以上端面中心為頂點的圓錐型軌跡，此時上端面的振幅十分微小，故而上端面的自動平衡機構(SP2B)，僅需提供微幅的制振，便使上端面呈現完美平衡。此時兩滾珠維持約 179.3° 的相角(圖 5-30)，兩滾珠的效應絕大部分相互抵消，造成 SP2B 和 NB 的結果相近。而 DP2B 則再次說明了前述 DP2B-U1L0 的結論，即當兩端面均裝設自動平衡機構時，若存在偏心率質量的端面已能完全制振，則另一端面的滾珠無需提供任何制振平衡量，此時穩態平衡後兩端面上的自動平衡機構可以視為彼此獨立作用。

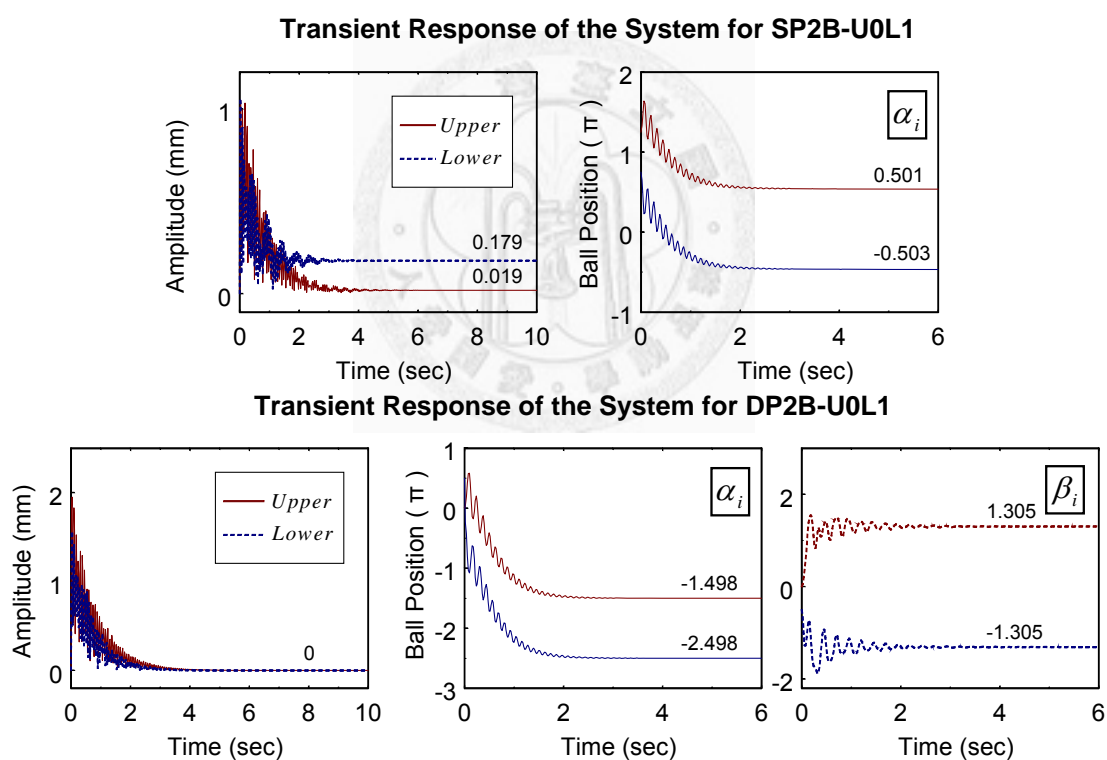


圖 5-30 SP2B 及 DP2B 於 U0L1 (2400 rpm) 的暫態響應與穩態行為

Theoretical and Experimental Results of UOL1 (2400 rpm)

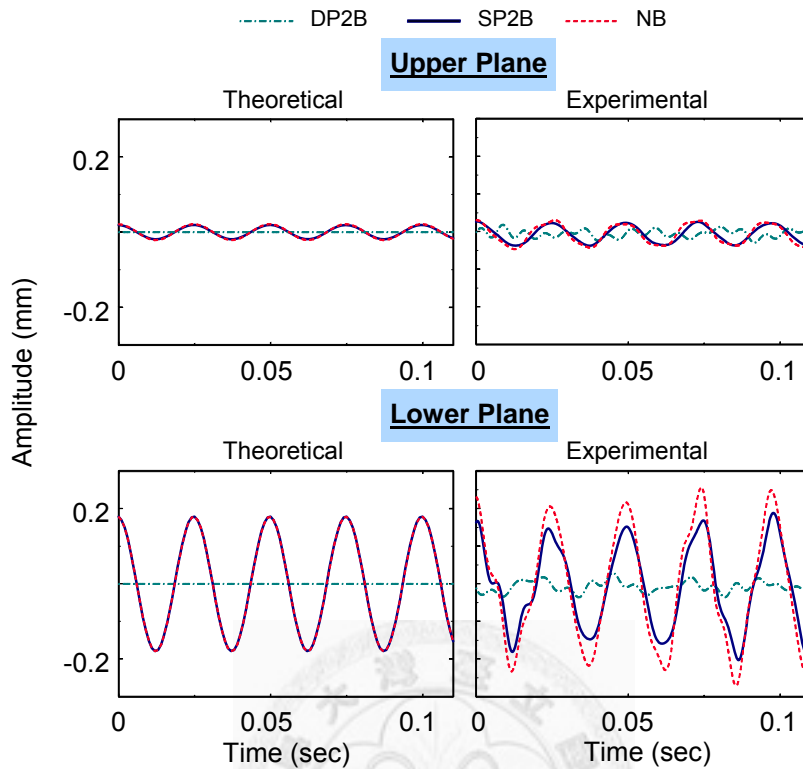


圖 5-31 NB、SP2B 及 DP2B 於 UOL1 (2400 rpm) 的理論波形與實驗量測比較

於 1600~2400 rpm 轉速區間內 UOL1 偏心條件下，NB、SP2B 及 DP2B 旋轉振動振幅的理論與實驗結果比較如圖 5-32(a)、(b)所示，理論和實驗結果大致吻合。SP2B 和 NB 的振幅相似，而 DP2B 在過臨界轉速時確實能在兩端面上有效制振。

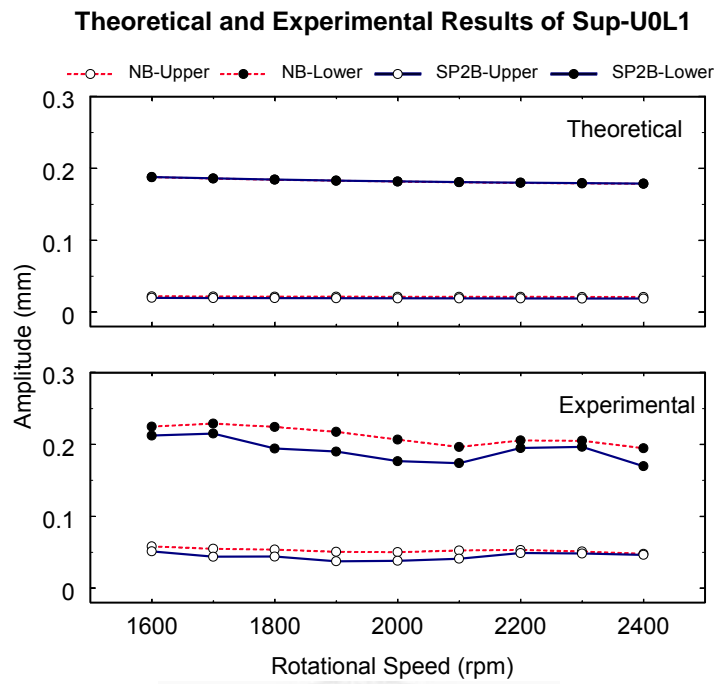


圖 5-32(a) NB 與 SP2B 於 U0L1 (1600~2400 rpm) 的理論與實驗比較

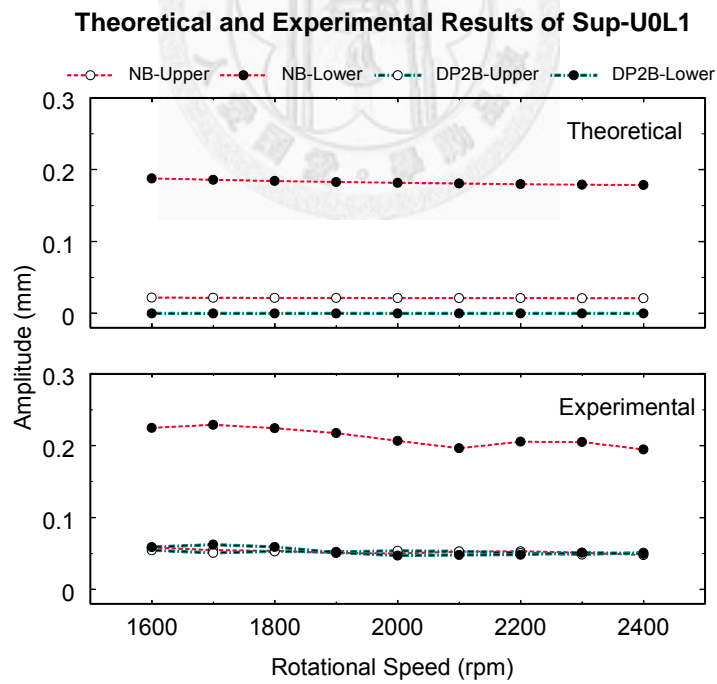


圖 5-32(b) NB 與 DP2B 於 U0L1 (1600~2400 rpm) 的理論與實驗比較

藉由前述在過臨界轉速運轉且僅在單一端面存在偏心質量的轉子系統的理論分析與實驗結果可以獲致下列結論；

一、當單一自動平衡機構與偏心質量位於同一端面，自動平衡機構的制振效果和制振比有關。若滾珠的制振量足以抑制對應偏心量（制振比大於 0.5），則兩端面均得以完全平衡（SP2B-U1L0），但若滾珠的制振量小於偏心量（制振比小於 0.5），則殘餘不平衡量仍然導致兩端面的振動（SP2B-U2L0）。

二、若自動平衡機構與偏心質量分別位於兩端面，（SP2B-U0L1），自動平衡機構將因應系統的振動，改變滾珠的定位，進而有效抑制所在端面的振動（由另一端的偏心質量所引發）。

三、當兩端面均裝置自動平衡機構時，若偏心質量所在端面得以完全制振，則另一端面的兩滾珠張開至徑向對邊，相互平衡（DP2B-U1L0、DP2B-U0L1）。相反的若偏心量無法被完全抑制，則另一端面的兩滾珠張開適當幅角，抑制所在端面的振動（DP2B-U2L0）。



4. Sup-U2L1 ($\angle 0^\circ$)

接著討論在過臨界轉速下，轉子兩端面均存在偏心不平衡量時自動平衡機構的制振行為。將 m_2 與 m_1 分別鎖固於上、下碟片的 48 mm 偏心距處，此時上端面的制振比為 0.33，無法完全制振；下端面的制振比為 0.58，可以完全制振。依序改變兩偏心質量間的相角差為 $\angle 0^\circ$ 、 $\angle 60^\circ$ 及 $\angle 180^\circ$ ，於 1600~2400 rpm 轉速區間量測 NB、SP2B 與 DP2B 三種情形下系統的運動情形。首先討論 U2L1 $\angle 0^\circ$ 的偏心條件下的實驗觀察與量測結果。圖 5-33 為 SP2B 及 DP2B 在 2400 rpm 等速運轉下拍攝的滾珠定位，兩者上端面的滾珠皆定位在偏心質量的徑向對邊，而 DP2B 下端面的滾珠則在 m_1 偏心質量的異側張開一適量幅角。

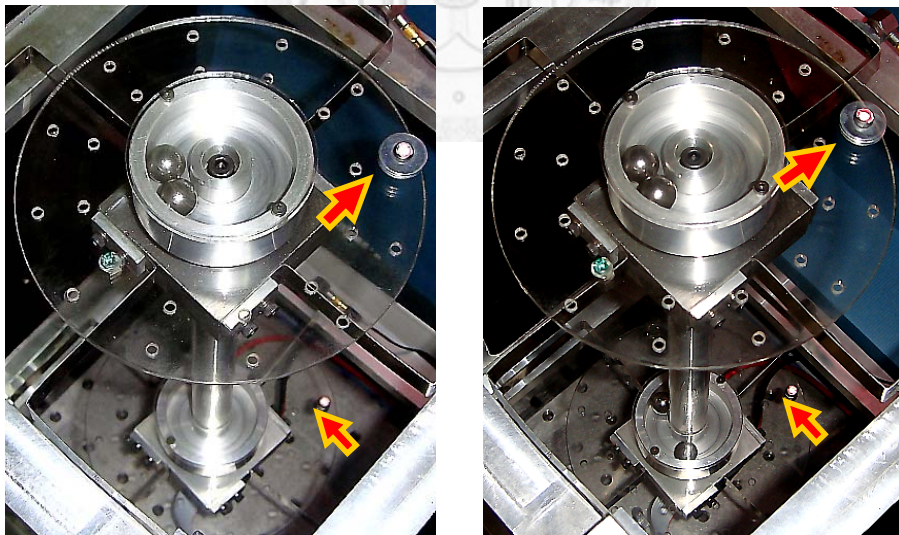


圖 5-33 SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 0^\circ$ (2400 rpm) 的滾珠定位

由理論分析得到 SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 0^\circ$ 在 2400 rpm 時的暫態響應與穩態行為，結果如圖 5-34。圖中顯示穩態時上、下端面滾珠的定位與實驗觀察的現象非常一致。圖 5-35 為理論波形與實驗量測比較，兩者振幅的大小略有不同，但所顯示自動平衡機構的制振效果則十分接近。另外下列各點值得注意：

1. 比較 DP2B 在偏心配置 U2L1 $\angle 0^\circ$ (圖 5-34) 與 U2L0 (圖 5-25) 的情形下，穩態時兩端定子的振幅，兩者理論分析結果完全一致。這是因為下端面的滾珠因應不同偏心量而改變其定位，完全抑制了下端面的振動。

2. 在偏心配置 $U2L1 \angle 0^\circ$ 的情形下，比較 SP2B 及 DP2B 上、下端面穩態振幅的大小可知 (圖 5-34)：增設下端面的自動平衡機構不僅抑制了下端面的振幅，同時也抑制了上端面一部份振動。
3. DP2B 在偏心配置 $U2L1 \angle 0^\circ$ 下，偏心質量 m_1 所在下端面的滾珠張開幅角為 109° ，略小於理論推導完全平衡偏心質量 m_1 滾珠所需張開的幅角 110° 。這是因為 $U2L1 \angle 0^\circ$ 時，上端面無法完全制振，因此下端面的自動平衡機構必須額外提供一些制振平衡量以抑制由上端面所引發的下端面振動。由於此振動量不大，因此滾珠相互靠攏的角度改變量亦不明顯。

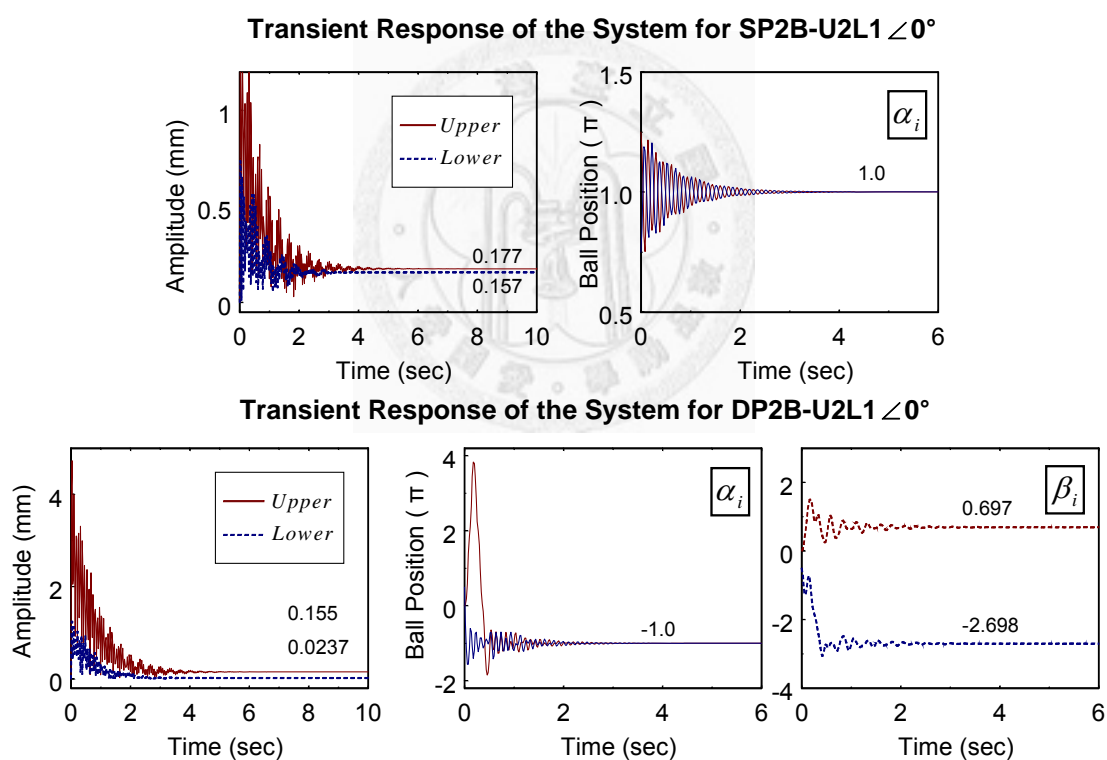


圖 5-34 SP2B 及 DP2B 於 $U2L1 \angle 0^\circ$ (2400 rpm) 的暫態響應與穩態行為

Theoretical and Experimental Results of U2L1 $\angle 0^\circ$ (2400 rpm)

