

國立臺灣大學工學院機械工程學研究所

碩士論文

Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

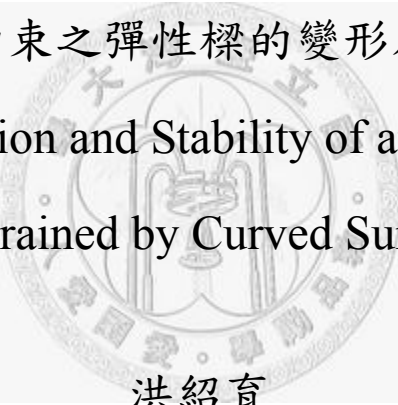
National Taiwan University

Master Thesis

受弧形邊界拘束之彈性樑的變形及穩定性分析

Deformation and Stability of an Elastica

Constrained by Curved Surfaces



洪紹育

Hung, Shao-Yu

指導教授：陳振山 博士

Advisor: Chen Jen-San, Ph.D.

中華民國 100 年 6 月

June, 2011

國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書

受弧形邊界拘束之彈性樑的變形及穩定性分析

Deformation and Stability of an Elastica

Constrained by Curved Surfaces

本論文係洪紹育君 (R98522522) 在國立臺灣大學機械工程學系完成之碩士學位論文，於民國 100 年 6 月 7 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

陳振山

(簽名)

(指導教授)

陳振山

陳振山

周元昉

周元昉

莊嘉揚

莊嘉揚

系主任

張竹鏞

(簽名)

致謝

短短的兩年一眨眼就過了，碩一當學弟時的種種回憶還歷歷在目，卻已成為要踏入社會的畢業生。想著當初進入研究所的迷惘及無知，到現在終於也能幫忙解決問題，我想這就叫做成長吧！但這一切，除了自己的努力之外，應歸功於許多人的幫助。

首先感謝指導教授陳振山老師的器重，在這兩年中我親身感受到老師對學術的熱情以及儉樸的生活，他總是在我遇到難關時給予方向及鼓勵，我想我永遠忘不了繚繞在工綜七樓的爽朗笑聲！

接著要感謝最愛我的家人，對我的選擇全力支持，並讓我衣食無慮，可以專心在研究上。雖說從小就出外求學，但是彰化老家永遠是我的避風港，返校前的那一聲加油常在我心。

Lab403 的各位，你們正是這段日子難忘的原因。學長們：偉嘉、書豪、弘基、家瑋和明叡，在我初學乍練時給與我信心，以及每個汗流浹背的熱血午後籃球。同梯們：耀億、以翔、唯中、頌庭和孟軒，天天打嘴砲、天天禱唯中、天天迷失在 118 巷，這些每天再普通不過的例行公事將成為研究生回憶最難忘的一頁。學弟們：智文、佑承、昇祐、徐穎及名哲，請好好照顧本實驗室首位學妹，延續我們優良的傳統。

紹育于 Lab403

受弧形邊界拘束之彈性樑的變形及穩定性分析

摘要

本文中我們考慮在底部平面兩端夾持(clamped-clamped)的彈性樑(elastica)在受到頂部牆面側向壓縮後的變形及穩定性。我們考慮三種頂部牆面:分別為凹面(concave)、凸面(convex)及平面(plane)。首先建立受壓縮彈性樑的變形軌跡圖,接著由振動法決定各式變形的穩定性。當頂部牆面以半靜態方式(quasi-statically)壓縮時,我們架設實驗驗證理論上預測的變形演變。當頂部牆面為平面時,free fold(與牆面發生點接觸前的變形)恰接觸到牆面時,壓縮外力會減少到零。當頂部牆面不再是平面時,此現象就不見得存在。當頂部牆面不再是平面,線接觸變形的多樣性會受到破壞。當頂部牆面為凹面時,頂面不會發生二次挫曲,反而是底部平面兩端的線接觸持續變長。當頂部牆面為凸面不會發生頂部線接觸。

關鍵字：彈性樑、變形、穩定性、弧形邊界。

Deformation and Stability of an Elastica Constrained by Curved Surfaces

Abstract

In this paper we consider the deformation and stability of a clamped-clamped elastica resting on a bottom plane and pressed by a top wall laterally. Three types of top walls are considered; they are concave, convex, and plane surfaces. Deformation maps of the pressed elastica are first constructed. The stability of various deformation patterns is determined via a vibration method. The theoretical predictions on the deformation evolution when the top wall presses quasi-statically are verified experimentally. In the case of plane top wall, the external pressing force reduces to zero whenever the free fold of a previous deformation starts to touch the wall. In the case when the top wall is not a plane, this is in general no longer true. The multiplicity of line-contact deformations in the case of plane top wall is destroyed when the top wall is curved. No secondary buckling will occur when the top wall is concave. Instead, line contact on the sides of the bottom plane will develop. In the case when the top wall is convex, no line contact on the top wall is possible.

Keyword: Elastica, Deformation, Stability, Curved Surface.

目 錄

第一章 導論.....	1
第二章 理論模型	4
第三章 彈性樑的靜態變形	5
3.1 在兩接觸面皆為點接觸	6
3.2 頂部弧面為線接觸	8
第四章 振動和穩定性分析	11
4.1 在兩接觸面皆為點接觸	11
4.2 邊界條件	15
4.3 接觸條件	16
4.4 ε_1 與 ε_2 座標間的轉換	17
4.5 求解方法	18
4.6 頂面為線接觸	21
第五章 彈性樑的變形軌跡圖	22
5.1 凹面(Concave wall).....	22
5.2 凸面(Convex wall)	25
5.3 與平面的比較	27
5.3.1 頂面為平面的變形軌跡圖.....	27
5.3.2 多樣性的消失.....	28

5.3.3 基頻(Fundamental natural frequencies).....	30
5.3.4 變形分類.....	30
第六章 結論.....	32
參考文獻.....	34
附表目錄.....	36
附圖目錄.....	41
附錄目錄.....	60



第一章

導論

彈性桿與剛性牆面的側向接觸在工程上時常發生。當桿的變形大時，由於變形屬於非線性，我們需要採用彈性樑(elastica)模型進行分析。為了解兩剛性牆面間彈性桿的行為，產生一個研究領域稱為:受拘束的彈性樑(constrained elastica)。

拘束彈性樑的剛性牆面可以是任何形狀，最為常見的是平面。其中一種情況為:平面拘束面被固定在空間中，推進彈性桿時因空間的限制而產生變形。可參閱 Feodosyev [1]、Vaillette 和 Adams [2]、Adams 和 Benson [3]、Adan 等人[4]、Domokos 等人[5]、Holmes 等人[6]、Chai [7]和 Ro 等人[8]。另一種情況有點不同，是藉由移動拘束牆面來壓縮挫曲樑。參見 Roman 和 Pocheau [9] [10]。受拘束彈性樑在這兩種設定之下的行為是類似的。

在某些應用中，彈性樑的拘束面除了平面外也可以是弧面。Wu 和 Juvkam-Wold [11]研究井孔的曲率對鑽油管挫曲的影響。Kuru 等人[12]研究鑽油管在油井中的挫曲行為與其對軸向力傳遞的影響。Chen 和 Li [13]及 Lu 和 Chen [14]研究心導管在動脈中的變形。普遍來說，受弧面拘束彈性樑的研究跟受平面拘束的比起來相對較少，主要是因為它的

幾何較複雜。

受拘束彈性樑分析的一大難題在於其解的多樣性。根據靜態分析，我們可建立變形軌跡圖(deformation map)，表示力連續變化時的變形軌跡。當在相同的受力情況下，多於一組的靜態解存在是很常見的。所以，雖然建立了變形軌跡圖，我們還是無法準確知道實際的情況，因為並不是所有計算出的變形皆存在於現實中，只有穩定變形才存在於現實中。

近來，Chen 和 Ro [15]及 Ro 等人[8]使用振動法計算受點拘束和平面拘束彈性樑的自然頻率並決定穩定性。他們指出在振動分析時必須考慮彈性樑和拘束面間的滑動，為了完成分析，使用 Eulerian 形式的運動方程式取代傳統的 Lagrangian 形式。上述研究專注於平面拘束牆面，而考慮到許多包含弧形拘束面的應用，將受拘束彈性樑的穩定性理論推廣到受弧形牆面拘束是必要的。

在本文中我們考慮：兩端夾持的樑一開始置於平面上，接著使樑扭曲離開平面並將兩端固定在空間中。弧狀邊界於側向壓縮彈性樑，強迫彈性樑在底部平面和弧狀牆面間產生變形，如圖 3-1 所示。此模型可視為 Roman 和 Pocheau [9] [10]研究平面牆面拘束問題的延伸。

在本文的第一部分，當給定受力和幾何參數後，我們建立包含各種變形 patterns 的變形軌跡圖。接著我們提出可求得受拘束彈性樑自然

頻率的振動理論，從振動分析中，受拘束彈性樑的穩定性可被決定。

本文理論忽略摩擦力影響。最後，我們架設實驗觀察受拘束彈性樑的

變形路徑並與理論的預測作比較。



第二章

理論模型

我們考慮不可拉伸彈性樑的總長為 L_0 ，彎曲強度和彈性樑單位長度的密度分別為 EI 及 μ 。彈性樑一開始為無應力的直樑並置於剛性平面上，樑的兩端為側向夾持固定。隨著端點外力的施加，樑挫曲離開平面且兩端的距離縮短為 L ，端點的移動量定義為 $e = L_0 - L$ 。在此變形之後，挫曲樑(彈性樑)的兩端在空間中完全固定。我們將 xy -座標系統的原點定在點 A，如圖 3-1 所示。曲率半徑 ρ 的弧形剛性面藉著縮減高度壓迫彈性樑，使得彈性樑產生變形。弧面的高度 h 為沿著中心線 $x = L/2$ 測量從底部平面到弧面的距離，假設剛性弧形邊界對中心線對稱。頂部的滑塊只允許 y 方向的平移，為了達到指定的高度縮減，頂部剛性面受到 $-y$ 方向的外力 N 作用。弧狀邊界可以是凹面(如圖 3-1 所示)或是凸面，我們也會討論頂面為平面的特殊情形。本文的目的為研究彈性樑在頂部弧狀牆面影響下的變形及穩定性。

第三章

彈性樑的靜態變形

在靜態分析遇到的第一個問題為:當受力條件給定之後將會產生什麼變形?不幸的是,並沒有理論明確告訴我們有多少可能的變形存在,或應該是怎樣的變形。實際操作上我們必須先猜出變形的型態才能繼續分析,而被猜出的變形是否真的存在則需要進一步作檢驗。如果我們根據猜測出的型態可以找到解,那此變形就的確存在。另一方面,若根據猜測出的型態在數值上找不到解,我們並沒有結論指出此變形型態是否存在,也有可能是變形事實上存在但我們找不到。我們依靠一些輔助方法來決定是否有些變形在我們的分析中沒被考慮到。在此分析中我們建立變形軌跡圖(deformation map),表示出當力連續變化時的變形軌跡。若在變形軌跡圖中有遺漏的軌跡,那就表示有變形沒考慮到,這提醒了我們應專注於尋找遺漏的變形,直到變形軌跡圖中的軌跡都完整連接在一起。

在本文中我們使用 shooting method 求得受拘束彈性樑的變形。我們用兩個例子來說明我們採用的方法:其中一個只包含點接觸另一個則只包含線接觸。混合點接觸和線接觸的複雜變形則為此兩基本例子的簡單延伸。

3.1 在兩接觸面皆為點接觸

我們首先考慮圖 3-1 中受拘束彈性樑的變形。底部的面為平面，頂部接觸面為曲率半徑 ρ 的凹面。我們先“猜”彈性樑在 $s = s_1$ 與頂部凹面產生點接觸，然後在 $s = s_2$ 與底部平面有另一個點接觸。 s 為從 A 端量起彈性樑的長度。此變形假設彈性樑在 $s = s_2$ 到 1 的區域有一個 free fold。顯然地，此假設變形為非對稱變形。當前的任務為決定此種變形是否可能發生。

我們假設所有的接觸為無摩擦。彈性樑在兩接觸點上受到 R_1 及 R_2 兩正向反力， R_1 指向凹面的曲率中心，而 R_2 則垂直向上。 R_1 的方向可由角度 ϕ_1 (逆時針方向為正) 指定，其中 ϕ_1 為接觸點在凹面上的切線與 x 軸的夾角。彈性樑的平衡方程式可表示為：

$$M(s) = EI \frac{d\theta}{ds} = F_x(s)y - F_y(s)x \quad (3.1)$$

其中

$$F_x(s) = -F_{xA} - R_1 \sin \phi_1 H(s - s_1) \quad (3.2)$$

$$F_y(s) = -F_{yA} + R_1 \cos \phi_1 H(s - s_1) - R_2 H(s - s_2) \quad (3.3)$$

$M(s)$ 為彎矩， $F_x(s)$ 和 $F_y(s)$ 分別為 x 及 y 方向的內力， $\theta(s)$ 為受力後彈性樑的切線角度， H 為步階函數， F_{xA} 、 F_{yA} 和 M_A 為 A 端的反力及彎矩。

為了方便起見我們導入以下無因次參數(有星號)：

$$(s^*, e^*, \rho^*, h^*, x^*, y^*) = \frac{(s, e, \rho, h, x, y)}{L_0}, \quad (F_x^*, F_y^*) = \frac{L_0^2}{4\pi^2 EI} (F_x, F_y), \quad M^* = \frac{L_0}{4\pi^2 EI} M,$$

$$t^* = \frac{1}{L_0^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} t, \quad \omega^* = L_0^2 \sqrt{\frac{\mu}{EI}} \omega \quad (3.4)$$

t 為時間且 ω 為自然頻率，之後的動態分析將會討論到。將(3.4)式的關係代入(3.1)-(3.3)式後，並為了簡化將星號省略，我們得到無因次化的平衡方程式：

$$\frac{d\theta}{ds} = 4\pi^2 (-F_y x + F_x y) \quad (3.5)$$

將(3.5)式對 s 微分，並利用幾何關係式：

$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta \quad (3.6)$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta \quad (3.7)$$

可以得到：

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = 4\pi^2 (F_x \sin \theta - F_y \cos \theta) \quad (3.8)$$

在 A 端的邊界條件為：

$$\theta|_{s=0} = 0 \quad (3.9)$$

$$x|_{s=0} = 0 \quad (3.10)$$

$$y|_{s=0} = 0 \quad (3.11)$$

在 B 端的邊界條件為：

$$\theta|_{s=1} = 0 \quad (3.12)$$

$$x|_{s=1} = 1 - e \quad (3.13)$$

$$y|_{s=1} = 0 \quad (3.14)$$

在圓弧凹面上的接觸條件為：

$$x|_{s=s_1} = \frac{1-e}{2} - \rho \sin \phi_1 \quad (3.15)$$

$$y|_{s=s_1} = h - \rho(1 - \cos \phi_1) \quad (3.16)$$

$$\theta|_{s=s_1} = \phi_1 \quad (3.17)$$

底部平面點接觸條件為：

$$\theta|_{s=s_2} = 0 \quad (3.18)$$

$$y|_{s=s_2} = 0 \quad (3.19)$$

我們指定 ρ 、 e 和 h 。在 shooting method 中，給定 8 個參數的初猜值： F_{xA} 、 F_{yA} 、 M_A 、 s_1 、 s_2 、 R_1 、 R_2 和 ϕ_1 。藉由從 0 到 1 積分(3.6)-(3.8)三式，用(3.9)-(3.11)式及曲率和彎矩的關係：

$$\left. \frac{d\theta}{ds} \right|_{s=0} = 4\pi^2 M_A \quad (3.20)$$

作為初始條件。由(3.12)-(3.19)式 8 個條件檢查解的準確度，若解的準確度不符合要求，則再嘗試新的一組初猜值。我們使用牛頓法來加速迭代的收斂。在得到受拘束彈性樑的變形之後，我們可以決定造成此變形的外力 $N = R_1 \cos \phi_1$ 。當弧面為凸面時，曲率半徑 ρ 和角度 ϕ 取負。

3.2 頂部弧面為線接觸

圖 3-2(a)為彈性樑在頂部弧面產生線接觸的變形。我們將彈性樑分成 3 個區域：沒有接觸的兩個區域(從 $s=0$ 到 s_1 、從 $s=s_2$ 到 1)和在頂面

的一段線接觸(從 $s=s_1$ 到 s_2).

在 $s=0$ 到 s_1 的區域，(3.8)式平衡方程式中的內力 $F_x(s)$ 和 $F_y(s)$ 為：

$$F_x = -F_{xA} \quad (3.21)$$

$$F_y = -F_{yA} \quad (3.22)$$

我們將點 $s=s_i$ 處內力的切向及法向分別表示為 P_i 和 Q_i ($i=1, 2$)。在整段線接觸區域中($s=s_1$ 到 s_2)，內力的切線分量保持常數，也就是說 $P_1 = P_2$ 。由

圖 3-2(b)的自由體圖，我們可將 $s=s_2$ 到 1 區域的內力 $F_x(s)$ 和 $F_y(s)$ 表為：

$$F_x(s) = -(F_{xA} \cos \phi_1 + F_{yA} \sin \phi_1) \cos \phi_2 - Q_2 \sin \phi_2 \quad (3.23)$$

$$F_y(s) = -(F_{xA} \cos \phi_1 + F_{yA} \sin \phi_1) \sin \phi_2 + Q_2 \cos \phi_2 \quad (3.24)$$

A 端及 B 端的邊界條件一樣可由(3.9)-(3.14)式給定。在點 $s=s_1$ 和 s_2 的接觸條件為：

$$\theta|_{s=s_i} = \phi_i \quad (3.25)$$

$$\left. \frac{d\theta}{ds} \right|_{s=s_i} = -\frac{1}{\rho} \quad (3.26)$$

$$x|_{s=s_i} = \frac{1-e}{2} - \rho \sin \phi_i \quad (3.27)$$

$$y|_{s=s_i} = h - \rho(1 - \cos \phi_i) \quad (3.28)$$

(3.25)-(3.28)式的下標 i 可以是 1 或 2。由於彈性樑的不可伸張性，在 (3.25)-(3.28)式中的 s_2 可被表示為：

$$s_2 = s_1 + \rho(|\phi_1| + |\phi_2|) \quad (3.29)$$

使用 shooting method 求解，我們需要 7 個初猜值： F_{xA} 、 F_{yA} 、 M_A 、

s_1 、 ϕ_1 、 ϕ_2 和 Q_2 。我們在 $s=0$ 到 s_1 的範圍(無接觸區域)積分(3.6)-(3.8)三式((3.8)式中的 F_x 和 F_y 為(3.21)-(3.22)式)，初始條件為(3.9)-(3.11)式和(3.20)式。我們接著在 $s=s_2$ 到 1 的範圍(無接觸區域)積分(3.6)-(3.8)三式((3.8)式中的 F_x 和 F_y 為(3.23)-(3.24)式)，初始條件為(3.25)-(3.28)式($i=2$)。最後檢查 7 個條件來確定解的準確性((3.25)-(3.28)式, $i=1$; (3.12)-(3.14)式)。

