

國立臺灣大學電機資訊學院電信工程研究所

碩士論文

Graduate Institute of Communication Engineering
College of Electrical Engineering and Computer Science
National Taiwan University
Master Thesis

天線陣列幾何結構對無線通訊系統效能分析與最佳化
Performance Analysis and Optimization of Antenna Array
Geometries on Wireless Communication Systems



Ching-Chia Cheng

指導教授：李枝宏 博士

Advisor: Ju-Hong Lee, Ph.D.

中華民國 100 年 6 月

June, 2011

摘要

行動通訊系統中，多路徑造成的通道衰落會影響傳輸的可靠度，使傳輸品質及速率受到限制，而多輸入多輸出系統能利用衰落通道間獨立的特性，空間分集及空間多工技術來提高傳輸品質及速率，然天線間的空間相關性會造成通道間不再獨立，使得傳輸品質及速率受到影響。而由於天線陣列的幾何結構會影響空間相關性，因此在此首先在第二章推導二維擴散之空間相關性公式，及三維擴散之空間相關性公式。第三至六章則使用粒子群最佳化演算法，藉由第二章推導之空間相關性公式，在一定範圍內搜尋擁有最大通道容量之最佳化天線陣列，並且實驗模擬常見之均勻分布線性陣列、均勻分布圓形陣列同心圓陣列這三種天線陣列架構，討論空間相關性對通道容量及位元錯誤率之影響，並比較相同大小之天線陣列間效能的差異，以及其與該情況最佳之天線陣列之差距。

Abstract

In mobile radio communication systems, channel fading caused by multipath propagation influences the reliability of information transmission. To provide higher transmission quality and spectral efficiency, MIMO greatly mitigates the impact of the channel impairment. However, the spatial correlation between the elements of antenna array significantly affects transmission quality and spectral efficiency. Therefore, the spatial correlation characteristics for different array geometries must be considered. For modeling the spatial correlation properties, the spatial correlation functions under 2-D spreading and 3-D spreading environments are derived in chapter 2. An optimization method of array geometry is provided in chapter 3 to chapter 6, which searches the optimal array geometry for maximizing channel capacity using particle swarm optimization. The performance analyses of using uniform linear array (ULA), uniform circular array (UCA), concentric ring array (CRA), and the optimal array are also provided in chapter 3 to chapter 6, considering the effect of spatial correlation and comparing the ergodic channel capacity and bit error rate between these different array geometries.

目錄

摘要	i
Abstract	ii
目錄	iii
第一章 緒論	1
第二章 陣列之指引向量及空間相關性推導	5
2.1 座標系	7
2.2 指向向量	7
2.3 二維空間相關性公式	8
2.3.1 公式推導	8
2.3.2 二維空間相關性模擬	10
2.4 三維空間相關性公式	31
2.4.1 公式推導	31
2.4.2 三維空間相關性模擬	34
第三章 二維擴散環境下天線陣列效能分析與最佳化	56
3.1 系統模型	58
3.2 通道容量	59
3.3 最大相似偵測法	59
3.4 位元錯誤率	60
3.5 粒子群最佳化演算法	61
3.6 適應值函數設計	64
3.6.1 取樣估計	64
3.6.2 通道容量解析解	65

3.6.3	通道容量近似解	66
3.6.4	通道容量上界	67
3.6.5	適應值函數比較	69
3.7	天線陣列幾何結構最佳化	71
3.8	模擬結果	73
3.8.1	平均水平入射角	74
3.8.2	水平角度擴散	76
3.8.3	陣列大小	79
3.8.4	天線數	81
第四章	三維擴散環境下天線陣列效能分析與最佳化	85
4.1	系統簡介	86
4.2	天線陣列幾何結構最佳化	88
4.3	模擬結果	93
4.3.1	平均水平入射角	94
4.3.2	平均垂直入射角	96
4.3.3	水平角度擴散	100
4.3.4	垂直角度擴散	102
4.3.5	陣列大小	104
4.3.6	天線數	106
第五章	全相關二維擴散環境下天線陣列效能分析與最佳化	111
5.1	系統簡介	112
5.2	天線陣列幾何結構最佳化	114
5.3	模擬結果	119
5.3.1	平均水平入射角	120
5.3.2	水平角度擴散	122

5.3.3	陣列大小	125
5.3.4	天線數	127
第六章	全相關三維擴散環境下天線陣列效能分析與最佳化	131
6.1	系統簡介	132
6.2	天線陣列幾何結構最佳化	134
6.3	模擬結果	139
6.3.1	平均水平入射角	140
6.3.2	平均垂直入射角	148
6.3.3	水平角度擴散	158
6.3.4	垂直角度擴散	168
6.3.5	陣列大小	178
6.3.6	天線數	188
第七章	結論	195
參考文獻	197

第一章

緒論

近年來，隨著行動通訊的普及，大眾對於行動通訊服務的需求也大幅上升，因此如何在有限的頻寬內獲得較高的頻譜使用效率以及傳輸品質，也逐漸成為急需解決的問題，而多輸入多輸出(MIMO)系統也就應之而生。MIMO 系統因為其各個通道獨立衰落(fading)的性質，提供了系統額外的資源，例如可以利用其提供之自由度(degrees of freedom)來提高傳輸速率，以提高頻譜使用效率；或是利用空間分集(spatial diversity)來降低錯誤率，以提高傳輸品質。總而言之 MIMO 的技術便是在開發多路徑通道的空間特性，因此 MIMO 系統的效能也會受到傳送端與接收端天線陣列(antenna array)的空間相關性(spatial correlation)影響，空間相關性的存在會使得通道之間並非獨立，造成其所能提供之空間分集的下降，導致系統的效能下降，因此如何了解空間相關性便是一個很重要的問題，而影響空間相關性的主要因素為信號擴散與天線陣列幾何結構，信號擴散與環境有關，無法隨意控制，因此天線陣列幾何結構的影響便顯得十分重要。

因此，近年來也有許多研究討論天線陣列的空間相關性，例如[1-3]中討論了均勻線性陣列(uniform linear array, ULA)、均勻圓形陣列(uniform circular array, UCA)以及同心圓陣列(concentric ring array, CRA)的二維空間相關性函數，並且在[4]也討論了均勻線性陣列的擺放的方向對於通道容量的影響，另外[5, 6]也討論了 ULA 以

及 UCA 在陣列大小、平均水平入射信號角度(mean azimuth of arrival, MAOA)以及水平角度擴散(azimuth spread, AS)對通道容量的影響，[7]則討論了使用 ULA 在三種不同的通道模型下的通道容量表現。而[8-10]更進一步推導了三維空間相關性函數，並且在[10]中討論了 ULA、均勻平面陣列(uniform rectangular array, URA)以及 UCA 在水平角度擴散不同以及垂直角度擴散(elevation spread, ES)不同的環境下，其通道容量的表現。

以上的參考資料大致上描述了天線陣列的幾何結構以及信號的擴散如何影響通道容量，然而在觀察這些常用的天線陣列幾何結構效能的表現同時，也讓人不禁的思考，與其僅針對某幾種特定之陣列結構分析並比較其效能，是否能夠找到擁有最佳效能的天線陣列幾何結構呢？因此近年來，也越來越多關於天線陣列幾何結構最佳化(array geometry optimization)的研究。

一般而言陣列幾何結構最佳化是對某個特定的目標，最佳化陣列的幾何結構，使得該陣列符合我們的要求。例如[11]使用模擬退火法(simulated annealing, SA)合成非均勻線性陣列(non-uniform linear array, NULA)以抑制旁波瓣級(sidelobe level, SLL)；[12]則是使用粒子群最佳化(particle swarm optimization, PSO)合成非均勻線性陣列以抑制旁波瓣級並做零點控制(null control)；[13]使用粒子群最佳化同時合成寬頻之平面陣列以及權重，以抑制旁波瓣級。而除了由天線陣列的輻射場型(radiation pattern)角度來做陣列幾何結構最佳化外，在無線通訊系統中，通道容量以及位元錯誤率是我們最關心的課題，近年來亦有許多由天線間互耦合(mutual coupling)對通道容量之影響來切入陣列幾何結構最佳化的問題。例如[14]便是考慮互耦合的影響，利用粒子群最佳化最佳化在方形之區域內最佳化二維平面陣列以最大化通道容量；[15]則是考慮特殊的地下通道(underground tunnels)環境電磁場對通道容量之影響，利用通道容量在高訊雜比(signal-to-noise ratio, SNR)時的近似式，在此環境中最佳化二維平面陣列。當然如同先前段落所說，天線間的空間相關性也是影響通道容量以及位元錯誤率的一大因素，因此[16]便是考慮空間相關性的影

響，利用基因演算法(genetic algorithm, GA)最佳化非均勻之線性陣列、圓形陣列及同心圓陣列。

而在本研究中亦是由空間相關性的角度切入，對接收端天線陣列之幾何結構作最佳化。考慮二維擴散以及三維擴散之環境，使用粒子群最佳化演算法，限制天線陣列為在一固定半徑之圓盤以及球體範圍內，尋找擁有最大通道容量之二維天線陣列幾何結構以及三維天線陣列幾何結構，並且除了最佳化外，在此同時會分析相同環境下均勻線性陣列、均勻圓形陣列以及同心圓陣列之效能，以比較常用之天線陣列其效能與所能達到之最佳效能間的差距。

以下是本篇論文之架構。第二章首先定義陣列中敘述天線位置的座標系統，由此座標系統表示指向向量(steering vector)，並由空間相關性之定義開始，考慮信號擴散為二維均勻擴散，推導一般性的二維空間相關性公式，並模擬 ULA、UCA、CRA1 以及 CRA2 空間相關性的表現。接著考慮信號擴散為三維均勻擴散，同樣推導一般性的三維天線陣列之三維空間相關性公式，同樣模擬上述四種天線陣列以及一三維之正四面體陣列(tetrahedral array, TA)之三維空間相關性表現。

第三章至第六章為分析接收端天線陣列為 ULA、UCA、CRA1 以及 CRA2 四種固定陣列在各種不同環境下之效能，並且與最佳化天線陣列之效能比較。第三章為簡化問題，假設通道為半相關通道(semi-correlated channel)，僅考慮接收端陣列空間特性對系統效能的影響，而令傳送端陣列天線間無空間相關性，並且第三章假設信號擴散為二維均勻擴散，討論平均水平入射角度、水平角度擴散以及天線陣列大小的改變對上述四種固定陣列以及最佳化之陣列，其通道容量以及位元錯誤率(bit error rate, BER)的影響。第四章同樣假設通道為半相關通道，而信號擴散為三維均勻擴散，除了討論平均水平入射角度、水平角度擴散以及天線陣列大小的影響外，在此更進一步討論了平均垂直入射角度以及垂直角度擴散的影響。

第五章開始考慮全相關通道(fully correlated channel)，在傳送端具有一定空間相關性的情況下，觀察接收端陣列空間特性對系統效能的影響，第五章與第三章

相同假設信號擴散為二維均勻擴散，討論平均水平入射角度、水平角度擴散以及天線陣列大小的改變對上述四種天線陣列以及最佳化之陣列效能的影響。而第六章同樣假設通道為全相關通道，並且假設信號擴散為三維均勻擴散，在傳送端空間相關性固定下，討論上述四種天線陣列在不同參數下的通道容量以及位元錯誤率表現，並且藉由最佳化二維平面陣列以及三維立體陣列討論在各種擴散環境下天線陣列能達到的最佳效能為何，討論上述四種固定天線陣列之效能與最佳天線陣列效能的差距，並且藉由最佳化後的結果討論最佳之二維及三維天線陣列其形狀之趨向。最後在第七章則是結論以及未來展望，總結天線陣列幾何結構對其效能的影響，以及上述四種天線陣列各自在不同環境下的優劣。



第二章

陣列之指引向量及空間相關性推導

在無線通訊系統中，天線陣列因其能有效利用多路徑通道的空間特性，被廣泛應用於改善容量與信號品質，因此了解天線陣列的效能如何受到信號擴散的影響是很重要的。而近年來也有許多關於天線陣列空間相關性的研究，例如[1-3]中討論了均勻線性陣列 (uniform linear array, ULA)、均勻圓形陣列 (uniform circular array, UCA)以及同心圓陣列(concentric ring array, CRA)，在信號入射角度擴散為二維水平方向擴散下的空間相關性函數。因為[17]指出在行動通訊中，信號有約 65% 的能量其入射之仰角大於 10° ，而[18]也指出信號約有 90% 的能量其入射之仰角介於 0° 至 40° ，鑒於這些實際量測的結果，有必要更進一步考慮信號在垂直方向的擴散對天線陣列的影響，因此[8, 10]推導了 ULA、UCA 與均勻平面陣列(uniform rectangular array, URA)在三維均勻信號入射角度擴散下的空間相關性函數。而本章亦是參考上述文獻之推導方法，並且不再針對特定陣列推導，而是利用座標來敘述陣列中天線的擺放位置，以此方式推導一般化的空間相關性函數，請參考[9]。

首先定義敘述陣列中天線的擺放位置之座標系統，並且藉由各天線之座標以及信號入射之方向向量來表示陣列之指向向量(steering vector)。接著假設信號入射角度擴散為二維之均勻擴散，藉由空間相關性定義推導二維空間相關性函數，並且模擬常用之 ULA、UCA 以及 CRA 之二維空間相關性，其中 CRA 又因內外圈結構

不同分爲兩種形式，在此簡稱爲 **CRA1** 及 **CRA2**。接著考慮三維之均勻擴散環境，同樣由空間相關性定義推導三維空間相關性函數以及一近似式，並且考慮到天線陣列若使用在手持的系統上，其天線陣列可能有所傾斜而不在一般假設之水平面 (azimuth plane) 上，因此在此推導三維空間相關性函數時加入了 **Z** 軸，以適應天線陣列的傾斜，並且能延伸至較少人討論之三維陣列。在此除了模擬常用之 **ULA**、**UCA**、**CRA1** 以及 **CRA2** 之三維空間相關性外，亦模擬一三維結構之正四面體陣列 (tetrahedral array, **TA**) 之三維空間相關性。



2.1 座標系

假設空間中有多根天線，爲了觀察方便，令第 m 根天線所在位置用直角座標系來表示，表示爲 $\mathbf{r}_m = (x_m, y_m, z_m)^T$ 單位爲波長(λ)，如圖 2-1 所示，而天線 m 到天線 n 之向量 $\mathbf{d}_{m,n}$ 可表示爲：

$$\mathbf{d}_{m,n} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \cos(\alpha_{m,n}) \\ r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \sin(\alpha_{m,n}) \\ r_{m,n} \cos(\beta_{m,n}) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$r_{m,n}$ 爲天線 m 與天線 n 之間距， $\alpha_{m,n}$ 爲 X 軸到兩天線連線之夾角，稱爲方位角 (azimuth angle)， $\beta_{m,n}$ 爲 Z 軸方向到兩天線連線之夾角，稱爲傾斜角(elevation angle)，換言之便是直角座標系與球座標系之間的換算。

另一方面，信號入射方向一般則會用 ξ 水平入射(azimuth of arrival, AOA)以及 φ 垂直入射(elevation of arrival, EOA)來表示，而使用球座標系來表示此方向向量則爲 $\mathbf{k} = (1, \varphi, \xi)$ ，相同的也可用直角座標系來表示之。

$$\mathbf{k}(\varphi, \xi) = \begin{bmatrix} \sin(\varphi) \cos(\xi) \\ \sin(\varphi) \sin(\xi) \\ \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

2.2 指向向量

指向向量(steering vector)代表了一組天線陣列元件間之相位延遲，計算指向向量，不失一般性，可以將原點設爲參考點，如此可以輕易地藉由天線之座標，以及入射信號的方向向量的內積來計算指向向量。

$$\mathbf{v}(\varphi, \xi) = [v_m(\varphi, \xi)] = \left[e^{-i2\pi(\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{k}(\varphi, \xi))} \right] = \left[e^{-i2\pi(x_m \sin(\varphi) \cos(\xi) + y_m \sin(\varphi) \sin(\xi) + z_m \cos(\varphi))} \right] \quad (2.3)$$

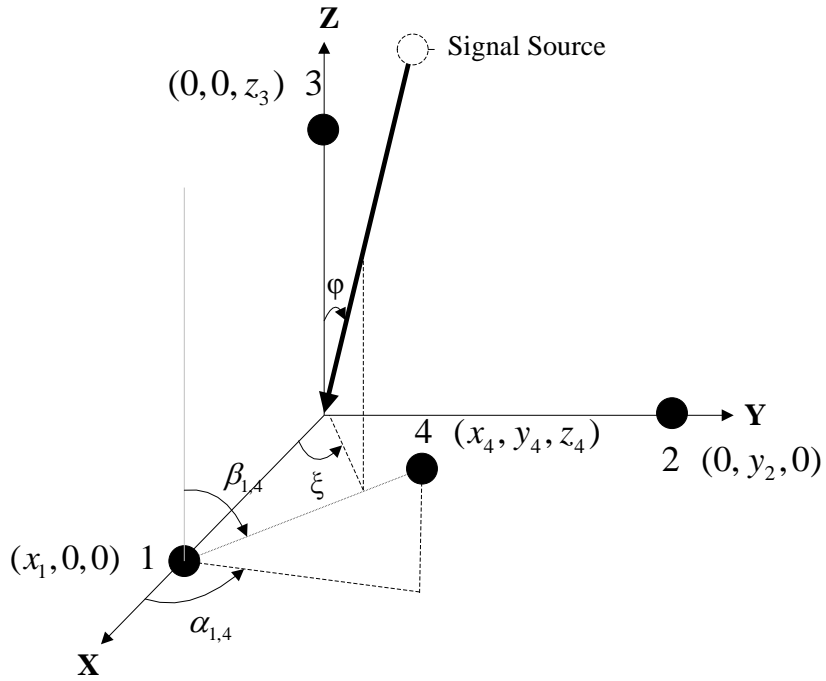


圖 2-1 三維座標系與信號入射示意圖

2.3 二維空間相關性公式

2.3.1 公式推導

參考[10]對空間相關性之定義，陣列中第 m 個元件以及第 n 個元件間的空間相關性表示為

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_s(m, n) &= E[v_m(\varphi, \xi)v_n^\dagger(\varphi, \xi)] \\ &= \int_{\varphi} \int_{\xi} v_m(\varphi, \xi)v_n^*(\varphi, \xi)f(\varphi, \xi)\sin(\varphi)d\xi d\varphi\end{aligned}\quad (2.4)$$

$f(\varphi, \xi)$ 為入射角度擴散機率密度函數，在此假設入射角度擴散僅有水平方向之擴散，並且

信號角度機率密度函數均勻分布於在 $\theta_{\xi} - \Delta_{\xi}$ 與 $\theta_{\xi} + \Delta_{\xi}$ 間，而垂直入射角度則固定為 φ_0

$$f(\varphi, \xi) = \frac{1}{2\Delta_\xi}, \text{ for } \varphi = \varphi_0 \text{ and } \theta_\xi - \Delta_\xi \leq \xi \leq \theta_\xi + \Delta_\xi$$

其中 θ_ξ 為平均水平入射(mean azimuth of arrival, MAOA)， Δ_ξ 為水平角度擴散 (azimuth spread, AS)，並且在此假設天線皆位於 X-Y 平面上。則空間相關性依(2.4) 定義可表示為

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_s(m, n) &= \frac{1}{2\Delta_\xi} \int_{\theta_\xi - \Delta_\xi}^{\theta_\xi + \Delta_\xi} v_m(\varphi_0, \xi) v_n^\dagger(\varphi_0, \xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\Delta_\xi} \int_{\theta_\xi - \Delta_\xi}^{\theta_\xi + \Delta_\xi} e^{-i2\pi(\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{k}(\varphi_0, \xi))} e^{i2\pi(\mathbf{r}_n \cdot \mathbf{k}(\varphi_0, \xi))} d\xi \\ &= \frac{1}{2\Delta_\xi} \int_{\theta_\xi - \Delta_\xi}^{\theta_\xi + \Delta_\xi} e^{i2\pi(\mathbf{d}_{m,n} \cdot \mathbf{k}(\varphi_0, \xi))} d\xi \\ &= \frac{1}{2\Delta_\xi} \int_{\theta_\xi - \Delta_\xi}^{\theta_\xi + \Delta_\xi} e^{i2\pi(r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \cos(\alpha_{m,n}) \sin(\varphi_0) \cos(\xi) + r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \sin(\alpha_{m,n}) \sin(\varphi_0) \sin(\xi) + r_{m,n} \cos(\beta_{m,n}) \cos(\varphi_0))} d\xi \\ &= \frac{1}{2\Delta_\xi} \int_{\theta_\xi - \Delta_\xi}^{\theta_\xi + \Delta_\xi} e^{i2\pi(r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \sin(\varphi_0) \cos(\xi - \alpha_{m,n}) + r_{m,n} \cos(\beta_{m,n}) \cos(\varphi_0))} d\xi \\ &= \frac{1}{2\Delta_\xi} e^{i2\pi r_{m,n} \cos(\beta_{m,n}) \cos(\varphi_0)} \int_{\theta_\xi - \Delta_\xi}^{\theta_\xi + \Delta_\xi} e^{i2\pi r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \sin(\varphi_0) \cos(\xi - \alpha_{m,n})} d\xi \end{aligned} \quad (2.5)$$

令 $\tilde{\xi} = \xi - \alpha_{m,n}$ ，因此(2.5)可表示為

$$\mathbf{R}_s(m, n) = \frac{1}{2\Delta_\xi} e^{i2\pi r_{m,n} \cos(\beta_{m,n}) \cos(\varphi_0)} \int_{\theta_\xi - \Delta_\xi - \alpha_{m,n}}^{\theta_\xi + \Delta_\xi - \alpha_{m,n}} e^{i2\pi r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \sin(\varphi_0) \cos(\tilde{\xi})} d\tilde{\xi} \quad (2.6)$$

又參考[19]，依據 Bessel function 之特性：

$$e^{iz \cos(x)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^k J_k(z) e^{ikx} \quad (2.7)$$

並且令

$$\begin{cases} Z_{I,m,n} = 2\pi r_{m,n} \cos(\beta_{m,n}) \cos(\varphi_0) \\ Z_{Q,m,n} = 2\pi r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \sin(\varphi_0) \end{cases} \quad (2.8)$$

將(2.7)(2.8)代入(2.6)可以得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_s(m, n) &= \frac{1}{2\Delta_\xi} e^{iZ_{I,m,n}} \int_{\theta_\xi - \Delta_\xi - \alpha_{m,n}}^{\theta_\xi + \Delta_\xi - \alpha_{m,n}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^k J_k(Z_{Q,m,n}) e^{ik\tilde{\xi}} d\tilde{\xi} \\
&= \frac{1}{2\Delta_\xi} e^{iZ_{I,m,n}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^k J_k(Z_{Q,m,n}) \int_{\theta_\xi - \Delta_\xi - \alpha_{m,n}}^{\theta_\xi + \Delta_\xi - \alpha_{m,n}} e^{ik\tilde{\xi}} d\tilde{\xi}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

其中(2.9)內積分項可以單獨拿出來計算

$$\int_{\theta_\xi - \Delta_\xi - \alpha_{m,n}}^{\theta_\xi + \Delta_\xi - \alpha_{m,n}} e^{ik\tilde{\xi}} d\tilde{\xi} = \frac{2}{k} \sin(k\Delta_\xi) e^{ik(\theta_\xi - \alpha_{m,n})} \tag{2.10}$$

將(2.10)代回(2.9)

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_s(m, n) &= \frac{1}{2\Delta_\xi} e^{iZ_{I,m,n}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^k J_k(Z_{Q,m,n}) \frac{2}{k} \sin(k\Delta_\xi) e^{ik(\theta_\xi - \alpha_{m,n})} \\
&= e^{iZ_{I,m,n}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^k J_k(Z_{Q,m,n}) \frac{\sin(k\Delta_\xi)}{k\Delta_\xi} \left(\cos(k(\theta_\xi - \alpha_{m,n})) + i \sin(k(\theta_\xi - \alpha_{m,n})) \right) \\
&= e^{iZ_{I,m,n}} \left[J_0(Z_{Q,m,n}) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} i^k J_k(Z_{Q,m,n}) \operatorname{sinc}(k\Delta_\xi) \cos(k(\theta_\xi - \alpha_{m,n})) \right]
\end{aligned} \tag{2.11}$$

最後即可得到了二維空間相關性公式，在此 $\operatorname{sinc}(a) = \frac{\sin(a)}{a}$ 。而在天線位於水平面上，並且垂直入射角度為 90 度的特殊情況下，將 $\beta_{m,n}$ 與 φ_0 代入 $\frac{\pi}{2}$ ，則(2.11)可改寫為

$$\mathbf{R}_s(m, n) = J_0(2\pi r_{m,n}) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} i^k J_k(2\pi r_{m,n}) \operatorname{sinc}(k\Delta_\xi) \cos(k(\theta_\xi - \alpha_{m,n})) \tag{2.12}$$

此時之[8]公式與所推導之相同。而以下的模擬中， k 取 $1 \leq k \leq 100$ 。

2.3.2 二維空間相關性模擬

首先觀察水平方向擴散對不同方位角以及傾斜角之二天線，其空間相關性表現的影響。令二天線間距為 1λ ，而方位角為 α ，傾斜角為 β 。

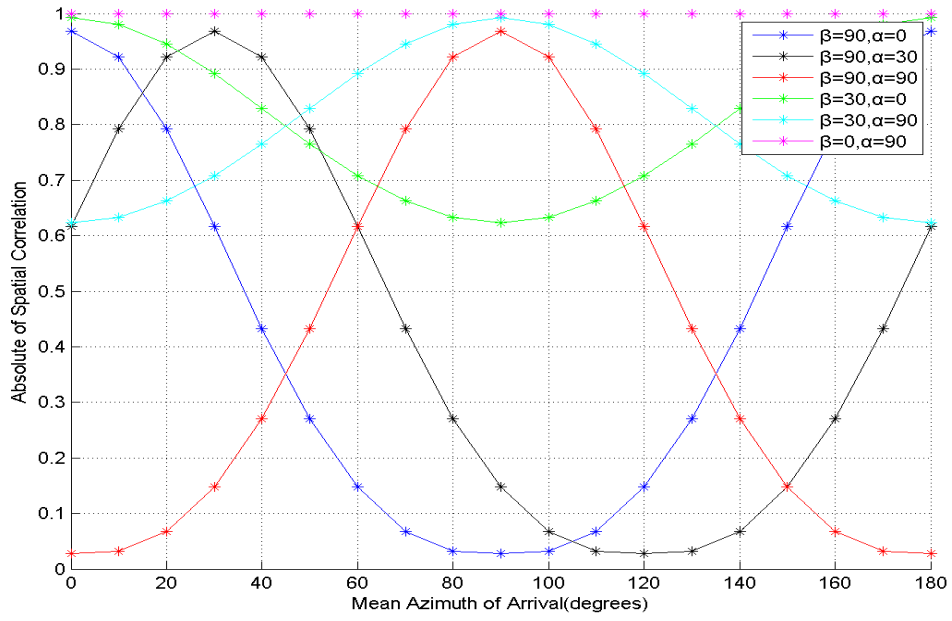


圖 2-2 Spatial Correlation for varying MAOA with Uniform distribution at
 $AS = 30^\circ$ and $\varphi_0 = 90^\circ$

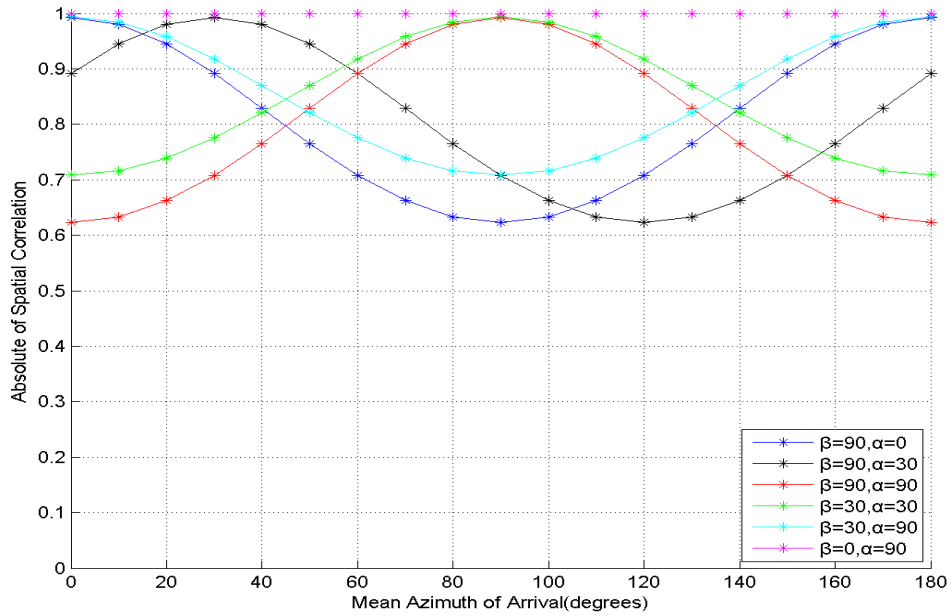


圖 2-3 Spatial Correlation for varying MAOA with Uniform distribution at
 $AS = 30^\circ$ and $\varphi_0 = 30^\circ$

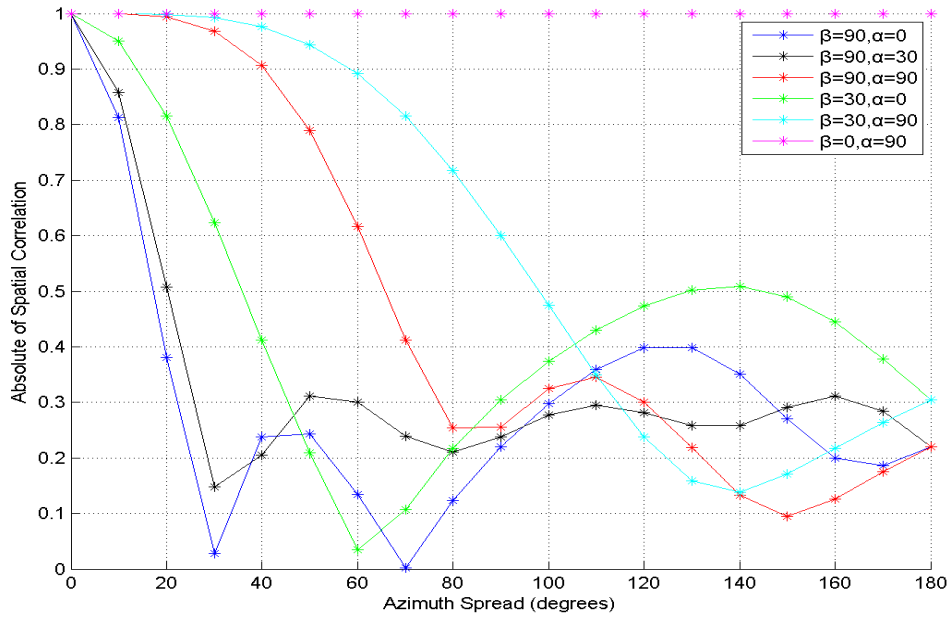


圖 2-4 Spatial Correlation for varying AS with Uniform distribution at
 $MAOA = 90^\circ$ and $\varphi_0 = 90^\circ$

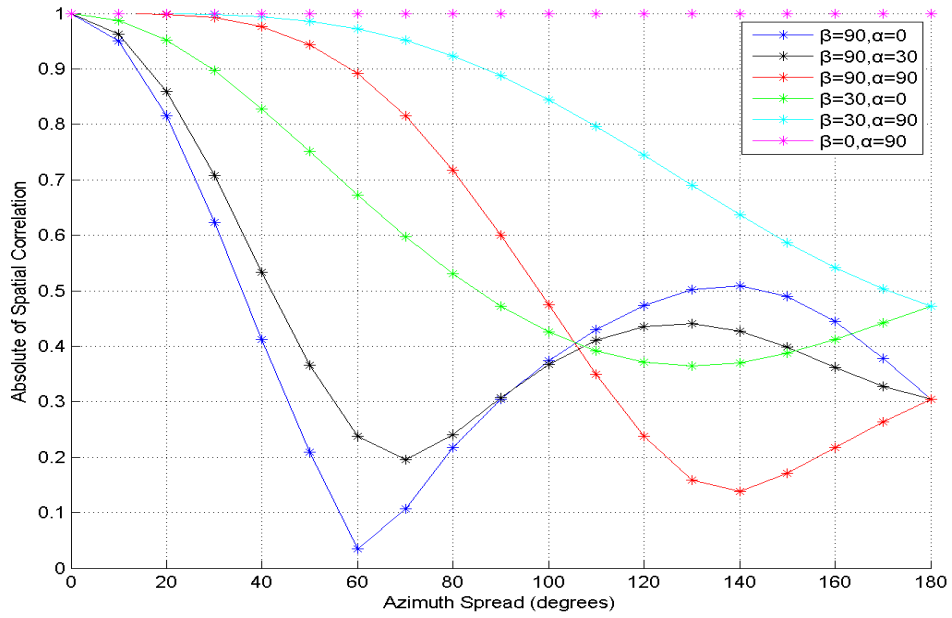


圖 2-5 Spatial Correlation for varying AS with Uniform distribution at
 $MAOA = 90^\circ$ and $\varphi_0 = 30^\circ$

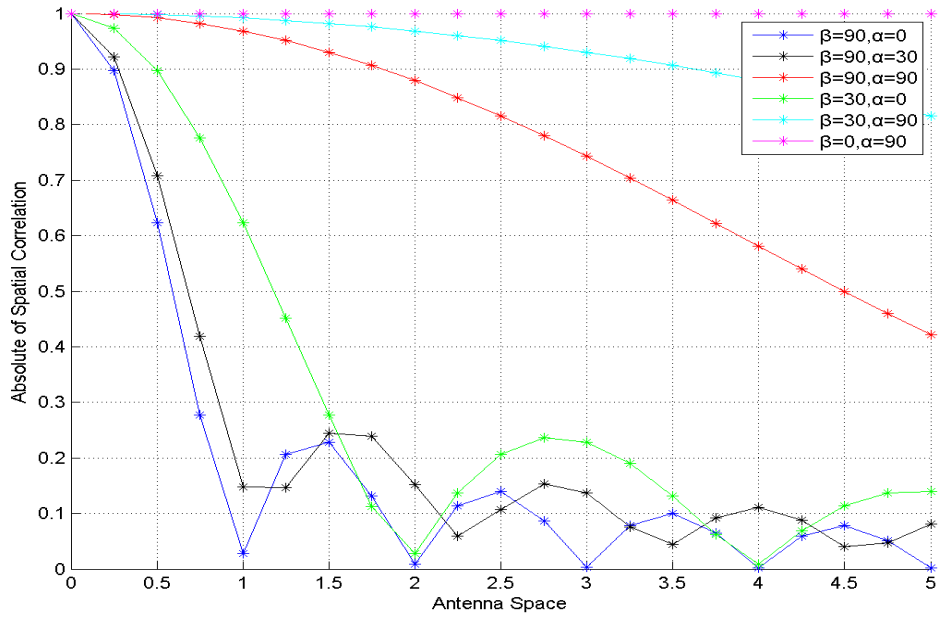


圖 2-6 Spatial Correlation for varying antenna space with Uniform distribution at
 $MAOA = 90^\circ$, $AS = 30^\circ$ and $\varphi_0 = 90^\circ$

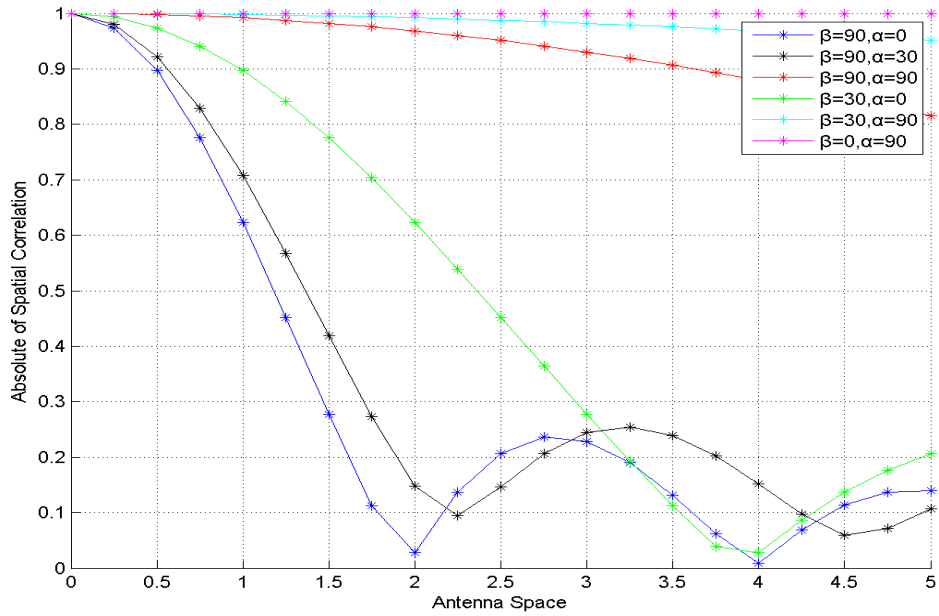


圖 2-7 Spatial Correlation for varying antenna space with Uniform distribution at
 $MAOA = 90^\circ$, $AS = 30^\circ$ and $\varphi_0 = 30^\circ$

由推導之二維空間相關性函數可以看出，在二維擴散的環境中，影響陣列中任二天線間空間相關性的大小因素有五點：1. MAOA 與二天線之方位角差距、2. AS、3. 天線間距、4. 二天線之傾斜角、5. 垂直入射角度。

MAOA 與二天線連線之水平方位角差距的影響則在於公式中之 $\cos(k(\theta_\xi - \alpha_{m,n}))$ 項，此項在 MAOA 與二天線之方位角相差 0 度時，意即為端射方向(end-fire orientation)時，對於不同之 k 皆為 1，各項累加，因此此時空間相關性最大，相反在 MAOA 與二天線之方位角相差 90 度時，意即為寬邊方向(broadside orientation)時，若 k 為奇數則為 0，為偶數則為正負一，此時空間相關性會達到最小，因此由圖 2-2 及圖 2-3 也可以發現 MAOA 越接近該二天線之寬邊方向其空間相關性會越低。AS 對空間相關性的影響來自公式中的 $\text{sinc}(k\Delta_\xi)$ 項，sinc 函數雖然會上下震盪但整體而言會隨著角度擴散上升而下降，因此空間相關性亦會隨著角度擴散上升而下降，因此由圖 2-4 及圖 2-5 可以發現隨著 AS 變大空間相關性會降低，但有些許區域之極值。天線間距對空間相關性的影響由推導之公式可以看出天線間距位於貝索函數(Bessel function)內，因此隨著天線間距上升二維空間相關性整體趨勢向下降但會有許多區域的極值，此情況可由圖 2-6 及圖 2-7 之模擬中看出。

二天線連線之傾斜角對空間相關性的影響由公式上很容易理解，與投影至水平面之天線陣列，其空間相關性之絕對值相同，差別僅在有相位上的差距，因此若僅考慮空間相關性之絕對值，對於不位於水平面上之陣列，可以將所有天線投影至水平面上，當作二維陣列計算其空間相關性，因此由圖 2-2 及圖 2-3 可以發現二天線之傾斜角為 30 度時其空間相關性皆較位於水平面上(傾斜角為 90 度)時高，同樣的情況由圖 2-4 及圖 2-5 也可以發現，並且根據[2]所述對於寬邊方向之天線陣列，其二維空間相關性第一個接近零的位置在於其天線間距 $d/\lambda \approx 30/AS$ ，因此由圖 2-4 可以發現天線間距 1λ 之藍線在 AS 為 30 度時達到最低，而對於傾斜角為

30 度之天線陣列其等效之天線間距為 0.5λ ，因此線線在 60 度時達到最低，而由圖 2-6 及圖 2-7 可以發現在相同方位角的情況下，二天線之傾斜角由 90 度改變至 30 度，因其等效之天線間距為實際之一半，因此會造成天線間距必須增加一倍才能達到與位於水平面上時相同之空間相關性，也因此對於位於 Z 軸上之二天線，無論天線間距如何增加其空間相關性皆為 1。而垂直入射角度的影響也類似，就空間相關性之絕對值而言，垂直入射角度的影響相當於整體天線陣列大小的等比例縮小，其縮小幅度為 $\sin(\varphi_0)$ ，因此比較圖 2-6 及圖 2-7 可以發現，因為垂直入射角度由 90 度改變至 30 度，因此圖 2-7 之天線間距必須增加一倍才能達到與圖 2-6 相同之空間相關性。

接下來考慮四種常用之天線陣列—均勻線性陣列、均勻圓形陣列以及兩種不同形式之同心圓陣列其空間相關性的表現。

A. 均勻線性陣列(uniform linear array, ULA)

均勻線性陣列為一種常用之陣列幾何結構，其天線擺放於同一直線上，並且相鄰之天線間距皆相同。在此假設有四天線位於 X 軸上，並另總長之一半為 D，則此天線陣列結構如圖 2-8 所示。

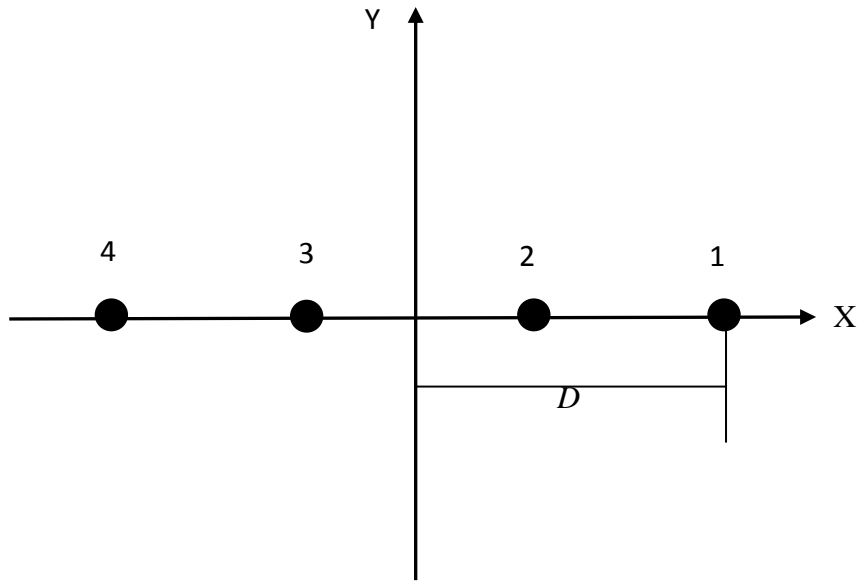


圖 2-8 四元件均勻線性陣列結構

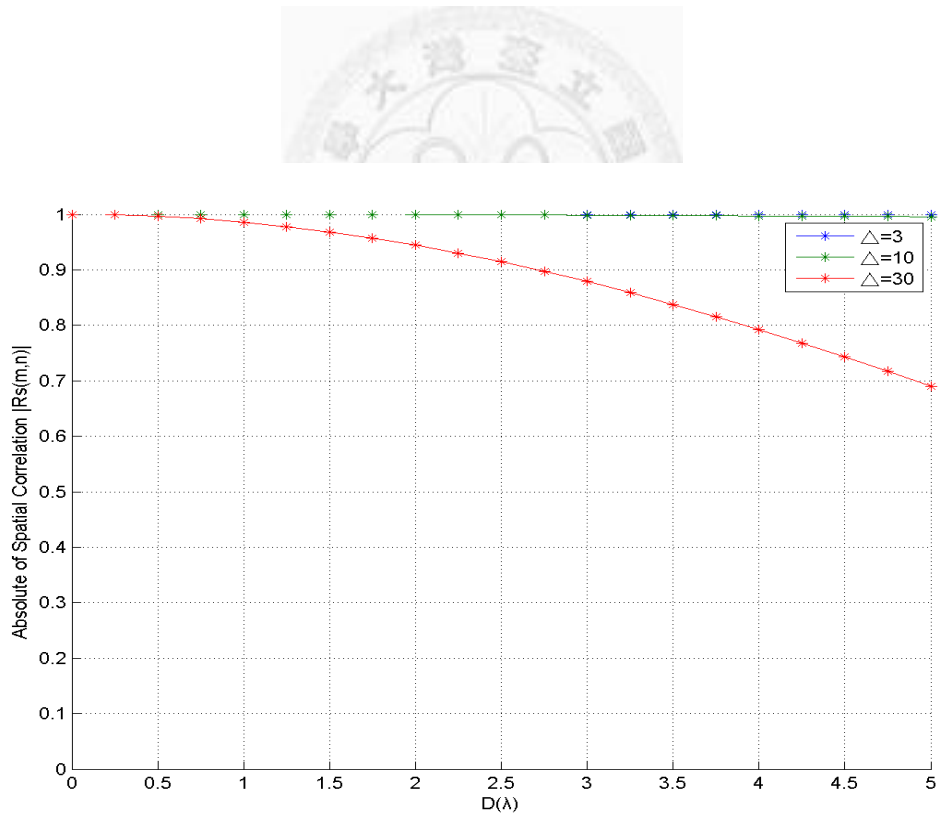


圖 2-9 Spatial Correlation between element 1 and 2 with Uniform distribution at

$MAOA = 0^\circ$ and $\varphi_0 = 90^\circ$ for ULA

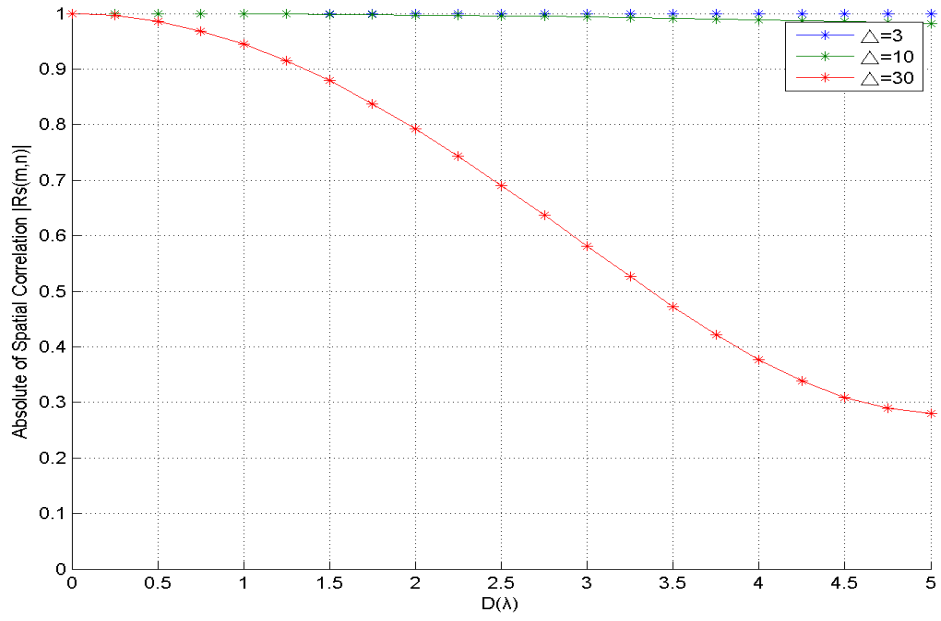


圖 2-10 Spatial Correlation between element 1 and 3 with Uniform distribution at
 $MAOA = 0^\circ$ and $\varphi_0 = 90^\circ$ for ULA