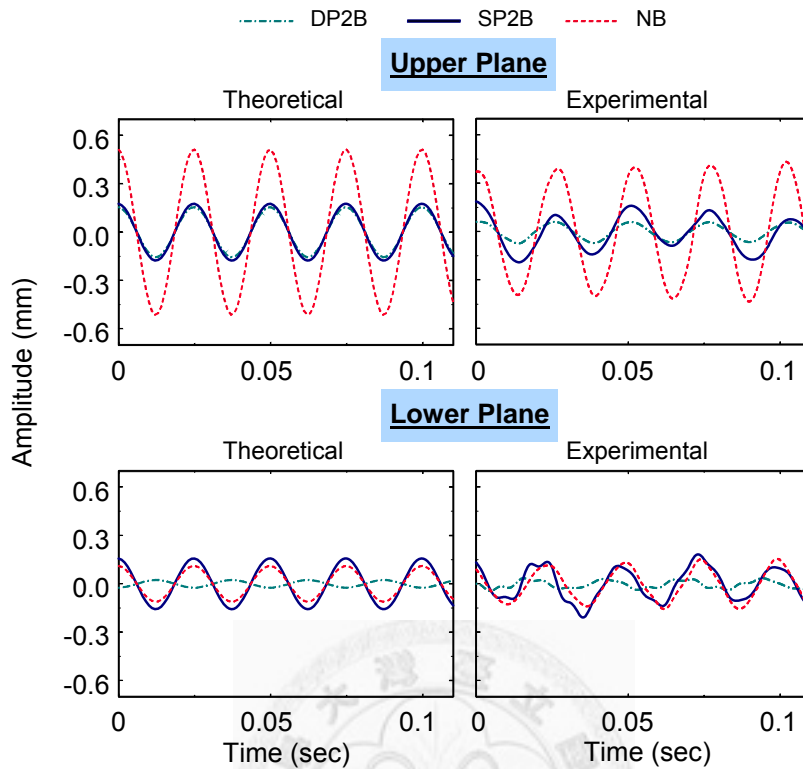


圖 5-35 NB、SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 0^\circ$ (2400 rpm) 的理論與實驗比較

為瞭解在 U2L1 $\angle 0^\circ$ 條件下，自動平衡機構於過臨界轉速區間的制振效果，將 NB、SP2B 及 DP2B 於 1600~2400 rpm 區間實驗所得轉子各端面的穩態振幅大小與理論值相比較，分別整理如圖 5-36(a)、(b) 所示，兩者的定性行為十分接近，同時顯示自動平衡機構有顯著的制振效果。

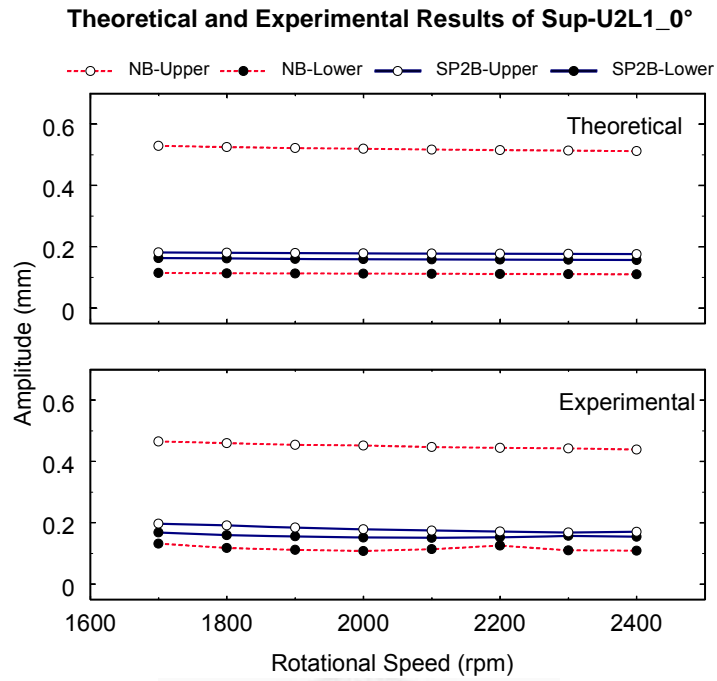


圖 5-36(a) NB 與 SP2B 於 U2L1 $\angle 0^\circ$ (1600~2400 rpm) 的理論與實驗比較

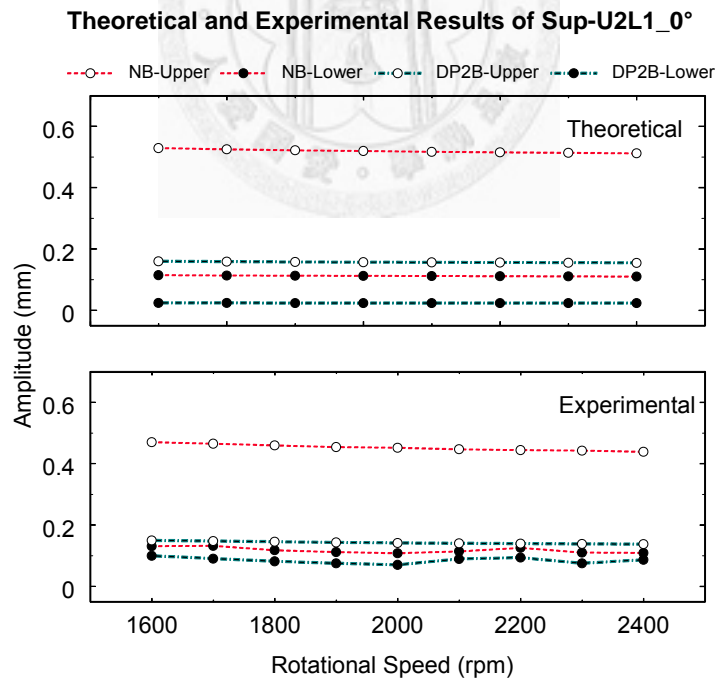


圖 5-36(b) NB 與 DP2B 於 U2L1 $\angle 0^\circ$ (1600~2400 rpm) 的理論與實驗比較

5. Sup-U2L1 ($\angle 60^\circ$)

保持和前一節相同的偏心配置但調整上、下端面兩偏心質量的相角差為 60° ，當轉速為 2400 rpm 時 SP2B 及 DP2B 的滾珠定位如圖 5-37 所示，由於上端面的偏心不平衡量大於滾珠的最大制振量，所以上端面的滾珠依舊靠緊定位於偏心質量的徑向對邊位置。縱使兩端面偏心質量間相差 60° 相角，DP2B 下端面的滾珠仍然定位於 m_1 偏心質量的異側且張開一幅角。

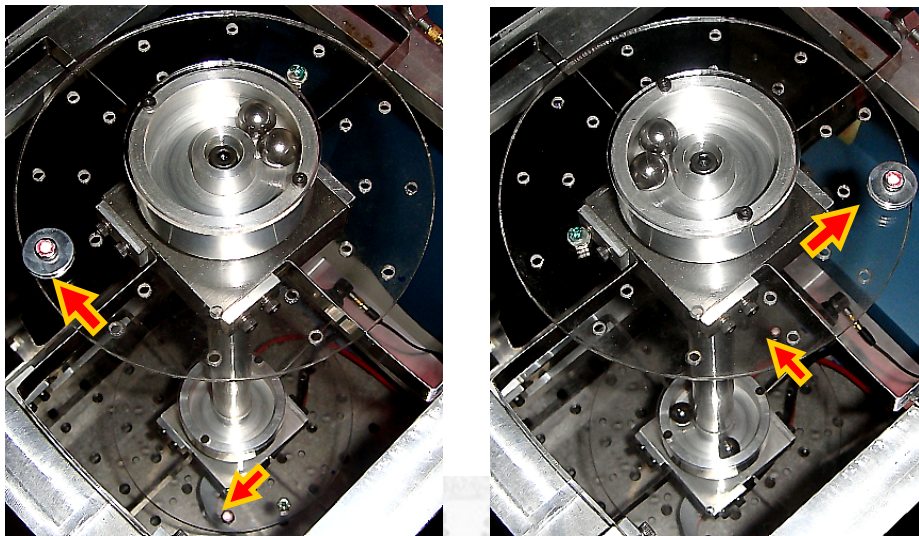
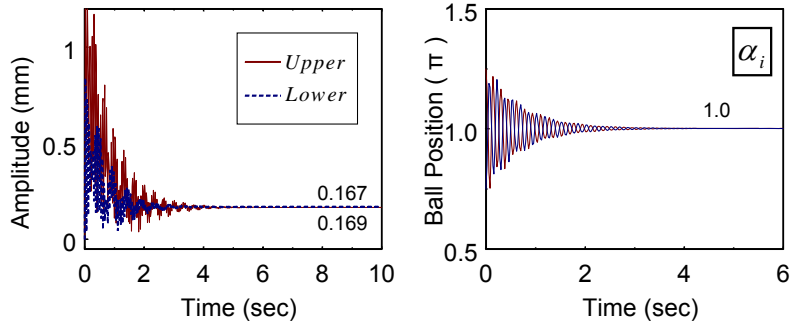


圖 5-37 SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 60^\circ$ (2400 rpm) 的滾珠定位

圖 5-38 為 SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 60^\circ$ 在 2400 rpm 轉速下理論分析所得的暫態響應與穩態行為。理論與實驗觀察所得穩態時滾珠的定位情形十分接近。DP2B 下端面的滾珠張開 109° 幅角且略向上端面偏心質量的異側方向偏移，主要是受到上端面殘餘振動與兩偏心質量間相角差的影響。圖 5-39 為 NB、SP2B 及 DP2B 於此參數條件下穩態時的理論波形與實驗量測結果，兩者相當一致。從 NB 及 SP2B 上、下端面的波形差異可以得知，由於兩端面間偏心激振力的相角差，下端面的振動約略領先 60° 的相角。

Transient Response of the System for SP2B-U2L1 $\angle 60^\circ$



Transient Response of the System for DP2B-U2L1 $\angle 60^\circ$

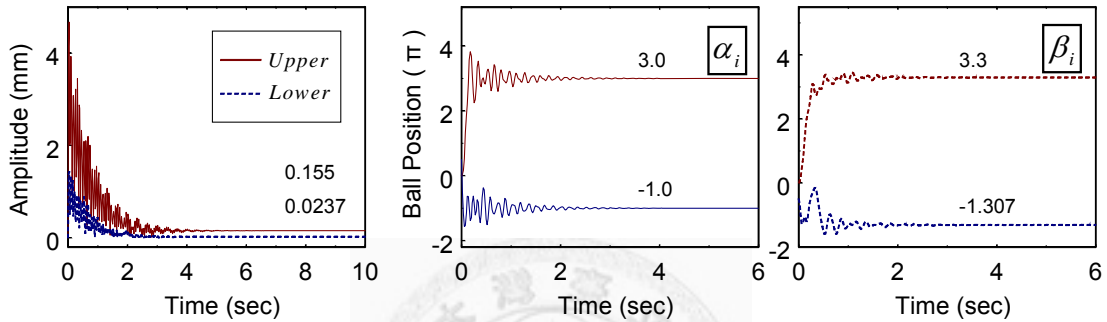


圖 5-38 SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 60^\circ$ (2400 rpm) 的暫態響應與穩態平衡

Theoretical and Experimental Results of U2L1 $\angle 60^\circ$ (2400 rpm)

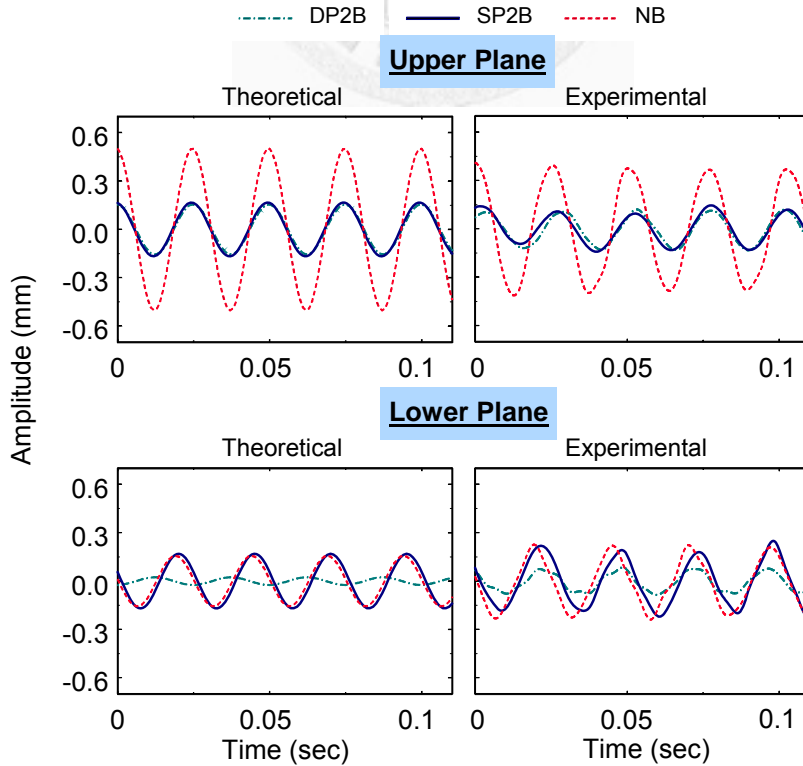


圖 5-39 NB、SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 60^\circ$ (2400 rpm) 的理論與實驗比較

在 1600~2400 rpm 轉速區間，上、下端面穩態振幅的理論值與實驗值的比較如圖 5-40(a)、(b)，其振幅大小雖有差異，但若就 SP2B 與 DP2B 制振的現象而論，理論與實驗兩者間的結論是一致的。

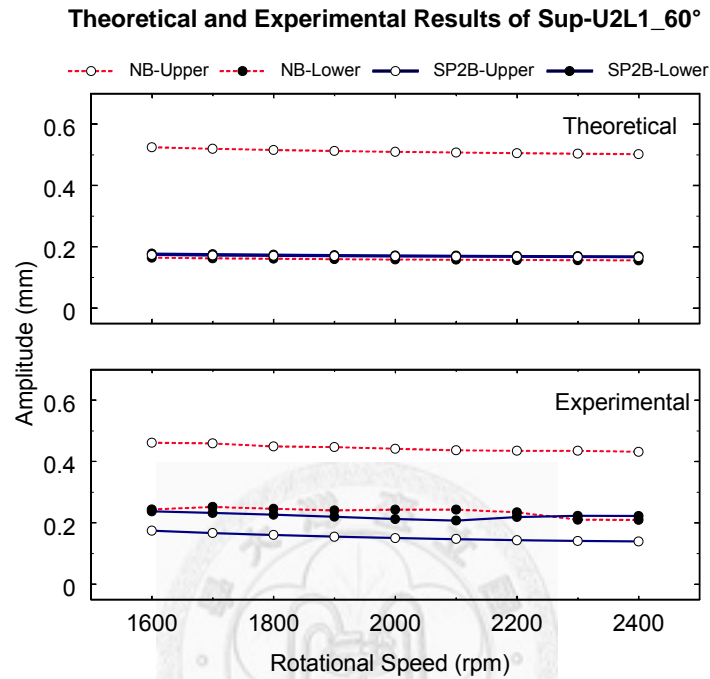


圖 5-40(a) NB 與 SP2B 於 U2L1 $\angle 60^\circ$ (1600~2400 rpm) 的理論與實驗比較

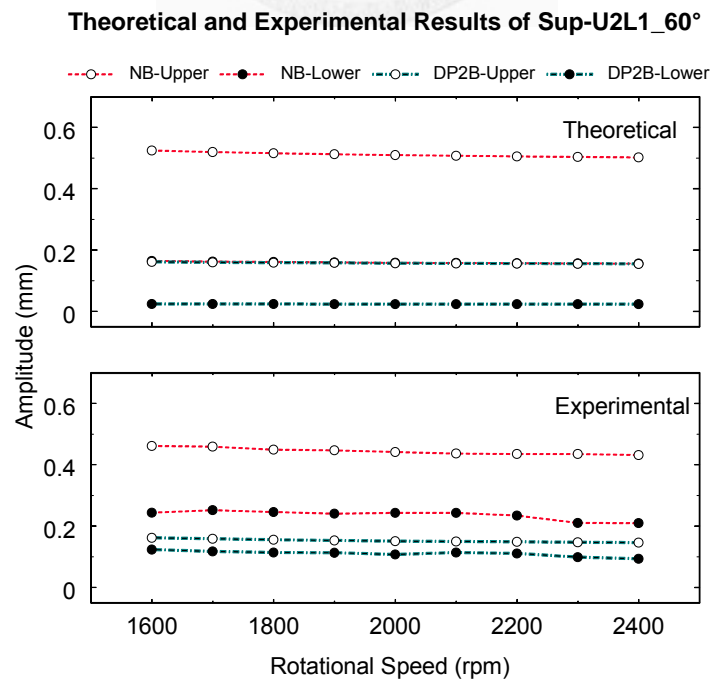


圖 5-40(b) NB 與 DP2B 於 U2L1 $\angle 60^\circ$ (1600~2400 rpm) 的理論與實驗比較

6. Sup-U2L1 ($\angle 180^\circ$)

最後討論 U2L1 $\angle 180^\circ$ 的偏心型態，此時上、下端面的偏心質量的相角為 180° 。

圖 5-41 為實驗量測 SP2B 及 DP2B 在 2400 rpm 轉速下的滾珠定位，結果顯示，SP2B 和 DP2B 上端面滾珠定位在偏心質量的徑向對邊；而 DP2B 下端面的滾珠張開一幅角以抑制下端面的振動。