求得受拘束彈性樑的變形後，我們可決定線接觸段邊界處的集中反力 R_1 、 R_2 ，以及線接觸段的正向均佈力。舉例來說： R_1 等於恰在點 $s = s_1$ 之前的剪力(線接觸段 $s_1 < s < s_2$ 的剪力為零)

$$R_1 = F_{yA} \cos \phi_1 - F_{xA} \sin \phi_1 \quad (3.30)$$

為了計算 q ，我們從 $s_1 < s < s_2$ 範圍中取出任意線段 CD 並畫出其自由體圖，如圖 3-3 所示，對 C 點作力矩平衡我們得到以下關係：

$$q = \frac{P_C}{\rho} = \frac{(F_{xA} \cos \phi_1 + F_{yA} \sin \phi_1)}{\rho} \quad (3.31)$$

得到 q 之後，由線接觸段剪力為零的條件可知：

$$R_2 = Q_2 \quad (3.32)$$

最後，此變形的外力 N 可由下式計算出來：

$$N = R_1 \cos \phi_1 + R_2 \cos \phi_2 + q x \Big|_{s=s_1}^{s=s_2} \quad (3.33)$$

值得注意的是，在此變形中我們並無假設對稱，但代入初猜值之後都收斂到對稱的變形，因此我們推論此變形實際上是對稱的。

第四章

振動和穩定性分析

彈性樑為非線性問題，尤其是還受到剛性牆面的拘束，在相同的受力情況下可能有不只一個平衡解同時存在。在第三章中我們示範了找出圖 3-1 和 3-2(a)變形的流程。數值分析顯示這些靜態變形的確存在，但是並不能說這些變形在現實中真的存在。如圖 3-2(a)的變形可由直覺判斷應該存在於現實中，但圖 3-1 的變形就很難直接由觀察形狀決定其穩定性。一個變形只有當其為穩定變形時才存在於現實中。在兩邊拘束牆面皆為平面的特例中，Ro 和 Chen [8]發展了一套方法，可用振動法計算出受拘束彈性樑的自然頻率，進而決定各變形的穩定性。經由適當修正，同樣的方法可以應用在此文章的弧形邊界上。此理論的重點在於考慮了彈性樑與拘束面的接觸點會隨著振動不停變動，為了加入此影響，需要將運動方程式由 Lagrangian 轉換為 Eulerian 形式。為了精簡，此章只提到關鍵步驟，流程的細節可參閱 Ro 和 Chen [8]。

4.1 在兩接觸面皆為點接觸

首先我們建立圖 3-1 接觸點 $s = s_1$ 附近微小元素 ds 的自由體圖，如圖 4-1 所示， $F_x(s,t)$ 和 $F_y(s,t)$ 分別為 x 和 y 方向的內力。運動方程式包含了(3.6)-(3.7)式和下列 4 式：

$$\frac{\partial M(s,t)}{\partial s} = F_x(s,t) \sin \theta(s,t) - F_y(s,t) \cos \theta(s,t) \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial F_x(s,t)}{\partial s} - R_{x1}(t) \delta(s - s_1 - \eta_1(t)) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial^2 x(s,t)}{\partial t^2} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial F_y(s,t)}{\partial s} - R_{y1}(t) \delta(s - s_1 - \eta_1(t)) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial^2 y(s,t)}{\partial t^2} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \theta(s,t)}{\partial s} = 4\pi^2 M(s,t) \quad (4.4)$$

R_{x1} 和 R_{y1} 為反力 $R_1(t)$ 在 x 方向和 y 方向分量：

$$R_{x1}(t) = -R_1(t) \sin \phi_1 \quad (4.5)$$

$$R_{y1}(t) = R_1(t) \cos \phi_1 \quad (4.6)$$

(4.1)-(4.3)式為彎矩和 x 、 y 方向力平衡的結果。(4.4)式為 Euler-Bernoulli 樑模型彎矩和曲率的關係。(4.2)-(4.3)式適用於彈性樑 $s=0$ 至 s_2 之間的區域。

由於彈性樑與拘束面的接觸點在振動時可能會滑動，如此的話彈性樑的接觸點可能由 $s=s_1$ 改變為 $s=s_1+\eta_1$ ，其中的 $\eta_1(t)$ 為一個微小量。圖 4-2 表示接觸點位置的改變，且在(4.2)-(4.3)式被表示出來，實線和虛線分別代表接觸點 $s=s_1$ 附近的靜態變形和振動後的位置。虛線上的點 $s=s_1$ 代表彈性樑在平衡位置時的接觸點。當振動發生後，虛線上的點 $s=s_1+\eta_1$ 變成新的接觸點。 $\delta(\cdot)$ 為無因次的脈衝函數。這些方程式可被稱為 Lagrangian 形式的統御方程式， s 則為 Lagrangian 座標上彈性樑的一個點。

(4.2)-(4.3)式中的脈衝函數裡隨時間改變的函數 $\eta_1(t)$ 在作受拘束彈

性樑的動態分析時會造成困難。Chen 和 Ro [15]指出若忽略這個小變量將會產生穩定性預測的錯誤。為了克服這個困難，我們定義一個新的變數 ε_1 ：

$$\varepsilon_1 = s - \eta_1 \quad (4.7)$$

並將(3.6)-(3.7)式和(4.1)-(4.4)式的靜態解表示為 $x_e(s)$ 、 $y_e(s)$ 、 $\theta_e(s)$ 、 $M_e(s)$ 、 $F_{xe}(s)$ 、 $F_{ye}(s)$ 和 R_{1e} ，這些靜態解已在 3.1 節被解出。我們假設 $F_x(s,t)$ 、 $F_y(s,t)$ 、 $x(s,t)$ 、 $y(s,t)$ 、 $\theta(s,t)$ 和 $M(s,t)$ 的動態解可被表示為靜態解和一個小擾動的疊加。在一些代數運算之後，動態解可被表示為：

$$\hat{F}_x(\varepsilon_1, t) = F_{xe}(\varepsilon_1) + \left[\hat{F}_{xd}(\varepsilon_1) + R_{x1d} H(\varepsilon_1 - s_1) \right] \sin \omega t \quad (4.8)$$

$$\hat{F}_y(\varepsilon_1, t) = F_{ye}(\varepsilon_1) + \left[\hat{F}_{yd}(\varepsilon_1) + R_{y1d} H(\varepsilon_1 - s_1) \right] \sin \omega t \quad (4.9)$$

$$\hat{x}(\varepsilon_1, t) = x_e(\varepsilon_1) + \hat{x}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t \quad (4.10)$$

$$\hat{y}(\varepsilon_1, t) = y_e(\varepsilon_1) + \hat{y}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t \quad (4.11)$$

$$\hat{\theta}(\varepsilon_1, t) = \theta_e(\varepsilon_1) + \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t \quad (4.12)$$

$$\hat{M}(\varepsilon_1, t) = M_e(\varepsilon_1) + \hat{M}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t \quad (4.13)$$

其中 $\hat{F}_x(\varepsilon_1, t) = F_x(\varepsilon_1 + \eta_1, t)$ 。 ω 為彈性樑的自然頻率。 $F_{xe}(\varepsilon_1)$ 等符號為靜態分析所得到的靜態解，只是獨立變數 s 被換成 ε_1 。下標“ d ”的變數表示下標“ e ”靜態解相對應的小擾動。(4.8)-(4.9)中接觸點反力的小擾動 R_{x1d} 和 R_{y1d} 定義為：

$$R_{x1}(t) = -R_{1e} \sin \phi_1 + R_{x1d} \sin \omega t \quad (4.14)$$

$$R_{y1}(t) = R_{1e} \cos \phi_1 + R_{y1d} \sin \omega t \quad (4.15)$$

(4.7)式所定義的 ε_1 可被稱為 Eulerian 座標下彈性樑上的點。

經由 $\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial s} = 1$ ，Lagrangian 形式的統御方程式(3.6)-(3.7)、(4.1)-(4.4)

式可被轉換為 Eulerian 形式：

$$\frac{\partial \hat{x}(\varepsilon_1, t)}{\partial \varepsilon_1} = \cos \hat{\theta}(\varepsilon_1, t) \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \hat{y}(\varepsilon_1, t)}{\partial \varepsilon_1} = \sin \hat{\theta}(\varepsilon_1, t) \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \hat{M}(\varepsilon_1, t)}{\partial \varepsilon_1} = \hat{F}_x(\varepsilon_1, t) \sin \hat{\theta}(\varepsilon_1, t) - \hat{F}_y(\varepsilon_1, t) \cos \hat{\theta}(\varepsilon_1, t) \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \hat{F}_x(\varepsilon_1, t)}{\partial \varepsilon_1} - R_{x1}(t) \delta(\varepsilon_1 - s_1) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial^2 \hat{x}(\varepsilon_1, t)}{\partial t^2} \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \hat{F}_y(\varepsilon_1, t)}{\partial \varepsilon_1} - R_{y1}(t) \delta(\varepsilon_1 - s_1) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial^2 \hat{y}(\varepsilon_1, t)}{\partial t^2} \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}(\varepsilon_1, t)}{\partial \varepsilon_1} = 4\pi^2 \hat{M}(\varepsilon_1, t) \quad (4.21)$$

其中(4.19)和(4.20)式中的脈衝函數在 Eulerian 形式之下對時間是獨立的。將(4.8)-(4.15)式以及下式：

$$\eta_1(t) = \eta_{1d} \sin \omega t \quad (4.22)$$

同時代入(4.16)-(4.21)式中，並忽略高階項，我們可得到下列六個函數

$\hat{x}_d(\varepsilon_1)$ 、 $\hat{y}_d(\varepsilon_1)$ 、 $\hat{\theta}_d(\varepsilon_1)$ 、 $\hat{M}_d(\varepsilon_1)$ 、 $\hat{F}_{xd}(\varepsilon_1)$ 和 $\hat{F}_{yd}(\varepsilon_1)$ 所組成的線性方程式：

$$\frac{d\hat{x}_d(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1} = -\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \theta_e(\varepsilon_1) \quad (4.23)$$

$$\frac{d\hat{y}_d(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1} = \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \cos \theta_e(\varepsilon_1) \quad (4.24)$$

$$\frac{d\hat{\theta}_d(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1} = 4\pi^2 \hat{M}_d(\varepsilon_1) \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{M}_d(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1} = & \left[F_{xe}(\varepsilon_1)\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) - \hat{F}_{yd}(\varepsilon_1) - R_{y1d}H(\varepsilon_1 - s_1) \right] \cos \theta_e \\ & + \left[F_{ye}(\varepsilon_1)\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) + \hat{F}_{xd}(\varepsilon_1) + R_{x1d}H(\varepsilon_1 - s_1) \right] \sin \theta_e \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\frac{d\hat{F}_{xd}(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1} = \frac{1}{4\pi^2} \omega^2 [\cos \theta_e(\varepsilon_1)\eta_{1d} - \hat{x}_d(\varepsilon_1)] \quad (4.27)$$

$$\frac{d\hat{F}_{yd}(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1} = \frac{1}{4\pi^2} \omega^2 [\sin \theta_e(\varepsilon_1)\eta_{1d} - \hat{y}_d(\varepsilon_1)] \quad (4.28)$$

(4.23)-(4.28)式適用於 $0 < \varepsilon_1 < s_2$ 的範圍。

以上式子只需將下標“1”換成“2”，以及一個上標(\hat{x}_d)改成兩個上標($\hat{\hat{x}}_d$)就可在 $s = s_1$ 到 1 的範圍使用。所以引進另一個 Eulerian 座標變數 ε_2 後：

$$\varepsilon_2 = s - \eta_2 \quad (4.29)$$

我們可得到另一組類似(4.23)-(4.28)的方程式。

其中 $s_1 < \varepsilon_2 < 1$ 。 η_2 代表在接觸點 $s = s_2$ 的滑動量。在(4.23)-(4.28)式中的函數 $\hat{x}_d(\varepsilon_1)$ 、 $\hat{y}_d(\varepsilon_1)$ 、 $\hat{\theta}_d(\varepsilon_1)$ 、 $\hat{M}_d(\varepsilon_1)$ 、 $\hat{F}_{xd}(\varepsilon_1)$ 和 $\hat{F}_{yd}(\varepsilon_1)$ 被另一組不同的函數 $\hat{\hat{x}}_d(\varepsilon_2)$ 、 $\hat{\hat{y}}_d(\varepsilon_2)$ 、 $\hat{\hat{\theta}}_d(\varepsilon_2)$ 、 $\hat{\hat{M}}_d(\varepsilon_2)$ 、 $\hat{\hat{F}}_{xd}(\varepsilon_2)$ 和 $\hat{\hat{F}}_{yd}(\varepsilon_2)$ 取代。

4.2 邊界條件

左端 A 點的邊界條件為：

$$x(s,t)|_{s=0} = \hat{x}(\varepsilon_1, t)|_{\varepsilon_1=-\eta_1} = 0 \quad (4.30)$$

$$y(s,t)|_{s=0} = \hat{y}(\varepsilon_1, t)|_{\varepsilon_1=-\eta_1} = 0 \quad (4.31)$$

$$\theta(s,t)|_{s=0} = \hat{\theta}(\varepsilon_1, t)|_{\varepsilon_1=-\eta_1} = 0 \quad (4.32)$$

這三個邊界條件可被線性化為下列形式：

$$\hat{x}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} = \cos \theta_e(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} \eta_{1d} \quad (4.33)$$

$$\hat{y}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} = \sin \theta_e(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} \eta_{1d} \quad (4.34)$$

$$\hat{\theta}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} = 4\pi^2 M_e(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} \eta_{1d} \quad (4.35)$$

B 點線性化後的邊界條件可由相同方法導出：

$$\hat{x}_d(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=1} = \cos \theta_e(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=1} \eta_{2d} \quad (4.36)$$

$$\hat{y}_d(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=1} = \sin \theta_e(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=1} \eta_{2d} \quad (4.37)$$

$$\hat{\theta}_d(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=1} = 4\pi^2 M_e(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=1} \eta_{2d} \quad (4.38)$$

4.3 接觸條件

振動期間彈性樑總是與頂面和底面保持接觸並允許無摩擦滑動。

點 $s = s_1$ 的接觸條件為：

$$x(s,t)|_{s=s_1+\eta_1} = \hat{x}(\varepsilon_1, t)|_{\varepsilon_1=s_1} = \frac{1-e}{2} - \rho \sin \hat{\theta}(\varepsilon_1, t)|_{\varepsilon_1=s_1} \quad (4.39)$$

$$y(s,t)|_{s=s_1+\eta_1} = \hat{y}(\varepsilon_1, t)|_{\varepsilon_1=s_1} = h - \rho(1 - \cos \hat{\theta}(\varepsilon_1, t))|_{\varepsilon_1=s_1} \quad (4.40)$$

$$\left[R_{x1} \cos \hat{\theta}(\varepsilon_1, t) + R_{y1} \sin \hat{\theta}(\varepsilon_1, t) \right]_{\varepsilon_1=s_1} = 0 \quad (4.41)$$

線性化之後，這三式可表為：

$$\hat{x}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=s_1} = -\rho \left[\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \cos \theta_e(\varepsilon_1) \right] |_{\varepsilon_1=s_1} \quad (4.42)$$

$$\hat{y}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=s_1} = -\rho \left[\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \theta_e(\varepsilon_1) \right] |_{\varepsilon_1=s_1} \quad (4.43)$$

$$\left[R_{y1e} \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \cos \theta_e(\varepsilon_1) + R_{y1d} \sin \theta_e(\varepsilon_1) - R_{x1e} \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \theta_e(\varepsilon_1) + R_{x1d} \cos \theta_e(\varepsilon_1) \right] |_{\varepsilon_1=s_1} = 0 \quad (4.44)$$

點 $s = s_2$ 的接觸條件為：

$$y(s, t)|_{s=s_2+\eta_2} = \hat{y}(\varepsilon_2, t)|_{\varepsilon_2=s_2} = 0 \quad (4.45)$$

$$\theta(s, t)|_{s=s_2+\eta_2} = \hat{\theta}(\varepsilon_2, t)|_{\varepsilon_2=s_2} = 0 \quad (4.46)$$

這兩個條件不需線性化，可直接改寫為：

$$\hat{y}_d(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=s_2} = 0 \quad (4.47)$$

$$\hat{\theta}_d(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=s_2} = 0 \quad (4.48)$$

4.4 ε_1 與 ε_2 座標間的轉換

我們定義了兩個 Eulerian 座標： ε_1 和 ε_2 。函數可同時表示為 ε_1 或 ε_2 的形式。舉例來說：圖 3-1 在底部平面的接觸點可被定義為 $\varepsilon_2 = s_2$ 或是 $\varepsilon_1 = s_2 + \eta_2 - \eta_1$ ，此點的旋轉角度可表示為：

$$\theta(s, t)|_{s=s_2+\eta_2} = \hat{\theta}(\varepsilon_2, t)|_{\varepsilon_2=s_2} = \hat{\theta}(\varepsilon_1, t)|_{\varepsilon_1=s_2+\eta_2-\eta_1} \quad (4.49)$$

接著我們在靜態解上加上一個微小簡諧擾動，(4.49)式可寫為：

$$\begin{aligned} \theta_e(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=s_2} + \hat{\theta}_d(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=s_2} \sin \omega t = \\ \theta_e(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=s_2+\eta_2-\eta_1} + \hat{\theta}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=s_2+\eta_2-\eta_1} \sin \omega t \end{aligned} \quad (4.50)$$

接著將(4.50)式等號右邊的函數 $\theta_e(\varepsilon_1)$ 與 $\hat{\theta}_d(\varepsilon_1)$ 對 $\varepsilon_1 = s_2$ 作泰勒級數展開

並線性化可得到 $\varepsilon_1 = s_2$ 時 $\hat{\theta}_d(\varepsilon_1)$ 與 $\hat{\theta}_d(\varepsilon_2)$ 之間的轉換：

$$\hat{\theta}_d(\varepsilon_2) \Big|_{\varepsilon_2=s_2} = \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \Big|_{\varepsilon_1=s_2} + \frac{\partial \theta_e}{\partial \varepsilon_1} \Big|_{\varepsilon_1=s_2} (\eta_{2d} - \eta_{1d}) \quad (4.51)$$

$\hat{\theta}_d(\varepsilon_1)$ 只在 $0 \leq \varepsilon_1 \leq s_2$ 的範圍被定義，當材料點超過 s_2 就必須改用 $\hat{\theta}_d(\varepsilon_2)$ 。

用同樣的方法 \hat{x}_d 、 \hat{y}_d 、 \hat{M}_d 、 \hat{F}_{xd} 和 \hat{F}_{yd} 可被表示為類似的式子。