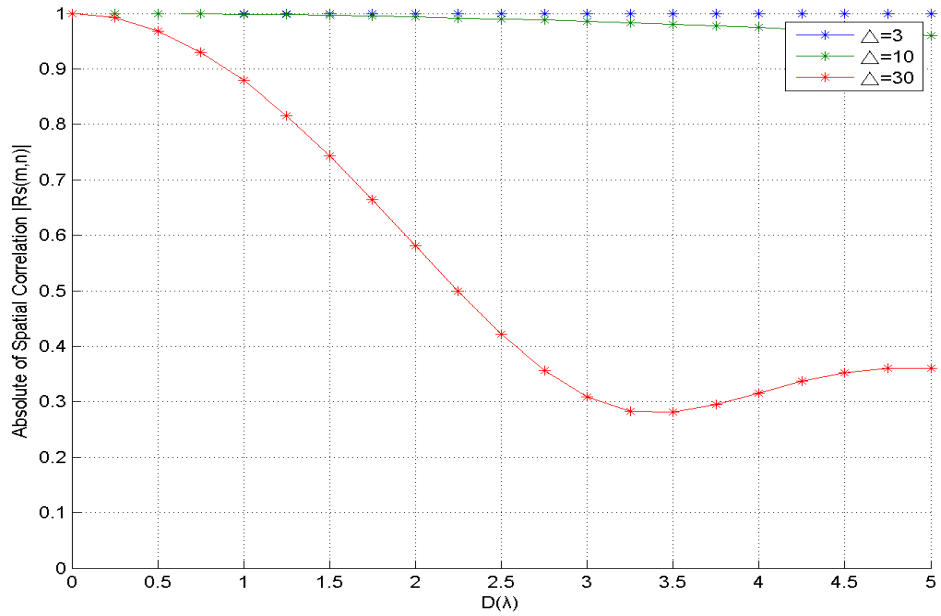


圖 2-11 Spatial Correlation between element 1 and 4 with Uniform distribution at
 $MAOA = 0^\circ$ and $\varphi_0 = 90^\circ$ for ULA

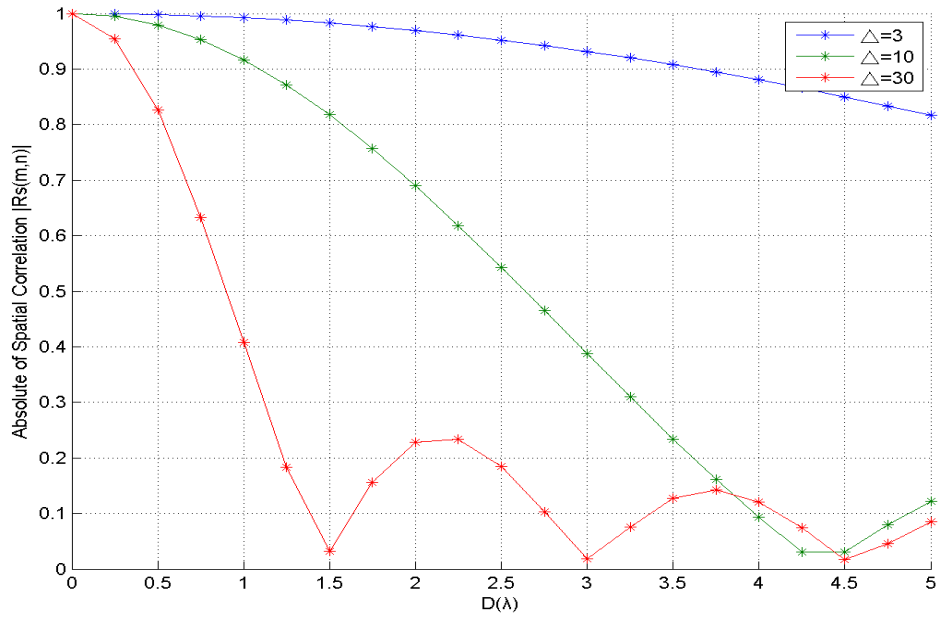


圖 2-12 Spatial Correlation between element 1 and 2 with Uniform distribution at
MAOA = 80° and $\varphi_0 = 90^\circ$ for ULA

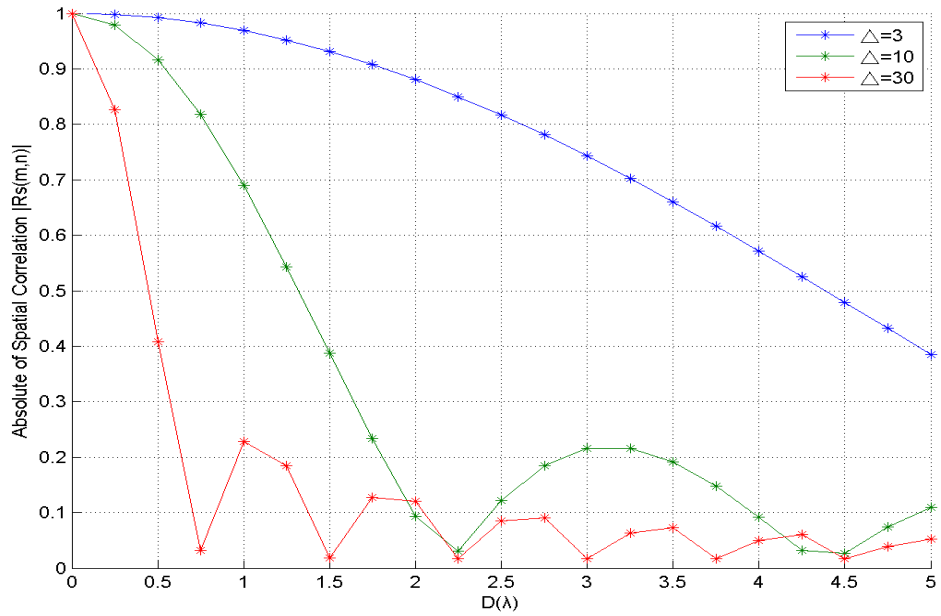


圖 2-13 Spatial Correlation between element 1 and 3 with Uniform distribution at
MAOA = 80° and $\varphi_0 = 90^\circ$ for ULA

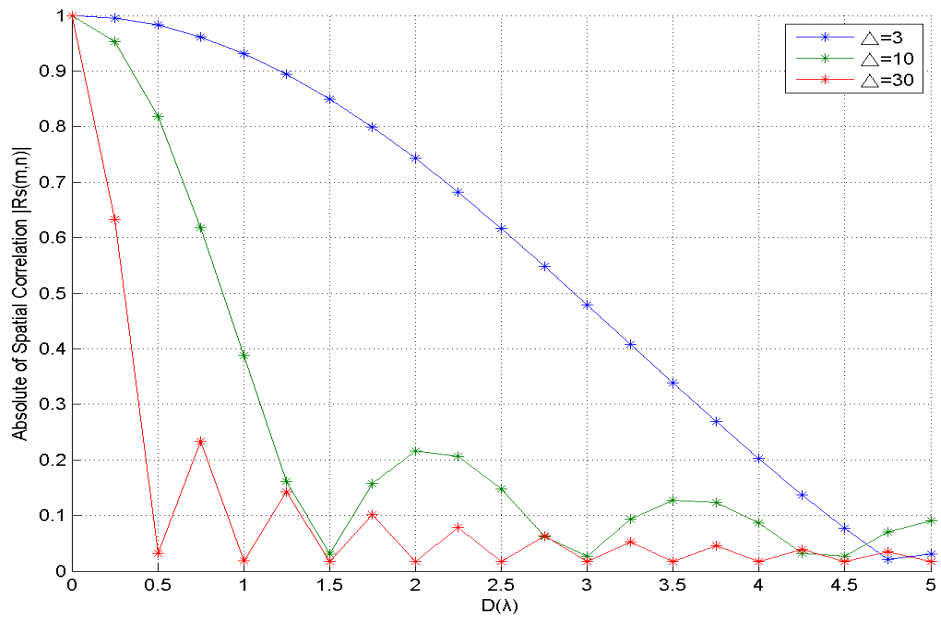


圖 2-14 Spatial Correlation between element 1 and 4 with Uniform distribution at

$MAOA = 80^\circ$ and $\varphi_0 = 90^\circ$ for ULA

B. 均勻圓形陣列(Uniform Circular Array, UCA)

均勻圓形陣列為繼均勻線性陣列之後另一種常用之陣列幾何結構，其天線擺放於一圓周上，並且相鄰之天線間距皆相同。在此假設有四天線位於 X 軸上，並另圓周之半徑為 D ，如圖 2-15 所示。

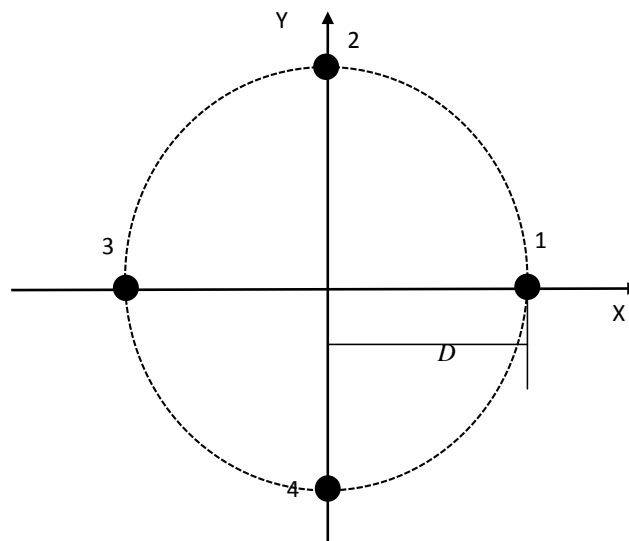


圖 2-15 四元件均勻圓形陣列結構

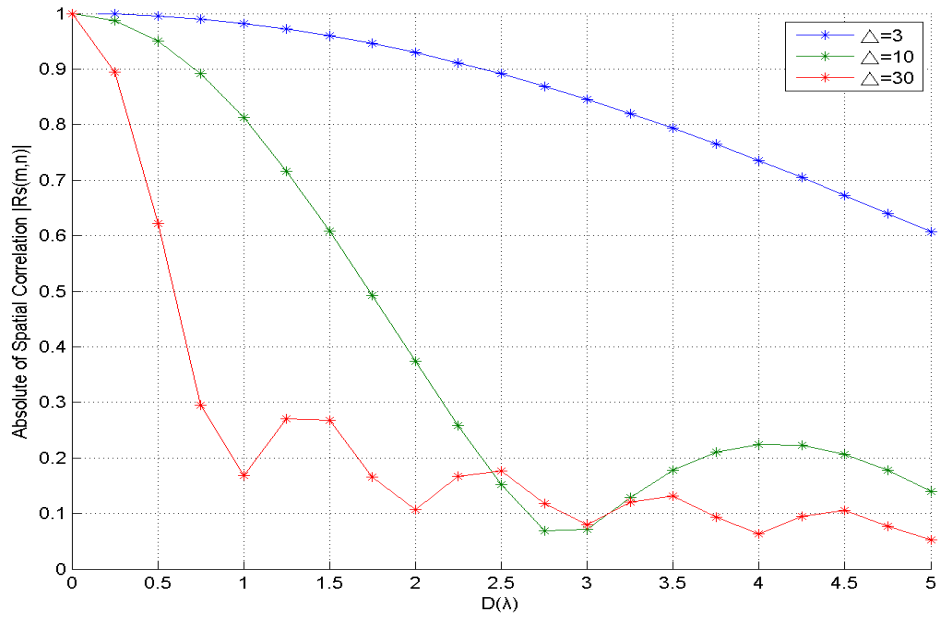


圖 2-16 Spatial Correlation between element 1 and 2 with Uniform distribution at
 $MAOA = 0^\circ$ and $\varphi_0 = 90^\circ$ for UCA

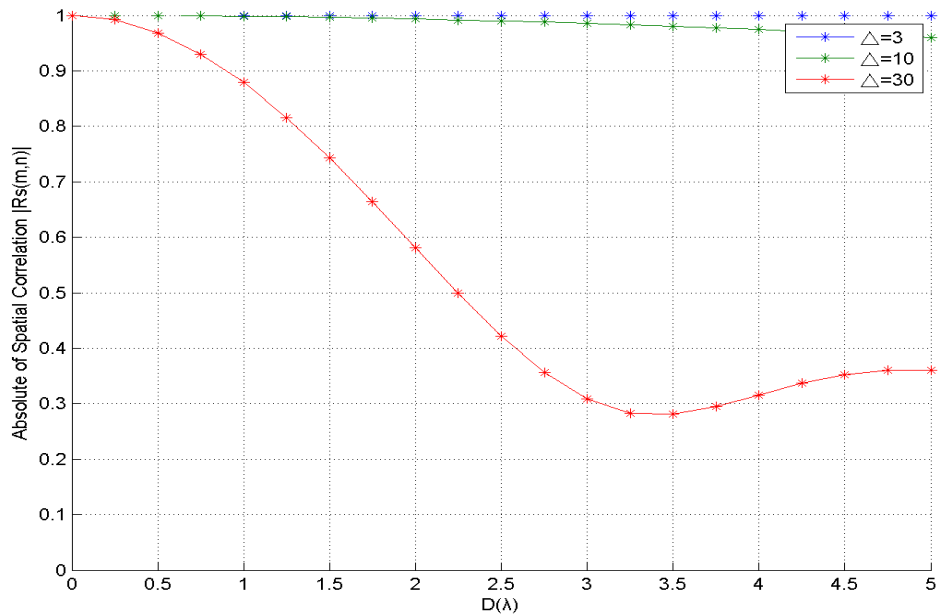


圖 2-17 Spatial Correlation between element 1 and 3 with Uniform distribution at
 $MAOA = 0^\circ$ and $\varphi_0 = 90^\circ$ for UCA

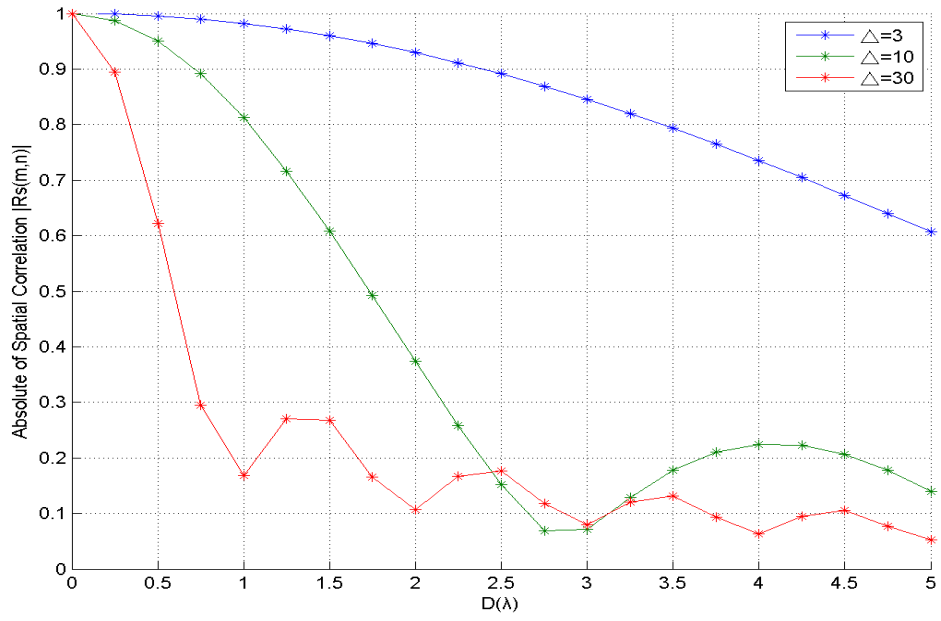


圖 2-18 Spatial Correlation between element 1 and 4 with Uniform distribution at
MAOA = 0° and $\varphi_0 = 90^\circ$ for UCA

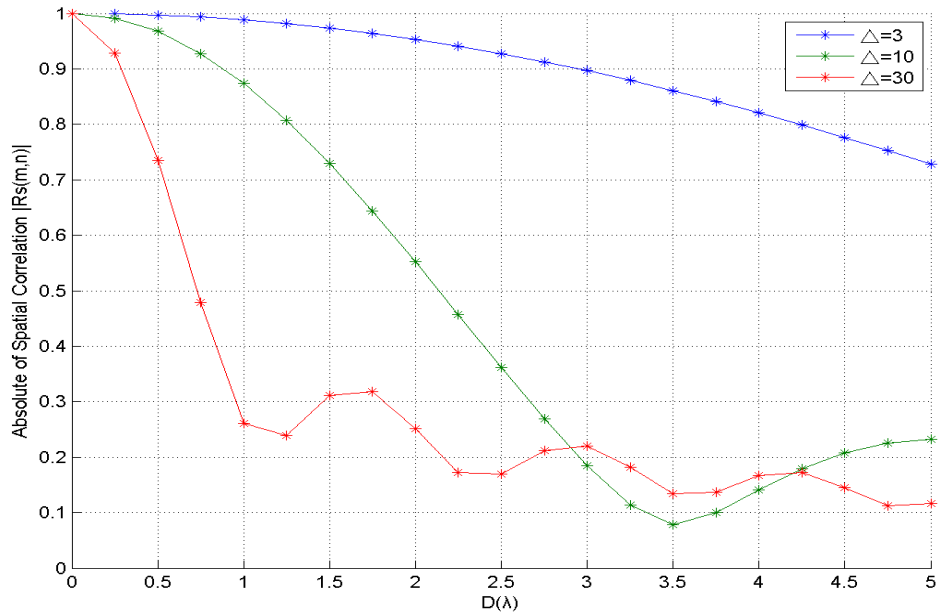


圖 2-19 Spatial Correlation between element 1 and 2 with Uniform distribution at
MAOA = 80° and $\varphi_0 = 90^\circ$ for UCA

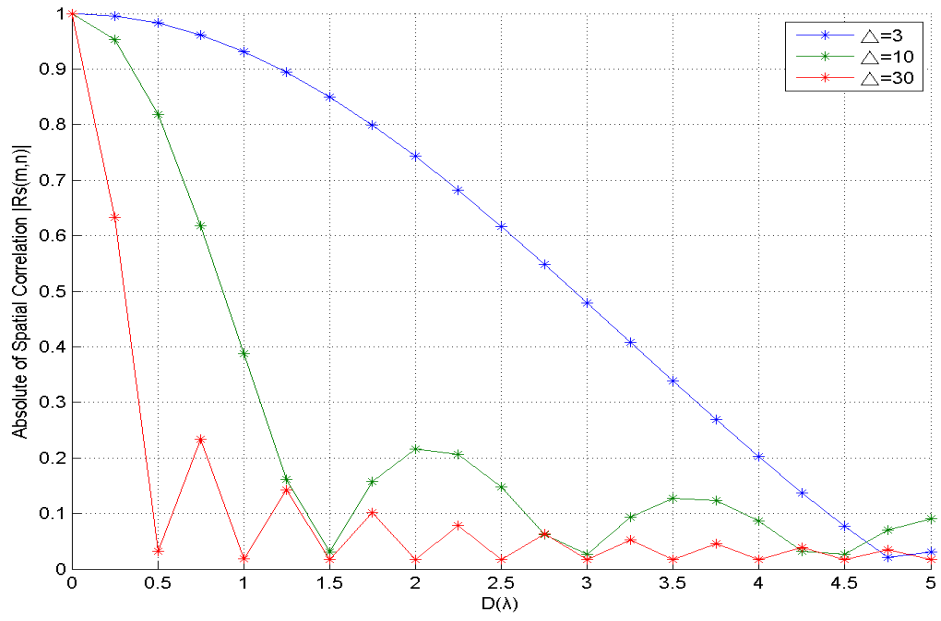


圖 2-20 Spatial Correlation between element 1 and 3 with Uniform distribution at
MAOA = 80° and $\varphi_0 = 90^\circ$ for UCA

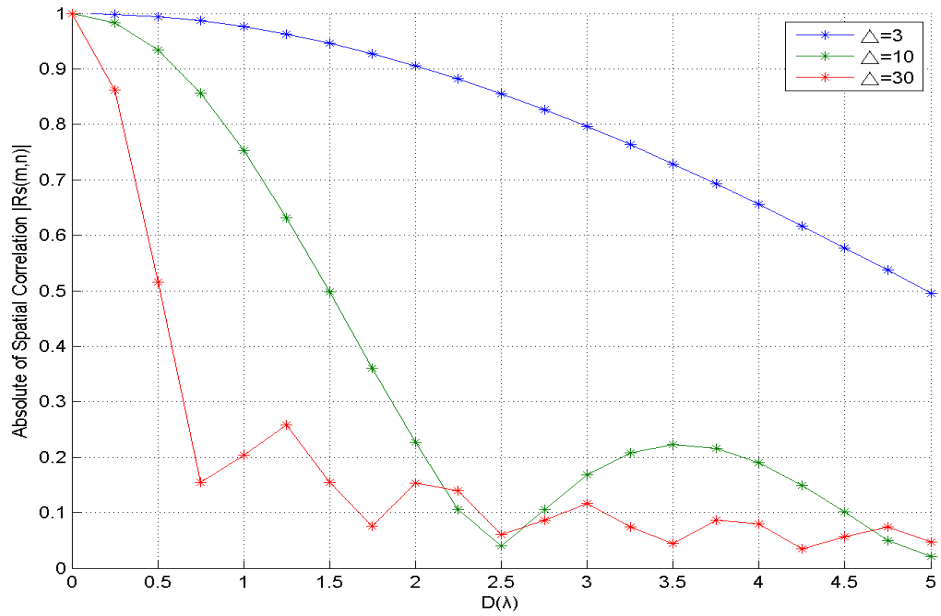


圖 2-21 Spatial Correlation between element 1 and 4 with Uniform distribution at
MAOA = 80° and $\varphi_0 = 90^\circ$ for UCA

C. 同心圓陣列（形式一）（Concentric Ring Array (type 1), CRA1)

同心圓陣列，其天線擺放於數個不同半徑之圓周上。在此假設有四天線，天線平均分配於兩個不同半徑之內外圓周上，並另外圈半徑為 D ，內圈半徑為外圈半徑之一半，而形式一為內外圈天線擺放之方位角相等，如圖 2-22 所示。

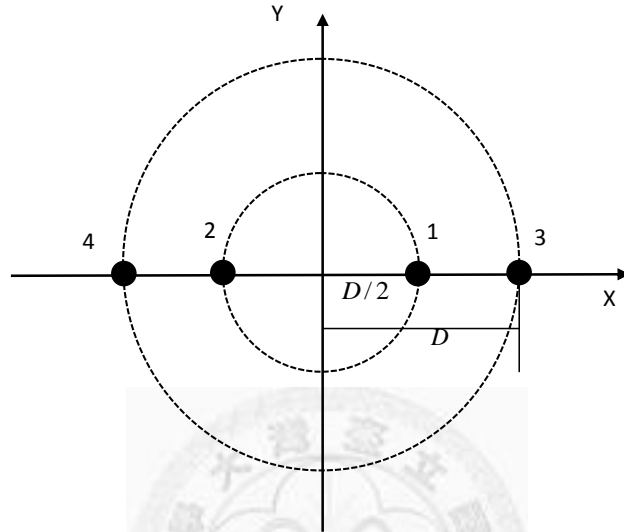


圖 2-22 四元件同心圓陣列（形式一）結構

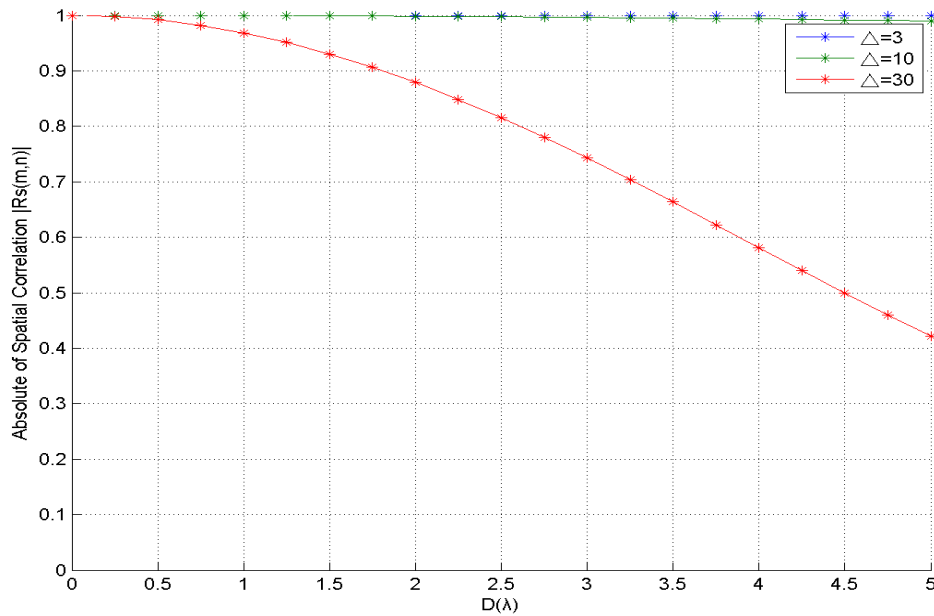


圖 2-23 Spatial Correlation between element 1 and 2 with Uniform distribution at

$$\text{MAOA} = 0^\circ \text{ and } \varphi_0 = 90^\circ \text{ for CRA1}$$

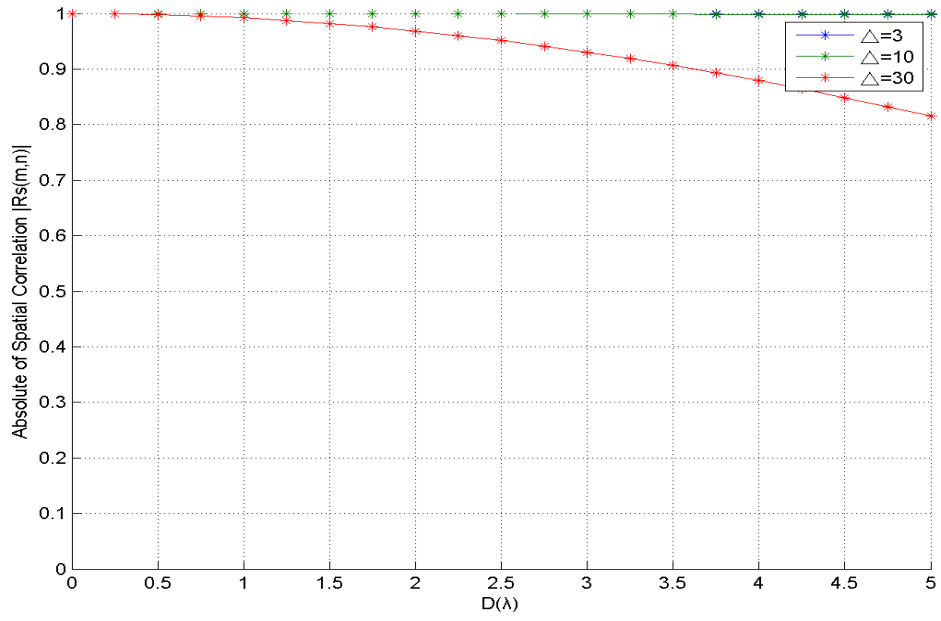


圖 2-24 Spatial Correlation between element 1 and 3 with Uniform distribution at
MAOA = 0° and $\varphi_0 = 90^\circ$ for CRA1

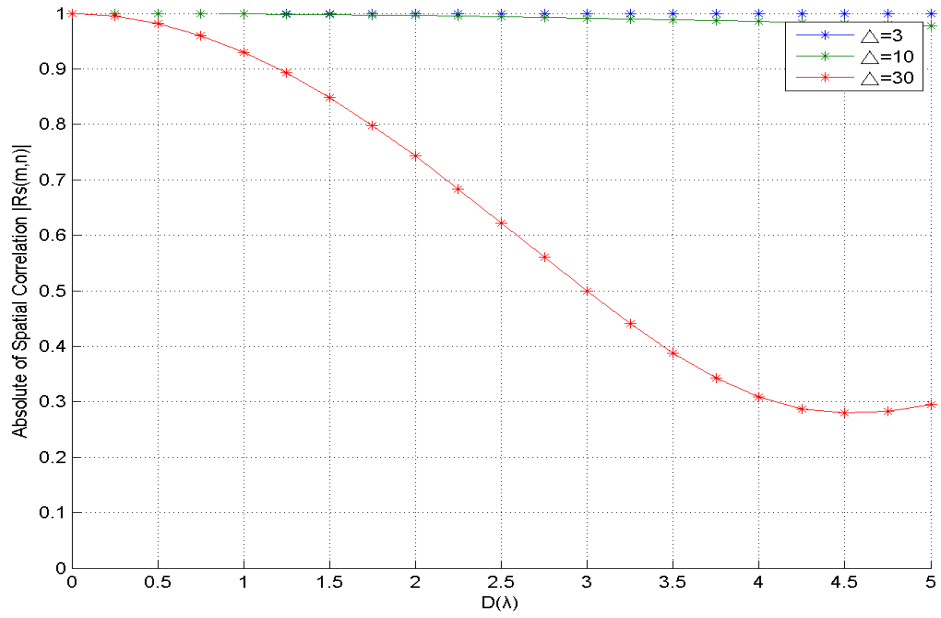


圖 2-25 Spatial Correlation between element 1 and 4 with Uniform distribution at
MAOA = 0° and $\varphi_0 = 90^\circ$ for CRA1

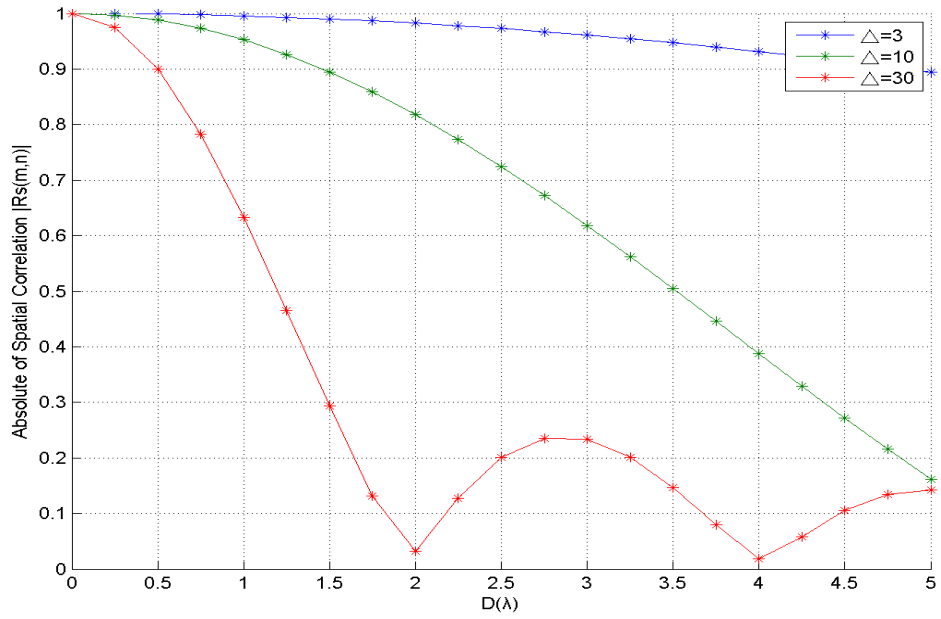


圖 2-26 Spatial Correlation between element 1 and 2 with Uniform distribution at
 $MAOA = 80^\circ$ and $\varphi_0 = 90^\circ$ for CRA1

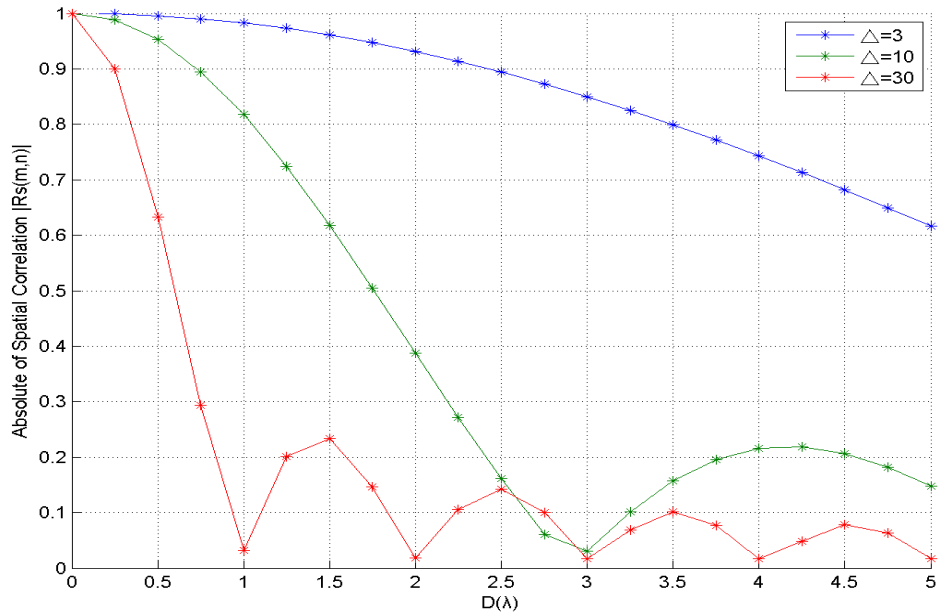


圖 2-27 Spatial Correlation between element 1 and 3 with Uniform distribution at
 $MAOA = 80^\circ$ and $\varphi_0 = 90^\circ$ for CRA1

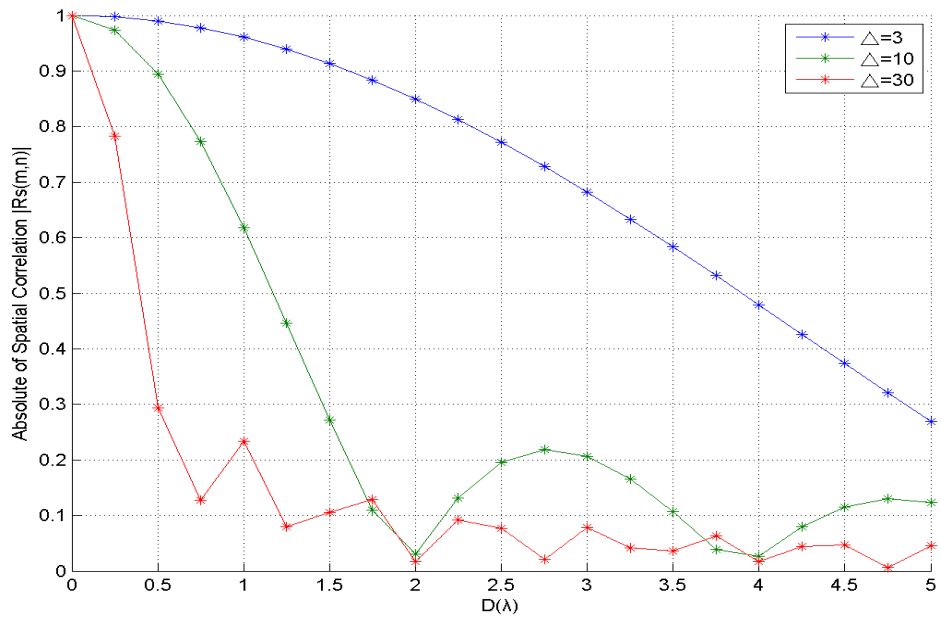


圖 2-28 Spatial Correlation between element 1 and 4 with Uniform distribution at

$MAOA = 80^\circ$ and $\varphi_0 = 90^\circ$ for CRA1

D. 同心圓陣列（形式二）（Concentric Ring Array (type 2), CRA1)

同心圓陣列，其天線擺放於數個不同半徑之圓周上。在此假設有四天線，平均分配於兩個不同半徑之內外圓周上，並另外圈半徑為 D ，內圈半徑為外圈半徑之一半，而形式二為內外圈天線擺放之方位角交錯，如圖 2-29 所示。

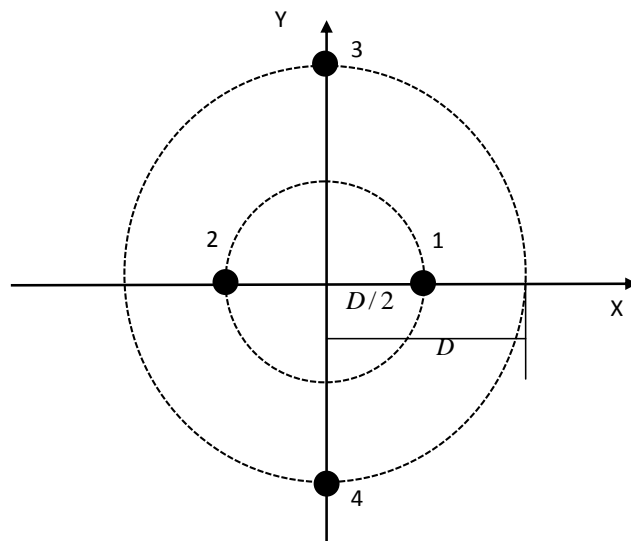


圖 2-29 四元件同心圓陣列（形式二）結構

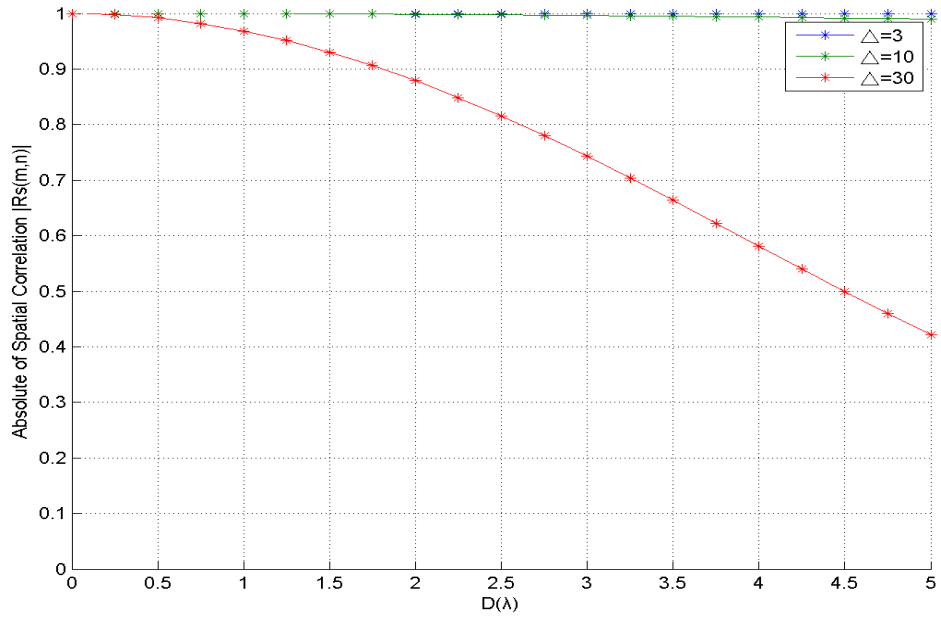


圖 2-30 Spatial Correlation between element 1 and 2 with Uniform distribution at
 $MAOA = 0^\circ$ and $\varphi_0 = 90^\circ$ for CRA2

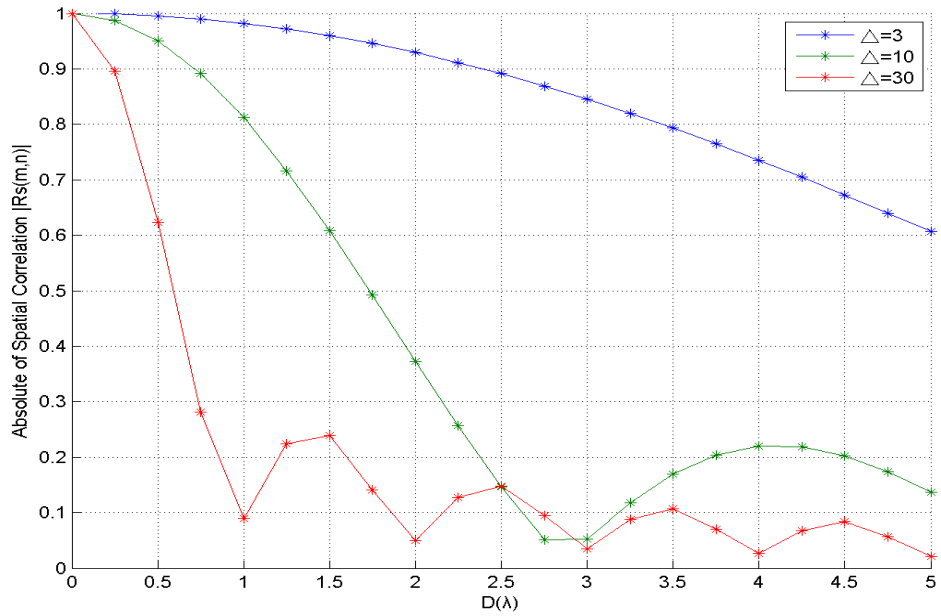


圖 2-31 Spatial Correlation between element 1 and 3 with Uniform distribution at
 $MAOA = 0^\circ$ and $\varphi_0 = 90^\circ$ for CRA2

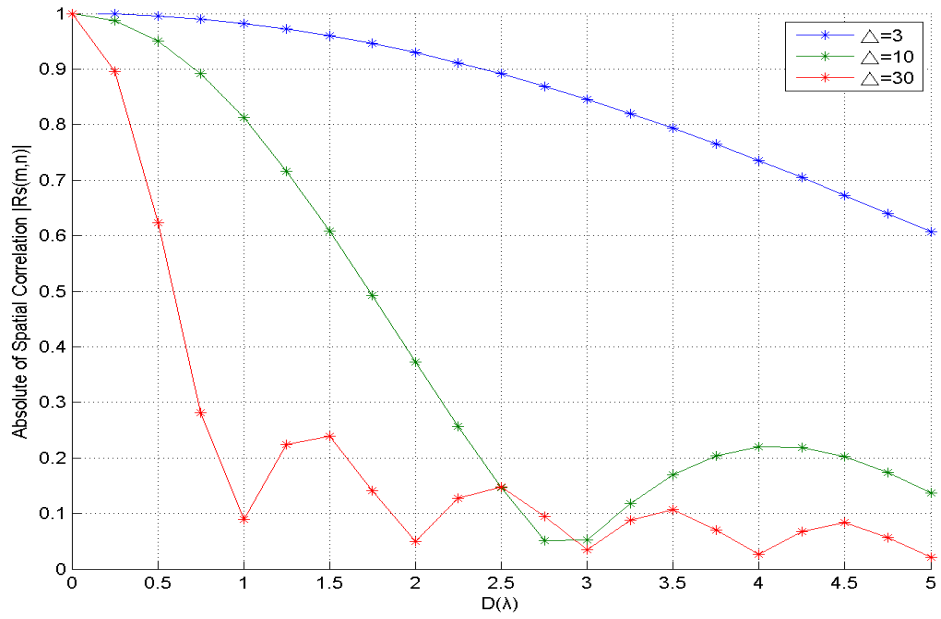


圖 2-32 Spatial Correlation between element 1 and 4 with Uniform distribution at
MAOA = 0° and $\varphi_0 = 90^\circ$ for CRA2

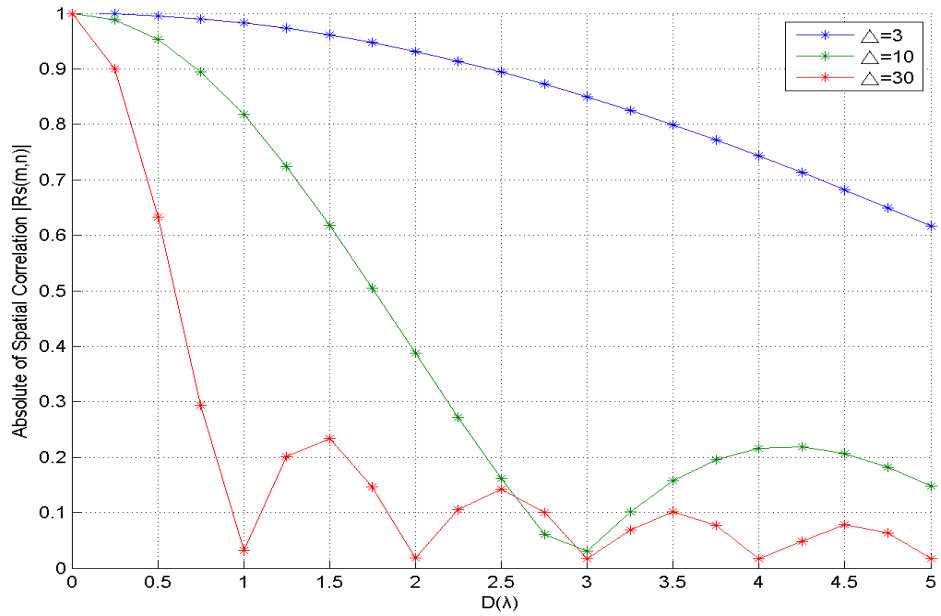


圖 2-33 Spatial Correlation between element 1 and 2 with Uniform distribution at
MAOA = 80° and $\varphi_0 = 90^\circ$ for CRA2

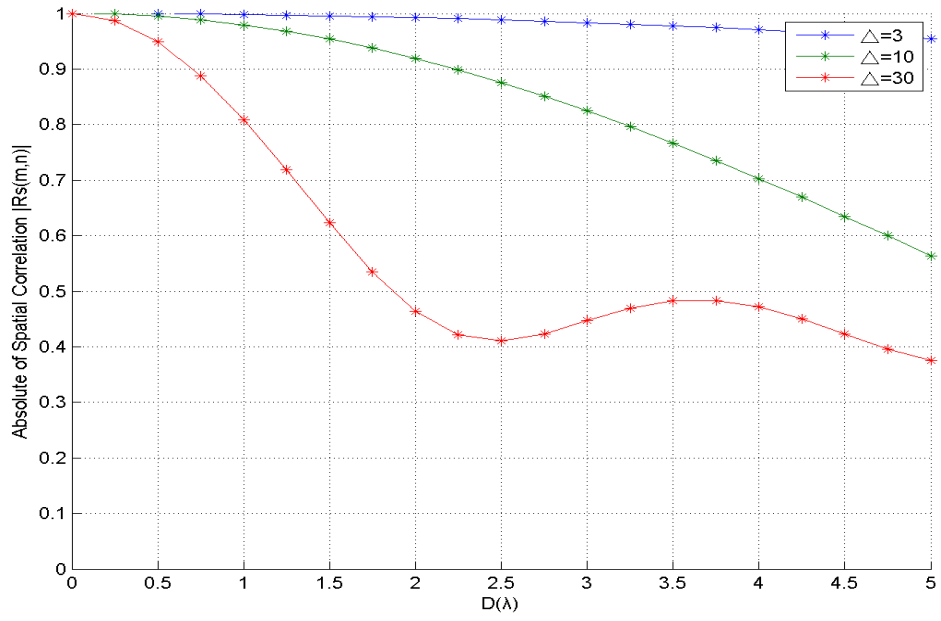


圖 2-34 Spatial Correlation between element 1 and 3 with Uniform distribution at
MAOA = 80° and $\varphi_0 = 90^\circ$ for CRA2

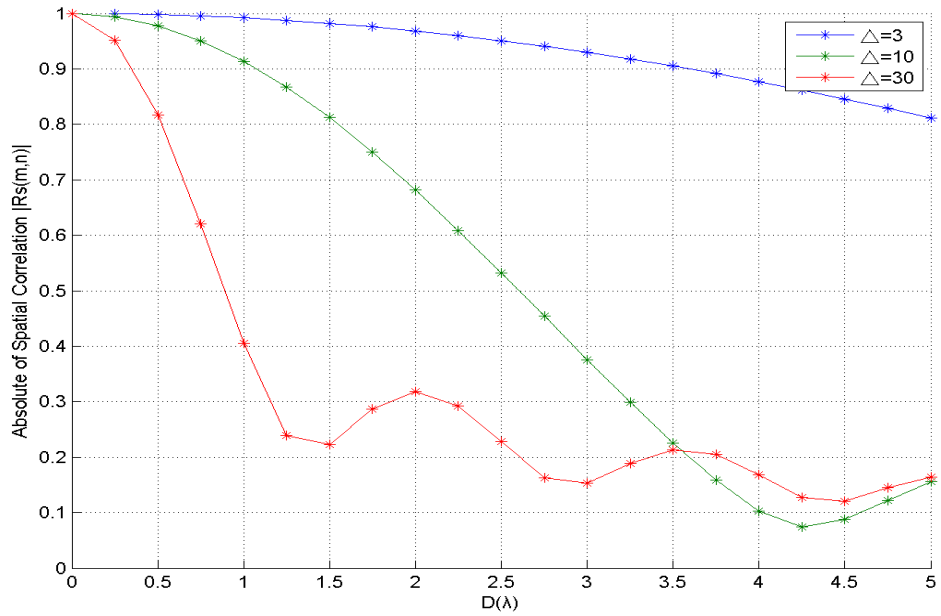


圖 2-35 Spatial Correlation between element 1 and 4 with Uniform distribution at
MAOA = 80° and $\varphi_0 = 90^\circ$ for CRA2