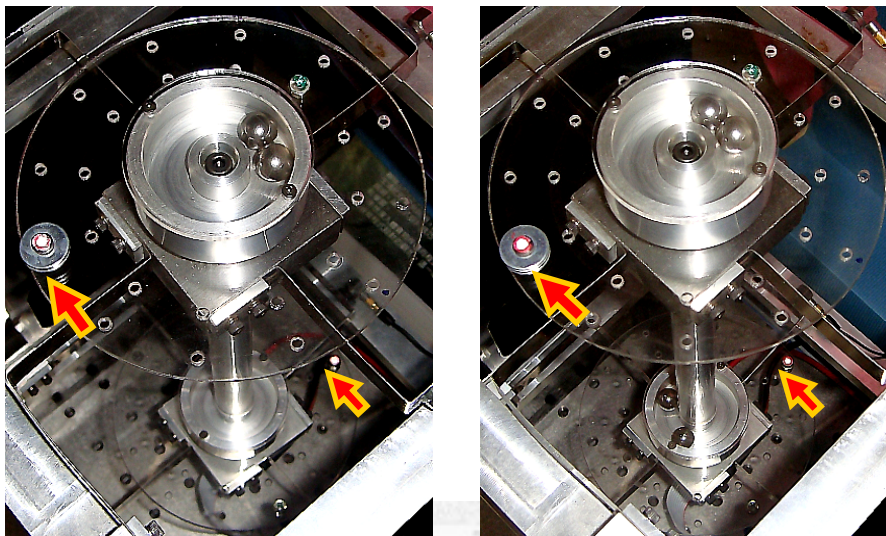
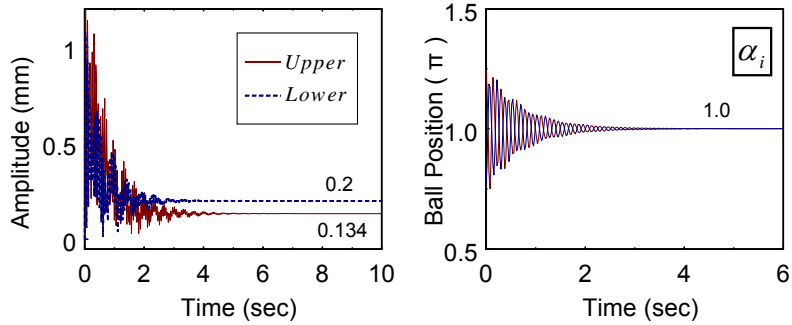


圖 5-41 SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 180^\circ$ (2400 rpm) 的滾珠定位

利用數值分析 2400 rpm 等速運轉下，SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 180^\circ$ 的暫態響應與穩態行為如圖 5-42。穩態時滾珠定位的理論值與圖 5-41 實驗觀察所得相近。至於穩態時兩端面振幅的大小及自動平衡機構的制振效果，可藉由觀察圖 5-43 所示理論波形與實驗結果來比較。如同前述對於 U2L1 $\angle 60^\circ$ 的討論，由於兩端面激振力相角差的影響，NB 與 SP2B 的上、下端面均保持著 180° 的相角差，而 DP2B 的作用則使下端面呈現完美平衡。

Transient Response of the System for SP2B-U2L1 $\angle 180^\circ$



Transient Response of the System for DP2B-U2L1 $\angle 180^\circ$

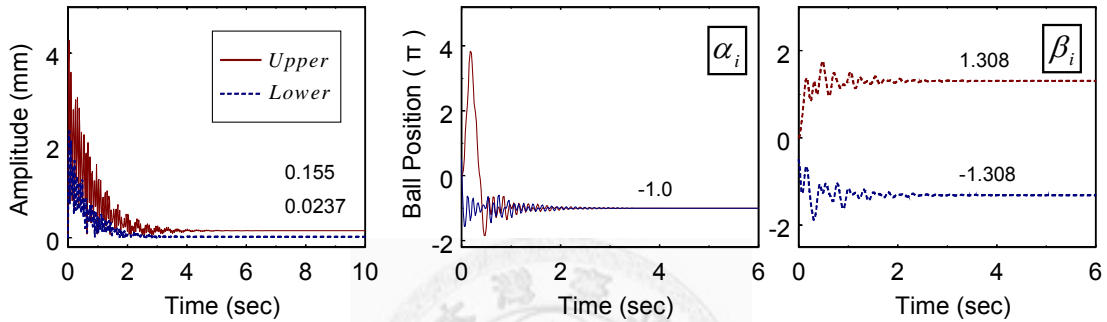


圖 5-42 SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 180^\circ$ (2400 rpm) 的暫態響應與穩態行為

Theoretical and Experimental Results of U2L1 $\angle 180^\circ$ (2400 rpm)

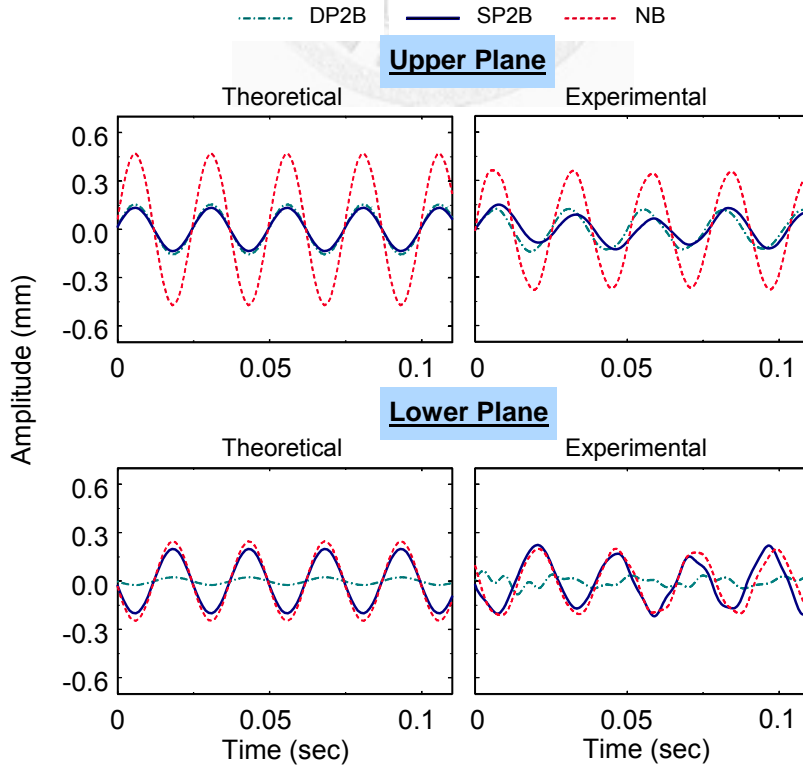


圖 5-43 NB、SP2B 及 DP2B 於 U2L1 $\angle 180^\circ$ (2400 rpm) 的理論與實驗比較

間隔 100 rpm，記錄轉速區間 1600~2400 rpm 內各端面穩態時的振幅與理論分析的數值相互比較，針對 SP2B 及 DP2B 分別整理如圖 5-44(a)、(b)。理論與實驗的結果相當一致，都顯示自動平衡機構有良好的制振功效。

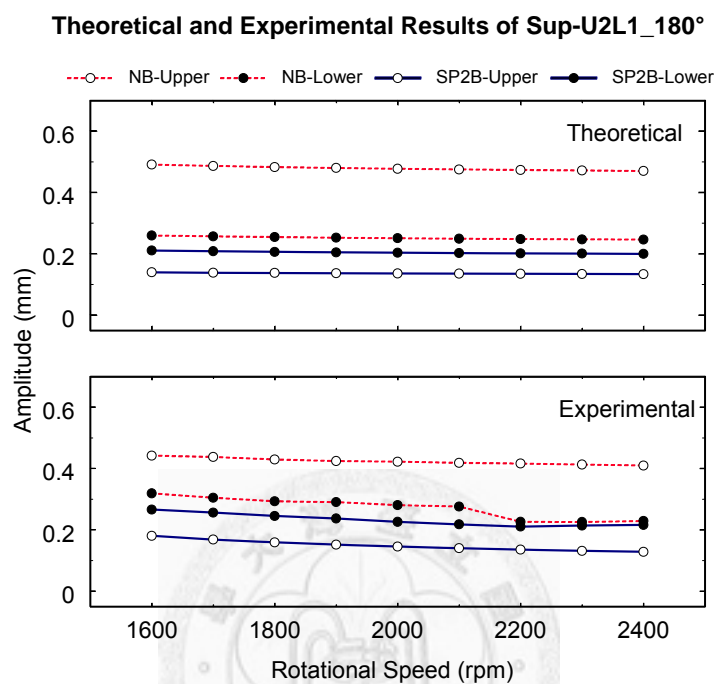


圖 5-44(a) NB 與 SP2B 於 U2L1 $\angle 180^\circ$ (1600~2400 rpm) 的理論與實驗比較

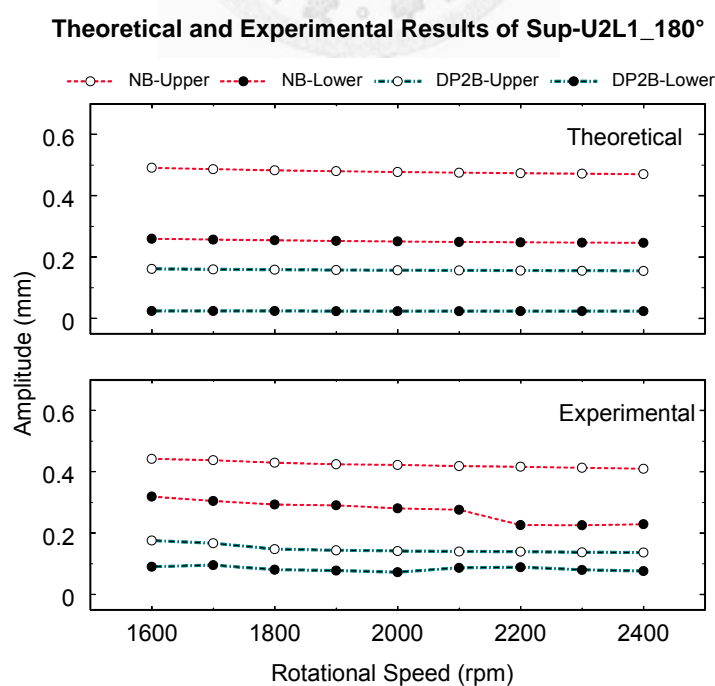


圖 5-44(b) NB 與 DP2B 於 U2L1 $\angle 180^\circ$ (1600~2400 rpm) 的理論與實驗比較

第六章 結論

本論文主要討論滾珠型自動平衡機構在二維和三維系統旋轉制振的應用。在二維系統方面，利用解析方法證明配備滾珠型自動平衡機構系統平衡解穩定性的一般特性，提出增加自動平衡機構強韌性的新設計並討論之。在三維系統方面則以理論與實驗探討滾珠型自動平衡機構在剛性長轉子偏心制振的行為與效能。首先分別建構滾珠型自動平衡機構配置於二維及三維系統的理论模型，接著藉由 Lagrange's equations 推導各系統的統御方程，解出平衡解並探討存在區域與限制條件，再進一步地以 Routh-Hurwitz criterion 判斷平衡解的穩定性，最後以實驗定性地驗證三維系統的制振行為並與理論分析結果進行比較。綜整全文獲致的結論分述如下。

首先，基於第二章對於雙滾珠自動平衡機構應用於二維偏心碟片制振時，各平衡位置穩定性的解析性研究，與主要系統參數對穩定區域影響的探討，得到下列特性：

- 一、 雙滾珠的二維制振系統，具有六種平衡解，其中只有兩種平衡解（一為完全平衡解，一為不完全平衡解）可能是穩定的，並且在無因次化轉速與制振比的參數平面上，此兩種平衡解的穩定平衡區域不重疊。
- 二、 分析這兩個可能穩定的平衡解的穩定區域發現，在系統參數固定時，任一工作轉速下至多僅對應存在一個穩定的平衡位置。
- 三、 當滾珠制振平衡量小於偏心不平衡量時，不存在完全平衡解。當工作轉速低於臨界轉速時，不存在穩定的完全平衡解。
- 四、 當滾珠制振量大於偏心不平衡量，且工作轉速高於臨界轉速時，完全平衡是系統唯一可能的穩定平衡解。
- 五、 當工作轉速低於臨界轉速，或是滾珠制振量小於偏心不平衡量時，唯一可

能的穩定平衡解是不完全平衡解。

- 六、 當滾珠制振量小於偏心不平衡量時，系統支承阻尼越低則不完全平衡解的不穩定區域越大。當滾珠制振量大於偏心不平衡量時，系統支承阻尼越低則不完全平衡解的不穩定區域越小。

第三章中我們將研究擴展至雙滾珠-彈簧系統，藉由對系統平衡解存在區間的討論與各平衡解穩定性的解析，以及與傳統固定軌道的雙滾珠系統的比較，得到下列結果：

- 一、 雙滾珠-彈簧自動平衡機構可以有效抑制因固有偏心不平衡量所引發系統的迴轉振動。
- 二、 雙滾珠-彈簧的二維制振系統，有六種平衡解，其中四種經解析證明為不穩定平衡，並且可解析出不存在任何穩定平衡解的區域邊界。
- 三、 此系統存在唯一可能的完全平衡解以及唯一可能的不完全平衡解，並且在固定系統參數時，任一工作轉速下至多只對應存在一個穩定的平衡位置。
- 四、 當工作轉速高於雙滾珠-彈簧制振系統的臨界轉速（其值小於固定軌道雙滾珠系統的臨界轉速）時，始可能存在穩定的完全平衡解。當系統工作轉速低於此臨界轉速時，則不存在穩定的完全平衡解。
- 五、 系統完全平衡時，制振單元的彈簧以該轉速下的平衡長度箝制滾珠，此時兩滾珠定位於碟片偏心質量的徑向異側，並張開適量的幅角。
- 六、 在適當的系統參數條件下，雙滾珠-彈簧自動平衡系統相較於傳統固定軌道的雙滾珠系統，具有較大的完全平衡穩定區域。

在第四章中建構了兩端面配置滾珠型自動平衡機構的剛性偏心長轉子的理論模型，求得其完全平衡解、靜態不平衡解與力偶不平衡解的解析形式，同時也以數值分析方式探討系統參數對完全平衡解穩定區域的影響。整理結論如下：

- 一、 兩端面裝置滾珠型自動平衡機構的系統，在適當參數條件下，能完全抑制偏心剛性長轉子的三維振動。
- 二、 當轉速高於臨界轉速時，系統才可能出現穩定的完全平衡。
- 三、 在靜態不平衡量下，三維系統等價於二維系統。此時三維系統的制振特性和二維系統相同。
- 四、 當系統完全平衡時，轉子兩端面的自動平衡機構彼此獨立運作。
- 五、 在適當範圍內增加系統阻尼與滾珠軌道阻尼，能使轉子系統完全平衡解的穩定區間加大。

於第五章中，我們首度提出自動平衡機構對於三維制振的實驗驗證。為了較精確的比較實驗和先前理論分析的結果，針對實驗系統定子的質量、轉矩效應，修改、建構更符合實驗系統的理論模型。藉由數值分析與實驗量測的結果，比較得知兩者在定性上的行為十分一致。另外，為考量系統動力傳輸方式與定子質量分佈的差異，除設計以馬達直接傳動的系統外，另架構以皮帶為動力傳輸元件的系統，使自動平衡機構對偏心長轉子三維制振的現象觀察更臻完備。綜合整理實驗的結果與改善建議如下

- 一、 當系統轉速低於臨界轉速時，滾珠確實定位於偏心質量附近，加劇轉子的偏心振動
- 二、 若兩端面滾珠的制振量大於個別端面的偏心不平衡量，且當系統轉速高於臨界轉速時，兩端面滾珠各自定位至對應偏心質量的徑向異側，且張開適量的幅角，使轉子完全平衡。
- 三、 當其中一端面的滾珠平衡制振量小於轉子的偏心不平衡量時，另一端面的滾珠將改變平衡定位以抑制部份轉子的振動。
- 四、 由馬達直接傳動的實驗架構，當系統完全平衡時獲致的實驗結果與理論十分吻合，但是當系統無法完全平衡時，因為馬達質量的影響使得轉子上、

下端面的質量分佈條件無法一致，造成兩端穩態徑向振幅定量上和理論預期有些誤差。然兩者定性行為的描述，仍相當一致。

- 五、 由皮帶經轉子質心間接傳動的實驗架構，可以更明確的驗證轉子在力偶不平衡下的特性，但由於皮帶的箝制，不易得到靜態不平衡量下的振動特性。
- 六、 當轉子振幅增大時，引發 L 型簧片產生極大變形，此時的彈性支承的等向性條件亦受影響，振動軌跡無法維持正圓。

本論文探討了滾珠型自動平衡機構在二維偏心碟片與三維偏心長轉子的制振特性與行為，對平衡解及其穩定性提出了解析的結果，並輔以實驗驗證。關於自動平衡機構應用於三維系統的制振研究在近幾年才逐步開展，尚欠缺對於雙滾珠三維制振系統不完全平衡解的解析形式以及包含週期解的全域動態（Global Dynamic）特性研究。未來應可在此領域繼續探究，以期能更精確掌握三維制振的特性，提供系統設計者與相關產業有更完備的資料依循。

參考文獻

- [1] Lee, J. and Moorham, W. K. V., 1996, "Analytical and Experimental Analysis of a Self-Compensating Dynamic Balancer in a Rotating Mechanism," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 118, pp. 468-475.
- [2] Rajalingham, C., Bhat, R. B., and Rakheja, S., 1998, "Automatic Balancing of Flexible Vertical Rotors Using a Guided Ball," *International Journal of Mechanical Science*, 40(9), pp. 825-834.
- [3] Chao, P.C.P., Sung, C.-K., Huang, C.-L., and Huang, J.-S., 2005, "Precision Repositioning of the Balancing Ball in an Auto-Balancer System Via a Fuzzy Speed Regulator Equipped with a Sliding-Mode Observer," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 13(6), pp. 1107-1118.
- [4] Lu, C.-J., 2006, "Stability Analysis of a Single-Ball Automatic Balancer," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 128, pp. 122-125.
- [5] Alexander, J. D., 1964, "An Automatic Dynamic Balancer," *Proceedings for the Second Southeastern Conference*, 2, pp. 415-426.
- [6] Cade, J. W., 1965, "Self-compensating Balancing in Rotating Mechanism," *Design News*, pp.234-239.
- [7] Bovik, P. and Hogfors, C., 1986, "Autobalancing of Rotors," *Journal of Sound and Vibration*, 111(3), pp. 429-440.
- [8] Kang, J.-R., Chao, C.-P., Huang, C.-L., and Sung, C.-K., 2001, "The Dynamics of a Ball-Type Balancer System Equipped with a Pair of Free-Moving Balancing Masses," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 123, pp. 456-465.