4.5 求解方法

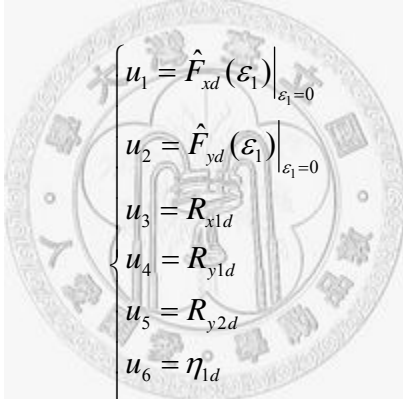
ω 在(4.27)-(4.28)式中只以 ω^2 形式出現過。因此，如果特徵值 ω^2 是正的，它所對應的變形為穩定且頻率為 ω 。另外，若 ω^2 為負值則表示此平衡位置為不穩定。我們使用 shooting method 求特徵值 ω^2 的解。首先給定 $\hat{M}_d(\varepsilon_1) \Big|_{\varepsilon_1=0} = 1$ ，並猜測八個變數 $\hat{F}_{xd}(\varepsilon_1) \Big|_{\varepsilon_1=0}$ 、 $\hat{F}_{yd}(\varepsilon_1) \Big|_{\varepsilon_1=0}$ 、 R_{x1d} 、 R_{y1d} 、 R_{y2d} 、 η_{1d} 、 η_{2d} 和 ω^2 。如同一個初始值問題，我們可對 \hat{x}_d 、 \hat{y}_d 、 $\hat{\theta}_d$ 、 \hat{M}_d 、 \hat{F}_{xd} 和 \hat{F}_{yd} 六條齊性微分方程式(4.23)-(4.28)從 $\varepsilon_1 = 0$ 積分到 $\varepsilon_1 = s_2$ 。在 A 端的三個邊界條件(4.33)-(4.35)式提供了所需的初始條件。根據類似(4.51)式的轉換式，當 $\varepsilon_1 = s_2$ 時， $\hat{x}_d(\varepsilon_1) \Big|_{\varepsilon_1=s_2}$ 、 $\hat{y}_d(\varepsilon_1) \Big|_{\varepsilon_1=s_2}$ 、 $\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \Big|_{\varepsilon_1=s_2}$ 、 $\hat{M}_d(\varepsilon_1) \Big|_{\varepsilon_1=s_2}$ 、 $\hat{F}_{xd}(\varepsilon_1) \Big|_{\varepsilon_1=s_2}$ 和 $\hat{F}_{yd}(\varepsilon_1) \Big|_{\varepsilon_1=s_2}$ 的值可被用來計算 $\hat{x}_d(\varepsilon_2) \Big|_{\varepsilon_2=s_2}$ 、 $\hat{y}_d(\varepsilon_2) \Big|_{\varepsilon_2=s_2}$ 、 $\hat{\theta}_d(\varepsilon_2) \Big|_{\varepsilon_2=s_2}$ 、 $\hat{M}_d(\varepsilon_2) \Big|_{\varepsilon_2=s_2}$ 、 $\hat{F}_{xd}(\varepsilon_2) \Big|_{\varepsilon_2=s_2}$ 和 $\hat{F}_{yd}(\varepsilon_2) \Big|_{\varepsilon_2=s_2}$ 。從 $\varepsilon_2 = s_2$ 到 $\varepsilon_2 = 1$ 的積分， ε_2 取代 ε_1 作為新的獨立變數。利用 $\varepsilon_2 = 1$ 的三個邊界條件(4.36)-(4.38)式、 $\varepsilon_1 = s_1$ 的三個接觸條件(4.42)-(4.44)和 $\varepsilon_2 = s_2$ 的兩個接觸條件(4.47)-(4.48)式來檢查猜測的準確性。我們使用 Newton-Raphson method

改善猜測值。

將上述的系統視為由八個非線性方程式與八個未知數所組成：

$$\begin{cases} f_1(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8) = 0 \\ f_2(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8) = 0 \\ f_3(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8) = 0 \\ f_4(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8) = 0 \\ f_5(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8) = 0 \\ f_6(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8) = 0 \\ f_7(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8) = 0 \\ f_8(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8) = 0 \end{cases} \quad (4.52)$$

其中



$$\begin{cases} u_1 = \hat{F}_{xd}(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} \\ u_2 = \hat{F}_{yd}(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} \\ u_3 = R_{x1d} \\ u_4 = R_{y1d} \\ u_5 = R_{y2d} \\ u_6 = \eta_{1d} \\ u_7 = \eta_{2d} \\ u_8 = \omega^2 \end{cases} \quad (4.53)$$

(4.53)式代表八個未知數。而八個非線性方程式：

$$\begin{cases}
f_1 = \hat{x}_d(\varepsilon_2) \Big|_{\varepsilon_2=1} - \cos \theta_e(\varepsilon_2) \Big|_{\varepsilon_2=1} \eta_{2d} = 0 \\
f_2 = \hat{y}_d(\varepsilon_2) \Big|_{\varepsilon_2=1} - \sin \theta_e(\varepsilon_2) \Big|_{\varepsilon_2=1} \eta_{2d} = 0 \\
f_3 = \hat{\theta}_d(\varepsilon_2) \Big|_{\varepsilon_2=1} - 4\pi^2 M_e(\varepsilon_2) \Big|_{\varepsilon_2=1} \eta_{2d} = 0 \\
f_4 = \hat{x}_d(\varepsilon_1) \Big|_{\varepsilon_1=s_1} + \rho \left[\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \cos \theta_e(\varepsilon_1) \right] \Big|_{\varepsilon_1=s_1} = 0 \\
f_5 = \hat{y}_d(\varepsilon_1) \Big|_{\varepsilon_1=s_1} + \rho \left[\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \theta_e(\varepsilon_1) \right] \Big|_{\varepsilon_1=s_1} = 0 \\
f_6 = \left[R_{y1e} \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \cos \theta_e(\varepsilon_1) + R_{y1d} \sin \theta_e(\varepsilon_1) - \right. \\
\left. R_{x1e} \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \theta_e(\varepsilon_1) + R_{x1d} \cos \theta_e(\varepsilon_1) \right] \Big|_{\varepsilon_1=s_1} = 0 \\
f_7 = \hat{y}_d(\varepsilon_2) \Big|_{\varepsilon_2=s_2} = 0 \\
f_8 = \hat{\theta}_d(\varepsilon_2) \Big|_{\varepsilon_2=s_2} = 0
\end{cases} \quad (4.54)$$

疊代未知數的方法為：

$$\mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i - [\mathbf{J}^i]^{-1} \mathbf{f}^i \quad (4.55)$$

其中 $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}^T$ ， $\mathbf{f} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}^T$ ， \mathbf{J} 為 Jacobian matrix。 (4.55) 式也可寫成以下形式：

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_8 \end{Bmatrix}^{i+1} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_8 \end{Bmatrix}^i - \text{Inverse} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_8} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_8} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_8}{\partial u_1} & \frac{\partial f_8}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_8}{\partial u_8} \end{bmatrix}^i \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_8 \end{Bmatrix} \quad (4.56)$$

至於 (4.56) 式中的偏微分項，計算的方法為：

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} = [f_1(u_1 + \varepsilon, u_2, u_3, \dots, u_8) - f_1(u_1 - \varepsilon, u_2, u_3, \dots, u_8)] / 2\varepsilon \quad (4.57)$$

其中 ε 代表微小量，而其他的偏微分項也是依照類似的方法計算。則可

利用此方法求解特徵值 ω^2 來判斷其穩定性。

4.6 頂面為線接觸

圖 3-2(a)線接觸變形的線接觸部分承受相同大小的均佈正向力。在振動分析中我們把此種變形當作兩點接觸變形，假設線接觸段沒有均佈力，兩接觸點 $\varepsilon_1 = s_1$ 和 s_2 的接觸條件類似於(4.42)-(4.44)式。在 shooting method 中，首先設 $\hat{M}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} = 1$ ，並猜測九個變數 $\hat{F}_{xd}(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0}$ 、 $\hat{F}_{yd}(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0}$ 、 R_{x1d} 、 R_{y1d} 、 R_{x2d} (圖 3-1 變形沒有的未知數)、 R_{y2d} 、 η_{1d} 、 η_{2d} 和 ω^2 。我們可以對 \hat{x}_d 、 \hat{y}_d 、 $\hat{\theta}_d$ 、 \hat{M}_d 、 \hat{F}_{xd} 和 \hat{F}_{yd} 的六條式子(4.23)-(4.28)從 $\varepsilon_1 = 0$ 積分到 $\varepsilon_1 = s_2$ 。九個條件被用來檢查積分的準確性： $\varepsilon_2 = 1$ 的邊界條件(4.36)-(4.38)式、 $\varepsilon_1 = s_1$ 和 $\varepsilon_2 = s_2$ 的接觸條件(4.42)-(4.44)式。在得到解之後必須檢查模態圖是否有違反牆面拘束，若模態圖在振動時超出牆面，那這個模態是無效且無法使用的。

第五章

彈性樑的變形軌跡圖

5.1 凹面(Concave wall)

圖 5-1 為頂部受凹面拘束彈性樑的變形軌跡圖。凹面的曲率半徑 ρ 為 5，彈性樑在接觸凹面前之初始形狀的中點高度為 0.1，端點移動量 e 為 0.025。圖 5-1 中的 Δh 代表頂部牆面向下的移動量， N 代表要產生 Δh 需要給頂部牆面的外力。圖中的實、虛線分別代表穩定和不穩定的變形，各軌跡對應的變形標示在圖的下方。

在說明變形軌跡圖前，我們先解釋如何描述變形：我們定義 fold 為從一牆面到另一牆面間的彈性樑線段，所以圖 3-1 的變形有兩個 folds。而開始到結束都在同一牆面的為 free fold，所以圖 3-1 的變形有一個 free fold。有些變形有線接觸段，舉例來說：圖 3-2 的變形有兩個 folds 和一段線接觸。

彈性樑一開始以中點與頂面接觸(變形 1，a 點和 b 點之間)。在 b 點，一點接觸的變形開始轉變為一線接觸(變形 2)。彈性樑在變形 1 和 2 對底面並無接觸。當頂面繼續往下壓，變形 2 在 c 點演變為變形 3-1，除了在頂面的線接觸，彈性樑在底面的兩端也產生線接觸。我們將變形 3 的軌跡用 e 點分為 3-1 和 3-2。

圖 5-2 為沿著軌跡 1、2、3-1 和 3-2 ω^2 的變化。在 b 點和 c 點附近的 ω^2 曲線在插圖中加以放大。當 Δh 小的時候，最低的兩個自然頻率互相接近然後匯合於 b 點。在變形 1、2 和 3-1 中，所有的 ω^2 皆為正。另一方面，在變形 3-2 至少有一個 ω^2 是負的。在圖 5-2 靠近 e 點處有一條接近垂直的 ω^2 曲線，在 e 點右側會變為負的，所以我們得到變形 1、2 和 3-1 是穩定，而變形 3-2 是不穩定的。

圖 5-3 為當 $\Delta h = 0.037$ (e 點右邊一點)，圖 5-2 中軌跡 3-2 線接觸變形的三個模態圖，實線和虛線分別代表靜態變形和振動模態。其中對應最低 $\omega^2 = -2235$ 的模態從底面發生挫曲而頂面還是保持線接觸，第二和第三模態分別為對稱及反對稱的模態。

根據穩定性的預測，彈性樑會在 e 點從線接觸變形跳到變形 4，軌跡 4 在垂直切線處有極點。軌跡 17 也有類似情況，只是極點上方不穩定部分很小。軌跡 4 和軌跡 5 (在 d 和 e 間不穩定) 在 d 點交會。當 Δh 持續增加，變形 4 在 f 點演變為變形 7，此時變形 4 的 free fold 接觸到頂部牆面而且外力 N 下降到零。 Δh 繼續增加到 g 點，在底部兩端開始出現線接觸(變形 8-1)。當 Δh 達到 i 點，彈性樑會跳到變形 11，其為與頂面三點接觸和底面兩點接觸的變形。當 Δh 達到 k 點，彈性樑轉變為變形 12-1，在此變形中底面兩端產生線接觸，彈性樑在軌跡到達 i 點時跳至變形 16。

從 f 點開始，變形 7 的點接觸變形在 g 點轉為變形 8 的線接觸變形。這個情況與變形 1 到 2 的演變不同，因為變形 7 到 8 的變形無頂面線接觸。我們計算變形 7 和 8 的 ω^2 發現，它並沒有像圖 5-2 一樣匯合，變形 11 到 12 和變形 15 到 16 的情況與變形 7 到 8 類似，所以最低兩個頻率會匯合的現象只有在變形 1 到 2 的時候才會發生。

軌跡 17(含極點，介於 p 和 f 間)和 18(不穩定，p 點以上)在 p 點相接。軌跡 17 在接近 p 點的垂直切線處有極點，極點以上不穩定的部份很小(圖中觀察不到)。極點以下的部份為穩定，不過在實驗中並不會自然發生，除非人為加以調整。軌跡 19(不穩定，介於 q 和 s 間)和 20(不穩定，介於 q 和 r 間)在 q 點相接。s 點的叉號表示軌跡 19 的終點，超過此點後變形 19 就不再存在，因為其在頂部凹面點接觸的反力會變為拉力。軌跡 21(含極點，在 u 和 t 間)和 23(不穩定，u 點以上)在 u 點相接。軌跡 22(含極點，在 v 和 w 間)和 24(不穩定，w 點以上)在 w 點相接。軌跡 9(含極點，介於 j 和 h 間)和 10(不穩定，h 點以上)在 h 點相接。軌跡 13(含極點，介於 n 和 m 間)和 14(不穩定，m 點以上)在 m 點相接。以上變形皆含有 free folds，它們在數學上存在，但在現實中卻很少自然發生，即使其中有些變形為穩定。

我們比較圖 5-1 中的 f、j 和 n 點，在這三個點，含有 free fold 的變形(4、9 和 13)開始接觸到牆面。三點中，只有 f 點對應的外力 N 為零，

j 和 n 則不然，此現象與頂部為平面時不同。

為了驗證理論上的變形演變，我們設計一套實驗裝置來觀察。彈性樑的材料為高碳鋼(type SK5)，楊氏模數 205 GPa，質量密度為 7830 kg/m³，樑的截面為 46 mm×0.1 mm，原始總長為 30 cm。當樑挫曲成弧形且中點高度為 3 cm 後，將兩端完全夾持在平板上。將一塊壓克力銑成凹面狀，並把它當作頂部牆面。我們利用微型平台(micro stage)來控制平移的量。圖 5-4 表示了圖 5-1 加載過程中描述各種變形照片，可以觀察到彈性樑的確產生如理論預測的變形。實驗必須停在變形 12-1，因為繼續推下去頂部的壓克力將會與底部平面發生干涉。

5.2 凸面(Convex wall)

圖 5-5 為頂部受凸面拘束彈性樑的變形軌跡圖，曲率半徑 $\rho=5$ 。彈性樑的中點首先接觸到頂部凸面，表示為變形 1。變形 1 在軌跡通過 b 點後會轉為不穩定。當變形達到 c 點時，頂部牆面的點接觸依然保持點接觸，但彈性樑在底部平面的兩端產生線接觸，表示為變形 4。變形 4 為不穩定的變形。穩定的變形 2-1 在 b 點產生分支，另一個穩定變形 3 在 c 點產生分支。這些分支的細節在插圖中加以放大。我們檢驗軌跡 1 到 4 的自然頻率發現：點接觸變形在 c 點轉變為線接觸變形時，與頂部為凹面不同，最低的兩個 ω^2 並沒有匯聚在一起。

在變形 2 中，彈性樑在頂面有一個點接觸，底部平面有一線接觸，屬於非對稱變形。圖 5-5 中我們將變形 2 表示為點接觸在左，線接觸在右的形式。事實上，由於邊界的對稱性，變形也可以是相反方向。變形 2 由穩定的 2-1 變形及不穩定的 2-2 變形組成，用 d 點加以區隔。在 d 點分支出穩定的變形 5，軌跡 5 在垂直切線處有極點，極點上方不穩定部分很小。變形 5 中，原本在變形 2 底面的線接觸發生挫曲形成 free fold。Δh 持續增加到 e 點，此時變形 5 的 free fold 接觸到頂部凸面，且此時的外力 N 下降至零。

彈性樑在 e 點轉變為變形 6 的點接觸變形。在 f 點，變形 6 底部平面的點接觸演變為線接觸，表示為變形 7。變形 7 由穩定的 7-1 變形及不穩定的 7-2 變形組成，用 g 點加以區隔。在 g 點分支出變形 8，軌跡 8 含極點。變形 7 中底部平面的線接觸在 g 點發生挫曲產生 free fold。當軌跡 8 接到 h 點，變形 8 中的 free fold 向上接觸到頂面，演變為變形 9。注意 h 點的外力 N 並不像 e 點一樣為零。

變形 10 為介於 i、j 點間的不穩定對稱變形。軌跡 11(含極點，介於 l 和 k 間)和 13(不穩定，l 點以上)在 l 點相接。軌跡 12(含極點，介於 n 和 m 間)和 14(不穩定，n 點以上)在 n 點相接。這些變形皆含有一個或兩個 free folds。注意在頂部牆面為凸面時，彈性樑只會與頂面產生點接觸，不會有線接觸。

根據圖 5-5 中描述的變形及穩定性預測，我們預期當 Δh 緩慢增加，變形的演變為：1、2-1、5、6、7-1、8 到 9。圖 5-6 為彈性樑在加載過程中的實驗照片。注意圖 5-5 中有個穩定的變形 3，軌跡 3 非常靠近軌跡 2-1 和 5，介於 c 點和 e 點之間。若 Δh 以半靜態方式增加，變形 3 將不會發生，但若以人為加以調整即可觀察到此變形。

5.3 與平面的比較

在此節我們將回顧 Roman 和 Pocheau [9] [10] 在頂面為平面時提出的一些報告。圖 5-7 中我們表出平面的變形軌跡圖與弧面的作比較，並為他們先前的研究作補充。



5.3.1 頂面為平面的變形軌跡圖

彈性樑的中點首先接觸到頂面，表示為變形 1。一點接觸的變形在 b 點轉變為線接觸變形 2。變形 2 “典型”的例子為在頂面的線接觸。變形 2 的軌跡分為兩個部份：在第一部分 2-1 中，最低自然頻率的平方為零，換句話說，變形 2-1 (b 點和 c 點之間) 在線性振動的觀點是中性的。為了突顯這個特徵，我們用點線來表示軌跡 2-1。超過 c 點的軌跡 2-2 是不穩定的。

接下來的變形 3 從 c 點分支而出，變形中央部份為 free fold。在 c 點附近的細節在插圖中放大顯示。其中軌跡 3 斜率無限大處為極點，

極點以上分支部份為不穩定，以下為穩定。所以，彈性樑的變形將沿著軌跡 2-1，然後在 c 點跳躍到軌跡 3。此現象稱為二次挫曲(secondary buckling)，因為變形 2 的線接觸長度和軸向力在 c 點滿足兩端夾持樑(clamped-clamped)的尤拉挫曲準則。

當 Δh 持續增加，變形 3 在 d 點轉變為變形 4，此時變形 3 的 free fold 接觸到底部平面。如同 Roman 和 Pocheau [9] [10] 的報告，從點接觸轉變為線接觸然後發生挫曲的類似現象重複發生。其中 d 點、g 點和 j 點的外力皆減少為零，在這些點，前一個變形的 free fold 也恰好接觸到牆面。

根據圖 5-7 中描述的變形及穩定性預測，我們預期當 Δh 緩慢增加，變形的演變為: 1、2-1、3、4、5-1、6、7、8-1、9 和 10。圖 5-9 為彈性樑在加載過程中的實驗照片。

5.3.2 多樣性的消失

我們使用“典型”這個字眼來描述最後一節提到的變形 2，因為圖 5-7 底下列出的變形是最常觀察到的。在數學上，軌跡 2 上的一個點皆代表了無限多組的靜態解。我們在表 5-1 的中央欄列出了軌跡 2 上一個點對應的所有可能變形。線接觸段並不一定在頂面的中央，也有可能分為三段線接觸 δ_1 、 δ_2 和 δ_3 。變形 2(a) 是最廣義的形式，有三段線接觸

同時存在。在其它的變化中，有些線段長度可能為零。在表 5-1 中央欄位的七種形式只要總長 $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3$ 相同，則它們就屬於軌跡 2 上的同一點，因為 δ_1 、 δ_2 和 δ_3 可以為任意組合，所以軌跡 2 上的一個點實際上代表了無限多組的變形。實驗上也可以觀察到此現象，如圖 5-10 的 a、b、c。圖 5-7 中的線接觸變形 5 和 8 也同樣有此特性，如圖 5-11 的 a、b、c、d、e 為變形 5 的幾個變化。