因為空間相關性受上述之五個因素影響，所以不同形狀之陣列其空間特性也就不相同，以 ULA 為例，其天線皆位於同一直線上，因此空間相關性會同時受到 MAOA 改變而變大變小，因此由圖 2-9～圖 2-11 可以發現 ULA 在 MAOA 為 0 度時，其空間相關性下降速度很慢，反之由圖 2-12～圖 2-14 可以看出在 MAOA 為 80 度時，其空間相關性會隨著 D 上升而很快地下降，因此在過去的研究中也說明了 ULA 對 MAOA 的改變十分敏感，若 MAOA 正對著 ULA 之寬邊方向(broadside orientation)則其效能會很好，反之在端射方向(end-fire orientation)則會很差。UCA 兩兩連線與 MAOA 的夾角皆不同，因此從圖 2-16～圖 2-21 的模擬中可以發現，UCA 對於不同之 MAOA 並不會產生兩兩天線間空間相關性都很高的情況，因此在過去的研究中也說明了 UCA 相對於 ULA，其對 MAOA 的改變較不敏感。而 CRA1 在此四天線的幾何結構中較相似於 ULA，其天線皆在同一直線上，因此其空間相關性的表現也與 ULA 類似，對 MAOA 的改變敏感。而 CRA2 則較接近於 UCA，因此其空間相關性的表現也與 UCA 類似。

2.4 三維空間相關性公式

2.4.1 公式推導

參考[8, 10]同樣由空間相關性的定義開始，在此對於入射角度擴散機率密度函數 $f(\varphi, \xi)$ 假設除了有水平方向之擴散外，還有垂直方向之擴散。假設垂直入射 (Elevation of Arrival, EOA) 信號角度機率密度函數，分布於 $\theta_\varphi - \Delta_\varphi \leq \varphi \leq \theta_\varphi + \Delta_\varphi$ ， θ_φ 為垂直入射平均值 (Mean EOA)， Δ_φ 為垂直擴散 (Elevation Spread, ES)；而水平入射 (Azimuth of Arrival, AOA) 信號角度機率密度函數同樣為均勻分佈，分佈於 $\theta_\xi - \Delta_\xi \leq \xi \leq \theta_\xi + \Delta_\xi$ ， θ_ξ 為水平入射平均值 (Mean AOA)， Δ_ξ 為水平擴散 (Azimuth Spread, AS)。陣列中第 m 個元件以及第 n 個元件依(2.4)之定義可表示為

$$\mathbf{R}_s(m, n) = \int_{\varphi} \int_{\xi} v_m(\varphi, \xi) v_n^\dagger(\varphi, \xi) f(\varphi, \xi) \sin(\varphi) d\xi d\varphi \quad (2.13)$$

並且假設垂直入射角度與水平入射角度互相獨立，因此機率密度函數

$$f(\varphi, \xi) = \frac{1}{4\Delta_\xi \sin(\theta_\varphi) \sin(\Delta_\varphi)} \quad (2.14)$$

因其為一常數，且令 $C = \frac{1}{4\Delta_\xi \sin(\theta_\varphi) \sin(\Delta_\varphi)}$ ，則(2.13)可改寫為

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_s(m, n) &= C \int_{\theta_\varphi - \Delta_\varphi}^{\theta_\varphi + \Delta_\varphi} \int_{\theta_\xi - \Delta_\xi}^{\theta_\xi + \Delta_\xi} e^{-i2\pi(\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{k}(\varphi, \xi))} e^{i2\pi(\mathbf{r}_n \cdot \mathbf{k}(\varphi, \xi))} \sin(\varphi) d\xi d\varphi \\ &= C \int_{\theta_\varphi - \Delta_\varphi}^{\theta_\varphi + \Delta_\varphi} \int_{\theta_\xi - \Delta_\xi}^{\theta_\xi + \Delta_\xi} e^{i2\pi r_{m,n} (\sin(\beta_{m,n}) \cos(\alpha_{m,n}) \sin(\varphi) \cos(\xi) + \sin(\beta_{m,n}) \sin(\alpha_{m,n}) \sin(\varphi) \sin(\xi) + \cos(\beta_{m,n}) \cos(\varphi))} \sin(\varphi) d\xi d\varphi \\ &= C \int_{\theta_\varphi - \Delta_\varphi}^{\theta_\varphi + \Delta_\varphi} e^{i2\pi r_{m,n} \cos(\beta_{m,n}) \cos(\varphi)} \sin(\varphi) \int_{\theta_\xi - \Delta_\xi}^{\theta_\xi + \Delta_\xi} e^{i2\pi r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \sin(\varphi) \cos(\xi - \alpha_{m,n})} d\xi d\varphi \end{aligned} \quad (2.15)$$

同樣令 $\tilde{\xi} = \xi - \alpha_{m,n}$ ，代入(2.15)

$$\mathbf{R}_s(m, n) = C \int_{\theta_\varphi - \Delta_\varphi}^{\theta_\varphi + \Delta_\varphi} e^{i2\pi r_{m,n} \cos(\beta_{m,n}) \cos(\varphi)} \sin(\varphi) \int_{\theta_\xi - \Delta_\xi - \alpha_{m,n}}^{\theta_\xi + \Delta_\xi - \alpha_{m,n}} e^{i2\pi r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \sin(\varphi) \cos(\tilde{\xi})} d\tilde{\xi} d\varphi \quad (2.16)$$

接下來有兩種方法可以計算之。

方法一：

依據泰勒展開式(Taylor series)

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (2.17)$$

將(2.17)代入(2.16)可將之改寫為

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_s(m, n) &= C \int_{\theta_\varphi - \Delta_\varphi}^{\theta_\varphi + \Delta_\varphi} e^{i2\pi r_{m,n} \cos(\beta_{m,n}) \cos(\varphi)} \sin(\varphi) \int_{\theta_\xi - \Delta_\xi - \alpha_{m,n}}^{\theta_\xi + \Delta_\xi - \alpha_{m,n}} e^{i2\pi r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \sin(\varphi) \cos(\tilde{\xi})} d\tilde{\xi} d\varphi \\ &= C \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{a=0}^{\infty} \frac{(i2\pi r_{m,n})^{a+b}}{a!b!} \cos^a(\beta_{m,n}) \sin^b(\beta_{m,n}) \\ &\quad \times \int_{\theta_\varphi - \Delta_\varphi}^{\theta_\varphi + \Delta_\varphi} \cos^a(\varphi) \sin^{b+1}(\varphi) d\varphi \int_{\theta_\xi - \Delta_\xi - \alpha_{m,n}}^{\theta_\xi + \Delta_\xi - \alpha_{m,n}} \cos^b(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} \end{aligned} \quad (2.18)$$

其中的積分項可利用[19]的 Eq. (2.512), (2.513)

$$\begin{aligned} \int \cos^p(x) \sin^{2n}(x) dx &= -\frac{\cos^{p+1}(x)}{2n+p} \left\{ \sin^{2n-1}(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2k+1) \sin^{2n-2k-1}(x)}{(2n+p-2)(2n+p-4)\cdots(2n+p-2k)} \right\} \\ &\quad + \frac{(2n-1)!!}{(2n+p)(2n+p-2)\cdots(p+2)} \int \cos^p(x) dx \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \int \cos^p(x) \sin^{2n+1}(x) dx &= -\frac{\cos^{p+1}(x)}{2n+p+1} \left\{ \sin^{2n}(x) + \sum_{k=1}^n \frac{2^k n(n-1)\cdots(n-k+1) \sin^{2n-2k}(x)}{(2n+p-1)(2n+p-3)\cdots(2n+p-2k+1)} \right\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\int \cos^{2n}(x) dx = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \frac{\sin(2n-2k)x}{(2n-2k)} \quad (2.21)$$

$$\int \cos^{2n+1}(x) dx = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n+1}{k} \frac{\sin(2n-2k+1)x}{(2n-2k+1)} \quad (2.22)$$

將(2.19)(2.20)(2.21)(2.22)代入(2.18)中，最後便可得到空間相關性公式。

方法二[9]：

將(2.7)代入(2.16)中第二個積分式中，可將之改寫為

$$\begin{aligned}
& \int_{\theta_\xi - \Delta_\xi - \alpha_{m,n}}^{\theta_\xi + \Delta_\xi - \alpha_{m,n}} e^{i2\pi r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \sin(\varphi) \cos(\tilde{\xi})} d\tilde{\xi} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^k J_k(2\pi r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \sin(\varphi)) \frac{2}{k} \sin(k\Delta_\xi) e^{k(\theta_\xi - \alpha_{m,n})} \\
&= 2\Delta_\xi J_0(2\pi r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \sin(\varphi)) \\
&+ 4 \sum_{k=1}^{\infty} i^k J_k(2\pi r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \sin(\varphi)) \frac{\sin(k\Delta_\xi)}{k} \cos(k(\theta_\xi - \alpha_{m,n})) \quad (2.23)
\end{aligned}$$

將(2.23)代回(2.16)

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_s(m, n) &= C \int_{\theta_\varphi - \Delta_\varphi}^{\theta_\varphi + \Delta_\varphi} e^{i2\pi r_{m,n} \cos(\beta_{m,n}) \cos(\varphi)} \sin(\varphi) \int_{\theta_\xi - \Delta_\xi - \alpha_{m,n}}^{\theta_\xi + \Delta_\xi - \alpha_{m,n}} e^{i2\pi r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \sin(\varphi) \cos(\tilde{\xi})} d\tilde{\xi} d\varphi \\
&= C \int_{\theta_\varphi - \Delta_\varphi}^{\theta_\varphi + \Delta_\varphi} e^{i2\pi r_{m,n} \cos(\beta_{m,n}) \cos(\varphi)} \sin(\varphi) \left[\begin{aligned} & 2\Delta_\xi J_0(2\pi r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \sin(\varphi)) \\ & + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k} J_k(2\pi r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \sin(\varphi)) \\ & \times \cos(k(\theta_\xi - \alpha_{m,n})) \sin(k\Delta_\xi) \end{aligned} \right] d\varphi \\
&= \frac{1}{2 \sin(\theta_\varphi) \sin(\Delta_\varphi)} \int_{\theta_\varphi - \Delta_\varphi}^{\theta_\varphi + \Delta_\varphi} e^{i2\pi r_{m,n} \cos(\beta_{m,n}) \cos(\varphi)} \sin(\varphi) \times \\
& \quad J_0(2\pi r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \sin(\varphi)) d\varphi \\
&+ \frac{1}{\sin(\theta_\varphi) \sin(\Delta_\varphi)} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\begin{aligned} & i^k \cos(k(\theta_\xi - \alpha_{m,n})) \text{sinc}(k\Delta_\xi) \times \\ & \int_{\theta_\varphi - \Delta_\varphi}^{\theta_\varphi + \Delta_\varphi} e^{i2\pi r_{m,n} \cos(\beta_{m,n}) \cos(\varphi)} \sin(\varphi) \times \\ & J_k(2\pi r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \sin(\varphi)) d\varphi \end{aligned} \right] \quad (2.24)
\end{aligned}$$

最後使用梯型近似法(Trapezoidal Rule)來處理(2.24)裡面的積分：

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{N} [0.5f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{N-1}) + 0.5f(x_N)] \quad (2.25)$$

$$\text{則在此令} \begin{cases} f(x) = e^{i2\pi r_{m,n} \cos(\beta_{m,n}) \cos(x)} \sin(x) J_0(2\pi r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \sin(x)) \\ g_k(x) = e^{i2\pi r_{m,n} \cos(\beta_{m,n}) \cos(x)} \sin(x) J_k(2\pi r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \sin(x)) \end{cases} \quad (2.26)$$

最後空間相關性公式可改寫為：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_s(m, n) \approx & \frac{1}{N \sin(\theta_\varphi) \sin c(\Delta_\varphi)} [0.5f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{N-1}) + 0.5f(x_N)] \\ & + \frac{2}{N \sin(\theta_\varphi) \sin c(\Delta_\varphi)} \sum_{k=1}^{\infty} \left[i^k \cos(k(\theta_\zeta - \alpha)) \text{sinc}(k\Delta_\zeta) \right. \\ & \left. [0.5g_k(x_0) + g_k(x_1) + \cdots + g_k(x_{N-1}) + 0.5g_k(x_N)] \right] \end{aligned} \quad (2.27)$$

而在推導之三維空間相關性公式則可視為假設天線皆位於水平面(azimuth plane)上之特殊情況，因此將 $\beta_{m,n} = \frac{\pi}{2}$ 代入(2.26)及(2.27)可得

$$\begin{cases} f(x) = \sin(x) J_0(2\pi r_{m,n} \sin(x)) \\ g(x) = \sin(x) J_k(2\pi r_{m,n} \sin(x)) \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_s(m, n) \approx & \frac{1}{N \sin(\theta_\varphi) \sin c(\Delta_\varphi)} [0.5f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{N-1}) + 0.5f(x_N)] \\ & + \frac{2}{N \sin(\theta_\varphi) \sin c(\Delta_\varphi)} \sum_{k=1}^{\infty} \left[i^k \cos(k(\theta_\zeta - \alpha)) \text{sinc}(k\Delta_\zeta) \right. \\ & \left. [0.5g(x_0) + g(x_1) + \cdots + g(x_{N-1}) + 0.5g(x_N)] \right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

如此可以得到與[8]相同之三維空間相關性公式。而在以下的模擬中，使用(2.27)的結果，其中 $N = 500$ 且 k 取 $1 \leq k \leq 100$ 。

2.4.2 三維空間相關性模擬

水平方向擴散對二天線間空間相關性表現的影響在 2.3.2 節已經觀察過，並且因為三維空間相關性的公式較為複雜，因此在此首先觀察無水平方向擴散之情況下，垂直方向擴散對不同方位角以及傾斜角之二天線，其空間相關性表現的影響。令二天線間距為 1λ ，而方位角為 α ，傾斜角為 β 。

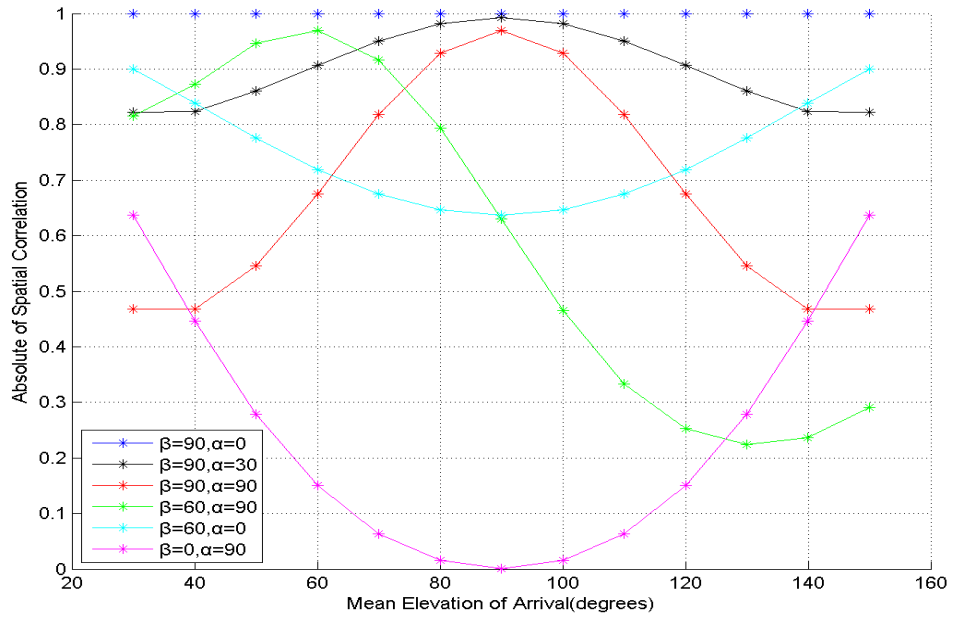


圖 2-36 Spatial Correlation for varying MEOA with Uniform distribution at

$$ES = 30^\circ \text{ and } \xi_0 = 90^\circ$$

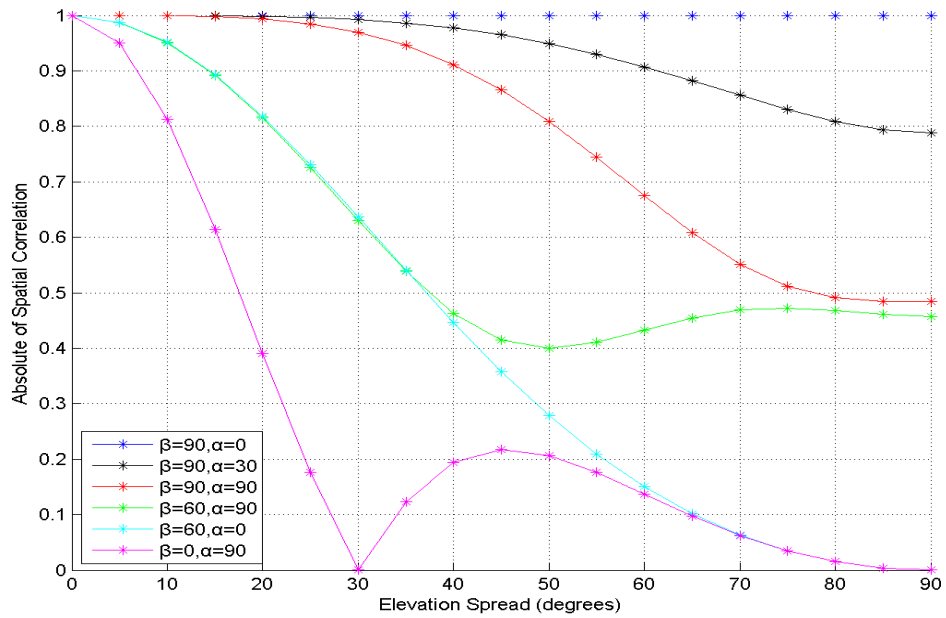


圖 2-37 Spatial Correlation for varying ES with Uniform distribution at

$$MEOA = 90^\circ \text{ and } \xi_0 = 90^\circ$$

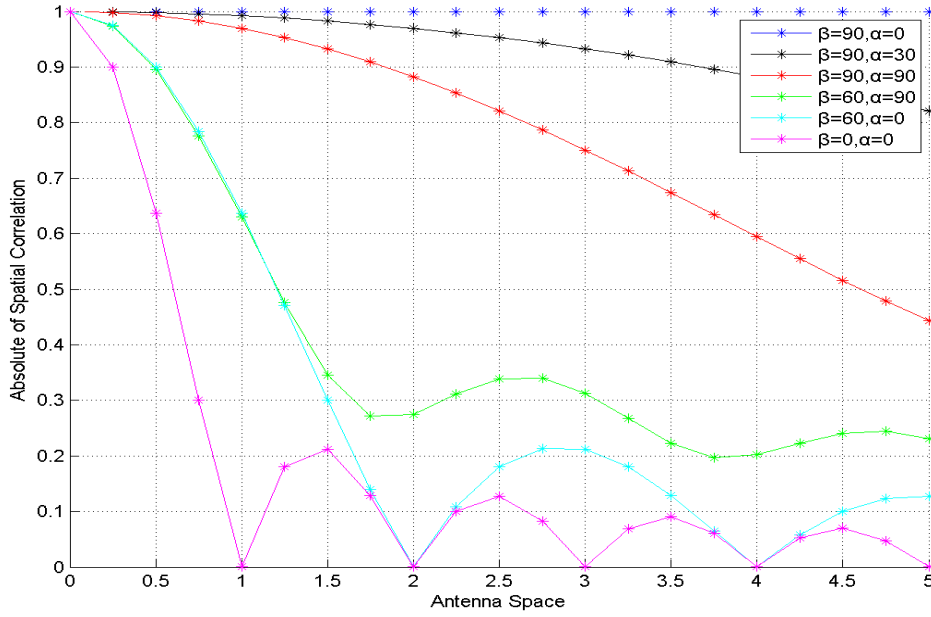


圖 2-38 Spatial Correlation for varying antenna space with Uniform distribution at

$$\text{MEOA} = 90^\circ, \text{ES} = 30^\circ \text{ and } \xi_0 = 90^\circ$$

在僅有垂直方向之擴散，並且水平入射角度為 ξ_0 之情況下，則空間相關性公式(2.16)

可表示為

$$\mathbf{R}_s(m, n) = \frac{1}{2 \sin(\theta_\varphi) \sin(\Delta_\varphi)} \int_{\theta_\varphi - \Delta_\varphi}^{\theta_\varphi + \Delta_\varphi} e^{i 2 \pi (r_{m,n} \cos(\beta_{m,n}) \cos(\varphi) + r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \sin(\varphi) \cos(\xi_0 - \alpha_{m,n}))} \sin(\varphi) d\varphi \quad (2.30)$$

並且在此令

$$\tilde{r}_{m,n} = \sqrt{[r_{m,n} \cos(\beta_{m,n})]^2 + [r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \cos(\xi_0 - \alpha_{m,n})]^2} \quad (2.31)$$

$$\tilde{\beta}_{m,n} = \arccos\left(\frac{r_{m,n} \cos(\beta_{m,n})}{\tilde{r}_{m,n}}\right) \quad (2.32)$$

則(2.30)可改寫為

$$\mathbf{R}_s(m, n) = \frac{1}{2 \sin(\theta_\varphi) \sin(\Delta_\varphi)} \int_{\theta_\varphi - \Delta_\varphi}^{\theta_\varphi + \Delta_\varphi} e^{i 2 \pi \tilde{r}_{m,n} \cos(\varphi - \tilde{\beta}_{m,n})} \sin(\varphi) d\varphi \quad (2.33)$$

到此可以發現在僅有垂直方向之擴散環境中，空間中任意二天線間空間相關性相當於天線間距為 $\tilde{r}_{m,n}$ 、方位角為 ξ_0 而傾斜角為 $\tilde{\beta}_{m,n}$ 之二天線間之空間相關性，換言之相當於將該二天線投影至方位角為 ξ_0 之平面上，因此二天線連線之水平分量在垂直於水平入射角之方向改變並不影響其空間相關性表現。MEOA 的影響大致上可從圖 2-36 看出，MEOA 在與投影後二天線連線之傾斜角垂直時空間相關性會最低，但由(2.33)之 $\sin(\theta_\varphi)$ 可以發現 MEOA 亦會影響實際擴散之大小，其在 90 度時實際上之擴散會最大，因此圖 2-36 內同樣達到最低之情況會因 MEOA 不同而不同。而 ES 的影響就較難分析，但基本上隨著 ES 上升實際之擴散依 $\sin(\Delta_\varphi)$ 之比例上升，因此由圖 2-37 可以發現趨勢上隨著 ES 上升而空間相關性下降，但與先前 AS 的影響類似，其有區域極值。而投影後天線間距的影響趨勢上隨著間距上升而空間相關性下降，並且在 MEOA 為 90 度並且 ES 為 30 度時，因(2.33)積分內 $\sin(\varphi)$ 的改變較小，因此此時垂直方向擴散的影響與水平方向擴散的影響類似，因此比較圖 2-38 與圖 2-6 可以發現有許多相似之處。

接下來考慮四種常用之天線陣列—均勻線性陣列、均勻圓形陣列以及兩種不同形式之同心圓陣列其空間相關性的表現。並且在三維擴散環境下三維天線陣列有其特殊的空間特性，因此在此亦考慮了正四面體陣列。

A. 均勻線性陣列(uniform linear array, ULA)

假設有四天線，以陣列總長之一半當作以下實驗的變化參數 D。

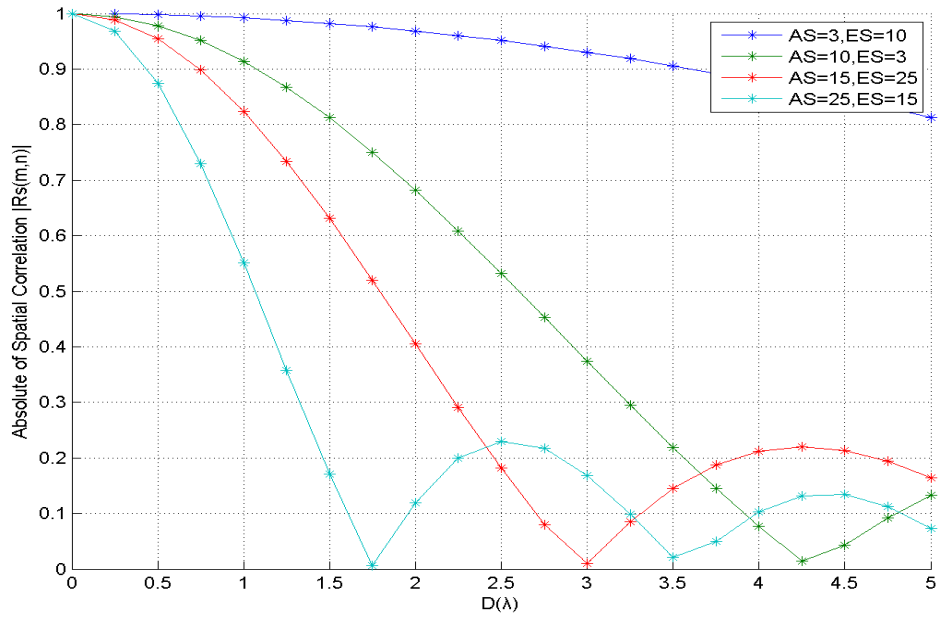


圖 2-39 Spatial Correlation between element 1 and 2 with Uniform distribution at MEOA=90° and MAOA=90° for ULA

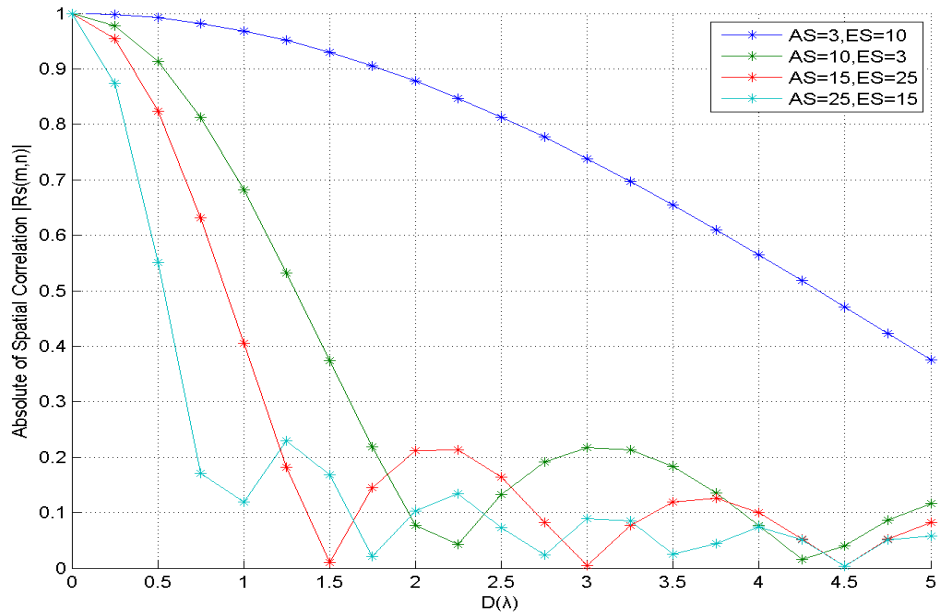


圖 2-40 Spatial Correlation between element 1 and 3 with Uniform distribution at MEOA=90° and MAOA=90° for ULA

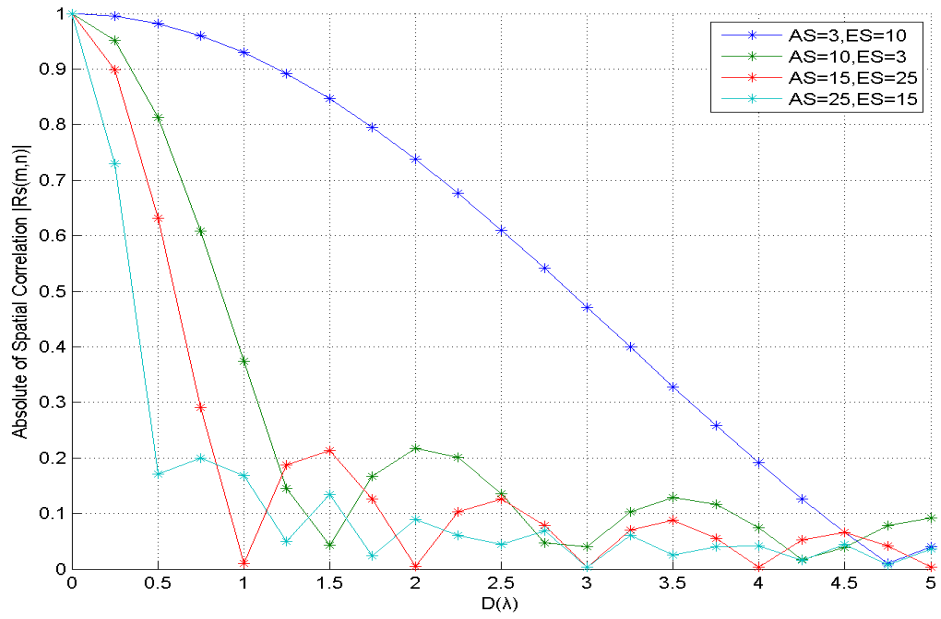


圖 2-41 Spatial Correlation between element 1 and 4 with Uniform distribution at
MEOA=90° and MAOA=90° for ULA

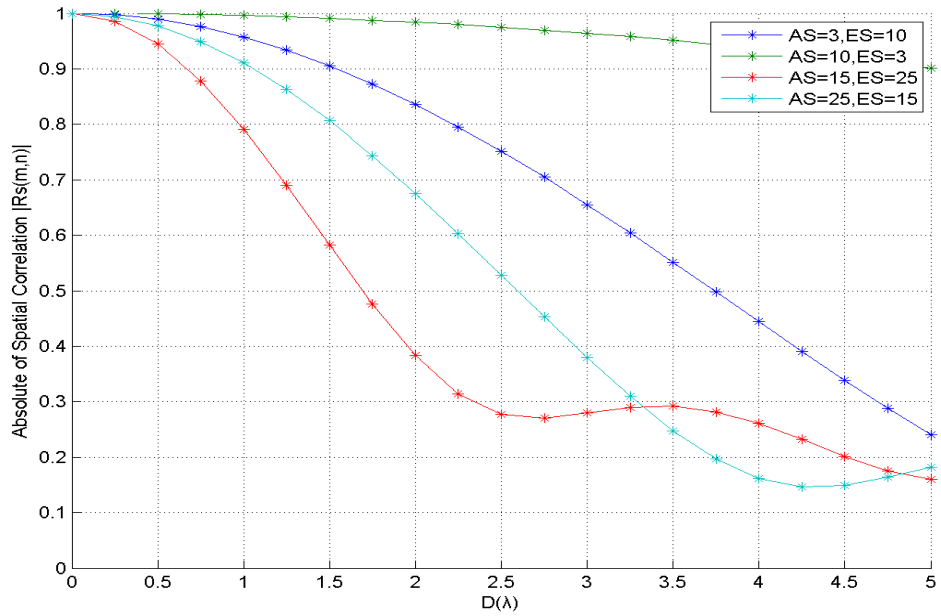


圖 2-42 Spatial Correlation between element 1 and 2 with Uniform distribution at
MEOA=45° and MAOA=0° for ULA

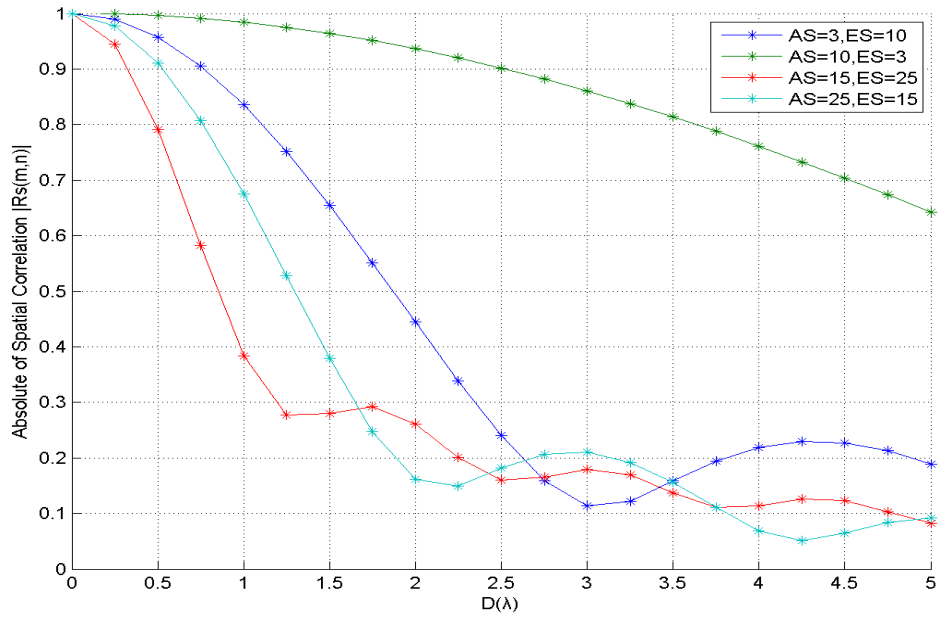


圖 2-43 Spatial Correlation between element 1 and 3 with Uniform distribution at
MEOA=45° and MAOA=0° for ULA

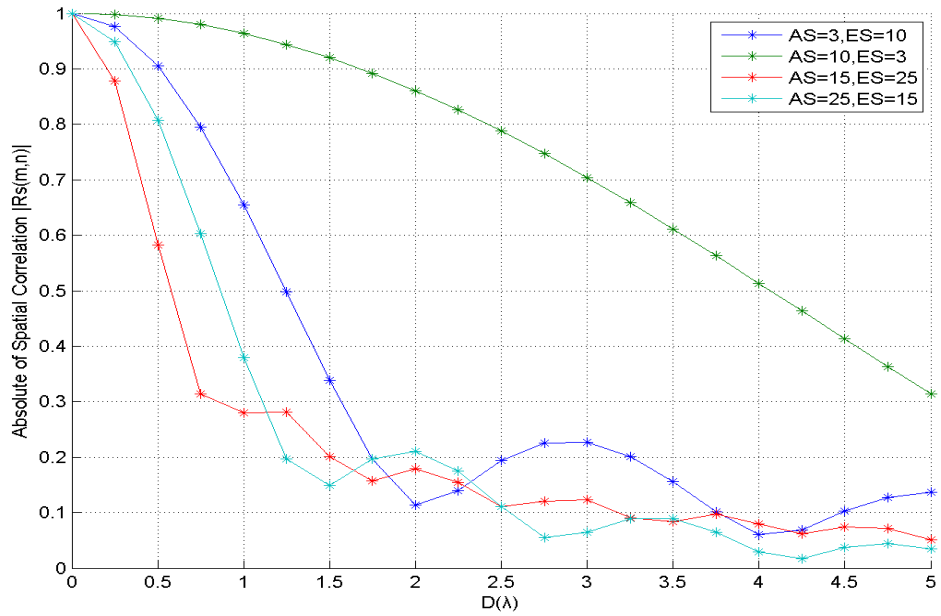


圖 2-44 Spatial Correlation between element 1 and 4 with Uniform distribution at
MEOA=45° and MAOA=0° for ULA

B. 均勻圓形陣列(Uniform Circular Array, UCA)

假設有四天線，以陣列之半徑當作以下實驗的變化參數 D 。

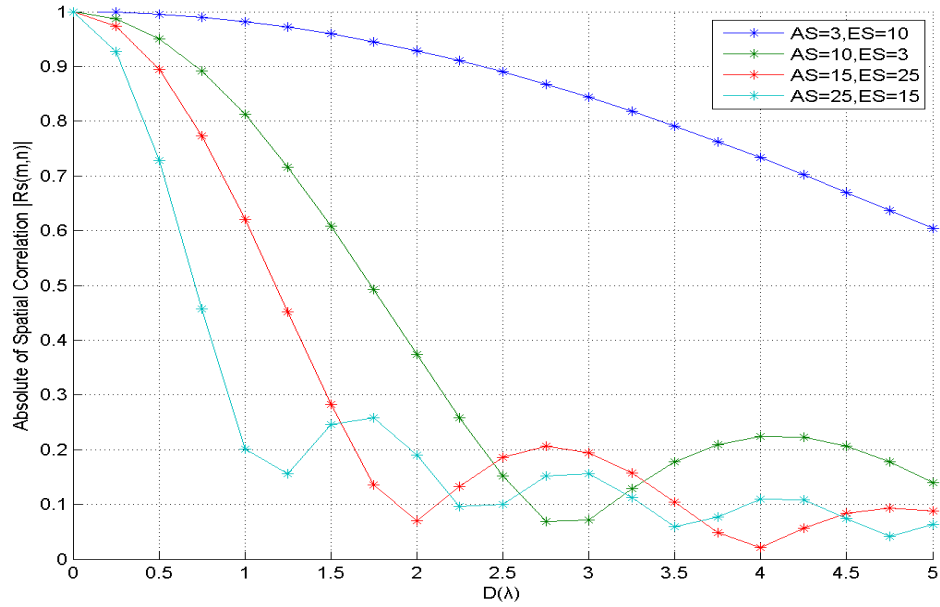


圖 2-45 Spatial Correlation between element 1 and 2 with Uniform distribution at MEOA=90° and MAOA=90° for UCA

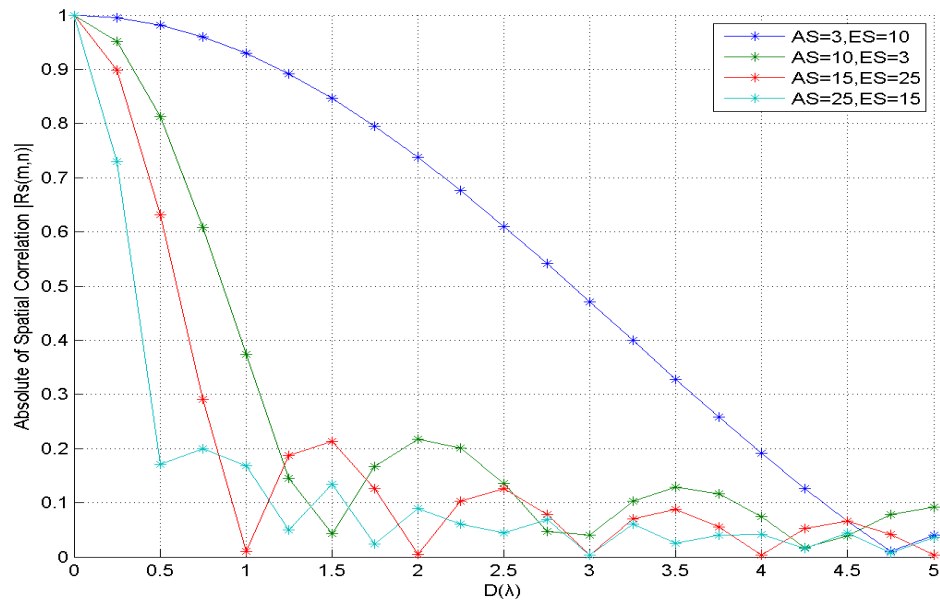


圖 2-46 Spatial Correlation between element 1 and 3 with Uniform distribution at MEOA=90° and MAOA=90° for UCA

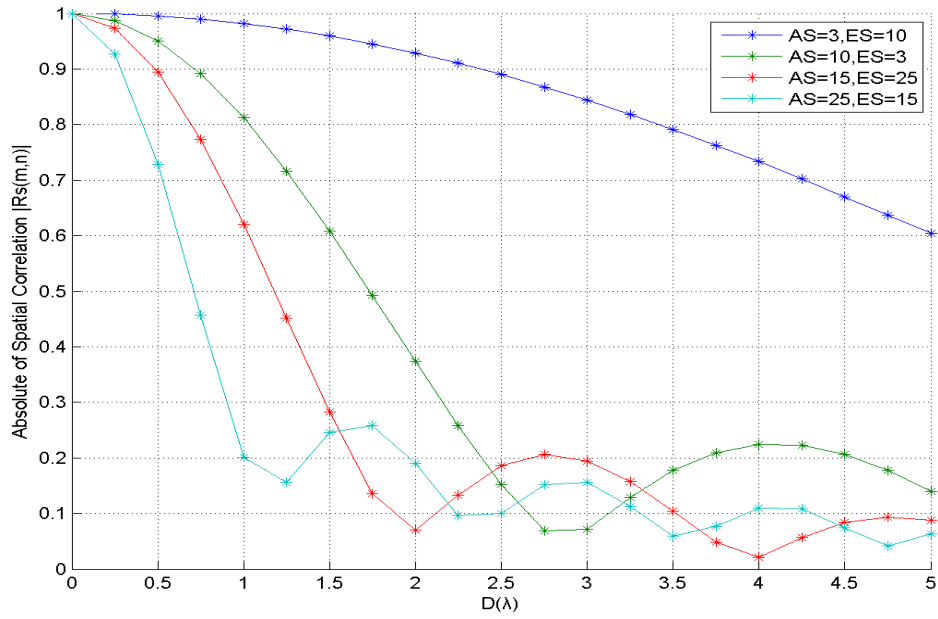


圖 2-47 Spatial Correlation between element 1 and 4 with Uniform distribution at MEOA=90° and MAOA=90° for UCA

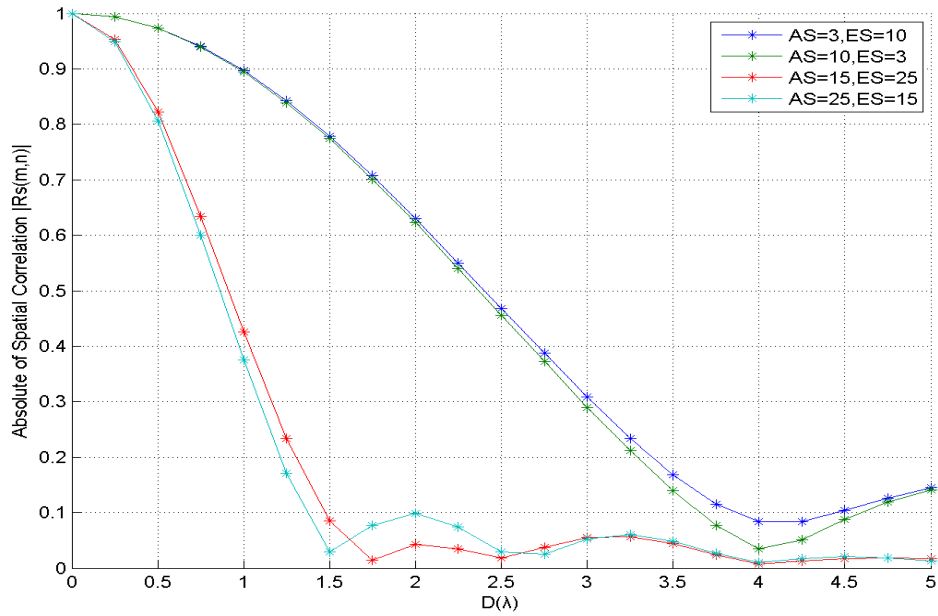


圖 2-48 Spatial Correlation between element 1 and 2 with Uniform distribution at MEOA=45° and MAOA=0° for UCA

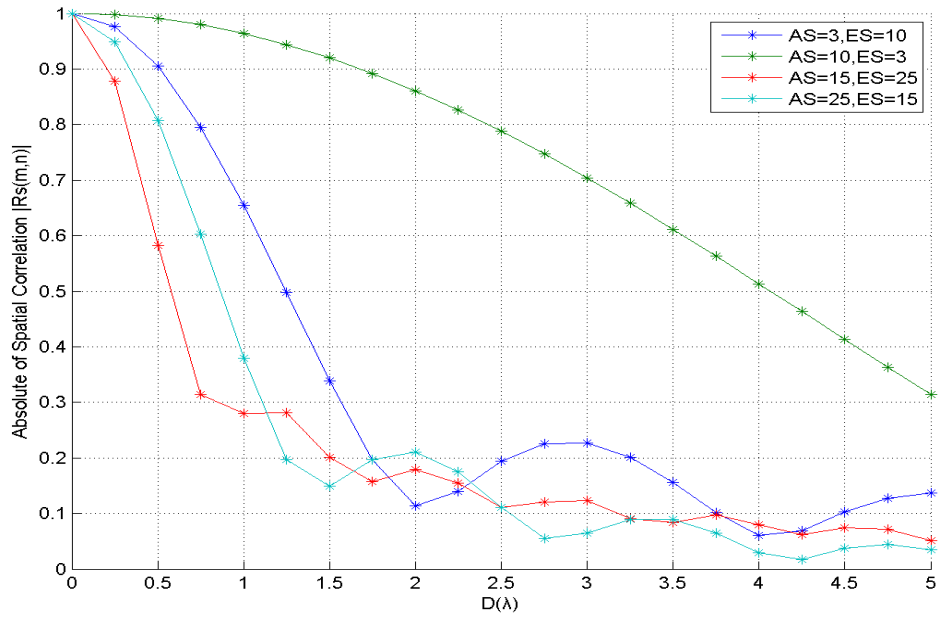


圖 2-49 Spatial Correlation between element 1 and 3 with Uniform distribution at $MEOA=45^\circ$ and $MAOA=0^\circ$ for UCA

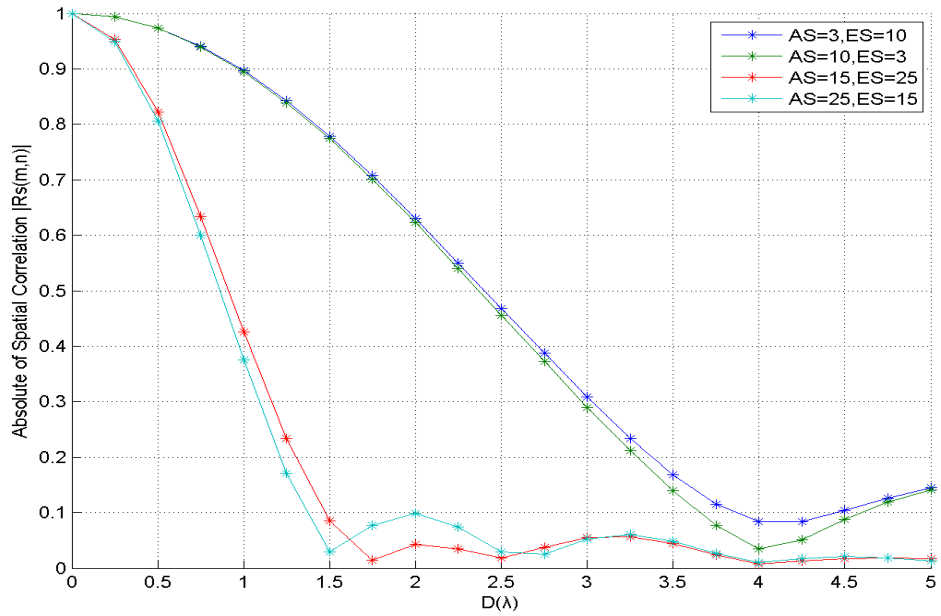


圖 2-50 Spatial Correlation between element 1 and 4 with Uniform distribution at $MEOA=45^\circ$ and $MAOA=0^\circ$ for UCA