- [9] Lu, C.J., Wang, M.C., and Huang, S.H., 2009, "Analytical Study of the Stability of a Two-Ball Automatic Balancer," *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(3), pp. 884-896.
- [10] Chung, J., 2005, "Effect of Gravity and Angular Velocity on an Automatic Ball Balancer," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 219(1), pp. 43-51.
- [11] Lu, C.-J., and Hung, C.-H., 2008, "Stability Analysis of a Three-Ball Automatic Balancer," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 130, 051008.
- [12] Green, K., Champneys, A.R., Friswell, M.I., and Munoz, A.M., 2008, "Investigation of a Multi-Ball, Automatic Dynamic Balancing Mechanism for Eccentric Rotors," *Philosophical Transactions of the Royal Society a-Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 366(1866), pp. 705-728.
- [13] Kim, W., Chung, J., 2002, "Performance of Automatic Ball Balancers on Optical Disc Drives," *Journal of Mechanical Engineering Science*, 216, pp. 1071-1080.
- [14] Huang, W.-Y., Chao, C.-P., Kang, J.-R., and Sung, C.-K., 2002, "The Application of Ball-type Balancers for Radial Vibration Reduction of High-speed Optic Disk Drivers", *Journal of Sound and Vibration*, 250(3), pp. 415-430.
- [15] Chao, P.C.P., Sung, C.-K., and Wang, C.-C., 2005, "Dynamic Analysis of the Optical Disk Drives Equipped with an Automatic Ball Balancer with Consideration of Torsional Motions," *ASME Journal of Applied Mechanics*, 72(6), pp. 826-842.
- [16] Chao, P.C.P., Sung, C.-K., and Leu, H.-C., 2005, "Effects of Rolling Friction of the Balancing Balls on the Automatic Ball Balancer for Optical Disk Drives," *Journal of Tribology*, 127(4), pp. 845-856.

- [17] Yang, Q., Ong, E.-H., Sun, J., Guo, G., Lim, S.-P., 2005, "Study on the Influence of Friction in an Automatic Ball Balancing System," *Journal of Sound and Vibration*, 285, pp. 73-99.
- [18] Van de Wouw, N., Van den Heuvel, M.N., Nijmeijer, H., and Van Rooij, J.A., 2005, "Performance of an Automatic Ball Balancer with Dry Friction," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(1), pp. 65-82.
- [19] Green, K., Champneys, A. R. and Friswell, M. I., 2006, "Analysis of the Transient Response of an Automatic Dynamic Balancer for Eccentric Rotors," *International Journal of Mechanical Sciences*, 48, pp. 274-293.
- [20] Green, K., Champneys, A.R., and Lieven, N.J., 2006, "Bifurcation Analysis of an Automatic Dynamic Balancing Mechanism for Eccentric Rotors," *Journal of Sound and Vibration*, 291(3-5), pp. 861-881.
- [21] Chung, J. and Ro. D.S., 1999, "Dynamic Analysis of An Automatic Dynamic Balancer for Rotating Mechanisms," *Journal of Sound and Vibration*, 228(5), pp. 1035-1056.
- [22] Chung, J. and Jang, I., 2003, "Dynamic Response and Stability Analysis of An Automatic Ball Balancer for a Flexible Rotor," *Journal of Sound and Vibration*, 259(1), pp. 31-43.
- [23] Chao, P.C.P., Huang, Y.-D., and Sung, C.-K., 2003, "Non-planar dynamic modeling for the optical disk drive spindles equipped with an automatic balancer", *Mechanism and Machine Theory*, 38, pp. 1289-1305.
- [24] DeSmidt, H. A., 2009, "Imbalance Vibration Suppression of a Supercritical Shaft via an Automatic Balancing Device," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 131, 041001.

- [25] Kim, W., Lee, D.-J., and Chung, J., 2005, "Three-Dimensional Modelling and Dynamic Analysis of an Automatic Ball Balancer in an Optical Disk Drive," *Journal of Sound and Vibration*, 285(3), pp. 547-569.
- [26] Rajalingham, C. and Bhat, R.B., 2006, "Complete Balancing of a Disk Mounted on a Vertical Cantilever Shaft Using a Two Ball Automatic Balancer," *Journal of Sound and Vibration*, 290(1-2), pp. 169-191.
- [27] Hedaya, M.T. and Sharp, R.S., 1977, "Analysis of a New Type of Automatic Balancer," *Journal of Mechanical Engineering Science*, 19(5), pp. 221-226.
- [28] Rodrigues, D. J., Champneys, A. R., Friswell, M. I., and Wilson, R. E., 2008, "Automatic Two-plane Balancing for Rigid Rotors ," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 43, pp. 527-541.
- [29] Ehyaei, J., Moghaddam M. M., 2009, "Dynamic Response and Stability Analysis of an Unbalanced Flexible Rotating Shaft Equipped with n Automatic Ball-balancers ," *Journal of Sound and Vibration*, 321, pp. 554-571.
- [30] Wang, M.-C., and Lu, C.-J., 2007, "Dynamic Characteristics of a One-Unit Ball-Rod-Spring Balancer," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 129, pp. 520-524.
- [31] 蔡震星與郭立華，大小滾珠式之碟片自動平衡裝置，源興科技股份有限公司，中華民國專利公告號398671，2000。
- [32] 蔡震星與郭立華，多極磁石式之碟片自動平衡裝置，源興科技股份有限公司，中華民國專利公告號414357，2000。
- [33] 廖正堯、陳子南與郭立華，光碟機碟片自動平衡系統的控制方法（一），建興電子科技股份有限公司，中華民國專利號468152，2000。
- [34] 蔡俊毅，高速鑽軸自動平衡裝置，中華民國專利公告號00498810，2002。

[35] L. Meirovitch, 1986, Elements of Vibration Analysis, McGraw-Hill, New York, U.S.A.

[36] Ogata, K., 1970, Modern Control Engineering, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, U.S.A.

[37] Genta, G., 2005, Dynamics of Rotating Systems, Springer Science, Inc., New York, U.S.A.



附錄一

滾珠-彈簧自動平衡系統的特徵多項式係數 a_i ($i = 0 \sim 12$) 可表示成

$$a_0 = \delta_1^2 \delta_2^2 \mu_b^4 (1 - 2\mu_b)^2 \quad (\text{A1.1})$$

$$a_1 = 4\delta_1^2 \delta_2^2 \mu_b^4 (1 - 2\mu_b) [\zeta + 2\zeta_b (1 - \mu_b)] \quad (\text{A1.2})$$

⋮
⋮

$$\begin{aligned} a_{11} = & 2\Omega^2 \mu_b^4 \{ 2\zeta_b \Omega^2 (f^2 - \Omega^2) \delta_1^2 \delta_2^2 \mu_b [(f^2 - \Omega^2)(\Omega^2 - 1) + 2\Omega^4 \mu_b] + \\ & r^2 \Omega^2 [2r^2 \zeta \Omega^4 (\Omega^2 + 1) \sin^2(\theta - \beta_1) \sin^2(\theta - \beta_2) - (\zeta_b (f^2 - \Omega^2) \\ & ((1 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2 \Omega^2) + \Omega^4 (3f^2 \zeta - 2\zeta_b + (\zeta + 2\zeta_b) \Omega^2) \mu_b) \\ & (\sin^2(\theta - \beta_2) \delta_1^2 + \sin^2(\theta - \beta_1) \delta_2^2) - (2f^2 \zeta + \zeta_b + 2(\zeta (2\zeta \zeta_b + \\ & f^2 - 1) - \zeta_b) \Omega^2 + (\zeta_b - 2\zeta) \Omega^4 + 3\zeta \Omega^4 \mu_b) r \Omega^2 (\sin^2(\theta - \beta_2) \\ & \cos(\theta - \beta_1) \delta_1 + \sin^2(\theta - \beta_1) \cos(\theta - \beta_2) \delta_2)] + \delta_1 \delta_2 [2r^2 \Omega^2 \cos(\theta - \beta_1) \\ & \cos(\theta - \beta_2) [(f^2 - \Omega^2) (\zeta_b - (2\zeta_b + \zeta(1 - 4\zeta \zeta_b))) \Omega^2 + (\zeta_b - \zeta) \Omega^4 + \\ & f^2 \zeta (1 + \Omega^2)] + \Omega^4 (3f^2 \zeta - \zeta_b + (\zeta_b - 3\zeta) \Omega^2) \mu_b] + r (\cos(\theta - \beta_2) \delta_1 + \\ & \cos(\theta - \beta_1) \delta_2) (\zeta_b (f^2 - \Omega^2)^2 ((\Omega^2 - 1)^2 + 4\zeta^2 \Omega^2) + \\ & (f^2 - \Omega^2) (\zeta (3f^2 + \Omega^2) + 4\zeta_b (\Omega^2 - 1)) \Omega^4 \mu_b + 2\zeta_b \Omega^8 \mu_b^2) \} \end{aligned} \quad (\text{A1.3})$$

$$\begin{aligned} a_{12} = & (\Omega^4 \mu_b^4 / 8) \{ 4r^2 \Omega^2 \sin^2(\theta - \beta_1) [2r^2 \Omega^2 ((\Omega^2 - 1)^2 + 4\zeta^2 \Omega^2) \sin^2(\theta - \beta_2) - \\ & 2\Omega^2 \delta_2^2 \mu_b ((f^2 - \Omega^2) (\Omega^2 - 1) + \Omega^4 \mu_b) - 2r \cos(\theta - \beta_2) \delta_2 ((f^2 - \Omega^2) \\ & ((\Omega^2 - 1)^2 + 4\zeta^2 \Omega^2) + \Omega^4 (\Omega^2 - 1) \mu_b)] + 2\Omega^2 \delta_1^2 \mu_b [4\Omega^2 (f^2 - \Omega^2)^2 \\ & \sin^2(\beta_1 - \beta_2) \delta_2^2 \mu_b - 4r^2 \Omega^2 \sin^2(\theta - \beta_2) ((f^2 - \Omega^2) (\Omega^2 - 1) + \Omega^4 \mu_b) + \\ & r (f^2 - \Omega^2) \delta_2 (2 \cos(\theta - \beta_2) (2(f^2 - \Omega^2) (\Omega^2 - 1) + 3\Omega^4 \mu_b) - \Omega^4 (\cos(\theta + \\ & 2\beta_1 - 3\beta_2) - 3 \cos(\theta - 2\beta_1 + \beta_2)) \mu_b)] + r \delta_1 [-8r^2 \Omega^2 \cos(\theta - \beta_1) \\ & \sin^2(\theta - \beta_2) ((f^2 - \Omega^2) ((\Omega^2 - 1)^2 + 4\zeta^2 \Omega^2) + \Omega^4 (\Omega^2 - 1) \mu_b) + \\ & 2\Omega^2 (f^2 - \Omega^2) \delta_2^2 \mu_b (4(f^2 - \Omega^2) (\Omega^2 - 1) \cos(\theta - \beta_1) + \Omega^4 (6 \cos(\theta - \beta_1) + \\ & 3 \cos(\theta + \beta_1 - 2\beta_2) - \cos(\theta - 3\beta_1 + 2\beta_2)) \mu_b) + r \delta_2 (8(f^2 - \Omega^2) \\ & \cos(\theta - \beta_1) \cos(\theta - \beta_2) ((f^2 - \Omega^2) ((\Omega^2 - 1)^2 + 4\zeta^2 \Omega^2) + \\ & 2\Omega^4 (\Omega^2 - 1) \mu_b) + \Omega^8 (3 \cos(2\theta + \beta_1 - 3\beta_2) + 2 \cos(2\theta - \beta_1 - \beta_2) - \\ & 7 \cos(\beta_1 - \beta_2) - \cos(3(\beta_1 - \beta_2)) + 3 \cos(2\theta - 3\beta_1 + \beta_2)) \mu_b^2) \} \end{aligned} \quad (\text{A1.4})$$

附錄二

為簡化轉子系統總動能的表示式；令

$$\begin{aligned}
 q_{C1} &= \sum_{i=1}^2 [\cos \alpha_i(t) + \cos(\phi + \beta_i(t))] \\
 q_{C2} &= \sum_{i=1}^2 [\cos \alpha_i(t) - \cos(\phi + \beta_i(t))] \\
 q_{C3} &= \sum_{i=1}^2 [\cos \alpha_i(t)(\omega + \dot{\alpha}_i(t)) - \cos(\phi + \beta_i(t))(\omega + \dot{\beta}_i(t))] \\
 q_{S1} &= \sum_{i=1}^2 [\sin \alpha_i(t) + \sin(\phi + \beta_i(t))] \\
 q_{S2} &= \sum_{i=1}^2 [-\sin \alpha_i(t) + \sin(\phi + \beta_i(t))] \\
 q_{S3} &= \sum_{i=1}^2 [-\sin \alpha_i(t)(\omega + \dot{\alpha}_i(t)) + \sin(\phi + \beta_i(t))(\omega + \dot{\beta}_i(t))]
 \end{aligned}$$

則轉子系統的總動能 $T =$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left\{ \omega^2 \left[J_P + m_{eL} \left[\left(\frac{L}{2} \gamma_1(t) - y(t) \right)^2 + \left(\frac{L}{2} \gamma_2(t) + \varepsilon_L + x(t) \right)^2 \right] + \right. \\
 & m_{eR} \left[\varepsilon_R^2 + \left(\frac{L}{2} \gamma_1(t) + y(t) \right)^2 + \left(\frac{L}{2} \gamma_2(t) - x(t) \right)^2 + \varepsilon_R [\cos \phi (2x(t) - L\gamma_2(t)) + \right. \\
 & \left. \left. \sin \phi (2y(t) + L\gamma_1(t)) \right] \right] + [m(x^2(t) + y^2(t)) + J_T(\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t))] + \\
 & m_b [4R^2 + 2R q_{C1} x(t) + 4x^2(t) + 2R q_{S1} y(t) + 4y^2(t) + L[\gamma_1(t)(R q_{S2} + \\
 & L \gamma_1(t)) + R q_{C2} \gamma_2(t) + L \gamma_2^2(t)]] \left. \right\} - \omega [2 \sin \phi m_{eR} \varepsilon_R + 2(m + m_{eL} + m_{eR}) y(t) + \\
 & 2m_b (R q_{S1} + 4y(t)) + L(m_{eR} - m_{eL}) \gamma_1(t)] \dot{x}(t) + (m + m_{eR} + m_{eL} + 4m_b) \dot{x}^2(t) + \\
 & \omega [2m_b (R q_{C1} + 4x(t)) + 2(\cos \phi m_{eR} \varepsilon_R + (m + m_{eR}) x(t) + m_{eL} (\varepsilon_L + x(t)))] + \\
 & L(m_{eL} - m_{eR}) \gamma_2(t) \dot{y}(t) + (m + m_{eR} + m_{eL} + 4m_b) \dot{y}^2(t) + R m_b \sum_{i=1}^2 [2R \omega +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin \alpha_i(t) (2 \omega y(t) - L \omega \gamma_1(t) - 2\dot{x}(t)) + \cos \alpha_i(t) (2 \omega x(t) + L \omega \gamma_2(t) + \\
& 2\dot{y}(t)) \dot{\alpha}_i(t) + R \dot{\alpha}_i^2(t) + [2 R \omega + \sin(\phi + \beta_i(t)) (2 \omega y(t) + L \omega \gamma_1(t) - 2\dot{x}(t)) + \\
& \cos(\phi + \beta_i(t)) (2 \omega x(t) - L \omega \gamma_2(t) + 2\dot{y}(t))] \dot{\beta}_i(t) + R \dot{\beta}_i^2(t) - \\
& \left\{ L \omega [m_{eL} (\varepsilon_L + x(t)) - m_{eR} (\cos \phi \varepsilon_R + x(t))] + 2 \omega [J_T - J_P + \right. \\
& \left. \frac{L^2}{4} (m_{eL} + m_{eR}) \right] \gamma_2(t) + L (m_{eL} - m_{eR}) \dot{y}(t) + L m_b (2L \omega \gamma_2(t) + R q_{C3}) \left. \right\} \dot{\gamma}_1(t) + \\
& \left[J_T + \frac{L^2}{4} (4 m_b + m_{eL} + m_{eR}) + J_P \gamma_2^2(t) \right] \dot{\gamma}_1^2(t) + \left\{ L \omega [-m_{eL} y(t) + \right. \\
& m_{eR} (\sin \phi \varepsilon_R + y(t))] + 2 \omega \left[J_T + \frac{L^2}{4} (m_{eL} + m_{eR}) \right] \gamma_1(t) + L (m_{eL} - m_{eR}) \dot{x}(t) + \\
& \left. L m_b (2L \omega \gamma_1(t) + R q_{S3}) \right\} \dot{\gamma}_2(t) + \left[J_T + \frac{L^2}{4} (4 m_b + m_{eL} + m_{eR}) \right] \dot{\gamma}_2^2(t) \left. \right\}
\end{aligned}$$