當頂面不再是平面時，變形 2 的多樣性就被破壞。我們分別在表 5-1 的左、右欄中列出平面變形對應到頂面為凹面及凸面的變形。平面的變形 2(a)和 2(b)對應到凹面的相似變形分別為變形 3 和變形 2。平面的變形 2(c)和 2(d)對應到凸面的相似變形分別為變形 2 和變形 4。圖 5-1 中軌跡 2 和 3 上的一個點(凹面)和圖 5-5 中軌跡 2 和 4 上的一個點(凸面)只代表一種變形。

圖 5-7 中所示的變形 3 在頂部平面有一個 free fold，這種變形也有其它的變化，如表 5-2 中央欄所示，free fold 也可以是在底部平面上，所以在軌跡 3 的一個點代表了三種變形。表 5-2 的左、右欄中列出平面變形對應到頂面為凹面及凸面的變形。圖 5-10 的 d-f 為變形 3 各式變化的實驗照片；圖 5-11 的 f-i 為變形 6 各式變化的實驗照片。

與上述情況類似，圖 5-7 中所示的變形 11 為底部平面有兩個 free folds 的情形。我們在表 5-3 中央欄表示出此變形的其他變化，圖 5-7

中的軌跡 11 實際上代表了三種變形。表 5-3 的左、右欄列出了平面變形對應到頂面為凹面及凸面的變形。

5.3.3 基頻(Fundamental natural frequencies)

在圖 5-2 中我們表示出當頂面為 $\rho=5$ 凹面時，圖 5-1 沿著軌跡 1、2、3-1 和 3-2 的自然頻率變化。當一點接觸的變形 1 轉變為一線接觸的變形 2 過程中，彈性樑的最低兩個頻率互相接近，最終在 b 點匯合。在頂部為平面的例子中，圖 5-8 為圖 5-7 沿著軌跡 1、2-1 和 2-2 前幾個自然頻率隨著 Δh 的變化。我們可以觀察到最低的兩個自然頻率互相接近匯合於零，並在 b 點 c 點間保持為零，這也是為什麼我們用點線來標示圖 5-7 中的軌跡 2-1。其它含自然頻率為零的變形為圖 5-7 中的變形 5-1 和 8-1。

更多的計算顯示，當一點變形演變為一線接觸時(頂面為凹面)，最低兩頻率匯合的頻率值與曲率半徑有關。圖 5-12 表示了當 ρ 增加，匯合的頻率值會下降。在平面的極端情形($\rho \rightarrow \infty$)，匯合的頻率值會趨近於零。

5.3.4 變形分類

本文中所描述的變形有許多變化，其中有些有 free folds，有些有線接觸。我們用符號 f、F 和 L 將這些變形做分類，其中 f 表示 fold、F

表示 free fold 以及 L 表示線接觸段。在表 5-4 中我們將變形分為五大類：分別為(a)只含點接觸(b)一個 free fold (c)多個 free folds (d)線接觸(e) free fold 和線接觸同時存在。我們將同一類的變形以凹面、平面和凸面的順序列於表格的同一列中。(S)和(U)分別代表穩定及不穩定，(SU)代表變形可以是穩定或不穩定。(S)和(U)前的數字為變形的編號。

在分類(a)中，2f 表示此變形有兩個 folds。分類(b)中，2f1F 表示此變形有兩個 folds 和一個 free fold，在此類別中的所有軌跡皆有極點。分類(c)中，2f2F 表示此變形有兩個 folds 和兩個 free folds，在此類別的所有軌跡皆有極點，且所有變形皆不穩定。在頂部為平面的分類(b)和(c)中，變形編號前括號內的數字代表變形軌跡的同一點含有幾種變形變化。分類(d)中，2fL 代表此變形有兩個 folds 以及含有線接觸段。分類(d)中，2fL2F 表示變形有兩個 folds、兩個 free folds 以及線接觸段。在分類(d)和(e)中，變形編號前括號內的數字為線接觸段的數目，當頂部為平面時，我們標示最廣義情況下的數目。在頂部平面的情況中，我們找不到同時含有線接觸段和 free fold 的變形。所有在分類(e)中的變形為不穩定。在分類(a)到(d)中有些欄位未被填上，是因為其對應變形已經超出本文所示變形軌跡圖的範圍。

第六章

結論

在此文中我們表示出當頂部牆面為凹面、凸面和平面的三種情況下的變形軌跡圖。對於頂部牆面曲率的影響可歸納為以下幾點：

1. 頂部牆面為平面，當 free fold(與牆面發生點接觸前的變形)要接觸到牆面時，壓縮外力會減少到零。當頂面不再是平面時，就觀察不到此現象。
2. 頂部牆面為平面，變形軌跡圖中線接觸變形軌跡上的點事實上代表了無限多的變形。這個特別的多樣性特徵在頂面不是平面時就不再存在。
3. 頂面為平面時，線接觸變形的最低頻率會退化成零。這個特徵在頂部牆面為弧面時也不存在。
4. 當頂部牆面為平面，在頂面的線接觸段增長到一臨界值後，將會發生二次挫曲。當頂部牆面為凹面，頂面的線接觸段將不會發生二次挫曲，而是在底部平面產生線接觸，且在達到臨界值後發生二次挫曲。當頂部牆面為凸面，不會有頂面線接觸的情形發生。
5. 總和凹面、凸面和平面的所有變形，我們歸納出以下現象：
 - (1) 只含點接觸的變形全為穩定，除了凸面的變形 1，其在分支出

非對稱線接觸變形 2-1 後就轉為不穩定。

(2) 含一個 free fold 的變形皆含極點，極點以上為不穩定。

(3) 含多個 free folds 的變形皆含極點，不過全為不穩定。

(4) 頂部為平面時找不到 free fold 和線接觸同時存在的變形。



參考文獻

- [1] Feodosyev, V.I., 1977. *Selected Problems and Questions in Strength of Materials*. Mir, Moscow. Translated from the Russian by M. Konyaeva.
- [2] Vaillette, D.P., Adams, G.G., 1983. An elastic beam contained in a frictionless channel. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 50, 693–694.
- [3] Adams, G.G., Benson, R.C., 1986. Postbuckling of an elastic plate in a rigid channel. *International Journal of Mechanical Sciences*, 28, 153–162.
- [4] Adan, N., Sheinman, I., Altus, E., 1994. Post-buckling behavior of beams under contact constraints. *ASME Journal of Applied Mechanics* 61, 764–772.
- [5] Domokos, G., Holmes, P., Royce, B., 1997. Constrained Euler buckling. *Journal of Nonlinear Science*, 7, 281-314.
- [6] Holmes, P., Domokos, G., Schmitt, J., Szeberenyi, I., 1999. Constrained Euler buckling: an interplay of computation and analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 170, 175-207.
- [7] Chai, H., 2002. On the post-buckling behavior of bilaterally constrained plates. *International Journal of Solids and Structures*, 39, 2911-2926.
- [8] Ro, W.-C., Chen, J.-S., and Hung, S.-Y., 2010. Vibration and stability of a constrained elastica with variable length. *International Journal of*

- Solids and Structures, 47, 2143-2154.
- [9] Roman, B., Pocheau, A., 1999. Buckling cascade of thin plates: Forms, constraints, and similarity. *Europhysics letters*, 46, 602-608.
- [10] Roman, B., Pocheau, A., 2002. Postbuckling of bilaterally constrained rectangular thin plates. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50, 2379-2401.
- [11] Wu, J., Juvkam-Wold, H.C., 1995. The effect of wellbore curvature on tubular buckling and lockup. *ASME Journal of Energy Resources Technology*, 117, 214-218.
- [12] Kuru, E., Martinez, A., Miska, S., Qiu, W., 2000. The buckling behavior of pipes and its influence on the axial force transfer in directional wells. *ASME Journal of Energy Resources Technology*, 122, 129-135.
- [13] Chen, J.-S., Li C.-W., 2007. Planar elastica inside a curved tube with clearance. *International Journal of Solids and Structures*, 44, 6173-6186.
- [14] Lu, Z.-H., Chen, J.-S., 2008. Deformations of a clamped-clamped elastica inside a circular channel with clearance. *International Journal of Solids and Structures*, 45, 2470-2492.
- [15] Chen, J.-S., Ro, W.-C., 2010. Deformations and stability of an elastica subjected to an off-axis point constraint. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 77, 031006.
- [16] Pocheau, A., Roman, B., 2004. Uniqueness of solutions for constrained Elastica. *Physica D*, 192, 161-186.

附表目錄

表 5-1 中央欄表示了圖 5-7 中軌跡 2 上同一點的變形變化。左欄和右欄分別為凹面和凸面對應的變形。

表 5-2 中央欄表示了圖 5-7 中軌跡 3 上同一點的變形變化。左欄和右欄分別為凹面和凸面對應的變形。

表 5-3 中央欄表示了圖 5-7 中軌跡 11 上同一點的變形變化。左欄和右欄分別為凹面和凸面對應的變形。

表 5-4 變形分類表



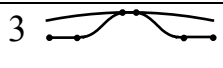
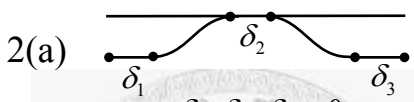
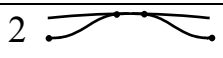


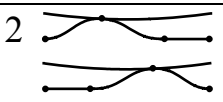
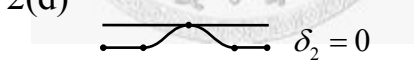

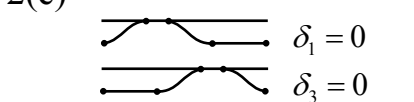
凹面	平面	凸面
3 	2(a)  $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \neq 0$	
2 	2(b)  $\delta_2 \neq 0$	
	2(c)  $\delta_3 \neq 0$ $\delta_1 \neq 0$	2 
	2(d)  $\delta_2 = 0$	4 
	2(e)  $\delta_1 = 0$ $\delta_3 = 0$	

表 5-1 中央欄表示了圖 5-7 中軌跡 2 上同一點的變形變化。左欄和右欄分別為凹面和凸面對應的變形。




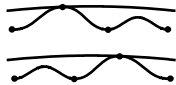
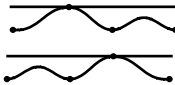

凹面	平面	凸面
17 	3(a) 	3 
4 	3(b) 	5 

表 5-2 中央欄表示了圖 5-7 中軌跡 3 上同一點的變形變化。左欄和右欄分別為凹面和凸面對應的變形。






凹面	平面	凸面
6 	11(a) 	10 
19 	11(b) 	

表 5-3 中央欄表示了圖 5-7 中軌跡 11 上同一點的變形變化。左欄和右欄分別為凹面和凸面對應的變形。

	凹面	平面	凸面
(a)只含點接觸			
2f	1(S)	1(S)	1(SU)
4f	7(S)	4(S)	6(S)
6f	11(S)	7(S)	9(S)
8f	15(S)	10(S)	
(b)一個 free fold。在頂部為平面時，變形編號前括號內的數字代表變形軌跡的同一點含有幾種變形變化。			
2f1F	4(SU), 17(SU) 極點	(3) 3(SU) 極點	3(S), 5(SU) 極點
4f1F	9(SU), 21(SU) 22(SU) 極點	(5) 6(SU) 極點	8(SU), 11(SU) 12(SU) 極點
6f1F	13(SU) 極點	(7) 9(SU) 極點	
(c)多個 free folds。在頂部為平面時，變形編號前括號內的數字代表變形軌跡的同一點含有幾種變形變化。			
2f2F	6(U), 19(U)	(3) 11(U)	10(U)
2f3F		(1) 12(U)	
(d)線接觸。變形編號前括號內的數字代表線接觸段的數目。			
2fL	(1) 2(S), (3) 3(SU)	(3) 2(SU)	(1) 2(SU), (2) 4(U)
4fL	(2) 8(SU)	(5) 5(SU)	(1) 7(SU)
6fL	(2) 12(SU)	(7) 8(SU)	
8fL	(2) 16(SU)		

(e) free fold 和線接觸同時存在。變形編號前括號內的數字代表線接觸段的數目。

2fL1F	(2) 18(U)		
2fL2F	(1) 20(U)		
4fL1F	(1) 10(U) (2) 23(U) (1) 24(U)		(1) 13(U) (1) 14(U)
6fL1F	(1) 14(U)		

表 5-4 變形分類表



附圖目錄

- 圖 3-1 兩端夾持的彈性樑與頂部凹面和底部平面產生點接觸。
- 圖 3-2 (a)兩端夾持的彈性樑與頂部凹面產生線接觸。(b)在 $s = s_2$ 右側微小元素的自由體圖。
- 圖 3-3 線接觸區域微小線段 CD 的自由體圖。分佈力 q 、內力切線分量 P_c 和彎矩 M_c 為常數。剪力皆為零。
- 圖 4-1 接觸點 $s = s_1$ 附近微小元素 ds 的自由體圖。
- 圖 4-2 實線和虛線分別代表接觸點附近的靜態和動態位置。彈性樑靜平衡時的接觸點為虛線上 $s = s_1$ 點。振動發生後，虛線上新的接觸點為 $s = s_1 + \eta_1$ 。
- 圖 5-1 彈性樑的變形軌跡圖(頂部牆面為 $\rho=5$ 凹面)。實線和虛線分別代表穩定和不穩定的變形。
- 圖 5-2 圖 5-1 中沿著軌跡 1、2、3-1 和 3-2 變形的前幾個 ω^2 。插圖為軌跡 2 附近的放大圖。沿著 a-b-c-e，可看出前兩個 ω^2 皆為正。在 e 點之後出現第三個 ω^2 (幾乎垂直)。這個 ω^2 在 e 點之後會變負的，所以我們說變形 3-2 是不穩定的。
- 圖 5-3 當 $\Delta h = 0.037$ (e 點偏右一點)，圖 5-2 中軌跡 3-2 線接觸變形的前三個振動模態。實線和虛線分別代表靜態變形及振動模態。

圖 5-4 受頂部凹面壓縮的彈性樑在加載過程中的實驗照片。照片左側的數字為變形的編號。右側 Δh 表示當時的壓縮量。

圖 5-5 彈性樑的變形軌跡圖(頂部牆面為 $\rho=5$ 凸面)。實線和虛線分別代表穩定和不穩定的變形。

圖 5-6 受頂部凸面壓縮的彈性樑在加載過程中的實驗照片。照片左側的數字為變形的編號。右側 Δh 表示當時的壓縮量。

圖 5-7 彈性樑的變形軌跡圖(頂部牆面為平面)。實線、虛線和點線分別代表穩定、不穩定和中性的變形。

圖 5-8 圖 5-7 中沿著軌跡 1、2-1 和 2-2 變形的前幾個 ω^2 。

圖 5-9 受頂部平面壓縮的彈性樑在加載過程中的實驗照片。照片左側的數字為變形的編號。右側 Δh 表示當時的壓縮量。

圖 5-10 圖 5-7 軌跡 2-1 的幾種變形實驗照片。a、b、c 對應的二次挫曲變形分別為 d、e、f。

圖 5-11 圖 5-7 軌跡 5-1 的幾種變形實驗照片。a、b、c、d 對應的二次挫曲變形分別為 f、g、h、i。e 對應的變形視兩段線接觸長短而定，可能為 f 或 g。

圖 5-12 圖 5-1 中 b 點最低兩頻率交點與頂部凹面曲率半徑 ρ 的關係。

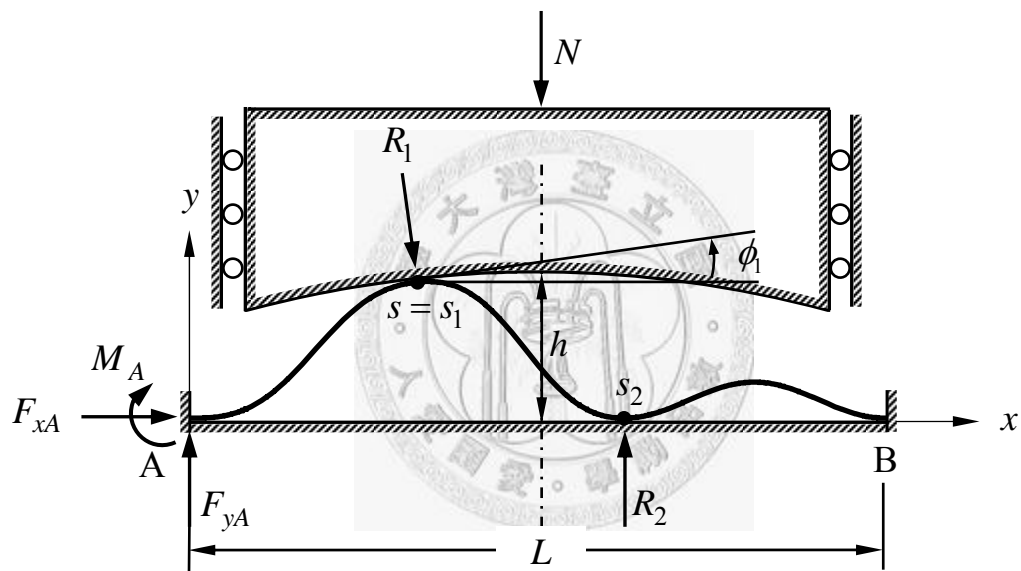
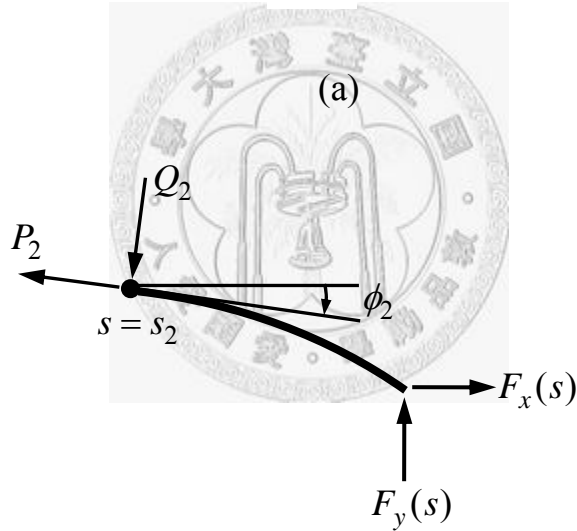
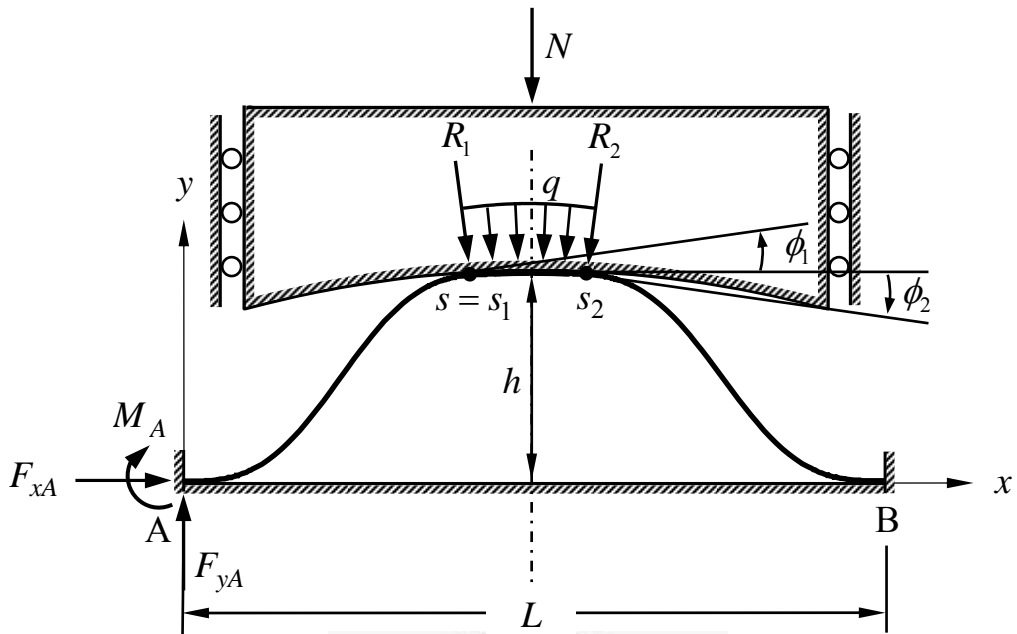