C. 同心圓陣列（形式一） (Concentric Ring Array (type 1), CRA1)

假設有四天線，以陣列之外圈半徑當作以下實驗的變化參數 D 。

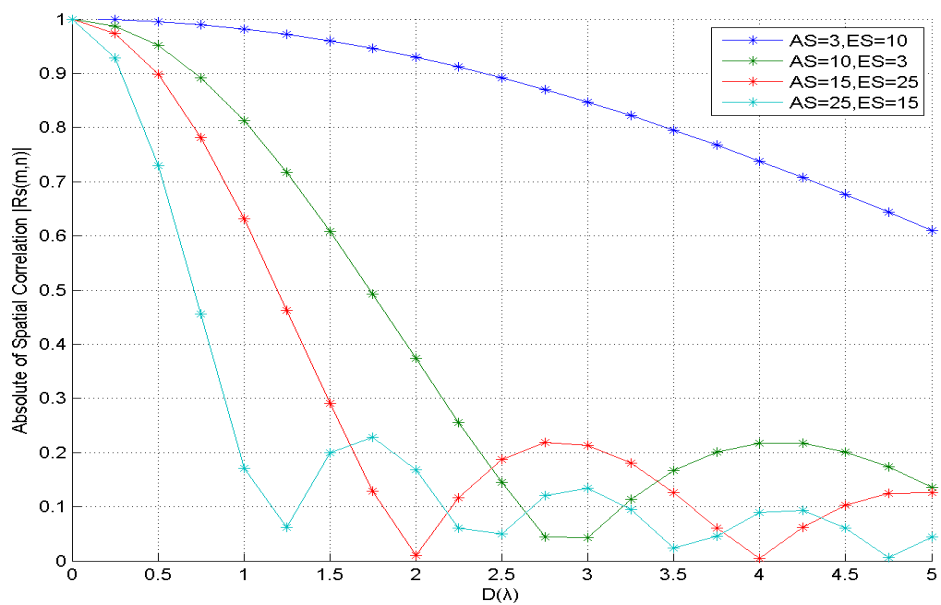


圖 2-51 Spatial Correlation between element 1 and 2 with Uniform distribution at
MEOA=90° and MAOA=90° for CRA1

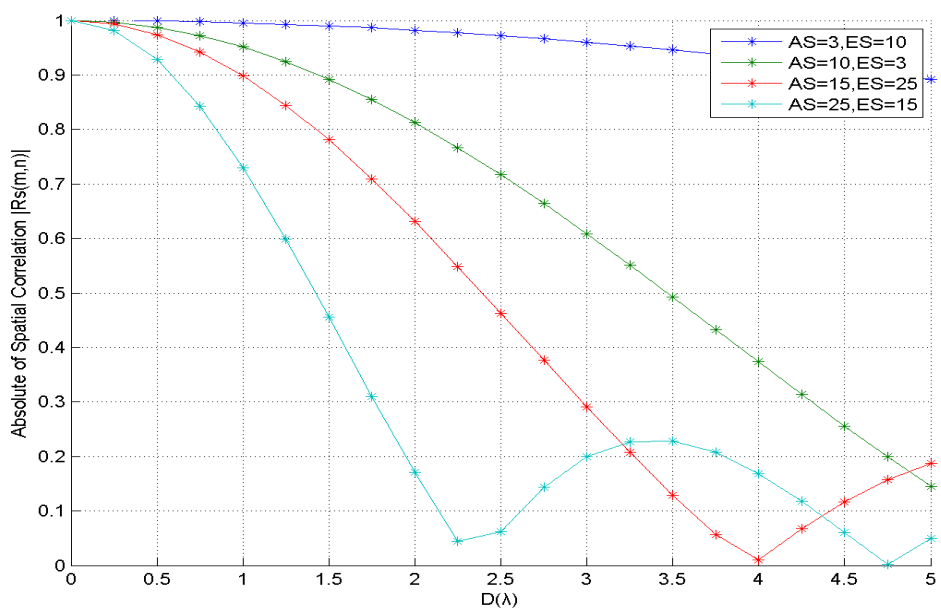


圖 2-52 Spatial Correlation between element 1 and 3 with Uniform distribution at
MEOA=90° and MAOA=90° for CRA1

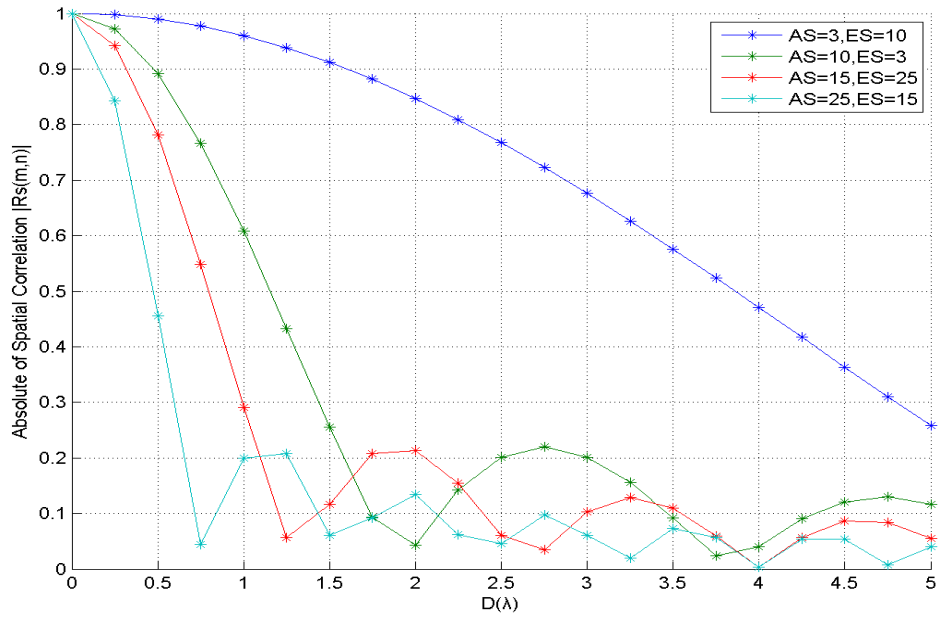


圖 2-53 Spatial Correlation between element 1 and 4 with Uniform distribution at
MEOA=90° and MAOA=90° for CRA1

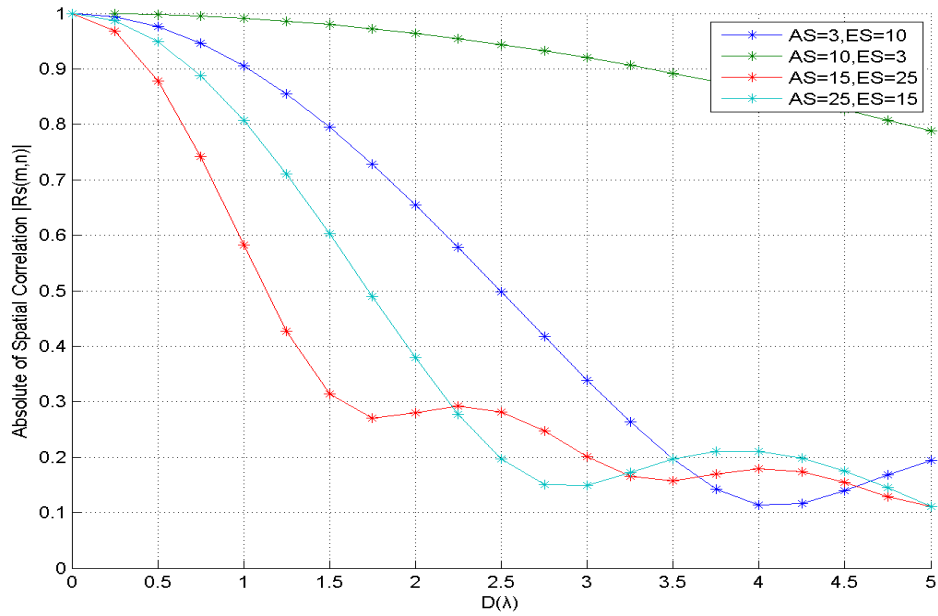


圖 2-54 Spatial Correlation between element 1 and 2 with Uniform distribution at
MEOA=45° and MAOA=0° for CRA1

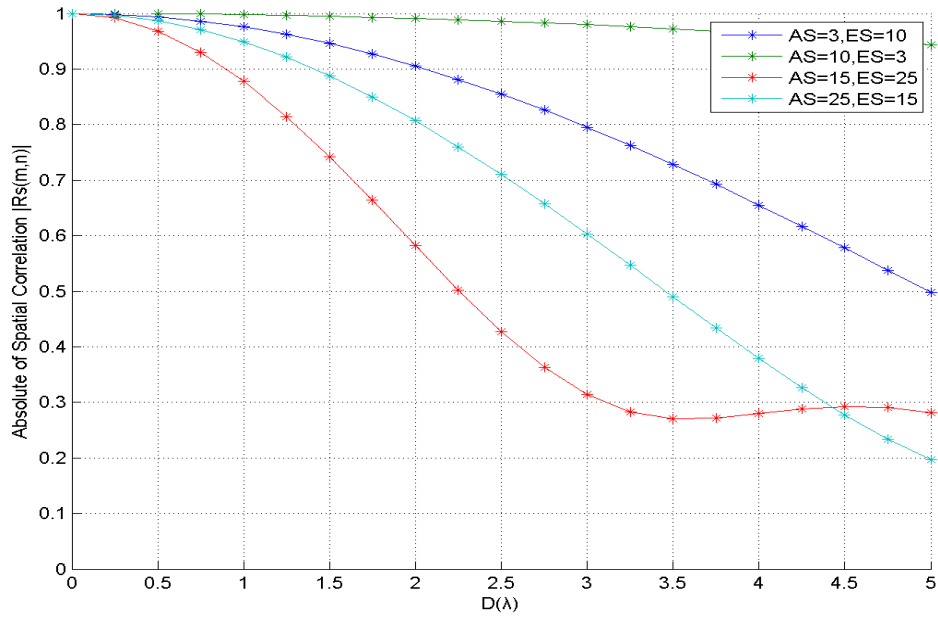


圖 2-55 Spatial Correlation between element 1 and 3 with Uniform distribution at
MEOA=45° and MAOA=0° for CRA1

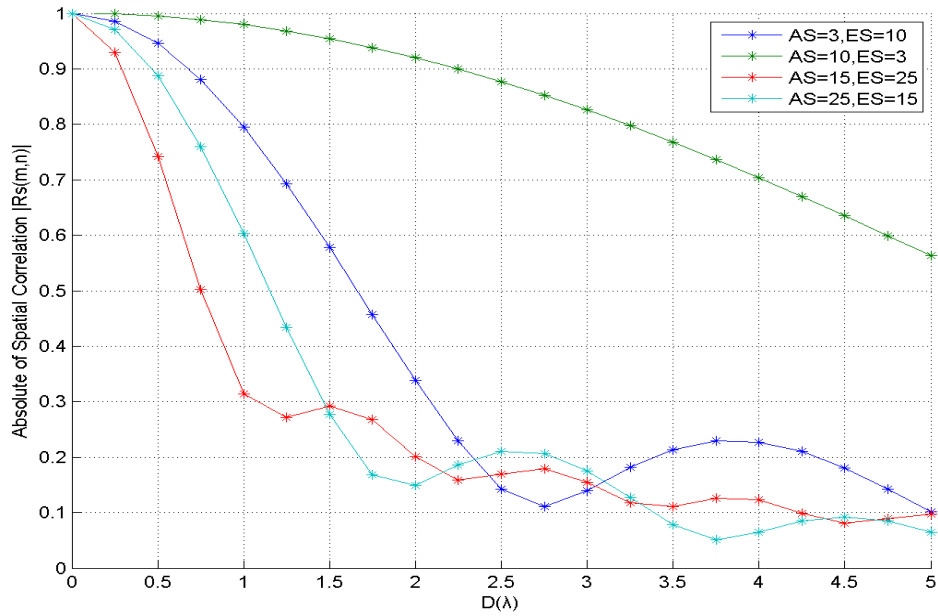


圖 2-56 Spatial Correlation between element 1 and 4 with Uniform distribution at
MEOA=45° and MAOA=0° for CRA1

D. 同心圓陣列（形式二） (Concentric Ring Array (type 2), CRA1)

假設有四天線，以陣列之外圈半徑當作以下實驗的變化參數 D 。

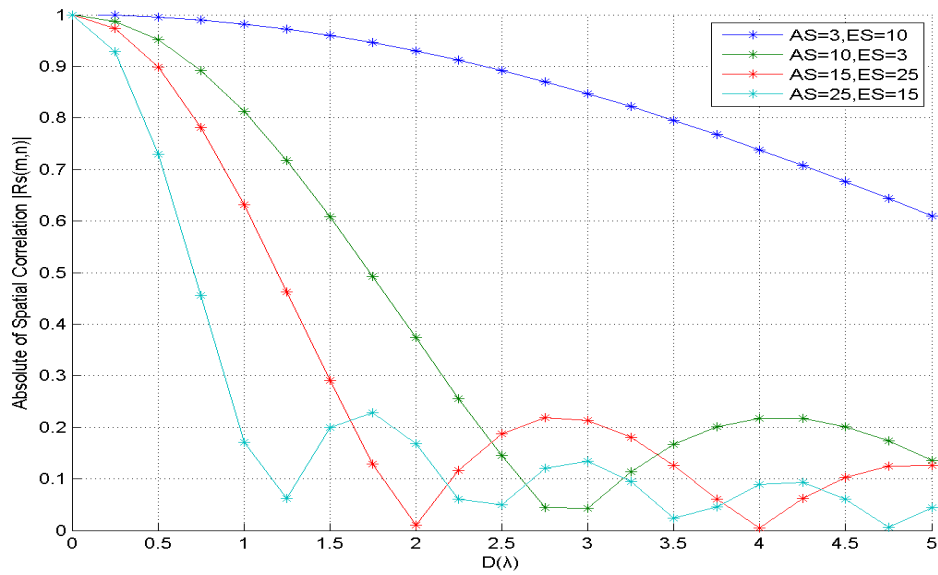


圖 2-57 Spatial Correlation between element 1 and 2 with Uniform distribution at MEOA=90° and MAOA=90° for CRA2

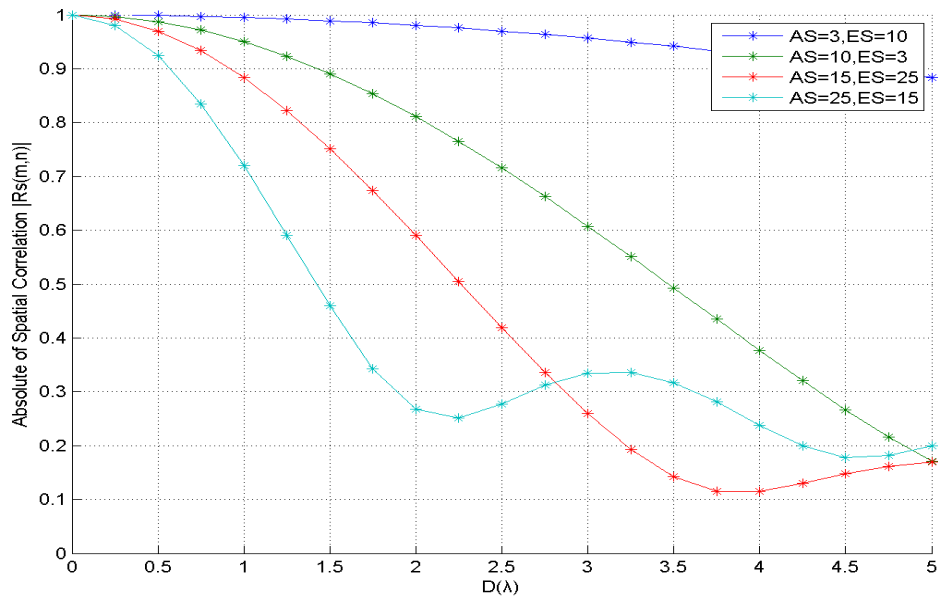


圖 2-58 Spatial Correlation between element 1 and 3 with Uniform distribution at MEOA=90° and MAOA=90° for CRA2

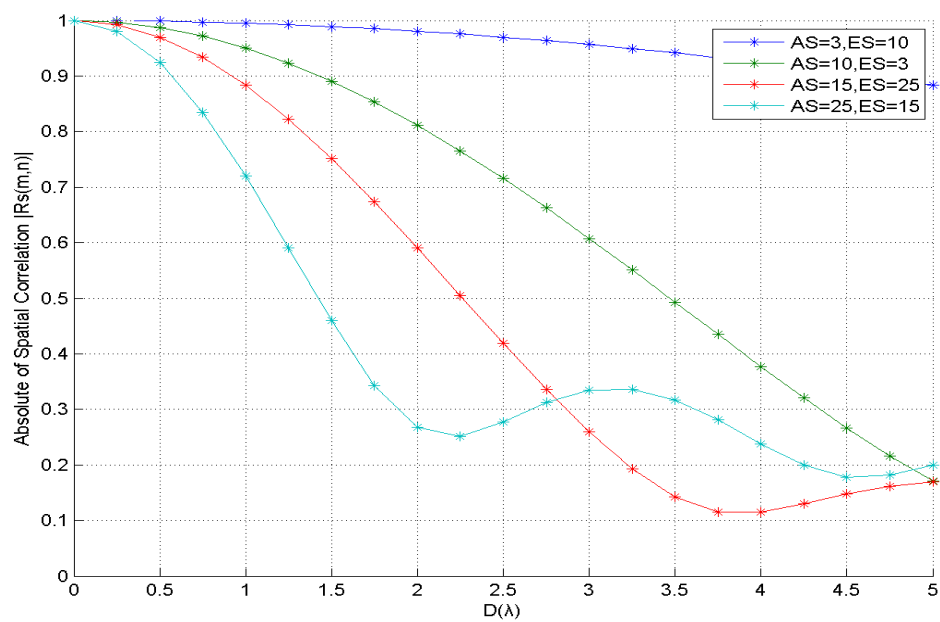


圖 2-59 Spatial Correlation between element 1 and 4 with Uniform distribution at
MEOA=90° and MAOA=90° for CRA2

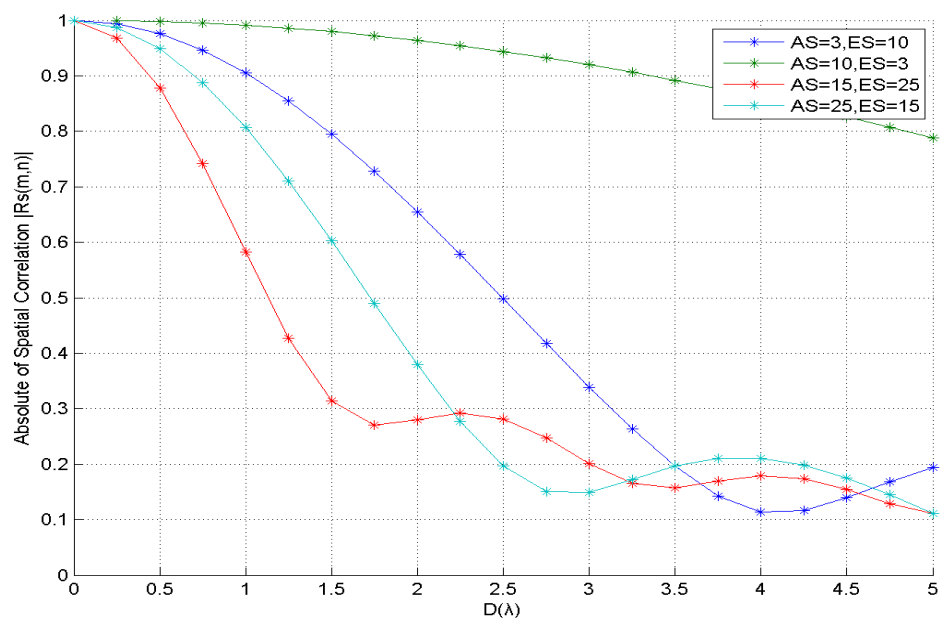


圖 2-60 Spatial Correlation between element 1 and 2 with Uniform distribution at
MEOA=45° and MAOA=0° for CRA2

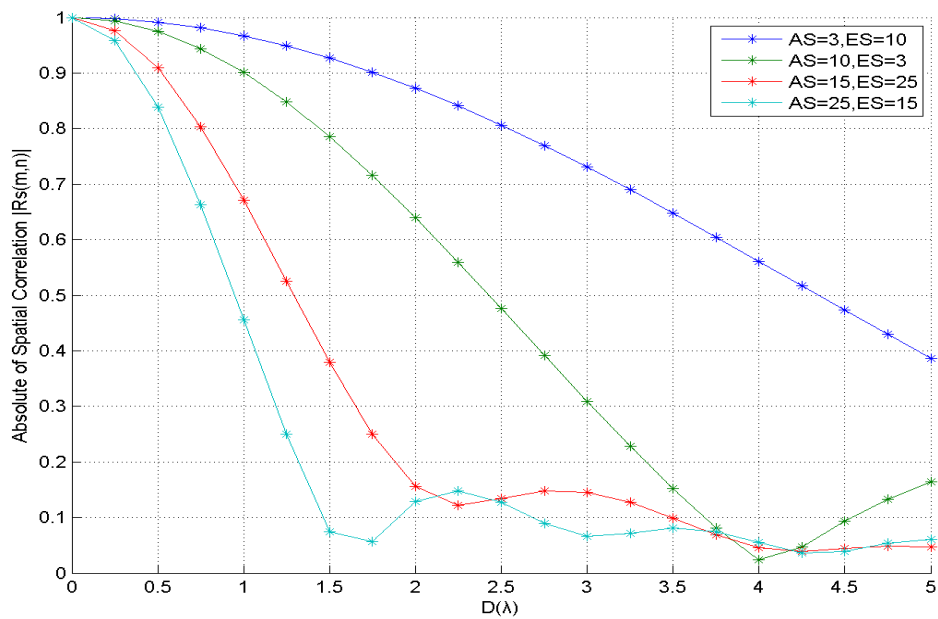


圖 2-61 Spatial Correlation between element 1 and 3 with Uniform distribution at
MEOA=45° and MAOA=0° for CRA2

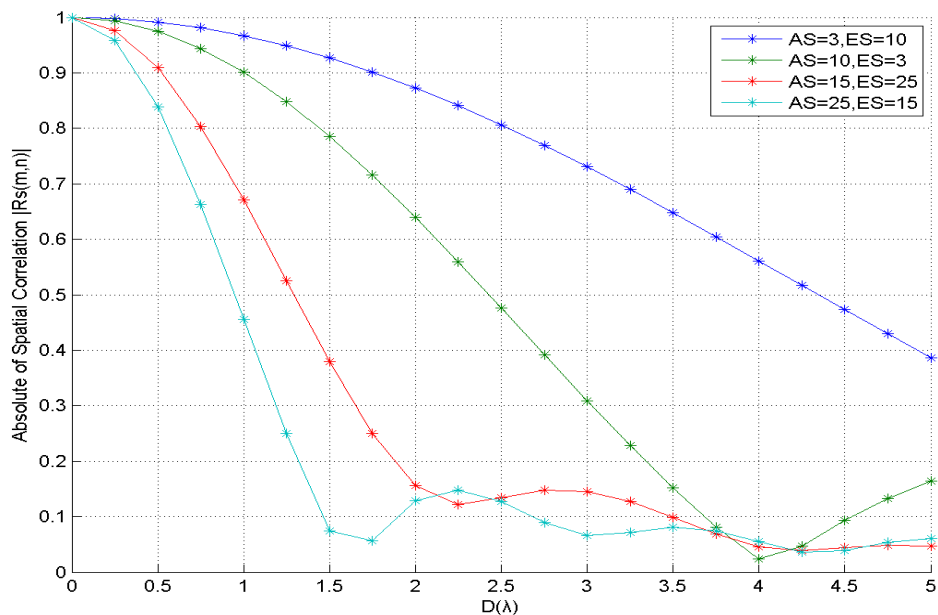


圖 2-62 Spatial Correlation between element 1 and 4 with Uniform distribution at
MEOA=45° and MAOA=0° for CRA2

E. 正四面體陣列(tetrahedral array, TA)：

爲了觀察非平面陣列之空間相關性表現，在此模擬一正四面體陣列的空間相關性，此陣列中包含四根天線，並且任二天線間距皆相等，其擺放之座標及編號如下圖所示，以四根天線之外接球半徑，在此即爲原點至各天線之距離，當作以下實驗的變化參數 D 。

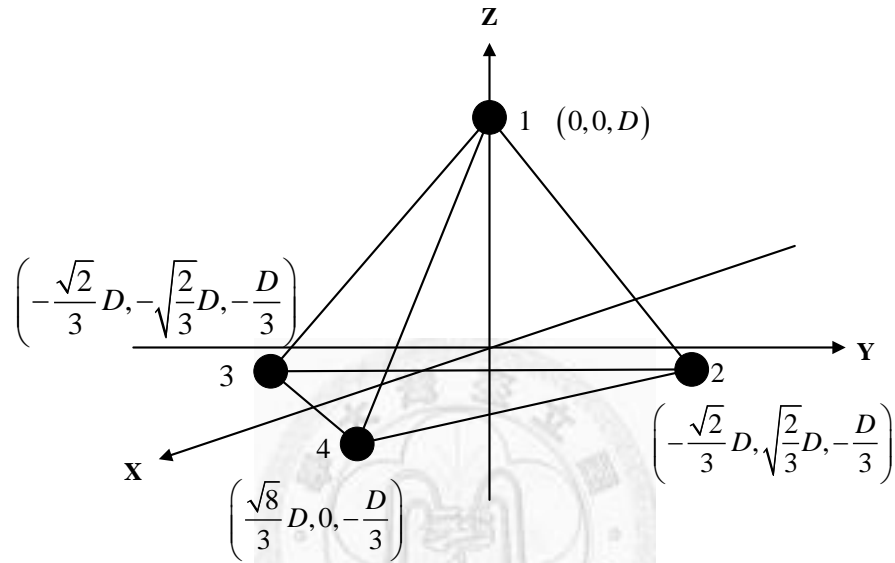


圖 2-63 四元件正四面體陣列架構

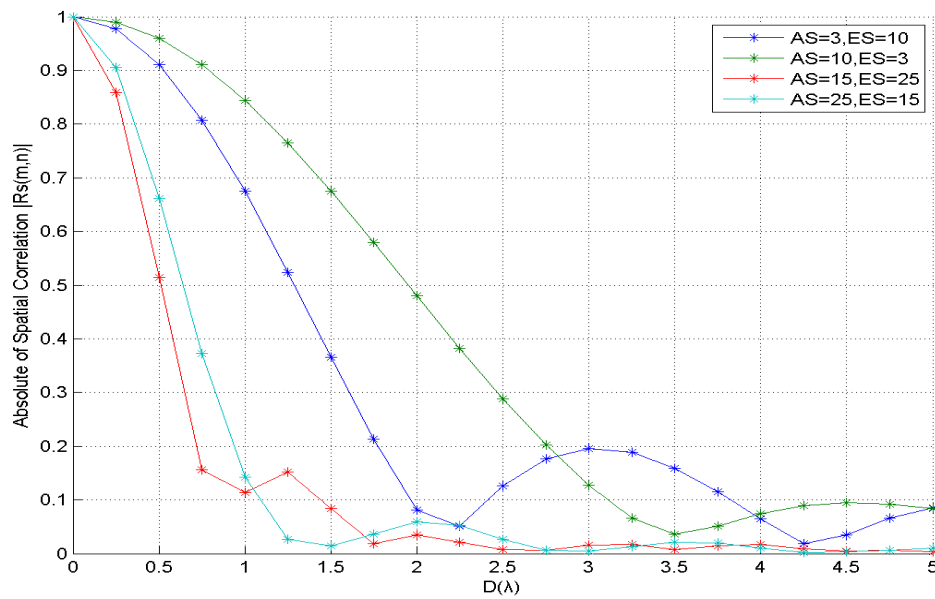


圖 2-64 Spatial Correlation between element 1 and 2 with Uniform distribution at

MEOA=90° and MAOA=90° for TA

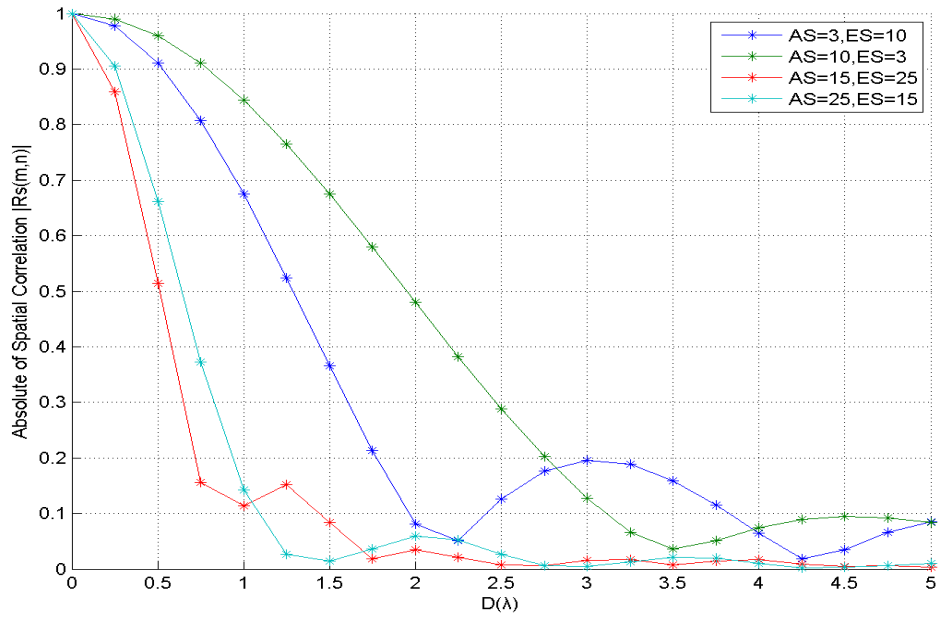


圖 2-65 Spatial Correlation between element 1 and 3 with Uniform distribution at
MEOA=90° and MAOA=90° for TA

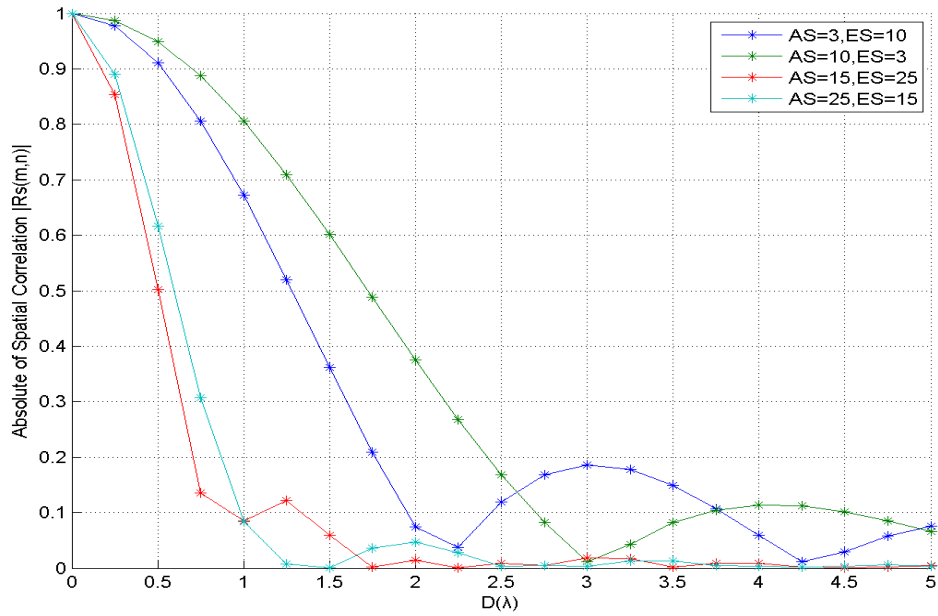


圖 2-66 Spatial Correlation between element 1 and 4 with Uniform distribution at
MEOA=90° and MAOA=90° for TA

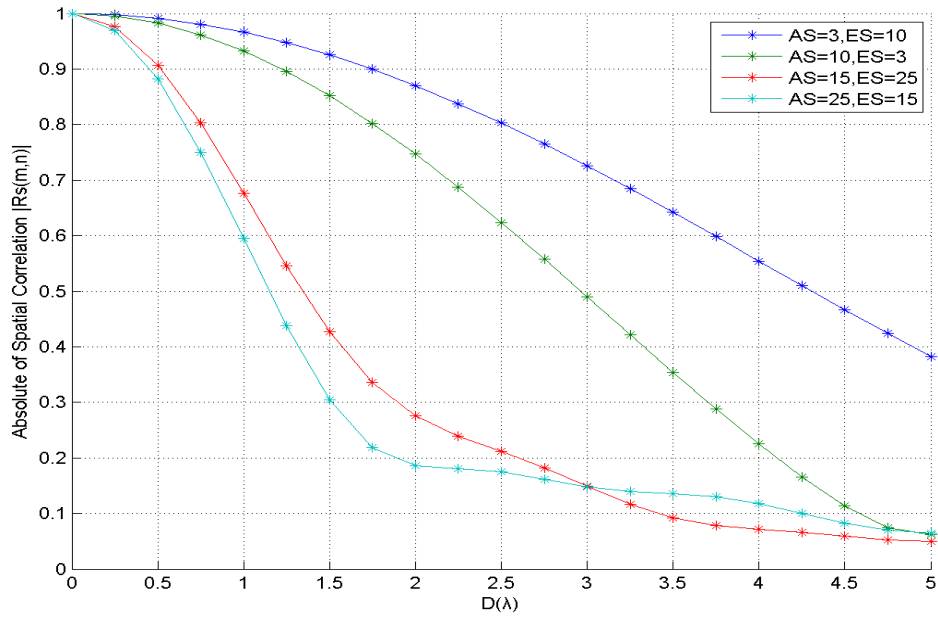


圖 2-67 Spatial Correlation between element 1 and 2 with Uniform distribution at
MEOA=45° and MAOA=0° for TA

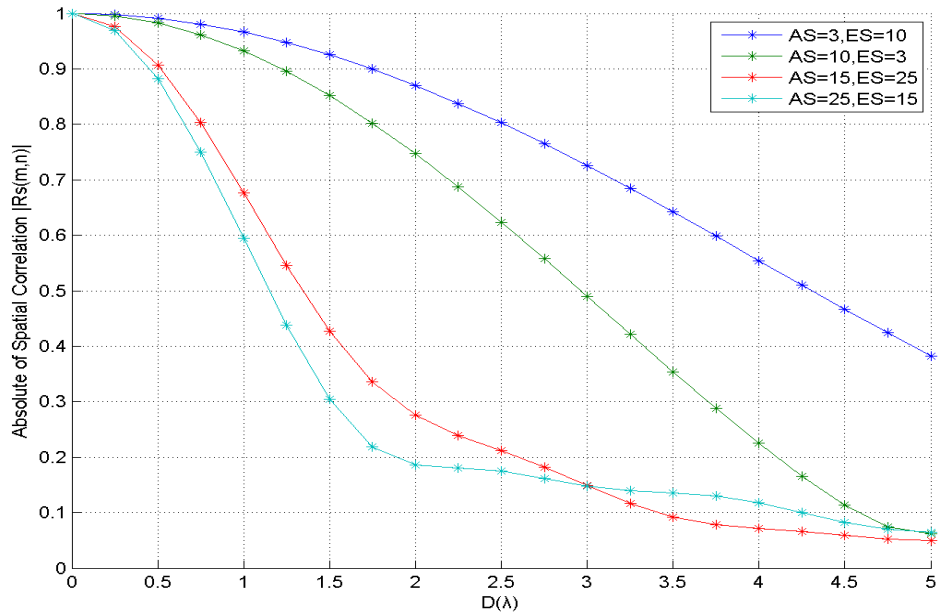


圖 2-68 Spatial Correlation between element 1 and 3 with Uniform distribution at
MEOA=45° and MAOA=0° for TA

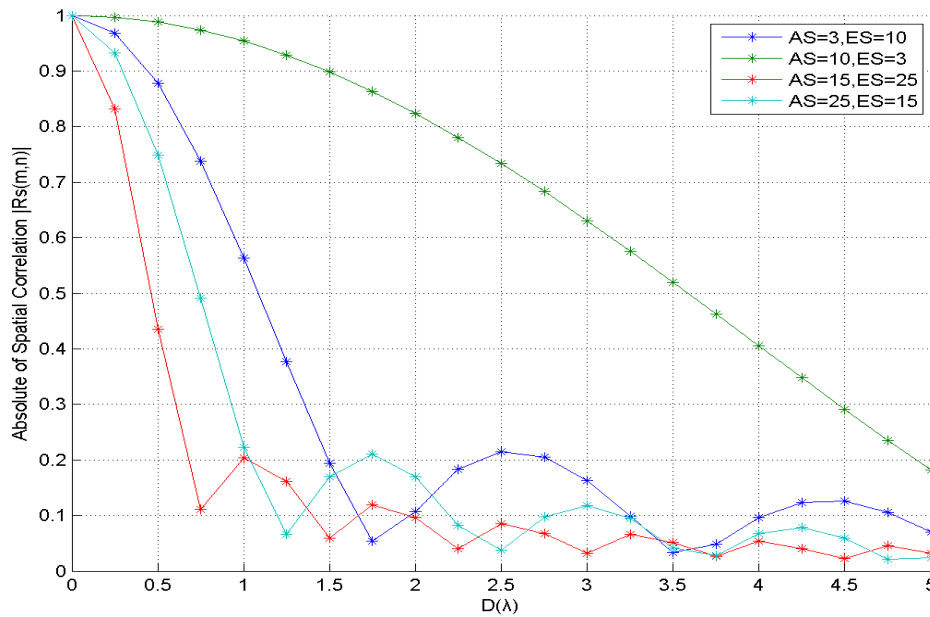


圖 2-69 Spatial Correlation between element 1 and 4 with Uniform distribution at
MEOA=45° and MAOA=0° for TA

同時考慮水平擴散與垂直擴散的影響其實十分複雜，但在擴散不大時大致上可以將水平擴散與垂直擴散兩者分開來討論。因此由模擬中可以發現，對於 ULA，在 MAOA 為 90 度時，如圖 2-39～圖 2-41，其空間相關性表現與僅有水平擴散之環境類似，因為此時 ULA 幾乎無法辨識垂直方向的信號擴散；而在 MAOA 為 0 度時，如圖 2-42～圖 2-44，水平擴散與垂直擴散皆會影響空間相關性，並且此時 MEOA 為 45 度，如同先前之討論所述，垂直入射角對水平擴散而言等效為天線陣列縮小，因此垂直擴散的影響大於水平擴散的影響。而對於 CRA1，因其四天線的排列皆在 X 軸上，因此表現皆類似 ULA。

對於 UCA，在 MAOA 為 90 度且 MEOA 為 90 度時，如圖 2-45～圖 2-47，此時天線 1-3 與 MAOA 垂直，因此該二天線間之空間相關性幾乎不被垂直擴散影響，而天線 1-2 與天線 1-4 之方位角皆與 MAOA 相差 45 度，此時水平擴散與垂直擴散皆會影響空間相關性，但因如同先前討論之對於垂直擴散而言，任二天線之

空間相關性等效於投影至平均入射方向與 Z 軸合圍之平面上之空間相關性，並且此時 MEOA 為 90 度，因此水平擴散的影響大於垂直擴散。而在 MAOA 為 0 度且 MEOA 為 45 度時，如圖 2-48～圖 2-50，此時天線 1-2 與天線 1-4 之方位角與 MAOA 相差 45 度，並且其二連線之傾斜角與 MEOA 相差同樣為 45 度，並且以投影之方法來看對於水平擴散與垂直擴散而言，天線間距縮小幅度相同，因此由模擬結果可以發現水平擴散與垂直擴散的影響幾乎相同。而對於 CRA2，其空間相關性表現則較接近 UCA。

而對於三維陣列，大致上可以用投影的方法判斷二天線間之空間相關性大小。在 MAOA 為 90 度且 MEOA 為 90 度時，如圖 2-64～圖 2-66，判斷水平擴散的影響，將天線投影至水平面上，則天線 1 與其他天線投影之間距皆為 $(\sqrt{8}/3)D$ ，而判斷垂直擴散的影響，將天線投影至 Y-Z 平面上，則天線 1-2 與天線 1-3 之投影間距為 $(\sqrt{22}/3)D$ ，而天線 1-4 投影間距為 $(4/3)D$ ，因此此時垂直擴散影響大於水平擴散；而在 MAOA 為 0 度且 MEOA 為 45 度時，如圖 2-67～圖 2-69 判斷垂直擴散的影響，將天線投影至 X-Z 平面上，則天線 1-2 與天線 1-3 之投影間距為 $\sqrt{2}D$ ，而天線 1-4 投影間距為 $(\sqrt{8}/3)D$ ，投影之間距皆大於判斷水平擴散的影響的投影，但因為 MEOA 靠近天線 1-2 與天線 1-3 對 X-Z 平面投影之端射方向，因此水平擴散的影響大於垂直擴散，而對於天線 1-4，MEOA 接近其對 X-Z 平面投影之寬邊方向，並且 MAOA 剛好於其對水平面投影之端射方向，因此垂直擴散的影響遠大於水平擴散。

對於相同的擴散環境，不同結構之天線陣列其空間特性便不相同，以天線間距為 1λ 之二天線為例，其在 MAOA 為 0 度，AS 為 15 度，MEOA 為 45 度而 ES 為 25 度之環境中，其空間相關性會因二天線連線之方向不同而有高有低，如圖 2-70 所示，其橫坐標代表該二天線之傾斜角，縱座標代表該二天線之方位角，而

空間相關性大小則由顏色表示，紅色表示空間相關性高，而藍色表示空間相關性低，藉由掃描的方式能夠找到空間相關性最低的擺放方向，即傾斜角 140 度方位角 0 度。因此在固定環境下，可以預期存在一效能最佳之天線陣列幾何結構，而接下來的章節便是討論如何找到該效能最佳之天線陣列幾何結構，意即天線陣列幾何結構最佳化(array geometry optimization)。

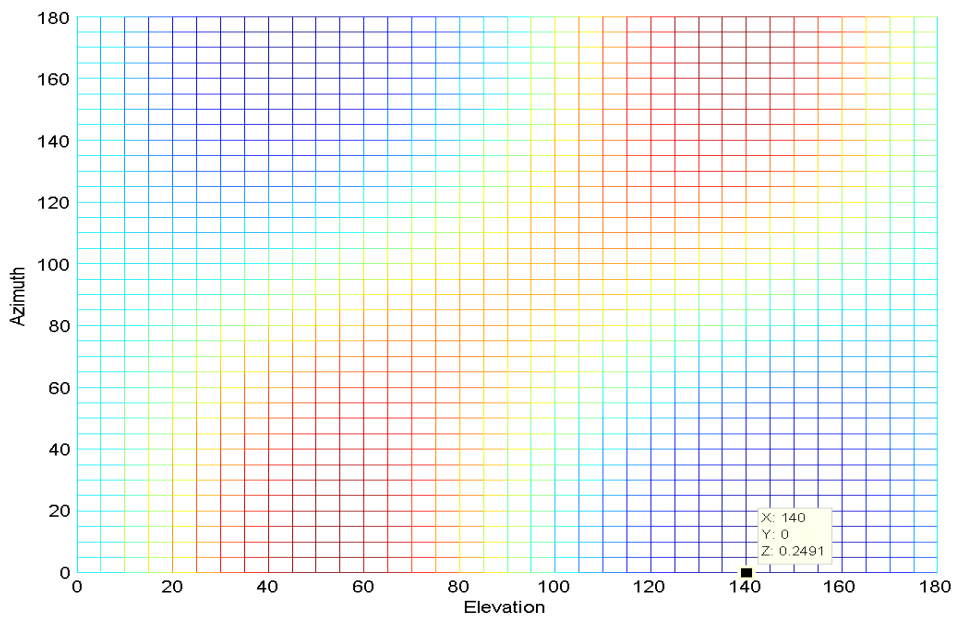


圖 2-70 Spatial Correlation between two elements for varying elevation and azimuth with $MAOA = 0^\circ$, $AS = 15^\circ$, $MEOA = 45^\circ$, $ES = 25^\circ$ and antenna spacing = 1λ

第三章

二維擴散環境下天線陣列效能分析與最佳化

近年來隨著大眾對於行動通訊服務的需求上升，如何在有限的頻寬內獲得更高的頻譜使用效率以及傳輸品質成爲一個急需解決的問題，而多輸入多輸出(MIMO)系統也就應之而生。MIMO 系統能夠有效的利用信號多路徑傳輸效應造成通道獨立衰落(fading)的性質，提供系統額外的資源，例如可以利用其提供之自由度(degrees of freedom)來提高傳輸速率，以提高頻譜使用效率；或是利用空間分集(spatial diversity)來降低錯誤率，以提高傳輸品質。總而言之 MIMO 的技術便是在開發多路徑通道的空間特性，因此 MIMO 系統的效能也會受到傳送端與接收端天線陣列(antenna array)的空間相關性(spatial correlation)影響，空間相關性的存在會使得通道之間並非獨立，造成其所能提供之空間分集的下降，導致系統的效能下降，因此如何了解空間相關性這便是一個很重要的問題，而影響空間相關性的主要因素爲信號擴散與天線陣列幾何結構，因信號擴散與環境有關，無法隨意控制，因此考慮天線陣列幾何結構的影響便顯得十分重要。

本章爲了簡化問題，考慮半相關通道(semi-correlated channel)，意即僅考慮一端之空間相關性影響，在此假設接收端陣列之天線間具有空間相關性，而傳送端陣列則無，並且信號入射擴散爲 2.3 節敘述之二維擴散情況。在此不同之擴散環境下比較 ULA、UCA、CRA1 以及 CRA2 之通道容量(ergodic channel capacity)及位元

錯誤率(bit error rate, BER)表現。並且本章提出一利用粒子群最佳化(particle swarm optimization, PSO)演算法，在一限定的範圍內尋找擁有最大通道容量之二維天線陣列幾何結構之演算法，觀察最佳化後天線陣列的效能以及其形狀，並與上述之四種固定天線陣列效能比較，觀察上述之四種天線陣列之效能表現與相同環境下所能達到之最佳效能間之差距。



3.1 系統模型

在此我們考慮平坦衰落(flat fading)的環境，系統參考[20]所述之 V-BLAST 系統架構，傳送端之天線數為 N_t ，接收端之天線數為 N_r ，因此信號模型可表示為

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (3.1)$$

\mathbf{y} 為接收到之信號， \mathbf{s} 為傳送之信號，而 \mathbf{n} 為加性白高斯雜訊(additive white Gaussian noise, AWGN)之雜訊成分，其元素為獨立且相同分佈(independent and identically distributed, i.i.d.)之複高斯隨機變數(complex Gaussian random variables)，其平均值(mean)為 0 而變異數(variance)為 1。 \mathbf{H} 為 $N_r \times N_t$ 之通道矩陣，其元素為 complex-normal random variables with zero-mean，在此假設其元素之間並非獨立，而是具有一定之空間相關性，參考[21]一般以 $N_r N_t \times N_r N_t$ 之 full correlation matrix 來敘述通道的空間相關性，full correlation matrix 的定義為

$$\mathbf{R}_H = E[\text{vec}(\mathbf{H})\text{vec}(\mathbf{H})^\dagger] \quad (3.2)$$

$\text{vec}(\cdot)$ 為將一矩陣所有的行堆疊成為一向量之算子，在此使用 Kronecker model，此模型假設其傳送端並不影響接收端之空間相關性，其公式為

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}_{rx}^{1/2} \mathbf{H}_w (\mathbf{R}_{tx}^{1/2})^T \quad (3.3)$$

\mathbf{H}_w 中之元素皆為 i.i.d. complex-normal random variables with zero-mean； \mathbf{R}_{tx} 為 $N_t \times N_t$ 之矩陣，其元素為傳送端陣列天線間之空間相關性(spatial correlation)； \mathbf{R}_{rx} 為 $N_r \times N_r$ 之矩陣，為接收端陣列天線間之空間相關性。而 \mathbf{R}_{tx} 及 \mathbf{R}_{rx} 與 \mathbf{H} 之關係滿足以下式子

$$\mathbf{R}_{tx} = \frac{E[\mathbf{H}^T \mathbf{H}^*]}{N_r} \quad \text{and} \quad \mathbf{R}_{rx} = \frac{E[\mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger]}{N_t} \quad (3.4)$$