附錄三

為便於比較裝置自動平衡機構前後的影響與差距，依 4-1-3 節同樣方式，整理一般偏心轉子系統的矩陣形式的無因次運動方程式如下；

$$\mathbf{M}_R \mathbf{X}'' + \mathbf{D}_R \mathbf{X}' + \mathbf{f}_R = \mathbf{0} \quad (\text{A3.1})$$

其中，

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_r \end{bmatrix} \quad (\text{A3.2})$$

$$\mathbf{D}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{r1} & -2\Omega(\mathbf{M}_r - \mathbf{D}_{r2}) \\ 2\Omega(\mathbf{M}_r - \mathbf{D}_{r2}) & \mathbf{D}_{r1} \end{bmatrix} \quad (\text{A3.3})$$

$$\mathbf{f}_R = [f_{r1}, f_{r2}, f_{r3}, f_{r4}]^T \quad (\text{A3.4})$$

\mathbf{M}_R 與 \mathbf{D}_R 的組成矩陣

$$\mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho}{2}(\mu_{eL} - \mu_{eR}) \\ \frac{\rho}{2}(\mu_{eL} - \mu_{eR}) & J_1 + \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 (\mu_{eL} + \mu_{eR}) \end{bmatrix} \quad (\text{A3.5})$$

$$\mathbf{D}_{r1} = 2\zeta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{r2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{J_3}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A3.6})$$

另外，向量 \mathbf{f}_{SR} 的各個元素分別為

$$f_{r1} = -(\Omega^2 - 1)x - 2\zeta \Omega y - \Omega^2 \left[\left(\frac{\rho}{2}\gamma_2 + \Lambda_L\right)\mu_{eL} - \left(\frac{\rho}{2}\gamma_2 - \Lambda_R \cos \phi\right)\mu_{eR} \right] \quad (\text{A3.7})$$

$$f_{r2} = -\Omega^2 \gamma_2 \left[J_1 + \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 (\mu_{eL} + \mu_{eR}) \right] - \frac{\rho}{2} \Omega^2 [(x + \Lambda_L)\mu_{eL} - (x + \Lambda_R \cos \phi)\mu_{eR}] + \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 (2\zeta \Omega \gamma_1 + \gamma_2) \quad (\text{A3.8})$$

$$f_{r3} = -(\Omega^2 - 1)y + 2\zeta \Omega x - \Omega^2 \left[-\frac{\rho}{2}\gamma_1 \mu_{eL} + \left(\frac{\rho}{2}\gamma_1 + \Lambda_R \sin \phi\right)\mu_{eR} \right] \quad (\text{A3.9})$$

$$f_{r4} = \Omega^2 \gamma_1 \left[J_1 + \left(\frac{\rho}{2} \right)^2 (\mu_{eL} + \mu_{eR}) \right] - \frac{\rho}{2} \Omega^2 [y \mu_{eL} - (y + \Lambda_R \sin \phi) \mu_{eR}] + \left(\frac{\rho}{2} \right)^2 (2\zeta \Omega \gamma_2 - \gamma_1) \quad (\text{A3.10})$$

其中，由 $f_R = 0$ 可列出系統的平衡方程。

I. Static Unbalance

當 $\mu_{eL} = \mu_{eR} = \mu$ 、 $\Lambda_L = \Lambda_R = \Lambda$ 且兩端面偏心相角差 $\phi = 0$ 時，系統的偏心量為靜態不平衡 (static unbalance)。利用參數代換 $p = \Omega^2 - 1$ 及 $q = 2\zeta \Omega$ ，可使平衡方程簡化為

$$\begin{cases} px + qy + 2\Omega^2 \Lambda \mu = 0 \\ qx - py = 0 \\ \frac{\rho^2}{4} (\gamma_1 - q\gamma_2) - \Omega^2 \gamma_1 \left(J_1 + \frac{\rho^2 \mu}{2} \right) = 0 \\ \frac{\rho^2}{4} (\gamma_2 + q\gamma_1) - \Omega^2 \gamma_2 \left(J_1 + \frac{\rho^2 \mu}{2} \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{A3.11})$$

解得一般轉子靜態不平衡解為

$$x = \frac{-2\Omega^2 \Lambda \mu}{p^2 + q^2} (p), \quad y = \frac{-2\Omega^2 \Lambda \mu}{p^2 + q^2} (q) \text{ 及 } \gamma_1 = \gamma_2 = 0 \quad (\text{A3.12})$$

以平面極座標型式表示為

$$r = \frac{2\Omega^2 \Lambda \mu}{p^2 + q^2} \left(\sqrt{p^2 + q^2} \right), \quad \theta = \tan^{-1} \frac{q}{p} \quad (\text{A3.13})$$

II. Couple Unbalance

當 $\mu_{eL} = \mu_{eR} = \mu$ 、 $\Lambda_L = \Lambda_R = \Lambda$ 且兩端面偏心相角差 $\phi = \pi$ 時，系統的偏心量為力偶不平衡 (couple unbalance)。利用參數代換 $p_c = 4\Omega^2 J_1 - \rho^2 (1 - 2\Omega^2 \mu)$ 及 $q_c = 2\zeta \Omega \rho^2$ ，可使平衡方程簡化為

$$\begin{cases} (\Omega^2 - 1)x + 2\zeta\Omega y = 0 \\ 2\zeta\Omega x - (\Omega^2 - 1)y = 0 \\ p_c\gamma_1 + q_c\gamma_2 = 0 \\ q_c\gamma_1 - p_c\gamma_2 - 4\rho\Omega^2\Lambda\mu = 0 \end{cases} \quad (\text{A3.14})$$

解得一般轉子力偶不平衡解為

$$x = y = 0, \gamma_1 = \frac{4\rho\Omega^2\Lambda\mu}{p_c^2 + q_c^2}(q_c) \text{ 及 } \gamma_2 = \frac{-4\rho\Omega^2\Lambda\mu}{p_c^2 + q_c^2}(p_c) \quad (\text{A3.15})$$

定義轉子左端面中心的極座標為 (r, θ) ，則右端面中心的極座標為 $(r, \theta + \pi)$ 。將一

般轉子力偶不平衡解以平面極座標型式表示為

$$r = \sqrt{\left(\frac{\rho}{2}\gamma_2\right)^2 + \left(\frac{-\rho}{2}\gamma_1\right)^2} = \frac{2\rho^2\Omega^2\Lambda\mu}{p_c^2 + q_c^2} \left(\sqrt{p_c^2 + q_c^2}\right) \quad (\text{A3.16})$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{q_c}{p_c} \quad (\text{A3.17})$$



附錄四

本附錄推導僅於上端面裝置自動平衡機構的實驗機台的理論模型，依據 4-1-3 節推導統御方程相同的程序，考慮總質量 $M = m + 2m_b + m_{eL} + m_{eR} + m_{S1} + m_{S2}$ ，求得修正後的統御方程式。其矩陣形式的無因次統御方程式可表示為

$$\mathbf{M}_{ExN} \mathbf{X}'' + \mathbf{D}_{ExN} \mathbf{X}' + \mathbf{g}_{ExN} + \mathbf{f}_{ExN} = \mathbf{0} \quad (\text{A4.1})$$

其中，

$$\mathbf{M}_{ExN} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{en} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{LS} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{en} & \mathbf{B}_{LC} \\ \mathbf{B}_{LS}^T & \mathbf{B}_{LC}^T & \mu_b \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{A4.2})$$

$$\mathbf{D}_{ExN} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{en} & -2\Omega(\mathbf{M}_{en} - \mathbf{D}_{r2}) & -2\Omega \mathbf{B}_{LC} \\ 2\Omega(\mathbf{M}_{en} - \mathbf{D}_{r2}) & \mathbf{D}_{en} & 2\Omega \mathbf{B}_{LS} \\ 2\Omega(\mathbf{B}_{LC}^T) & -2\Omega(\mathbf{B}_{LS}^T) & 2\zeta_b \mu_b \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{A4.3})$$

$$\mathbf{f}_{ExN} = [f_{en1}, f_{en2}, f_{en3}, f_{en4}, f_{dr5}, f_{dr6}]^T \quad (\text{A4.4})$$

為便於簡化表示式，定義兩個分別與質量一次矩與質量二次矩相關的函數

$$\Pi_{n1} = \frac{\rho}{2}(\mu_{eL} - \mu_{eR} + 2\mu_b) + \left(\frac{\rho}{2} - \delta_L\right)\mu_{S1} - \left(\frac{\rho}{2} + \delta_M\right)\mu_{S2} \quad (\text{A4.5})$$

$$\Pi_{n2} = J_1 + \left(\frac{\rho}{2}\right)^2(2\mu_b + \mu_{eL} + \mu_{eR}) + \left(\frac{\rho}{2} - \delta_L\right)^2\mu_{S1} + \left(\frac{\rho}{2} + \delta_M\right)^2\mu_{S2} \quad (\text{A4.6})$$

則 \mathbf{M}_{ExN} 與 \mathbf{D}_{ExN} 的組成元素矩陣中 \mathbf{M}_{en} 與 \mathbf{D}_{en} 可表示為

$$\mathbf{M}_{en} = \begin{bmatrix} 1 & \Pi_{n1} \\ \Pi_{n1} & \Pi_{n2} \end{bmatrix} \quad (\text{A4.7})$$

$$\mathbf{D}_{en} = \zeta \begin{bmatrix} 2 & -(\delta_L + \delta_R) \\ -(\delta_L + \delta_R) & \left(\frac{\rho}{2} - \delta_L\right)^2 + \left(\frac{\rho}{2} + \delta_R\right)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A4.8})$$

另外，向量 \mathbf{f}_{ExN} 的各個元素可分別表示為

$$f_{en1} = -(\Omega^2 - 1)x - 2\zeta\Omega y - \Omega^2 \left[\mu_b \sum_{i=1}^2 \cos \alpha_i + \Pi_{n1}\gamma_2 + \Lambda_L \mu_{eL} + \Lambda_R \mu_{eR} \cos \phi \right] - \frac{1}{2}(\delta_L + \delta_R)(2\zeta\Omega\gamma_1 + \gamma_2) \quad (\text{A4.9})$$

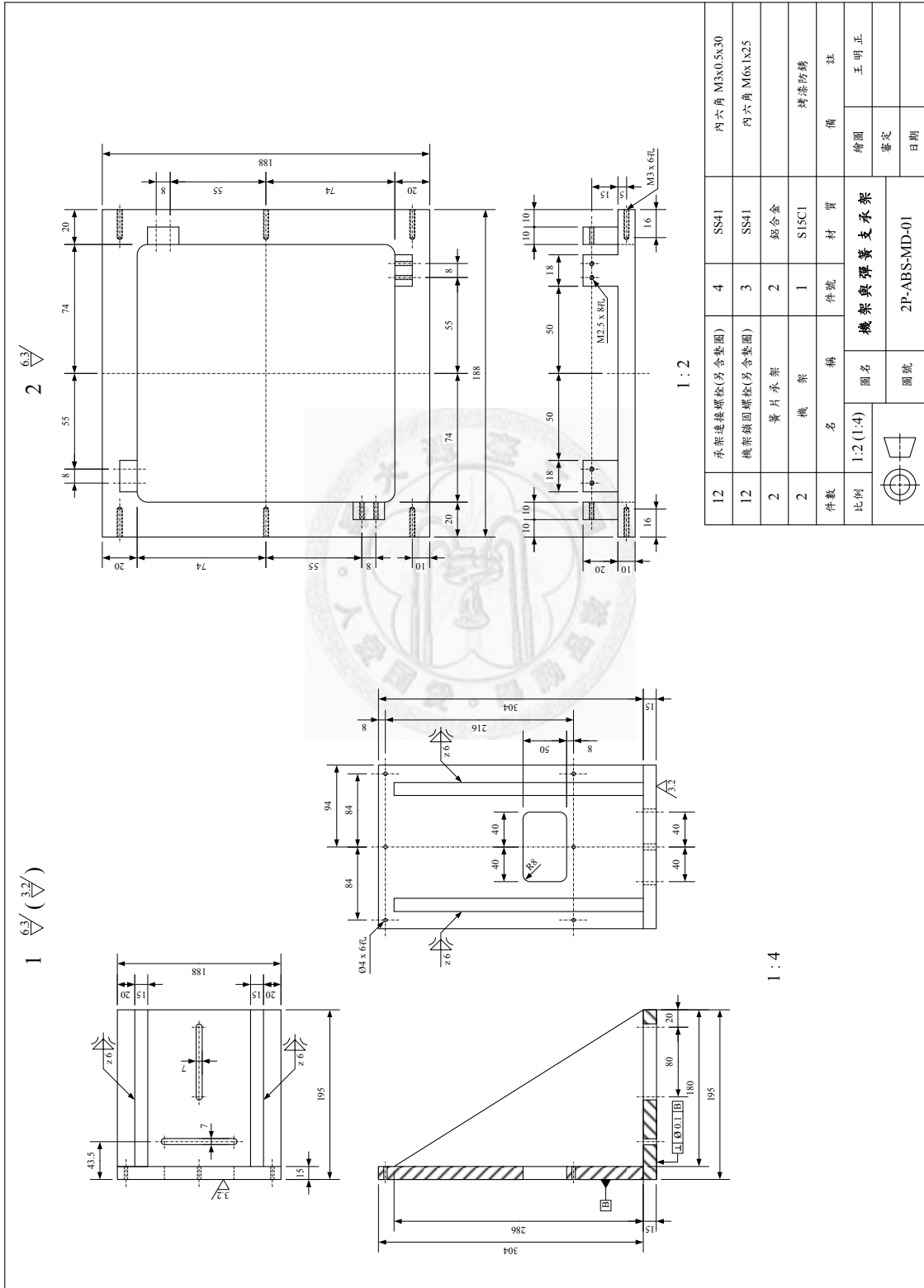
$$f_{en2} = -\Omega^2 \Pi_{n2}\gamma_2 - \frac{\rho}{2}\Omega^2 \left[\mu_b \sum_{i=1}^2 \cos \alpha_i + \Lambda_L \mu_{eL} - \Lambda_R \mu_{eR} \cos \phi \right] - \Omega^2 \Pi_{n1}x + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho}{2} - \delta_L \right)^2 + \left(\frac{\rho}{2} + \delta_R \right)^2 \right] (2\zeta\Omega\gamma_1 + \gamma_2) + \frac{1}{2}(\delta_L + \delta_R)(2\zeta\Omega y - x) \quad (\text{A4.10})$$

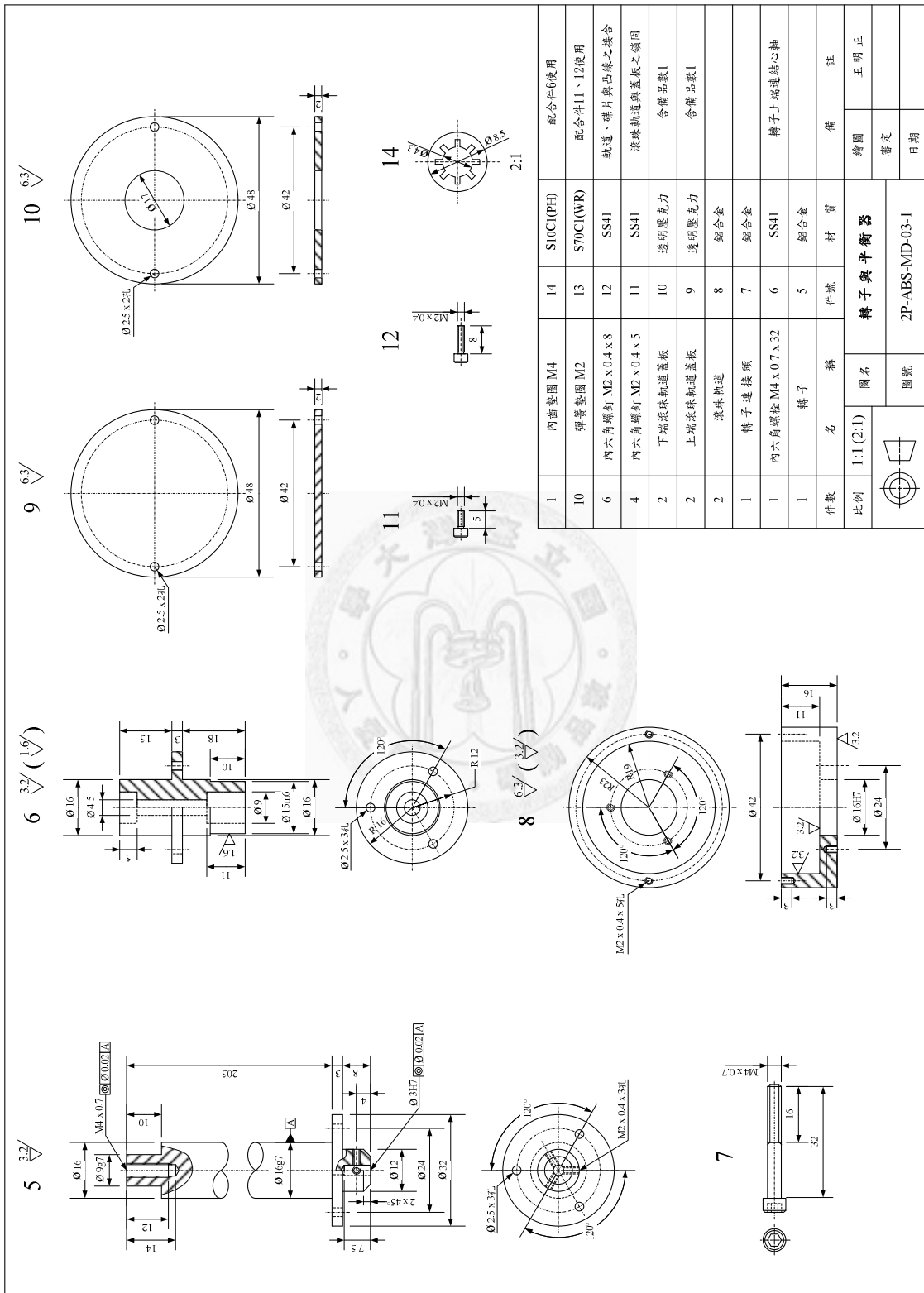
$$f_{en3} = 2\zeta\Omega x - (\Omega^2 - 1)y - \Omega^2 \left[\mu_b \sum_{i=1}^2 \sin \alpha_i - \Pi_{n1}\gamma_1 + \Lambda_R \mu_{eR} \sin \phi \right] + \frac{1}{2}(\delta_L + \delta_R)(\gamma_1 - 2\zeta\Omega\gamma_2) \quad (\text{A4.11})$$