圖 3-1 兩端夾持的彈性樑與頂部凹面和底部平面產生點接觸。



(b)

圖 3-2 (a)兩端夾持的彈性樑與頂部凹面產生線接觸。(b)在 $s = s_2$ 右側

微小元素的自由體圖。

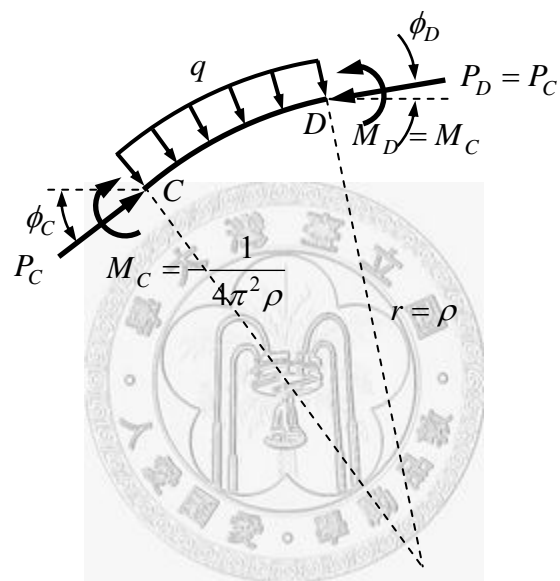


圖 3-3 線接觸區域微小線段 CD 的自由體圖。分佈力 q 、內力切線分量 P_C 和彎矩 M_C 為常數。剪力皆為零。

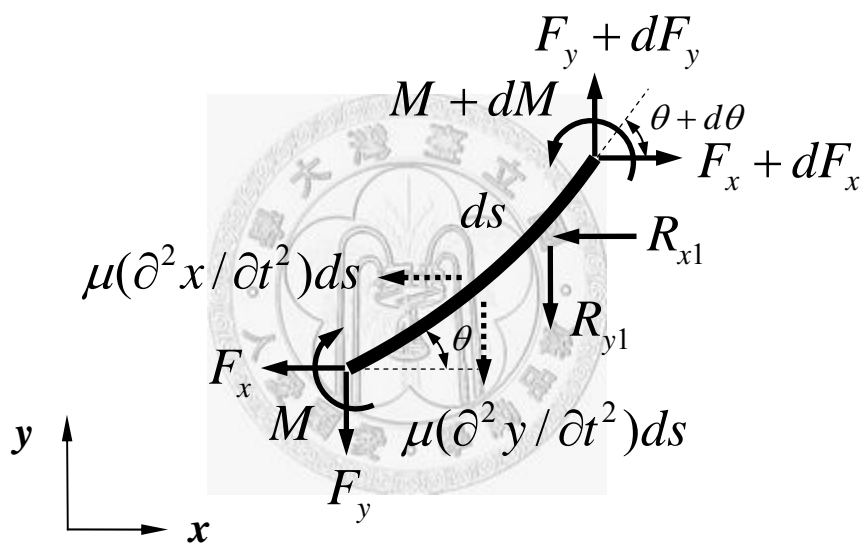


圖 4-1 接觸點 $s = s_1$ 附近微小元素 ds 的自由體圖。

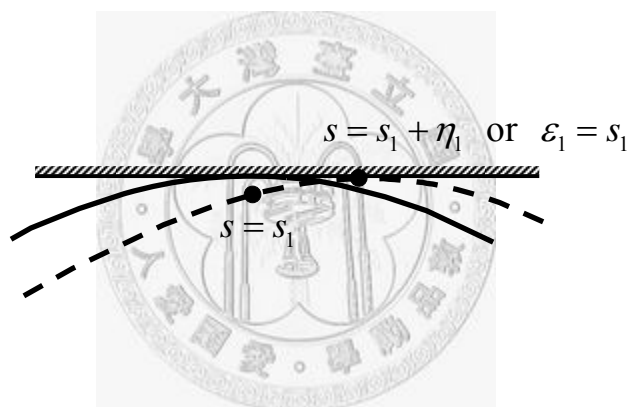


圖 4-2 實線和虛線分別代表接觸點附近的靜態和動態位置。彈性樑靜平衡時的接觸點為虛線上 $s = s_1$ 點。振動發生後，虛線上新的接觸點為 $s = s_1 + \eta_1$ 。

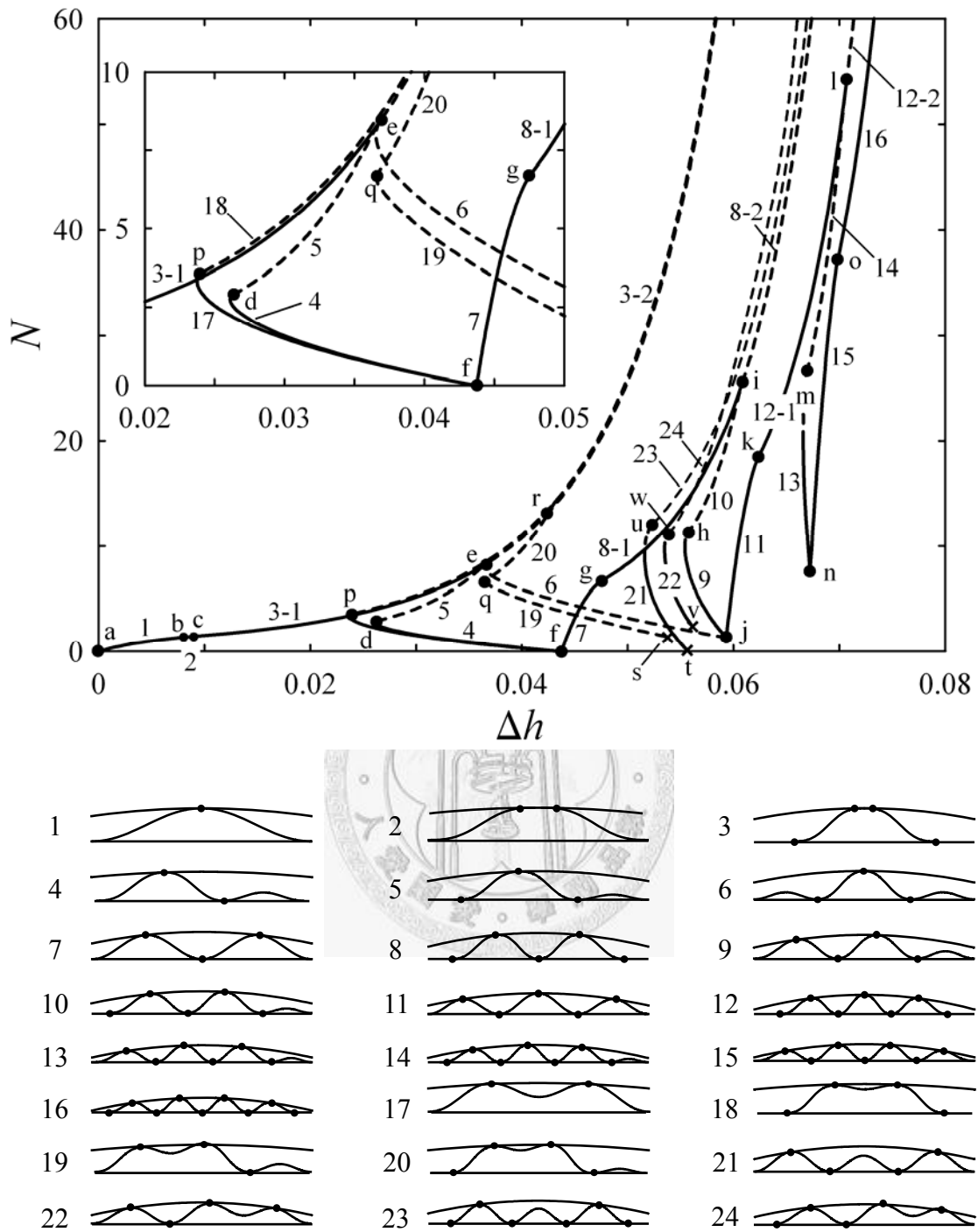


圖 5-1 彈性樑的變形軌跡圖(頂部牆面為 $\rho=5$ 凹面)。實線和虛線分別代表穩定和不穩定的變形。

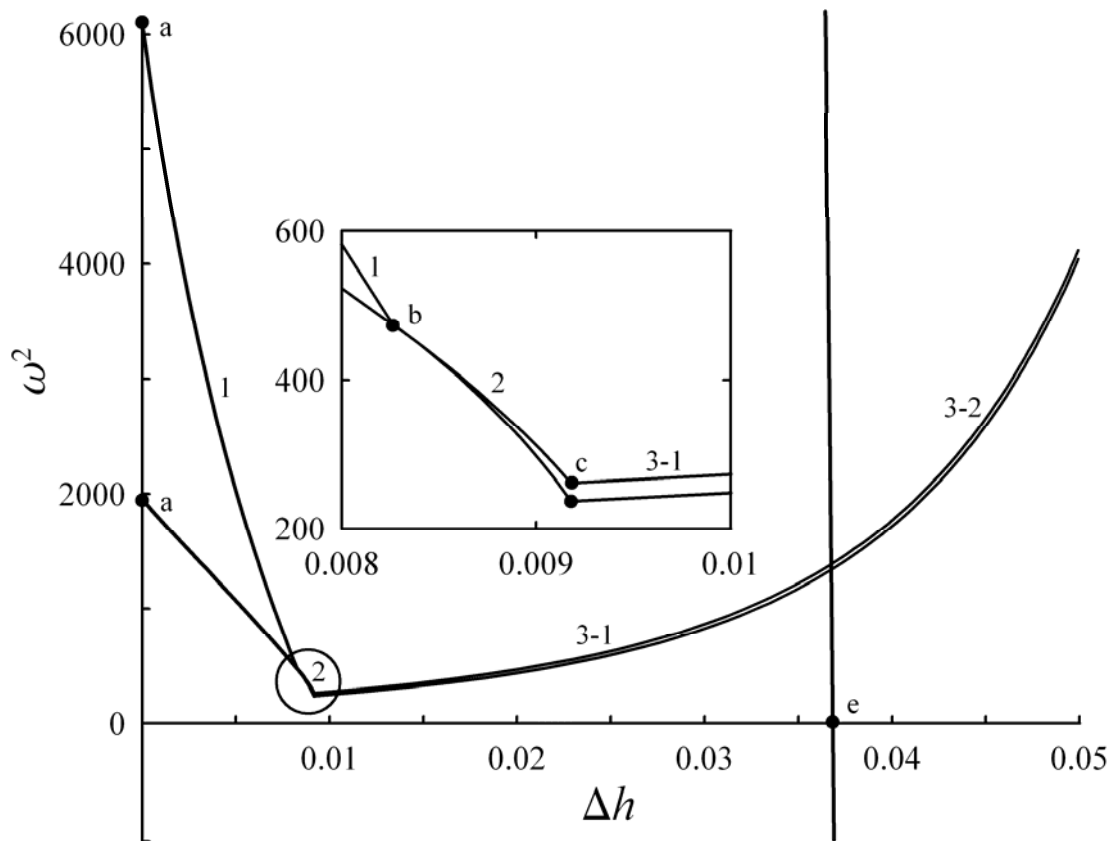


圖 5-2 圖 5-1 中沿著軌跡 1、2、3-1 和 3-2 變形的幾個 ω^2 。插圖為軌跡 2 附近的放大圖。沿著 a-b-c-e，可看出前兩個 ω^2 皆為正。在 e 點之後出現第三個 ω^2 （幾乎垂直）。這個 ω^2 在 e 點之後會變負的，所以我們說變形 3-2 是不穩定的。

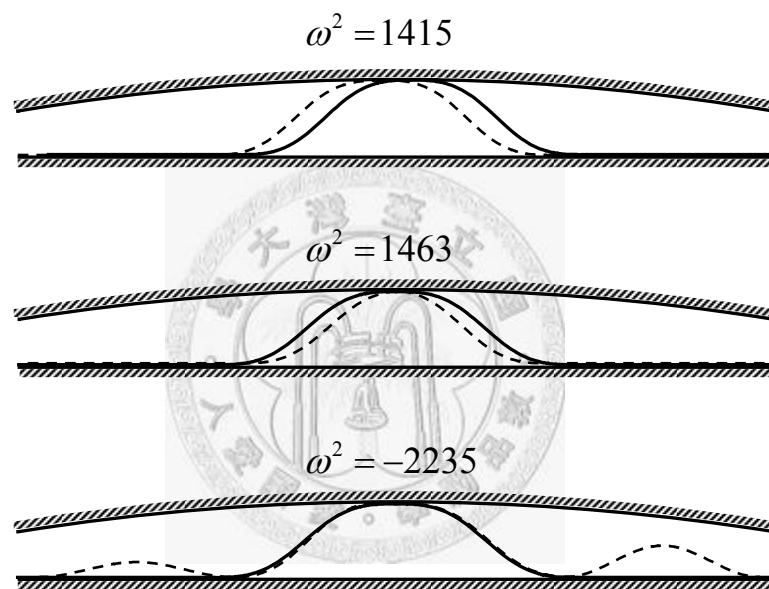


圖 5-3 當 $\Delta h = 0.037$ (e 點偏右一點), 圖 5-2 中軌跡 3-2 線接觸變形的前三個振動模態。實線和虛線分別代表靜態變形及振動模態。