此處上標“ T ”定義為轉置(transpose)，上標“ $*$ ”定義為共軛(complex conjugate)而上標“ \dagger ”定義為共軛轉置(complex conjugate transpose)。並且此模型之 full correlation

matrix 可表示為

$$\mathbf{R}_H = \mathbf{R}_{tx} \otimes \mathbf{R}_{rx} \quad (3.5)$$

其中 \otimes 為克洛涅克積(Kronecker product)，因此稱之為 Kronecker model。而一般常見之全相關通道(fully correlated channel)以及半相關通道(semi-correlated channel)差別則在半相關通道假設傳送端與接收端僅其中一端具有空間相關性，而全相關通道則是假設兩端皆具有空間相關性。

而本章考慮半相關平坦衰落通道(semi-correlated flat-fading channel)，假設僅有接收端具空間相關性，接收端信號入射角度擴散在此假設為二維擴散，而二天線間之二維空間相關性之公式參考 2.3 節表示為

$$\mathbf{R}_s(m, n) = e^{iZ_{l,m,n}} \left[J_0(Z_{Q,m,n}) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} i^k J_k(Z_{Q,m,n}) \sin c(k\Delta_\xi) \cos(k(\theta_\xi - \alpha_{m,n})) \right] \quad (3.6)$$

詳細的二維空間相關性推導請參考 2.3 節。

3.2 通道容量

在單一使用者之 MIMO 系統下，參考[22]假設接收端知道完整的通道狀態資訊(perfect channel state information at the receiver, CSIR)，但傳送端沒有通道狀態資訊(no channel state information at the transmitter, no CSIT)，則傳送的能量平均分配於各天線，此時通道容量(ergodic channel capacity)表示為

$$E[C] = E \left[\log \left(\det(\mathbf{I} + \rho \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H}) \right) \right] \quad (3.7)$$

其中 $\rho = \frac{P}{N_{tx} \sigma_n^2}$ ， P 為傳送之總功率， σ_n^2 為雜訊之功率。而在此使用蒙地卡羅方法(Monte Carlo method)來估計通道容量。

3.3 最大相似偵測法

參考[23]在線性之 MIMO 系統中，接收端必須由 N_{rx} 個接收到之信號偵測出 N_{tx}

個傳送之符號，假設傳送之符號屬於 $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_L\}$ 大小為 L 之集合，而 $\mathcal{X}^{N_{tx}}$ 為長度 N_{tx} 為之符號向量，其元素皆屬於 \mathcal{X} ，則接收端便是必須根據收到之信號由 $\mathcal{X}^{N_{tx}}$ 中一共 $L^{N_{tx}}$ 個可能傳送之符號向量中選擇其一，因此很直觀的，最理想也就是最小化符號錯誤率(symbol error rate, SER)之偵測法(detection rule)便是選擇給定接收到之信號 \mathbf{y} 後，擁有最大後驗機率(maximum a posterior probability, MAP)之符號向量 $\hat{\mathbf{s}}$ ，表示為

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \max_{\mathbf{s} \in \mathcal{X}^{N_{tx}}} P(\mathbf{s} \text{ was sent} | \mathbf{y} \text{ is observed}) \quad (3.8)$$

$$= \arg \max_{\mathbf{s} \in \mathcal{X}^{N_{tx}}} \frac{P(\mathbf{y} \text{ is observed} | \mathbf{s} \text{ was sent}) P(\mathbf{s} \text{ was sent})}{P(\mathbf{y} \text{ is observed})} \quad (3.9)$$

(3.8)即為最大後驗機率偵測法。而假設可能傳送之符號向量其傳送機率皆相同，換言之 $P(\mathbf{s} \text{ was sent})$ 為常數，則最大後驗機率偵測法可以簡化為

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \max_{\mathbf{s} \in \mathcal{X}^{N_{tx}}} P(\mathbf{y} \text{ is observed} | \mathbf{s} \text{ was sent}) \quad (3.10)$$

(3.10)即為最大相似(maximum likelihood, ML)偵測法。並且一般而言雜訊會假設其屬於加成性白高斯雜訊(additive white Gaussian noise, AWGN)，則可以將最大相似偵測法轉變為尋找可能接收到之未帶雜訊信號與實際接收到之信號 \mathbf{y} 間，歐幾里得距離(squared Euclidean distance)最小之該符號向量，表示為

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{s} \in \mathcal{X}^{N_{tx}}} \|\mathbf{H}\mathbf{s} - \mathbf{y}\|^2 \quad (3.11)$$

同時(3.11)亦可稱為最小距離(minimum distance, MD)偵測法。

3.4 位元錯誤率

位元錯誤率(bit error rate, BER)為一種通訊系統效能之指標，因為在傳輸資料過程中，不可避免地會受到通道雜訊、干擾及信號失真等影響，造成接收到之位

元錯誤，因此位元錯誤率代表了該系統在整個傳輸過程中，其接收端收到之所有位元有多少比例之錯誤。而在此使用蒙地卡羅方法(Monte Carlo method)來估計位元錯誤率，在 V-BLAST 系統架構中，假設傳送之符號為 BPSK，則每一次傳送之符號向量帶有 N_{tx} 個位元。因此在此位元錯誤率模擬為根據(3.3)產生一隨機之通道，並產生數組隨機之符號向量 \mathbf{s}_i ，模擬經過該通道並加上雜訊，並在接收端使用(3.11)之偵測準則偵測原來傳送之符號向量 $\hat{\mathbf{s}}_i$ ，最後根據的差別即可計算該通道之位元錯誤率。重複以上程序計算數組隨機之通道之位元錯誤率並平均之，即可得到系統之位元錯誤率。

3.5 粒子群最佳化演算法

參考[12]，粒子群最佳化(particle swarm optimization, PSO)演算法是一種啟發式演算法(heuristic algorithm)，與基因演算法(genetic algorithm, GA)及模擬退火法(simulated annealing, SA)類似，用以解決困難且多維的最佳化問題。PSO 演算法的概念最初由 J. Kennedy 和 R. C. Eberhart 於 1995 年提出[24]，其目的是為了圖形化的模擬鳥群的運動，而後因為其簡單而且能夠有效率的解決問題而被廣泛應用在各個領域。

PSO 的概念為模仿一群鳥在尋找食物的行為。最初族群中的鳥由隨機的位置開始尋找食物，每個個體有自己的搜尋路徑，並且可能在某些位置找到食物，個體記得牠找到最多食物的「個別最佳」(personal best)位置，並且鳥群會彼此交換訊息，因此每個個體知道整個群體找到最多食物的「全域最佳」(global best)位置。藉由上述的過程，鳥群最後便會降落在相對食物最多的位置。

PSO 演算法便是將這些行為轉換成數學的最佳化演算法。在搜索空間中具有多個粒子（粒子即是模擬鳥），同時藉由判斷所在位置之適應值(fitness)尋找最佳解（食物最多的位置），其具有一定的飛行速度，該速度由粒子本身飛行的經驗（個

別最佳)以及同伴的飛行經驗(全域最佳)做調整,以趨向最佳位置。搜索空間即為所有欲搜索之位置的集合 \mathbb{S} ,而一個位置即是一個可能的解,每一可能解有其一由實數表示之最佳性,此實數被稱為適應值,其由自定義之適應值函數(fitness function $f:\mathbb{S}\rightarrow\mathbb{R}$)決定。

PSO 演算法尋找最佳解的過程如下。初始時群體中 M 個粒子在搜索空間中從隨機的位置開始,對一個 N 維的問題,則其群體之位置以及速度可以分別表示為一個 $N\times M$ 的矩陣如下:

$$\mathbf{X}=[\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_M] \quad (3.12)$$

$$\mathbf{V}=[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_M] \quad (3.13)$$

位置矩陣 \mathbf{X} 中的 \mathbf{x}_i 代表了第 i 個粒子目前的位置,而速度矩陣 \mathbf{V} 中的 \mathbf{v}_i 則代表了第 i 個粒子目前的速度。第 i 個粒子個別經歷過最佳位置則定義為 \mathbf{p}_i ,而 $Pbest_i$ 則為位於 \mathbf{p}_i 時之適應值,而在此將 \mathbf{p}_i 組合為矩陣 \mathbf{P}

$$\mathbf{P}=[\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_M] \quad (3.14)$$

若現在所在位置之適應值 $f(\mathbf{x}_i)$ 較 $Pbest_i$ 好,則將 \mathbf{p}_i 更新為 \mathbf{x}_i , $Pbest_i$ 更新為 $f(\mathbf{x}_i)$ 。同時 $Pbest_i$ 必須與群體經歷過的最佳適應值 $Gbest$ 比較,若較好則將更新全域最佳位置 \mathbf{g} 更新為 \mathbf{p}_i ,而 $Gbest$ 更新為 $Pbest_i$ 。

$$\mathbf{g}=[g_1 \quad g_2 \quad \cdots \quad g_N]^T \quad (3.15)$$

\mathbf{X} 、 \mathbf{V} 、 \mathbf{P} 和 \mathbf{g} 包含了 PSO 演算法所需的所有資訊,其核心概念便是在每次迭代中更新這些矩陣,各個粒子在空間中移動之軌跡趨勢上向著個別最佳解以及全域最佳解移動,並計算其所經位置之適應值,若較好則更新個別最佳解以及全域最佳解,隨著一次次迭代逐漸搜尋到該搜索空間最佳的位置。而速度矩陣 \mathbf{v} 以及位置矩陣 \mathbf{X} 更新公式參考[12],如下

$$v_{n,m}^{t+1} = w^t v_{n,m}^t + c_1 U_1 \times (p_{n,m}^t - x_{n,m}^t) + c_2 U_2 \times (g_n^t - x_{n,m}^t) \quad (3.16)$$

$$x_{n,m}^{t+1} = x_{n,m}^t + v_{n,m}^{t+1} \quad (3.17)$$

U_1 以及 U_2 為在 $[0,1]$ 區間中均勻分布之隨機變數，並且速度向量中 n 個成分間彼此不同，此二參數是爲了保持群體在搜索過程中的隨機性。 c_1 和 c_2 為向個別最佳位置與向全域最佳位置移動之加速因子(acceleration)，先前的研究[25]顯示設為 2.0 是較為理想的選擇。而參數 w 則稱為慣性權重(inertial weight)，一般設在 $[0,1]$ 之間，並且因爲先前的研究[26]表示，若 w 過大則搜索範圍較大但相對地不易收斂；反之，若 w 太則會很快的收斂但也容易卡在區域最佳解而無法做廣域的搜索，因此應使慣性權重隨著迭代由較大之 w_{start} 線性下降至較小之 w_{end} ，使 PSO 在一開始能夠搜索較大的區域，並且隨著 w 逐漸減小，粒子速度減慢，開始搜索該區域精細的最佳位置，其線性下降可由下式表示

$$w^t = w_{start} - \frac{w_{start} - w_{end}}{t_{max}} \times t \quad (3.18)$$

其中 t_{max} 為最大迭代次數，而根據其建議，將 w_{start} 設為 0.9， w_{end} 設為 0.4。而因爲速度更新公式中並沒有限制速度的參數，因此需要 V_{max} 來限制速度，根據[25, 26]一般設定為搜索空間之 10~20%，若是速度超過 V_{max} 則令之等於 V_{max} 。

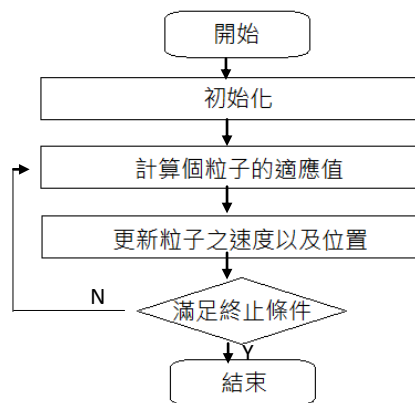


圖 3-1 粒子群最佳化簡易流程圖

3.6 適應值函數設計

PSO 演算法並不複雜，然而如何令 PSO 有效率的找到最佳解其關鍵就在於適應值函數的設計。適應值函數敘述了一個可能解的最佳性，而 PSO 在尋找的就是擁有最佳適應值的解，因此適應值函數必須與演算法的目標直接相關，但也要注意就是適應值函數最好不要太複雜，因為 PSO 是迭代的演算法，若適應值函數太過複雜，則整個最佳化的過程需要的運算量會非常大，因而難以實現。

而在此演算法的目標在於最大化通道容量，如下所示

$$\max E \left[\log \left(\det \left(\mathbf{I} + \rho \mathbf{H}^{\dagger} \mathbf{H} \right) \right) \right] \quad (3.19)$$

很明顯，最直觀的適應值函數就是(3.7)，但因為該公式為隨機的期望值，無法直接計算，因此必須設計其他較易計算，又與通道容量直接相關的適應值函數。以下提出四種適應值函數之設計。

3.6.1 取樣估計

計算通道容量期望值一個最簡單常用的方法便是根據通道的模型，隨機產生 N_c 組通道求通道容量之平均值，當 N_c 極大時可以近似於通道容量的期望值。使用這個方法作為適應值函數優點在於其十分簡單，並且對於各種通道模型都能適用，但缺點便是 N_c 必須足夠大才能到較穩定的適應值，相對的運算量也較大。[14]在利用 PSO 設計最大化通道容量之偶極陣列(dipole array)時，便是用此方法產生 1000 通道計算通道容量平均作為適應值。因此若在 PSO 中利用此方法計算某一天線陣列幾何結構之適應值，首先必須利用第二章的結果計算該天線陣列之空間相關性矩陣，並利用 3.1 節之通道模型產生一千組隨機通道係數，並用 3.2 節所述之通道容量公式分別計算該一千組通道之通道容量，最後取平均值之作為 PSO 中該天線陣列幾何結構之適應值。

3.6.2 通道容量解析解

實際上[27, 28]推導出了通道模型為 Kronecker model 的通道容量解析解(closed form expression)，在半相關通道下參考[27]推導之公式，並且假設 $N_r = N_t = N$ ，則通道容量解析解可表示為

$$E[C] = \frac{\sum_{k=1}^N \det(\Psi(k))}{\ln(2) \det(\mathbf{V}) \prod_{i=1}^N \Gamma(i)} \quad (3.20)$$

其中 $\{\mathbf{V}\}_{i,j} = (-1)^{N-j} \lambda_i^j$ (3.21)

$$\{\Psi(k)\}_{i,j} = \begin{cases} \int_0^\infty \ln(1+\rho y) y^{N-i} e^{-\frac{y}{\lambda_j}} dy & \text{if } i = k \\ \lambda_j^{N-i+1} \Gamma(N-i+1) & \text{if } i \neq k \end{cases} \quad (3.22)$$

其中 λ_i 為具空間相關性端之空間相關性矩陣特徵值，其由小至大排列。而(3.22)中積分部分參考[29]可用下式計算之

$$\int_0^\infty \ln(1+ay) y^{n-1} e^{-cy} dy = \Gamma(n) e^{c/a} \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma(-n+k, c/a)}{c^k a^{n-k}} \quad (3.23)$$

而在全相關通道情況下參考[28]推導之公式，並且假設 $N_r = N_t = N$ ，則通道容量解析解可表示為

$$E[C] = \text{tr} \left(\Lambda^{-1}(v) \Lambda^{(1)}(v) \right) \Big|_{v=0} - N + 1 \quad (3.24)$$

其中

$$\{\Lambda(v)\}_{i,j} = {}_2F_0 \left(1, -v - N + 1; -\rho \lambda_{tx,i} \lambda_{rx,j} \right) \quad (3.25)$$

$$\{\Lambda^{(n)}(v)\}_{i,j} = n! \left(\rho \lambda_{tx,i} \lambda_{rx,j} \right)^{v+N-1} e^{\frac{1}{\rho \lambda_{tx,i} \lambda_{rx,j}}} G_{n+1, n+2}^{n+2, 0} \left(\frac{1}{\rho \lambda_{tx,i} \lambda_{rx,j}} \middle| \begin{matrix} 1, 1, \dots, 1 \\ 0, 0, \dots, 0, v+N \end{matrix} \right) \quad (3.26)$$

其中 $\lambda_{tx,i}$ 與 $\lambda_{rx,j}$ 為傳送端與接收端之空間相關性矩陣特徵值，其由小至大排列。因

此理論上要最大化通道容量，最理想的適應值函數應是使用通道容量解析解(3.20)

(3.24)，但實際上計算十分複雜，因此尚無人將解析解用於最佳化。若 PSO 中利用此方法計算某一天線陣列幾何結構之適應值，首先必須利用第二章的結果計算該天線陣列之空間相關性矩陣，並計算該空間相關性矩陣之特徵值，最後利用本節之公式計算確切之通道容量期望值作為 PSO 中該天線陣列幾何結構之適應值。

3.6.3 通道容量近似解

由上面兩種方法可以發現，要計算確切的通道容量其計算量皆很大，若使用上述兩種方法計算適應值，則最佳化過程會較無效率，因此另一個方向便是考慮通道容量近似解。在高訊雜比之環境下，通道容量可近似為

$$\begin{aligned} E\left[\log\left(\det\left(\mathbf{I} + \rho\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{H}\right)\right)\right] &\approx E\left[\log\left(\det\left(\rho\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{H}\right)\right)\right] \\ &= E\left[\log\left(\det\left(\rho\mathbf{H}_w^{\dagger}\mathbf{H}_w\right)\right)\right] + \log\left(\det\left(\mathbf{R}_{tx}\right)\right) + \log\left(\det\left(\mathbf{R}_{rx}\right)\right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

(3.27)的首項為固定，不隨著陣列幾何結構改變而改變，因此若要最佳化接收端天線陣列幾何結構以最大化通道容量，由此近似可將(3.19)轉變為

$$\max \det\left(\mathbf{R}_{rx}\right) \quad (3.28)$$

如此可以得到一十分容易計算之適應值函數，並且此函數在概念上十分直觀，先前之研究所述，高空間相關性會造成通道容量下降，而對於空間相關性矩陣的行列式而言，高空間相關性時會接近於 0，相反則接近於 1，因此概念上也敘述了一個天線陣列整體的空間相關程度。[15]在地下通道環境下設計最大化通道容量之天線陣列幾何結構時，亦是使用了此函數描述接收端陣列結構的最佳性。若在 PSO 中要利用此方法計算某一天線陣列幾何結構之適應值，首先必須利用第二章的結果計算該天線陣列之空間相關性矩陣，並計算此空間相關性矩陣之行列式值作為 PSO 中該天線陣列幾何結構之適應值。

3.6.4 通道容量上界

參考[30]，首先從通道容量公式開始，因為對數(logarithm)函數是凹(concave)函數，因此期望值後再取對數會大於等於對對數取期望值，所以在此可以找到一個上界(upper bound)

$$E[C] = E\left[\log\left(\det\left(\mathbf{I} + \rho\mathbf{H}^\dagger\mathbf{H}\right)\right)\right] < \log\left(E\left[\det\left(\mathbf{I} + \rho\mathbf{H}^\dagger\mathbf{H}\right)\right]\right) \quad (3.29)$$

而期望值該項參考[31]可以利用下列的兩個行列式公式逐步化簡

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = \sum_{k=0}^N \sum_{\mathbf{a}, |\mathbf{a}|=k} \det(\mathbf{A}(\mathbf{a}, \mathbf{a})) \quad (3.30)$$

$$\det(\mathbf{B}(\mathbf{a}, \mathbf{\beta})) = \sum_{\gamma, |\gamma|=|\mathbf{a}|} \det(\mathbf{B}(\mathbf{a}, \gamma)) \det(\mathbf{B}(\gamma, \mathbf{\beta})) \quad (3.31)$$

\mathbf{a} 為集合 $\{1, 2, \dots, N\}$ 中所有任取 k 個之子集合， $|\mathbf{a}|$ 代表集合 \mathbf{a} 的元素總數， γ 為集合 $\{1, 2, \dots, N\}$ 中所有任取 $|\mathbf{a}|$ 個之子集合，而 $\mathbf{A}(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ 表示由矩陣 \mathbf{A} 之 \mathbf{a} 列與 \mathbf{a} 行構成之主子矩陣(principle submatrix)，同時 $\det(\mathbf{A}(\mathbf{a}, \mathbf{a}))$ 也被稱為矩陣 \mathbf{A} 之主子式(principle minor)， $\mathbf{B}(\mathbf{a}, \mathbf{\beta})$ 表示由矩陣 \mathbf{B} 之 \mathbf{a} 列與 $\mathbf{\beta}$ 行構成之子矩陣。推導過程如下，假設 $N_r = N_t = N$ ，首先將空間相關性矩陣做特徵值分解(eigenvalue decomposition)

$$\mathbf{R}_{rx} = \mathbf{U}_{rx} \mathbf{\Lambda}_{rx} \mathbf{U}_{rx}^\dagger \quad \text{and} \quad \mathbf{R}_{tx} = \mathbf{U}_{tx} \mathbf{\Lambda}_{tx} \mathbf{U}_{tx}^\dagger \quad (3.32)$$

其中 $\mathbf{\Lambda}_{rx}$ 及 $\mathbf{\Lambda}_{tx}$ 為對角矩陣，其對角元素為接收端與傳送端之空間相關性矩陣之特徵值，皆為非負之實數，而 \mathbf{U}_{rx} 以及 \mathbf{U}_{tx} 皆為 unitary matrix，因此

$$E\left[\det\left(\mathbf{I} + \rho\mathbf{H}^\dagger\mathbf{H}\right)\right] = E\left[\det\left(\mathbf{I} + \rho\mathbf{\Lambda}_{tx}^{1/2}\mathbf{H}_w^\dagger\mathbf{\Lambda}_{rx}^{1/2}\mathbf{\Lambda}_{rx}^{1/2}\mathbf{H}_w\mathbf{\Lambda}_{tx}^{1/2}\right)\right] \quad (3.33)$$

令 $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{\Lambda}_{tx}^{1/2}\mathbf{H}_w^\dagger\mathbf{\Lambda}_{rx}^{1/2}$ 並且將(3.30)代入(3.33)

$$E\left[\det\left(\mathbf{I} + \rho\tilde{\mathbf{H}}^\dagger\tilde{\mathbf{H}}\right)\right] = E\left[\sum_{k=0}^N \sum_{\mathbf{a}, |\mathbf{a}|=k} \det\left([\rho\tilde{\mathbf{H}}^\dagger\tilde{\mathbf{H}}](\mathbf{a}, \mathbf{a})\right)\right] \quad (3.34)$$

再將(3.31)代入(3.34)

$$\begin{aligned}
&= E \left[\sum_{k=0}^N \rho^k \sum_{\mathbf{a}, |\mathbf{a}|=k} \sum_{\mathbf{\beta}, |\mathbf{\beta}|=k} \det(\tilde{\mathbf{H}}^\dagger(\mathbf{a}, \mathbf{\beta})) \det(\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{\beta}, \mathbf{a})) \right] \\
&= \sum_{k=0}^N \rho^k \sum_{\mathbf{a}, |\mathbf{a}|=k} \sum_{\mathbf{\beta}, |\mathbf{\beta}|=k} E \left[\det(\tilde{\mathbf{H}}^\dagger(\mathbf{a}, \mathbf{\beta})) \det(\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{\beta}, \mathbf{a})) \right] \\
&= \sum_{k=0}^N \rho^k \sum_{\mathbf{a}, |\mathbf{a}|=k} \sum_{\mathbf{\beta}, |\mathbf{\beta}|=k} \det(\Lambda_{rx}(\mathbf{\beta}, \mathbf{\beta})) \det(\Lambda_{tx}(\mathbf{a}, \mathbf{a})) E[\det(\mathbf{W}_k)] \quad (3.35)
\end{aligned}$$

(3.35)中 $\mathbf{W}_k = \mathbf{H}_w^\dagger(\mathbf{a}, \mathbf{\beta}) \mathbf{H}_w(\mathbf{\beta}, \mathbf{a})$ 爲屬於 Wishart distributed 之矩陣，因其元素間無相關，且 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{\beta}| = k$ ，因此 $\mathbf{W}_k \sim W_k(\mathbf{I}, k)$ ，並且

$$E[\det(\mathbf{W}_k)] = k! \quad (3.36)$$

因此將(3.36)代回(3.35)

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^N k! \rho^k \sum_{\mathbf{a}, |\mathbf{a}|=k} \det(\Lambda_{tx}(\mathbf{a}, \mathbf{a})) \sum_{\mathbf{\beta}, |\mathbf{\beta}|=k} \det(\Lambda_{rx}(\mathbf{\beta}, \mathbf{\beta})) \\
&= \sum_{k=0}^N k! \rho^k \sum_{\mathbf{a}, |\mathbf{a}|=k} \lambda_{tx, \alpha_1} \cdots \lambda_{tx, \alpha_k} \sum_{\mathbf{\beta}, |\mathbf{\beta}|=k} \lambda_{rx, \beta_1} \cdots \lambda_{rx, \beta_k} \quad (3.37)
\end{aligned}$$

可以得到一個通道容量上界的表示式：

$$E[C] < \log \left(\sum_{k=0}^N k! \rho^k \sum_{\mathbf{a}, |\mathbf{a}|=k} \lambda_{tx, \alpha_1} \cdots \lambda_{tx, \alpha_k} \sum_{\mathbf{\beta}, |\mathbf{\beta}|=k} \lambda_{rx, \beta_1} \cdots \lambda_{rx, \beta_k} \right) \quad (3.38)$$

而令

$$E_k = \sum_{\mathbf{a}, |\mathbf{a}|=k} \lambda_{\alpha_1} \cdots \lambda_{\alpha_k} \quad \text{and} \quad S_k = (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^k \lambda_i^k \quad (3.39)$$

則 E_k 剛好可以滿足

$$E_0 = 1 \quad \text{and} \quad E_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k E_{k-i} S_i \quad (3.40)$$

(3.39)(3.40)代入(3.38)，則通道容量上界可表示爲

$$E[C] < \log \left(\sum_{k=0}^N k! \rho^k E_{tx, k} E_{rx, k} \right) \quad (3.41)$$

實際上[30]推導此公式的用途亦是爲了藉此設計最佳化之長期功率配置方案

(long-term power allocation scheme)，而非用於天線陣列幾何結構之設計，但在此概

念上亦可將空間相關性視為某種因天線擺放位置以及信號擴散情況而造成的某種長期功率配置方案。若在 PSO 中要利用此方法計算某一天線陣列幾何結構之適應值，首先必須利用第二章的結果計算該天線陣列幾何結構之空間相關性矩陣，並計算該空間相關性矩陣之特徵值，將特徵值代入本節所述之公式以計算通道容量上界，並以此通道容量上界作為 PSO 中該天線陣列幾何結構之適應值。

3.6.5 適應值函數比較

接下來比較使用 3.6.1 節至 3.6.4 節所述之四種不同適應值函數最佳化的效能，因為 PSO 屬於啟發式演算法，每次最佳化之結果都會略有差異，因此在此分別使用上述四種適應值函數在相同的環境下執行 100 次最佳化，紀錄平均最佳化花費時間，並分別計算最佳化結果之通道容量，觀察分別使用四種不同適應值函數最佳化，其結果效能之平均值以及變異度，平均值越高代表使用該適應值函數最佳化平均而言能找到效能較好之天線陣列幾何結構，而變異度越低則代表使用該適應值函數最佳化其結果之效能越穩定，而平均最佳化花費時間越低則代表使用該適應值函數最佳化的效率越高。計算通道容量時產生 10000 組通道係數平均之。

	Mean	Variance	Avg. Time Spent (s)
Fitness 1	16.9063	0.0040	258.2570
Fitness 2	17.1168	0.0011	706.8549
Fitness 3	16.6143	0.0393	73.7426
Fitness 4	17.1187	0.0006	75.4573

表 3-1 Performance comparison of using different fitness function in PSO for

$$N_{tx} = N_{rx} = 8, \text{MAOA} = 90^\circ, \text{AS} = 30^\circ, \text{and } D_{max} = 1.5\lambda$$

	Mean	Variance	Avg. Time Spent (s)
Fitness 1	21.7736	1.7552e-004	262.8688
Fitness 2	21.7720	1.3730e-004	805.4043
Fitness 3	21.7757	1.5811e-004	94.6929
Fitness 4	21.7744	1.8762e-004	95.0085

表 3-2 Performance comparison of using different fitness function in PSO for

$$N_{tx} = N_{rx} = 8, \text{MAOA} = 90^\circ, \text{AS} = 60^\circ, \text{and } D_{max} = 5\lambda$$

表 3-1 為使用四種適應值函數的最佳化結果其效能之比較，詳細的最佳化過程會在下一節 3.7 節中說明，在此的環境為半相關通道，在接收端具有空間相關性，信號擴散屬於二維均勻擴散，MAOA 為 90 度，AS 為 30 度，傳送端與接收端天線數相等皆為八個元件，而總訊雜比為 10dB，並且在半徑為 1.5λ 之圓內最佳化二維天線陣列幾何結構。由表 3-1 可以看出使用 Fitness 2 及 Fitness 4 作為適應值函數，最佳化的結果平均能達到較高的通道容量，並且使用 Fitness 4 的變異度又比使用 Fitness 2 的略低，而平均花費時間則約在九分之一以下。

表 3-2 的環境為 MAOA 為 90 度，AS 為 60 度，傳送端與接收端天線數相等皆為八個元件，而總訊雜比為 10dB，並且在半徑為 5λ 之圓內最佳化二為天線陣列幾何結構。由表 2 可以看出，在擴散較大且陣列限制範圍較大之情況下，使用該四種適應值函數，最佳化的結果平均而言相差不大，並且變異度也同樣都很小，其中平均花費時間 Fitness 2 花費最多，而 Fitness 3 與 Fitness 4 所花費的時間約在其九分之一。

理論上對於最大化通道容量之問題，最理想之適應值函數應為通道容量解析解，即 Fitness2，但在此基於 Fitness 4 在擴散大及擴散小的環境，其結果效果皆十分接近 Fitness 2，並且最佳化所花費的時間約為九分之一，因此在此令 Fitness 4 為適應值函數，也就是令

$$Fitness\ Function = \log \left(\sum_{k=0}^N k! \rho^k E_{tx,k} E_{rx,k} \right) \quad (3.42)$$

利用此適應值函數，在限定的搜索空間中尋找最佳之天線陣列幾何結構。而對於傳送端無空間相關性的情況，適應值函數可以簡化為

$$Fitness\ Function = \log \left(\sum_{k=0}^N \frac{\rho^k}{(N-k)!} E_{rx,k} \right) \quad (3.43)$$

如此相當於將最大化通道容量之問題轉變為最大化通道容量上界之問題。

3.7 天線陣列幾何結構最佳化

本章考慮半相關通道，意即僅考慮一端之空間相關性影響，在此假設僅接收端天線陣列具空間相關性，而傳送端則無，接收端信號入射角度擴散假設為二維擴散，因此 \mathbf{R}_{rx} 使用 2.3 節推導之結果，並假設 $N_r = N_t = N$ 。在此環境下利用 3.5 節所述之 PSO 演算法，尋找擁有最佳通道容量之二維天線陣列，如同我們在第二章所述，陣列中任一個天線擺放的位置都可以用一組使用直角座標系的座標來表示，而在此便是透過此天線之座標來描述陣列的形狀。因此在 PSO 中，一組座標即為粒子的一個可能的位置，換言之 3.5 節所述之粒子位置矩陣 \mathbf{x} 中的一行即構成一組敘述天線陣列形狀之天線座標，因此在這個問題中，PSO 在維度為三倍天線個數之空間中搜索最佳之天線陣列幾何結構。而二維天線陣列其搜索範圍之限制條件為

$$\left\{ x_m, y_m, z_m \mid \sqrt{x_m^2 + y_m^2} \leq Dmax, z_m = 0 \right\} \quad (3.44)$$

意即分別在水平面上一半徑為 $Dmax$ 之「圓型」範圍內尋找最佳之天線陣列幾何結構， $Dmax$ 為陣列大小限制參數，其單位為波長 (λ)。並且在此設 PSO 演算法中的粒子數為 16，迭代次數為 300 次，且令(3.43)為本章之適應值函數。而[10]也顯示寬邊方向之 ULA 及 UCA 分別在擴散小及擴散大的環境中擁有較好之效能，因此

爲了加快最佳化收斂的速度，在此 2 個粒子的初始位置分別設爲寬邊方向之 ULA 及 UCA，而其餘 14 個粒子則均勻隨機分布於搜索空間中，以下步驟一步驟的說明最佳化之過程。

重要參數：

N 天線數、 θ_ξ 平均水平入射角、 Δ_ξ 水平角度擴散、 $Dmax$ 陣列大小限制、 \mathbf{X} 粒子位置、 V_{max} 速度限制、 \mathbf{V} 粒子速度、 \mathbf{P} 個別最佳位置、 \mathbf{g} 群體最佳位置、 $f(\mathbf{x})$ 適應值函數、 $Pbest_i$ 個別最佳適應值、 $Gbest$ 群體最佳適應值、 t_{max} 最大迭代次數。

step 1: 設定 N 、 θ_ξ 、 Δ_ξ 、 $Dmax$ 、 $f(\mathbf{x})=(3.43)$ 、粒子數=16， $t_{max}=300$ ， $w_{start}=0.9$ ， $w_{end}=0.4$ ，而 $V_{max}=Dmax/5$ 。

step 2: 初始化粒子位置 \mathbf{X} 、粒子速度 \mathbf{V} 、個別最佳適應值 $Pbest_i$ 以及群體最佳適應值 $Gbest$ 。初始粒子位置 \mathbf{x}_1 設爲長度爲 $2Dmax$ 之寬邊方向 ULA，而 \mathbf{x}_2 設爲半徑爲 $Dmax$ 之 UCA 天線陣列架構，其餘 $\mathbf{x}_3 \sim \mathbf{x}_{16}$ 均勻的隨機分布在搜索空間中，初始粒子速度 $\mathbf{V}=\mathbf{0}$ ，而 $Pbest_i=0$ ， $Gbest=0$ ，且迭代次數 $t=1$ 。

step 3: 計算各粒子之適應值 $f(\mathbf{x}_i)$ 。其計算各粒子之適應值 $f(\mathbf{x}_i)$ 。首先由粒子位置轉爲天線陣列之元件座標，並由座標使用 2.3 節之三維空間相關性公式計算該天線陣列之空間相關性，最後使用(3.43)由空間相關性計算通道容量上界作爲該粒子之適應值， $i=1 \sim 16$ 。

step 4: 比較粒子之適應值 $f(\mathbf{x}_i)$ 與個別最佳適應值 $Pbest_i$ 大小。若 $f(\mathbf{x}_i)$ 較 $Pbest_i$ 大，則令 $Pbest_i$ 更新爲 $f(\mathbf{x}_i)$ ，並令 \mathbf{p}_i 更新爲 \mathbf{x}_i ， $i=1 \sim 16$ 。

step 5: 比較個別最佳適應值 $Pbest_i$ 與群體最佳適應值 $Gbest$ 。若 $Pbest_i$ 較 $Gbest$ 大，則令 $Gbest$ 更新為 $Pbest_i$ ，而 \mathbf{g} 更新為 \mathbf{p}_i ， $i = 1 \sim 16$ 。

step 6: 更新粒子位置 \mathbf{x} 及粒子速度 \mathbf{v} 。使用(3.16)更新 \mathbf{v} ，其中 w' 符合(3.18)，並且令其中大於 V_{\max} 的等於 V_{\max} 。用(3.17)更新 \mathbf{x} ，並令其中超過搜索範圍限制條件(3.44)者停在搜索範圍之邊界。

step 7: $t = t + 1$ 。若 $t < t_{\max}$ ，則回 step 3；若 $t = t_{\max}$ ，則結束，而最後之群體最佳位置 \mathbf{g} 即為最佳化之結果。

3.8 模擬結果

在此會分別模擬如第一章介紹之 ULA、UCA、CRA1 以及 CRA2 四種固定之天線陣列幾何形狀之通道容量以及位元錯誤率，並與我們提出之使用 PSO 最佳化幾何形狀之二維天線陣列作比較。通道容量的模擬為產生 3000 個隨機之通道，並根據(3.7)之公式計算其通道容量並平均之；位元錯誤率模擬之程序如 3.4 節所述，為產生 5000 個隨機之通道，每一個通道傳送 100 個隨機之二進制相位移鍵(Binary Phase Shift Keying, BPSK)符號，並根據 3.3 節所述之最大相似偵測法來偵測傳送之信號，最後根據原來之信號與偵測出之信號之差別計算其位元錯誤率。模擬中總訊雜比皆在 10dB，同時在接下來之模擬中，陣列大小限制參數 D_{\max} 同時代表了 ULA 總長之一半、UCA 之半徑以及 CRA1 及 CRA2 之外圈半徑，意即五種天線陣列皆可放置於一半徑為 D_{\max} 之圓內。

3.8.1 平均水平入射角

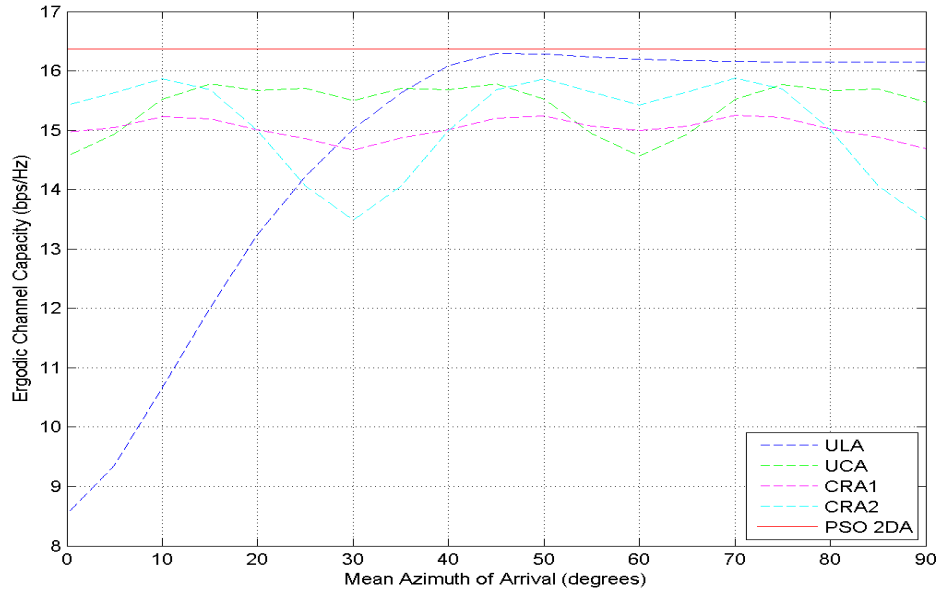


圖 3-2 Ergodic Channel Capacity for varying MAOA with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$AS = 20^\circ$, and $Dmax = 5\lambda$

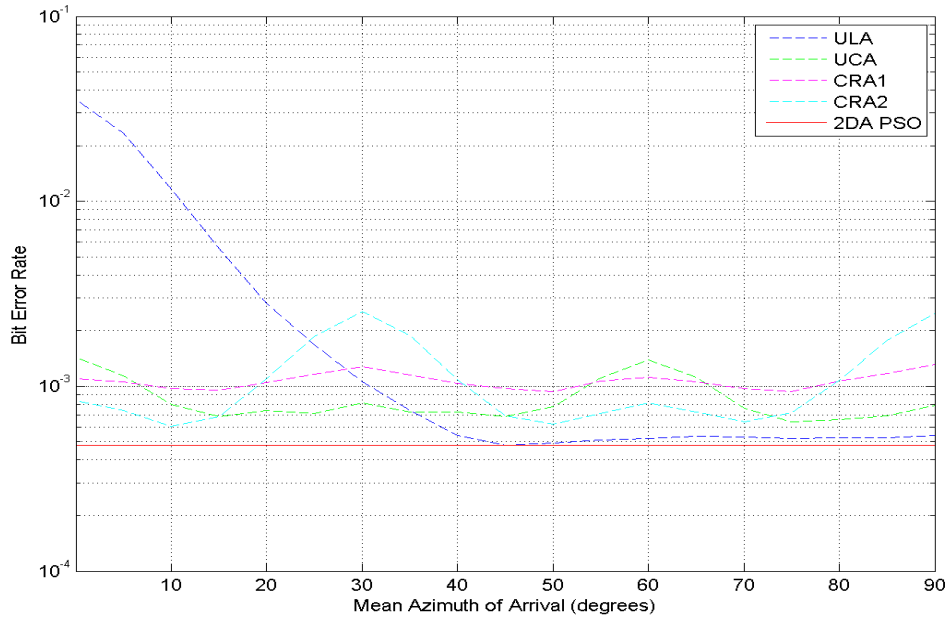


圖 3-3 Bit Error Rate for varying MAOA with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$AS = 20^\circ$, and $Dmax = 5\lambda$

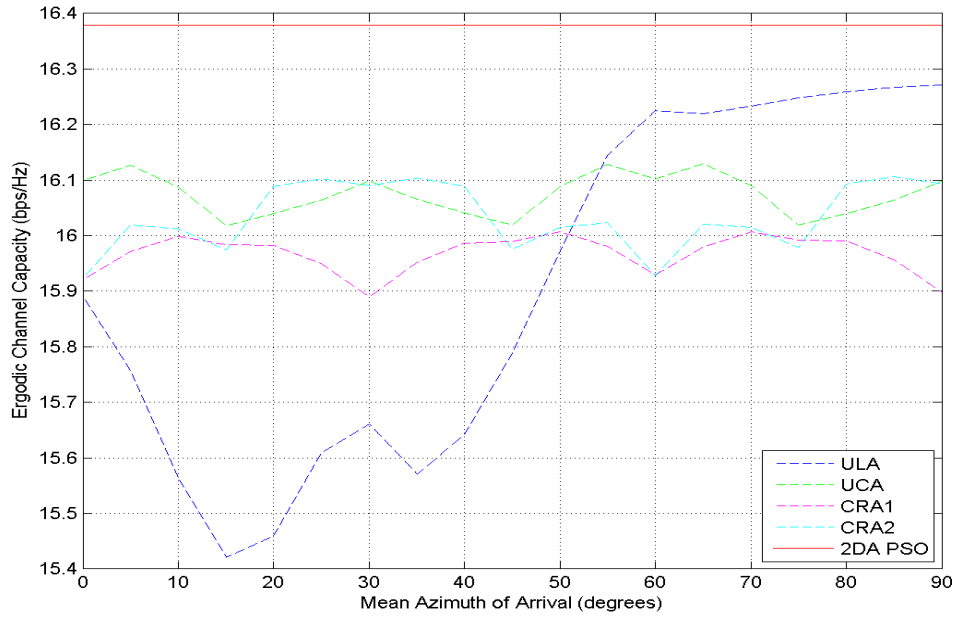


圖 3-4 Ergodic Channel Capacity for varying MAOA with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$AS = 10^\circ$, and $Dmax = 5\lambda$

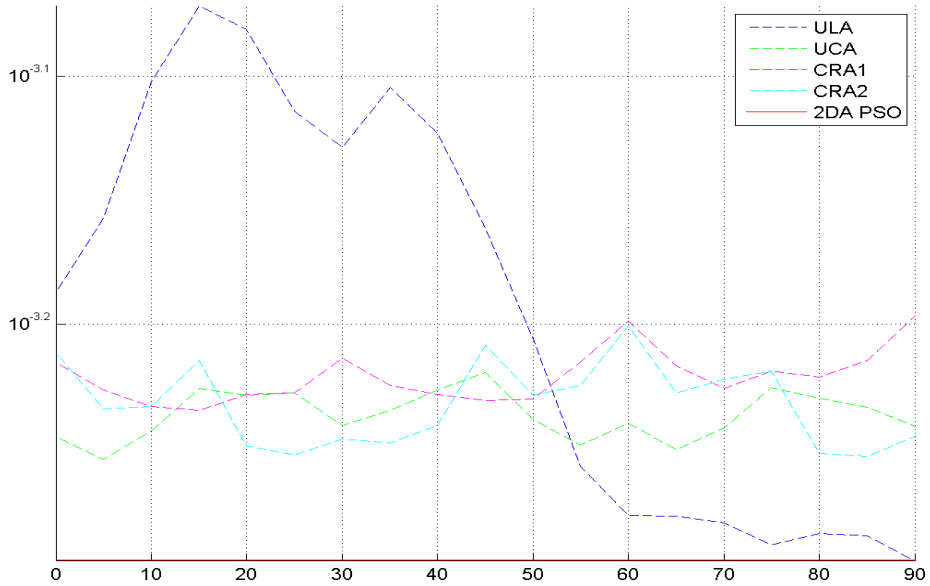


圖 3-5 Bit Error Rate for varying MAOA with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$AS = 60^\circ$, and $Dmax = 5\lambda$

3.8.2 水平角度擴散

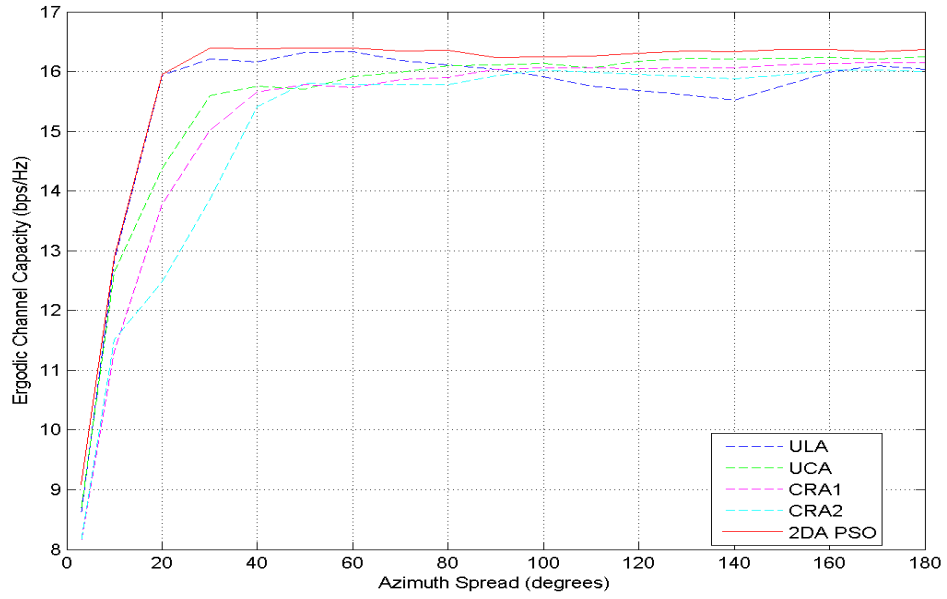


圖 3-6 Ergodic Channel Capacity for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ$ and $Dmax = 3\lambda$

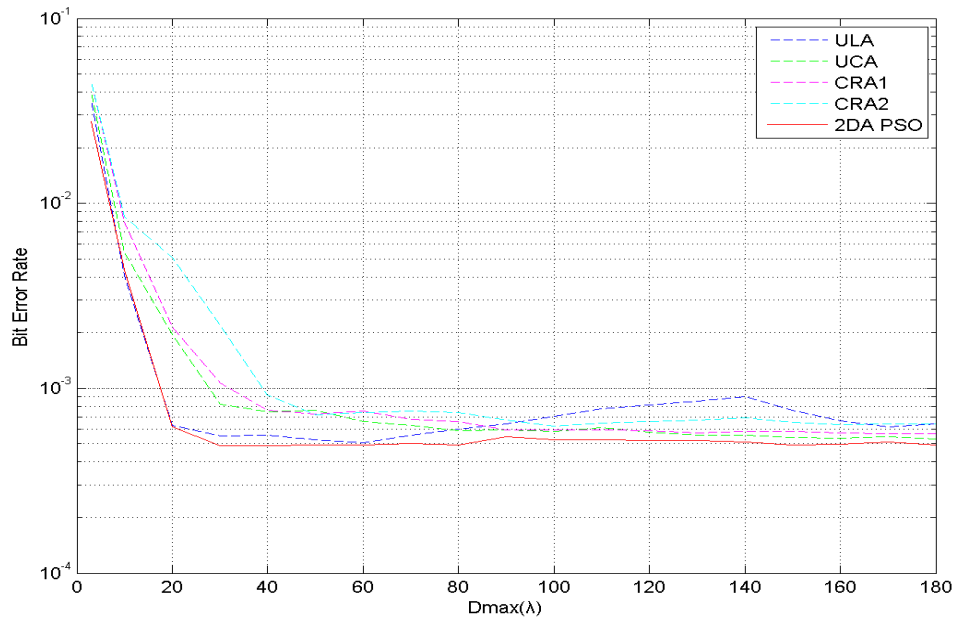


圖 3-7 Bit Error Rate for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ$ and $Dmax = 3\lambda$