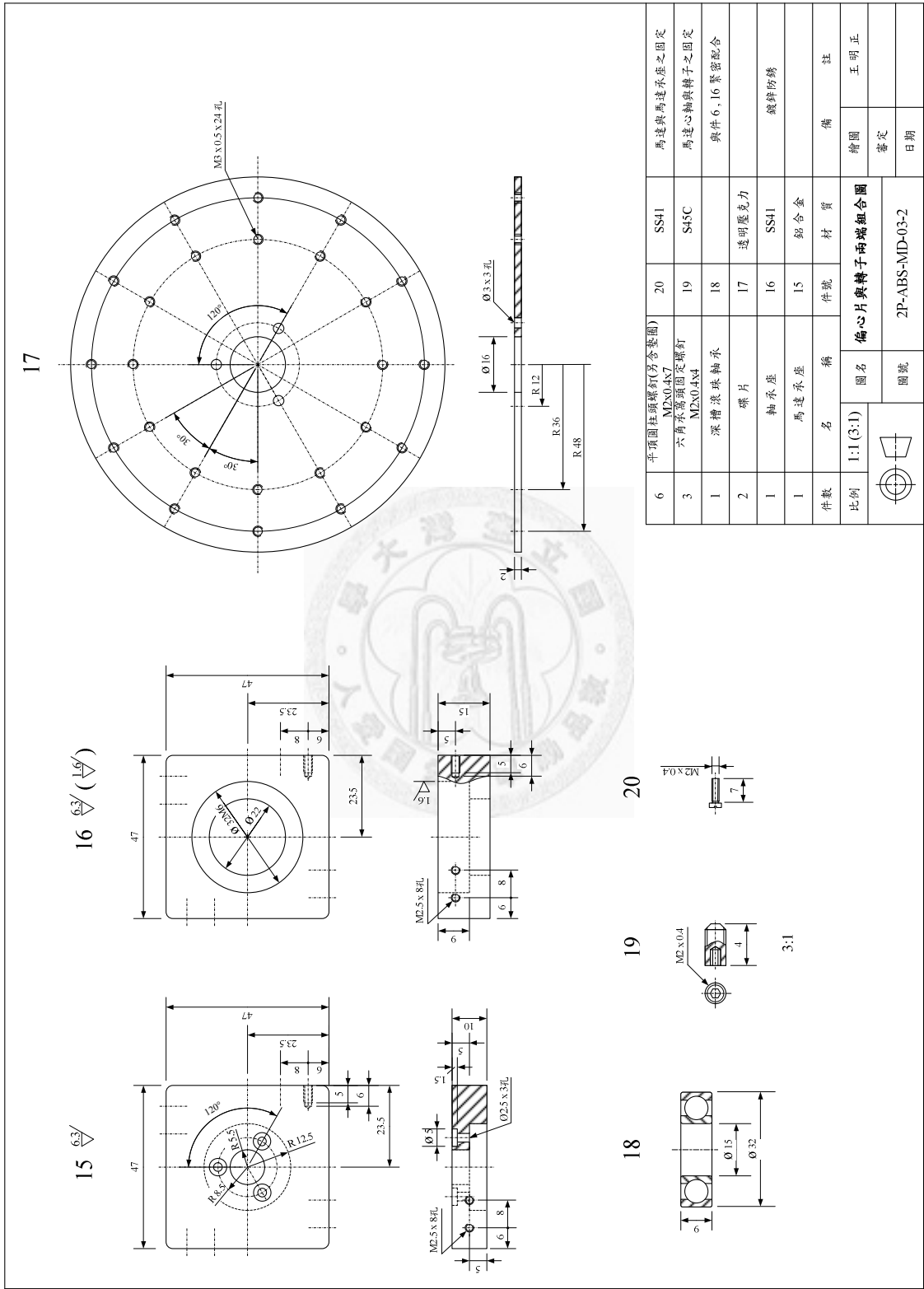
$$f_{en4} = \Omega^2 \gamma_1 \Pi_{n2} - \frac{\rho}{2}\Omega^2 \left[\mu_b \sum_{i=1}^2 \sin \alpha_i - \Lambda_R \mu_{eR} \sin \phi \right] - \Omega^2 \Pi_{n1}y + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho}{2} - \delta_L \right)^2 + \left(\frac{\rho}{2} + \delta_R \right)^2 \right] (2\zeta\Omega\gamma_2 - \gamma_1) - \frac{1}{2}(\delta_L + \delta_R)(2\zeta\Omega x + y) \quad (\text{A4.12})$$

附錄五

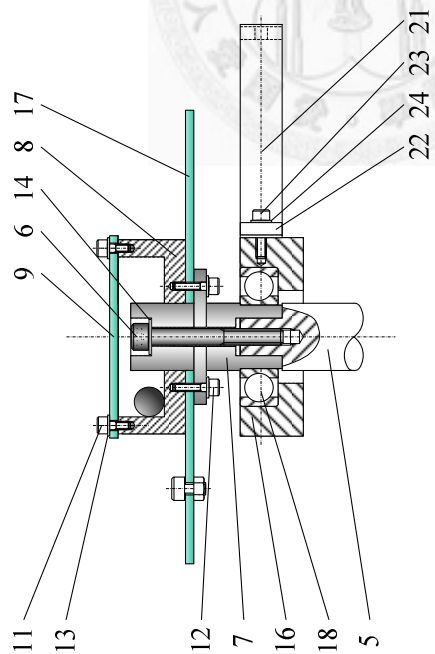
I. 利用馬達直接傳動的轉子實驗機台設計圖：



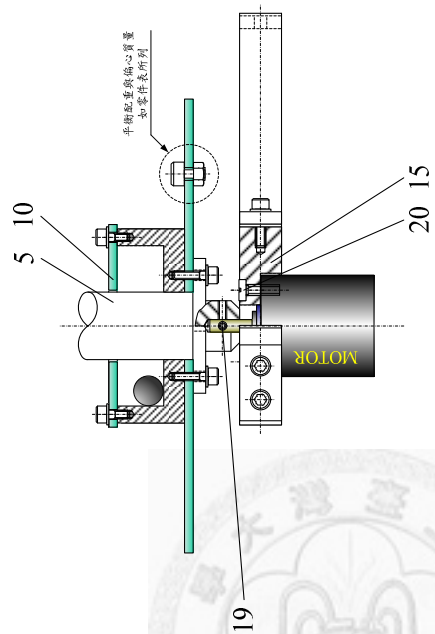




轉子上端組合圖



轉子下端組合圖

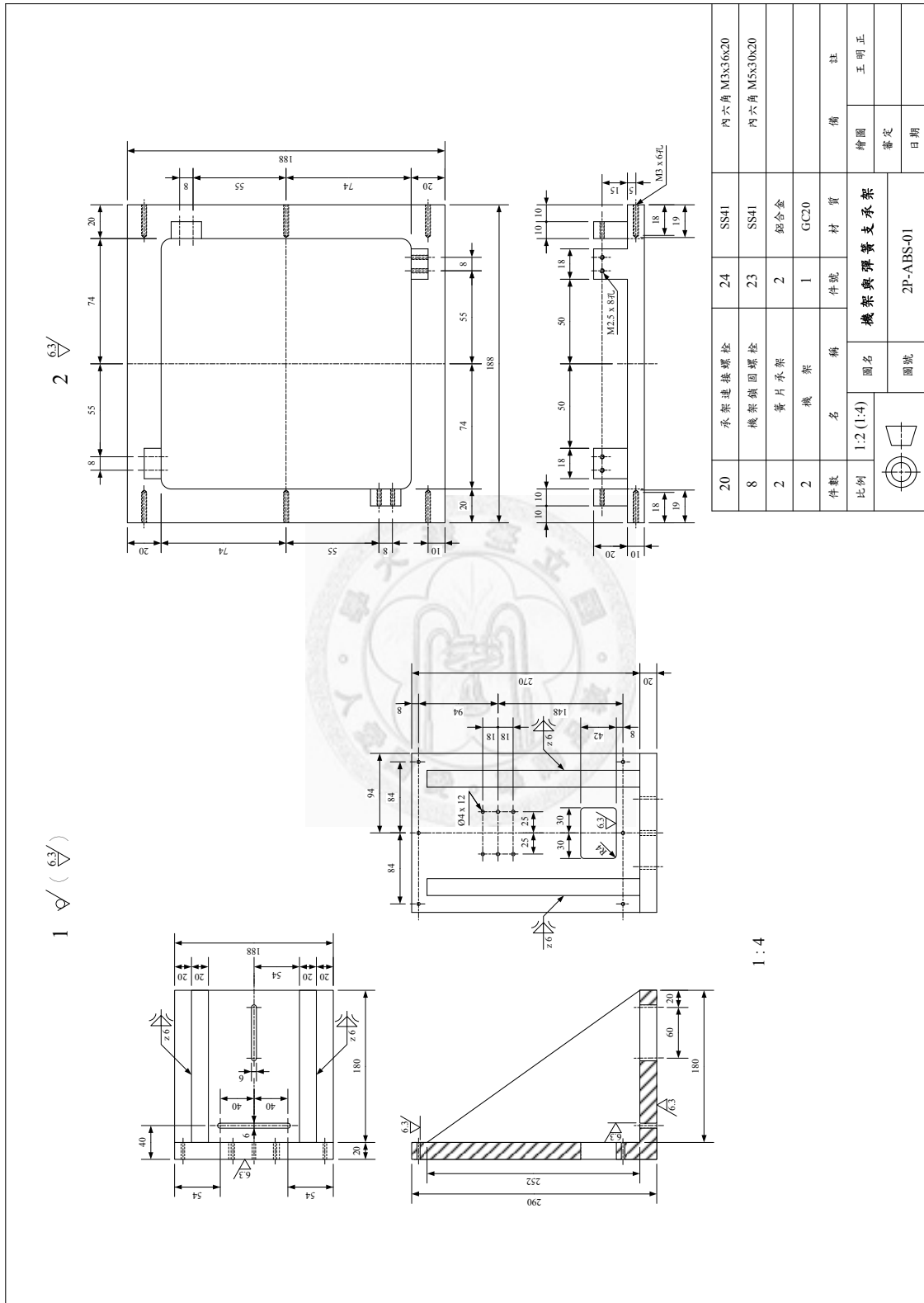


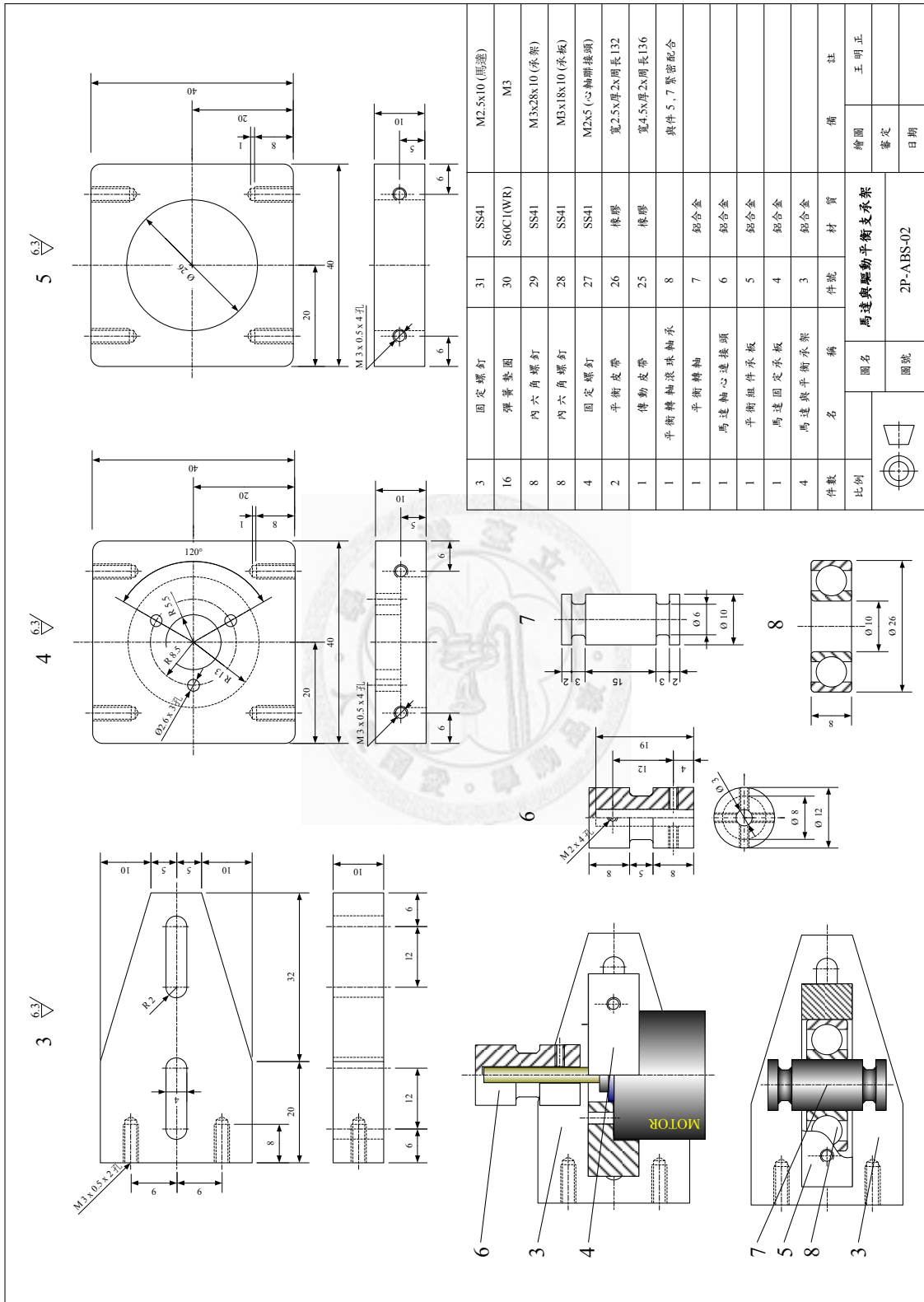
請附調整工具

M2, M2.5, M3, M4, M6 六角板手x3

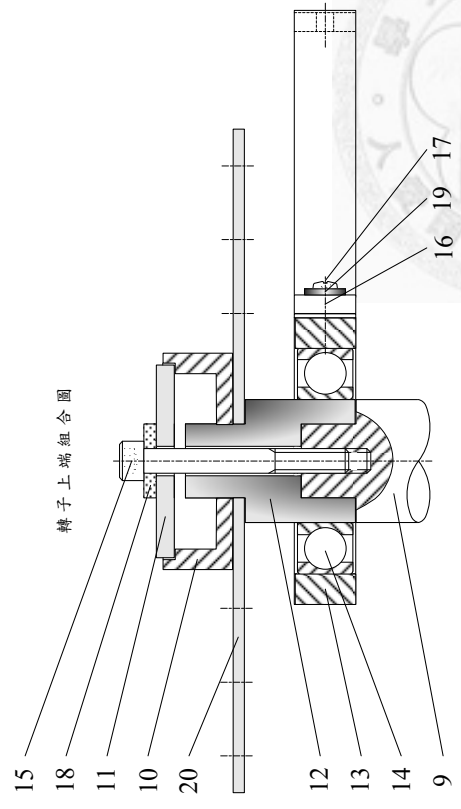
36	平口圓形墊圈M3	30	SS41	平衡配重與偏心質量
20	六角螺帽M3	29	SS41	平衡配重與偏心質量
12	內六角螺釘M3x0.5x3	28	SS41	平衡配重與偏心質量
12	內六角螺釘M3x0.5x5	27	SS41	平衡配重與偏心質量
20	壓克力六角螺帽M3	26	壓克力	平衡配重與偏心質量
12	壓克力圓頭小螺釘M3x0.5x5	25	壓克力	平衡配重與偏心質量
件數	名稱	件號	材質	備註
比例 1:1	圖名		轉子兩端組合圖	
	圖號		2P-ABS-MD-03-3	
	繪圖		王明正	
	審定			
	日期			