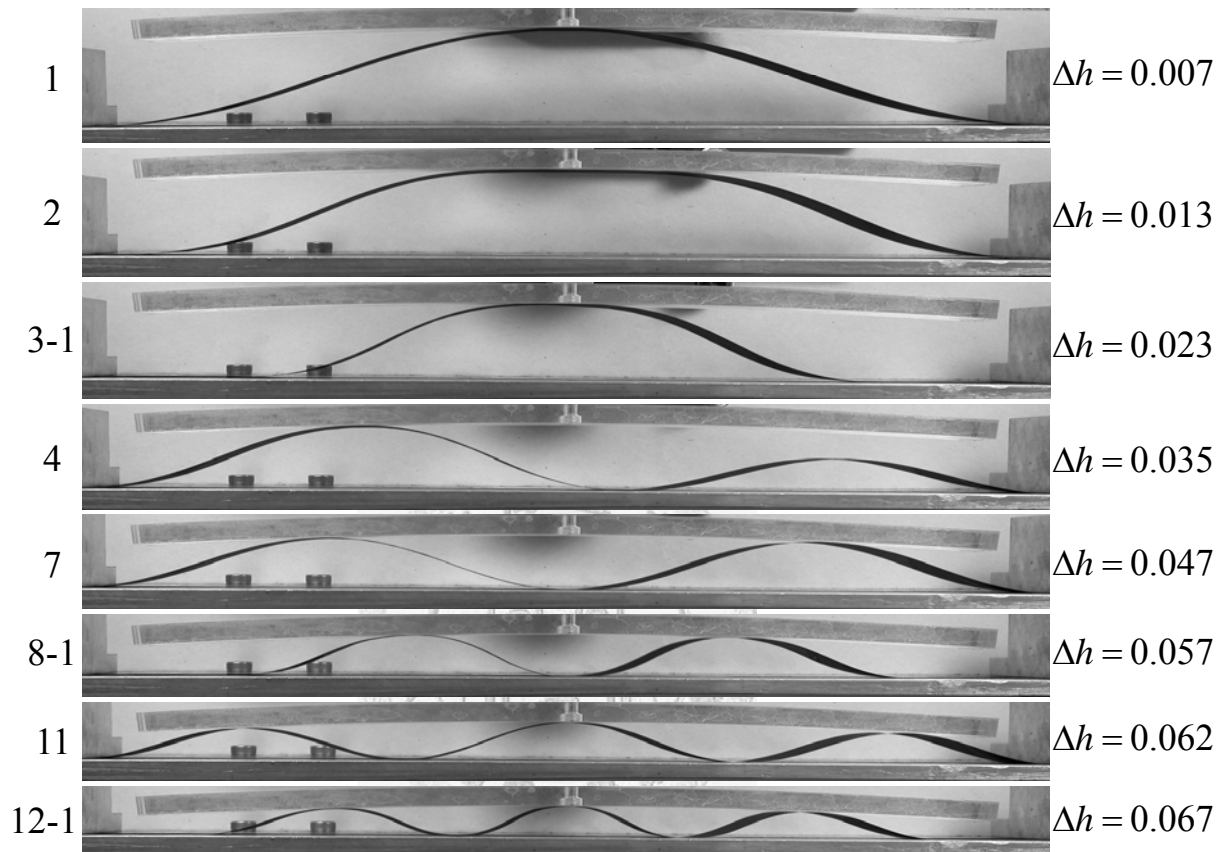


圖 5-4 受頂部凹面壓縮的彈性樑在加載過程中的實驗照片。照片左側的數字為變形的編號。右側 Δh 表示當時的壓縮量。

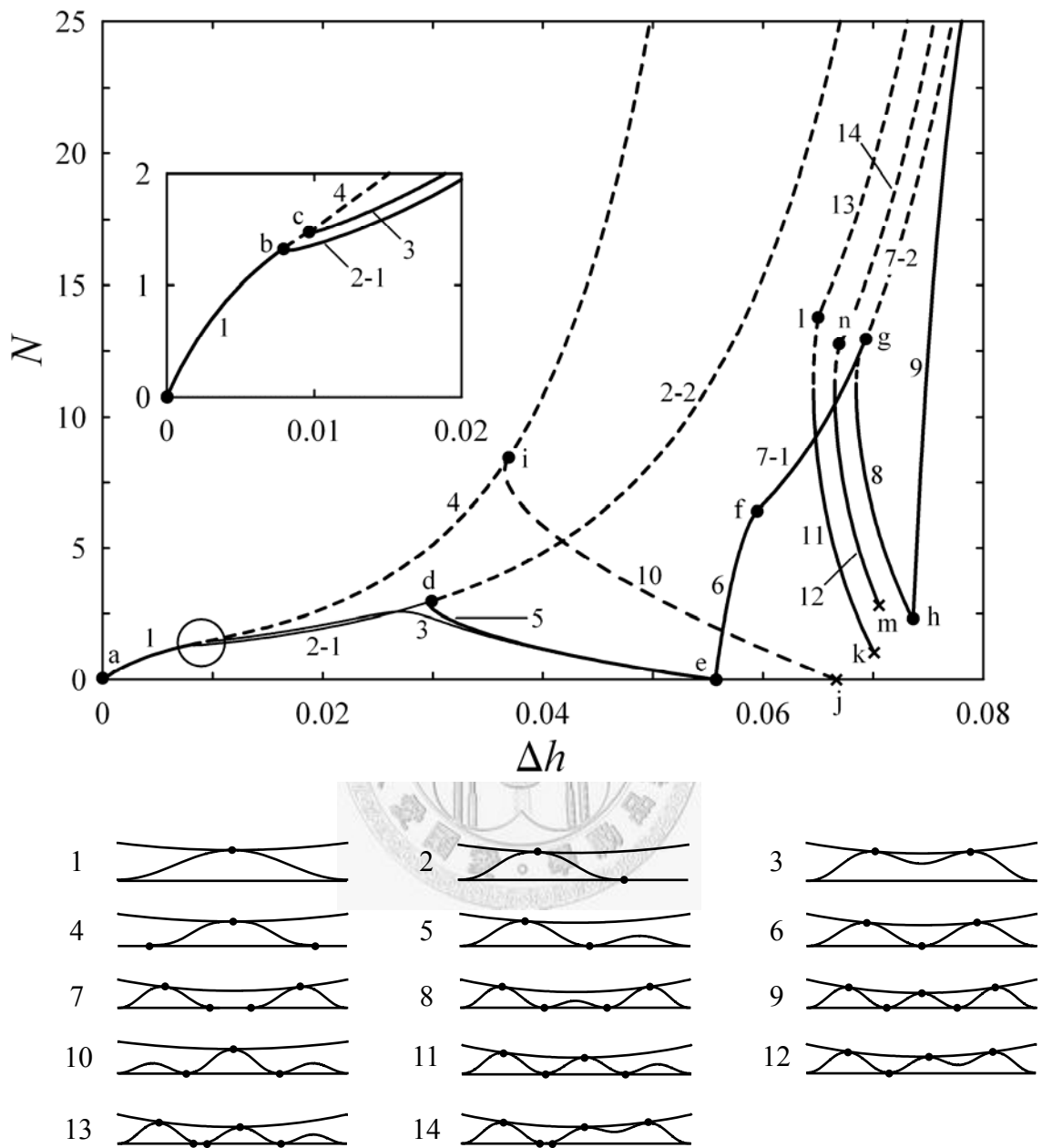


圖 5-5 彈性樑的變形軌跡圖(頂部牆面為 $\rho=5$ 凸面)。實線和虛線分別代表穩定和不穩定的變形。

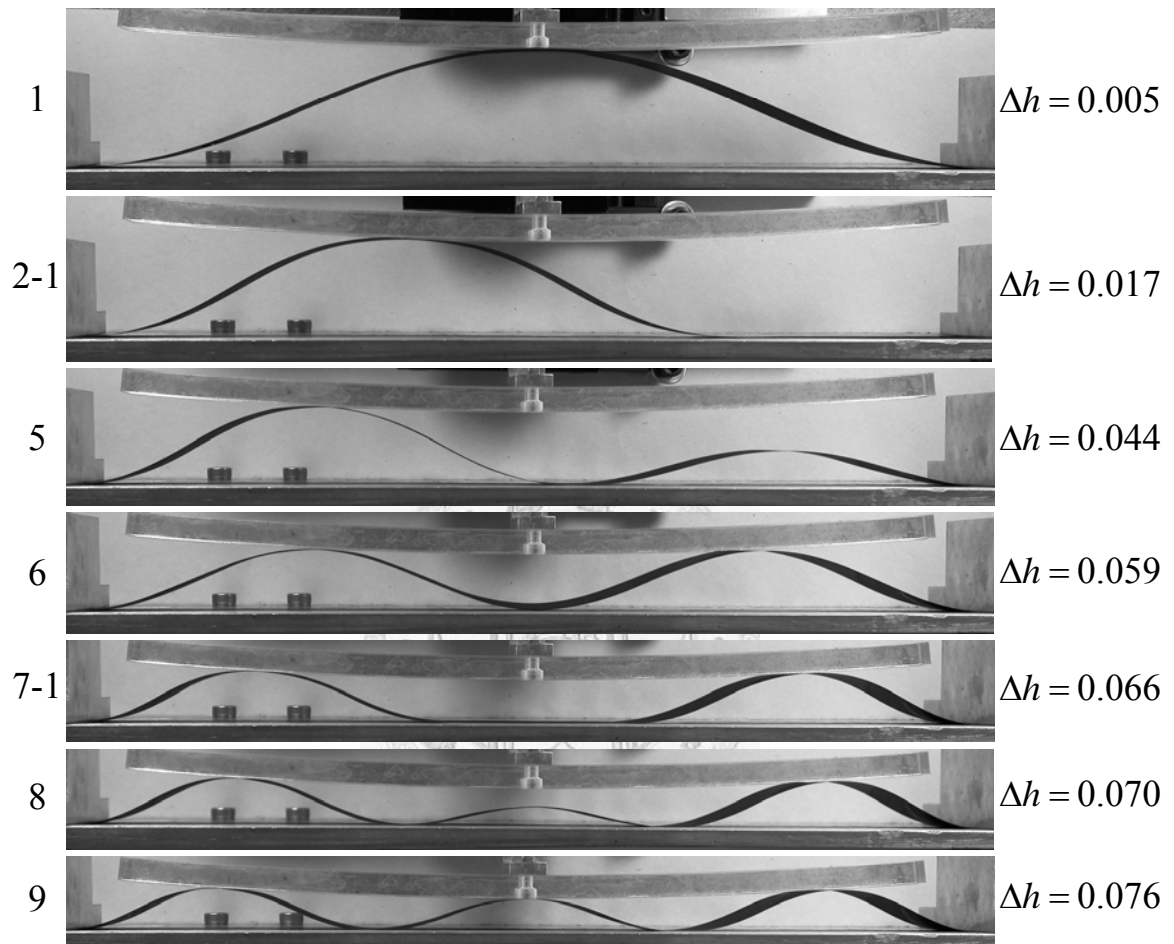


圖 5-6 受頂部凸面壓縮的彈性樑在加載過程中的實驗照片。照片左側的數字為變形的編號。右側 Δh 表示當時的壓縮量。

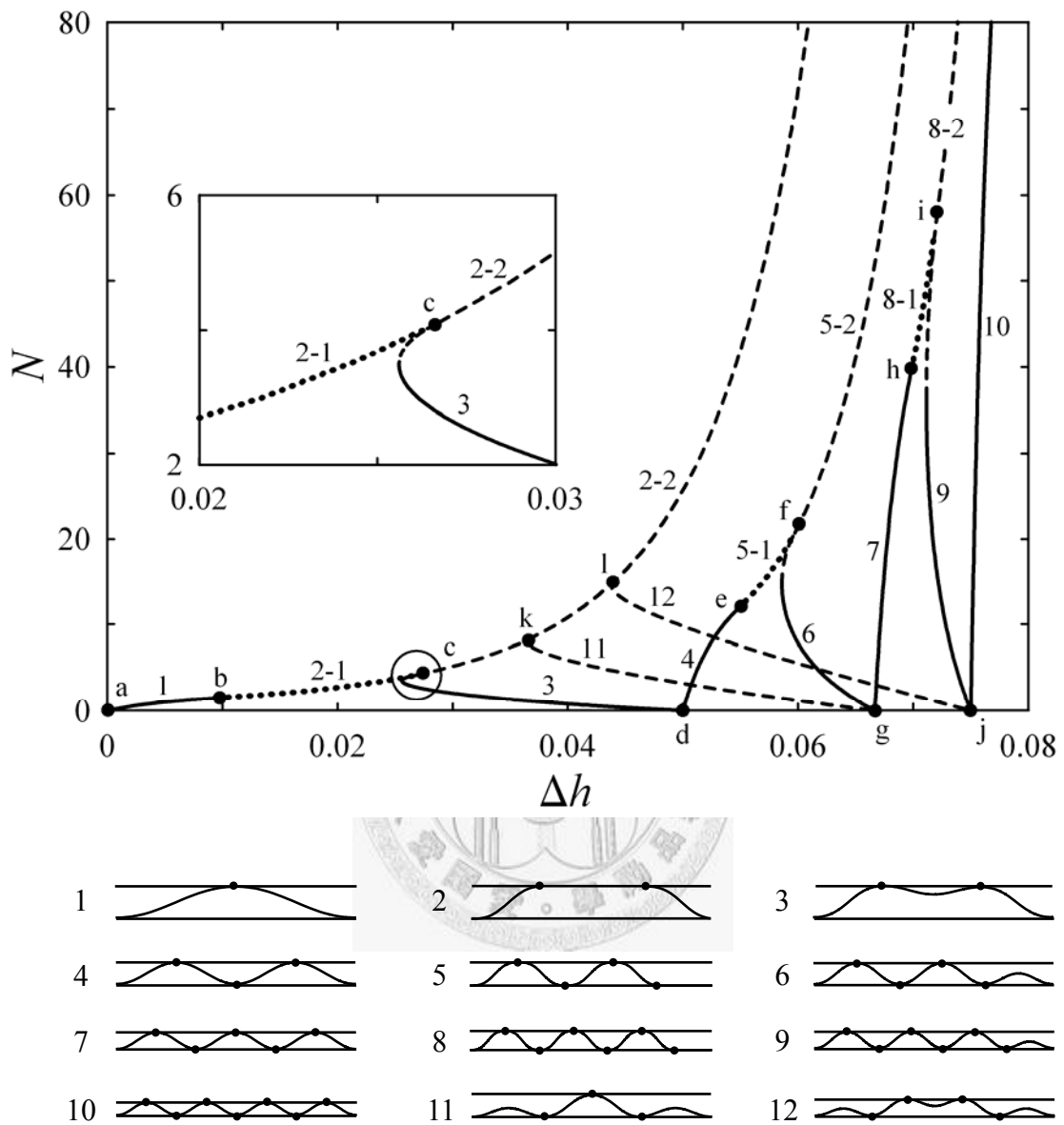


圖 5-7 彈性樑的變形軌跡圖(頂部牆面為平面)。實線、虛線和點線分別代表穩定、不穩定和中性的變形。

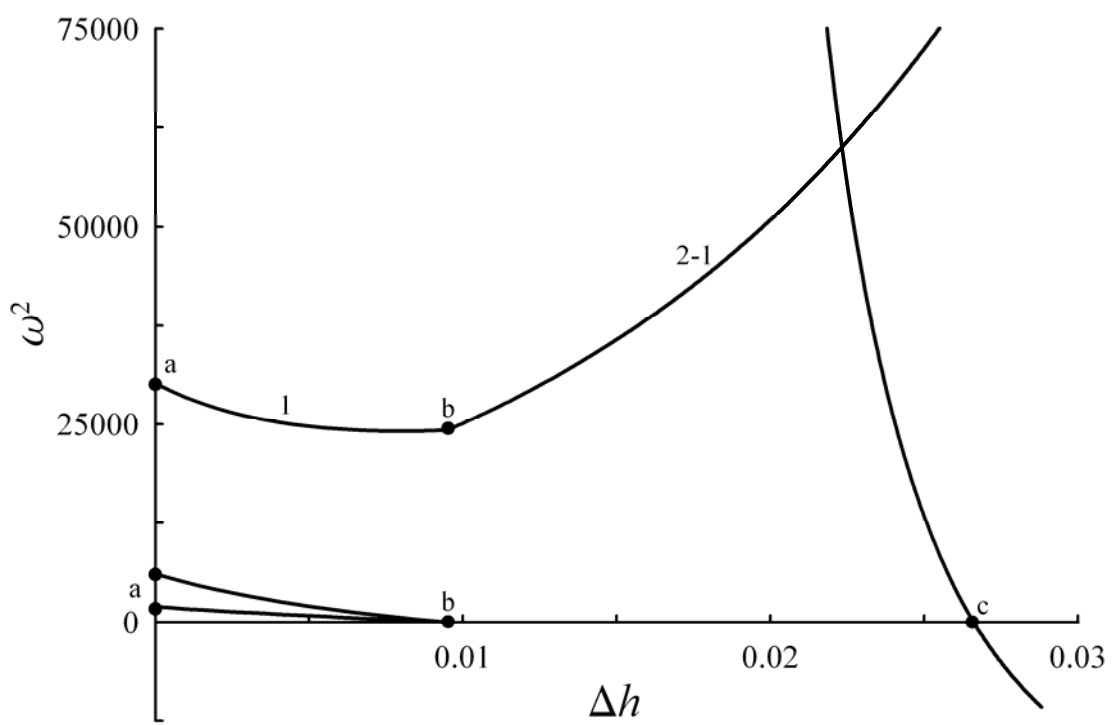


圖 5-8 圖 5-7 中沿著軌跡 1、2-1 和 2-2 變形的前幾個 ω^2 。

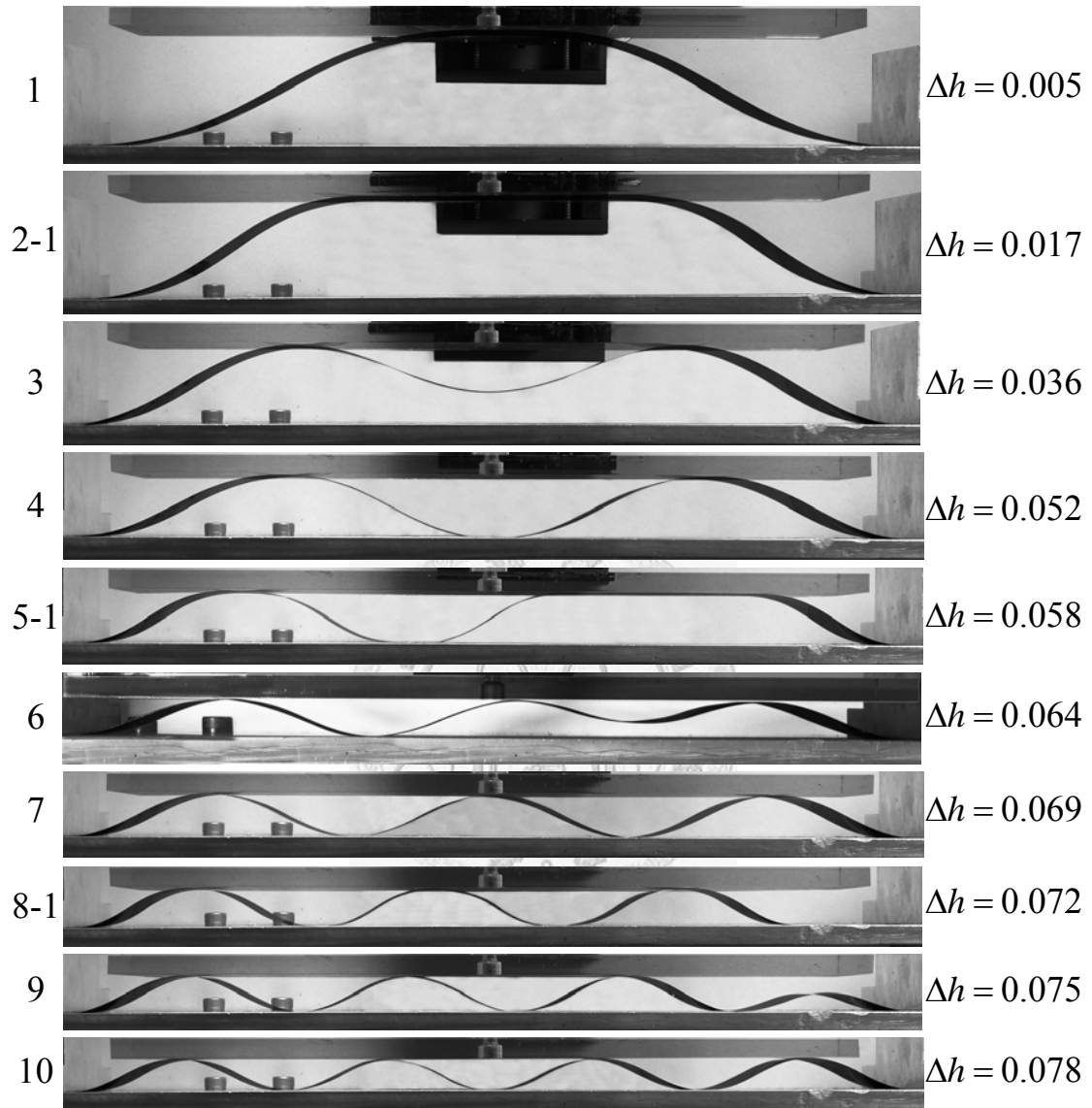


圖 5-9 受頂部平面壓縮的彈性樑在加載過程中的實驗照片。照片左側的數字為變形的編號。右側 Δh 表示當時的壓縮量。

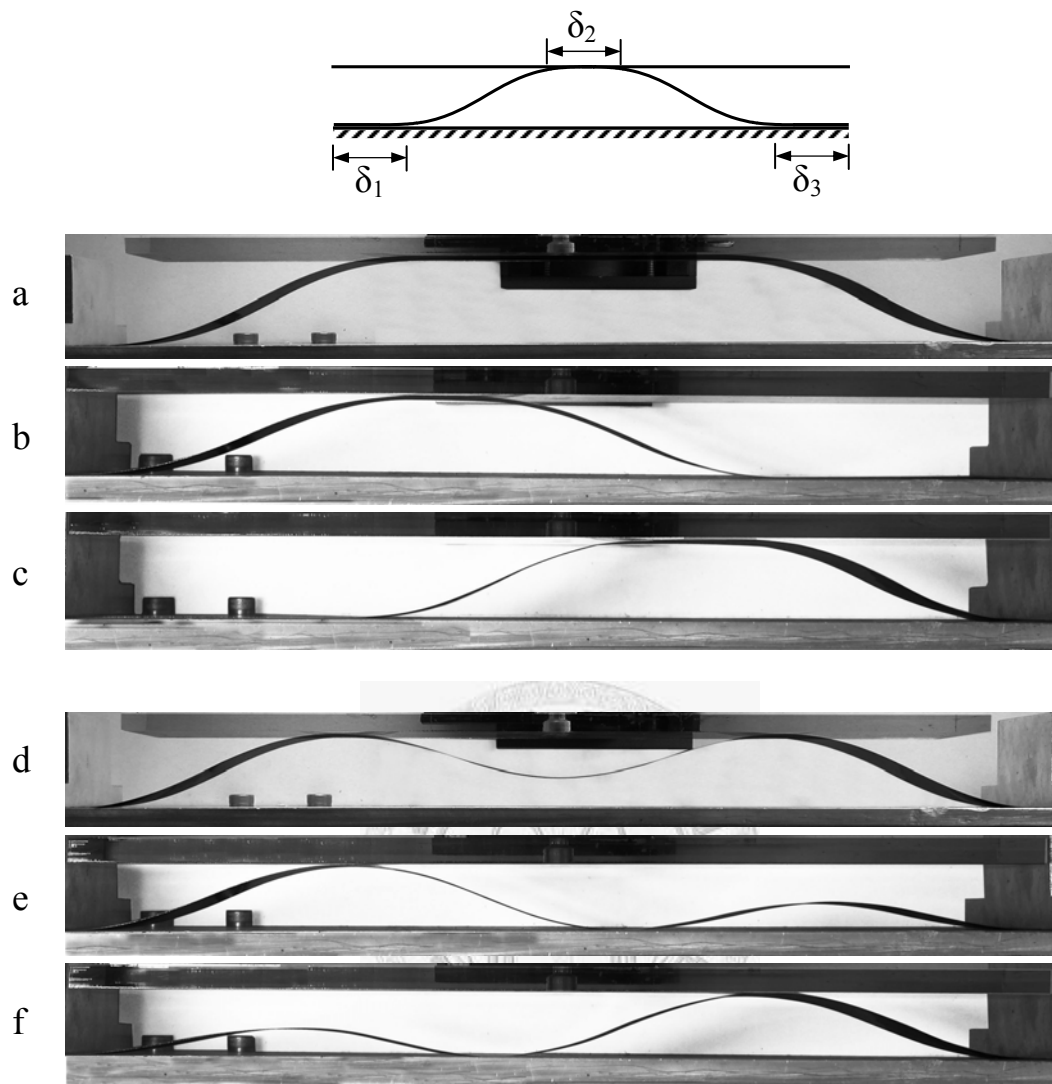


圖 5-10 圖 5-7 軌跡 2-1 的幾種變形實驗照片。a、b、c 對應的二次挫曲變形分別為 d、e、f。

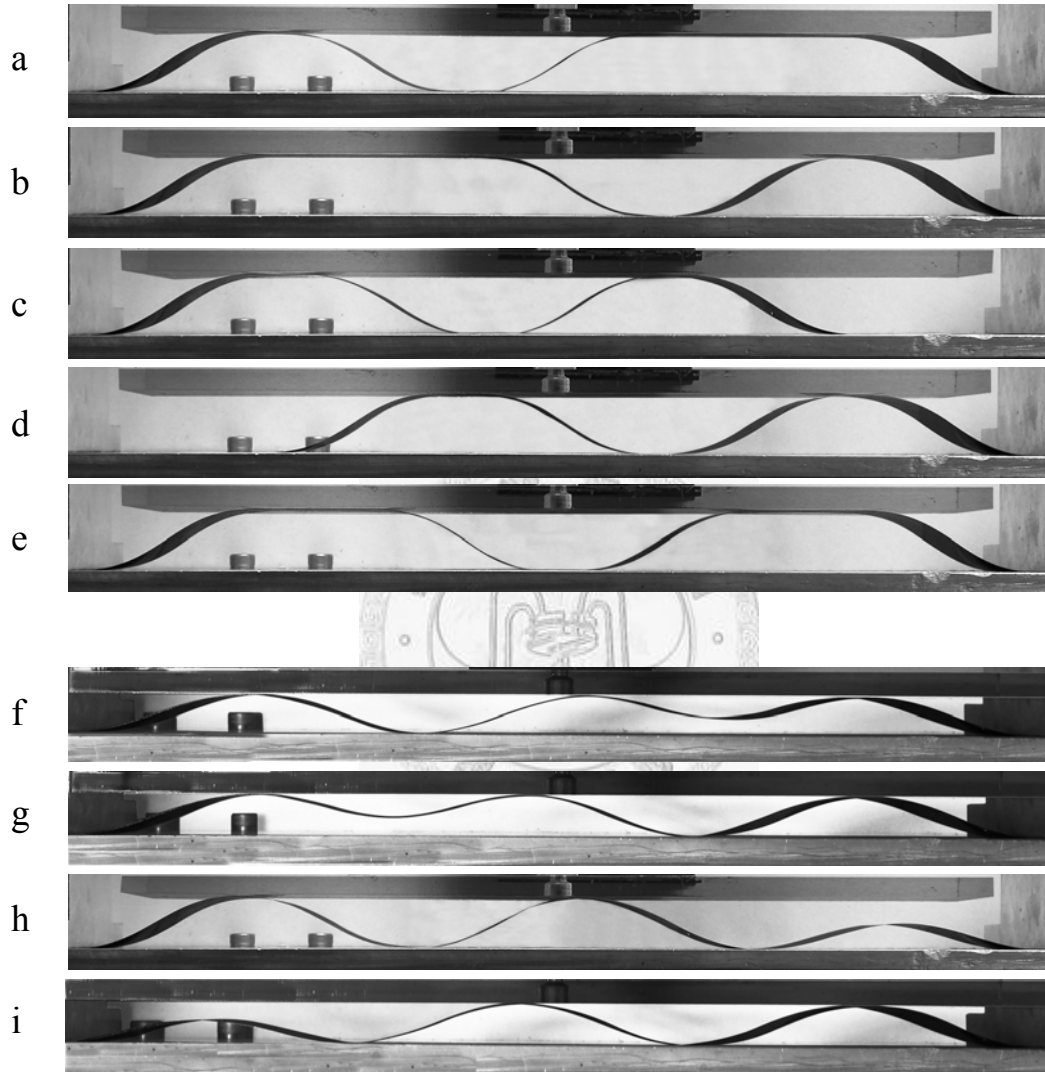
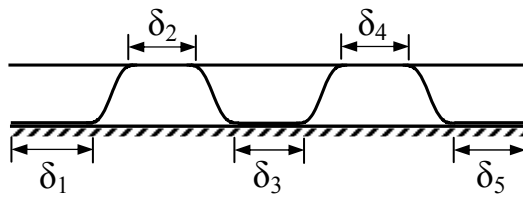


圖 5-11 圖 5-7 軌跡 5-1 的幾種變形實驗照片。a、b、c、d 對應的二次
 挫曲變形分別為 f、g、h、i。e 對應的變形視兩段線接觸長短
 而定，可能為 f 或 g。

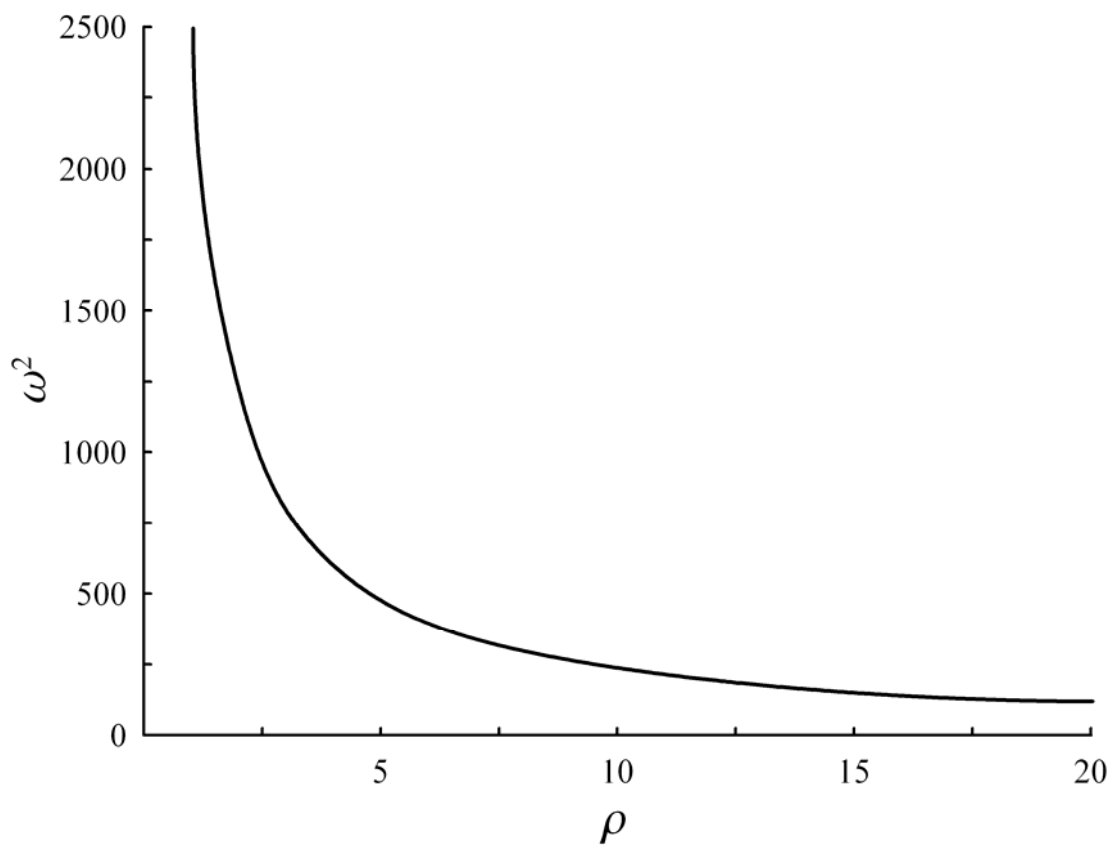


圖 5-12 圖 5-1 中 b 點最低兩頻率交點與頂部凹面曲率半徑 ρ 的關係。

附錄目錄

附錄一 (4.23)-(4.28)式六條線性齊性微分方程式推導過程

附錄二 完全固定夾持端 A 點之邊界條件推導過程

附錄三 完全固定夾持端 B 點之邊界條件推導過程

附錄四 接觸點 s_1 之接觸條件(4.42)-(4.44)推導過程

附錄五 接觸點 s_2 之接觸條件(4.47)-(4.48)推導過程



附錄一 (4.23)-(4.28)式六條線性齊性微分方程式推導過程

(a) (4.16)式至(4.23)式之推導過程

$$\frac{\partial \hat{x}(\varepsilon_1, t)}{\partial \varepsilon_1} = \cos \hat{\theta}(\varepsilon_1, t) \quad (4.16)$$

將(4.10)、(4.12)式代入(4.16)式：

$$\frac{\partial [x_e(\varepsilon_1) + \hat{x}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t]}{\partial \varepsilon_1} = \cos [\theta_e(\varepsilon_1) + \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t]$$

等號右邊利用和角公式展開：

$$\frac{\partial x_e(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \hat{x}_d(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} \sin \omega t = \cos \theta_e(\varepsilon_1) \cos [\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t] - \sin \theta_e(\varepsilon_1) \sin [\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t]$$

等號右邊做線性化處理：

$$\frac{\partial x_e(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \hat{x}_d(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} \sin \omega t = \cos \theta_e(\varepsilon_1) - \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \theta_e(\varepsilon_1) \sin \omega t$$

利用幾何關係式，靜態部分滿足 $\frac{\partial x_e(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} = \cos \theta_e(\varepsilon_1)$ ：

$$\frac{\partial \hat{x}_d(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} = -\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \theta_e(\varepsilon_1) \quad (4.23)$$

(b) (4.17)式至(4.24)式之推導過程

$$\frac{\partial \hat{y}(\varepsilon_1, t)}{\partial \varepsilon_1} = \sin \hat{\theta}(\varepsilon_1, t) \quad (4.17)$$

將(4.11)、(4.12)式代入(4.17)式：

$$\frac{\partial [y_e(\varepsilon_1) + \hat{y}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t]}{\partial \varepsilon_1} = \sin [\theta_e(\varepsilon_1) + \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t]$$

等號右邊利用和角公式展開：

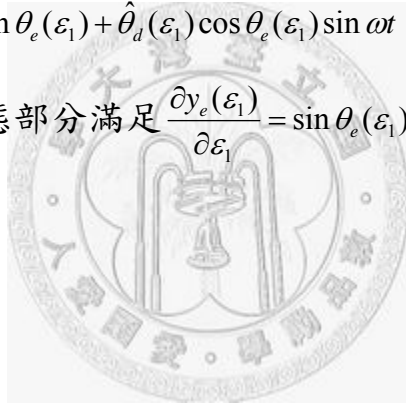
$$\frac{\partial y_e(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \hat{y}_d(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} \sin \omega t = \sin \theta_e(\varepsilon_1) \cos [\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t] + \cos \theta_e(\varepsilon_1) \sin [\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t]$$

等號右邊做線性化處理：

$$\frac{\partial y_e(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \hat{y}_d(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} \sin \omega t = \sin \theta_e(\varepsilon_1) + \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \cos \theta_e(\varepsilon_1) \sin \omega t$$

利用幾何關係式，靜態部分滿足 $\frac{\partial y_e(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} = \sin \theta_e(\varepsilon_1)$ ：

$$\frac{\partial \hat{y}_d(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} = \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \cos \theta_e(\varepsilon_1) \quad (4.24)$$



(c) (4.21)式至(4.25)式之推導過程

$$\frac{\partial \hat{\theta}(\varepsilon_1, t)}{\partial \varepsilon_1} = 4\pi^2 \hat{M}(\varepsilon_1, t) \quad (4.21)$$

將(4.12)、(4.13)式代入(4.21)式：

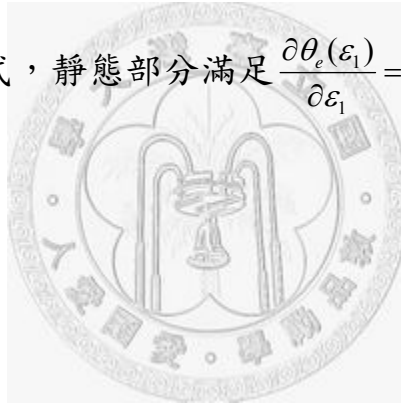
$$\frac{\partial [\theta_e(\varepsilon_1) + \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t]}{\partial \varepsilon_1} = 4\pi^2 [M_e(\varepsilon_1) + \hat{M}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t]$$

展開：

$$\frac{\partial \theta_e(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \hat{\theta}_d(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} \sin \omega t = 4\pi^2 M_e(\varepsilon_1) + 4\pi^2 \hat{M}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t$$

利用彎矩和曲率關係式，靜態部分滿足 $\frac{\partial \theta_e(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} = 4\pi^2 M_e(\varepsilon_1)$ ：

$$\frac{\partial \hat{\theta}_d(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} = 4\pi^2 \hat{M}_d(\varepsilon_1) \quad (4.25)$$



(d) (4.18)式至(4.26)式之推導過程

$$\frac{\partial \hat{M}(\varepsilon_1, t)}{\partial \varepsilon_1} = \hat{F}_x(\varepsilon_1, t) \sin \hat{\theta}(\varepsilon_1, t) - \hat{F}_y(\varepsilon_1, t) \cos \hat{\theta}(\varepsilon_1, t) \quad (4.18)$$