$AS = 20^\circ$	E1	E2	E3	E4	E5	E6
$x (\lambda)$	3.0000	1.8746	0.6309	-0.6311	-1.8746	-3.0000
$y (\lambda)$	-0.0003	-0.0020	-0.0036	-0.0037	-0.0028	-0.0002
$z (\lambda)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

$AS = 120^\circ$	E1	E2	E3	E4	E5	E6
$x (\lambda)$	2.9990	1.3976	1.2984	-0.7166	-1.9945	-2.8187
$y (\lambda)$	0.0784	-1.8390	2.7041	-2.9132	1.9898	-0.8498
$z (\lambda)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

表 3-3 Optimization Results of 2DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ$ and $Dmax = 3\lambda$

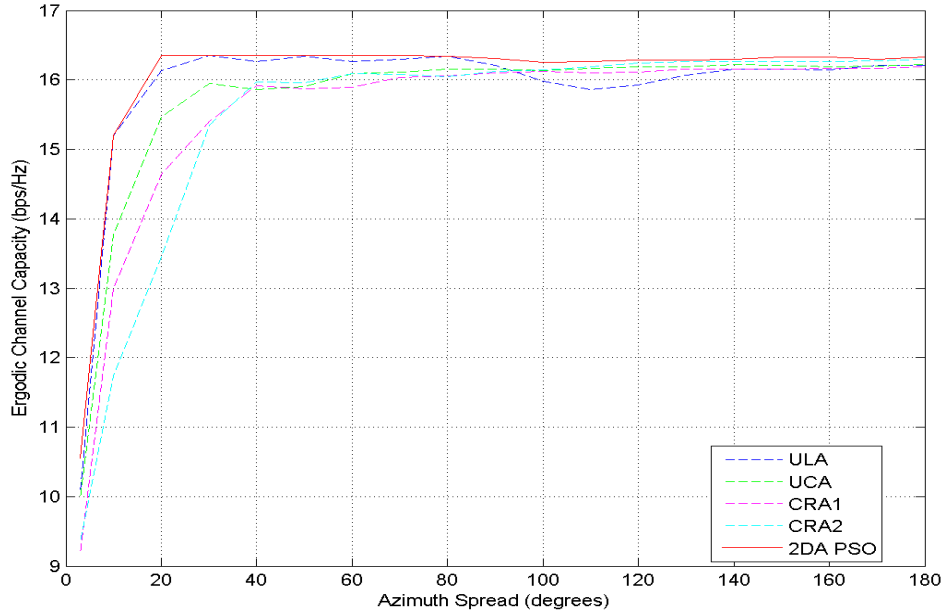


图 3-8 Ergodic Channel Capacity for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

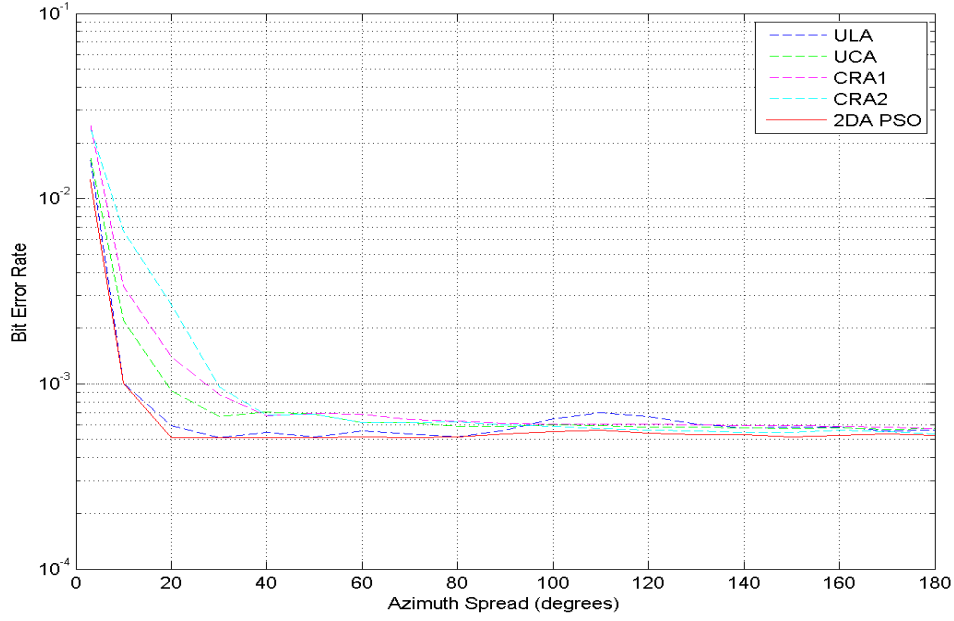


圖 3-9 Bit Error Rate for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

$AS = 20^\circ$	E1	E2	E3	E4	E5	E6
$x (\lambda)$	4.9999	3.5822	0.7064	-0.7362	-2.1770	-5.0000
$y (\lambda)$	0.0357	0.0343	0.1339	0.1364	0.1391	0.0151
$z (\lambda)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

$AS = 120^\circ$	E1	E2	E3	E4	E5	E6
$x (\lambda)$	3.8060	2.7931	2.0660	-1.4215	-3.0546	-4.0928
$y (\lambda)$	3.2369	-3.4256	0.7315	4.3322	-3.9554	-0.8563
$z (\lambda)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

表 3-4 Optimization Results of 2DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

3.8.3 陣列大小

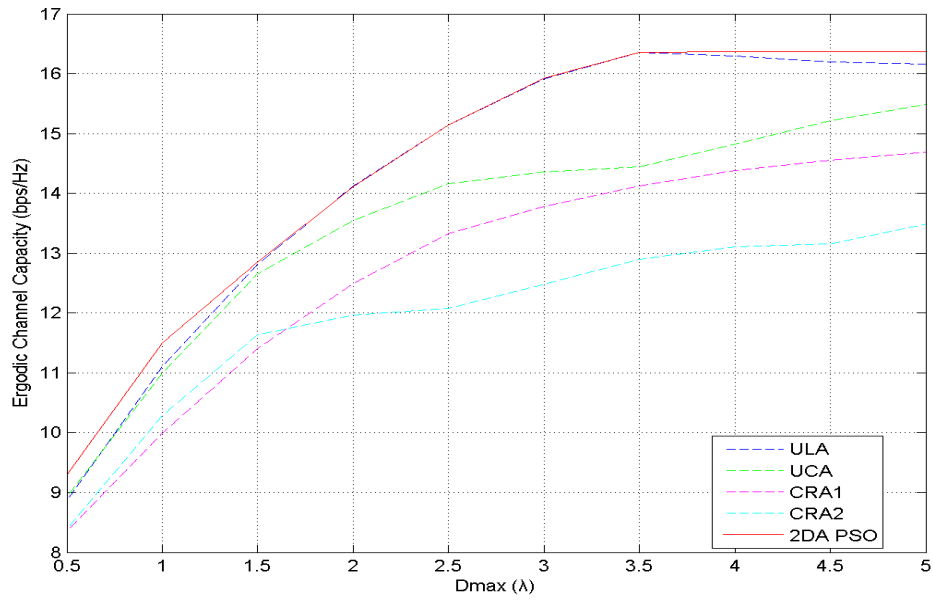


圖 3-10 Ergodic Channel Capacity for varying Dmax with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

MAOA = 90° and AS = 20°

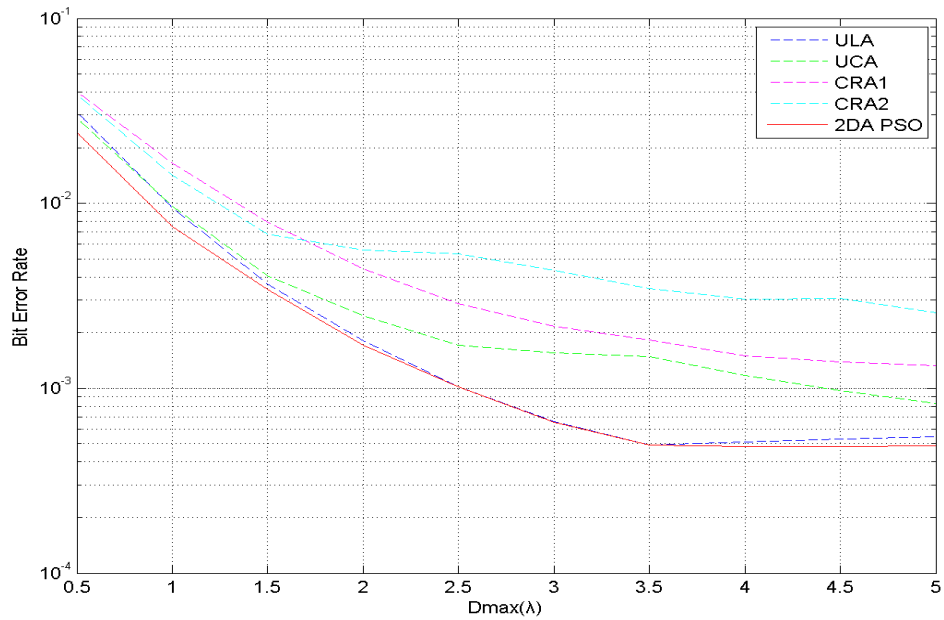


圖 3-11 Bit Error Rate for varying Dmax with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

MAOA = 90° and AS = 20°

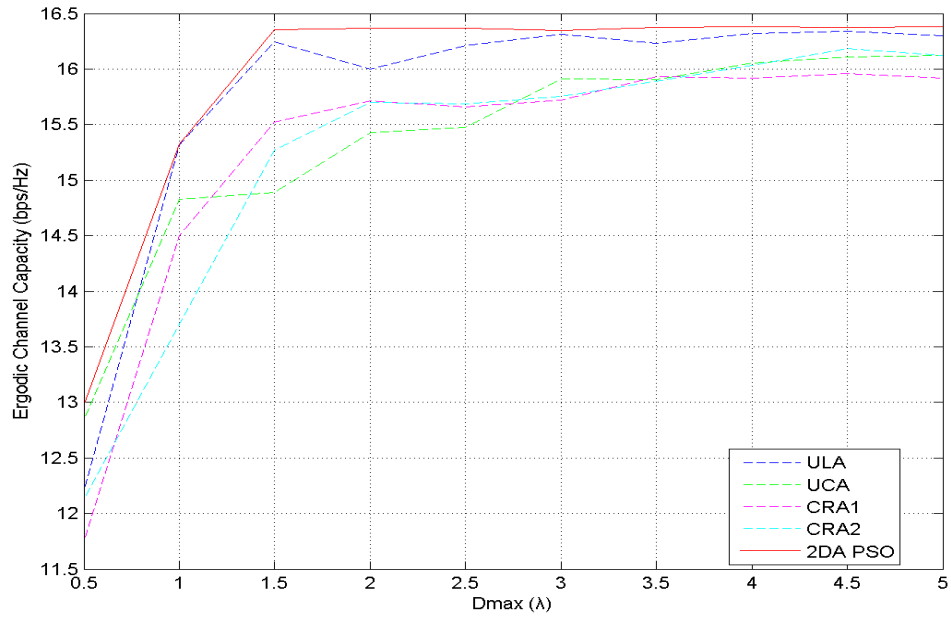


圖 3-12 Ergodic Channel Capacity for varying Dmax with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,
MAOA = 90° and AS = 60°

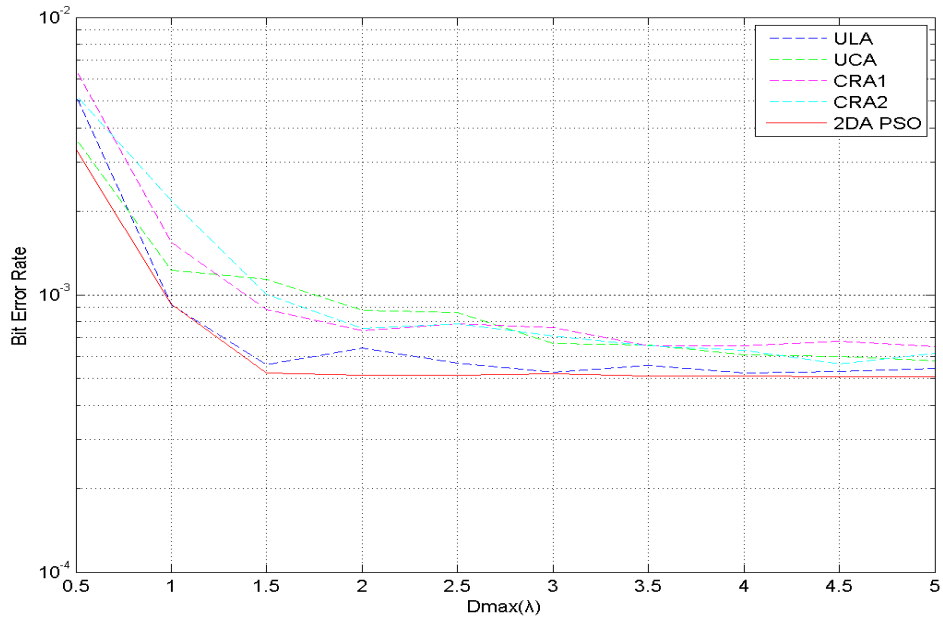


圖 3-13 Bit Error Rate for varying Dmax with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,
MAOA = 90° and AS = 60°

3.8.4 天線數

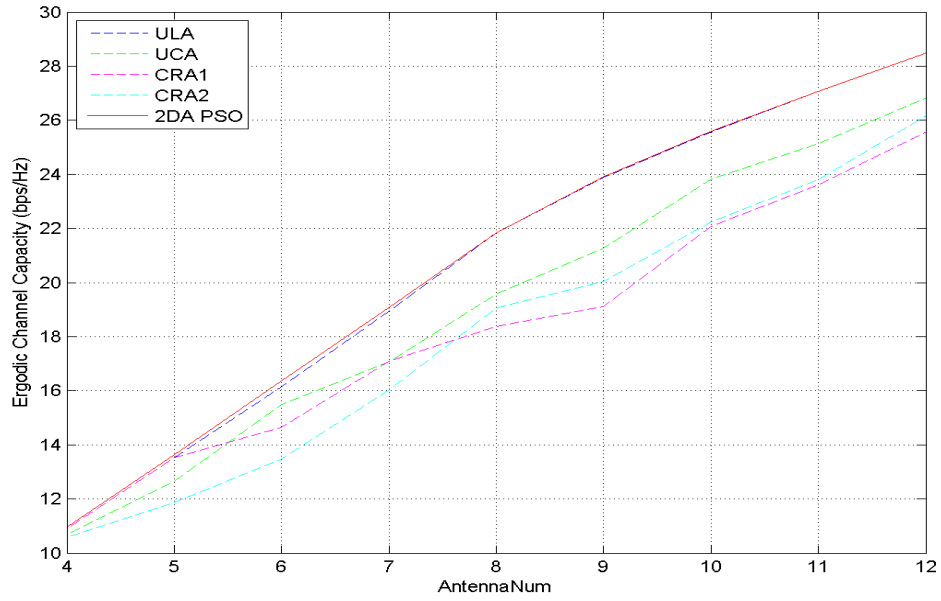


圖 3-14 Ergodic Channel Capacity for varying Antenna Number with

$$MAOA = 90^\circ, AS = 20^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

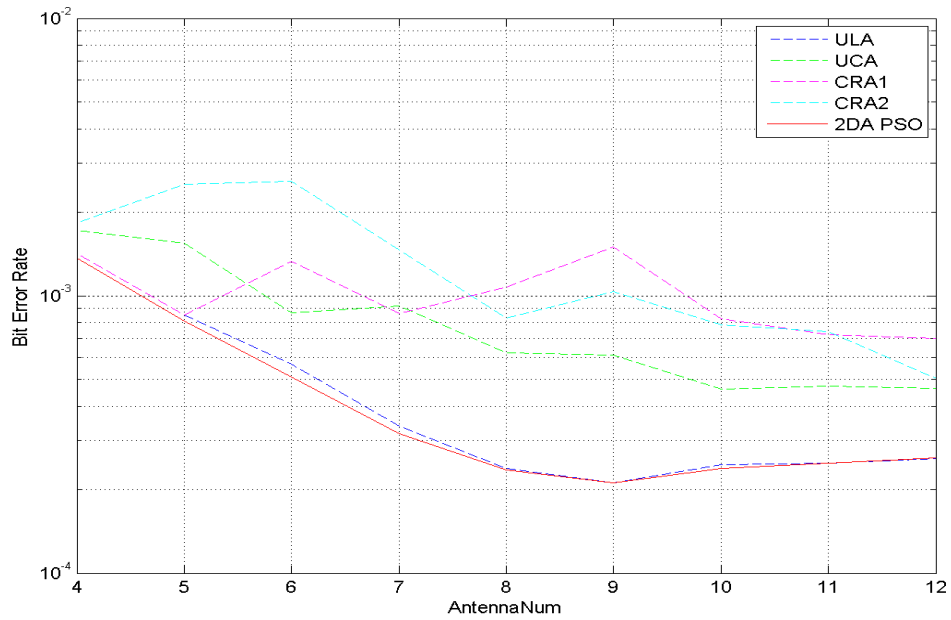


圖 3-15 Bit Error Rate for varying Antenna Number with

$$MAOA = 90^\circ, AS = 20^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

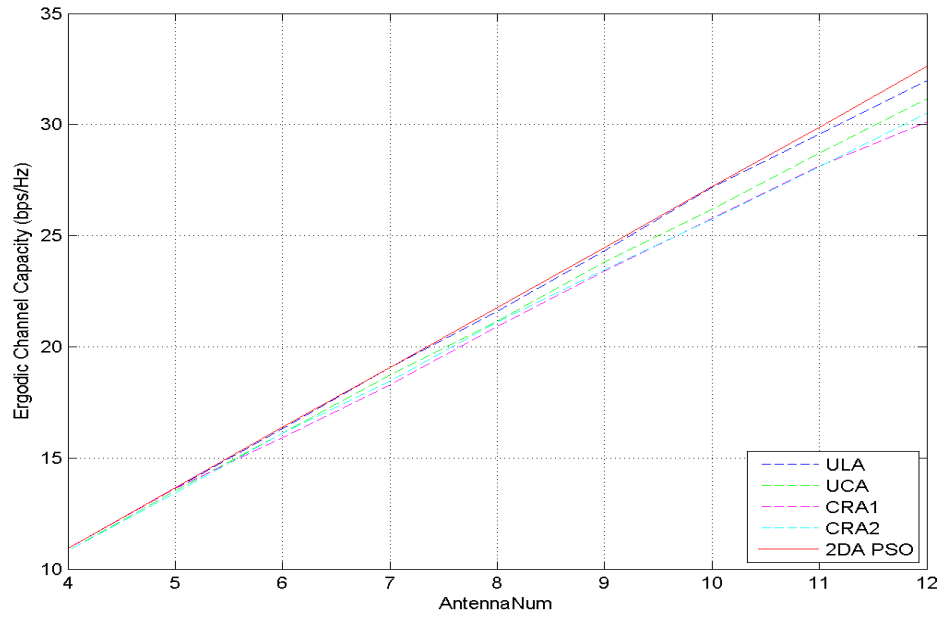


圖 3-16 Ergodic Channel Capacity for varying Antenna Number with
 $MAOA = 90^\circ$, $AS = 60^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

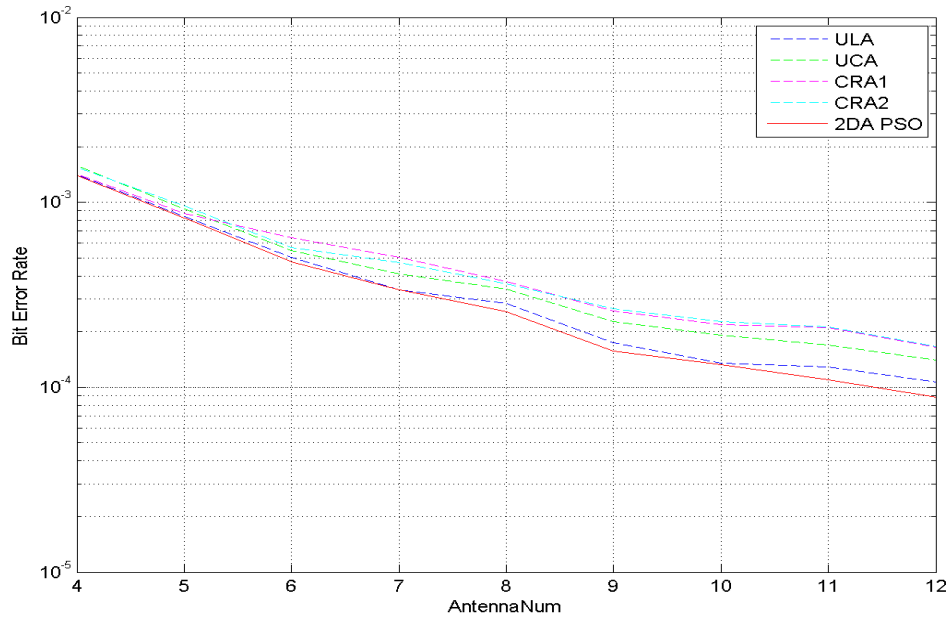


圖 3-17 Bit Error Rate for varying Antenna Number with
 $MAOA = 90^\circ$, $AS = 60^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

由模擬結果來看，天線陣列效能會受到入射信號角度的擴散狀況以及陣列的大小影響，其影響來自於空間相關性矩陣，雖然沒有很直接的公式能夠說明入射信號角度的擴散狀況及陣列的大小如何影響天線陣列效能，但基本上陣列之效能會隨著整體空間相關性上升而下降。

對於 MAOA 的影響，在 AS 較小時，MAOA 對天線陣列效能的影響較大，其中 ULA 對 MAOA 的改變最為敏感，主要是因為如同 2.3 節所述，二天線間之空間相關性受到二天線之方位角與 MAOA 夾角之影響，在此夾角為 90 度時空間相關性會最小，相反在 0 度時空間相關性會最大，而 ULA 任二天線之方位角皆相同，因此 MAOA 改變會同時變大變小，因此 ULA 對於 MAOA 的改變非常敏感。相對於 ULA，二維陣列對於 MAOA 的改變的影響就較小，主因是因為陣列中天線間之方位角皆不相同，因此受 MAOA 的影響較小。而在 AS 較小時，MAOA 的影響可以下面簡單的方法來估計，將天線陣列的元件投影於一垂直於 MAOA 之直線上，則對應投影兩端二元件間距最短之 MAOA 即為天線陣列表現最差之方向，例如由圖 3-2 及圖 3-3 可以發現六元件之 UCA、CRA1 及 CRA2 對於 MAOA 之影響為每 60 度對稱，UCA 最差之情況為 MAOA 為 0 度，而 CRA1 及 CRA2 則為 MAOA 為 30 度之情況。而在 AS 較大時，由圖 3-4 及圖 3-5 可以發現 MAOA 對天線陣列效能的影響變得很小，四種固定天線陣列之效能皆距離最佳化結果之效能不遠，當然其中還是以 ULA 對 MAOA 的改變較為敏感，但最高與最低的通道容量差距不到 1bps/Hz。對於最佳化結果之效能而言，其不受 MAOA 的改變而影響，主要是因為在此限制範圍在一圓內，MAOA 的改變僅會造成 PSO 最佳化結果其旋轉，而實際上效能是相同的。

對於 AS 的影響，趨勢上陣列效能隨著 AS 上升而上升，主要是因為空間相關性公式中 $\text{sinc}(k\Delta_\xi)$ 這項，該項會隨著 AS 上升而下降，因此使得陣列的空間相關性下降，效能上升，並且很快的達到飽和，此時陣列的空間相關性矩陣接近單位

矩陣，並且由圖 3-6 至圖 3-9 可以發現 ULA 在 MAOA 爲 90 度，並且 AS 小於 90 度時，其效能十分接近最佳化後之結果；相對於 ULA，其餘三種二維天線陣列在 AS 小於 90 度時，與最佳化之結果相比差距較大。在 AS 大於 90 度時，二維陣列的效能皆優於 ULA，其中 UCA 較接近最佳化後之結果，而 CRA2 略優於 CRA1。而由表 3-3 及表 3-4 也可以看出 2DA PSO 之結果在 AS 爲 20 度時接近於線性陣列，而在 AS 爲 120 度時則接近於圓形陣列。

對於陣列大小的影響，會隨著陣列大小變大而效能上升，這是因爲空間相關性會隨著天線間距變大而下降之故，其下降的趨勢可以參考第二章的模擬結果。而對於陣列天線數的影響，可以發現通道容量隨著天線數增加而上升，但對於 UCA、CRA1、CRA2 而言，陣列天線數改變也會改變其對 MAOA 的表現，因此通道容量上升較爲崎嶇。並且天線數增加使通道容量上升的效果會逐漸趨緩，這是因爲天線擺放範圍固定，而天線數增加雖然能帶來多餘的自由度及空間分集，但同樣的天線間距變小，造成空間相關性上升，因此通道容量的上升會趨緩，因此對於擴散較小的環境，通道容量上升趨緩的現象更爲明顯。然而在 V-BLAST 系統中一次傳送之位元數卻是隨著天線數線性上升，因此隨著通道容量上升的趨緩，位元錯誤率會不降反升。

整體而言，用 PSO 最佳化之天線陣列幾何結構，確實較其他常用之天線陣列在通道容量以及位元錯誤率上皆有較好的效能，並且通道容量與位元錯誤率在相同天線數情況下，呈現對應的情形。在水平擴散角度小的時候，與 MAOA 方向垂直之 ULA 其效能很接近最佳化之結果，而其他三種平面陣列效能則距離最佳化結果效能較大；而在水平擴散角度大的時候四種固定天線陣列效能皆很接近最佳化之結果，其中以 UCA 之效能最接近最佳化結果效能。因此在 AS 小時若能夠適當的旋轉 ULA，則 ULA 在此環境下有接近最佳的效能，而在 AS 大時則是 UCA 有接近最佳的效能。

第四章

三維擴散環境下天線陣列效能分析與最佳化

本章同樣爲了簡化問題，考慮半相關通道(semi-correlated channel)，意即僅考慮一端之空間相關性影響，在此假設接收端陣列之天線間具有空間相關性，而傳送端陣列則無，並且信號入射擴散爲 2.4 節敘述之三維擴散情況。在此環境下比較 ULA、UCA、CRA1 以及 CRA2 之通道容量及位元錯誤率，使用第三章所述之利用粒子群最佳化(particle swarm optimization, PSO)演算法尋找擁有最大通道容量之二維天線陣列幾何結構之演算法，並延伸至設計三維天線陣列幾何結構，觀察最佳化後之二維與三維天線陣列的效能及其形狀，並與上述之四種固定天線陣列效能做比較。目的在於除了天線陣列幾何結構最佳化，亦觀察上述之四種天線陣列之效能表現與相同環境下最佳之二維與三維天線陣列效能之差距，並且挖掘三維天線陣列的潛力。

4.1 系統簡介

本節首先介紹本章使用之系統模型，以及判斷天線陣列之效能之重要指標，通道容量及位元錯誤率，並且位元錯誤率與接收端如何偵測有關，因此本節也介紹了本章在模擬位元錯誤率時使用之最大相似性偵測法。

4.1.1 系統模型

本章考慮半相關平坦衰落通道(semi-correlated flat-fading channel)，系統參考 [20] 所述之 V-BLAST 系統架構，傳送端之天線數為 N_t ，接收端之天線數為 N_r ，因此信號模型可表示為

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (4.1)$$

使用之通道模型為 Kronecker model，此模型之公式為

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}_{rx}^{1/2} \mathbf{H}_w (\mathbf{R}_{tx}^{1/2})^\dagger \quad (4.2)$$

\mathbf{H}_w 中之元素為獨立且相同分佈之高斯隨機變數，其平均值為 0 而變異數為 1； \mathbf{R}_{tx} 為 $N_t \times N_t$ 之矩陣，其元素為傳送端陣列天線間之空間相關性； \mathbf{R}_{rx} 為 $N_r \times N_r$ 之矩陣，為接收端陣列天線間之空間相關性。關於 Kronecker model 詳細的介紹請參考 3.1 節。並且在此假設僅有接收端具空間相關性，接收端信號入射角度擴散在此假設為三維擴散，而二天線間之三維空間相關性之公式參考 2.4 節表示為

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_s(m, n) \approx & \frac{1}{N \sin(\theta_\varphi) \sin c(\Delta_\varphi)} [0.5 f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{N-1}) + 0.5 f(x_N)] \\ & + \frac{2}{N \sin(\theta_\varphi) \sin c(\Delta_\varphi)} \sum_{k=1}^{\infty} \left[i^k \cos(k(\theta_\zeta - \alpha)) \sin c(k\Delta_\zeta) \right. \\ & \left. [0.5 g_k(x_0) + g_k(x_1) + \cdots + g_k(x_{N-1}) + 0.5 g_k(x_N)] \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\text{其中} \quad \begin{cases} f(x) = e^{i2\pi r_{m,n} \cos(\beta_{m,n}) \cos(x)} \sin(x) J_0(2\pi r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \sin(x)) \\ g_k(x) = e^{i2\pi r_{m,n} \cos(\beta_{m,n}) \cos(x)} \sin(x) J_k(2\pi r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \sin(x)) \end{cases} \quad (4.4)$$

詳細的三維空間相關性推導請參考 2.4 節。

4.1.2 通道容量

在單一使用者系統的情況下，參考[22]假設接收端之道完整的通道狀態資訊(perfect channel state information at the receiver, CSIR)，但傳送端沒有通道狀態資訊(no channel state information at the transmitter, no CSIT)，則傳送的能量平均分配於各天線，此時通道容量(ergodic channel capacity)表示為

$$E[C] = E \left[\log \left(\det \left(\mathbf{I} + \rho \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H} \right) \right) \right] \quad (4.5)$$

其中 $\rho = \frac{P}{N_{tx} \sigma_n^2}$ ， P 為傳送之總功率， σ_n^2 為雜訊之功率。而在此使用蒙地卡羅方法(Monte Carlo method)來估計通道容量。

4.1.3 最大相似度準則

參考[23]在線性之 MIMO 系統中，接收端必須由 N_{rx} 個接收到之信號偵測出 N_{tx} 個傳送之符號，假設傳送之符號屬於 $\chi = \{x_1, \dots, x_L\}$ 大小為 L 之集合，而 $\chi^{N_{tx}}$ 為長度 N_{tx} 為之符號向量，其元素皆屬於 χ ，則接收端便是必須根據收到之信號由 $\chi^{N_{tx}}$ 中一共 $L^{N_{tx}}$ 個可能傳送之符號向量中選擇其一，因此很直觀的，最理想也就是最小化符元錯誤率(symbol error rate, SER)之準則(criterion)便是選擇給定接收到之信號 \mathbf{y} 後，擁有最大後驗機率(maximum a posterior probability, MAP)之符號向量 $\hat{\mathbf{s}}$ ，表示為

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \max_{\mathbf{s} \in \chi^{N_{tx}}} P(\mathbf{s} \text{ was sent} | \mathbf{y} \text{ is observed}) \quad (4.6)$$

$$= \arg \max_{\mathbf{s} \in \chi^{N_{tx}}} \frac{P(\mathbf{y} \text{ is observed} | \mathbf{s} \text{ was sent}) P(\mathbf{s} \text{ was sent})}{P(\mathbf{y} \text{ is observed})} \quad (4.7)$$

(4.6)即為最大後驗機率準則。而假設可能傳送之符號向量其傳送機率皆相同，換言之 $P(\mathbf{s} \text{ was sent})$ 為常數，則最大後驗機率偵測法可以簡化為

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \max_{\mathbf{s} \in \mathcal{X}^{N_{tx}}} P(\mathbf{y} \text{ is observed} | \mathbf{s} \text{ was sent}) \quad (4.8)$$

(4.8)即為最大相似度(maximum likelihood, ML)準則。並且一般而言雜訊會假設其屬於加成性白高斯雜訊(Additive White Gaussian Noise, AWGN)，則可以將最大相似偵測法轉變為尋找可能接收到之未帶雜訊信號與實際接收到之信號 \mathbf{y} 間，歐幾里德距離(squared Euclidean distance)最小之該符號向量，表示為

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{s} \in \mathcal{X}^{N_{tx}}} \|\mathbf{H}\mathbf{s} - \mathbf{y}\|^2 \quad (4.9)$$

同時(4.9)亦可稱為最小距離(minimum distance, MD)準則。

4.1.4 位元錯誤率模擬

在 V-BLAST 系統架構中，假設傳送之符號為 BPSK，則每一次傳送之符號向量帶有 N_{tx} 個位元。因此在此位元錯誤率模擬為根據(4.2)產生一隨機之通道，並產生數組隨機之符號向量 \mathbf{s}_i ，模擬經過該通道並加上雜訊，並在接收端使用(4.9)之準則偵測原來傳送之符號向量 $\hat{\mathbf{s}}_i$ ，最後根據的差別即可計算該通道之位元錯誤率。重複以上程序計算數組隨機之通道之位元錯誤率並平均之，即可得到系統之位元錯誤率。

4.2 天線陣列幾何結構最佳化

本節說明天線陣列幾何結構最佳化詳細的過程。簡述粒子群最佳化演算法，以及在此使用之適應值函數，並且本章環境為三維擴散之環境，如第二節所討論，在三維擴散環境下三維之天線陣列幾何結構有其獨特之空間特性，因此本節包含了最佳化二維天線陣列以及三維天線陣列。

4.2.1 粒子群最佳化演算法

假設群體中有 M 個粒子，初始時由搜索空間中從隨機的位置開始，對一個 N 維的問題，則其群體之位置以及速度可以分別表示為一個 $N \times M$ 的矩陣如下：

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_M] \quad (4.10)$$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_M] \quad (4.11)$$

位置矩陣 \mathbf{X} 中的 \mathbf{x}_i 代表了第 i 個粒子目前的位置，而速度矩陣 \mathbf{V} 中的 \mathbf{v}_i 則代表了第 i 個粒子目前的速度。第 i 個粒子個別經歷過最佳位置則定義為 \mathbf{p}_i ，而 $Pbest_i$ 則為位於 \mathbf{p}_i 時之適應值，而在此將 \mathbf{p}_i 組合為矩陣 \mathbf{P}

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_M] \quad (4.12)$$

若現在所在位置之適應值 $f(\mathbf{x}_i)$ 較 $Pbest_i$ 好，則將 \mathbf{p}_i 更新為 \mathbf{x}_i ， $Pbest_i$ 更新為 $f(\mathbf{x}_i)$ 。同時 $Pbest_i$ 必須與群體經歷過的最佳適應值 $Gbest$ 比較，若較好則將更新全域最佳位置 \mathbf{g} 更新為 \mathbf{p}_i ，而 $Gbest$ 更新為 $Pbest_i$ 。

$$\mathbf{g} = [g_1 \quad g_2 \quad \cdots \quad g_N]^T \quad (4.13)$$

\mathbf{X} 、 \mathbf{V} 、 \mathbf{P} 和 \mathbf{g} 包含了 PSO 演算法所需的所有資訊，其核心概念便是在每次迭代中更新這些矩陣，各個粒子在空間中移動之軌跡趨勢上向著個別最佳解以及全域最佳解移動，並計算其所經位置之適應值，若較好則更新個別最佳解以及全域最佳解，隨著一次次迭代逐漸搜尋到該搜索空間最佳的位置。而速度矩陣 \mathbf{v} 以及位置矩陣 \mathbf{X} 更新公式參考[12]，如下

$$v_{n,m}^{t+1} = w^t v_{n,m}^t + c_1 U_1 \times (p_{n,m}^t - x_{n,m}^t) + c_2 U_2 \times (g_n^t - x_{n,m}^t) \quad (4.14)$$

$$x_{n,m}^{t+1} = x_{n,m}^t + v_{n,m}^{t+1} \quad (4.15)$$

U_1 以及 U_2 為在 $[0,1]$ 區間中均勻分布之隨機變數，並且速度向量中 n 個成分間彼此不同，此二參數是爲了保持群體在搜索過程中的隨機性。 c_1 和 c_2 為向個別最佳位

置與向全域最佳位置移動之加速因子(acceleration)，先前的研究[25]顯示設為 2.0 是較為理想的選擇。而參數 w 則稱為慣性權重(inertial weight)，根據[26]建議使慣性權重隨著迭代由較大之 w_{start} 線性下降至較小之 w_{end} ，其線性下降可由下式表示

$$w^t = w_{start} - \frac{w_{start} - w_{end}}{t_{max}} \times t \quad (4.16)$$

其中 t_{max} 為最大迭代次數，並且根據其建議，將 w_{start} 設為 0.9， w_{end} 設為 0.4。而因為速度更新公式中並沒有限制速度的參數，因此需要 V_{max} 來限制速度，根據[25, 26]一般設定為搜索空間之 10~20%，若是速度超過 V_{max} 則令之等於 V_{max} 。

在此僅簡略說明該演算法的運作，因此關於粒子群最佳化演算法的詳細背景及解釋請參考 3.5 節。

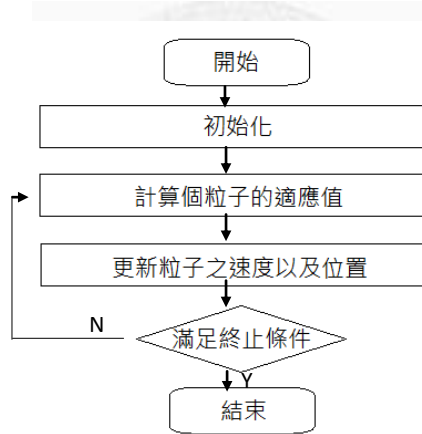


圖 4-1 粒子群最佳化簡易流程圖

4.2.2 適應值函數設計

演算法的目標在於

$$\max E \left[\log \left(\det \left(\mathbf{I} + \rho \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H} \right) \right) \right] \quad (4.17)$$

而在此因為最佳化效率的考量，將最大化通道容量的問題轉變最大化通道容量上界，詳細的推導過程以及適應值函數效能之比較請參考第三章。通道容量上界表示為

$$E[C] = E\left[\log\left(\det(\mathbf{I} + \rho\mathbf{H}^\dagger\mathbf{H})\right)\right] < \log\left(E\left[\det(\mathbf{I} + \rho\mathbf{H}^\dagger\mathbf{H})\right]\right) \quad (4.18)$$

並且可以逐步化簡爲下式：

$$E[C] < \log\left(\sum_{k=0}^N k! \rho^k \sum_{\mathbf{a}, |\mathbf{a}|=k} \lambda_{tx, \alpha_1} \cdots \lambda_{tx, \alpha_k} \sum_{\mathbf{\beta}, |\mathbf{\beta}|=k} \lambda_{rx, \beta_1} \cdots \lambda_{rx, \beta_k}\right) \quad (4.19)$$

其中 $\lambda_{tx, i}$ 與 $\lambda_{rx, i}$ 爲傳送端與接收端空間相關性矩陣之特徵值，在此即令此通道容量上界爲適應值函數。並且對於傳送端無空間相關性的情況，此適應值函數可以簡化爲

$$Fitness\ Function = \log\left(\sum_{k=0}^N \frac{\rho^k}{(N-k)!} \sum_{\mathbf{\beta}, |\mathbf{\beta}|=k} \lambda_{rx, \beta_1} \cdots \lambda_{rx, \beta_k}\right) \quad (4.20)$$

接著簡化 $\sum_{\mathbf{a}, |\mathbf{a}|=k} \lambda_{\alpha_1} \cdots \lambda_{\alpha_k}$ 之計算，首先令

$$E_k = \sum_{\mathbf{a}, |\mathbf{a}|=k} \lambda_{\alpha_1} \cdots \lambda_{\alpha_k} \quad \text{and} \quad S_k = (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^N \lambda_i^k \quad (4.21)$$

則 E_k 剛好可以滿足

$$E_0 = 1 \quad \text{and} \quad E_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k E_{k-i} S_i \quad (4.22)$$

4.2.3 利用 PSO 最佳化天線陣列幾何結構

本章考慮半相關通道，假設僅接收端具空間相關性，而傳送端則無，接收端信號入射角擴散假設爲三維擴散，因此 \mathbf{R}_{rx} 使用 2.4 節推導之結果，並假設 $N_r = N_t = N$ 。在此環境下利用 4.2.1 節所述之 PSO 演算法最佳化天線陣列幾何結構，因在三維擴散環境下三維之天線陣列有其特殊的空間特性，因此在此除了尋找擁有最佳通道容量之二維天線陣列，在同樣情況下亦尋找擁有最佳通道容量之三維天線陣列。而如同我們在第二章所述，陣列中任一個天線擺放的位置都可以用一組使用直角座標系的座標來表示，而在此便是透過此天線之座標來描述陣列

的形狀。因此在 PSO 中，一組座標即為粒子的一個可能的位置，換言之為 4.2.1 節所述之 \mathbf{X} 矩陣中的一行，因此在這個問題中，PSO 在維度為三倍天線個數之空間中搜索最佳之陣列幾何結構。而對於二維陣列以及三維天線陣列，其搜索空間限制條件分別為設為

$$\left\{x_m, y_m, z_m \mid \sqrt{x_m^2 + y_m^2} \leq Dmax, z_m = 0\right\} \quad (4.23)$$

以及

$$\left\{x_i, y_i, z_i \mid \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} \leq Dmax\right\} \quad (4.24)$$

亦即分別在半徑為 $Dmax$ 之「圓型」以及「球型」的範圍內尋找最佳之天線陣列幾何結構。 $Dmax$ 為陣列大小限制參數，其單位為波長(λ)。並且在此假設 $N_r = N_t = N$ ，而 PSO 演算法中的粒子數為 16，迭代次數為 500 次，且令通道容量之上界(3.43)為本章之適應值函數，而[10]顯示 UCA 在三維信號入射角度擴散中具有良好的效能，因此為了加速最佳化的進行，將第一個粒子初始位置設為半徑為 $Dmax$ 之 UCA，而其餘初始位置則為隨機。以下步驟一步驟的說明最佳化之過程。

重要參數：

N 天線數、 θ_ξ 平均水平入射角、 Δ_ξ 水平角度擴散、 θ_ϕ 平均垂直入射角、 Δ_ϕ 垂直角度擴散、 $Dmax$ 陣列大小限制、 \mathbf{X} 粒子位置、 V_{max} 速度限制、 \mathbf{V} 粒子速度、 \mathbf{P} 個別最佳位置、 \mathbf{g} 群體最佳位置、 $f(\mathbf{R})$ 適應值函數、 $Pbest_i$ 個別最佳適應值、 $Gbest$ 群體最佳適應值、 t_{max} 最大迭代次數。

step 1: 設定 N 、 θ_ξ 、 Δ_ξ 、 θ_ϕ 、 Δ_ϕ 、 $Dmax$ 、 $f(\mathbf{x})=(4.20)$ 、粒子數=16， $t_{max}=500$ ，

$w_{start}=0.9$ ， $w_{end}=0.4$ ，而 $V_{max}=Dmax/5$ 。

step 2: 初始化粒子位置 \mathbf{X} 、粒子速度 \mathbf{V} 、個別最佳適應值 $Pbest_i$ 以及群體最佳適應值 $Gbest$ 。初始粒子位置 \mathbf{x}_1 設為半徑為 $Dmax$ 之 UCA 天線陣列架構，其餘 $\mathbf{x}_2 \sim \mathbf{x}_{16}$ 均勻的隨機分布在搜索空間中，初始粒子速度 $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ ，而 $Pbest_i = 0$ ， $Gbest = 0$ ，且迭代次數 $t = 1$ 。

step 3: 計算各粒子之適應值 $f(\mathbf{x}_i)$ 。首先由粒子位置轉為天線陣列之元件座標，並由座標使用 2.4 節之三維空間相關性公式計算該天線陣列之空間相關性，最後使用 (4.20) 由空間相關性計算通道容量上界作為該粒子之適應值， $i = 1 \sim 16$ 。

step 4: 比較粒子之適應值 $f(\mathbf{x}_i)$ 與個別最佳適應值 $Pbest_i$ 大小。若 $f(\mathbf{x}_i)$ 較 $Pbest_i$ 大，則令 $Pbest_i$ 更新為 $f(\mathbf{x}_i)$ ，並令 \mathbf{p}_i 更新為 \mathbf{x}_i ， $i = 1 \sim 16$ 。

step 5: 比較個別最佳適應值 $Pbest_i$ 與群體最佳適應值 $Gbest$ 。若 $Pbest_i$ 較 $Gbest$ 大，則令 $Gbest$ 更新為 $Pbest_i$ ，而 \mathbf{g} 更新為 \mathbf{p}_i ， $i = 1 \sim 16$ 。

step 6: 更新粒子位置 \mathbf{X} 及粒子速度 \mathbf{V} 。使用 (4.14) 更新 \mathbf{V} ，其中 w' 符合 (4.16)，並且令其中大於 V_{max} 的等於 V_{max} 。用 (4.15) 更新 \mathbf{X} ，並令其中超過搜索範圍限制條件 (4.23) 或 (4.24) 者停在搜索範圍之邊界。

step 7: $t = t + 1$ 。若 $t < t_{max}$ ，則回 step 3；若 $t = t_{max}$ ，則結束，而最後之群體最佳位置 \mathbf{g} 即為最佳化之結果。

4.3 模擬結果

在此會分別模擬如第一章介紹之 ULA、UCA、CRA1 以及 CRA2 四種固定之天線陣列幾何形狀之通道容量以及位元錯誤率，並與我們提出之使用 PSO 最佳化幾何形狀之二維及三維天線陣列作比較，以下簡稱此二天線陣列為 2DA PSO 及 3DA PSO。通道容量的模擬為產生 3000 個隨機之通道，並根據 (4.5) 之公式計算其

通道容量並平均之；位元錯誤率模擬之程序如 4.4 節所述，為產生 5000 個隨機之通道，每一個通道傳送 100 個隨機之 BPSK symbols，並根據 4.3 節所述之最大相似度準則來偵測傳送之信號，最後根據原來之信號與偵測出之信號之差別計算其位元錯誤率。模擬的總 SNR 皆在 10dB，同時在接下來之模擬中，陣列大小限制參數 D_{max} 同時代表了 ULA 總長之一半、UCA 之半徑以及 CRA1 及 CRA2 之外圈半徑，意即六種天線陣列皆可放置於一半徑為 D_{max} 之球體內。

4.3.1 平均水平入射角

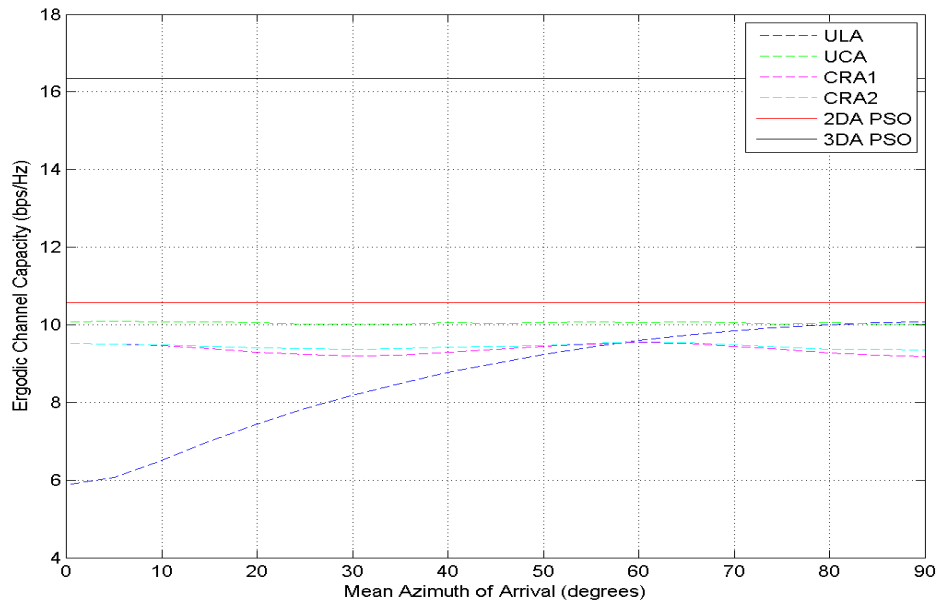


圖 4-2 Ergodic Channel Capacity for varying MAOA with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$$AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 5^\circ \text{ and } D_{max} = 5\lambda$$