II. 利用皮帶傳動的轉子實驗機台設計圖：

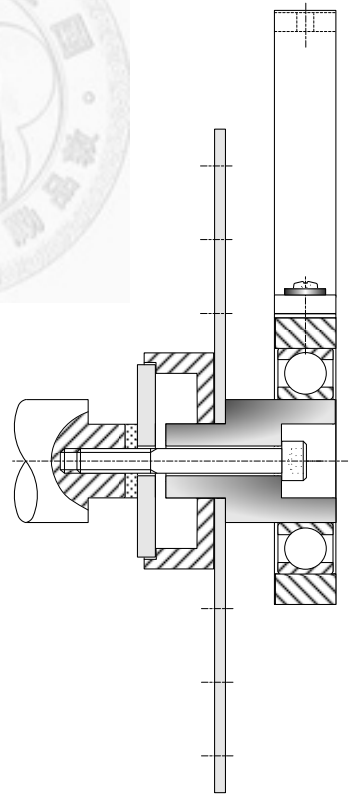




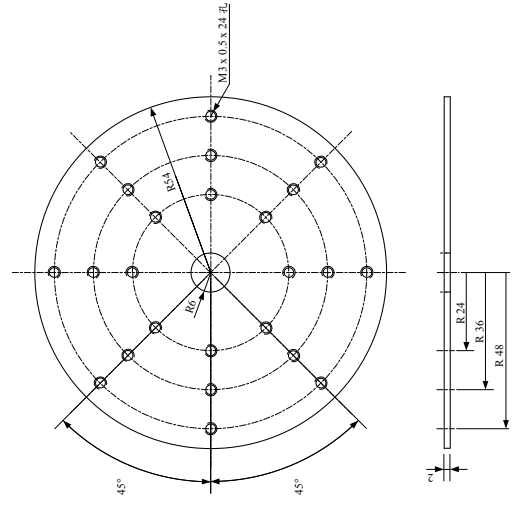
轉子上端組合圖



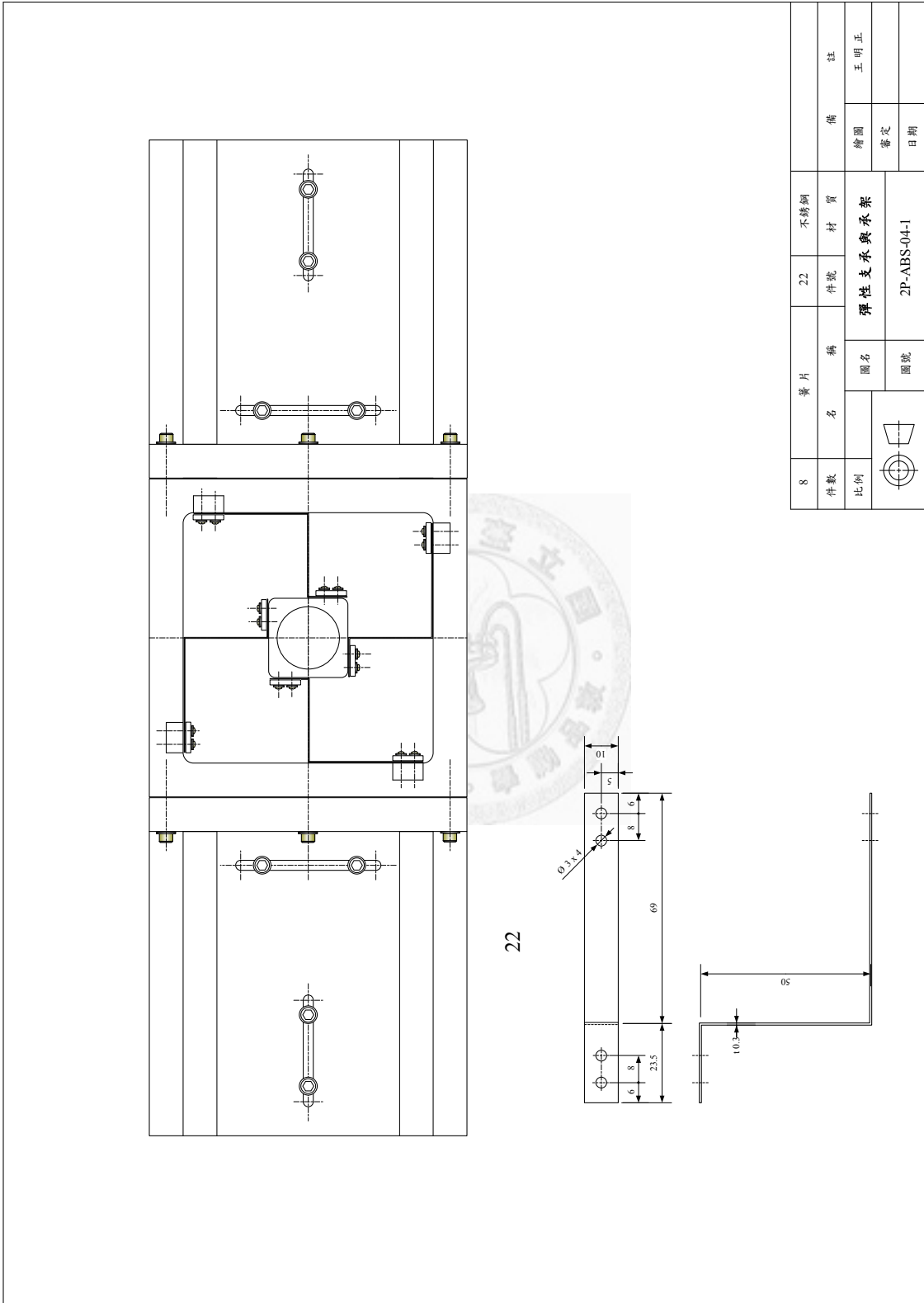
轉子下端組合圖



20



6	螺栓	21	SS41	內六角 M3 x 4 x 4
2	圓盤	20	壓克力	
件數	名稱	件號	材質	備註
比例	圖名 偏心片與轉子兩端組合圖			
	圖號		2P-ABS-03-2	
	繪圖	審定	日期	
	王明正			



附錄六

本附錄探討以皮帶間接傳動的轉子實驗機台對於單一端面偏心量的制振行為，此實驗系統如圖 A6-1 所示。

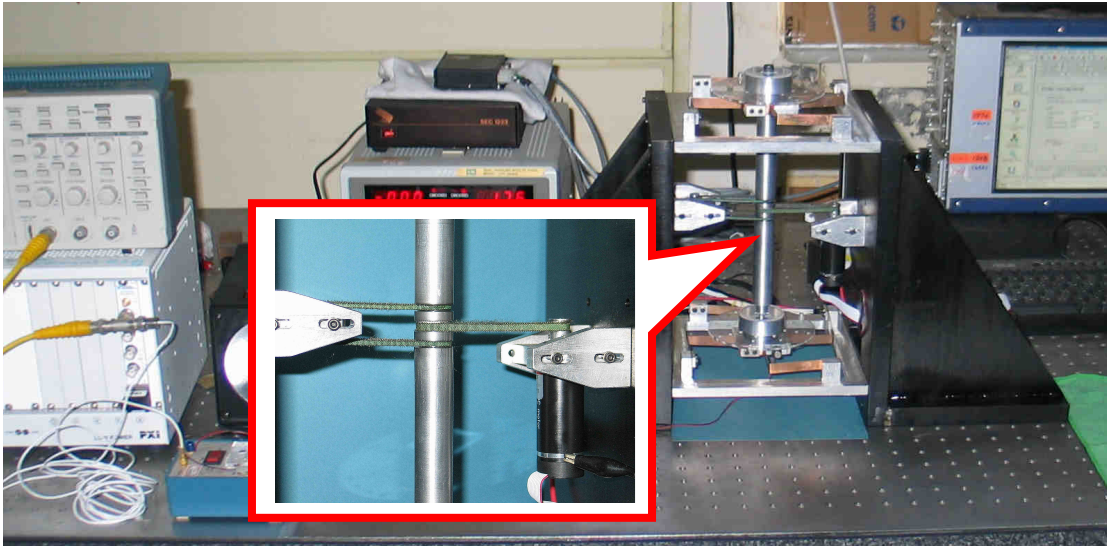


圖 A6-1 以皮帶間接傳動的轉子實驗機台

其中，轉子以兩軸承安置於裝有彈性支承的上、下承座間，以伺服馬達配合動力傳送皮帶與平衡皮帶為動力源，將迴轉動力傳送至轉子質心所在平面。接著，同樣依 5-3-1 節的平衡校正程序，使得以明確控制系統的偏心不平衡量。經估算此系統的臨界轉速約為 800 rpm，兩滾珠所能提供的最大制振偏心量為 65.6 g-mm，選用的偏心質量分別為 $m_{e1}=0.8$ g、 $m_{e2}=1.31$ g 以及 $m_{e3}=2.34$ g，固定偏心半徑為 48 mm。

首先補充說明 5-3-3 節中，對低於臨界轉速穩定運轉下，兩端面滾珠的定位情形。圖 A6-2 顯示當實驗系統以固定轉速 600 rpm 運轉，若僅在上端面鎖固偏心質量(箭頭標示) m_{e1} 、 m_{e2} 與 m_{e3} 時，滾珠定位的情形。可知在此三種偏心條件之下，兩端面滾珠幾乎都定位在相同相位處，亦即此時的轉子兩端以同相位振動。而圖 A6-3 為兩端面同時存在偏心不平衡量且兩偏心質量呈 180° 相位差的情形，由圖上

滾珠穩態定位的狀態及兩端面上加速規的量測結果，我們可明顯地看出，轉子兩端以 180° 相位差振動。

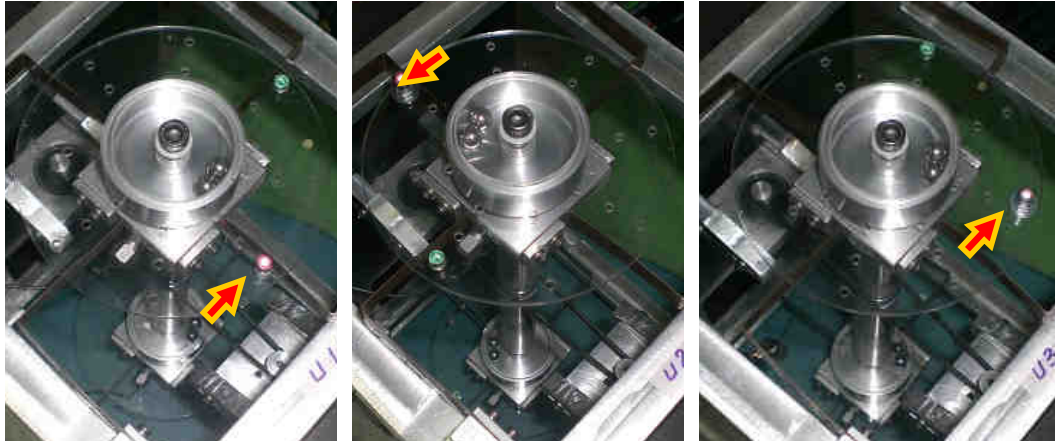


圖 A6-2 轉速 600 rpm，偏心質量 m_{e1} 、 m_{e2} 及 m_{e3} 時，兩端滾珠定位的情形

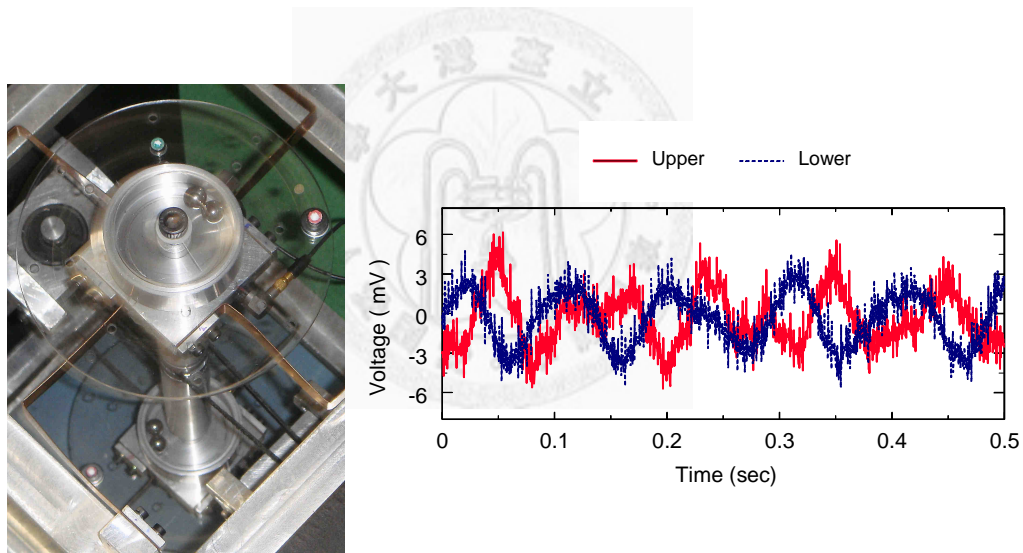


圖 A6-3 偏心質量呈 180° 相位差時，兩端滾珠定位的情形與量測結果

另外，當轉速大於臨界轉速時，我們移除下端面的偏心質量，逐漸增加上端面的偏心質量並分別記錄轉子上、下兩端面的振動量，最後進行比較與分析。實驗結果整理如下：

當轉子上端面的外加偏心率小於上端面自動平衡機構所能提供的最大制振平衡量時，上端面的兩滾珠會張開適當幅角以抑制上端面的偏心激振，此時轉子下端面的兩滾珠依舊維持相差 180° 的平衡狀態。

圖 A6-4(a)為上端面偏心質量等於 $m_{e1}=0.8\text{ g}$ 固定於 48 mm 偏心半徑且轉速為 1600 rpm 時，經瞬時拍攝而得兩端面滾珠的定位情形；由於單一滾珠所能提供的最大制振偏心量($32.8\text{ g}\cdot\text{mm}$)約為外加質量偏心量($38.3\text{ g}\cdot\text{mm}$)的 0.86 倍，可以完全制振。因此上端面的兩滾珠位於偏心質量的異側且張開約 109° 的幅角，而下端面的兩滾珠依舊維持相差 180° 的平衡狀態。圖 A6-4(b)所示為偏心質量等於 $m_{e2}=1.31\text{ g}$ 時，兩端面滾珠的定位情形。由外加質量偏心量($62.9\text{ g}\cdot\text{mm}$)可求得 $\eta_L=0.52$ ，因此上端面的兩滾珠位於偏心質量的異側且張開約 33° 。此時上端面的偏心亦呈完全平衡，而下端面的兩滾珠同樣維持 180° 的平衡定位。

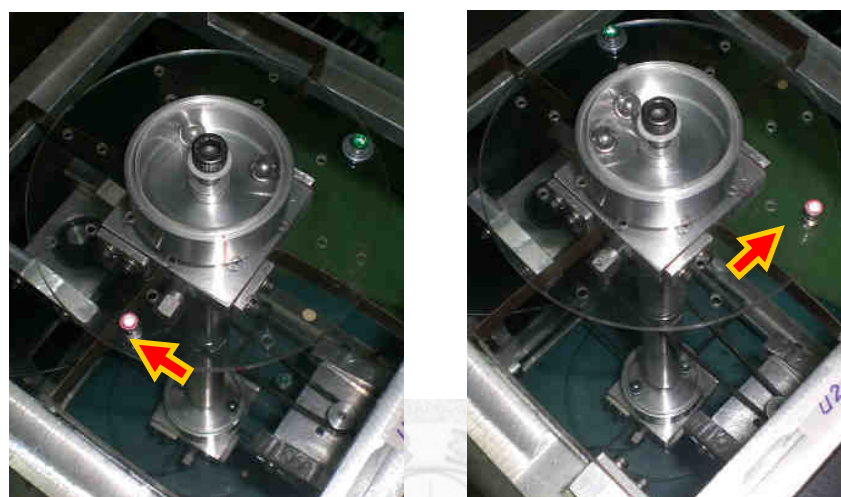


圖 A6-4 制振比(a) $\eta_L=0.86$ 、(b) $\eta_L=0.52$ 時，兩端滾珠的定位情形

圖 A6-5 為上端面外加偏心質量等於 0.8 g 、轉速為 1600 rpm 時於上、下端面的振動量測值，圖中虛線與實線分別表示未配置與配置自動平衡機構的測量值。圖 A6-6 為在相同參數條件下的理論（此系統不存在馬達與定子配重的質量效應，故回歸第四章的模型。另外，下端面滾珠位置的描述同樣以 \hat{x} 軸為基準）歷時結果。圖 A6-7 與圖 A6-8 分別為上端面外加偏心質量增加至 1.31 g 時，轉子上、下兩端面的量測結果以及各動態參數的歷時圖。由這些實驗紀錄與數值結果可知：未配置自動平衡機構的轉子系統在相同轉速與偏心半徑條件下，偏心激振的大小隨偏心質量增加而增大；縱使下端面無任何偏心量，亦將受上端面偏心的作用而引發振

動。若於轉子兩端面均配置自動平衡機構，當上端面的自動平衡機構所能提供的最大制振偏心率大於外加質量偏心率時，上端面的兩滾珠可以有效抑制上端面的偏心率振動，則滾珠將因應不同的偏心率適當地定位以抑制轉子偏心率振動，而下端面的兩滾珠則始終張開 180° ，維持無偏心率時的平衡狀態。