將(4.8)-(4.9)、(4.12)-(4.13)式代入(4.18)式：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial [M_e(\varepsilon_1) + \hat{M}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t]}{\partial \varepsilon_1} = \\ & \left\{ F_{xe}(\varepsilon_1) + [\hat{F}_{xd}(\varepsilon_1) + R_{x1d} H(\varepsilon_1 - s_1)] \sin \omega t \right\} \sin [\theta_e(\varepsilon_1) + \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t] \\ & - \left\{ F_{ye}(\varepsilon_1) + [\hat{F}_{yd}(\varepsilon_1) + R_{y1d} H(\varepsilon_1 - s_1)] \sin \omega t \right\} \cos [\theta_e(\varepsilon_1) + \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t] \end{aligned}$$

等號右邊利用和角公式展開：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M_e(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \hat{M}_d(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} \sin \omega t = \\ & \left\{ F_{xe}(\varepsilon_1) + [\hat{F}_{xd}(\varepsilon_1) + R_{x1d} H(\varepsilon_1 - s_1)] \sin \omega t \right\} \left\{ \sin \theta_e(\varepsilon_1) \cos [\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t] + \cos \theta_e(\varepsilon_1) \sin [\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t] \right\} \\ & - \left\{ F_{ye}(\varepsilon_1) + [\hat{F}_{yd}(\varepsilon_1) + R_{y1d} H(\varepsilon_1 - s_1)] \sin \omega t \right\} \left\{ \cos \theta_e(\varepsilon_1) \cos [\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t] - \sin \theta_e(\varepsilon_1) \sin [\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t] \right\} \end{aligned}$$

等號右邊做線性化處理：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M_e(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \hat{M}_d(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} \sin \omega t = \\ & \left\{ F_{xe}(\varepsilon_1) + [\hat{F}_{xd}(\varepsilon_1) + R_{x1d} H(\varepsilon_1 - s_1)] \sin \omega t \right\} \left\{ \sin \theta_e(\varepsilon_1) + \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \cos \theta_e(\varepsilon_1) \sin \omega t \right\} \\ & - \left\{ F_{ye}(\varepsilon_1) + [\hat{F}_{yd}(\varepsilon_1) + R_{y1d} H(\varepsilon_1 - s_1)] \sin \omega t \right\} \left\{ \cos \theta_e(\varepsilon_1) - \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \theta_e(\varepsilon_1) \sin \omega t \right\} \end{aligned}$$

利用彎矩平衡，靜態部分滿足 $\frac{\partial M_e(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} = F_{xe}(\varepsilon_1) \sin \theta_e(\varepsilon_1) - F_{ye}(\varepsilon_1) \cos \theta_e(\varepsilon_1)$ ，

並且忽略高次項：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{M}_d(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} &= \left[F_{xe}(\varepsilon_1) \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) - F_{yd}(\varepsilon_1) - R_{y1d} H(\varepsilon_1 - s_1) \right] \cos \theta_e \\ &+ \left[F_{ye}(\varepsilon_1) \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) + \hat{F}_{xd}(\varepsilon_1) + R_{x1d} H(\varepsilon_1 - s_1) \right] \sin \theta_e \end{aligned} \quad (4.26)$$

(e) (4.19)式至(4.27)式之推導過程

$$\frac{\partial \hat{F}_x(\varepsilon_1, t)}{\partial \varepsilon_1} - R_{x1}(t)\delta(\varepsilon_1 - s_1) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial^2 \hat{x}(\varepsilon_1, t)}{\partial t^2} \quad (4.19)$$

將(4.8)、(4.10)代入(4.19)式中並利用(4.14)關係式：

$$\frac{\partial \left\{ F_{xe}(\varepsilon_1) + \left[\hat{F}_{xd}(\varepsilon_1) + R_{x1d} H(\varepsilon_1 - s_1) \right] \sin \omega t \right\}}{\partial \varepsilon_1} - [-R_{1e} \sin \phi_1 + R_{x1d} \sin \omega t] \delta(\varepsilon_1 - s_1) =$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial^2 [x_e(\varepsilon_1) + \hat{x}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t]}{\partial t^2}$$

等號右邊中括號內先對時間 t 微分一次：

$$\frac{\partial F_{xe}(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} + \left[\frac{\partial \hat{F}_{xd}(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} + R_{x1d} \delta(\varepsilon_1 - s_1) \right] \sin \omega t - [-R_{1e} \sin \phi_1 + R_{x1d} \sin \omega t] \delta(\varepsilon_1 - s_1) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial x_e(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \frac{\partial \hat{x}_d(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} \sin \omega t + \hat{x}_d(\varepsilon_1) \omega \cos \omega t \right]$$

等號左邊利用 $\frac{\partial F_{xe}(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} = -R_{1e} \sin \phi_1 \delta(\varepsilon_1 - s_1)$ ，等號右邊利用 $\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} = -\eta_{1d} \omega \cos \omega t$

可得：

$$-R_{1e} \sin \phi_1 \delta(\varepsilon_1 - s_1) + \left[\frac{\partial \hat{F}_{xd}(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} + R_{x1d} \delta(\varepsilon_1 - s_1) \right] \sin \omega t - [-R_{1e} \sin \phi_1 + R_{x1d} \sin \omega t] \delta(\varepsilon_1 - s_1) =$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\cos \theta_e(\varepsilon_1) (-\eta_{1d} \omega \cos \omega t) + \frac{\partial \hat{x}_d(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} (-\eta_{1d} \omega \cos \omega t) \sin \omega t + \hat{x}_d(\varepsilon_1) \omega \cos \omega t \right]$$