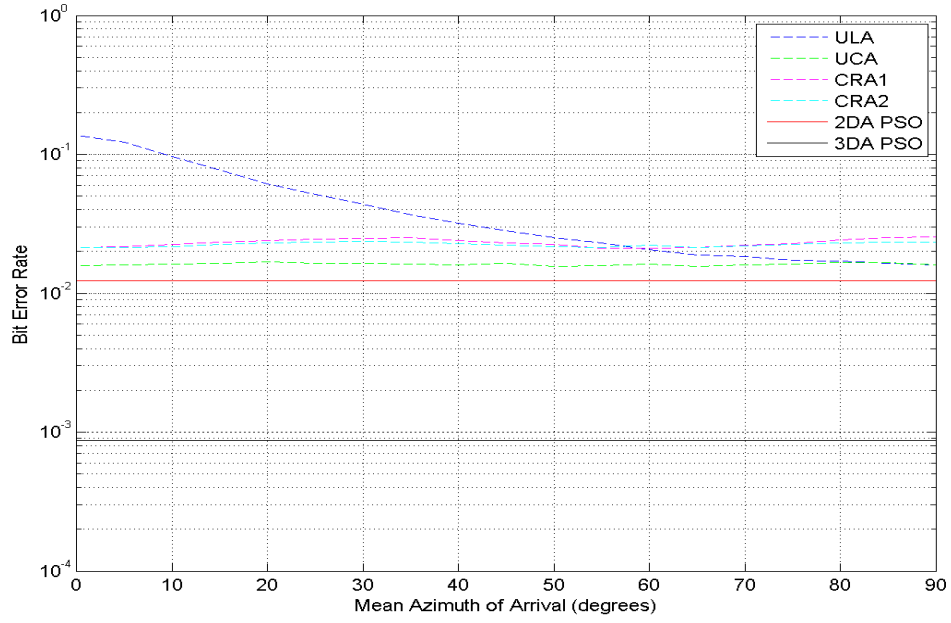


圖 4-3 Bit Error Rate for varying MAOA with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$AS = 3^\circ$, $MEOA = 90^\circ$, $ES = 5^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

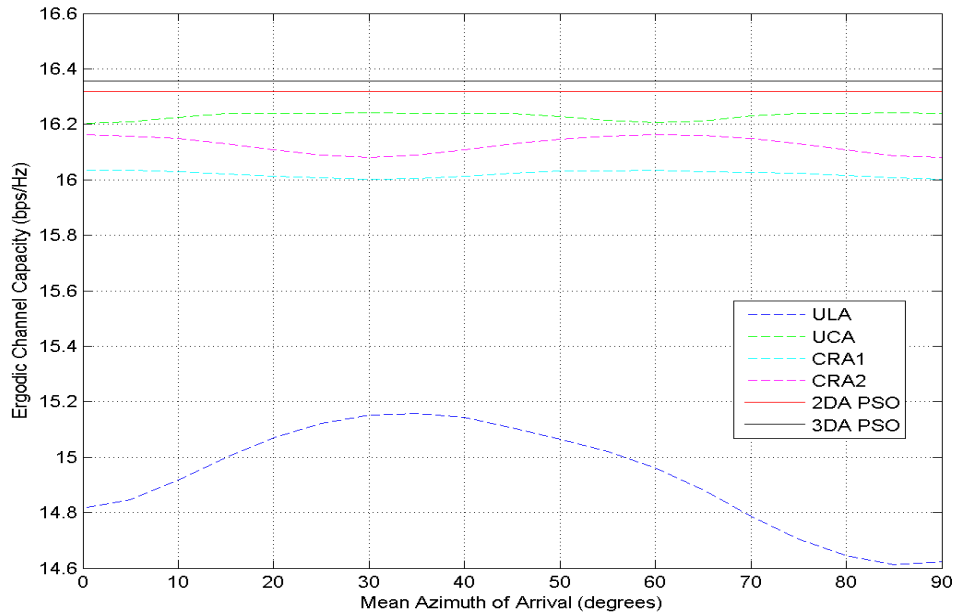


圖 4-4 Ergodic Channel Capacity for varying MAOA with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$AS = 10^\circ$, $MEOA = 60^\circ$, $ES = 20^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

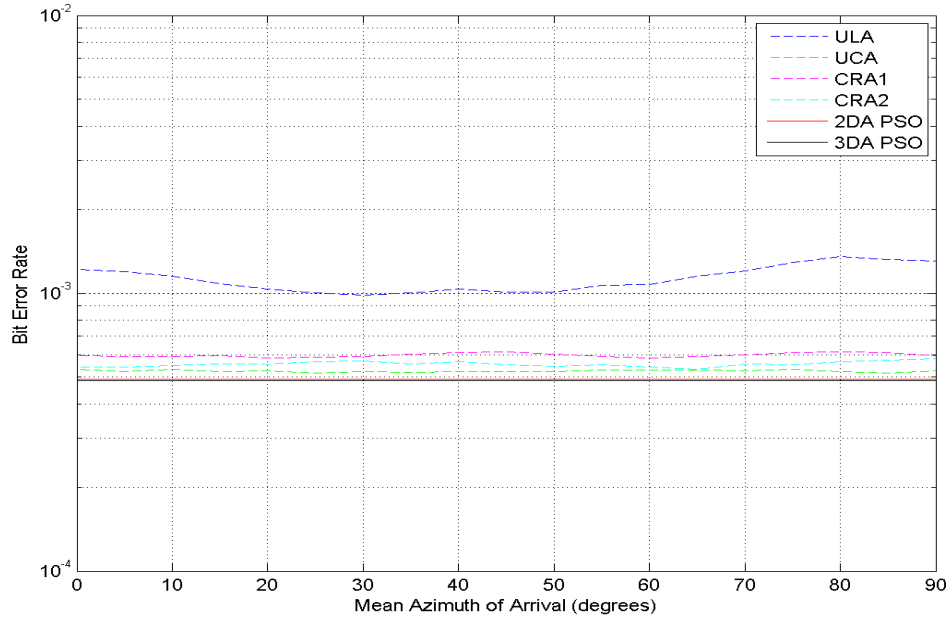


圖 4-5 Bit Error Rate for varying MAOA with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$AS = 10^\circ$, $MEOA = 60^\circ$, $ES = 20^\circ$ and $D_{max} = 5\lambda$

4.3.2 平均垂直入射角

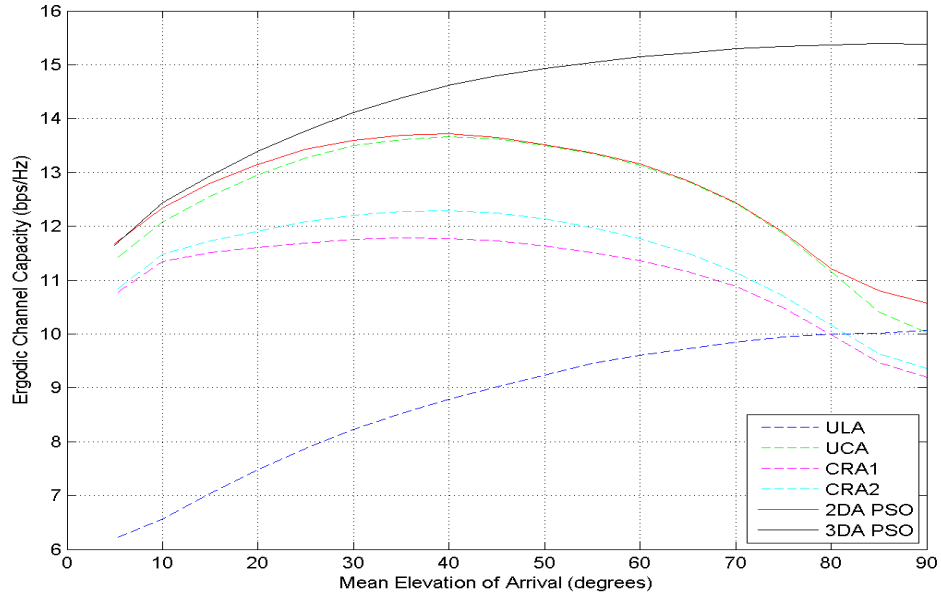


圖 4-6 Ergodic Channel Capacity for varying MEOA with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ$, $AS = 3^\circ$, $ES = 5^\circ$ and $D_{max} = 5\lambda$

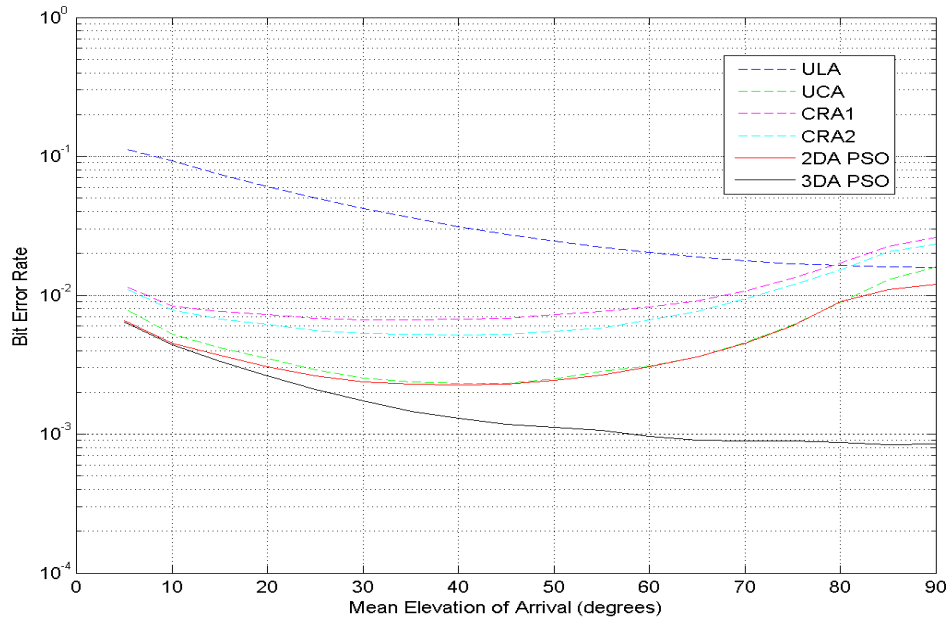


圖 4-7 Bit Error Rate for varying MEOA with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, ES = 5^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

2DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
$x (\lambda)$	4.6594	4.6593	0.0000	0.0000	-4.6593	-4.6594
$y (\lambda)$	1.8139	-1.8140	5.0000	-5.0000	-1.8140	1.8140
$z (\lambda)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

3DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
$x (\lambda)$	4.6597	4.6565	0.0046	0.0034	-4.6559	-4.6594
$y (\lambda)$	-1.6982	1.7049	4.6907	-4.6909	-1.7065	1.6947
$z (\lambda)$	0.6352	-0.6404	-1.7314	1.7307	0.6409	-0.6467

表 4-1 Optimization Results of 2DA PSO and 3DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, MEOA = 20^\circ, ES = 5^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

2DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.5270	3.8605	0.8299	-0.8302	-3.8605	-4.5274
y (λ)	-2.1228	3.1775	-4.9307	4.9306	-3.1775	2.1220
z (λ)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

3DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.8806	3.9683	1.5448	-1.5214	-3.9600	-4.8825
y (λ)	-0.5523	1.5084	-2.3961	2.3736	-1.5216	0.5936
z (λ)	0.9352	-2.6415	4.1076	-4.1293	2.6464	-0.8995

表 4-2 Optimization Results of 2DA PSO and 3DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, MEOA = 60^\circ, ES = 5^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

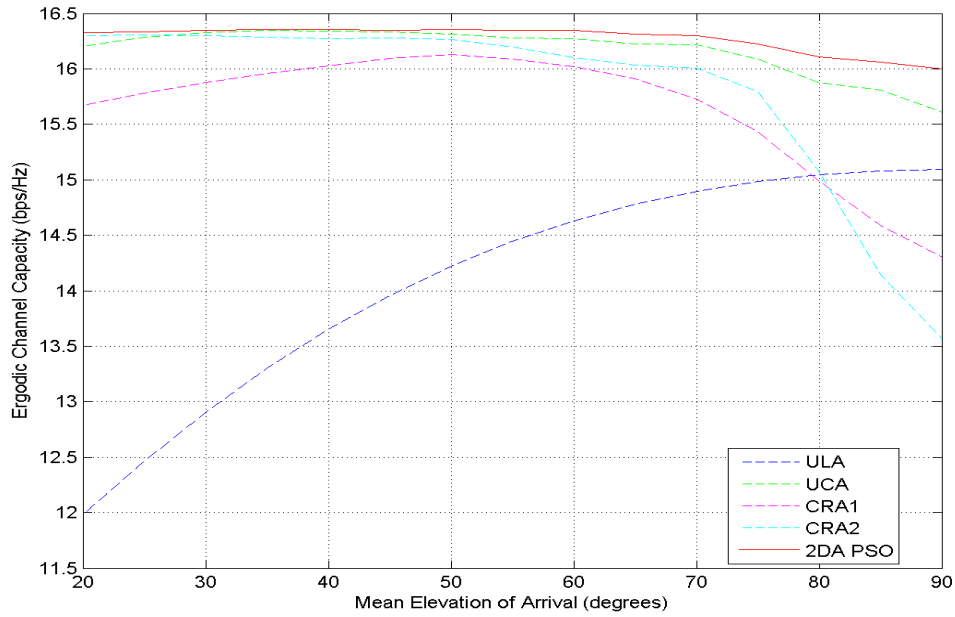


圖 4-8 Ergodic Channel Capacity for varying MEOA with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MEOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, ES = 20^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

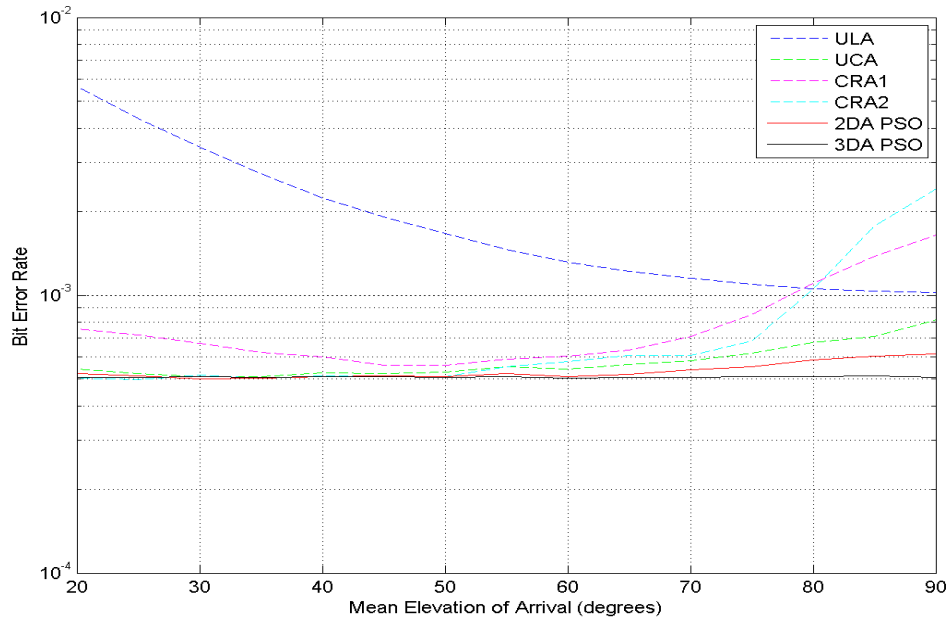


圖 4-9 Bit Error Rate for varying MEOA with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MEOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, ES = 20^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

2DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
$x (\lambda)$	4.9997	3.3986	2.1917	-1.1964	-3.4211	-4.9945
$y (\lambda)$	-0.0537	-3.6674	4.4940	2.5101	-3.6463	0.2341
$z (\lambda)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

3DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
$x (\lambda)$	4.9593	2.2685	-0.0548	-0.8078	-1.2257	-4.9885
$y (\lambda)$	-0.0967	3.0615	-3.0059	4.1698	-3.2911	-0.3250
$z (\lambda)$	0.6288	-0.6748	-0.1133	-2.6383	3.5587	-0.0964

表 4-3 Optimization Results of 2DA PSO and 3DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, MEOA = 20^\circ, ES = 20^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

2DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.9990	2.4681	0.3916	-0.3917	-2.4681	-4.9990
y (λ)	-0.1024	-4.3484	4.9846	-4.9846	4.3484	0.1021
z (λ)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

3DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	3.9220	3.8696	1.0449	0.4930	-2.0088	-4.0156
y (λ)	-0.2384	-0.0927	-0.3528	-0.4000	-0.3485	-0.3643
z (λ)	3.0823	-1.3117	-4.2691	1.5727	-1.2709	0.1458

表 4-4 Optimization Results of 2DA PSO and 3DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 20^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

4.3.3 水平角度擴散

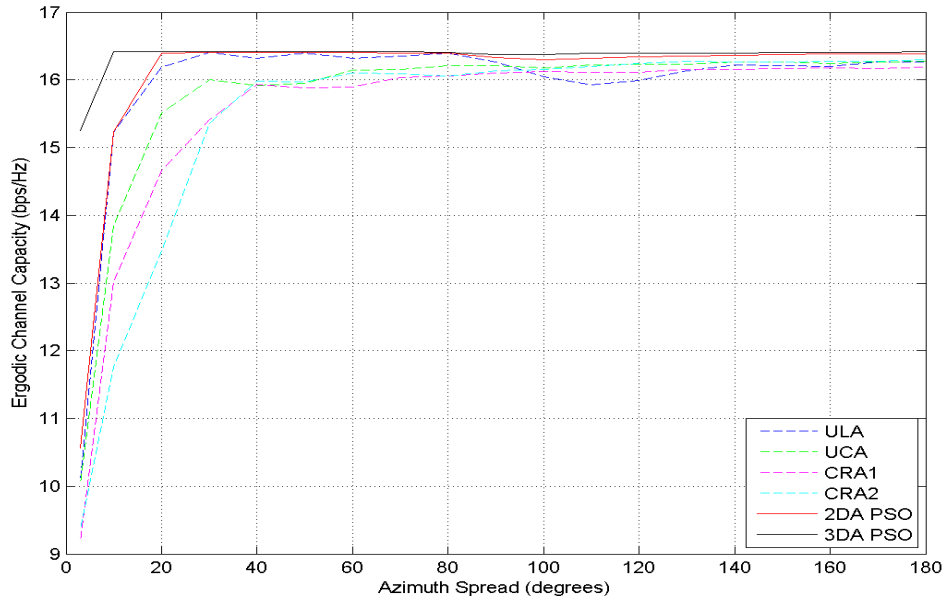


圖 4-10 Ergodic Channel Capacity for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 5^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

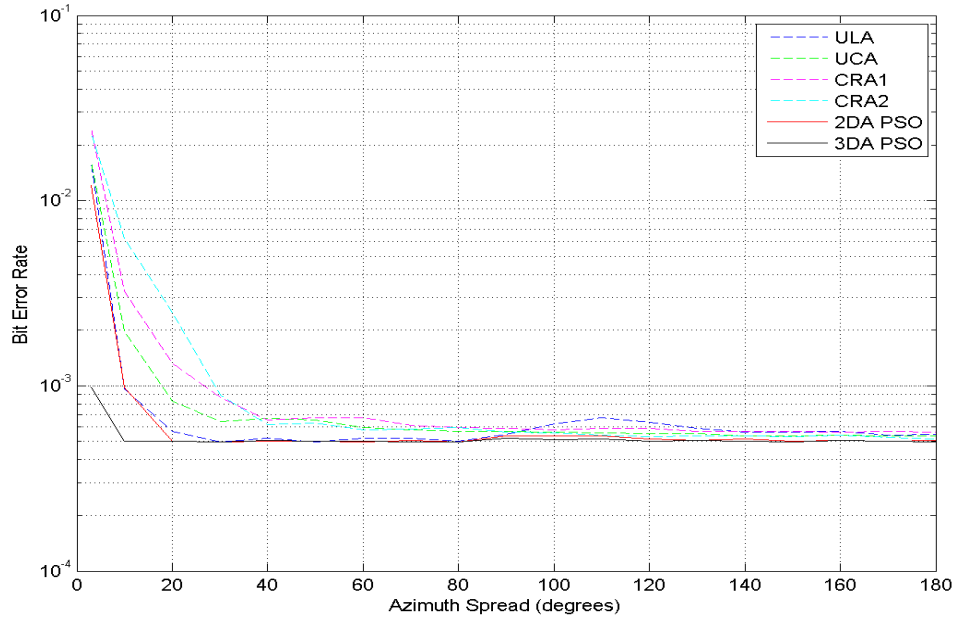


圖 4-11 Bit Error Rate for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,
 $MAOA = 90^\circ$, $MEOA = 90^\circ$, $ES = 5^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

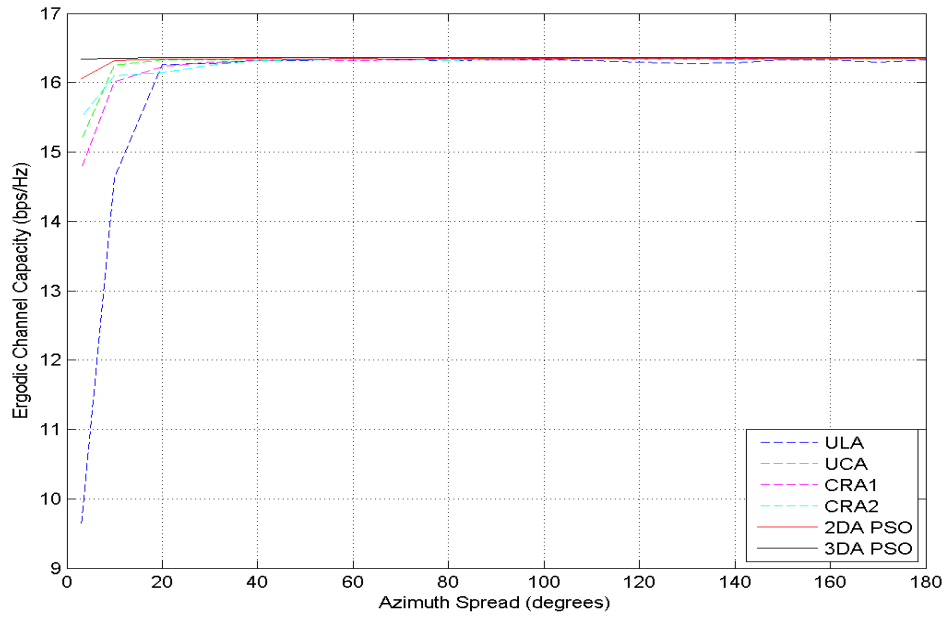


圖 4-12 Ergodic Channel Capacity for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,
 $MAOA = 90^\circ$, $MEOA = 60^\circ$, $ES = 20^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

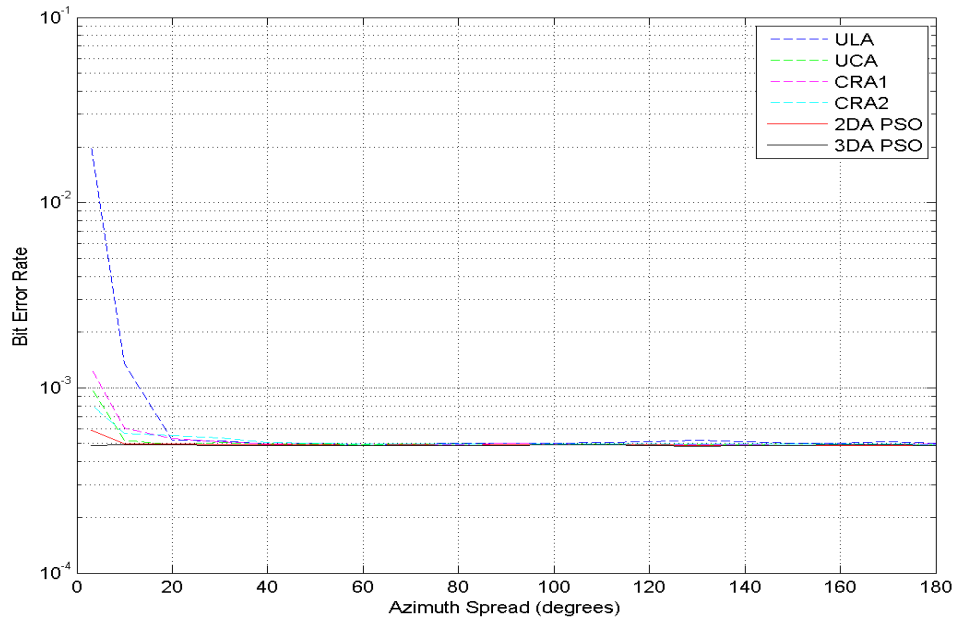


圖 4-13 Bit Error Rate for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ$, $MEOA = 60^\circ$, $ES = 20^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

4.3.4 垂直角度擴散

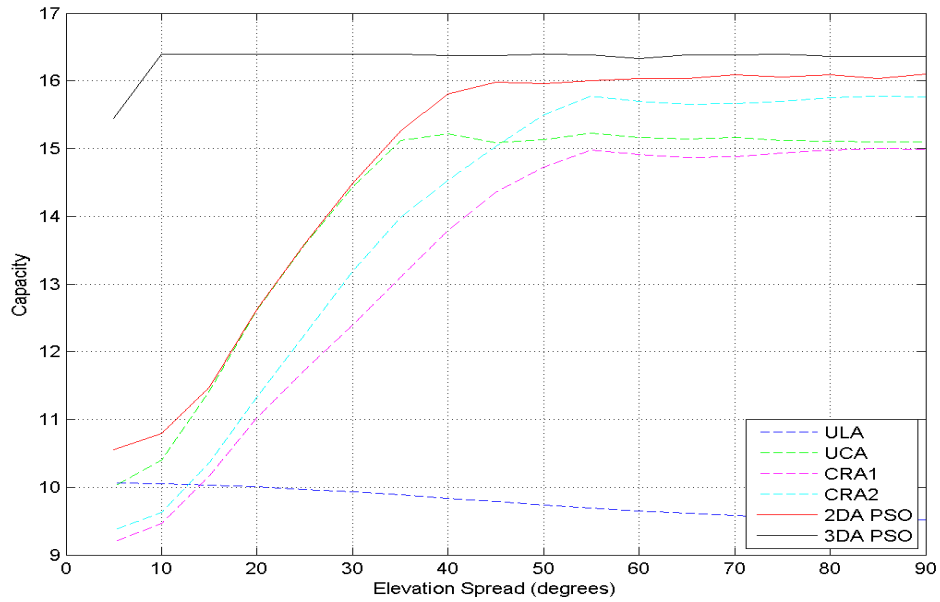


圖 4-14 Ergodic Channel Capacity for varying ES with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ$, $AS = 3^\circ$, $MEOA = 90^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

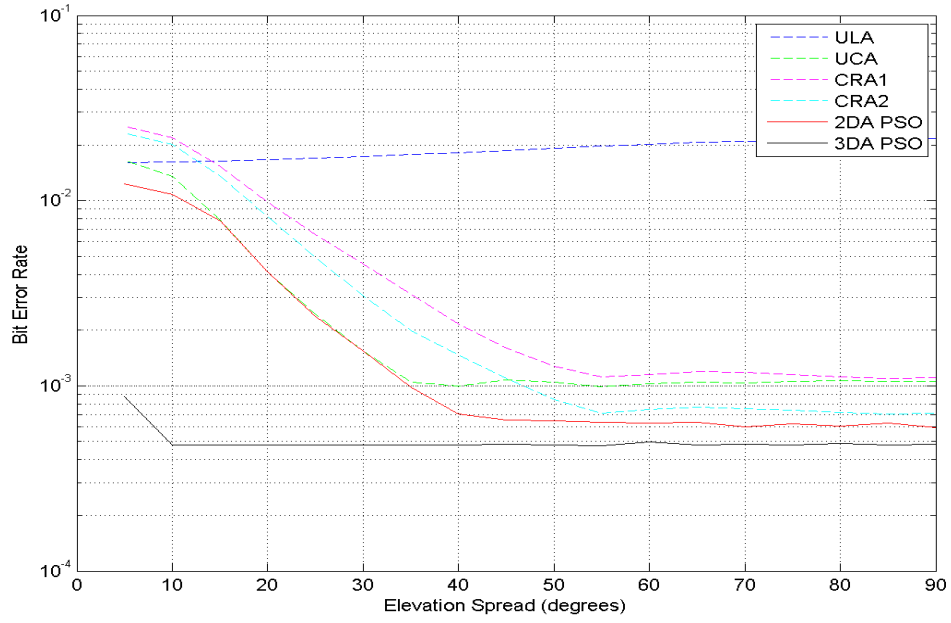


圖 4-15 Bit Error Rate for varying ES with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,
MAOA = 90° , $AS = 3^\circ$, MEOA = 90° and $D_{max} = 5\lambda$

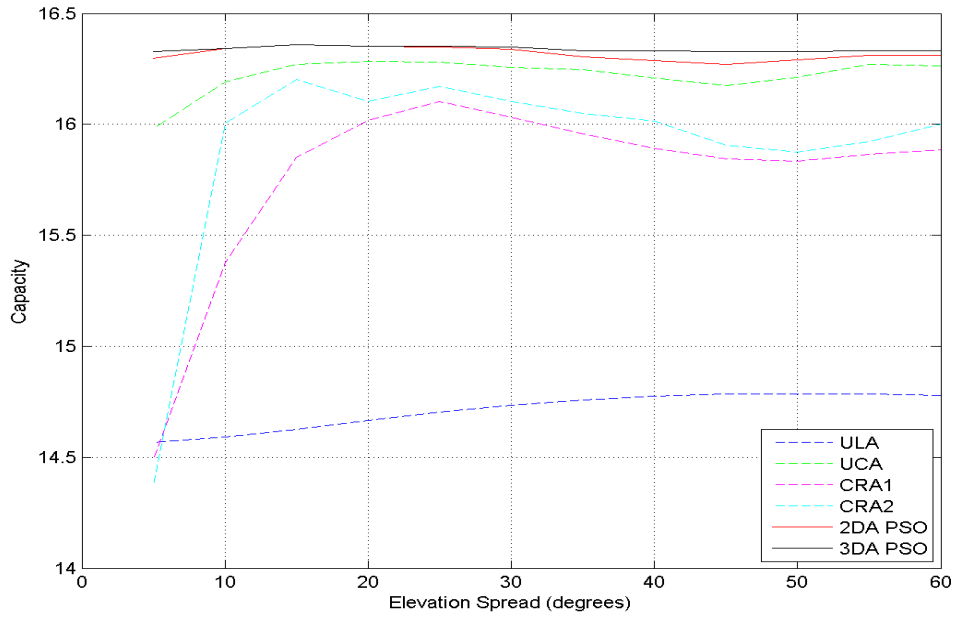


圖 4-16 Ergodic Channel Capacity for varying ES with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,
MAOA = 90° , $AS = 10^\circ$, MEOA = 60° and $D_{max} = 5\lambda$

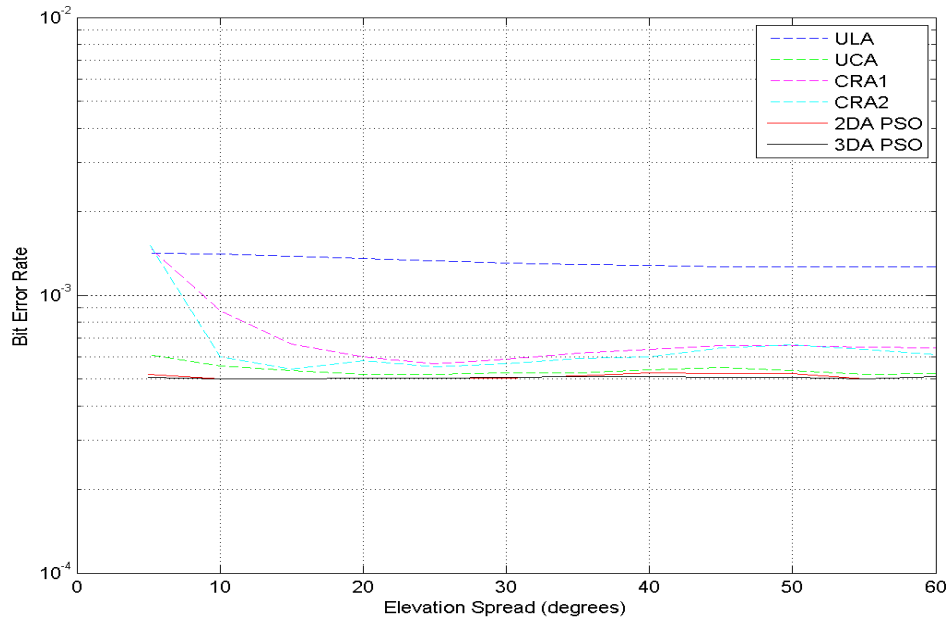


圖 4-17 Bit Error Rate for varying ES with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,
MAOA = 90° , AS = 10° , MEOA = 60° and $D_{max} = 5\lambda$

4.3.5 陣列大小

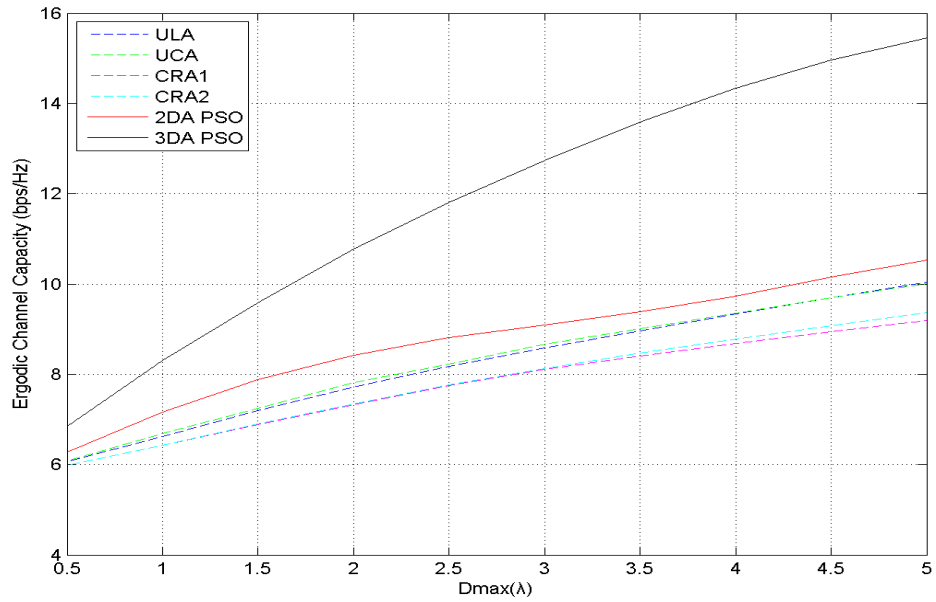


圖 4-18 Ergodic Channel Capacity for varying D_{max} with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,
MAOA = 90° , AS = 3° , MEOA = 90° and ES = 5°

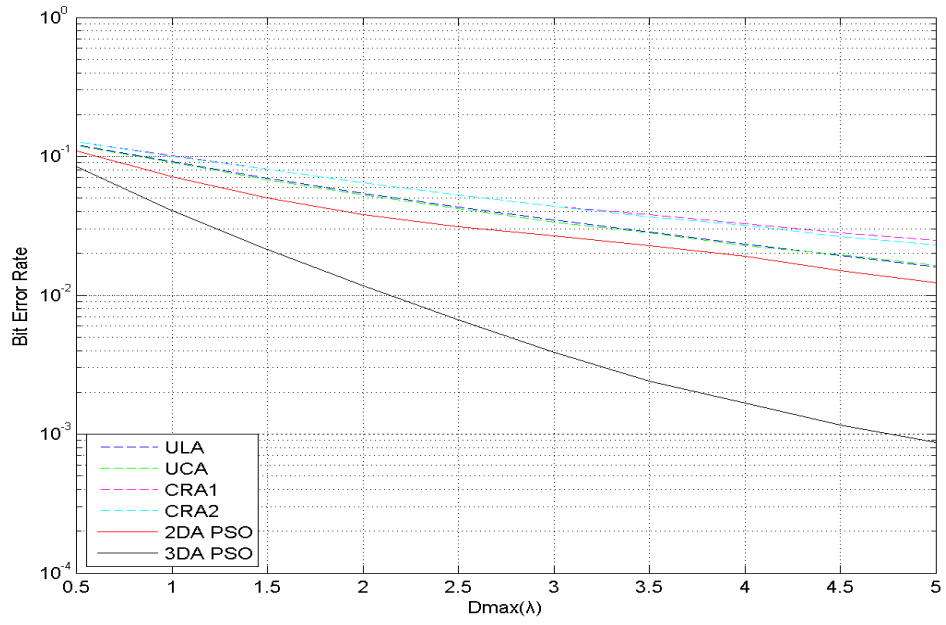


圖 4-19 Bit Error Rate for varying D_{\max} with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,
 $MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ$ and $ES = 5^\circ$

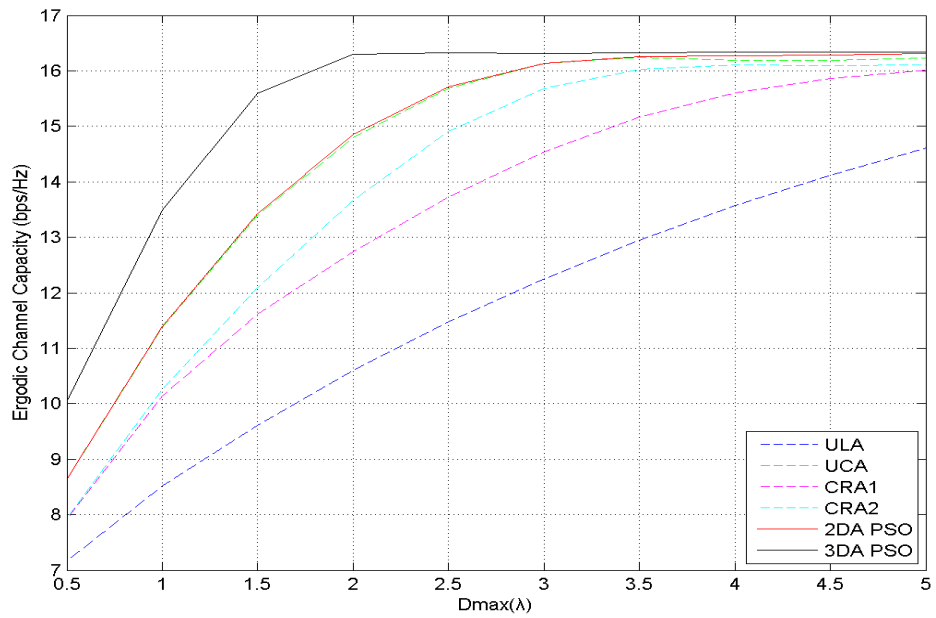


圖 4-20 Ergodic Channel Capacity for varying D_{\max} with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,
 $MAOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, MEOA = 60^\circ$ and $ES = 20^\circ$

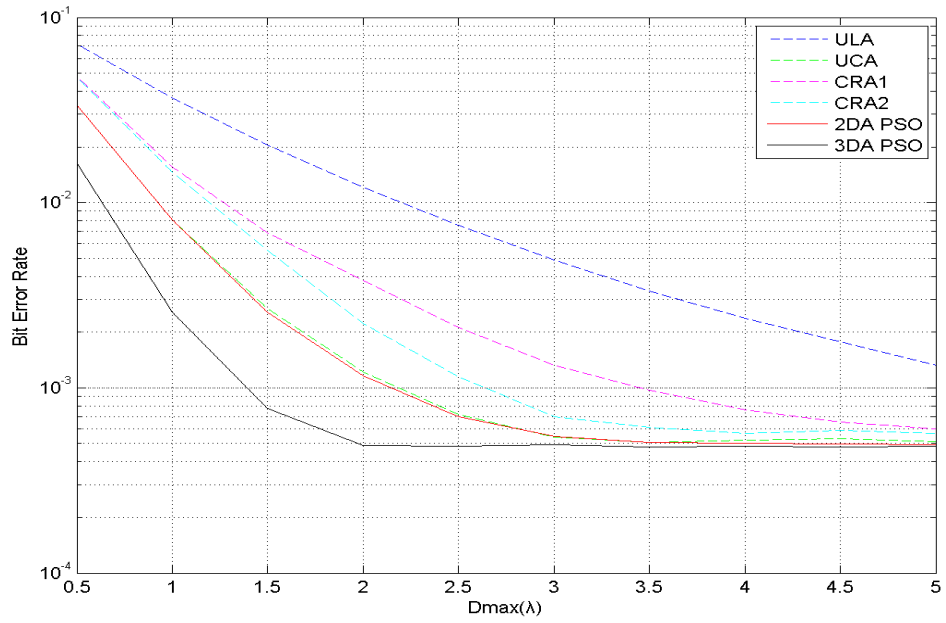


圖 4-21 Bit Error Rate for varying D_{max} with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, MEOA = 60^\circ$ and $ES = 20^\circ$

4.3.6 天線數

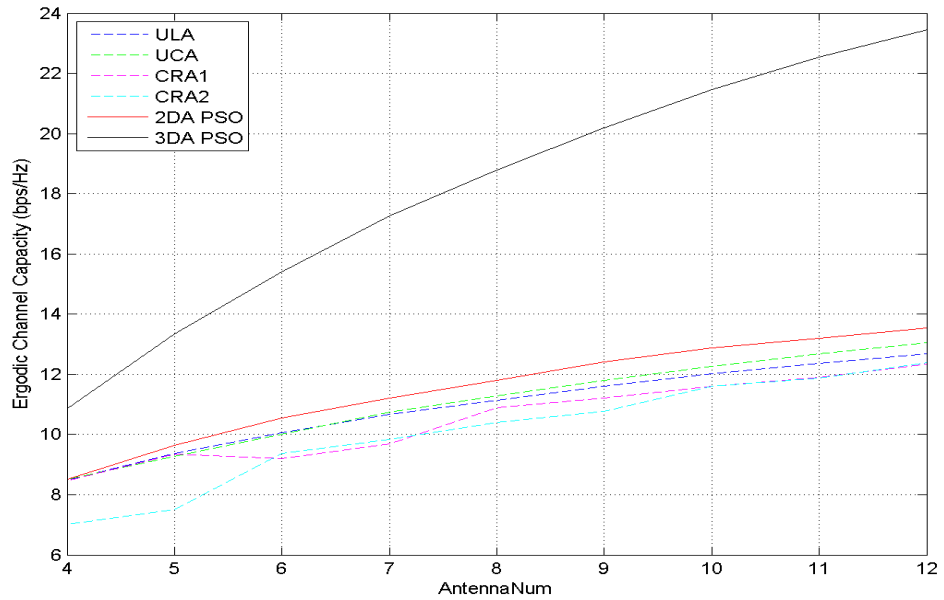


圖 4-22 Ergodic Channel Capacity for varying Antenna Number with $MAOA = 90^\circ$,

$AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 5^\circ$ and $D_{max} = 5\lambda$

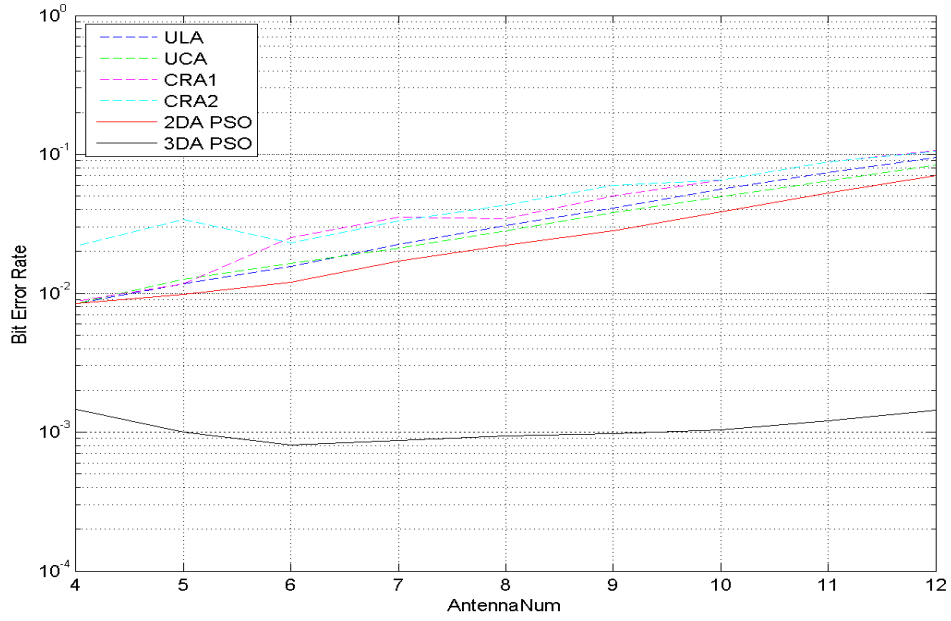


圖 4-23 Bit Error Rate for varying Antenna Number with $MAOA = 90^\circ$,
 $AS = 3^\circ$, $MEOA = 90^\circ$, $ES = 5^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

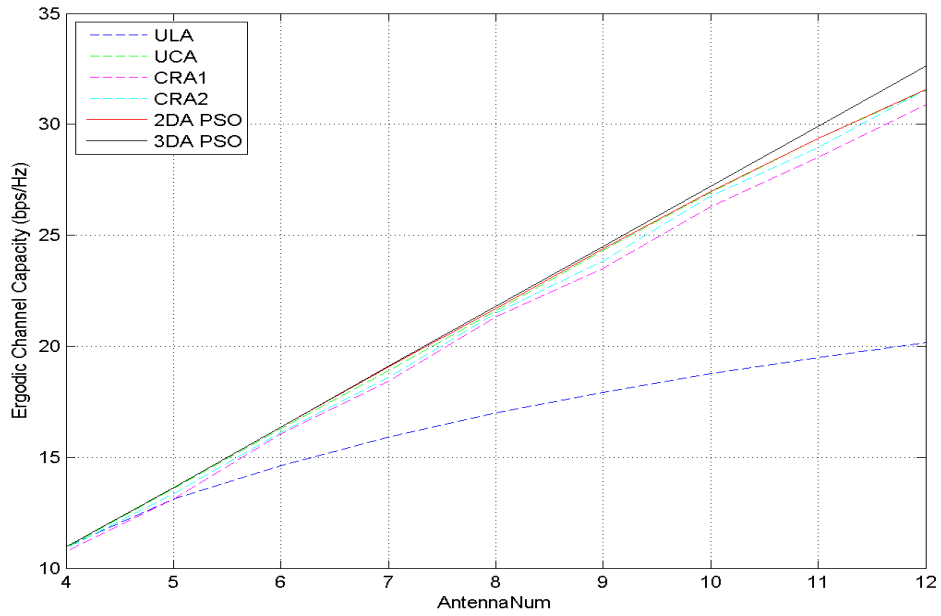


圖 4-24 Ergodic Channel Capacity for varying Antenna Number with $MAOA = 90^\circ$,
 $AS = 10^\circ$, $MEOA = 60^\circ$, $ES = 20^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