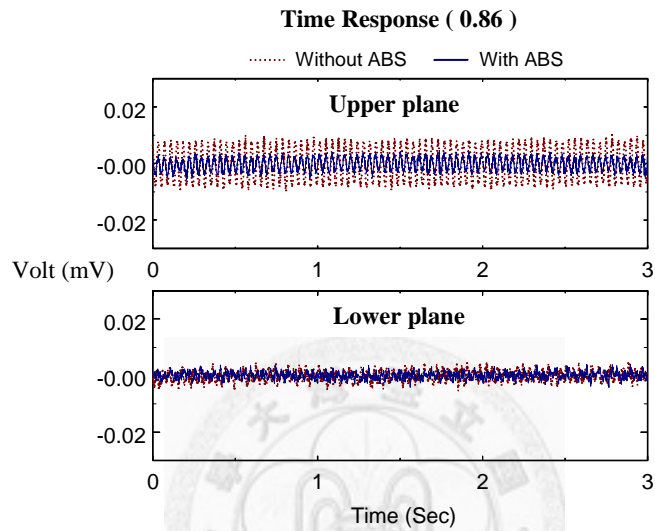


圖 A6-5 $\eta_L = 0.86$ 時，轉子系統上、下端面的振動量測值

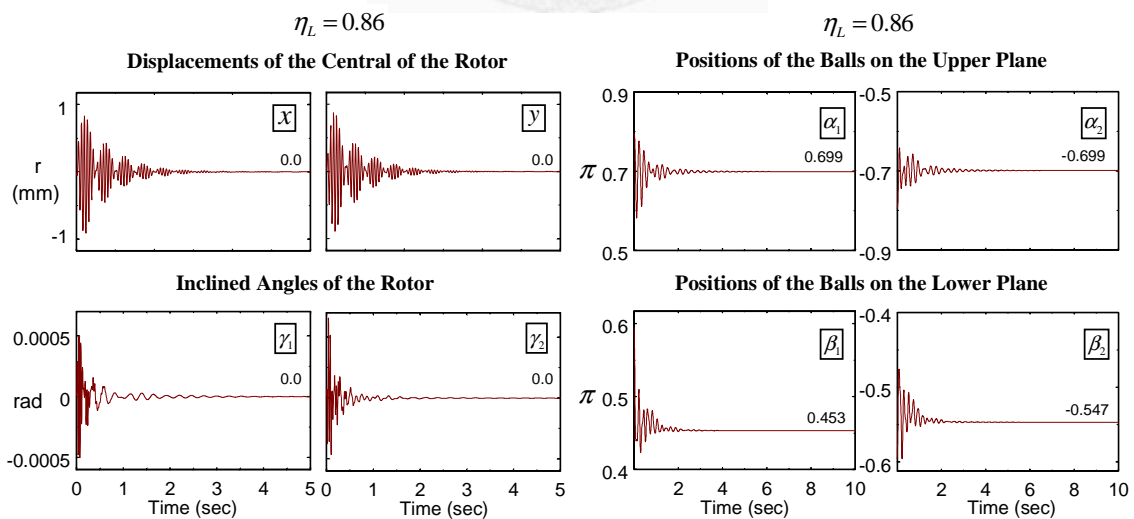


圖 A6-6 $\eta_L = 0.86$ 時，系統各動態參數的理論歷時圖

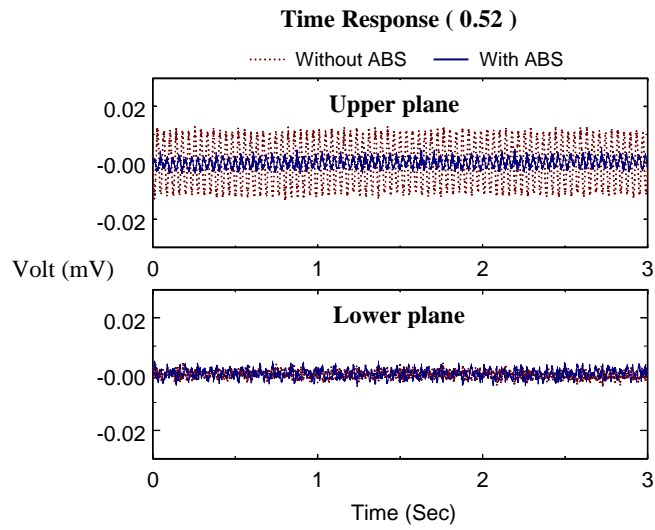


圖 A6-7 $\eta_L = 0.52$ 時，轉子系統上、下端面的振動量測值

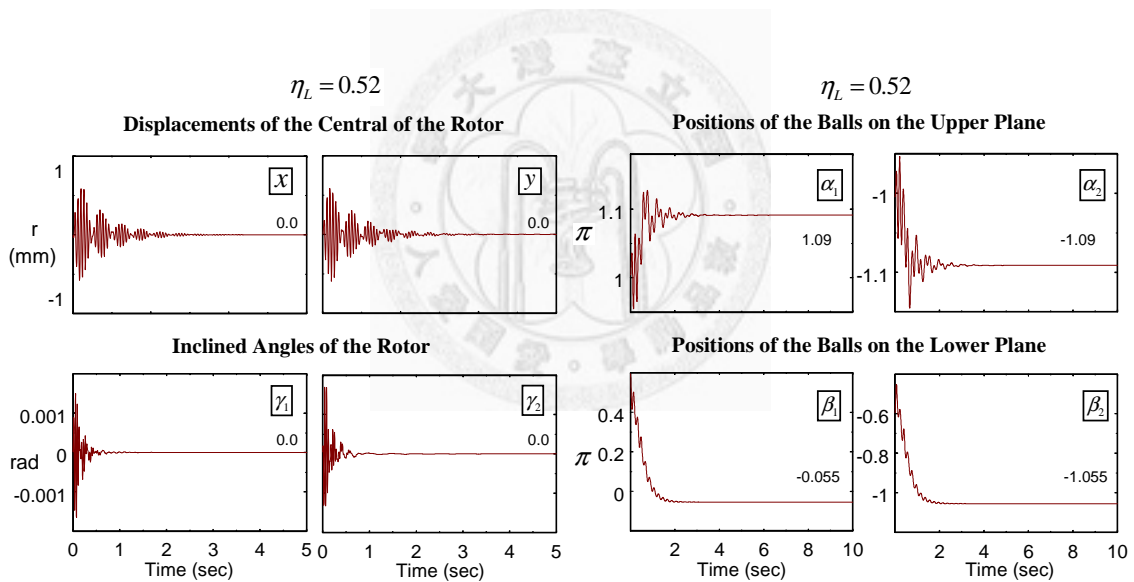


圖 A6-8 $\eta_L = 0.52$ 時，系統各動態參數的理論歷時圖

當轉子上端面的外加質量偏心率大於上端面自動平衡機構所能提供的最大制振偏心率時，上端面的兩滾珠會緊靠在一起並定位於偏心質量的另一側，此時轉子下端面的兩滾珠將張開適量的幅角以抑制由上端面剩餘偏心率所引發的下端面振動。

圖 A6-9(a)為上端面偏心質量等於 $m_{e3} = 2.34 \text{ g}$ ，固定於 48 mm 偏心半徑（偏心率平衡量為 112.32 g-mm ），且轉速為 1600 rpm 時，上、下兩端面滾珠的定位情形；

由滾珠所能提供的最大制振平衡量可得知 $\eta_L = 0.29$ ，因此上端面的兩滾珠緊靠在一起且定位於偏心質量的異側。此時上端面的偏心激振無法完全抑制，故而於下端面上，相對於上端面偏心質量的另一端位置處，誘發出一假想的激振偏心質量。因此；下端面的兩滾珠將因應由上端面在最大制振情況下，剩餘偏心量所引發的下端面振動，張開適量的幅角以抑制之。

圖 A6-9(b)的上端面偏心量由兩個偏心質量組成，其整體的偏心量為 234.36 g-mm。當轉速為 1600 rpm 時，上、下兩端面滾珠的定位情形如圖所示。單一滾珠所提供的制振量與上端面偏心量的比值 $\eta_L = 0.14$ ，此時不僅上端面的偏心激振無法完全抑制，由上端面剩餘偏心量所引發的下端面振動亦大於下端面滾珠所能提供的最大制振量，因此上端面的兩滾珠緊靠在一起且定位於偏心質量的異側，而下端面的兩滾珠則同樣緊靠在一起，但定位於偏心質量的正下方。

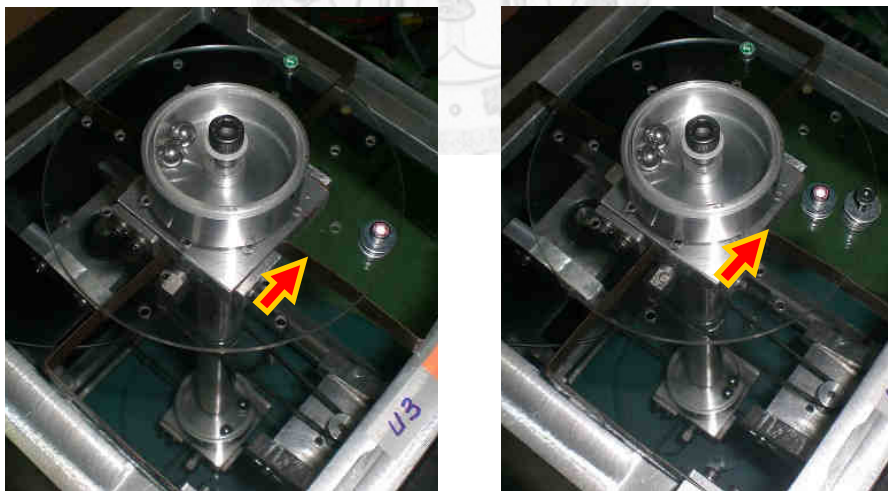


圖 A6-9 制振比(a) $\eta_L = 0.29$ 、(b) $\eta_L = 0.14$ 時，兩端滾珠的定位情形

圖 A6-10 為上端面外加偏心質量等於 2.34 g、偏心半徑 48 mm、轉速為 1600 rpm 時於上、下端面的量測結果。其理論分析的歷時情形如圖 A6-11 所示。由圖 A6-10 可看出，未裝配自動平衡機構時，下端面明顯存在由上端面不平衡振動所引發的徑向振幅。然而此下端面的振動量在裝置自動平衡機構後完全被抑制。比較圖 A6-9 與圖 A6-11，理論分析結果顯示了上端面滾珠應緊靠在一起且定位在偏心質量的徑

向另一端 ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1.01\pi$)，而下端面的兩滾珠則應在偏心質量正下方往兩側各張開約 36° ($\beta_1 = 0.21\pi$ 、 $\beta_2 = -0.2\pi$)。此結果與實驗觀察 (圖 A6-9) 十分吻合。

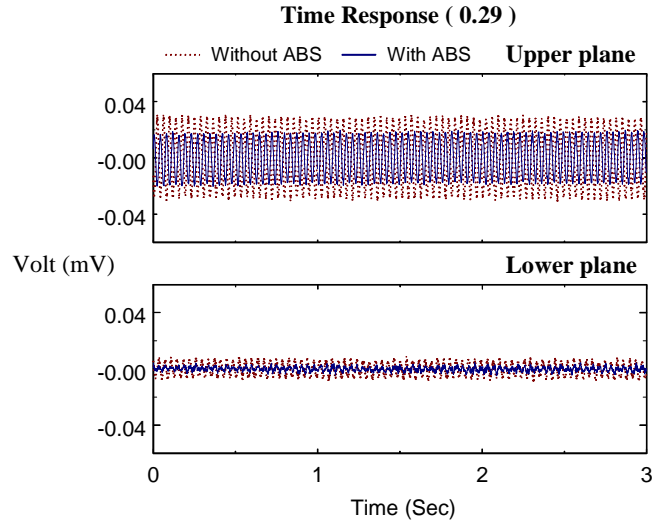


圖 A6-10 $\eta_L = 0.29$ 時，轉子系統上、下端面的振動量測值

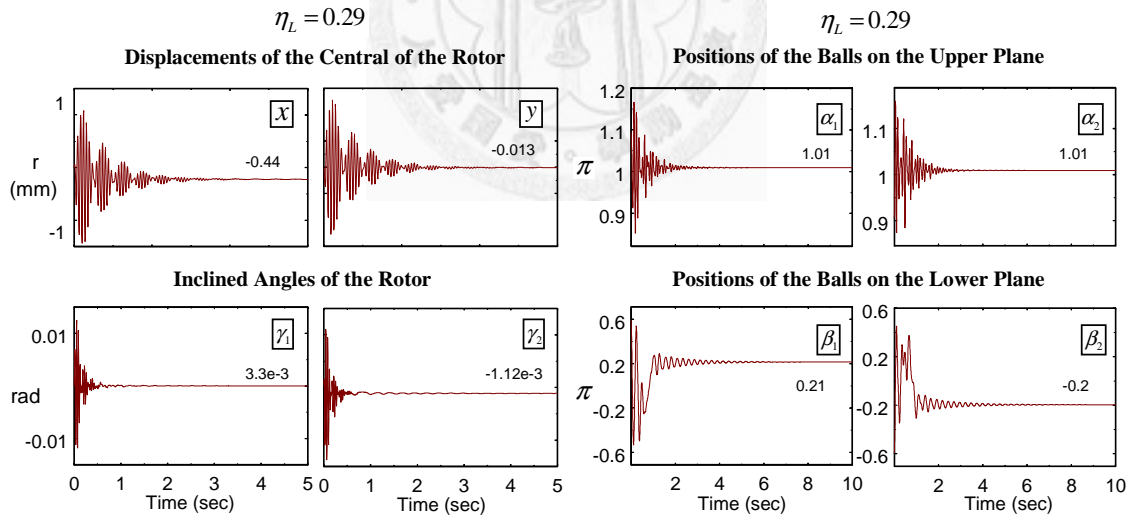


圖 A6-11 $\eta_L = 0.29$ 時，系統各動態參數的理論歷時圖

圖 A6-12 與圖 A6-13 分別為上端面整體的偏心量增加至 234.36 g-mm 時，轉子上、下兩端面的量測結果與八個動態參數的理論歷時圖。由實驗紀錄與理論分析可知：當上端面仍具有不平衡質量時，轉子下端面亦將受上端面偏心的作用而引

發振動。若於轉子兩端面均配置自動平衡機構，當上端面無法完全抑制偏心振動時，其所引發的下端面振動相當於在下端面的偏心質量，此時若下端面的滾珠自動平衡機構足以抑制這個偏心質量，則下端面呈完全平衡狀態；若不足以完全抑制，則下端面的滾珠將緊靠一起，提供最大制振量以降低轉子的偏心激振，有效提升轉子整體的制振效果。

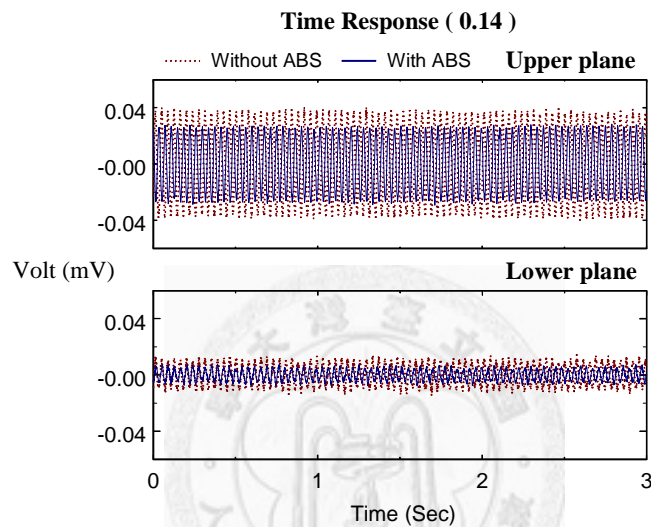


圖 A6-12 $\eta_L = 0.14$ 時，轉子系統上、下端面的振動量測值

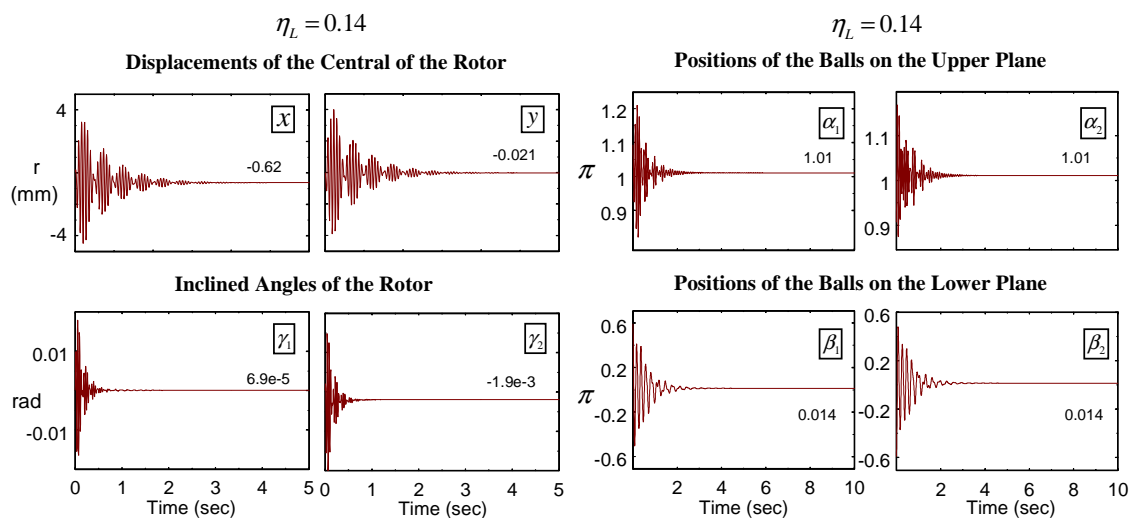


圖 A6-13 $\eta_L = 0.14$ 時，系統各動態參數的理論歷時圖