等號右邊中括號內對時間 t 微分第二次：

$$\frac{\partial \hat{F}_{xd}(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} \sin \omega t = \frac{1}{4\pi^2} \left[-\sin \theta_e(\varepsilon_1) \frac{\partial \theta_e(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} (-\eta_{1d} \omega \cos \omega t)^2 + \cos \theta_e(\varepsilon_1) (\eta_{1d} \omega^2 \sin \omega t) \right.$$

$$+ \frac{\partial^2 \hat{x}_d(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1^2} (-\eta_{1d} \omega \cos \omega t)^2 \sin \omega t + \frac{\partial \hat{x}_d(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} (\eta_{1d} \omega^2 \sin^2 \omega t) + \frac{\partial \hat{x}_d(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} (-\eta_{1d} \omega^2 \cos^2 \omega t)$$

$$\left. + \frac{\partial \hat{x}_d(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} (-\eta_{1d} \omega \cos \omega t) \omega \cos \omega t - \hat{x}_d(\varepsilon_1) \omega^2 \sin \omega t \right]$$

忽略高次項並化簡：

$$\frac{\partial \hat{F}_{xd}(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} = \frac{1}{4\pi^2} \omega^2 [\cos \theta_e(\varepsilon_1) \eta_{1d} - \hat{x}_d(\varepsilon_1)] \quad (4.27)$$

(f) (4.20)式至(4.28)式之推導過程

$$\frac{\partial \hat{F}_y(\varepsilon_1, t)}{\partial \varepsilon_1} - R_{y1}(t)\delta(\varepsilon_1 - s_1) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial^2 \hat{y}(\varepsilon_1, t)}{\partial t^2} \quad (4.20)$$

將(4.9)、(4.11)代入(4.20)式中並利用(4.15)關係式：

$$\frac{\partial \left\{ F_{ye}(\varepsilon_1) + \left[\hat{F}_{yd}(\varepsilon_1) + R_{y1d}H(\varepsilon_1 - s_1) \right] \sin \omega t \right\}}{\partial \varepsilon_1} - \left[R_{1e} \cos \phi_1 + R_{y1d} \sin \omega t \right] \delta(\varepsilon_1 - s_1) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial^2 \left[y_e(\varepsilon_1) + \hat{y}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t \right]}{\partial t^2}$$

等號右邊中括號內先對時間 t 微分一次：

$$\frac{\partial F_{ye}(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} + \left[\frac{\partial \hat{F}_{yd}(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} + R_{y1d} \delta(\varepsilon_1 - s_1) \right] \sin \omega t - \left[R_{1e} \cos \phi_1 + R_{y1d} \sin \omega t \right] \delta(\varepsilon_1 - s_1) =$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial y_e(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \frac{\partial \hat{y}_d(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} \sin \omega t + \hat{y}_d(\varepsilon_1) \omega \cos \omega t \right]$$

等號左邊利用 $\frac{\partial F_{ye}(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} = R_{1e} \cos \phi_1 \delta(\varepsilon_1 - s_1)$ ，右邊利用 $\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} = -\eta_{1d} \omega \cos \omega t$ 可得：

$$R_{1e} \cos \phi_1 \delta(\varepsilon_1 - s_1) + \left[\frac{\partial \hat{F}_{yd}(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} + R_{y1d} \delta(\varepsilon_1 - s_1) \right] \sin \omega t - \left[R_{1e} \cos \phi_1 + R_{y1d} \sin \omega t \right] \delta(\varepsilon_1 - s_1) =$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\sin \theta_e(\varepsilon_1) (-\eta_{1d} \omega \cos \omega t) + \frac{\partial \hat{y}_d(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} (-\eta_{1d} \omega \cos \omega t) \sin \omega t + \hat{y}_d(\varepsilon_1) \omega \cos \omega t \right]$$

等號右邊中括號內對時間 t 微分第二次：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{F}_{yd}(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} \sin \omega t &= \frac{1}{4\pi^2} \left[\cos \theta_e(\varepsilon_1) \frac{\partial \theta_e(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} (-\eta_{1d} \omega \cos \omega t)^2 + \sin \theta_e(\varepsilon_1) (\eta_{1d} \omega^2 \sin \omega t) \right. \\ &+ \frac{\partial^2 \hat{y}_d(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1^2} (-\eta_{1d} \omega \cos \omega t)^2 \sin \omega t + \frac{\partial \hat{y}_d(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} (\eta_{1d} \omega^2 \sin^2 \omega t) + \frac{\partial \hat{y}_d(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} (-\eta_{1d} \omega^2 \cos^2 \omega t) \\ &\left. + \frac{\partial \hat{y}_d(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} (-\eta_{1d} \omega \cos \omega t) \omega \cos \omega t - \hat{y}_d(\varepsilon_1) \omega^2 \sin \omega t \right] \end{aligned}$$

忽略高次項並化簡：

$$\frac{\partial \hat{F}_{yd}(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} = \frac{1}{4\pi^2} \omega^2 \left[\sin \theta_e(\varepsilon_1) \eta_{1d} - \hat{y}_d(\varepsilon_1) \right] \quad (4.28)$$

附錄二 完全固定夾持端 A 點之邊界條件推導過程

(a) (4.30)式至(4.33)式之推導過程

$$x(s, t)|_{s=0} = \hat{x}(\varepsilon_1, t)|_{\varepsilon_1=-\eta_1} = 0 \quad (4.30)$$

將(4.10)式代入(4.30)式：

$$x_e(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=-\eta_1} + \hat{x}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=-\eta_1} \sin \omega t = 0$$

以 $\varepsilon_1 = 0$ 做泰勒級數展開：

$$\left[x_e(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} + \frac{\partial x_e(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} \Big|_{\varepsilon_1=0} (-\eta_{1d} \sin \omega t) + \dots \right] + \left[\hat{x}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} \sin \omega t + \frac{\partial \hat{x}_d(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} \Big|_{\varepsilon_1=0} (-\eta_{1d} \sin \omega t) \sin \omega t + \dots \right] = 0$$

忽略高次項並化簡：

$$x_e(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} + \cos \theta_e(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} (-\eta_{1d} \sin \omega t) + \hat{x}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} \sin \omega t = 0$$

化簡：

$$\hat{x}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} = \cos \theta_e(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} \eta_{1d} \quad (4.33)$$

(b) (4.31)式至(4.34)式之推導過程

$$y(s, t)|_{s=0} = \hat{y}(\varepsilon_1, t)|_{\varepsilon_1=-\eta_1} = 0 \quad (4.31)$$

將(4.11)式代入(4.31)式：

$$y_e(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=-\eta_1} + \hat{y}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=-\eta_1} \sin \omega t = 0$$

以 $\varepsilon_1 = 0$ 做泰勒級數展開：

$$\left[y_e(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} + \frac{\partial y_e(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} \Big|_{\varepsilon_1=0} (-\eta_{1d} \sin \omega t) + \dots \right] + \left[\hat{y}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} \sin \omega t + \frac{\partial \hat{y}_d(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} \Big|_{\varepsilon_1=0} (-\eta_{1d} \sin \omega t) \sin \omega t + \dots \right] = 0$$

忽略高次項並化簡：

$$y_e(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} + \sin \theta_e(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} (-\eta_{1d} \sin \omega t) + \hat{y}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} \sin \omega t = 0$$

化簡：

$$\hat{y}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} = \sin \theta_e(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} \eta_{1d} \quad (4.34)$$

(c) (4.32)式至(4.35)式之推導過程

$$\theta(s,t)|_{s=0} = \hat{\theta}(\varepsilon_1, t)|_{\varepsilon_1=-\eta_1} = 0 \quad (4.32)$$

將(4.12)式代入(4.32)式：

$$\theta_e(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=-\eta_1} + \hat{\theta}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=-\eta_1} \sin \omega t = 0$$

以 $\varepsilon_1 = 0$ 做泰勒級數展開：

$$\left[\theta_e(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} + \frac{\partial \theta_e(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} \Big|_{\varepsilon_1=0} (-\eta_{1d} \sin \omega t) + \dots \right] + \left[\hat{\theta}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} \sin \omega t + \frac{\partial \hat{\theta}_d(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} \Big|_{\varepsilon_1=0} (-\eta_{1d} \sin \omega t) \sin \omega t + \dots \right] = 0$$

忽略高次項並化簡：

$$\theta_e(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} + 4\pi^2 M_e(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} (-\eta_{1d} \sin \omega t) + \hat{\theta}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} \sin \omega t = 0$$

化簡：

$$\hat{\theta}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} = 4\pi^2 M_e(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=0} \eta_{1d} \quad (4.35)$$

附錄三 完全固定夾持端B點之邊界條件推導過程

(a) (4.36)式之推導過程

$$x(s,t)|_{s=1} = \hat{x}(\varepsilon_2, t)|_{\varepsilon_2=1-\eta_2} = 1-e$$

將(4.10)式代入：

$$x_e(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=1-\eta_2} + \hat{x}_d(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=1-\eta_2} \sin \omega t = 1-e$$

以 $\varepsilon_2 = 1$ 做泰勒級數展開：

$$\left[x_e(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=1} + \frac{\partial x_e(\varepsilon_2)}{\partial \varepsilon_2} \Big|_{\varepsilon_2=1} (-\eta_{2d} \sin \omega t) + \dots \right] + \left[\hat{x}_d(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=1} \sin \omega t + \frac{\partial \hat{x}_d(\varepsilon_2)}{\partial \varepsilon_2} \Big|_{\varepsilon_2=1} (-\eta_{2d} \sin \omega t) \sin \omega t + \dots \right] = 1-e$$

忽略高次項並化簡：

$$x_e(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=1} + \cos \theta_e(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=1} (-\eta_{2d} \sin \omega t) + \hat{x}_d(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=1} \sin \omega t = 1-e$$

化簡：

$$\hat{x}_d(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=1} = \cos \theta_e(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=1} \eta_{2d} \tag{4.36}$$

(b) (4.37)式之推導過程

$$y(s, t)|_{s=1} = \hat{y}(\varepsilon_2, t)|_{\varepsilon_2=1-\eta_2} = 0$$

將(4.11)式代入：

$$y_e(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=1-\eta_2} + \hat{y}_d(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=1-\eta_2} \sin \omega t = 0$$

以 $\varepsilon_2 = 1$ 做泰勒級數展開：

$$\left[y_e(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=1} + \frac{\partial y_e(\varepsilon_2)}{\partial \varepsilon_2} \Big|_{\varepsilon_2=1} (-\eta_{2d} \sin \omega t) + \dots \right] + \left[\hat{y}_d(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=1} \sin \omega t + \frac{\partial \hat{y}_d(\varepsilon_2)}{\partial \varepsilon_2} \Big|_{\varepsilon_2=1} (-\eta_{2d} \sin \omega t) \sin \omega t + \dots \right] = 0$$

忽略高次項並化簡：

$$y_e(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=1} + \sin \theta_e(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=1} (-\eta_{2d} \sin \omega t) + \hat{y}_d(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=1} \sin \omega t = 0$$

化簡：

$$\hat{y}_d(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=1} = \sin \theta_e(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=1} \eta_{2d} \quad (4.37)$$

(c) (4.38)式之推導過程

$$\theta(s, t)|_{s=1} = \hat{\theta}(\varepsilon_2, t) \Big|_{\varepsilon_2=1-\eta_2} = 0$$

將(4.12)式代入：

$$\theta_e(\varepsilon_2) \Big|_{\varepsilon_2=1-\eta_2} + \hat{\theta}_d(\varepsilon_2) \Big|_{\varepsilon_2=1-\eta_2} \sin \omega t = 0$$

以 $\varepsilon_2 = 1$ 做泰勒級數展開：

$$\left[\theta_e(\varepsilon_2) \Big|_{\varepsilon_2=1} + \frac{\partial \theta_e(\varepsilon_2)}{\partial \varepsilon_2} \Big|_{\varepsilon_2=1} (-\eta_{2d} \sin \omega t) + \dots \right] + \left[\hat{\theta}_d(\varepsilon_2) \Big|_{\varepsilon_2=1} \sin \omega t + \frac{\partial \hat{\theta}_d(\varepsilon_2)}{\partial \varepsilon_2} \Big|_{\varepsilon_2=1} (-\eta_{2d} \sin \omega t) \sin \omega t + \dots \right] = 0$$

忽略高次項並化簡：

$$\theta_e(\varepsilon_2) \Big|_{\varepsilon_2=1} + 4\pi^2 M_e(\varepsilon_2) \Big|_{\varepsilon_2=1} (-\eta_{2d} \sin \omega t) + \hat{\theta}_d(\varepsilon_2) \Big|_{\varepsilon_2=1} \sin \omega t = 0$$

化簡：

$$\hat{\theta}_d(\varepsilon_2) \Big|_{\varepsilon_2=1} = 4\pi^2 M_e(\varepsilon_2) \Big|_{\varepsilon_2=1} \eta_{2d} \tag{4.38}$$

附錄四 接觸點 s_1 之接觸條件推導過程

(a) (4.39)式至(4.42)式之推導過程

$$x(s, t)|_{s=s_1+\eta_1} = \hat{x}(\varepsilon_1, t)|_{\varepsilon_1=s_1} = \frac{1-e}{2} - \rho \sin \hat{\theta}(\varepsilon_1, t)|_{\varepsilon_1=s_1} \quad (4.39)$$

將(4.10)、(4.12)式代入(4.39)式：

$$x_e(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=s_1} + \hat{x}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=s_1} \sin \omega t = \frac{1-e}{2} - \rho \sin \left[\theta_e(\varepsilon_1) + \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t \right]_{\varepsilon_1=s_1}$$

等號右邊用和角公式展開：

$$x_e(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=s_1} + \hat{x}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=s_1} \sin \omega t = \frac{1-e}{2} - \rho \left\{ \sin \theta_e(\varepsilon_1) \cos \left[\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t \right] + \cos \theta_e(\varepsilon_1) \sin \left[\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t \right] \right\}_{\varepsilon_1=s_1}$$

等號右邊做線性化處理：

$$x_e(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=s_1} + \hat{x}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=s_1} \sin \omega t = \frac{1-e}{2} - \rho \left[\sin \theta_e(\varepsilon_1) + \cos \theta_e(\varepsilon_1) \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t \right]_{\varepsilon_1=s_1}$$

化簡：

$$\hat{x}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=s_1} = -\rho \left[\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \cos \theta_e(\varepsilon_1) \right]_{\varepsilon_1=s_1} \quad (4.42)$$

(b) (4.40)式至(4.43)式之推導過程

$$y(s,t)|_{s=s_1+\eta_1} = \hat{y}(\varepsilon_1, t)|_{\varepsilon_1=s_1} = h - \rho(1 - \cos \hat{\theta}(\varepsilon_1, t))|_{\varepsilon_1=s_1} \quad (4.40)$$

將(4.11)、(4.12)式代入(4.40)式：

$$y_e(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=s_1} + \hat{y}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=s_1} \sin \omega t = h - \rho \left\{ 1 - \cos \left[\theta_e(\varepsilon_1) + \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t \right] \right\}|_{\varepsilon_1=s_1}$$

等號右邊用和角公式展開：

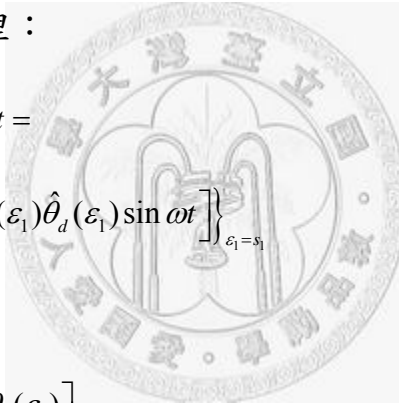
$$y_e(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=s_1} + \hat{y}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=s_1} \sin \omega t = h - \rho \left\{ 1 - \left\{ \cos \theta_e(\varepsilon_1) \cos \left[\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t \right] - \sin \theta_e(\varepsilon_1) \sin \left[\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t \right] \right\} \right\}|_{\varepsilon_1=s_1}$$

等號右邊做線性化處理：

$$y_e(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=s_1} + \hat{y}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=s_1} \sin \omega t = h - \rho \left\{ 1 - \left[\cos \theta_e(\varepsilon_1) - \sin \theta_e(\varepsilon_1) \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t \right] \right\}|_{\varepsilon_1=s_1}$$

化簡：

$$\hat{y}_d(\varepsilon_1)|_{\varepsilon_1=s_1} = -\rho \left[\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \theta_e(\varepsilon_1) \right]|_{\varepsilon_1=s_1} \quad (4.43)$$



(c) (4.41)式至(4.44)式之推導過程

$$R_{x1} \cos \hat{\theta}(\varepsilon_1, t) + R_{y1} \sin \hat{\theta}(\varepsilon_1, t) = 0 \quad \text{at } \varepsilon_1 = s_1 \quad (4.41)$$

將(4.12)、(4.14)-(4.15)式代入(4.41)式：

$$(R_{x1e} + R_{x1d} \sin \omega t) \cos \left[\theta_e(\varepsilon_1) + \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t \right] \\ + (R_{y1e} + R_{y1d} \sin \omega t) \sin \left[\theta_e(\varepsilon_1) + \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t \right] = 0$$

等號左邊利用和角公式展開：

$$(R_{x1e} + R_{x1d} \sin \omega t) \left\{ \cos \theta_e(\varepsilon_1) \cos \left[\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t \right] - \sin \theta_e(\varepsilon_1) \sin \left[\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t \right] \right\} \\ + (R_{y1e} + R_{y1d} \sin \omega t) \left\{ \sin \theta_e(\varepsilon_1) \cos \left[\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t \right] + \cos \theta_e(\varepsilon_1) \sin \left[\hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \omega t \right] \right\} = 0$$

等號左邊做線性化處理：

$$(R_{x1e} + R_{x1d} \sin \omega t) \left\{ \cos \theta_e(\varepsilon_1) - \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \theta_e(\varepsilon_1) \sin \omega t \right\} \\ + (R_{y1e} + R_{y1d} \sin \omega t) \left\{ \sin \theta_e(\varepsilon_1) + \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \cos \theta_e(\varepsilon_1) \sin \omega t \right\} = 0$$

靜態部分滿足 $R_{x1e} \cos \theta_e(\varepsilon_1) + R_{y1e} \sin \theta_e(\varepsilon_1) = 0$ ，並且忽略高次項：

$$R_{y1e} \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \cos \theta_e(\varepsilon_1) + R_{y1d} \sin \theta_e(\varepsilon_1) - \\ R_{x1e} \hat{\theta}_d(\varepsilon_1) \sin \theta_e(\varepsilon_1) + R_{x1d} \cos \theta_e(\varepsilon_1) = 0 \quad \text{at } \varepsilon_1 = s_1 \quad (4.44)$$

附錄五 接觸點 s_2 之接觸條件推導過程

(a) (4.45)式至(4.47)式之推導過程

$$y(s,t)|_{s=s_2+\eta_2} = \hat{y}(\varepsilon_2, t)|_{\varepsilon_2=s_2} = 0 \quad (4.45)$$

將(4.11)式代入(4.45)式：

$$y_e(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=s_2} + \hat{y}_d(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=s_2} \sin \omega t = 0$$

化簡：

$$\hat{y}_d(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=s_2} = 0 \quad (4.47)$$

(b) (4.46)式至(4.48)式之推導過程

$$\theta(s,t)|_{s=s_2+\eta_2} = \hat{\theta}(\varepsilon_2, t)|_{\varepsilon_2=s_2} = 0 \quad (4.46)$$

將(4.12)式代入(4.46)式：

$$\theta_e(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=s_2} + \hat{\theta}_d(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=s_2} \sin \omega t = 0$$

化簡：

$$\hat{\theta}_d(\varepsilon_2)|_{\varepsilon_2=s_2} = 0 \quad (4.48)$$