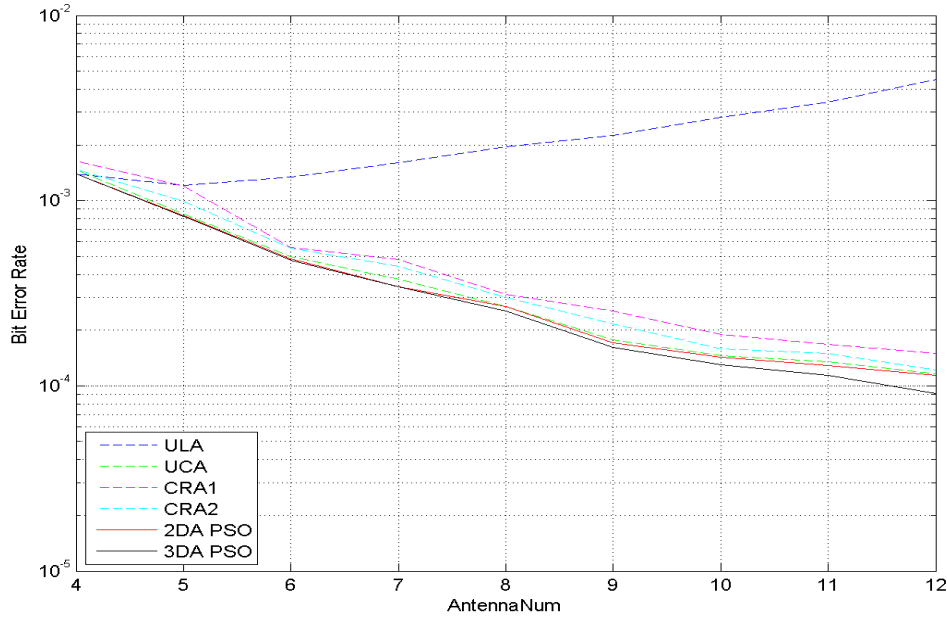


圖 4-25 Bit Error Rate for varying Antenna Number with $MAOA = 90^\circ$,

$$AS = 10^\circ, MEOA = 60^\circ, ES = 20^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

由模擬結果來看，天線陣列效能會受到入射信號角度的擴散狀況以及陣列的大小影響，其影響來自於空間相關性矩陣，雖然沒有很直接的公式能夠說明入射信號角度的擴散狀況及陣列的大小，如何影響天線陣列效能，但基本上隨著空間相關性下降而效能上升。對於 $MAOA$ 的影響，如圖 4-2 至圖 4-5 所示，其中 ULA 對 $MAOA$ 的改變最為敏感，主要原因如同在第二章所述，水平方向擴散的影響在 $MAOA$ 與二天線間之方位角相同時會降低，因此空間相關性便會上升，而因為 ULA 天線間之方位角 $\alpha_{m,n}$ 皆相同，因此 ULA 中兩兩天線間之空間相關性會隨著 $MAOA$ 的改變而同時上升與下降，因此 ULA 對於 $MAOA$ 的改變是非常敏感的。相對於 ULA，二維天線陣列對於 $MAOA$ 的改變的影響就較小，主因是因為陣列中天線間之方位角 $\alpha_{m,n}$ 皆不相同，因此受 $MAOA$ 的影響較小。整體而言，在三維擴散環境中 $MAOA$ 的影響不如在二維擴散環境中明顯，主要原因在於三維擴散環境中不僅有水平方向擴散，還必須考慮垂直方向擴散的影響。而 $MAOA$ 並不會改變 PSO 最

佳化結果之效能，主要是因為限制範圍在一圓或一球內，MAOA 的改變僅會造成 PSO 最佳化結果其旋轉，而實際上效能是相同的。

對於 MEOA 的影響，由圖 4-6 至圖 4-9 可以發現 ULA 及 3DA PSO 二種陣列隨著 MEOA 越接近 90 度而上升，其主要原因在於在 AS 及 ES 不變之下 MEOA 越靠近 90 度實際上之擴散越大，因此對此二陣列來說，很直接的反應在效能上升。而二維陣列卻呈現在約 45 度時效能最好，其原因在於雖然 MEOA 越靠近 90 度實際上之擴散越大，使水平方向擴散的影響提高，但另一方面也逐漸與二維陣列所在之平面平行，與陣列所在之平面平行會使得垂直方向的擴散影響下降，這會造成空間相關性上升，因此二維陣列在 MEOA 約 45 度時效能最好。

對於 AS 的影響，趨勢上陣列效能隨著 AS 上升而上升，主要是因為第二種方法推導之空間相關性公式中 $\text{sinc}(k\Delta_\xi)$ 這項，該項會隨著 AS 上升而下降，因此使得陣列的空間相關性下降，效能上升，並且很快的達到飽和，此時天線陣列的空間相關性矩陣接近單位矩陣，並且當 MEOA 為 90 度 ES 為 5 度時，如圖 4-10 及圖 4-11 所示，因為垂直方向之擴散小，因此對於 AS 改變的影響接近第三章二維擴散的情況，ULA 在 MAOA 為 90 度，並且 AS 小於 90 度時，其效能十分接近最佳化後之結果，相對於 ULA，其餘三種二維天線陣列在 AS 小於 90 度時，與最佳化後之結果相比差距較大。

相對於 AS，ES 的對效能的影響較小，基本上二維天線陣列同樣會隨著 ES 上升而上升，但無法達到接近無相關時的效能，並且寬邊方向之 ULA 受 ES 的影響較不明顯，因為如同第二章所述，水平入射方向與二天線連線垂直時，無法分辨垂直方向的擴散，因此在 AS 較小時，寬邊方向之 ULA 無法得到 ES 帶來的好處，並且如第二章所述，垂直入射方向遠離 90 度相當於陣列的縮小，因此在 MEOA 為 90 度並且 AS 為 3 度時，如圖 4-16 及圖 4-17，ES 上升相當於使在 90 度較好之空間相關性與較差之空間相關性平均，因此反而造成寬邊方向之 ULA 其效能下

降。對於 UCA，在 AS 較小時，若 ES 小於 35 度，則 UCA 之效能皆很接近 2DA PSO 之效能，但在 ES 大於 35 度時差距則較大，並且此時 CRA2 之效能會較 UCA 好。

對於陣列大小的影響，會隨著陣列大小變大而效能上升，這是因為空間相關性會隨著天線間距變大而下降之故，其下降的趨勢可以參考第二章的模擬結果。而對於陣列天線數的影響，可以發現通道容量隨著天線數增加而上升，但天線數增加使通道容量上升的效果會逐漸趨緩，這是因為天線擺放範圍固定，而天線數增加雖然能帶來多餘的自由度及空間分集，但同樣的天線間距變小，造成空間相關性上升，因此通道容量的上升會趨緩，因此對於擴散較小的環境，通道容量上升趨緩的現象更為明顯。然而在 V-BLAST 系統中一次傳送之位元數卻是隨著天線數線性上升，因此隨著通道容量上升的趨緩，位元錯誤率會不降反升。

整體而言，用 PSO 最佳化之天線陣列幾何結構，確實較其他常用之天線陣列在通道容量以及位元錯誤率上皆有較好的效能，並且 3DA PSO 在擴散角度小並且 MEOA 接近 90 度時，其效能之改善十分明顯，因此在此情況使用三維之天線陣列較有價值。而 UCA 與 2DA PSO 在大部分的情況下，其效能皆十分接近，因此在三維擴散環境下，若只能使用固定之平面陣列，那 UCA 是個不錯的選擇，並且 UCA、2DA PSO 及 3DA PSO 三者效能在 MEOA 較小時非常接近，因此可以推測若適當的傾斜 UCA，使其所在平面之法向量與 MEOA 相同，則可以得到接近 3DA PSO 之效能。而由表 4-1 至表 4-4 列出的幾個最佳化天線陣列座標來看，2DA PSO 排列之形狀接近於圓形，而 3DA PSO 亦大致排列成一圓形，並且隨著 MEOA 改變而傾斜。

第五章

全相關二維擴散環境下天線陣列效能分析與最佳化

第三章及第四章考慮的皆為半相關通道，但實際上傳送端與接收端皆應具有空間相關性，並且同時皆會對系統效能造成影響。因此本章更進一步考慮全相關通道(fully correlated channel)，意即傳送端與接收端陣列皆具有空間相關性，而信號入射角度擴散在此則假設為 2.3 節敘述之二維擴散情況。在此假設傳送端之天線陣列固定，為半徑 0.5λ 之 UCA，並且擴散情況為水平角度擴散 $\Delta S = 180^\circ$ ，並在此環境下比較 ULA、UCA、CRA1 以及 CRA2 之通道容量及位元錯誤率，使用第三章所述之利用粒子群最佳化(particle swarm optimization, PSO)演算法尋找擁有最大通道容量之二維天線陣列幾何結構之演算法，觀察最佳化後之二維天線陣列的效能及其形狀，並與上述之四種固定天線陣列效能做比較。目的在於除了天線陣列幾何結構最佳化，亦觀察上述之四種天線陣列之效能表現與相同環境下最佳化之二維天線陣列效能之差距，並且觀察在考慮了傳送端之空間相關性後，其對於天線陣列最佳化之影響。

5.1 系統簡介

本節首先介紹本章使用之系統模型，以及判斷天線陣列之效能之重要指標，通道容量及位元錯誤率，並且位元錯誤率與接收端如何偵測有關，因此本節也介紹了本章在模擬位元錯誤率時使用之最大相似性偵測法。

5.1.1 系統模型

本章考慮全相關平坦衰落通道(fully correlated flat-fading channel)，系統參考[20]所述之 V-BLAST 系統架構，傳送端之天線數為 N_t ，接收端之天線數為 N_r ，因此信號模型可表示為

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (5.1)$$

使用之通道模型為 Kronecker model，此模型之公式為

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}_{rx}^{1/2} \mathbf{H}_w \left(\mathbf{R}_{tx}^{1/2} \right)^\dagger \quad (5.2)$$

\mathbf{H}_w 中之元素為獨立且相同分佈之高斯隨機變數，其平均值為 0 而變異數為 1； \mathbf{R}_{tx} 為 $N_t \times N_t$ 之矩陣，其元素為傳送端陣列天線間之空間相關性； \mathbf{R}_{rx} 為 $N_r \times N_r$ 之矩陣，為接收端陣列天線間之空間相關性。關於 Kronecker model 詳細的介紹請參考 3.1 節。在此假設傳送端與接收端皆具空間相關性，並且信號入射角度擴散在此假設為二維擴散，而二天線間之二維空間相關性之公式參考 2.3 節表示為

$$\mathbf{R}_s(m, n) = e^{iZ_{l,m,n}} \left[J_0(Z_{Q,m,n}) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} i^k J_k(Z_{Q,m,n}) \sin c(k\Delta_\xi) \cos(k(\theta_\xi - \alpha_{m,n})) \right] \quad (5.3)$$

詳細的二維空間相關性推導請參考 2.3 節。

5.1.2 通道容量

在單一使用者系統的情況下，參考[22]假設接收端之道完整的通道狀態資訊(perfect channel state information at the receiver, CSIR)，但傳送端沒有通道狀態資訊

(no channel state information at the transmitter, no CSIT)，則傳送的能量平均分配於各天線，此時通道容量(ergodic channel capacity)表示為

$$E[C] = E\left[\log\left(\det(\mathbf{I} + \rho\mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger)\right)\right] \quad (5.4)$$

其中 $\rho = \frac{P}{N_{tx}\sigma_n^2}$ ， P 為傳送之總功率， σ_n^2 為雜訊之功率。而在此使用蒙地卡羅方法 (Monte Carlo method) 來估計通道容量。

5.1.3 最大相似度準則

參考[23]在線性之 MIMO 系統中，接收端必須由 N_{rx} 個接收到之信號偵測出 N_{tx} 個傳送之符號，假設傳送之符號屬於 $\chi = \{x_1, \dots, x_L\}$ 大小為 L 之集合，而 $\chi^{N_{tx}}$ 為長度 N_{tx} 為之符號向量，其元素皆屬於 χ ，則接收端便是必須根據收到之信號由 $\chi^{N_{tx}}$ 中一共 $L^{N_{tx}}$ 個可能傳送之符號向量中選擇其一，因此很直觀的，最理想也就是最小化符元錯誤率(symbol error rate, SER)之準則(criterion)便是選擇給定接收到之信號 \mathbf{y} 後，擁有最大後驗機率(maximum a posterior probability, MAP)之符號向量 $\hat{\mathbf{s}}$ ，表示為

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \max_{\mathbf{s} \in \chi^{N_{tx}}} P(\mathbf{s} \text{ was sent} | \mathbf{y} \text{ is observed}) \quad (5.5)$$

$$= \arg \max_{\mathbf{s} \in \chi^{N_{tx}}} \frac{P(\mathbf{y} \text{ is observed} | \mathbf{s} \text{ was sent}) P(\mathbf{s} \text{ was sent})}{P(\mathbf{y} \text{ is observed})} \quad (5.6)$$

(5.5)即為最大後驗機率準則。而假設可能傳送之符號向量其傳送機率皆相同，換言之 $P(\mathbf{s} \text{ was sent})$ 為常數，則最大後驗機率偵測法可以簡化為

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \max_{\mathbf{s} \in \chi^{N_{tx}}} P(\mathbf{y} \text{ is observed} | \mathbf{s} \text{ was sent}) \quad (5.7)$$

(5.7)即為最大相似度(maximum likelihood, ML)準則。並且一般而言雜訊會假設其屬於加性白高斯雜訊(Additive White Gaussian Noise, AWGN)，則可以將最大相似

偵測法轉變為尋找可能接收到之未帶雜訊信號與實際接收到之信號 \mathbf{y} 間，歐幾里德距離(squared Euclidean distance)最小之該符號向量，表示為

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{s} \in \mathcal{X}^{N_{tx}}} \|\mathbf{H}\mathbf{s} - \mathbf{y}\|^2 \quad (5.8)$$

同時(5.8)亦可稱為最小距離(minimum distance, MD)準則。

5.1.4 位元錯誤率

位元錯誤率(bit error rate, BER)為一種通訊系統效能之指標，因為在傳輸資料過程中，不可避免地會受到通道雜訊、干擾及信號失真等影響，造成接收到之位元錯誤，因此位元錯誤率代表了該系統在整個傳輸過程中，其接收端收到之所有位元有多少比例之錯誤。而在此使用蒙地卡羅方法(Monte Carlo method)來估計位元錯誤率，在 V-BLAST 系統架構中，假設傳送之符號為 BPSK，則每一次傳送之符號向量帶有 N_{tx} 個位元。因此在此位元錯誤率模擬為根據(5.2)產生一隨機之通道，並產生數組隨機之符號向量 \mathbf{s}_i ，模擬經過該通道並加上雜訊，並在接收端使用(5.8)之準則偵測原來傳送之符號向量 $\hat{\mathbf{s}}_i$ ，最後根據的差別即可計算該通道之位元錯誤率。重複以上程序計算數組隨機之通道之位元錯誤率並平均之，即可得到系統之位元錯誤率。

5.2 天線陣列幾何結構最佳化

本節說明天線陣列幾何結構最佳化詳細的過程。簡述粒子群最佳化演算法，以及在此使用之適應值函數，並且本章環境為三維擴散之環境，如第二節所討論，在三維擴散環境下三維之天線陣列幾何結構有其獨特之空間特性，因此本節包含了最佳化二維天線陣列以及三維天線陣列。

5.2.1 粒子群最佳化演算法

假設群體中有 M 個粒子，初始時由搜索空間中從隨機的位置開始，對一個 N 維的問題，則其群體之位置以及速度可以分別表示為一個 $N \times M$ 的矩陣如下：

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_M] \quad (5.9)$$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_M] \quad (5.10)$$

位置矩陣 \mathbf{X} 中的 \mathbf{x}_i 代表了第 i 個粒子目前的位置，而速度矩陣 \mathbf{V} 中的 \mathbf{v}_i 則代表了第 i 個粒子目前的速度。第 i 個粒子個別經歷過最佳位置則定義為 \mathbf{p}_i ，而 $Pbest_i$ 則為位於 \mathbf{p}_i 時之適應值，而在此將 \mathbf{p}_i 組合為矩陣 \mathbf{P}

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_M] \quad (5.11)$$

若現在所在位置之適應值 $f(\mathbf{x}_i)$ 較 $Pbest_i$ 好，則將 \mathbf{p}_i 更新為 \mathbf{x}_i ， $Pbest_i$ 更新為 $f(\mathbf{x}_i)$ 。同時 $Pbest_i$ 必須與群體經歷過的最佳適應值 $Gbest$ 比較，若較好則將更新全域最佳位置 \mathbf{g} 更新為 \mathbf{p}_i ，而 $Gbest$ 更新為 $Pbest_i$ 。

$$\mathbf{g} = [g_1 \quad g_2 \quad \cdots \quad g_N]^T \quad (5.12)$$

\mathbf{X} 、 \mathbf{V} 、 \mathbf{P} 和 \mathbf{g} 包含了 PSO 演算法所需的所有資訊，其核心概念便是在每次迭代中更新這些矩陣，各個粒子在空間中移動之軌跡趨勢上向著個別最佳解以及全域最佳解移動，並計算其所經位置之適應值，若較好則更新個別最佳解以及全域最佳解，隨著一次次迭代逐漸搜尋到該搜索空間最佳的位置。而速度矩陣 \mathbf{v} 以及位置矩陣 \mathbf{X} 更新公式參考[12]，如下

$$v_{n,m}^{t+1} = w^t v_{n,m}^t + c_1 U_1 \times (p_{n,m}^t - x_{n,m}^t) + c_2 U_2 \times (g_n^t - x_{n,m}^t) \quad (5.13)$$

$$x_{n,m}^{t+1} = x_{n,m}^t + v_{n,m}^{t+1} \quad (5.14)$$

U_1 以及 U_2 為在 $[0,1]$ 區間中均勻分布之隨機變數，並且速度向量中 n 個成分間彼此不同，此二參數是爲了保持群體在搜索過程中的隨機性。 c_1 和 c_2 為向個別最佳位

置與向全域最佳位置移動之加速因子(acceleration)，先前的研究[25]顯示設為 2.0 是較為理想的選擇。而參數 w 則稱為慣性權重(inertial weight)，根據[26]建議使慣性權重隨著迭代由較大之 w_{start} 線性下降至較小之 w_{end} ，其線性下降可由下式表示

$$w^t = w_{start} - \frac{w_{start} - w_{end}}{t_{max}} \times t \quad (5.15)$$

其中 t_{max} 為最大迭代次數，並且根據其建議，將 w_{start} 設為 0.9， w_{end} 設為 0.4。而因為速度更新公式中並沒有限制速度的參數，因此需要 V_{max} 來限制速度，根據[25, 26]一般設定為搜索空間之 10~20%，若是速度超過 V_{max} 則令之等於 V_{max} 。

在此僅簡略說明該演算法的運作，因此關於粒子群最佳化演算法的詳細背景及解釋請參考 3.5 節。

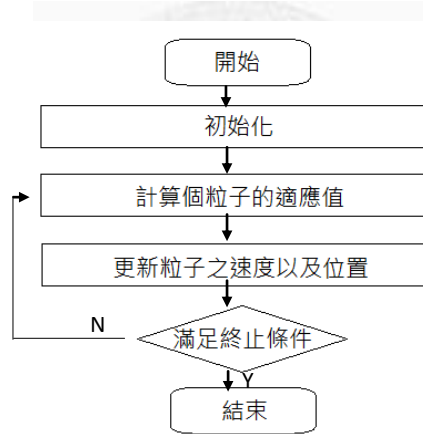


圖 5-1 粒子群最佳化簡易流程圖

5.2.2 適應值函數設計

演算法的目標在於

$$\max E \left[\log \left(\det \left(\mathbf{I} + \rho \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H} \right) \right) \right] \quad (5.16)$$

而在此因為最佳化效率的考量，將最大化通道容量的問題轉變最大化通道容量上界，詳細的推導過程以及適應值函數效能之比較請參考第三章。通道容量上界表示為

$$E[C] = E\left[\log\left(\det\left(\mathbf{I} + \rho\mathbf{H}^\dagger\mathbf{H}\right)\right)\right] < \log\left(E\left[\det\left(\mathbf{I} + \rho\mathbf{H}^\dagger\mathbf{H}\right)\right]\right) \quad (5.17)$$

並且可以逐步化簡為下式：

$$E[C] < \log\left(\sum_{k=0}^N k! \rho^k \sum_{\mathbf{a}, |\mathbf{a}|=k} \lambda_{tx, \alpha_1} \cdots \lambda_{tx, \alpha_k} \sum_{\mathbf{\beta}, |\mathbf{\beta}|=k} \lambda_{rx, \beta_1} \cdots \lambda_{rx, \beta_k}\right) \quad (5.18)$$

其中 $\lambda_{tx, i}$ 與 $\lambda_{rx, i}$ 為傳送端與接收端空間相關性矩陣之特徵值，在此即令此通道容量上界為適應值函數。接著簡化 $\sum_{\mathbf{a}, |\mathbf{a}|=k} \lambda_{\alpha_1} \cdots \lambda_{\alpha_k}$ 之計算，首先令

$$E_k = \sum_{\mathbf{a}, |\mathbf{a}|=k} \lambda_{\alpha_1} \cdots \lambda_{\alpha_k} \quad \text{and} \quad S_k = (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^N \lambda_i^k \quad (5.19)$$

則 E_k 剛好可以滿足

$$E_0 = 1 \quad \text{and} \quad E_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k E_{k-i} S_i \quad (5.20)$$

5.2.3 利用 PSO 最佳化天線陣列幾何結構

本章考慮全相關通道，假設傳送端與接收端皆具空間相關性，並且傳送端與接收端信號入射角擴散皆為二維擴散，使用 2.3 節推導之結果，並假設 $N_r = N_t = N$ 。在此環境下利用 5.2.1 節所述之 PSO 演算法，尋找擁有最佳通道容量之二維天線陣列，如同我們在第二章所述，陣列中任一個天線擺放的位置都可以用一組使用直角座標系的座標來表示，而在此便是透過此天線之座標來描述陣列的形狀。因此在 PSO 中，一組座標即為粒子的一個可能的位置，換言之為 5.2.1 節所述之 \mathbf{X} 矩陣中的一行，因此在這個問題中，PSO 在維度為三倍天線個數之空間中搜索最佳之陣列幾何結構。而二維天線陣列其搜索範圍之限制條件為

$$\left\{x_m, y_m, z_m \mid \sqrt{x_m^2 + y_m^2} \leq Dmax, z_m = 0\right\} \quad (5.21)$$

意即分別在水平面上一半徑為 $Dmax$ 之「圓型」範圍內尋找最佳之天線陣列幾何結構， $Dmax$ 為陣列大小限制參數，其單位為波長 (λ)。並且在此設 PSO 演算法中的

粒子數為 16，迭代次數為 300 次，且令(5.18)為本章之適應值函數。而[10]也顯示寬邊方向之 ULA 及 UCA 分別在擴散小及擴散大的環境中擁有較好之效能，因此為了加快最佳化收斂的速度，在此 2 個粒子的初始值分別設為寬邊方向之 ULA 及 UCA，而其餘 14 個粒子則均勻隨機分布於搜索空間中，以下步驟一步驟的說明最佳化之過程。

重要參數：

N 天線數、 θ_ξ 平均水平入射角、 Δ_ξ 水平角度擴散、 $Dmax$ 陣列大小限制、 \mathbf{X} 粒子位置、 V_{max} 速度限制、 \mathbf{V} 粒子速度、 \mathbf{P} 個別最佳位置、 \mathbf{g} 群體最佳位置、 $f(\mathbf{x})$ 適應值函數、 $Pbest_i$ 個別最佳適應值、 $Gbest$ 群體最佳適應值、 t_{max} 最大迭代次數。

step 1: 設定 N 、 θ_ξ 、 Δ_ξ 、 $Dmax$ 、 $f(\mathbf{x})=(5.18)$ 、粒子數=16， $t_{max}=300$ ， $w_{start}=0.9$ ， $w_{end}=0.4$ ，而 $V_{max}=Dmax/5$ 。

step 2: 初始化粒子位置 \mathbf{X} 、粒子速度 \mathbf{V} 、個別最佳適應值 $Pbest_i$ 以及群體最佳適應值 $Gbest$ 。初始粒子位置 \mathbf{x}_1 設為長度為 $2Dmax$ 之寬邊方向 ULA，而 \mathbf{x}_2 設為半徑為 $Dmax$ 之 UCA 天線陣列架構，其餘 $\mathbf{x}_3 \sim \mathbf{x}_{16}$ 均勻的隨機分布在搜索空間中，初始粒子速度 $\mathbf{V}=\mathbf{0}$ ，而 $Pbest_i=0$ ， $Gbest=0$ ，且迭代次數 $t=1$ 。

step 3: 計算各粒子之適應值 $f(\mathbf{x}_i)$ 。其計算各粒子之適應值 $f(\mathbf{x}_i)$ 。首先由粒子位置轉為天線陣列之元件座標，並由座標使用 2.3 節之三維空間相關性公式計算該天線陣列之空間相關性，最後使用(5.18)由空間相關性計算通道容量上界作為該粒子之適應值， $i=1 \sim 16$ 。

step 4: 比較粒子之適應值 $f(\mathbf{x}_i)$ 與個別最佳適應值 $Pbest_i$ 大小。若 $f(\mathbf{x}_i)$ 較 $Pbest_i$

大，則令 $Pbest_i$ 更新為 $f(\mathbf{x}_i)$ ，並令 \mathbf{p}_i 更新為 \mathbf{x}_i ， $i = 1 \sim 16$ 。

step 5: 比較個別最佳適應值 $Pbest_i$ 與群體最佳適應值 $Gbest$ 。若 $Pbest_i$ 較 $Gbest$ 大，則令 $Gbest$ 更新為 $Pbest_i$ ，而 \mathbf{g} 更新為 \mathbf{p}_i ， $i = 1 \sim 16$ 。

step 6: 更新粒子位置 \mathbf{X} 及粒子速度 \mathbf{V} 。使用(5.13)更新 \mathbf{V} ，其中 w' 符合(5.15)，並且令其中大於 V_{\max} 的等於 V_{\max} 。用(5.14)更新 \mathbf{X} ，並令其中超過搜索範圍限制條件(5.21)者停在搜索範圍之邊界。

step 7: $t = t + 1$ 。若 $t < t_{\max}$ ，則回 step 3；若 $t = t_{\max}$ ，則結束，而最後之群體最佳位置 \mathbf{g} 即為最佳化之結果。

5.3 模擬結果

在此會分別模擬如第一章介紹之 ULA、UCA、CRA1 以及 CRA2 四種固定之天線陣列幾何形狀之通道容量以及位元錯誤率，並與我們提出之使用 PSO 最佳化幾何形狀之二維天線陣列作比較。通道容量的模擬為產生 3000 個隨機之通道，並根據(5.4)之公式計算其通道容量並平均之；位元錯誤率模擬之程序如 5.1.4 節所述，產生 5000 個隨機之通道，每一個通道傳送 100 個隨機之二進制相位移鍵(Binary Phase Shift Keying, BPSK)符號，並根據 5.1.3 節所述之最大相似度準則來偵測傳送之信號，最後根據原來之信號與偵測出之信號之差別計算其位元錯誤率。模擬中總訊雜比皆在 10dB，同時在接下來之模擬中，陣列大小限制參數 D_{\max} 同時代表了 ULA 總長之一半、UCA 之半徑以及 CRA1 及 CRA2 之外圈半徑，意即五種天線陣列皆可放置於一半徑為 D_{\max} 之圓內。

5.3.1 平均水平入射角

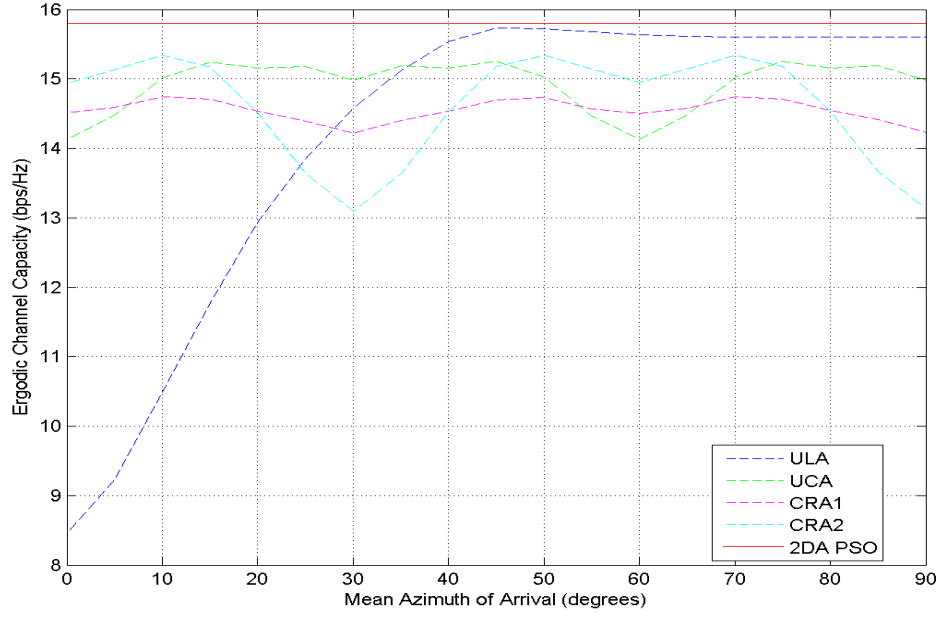


圖 5-2 Ergodic Channel Capacity for varying MAOA with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,
 $AS = 20^\circ$, and $Dmax = 5\lambda$

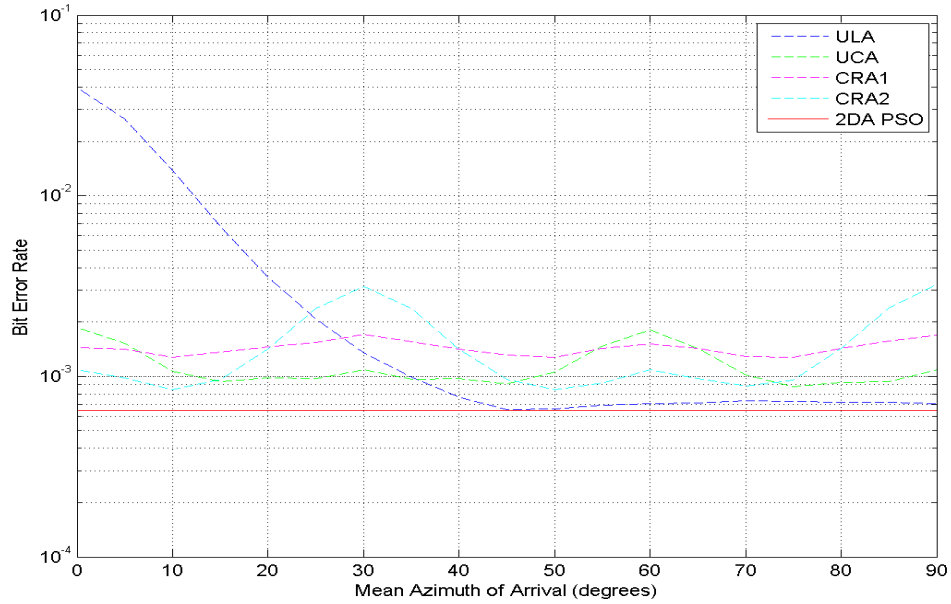


圖 5-3 Bit Error Rate for varying MAOA with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,
 $AS = 20^\circ$, and $Dmax = 5\lambda$

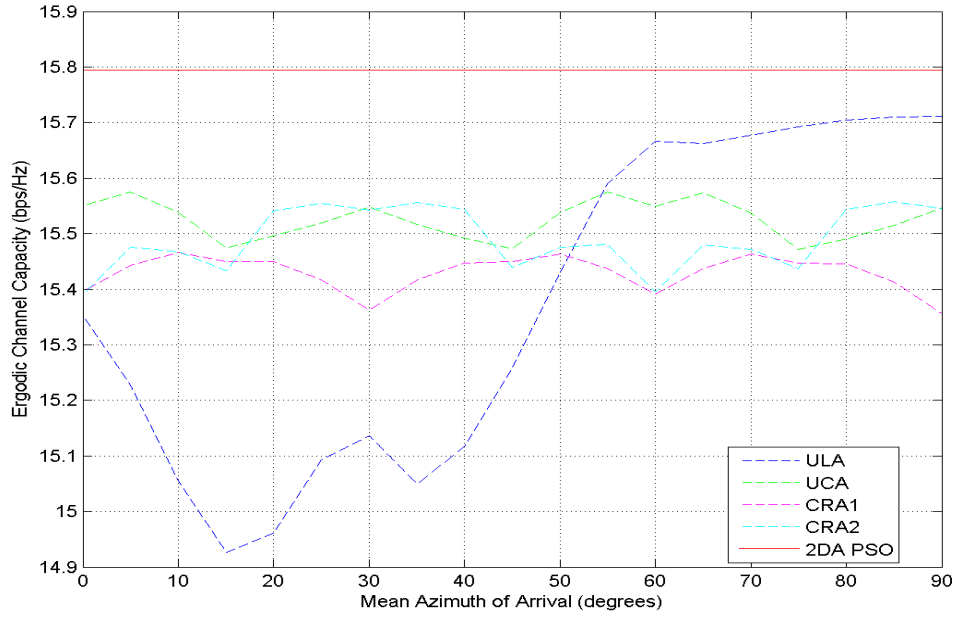


圖 5-4 Ergodic Channel Capacity for varying MAOA with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,
 $AS = 10^\circ$, and $D_{max} = 5\lambda$

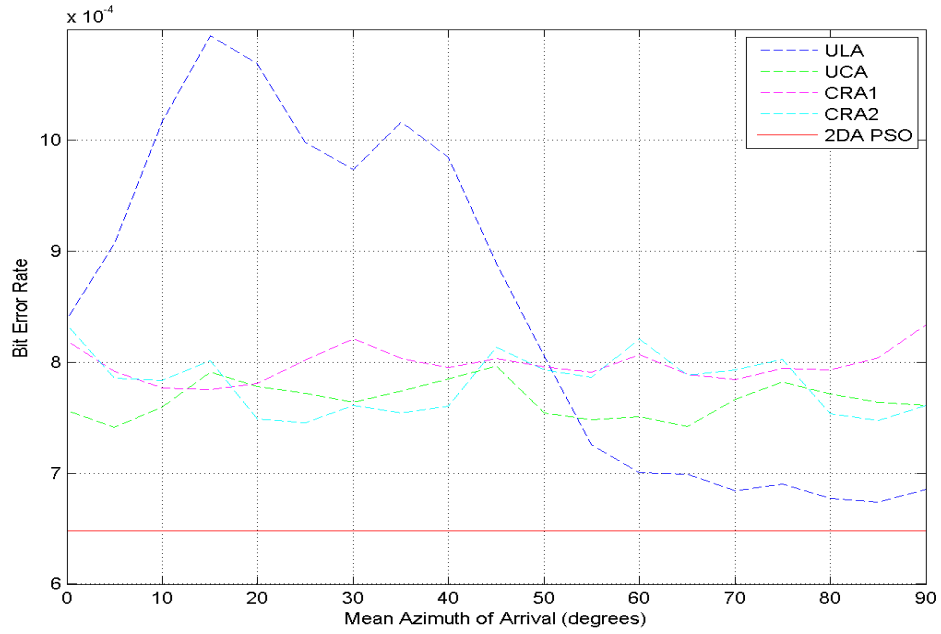


圖 5-5 Bit Error Rate for varying MAOA with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,
 $AS = 60^\circ$, and $D_{max} = 5\lambda$

5.3.2 水平角度擴散

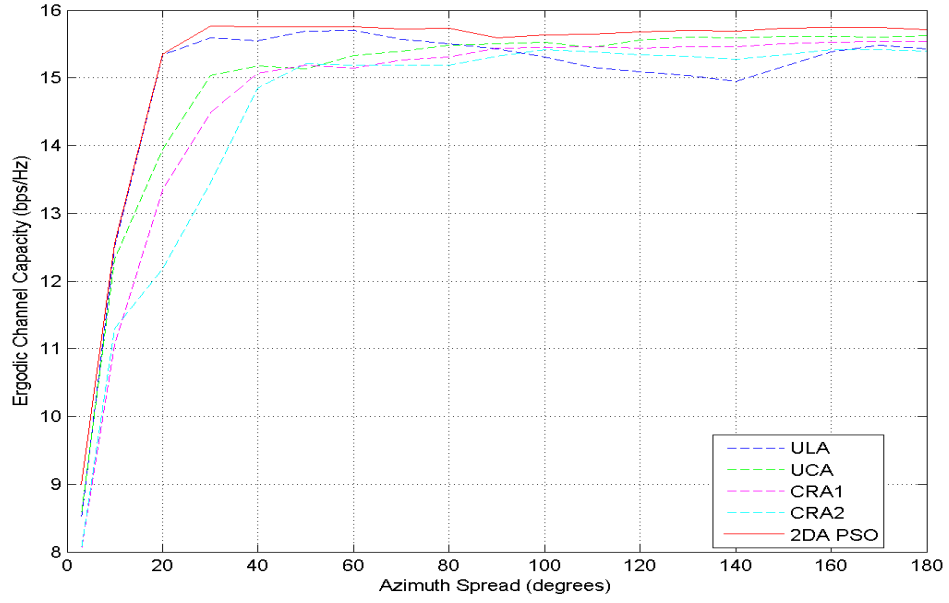


圖 5-6 Ergodic Channel Capacity for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ$ and $D_{max} = 3\lambda$

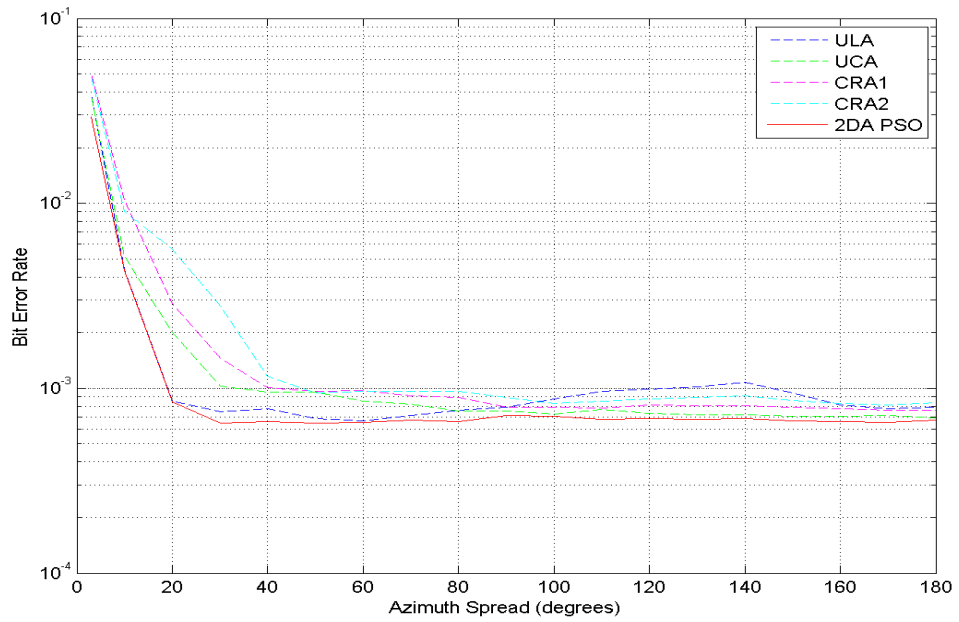


圖 5-7 Bit Error Rate for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ$ and $D_{max} = 3\lambda$

$AS = 20^\circ$	E1	E2	E3	E4	E5	E6
$x (\lambda)$	3.0000	1.8766	0.6320	-0.6319	-1.8765	-3.0000
$y (\lambda)$	-0.0002	-0.0018	-0.0027	-0.0023	-0.0017	0.0001
$z (\lambda)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

$AS = 120^\circ$	E1	E2	E3	E4	E5	E6
$x (\lambda)$	1.8297	1.3629	0.7317	-0.4085	-2.0577	-2.8726
$y (\lambda)$	2.1675	-1.4380	-2.9094	-2.0531	2.1831	-0.4737
$z (\lambda)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

表 5-1 Optimization Results of 2DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ$ and $Dmax = 3\lambda$

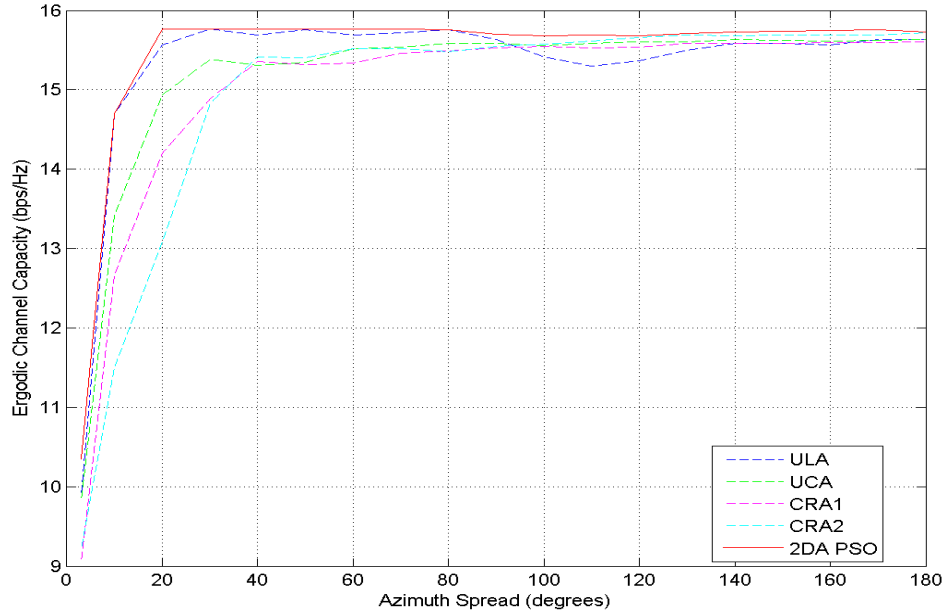


图 5-8 Ergodic Channel Capacity for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

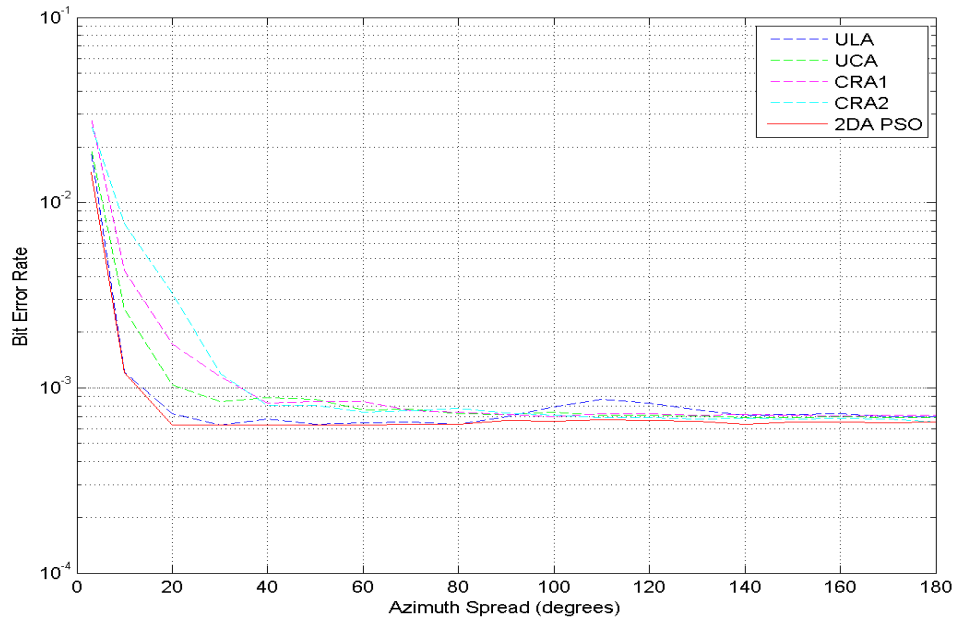


圖 5-9 Bit Error Rate for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

$AS = 20^\circ$	E1	E2	E3	E4	E5	E6
$x (\lambda)$	5.0000	3.5819	0.7049	-0.7367	-2.1773	-5.0000
$y (\lambda)$	-0.0139	-0.0201	-0.0731	-0.0782	-0.0816	-0.0114
$z (\lambda)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$AS = 120^\circ$	E1	E2	E3	E4	E5	E6
$x (\lambda)$	2.3698	2.2385	0.2675	-0.5019	-2.3021	-4.6376
$y (\lambda)$	-3.1242	4.0431	1.0714	-3.7815	-4.4385	-0.9124
$z (\lambda)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

表 5-2 Optimization Results of 2DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

5.3.3陣列大小

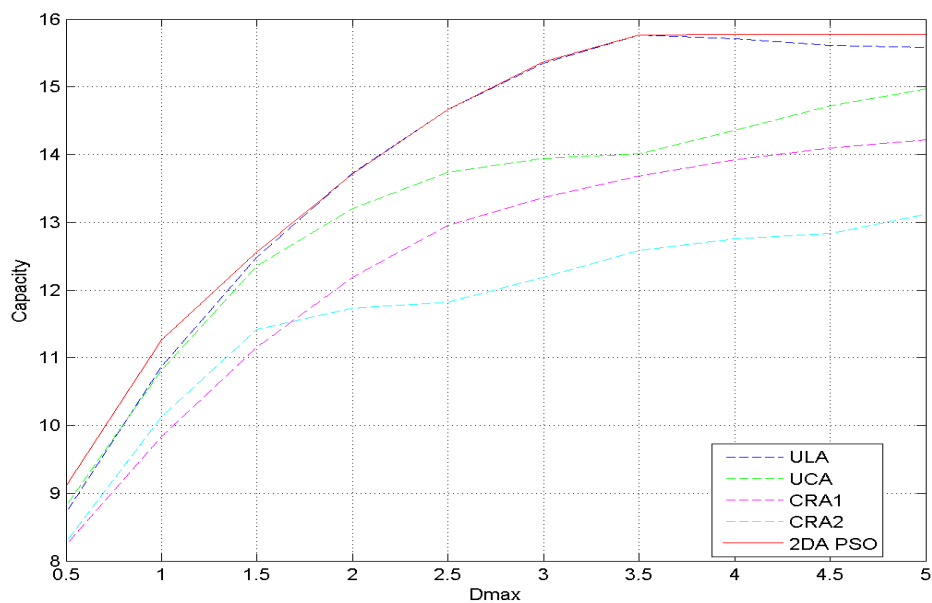


圖 5-10 Ergodic Channel Capacity for varying D_{\max} with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ$ and $AS = 20^\circ$

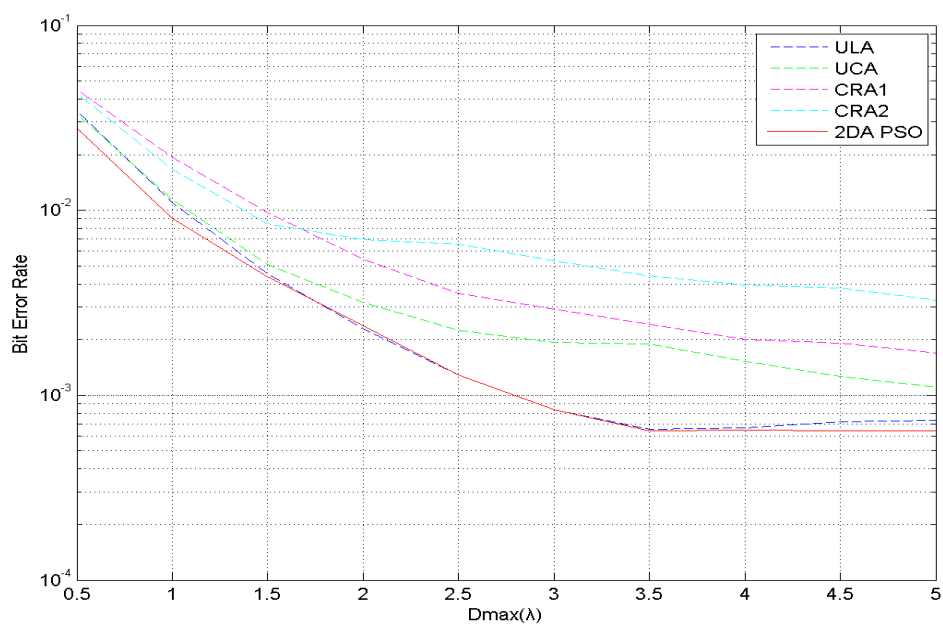


圖 5-11 Bit Error Rate for varying D_{\max} with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ$ and $AS = 20^\circ$

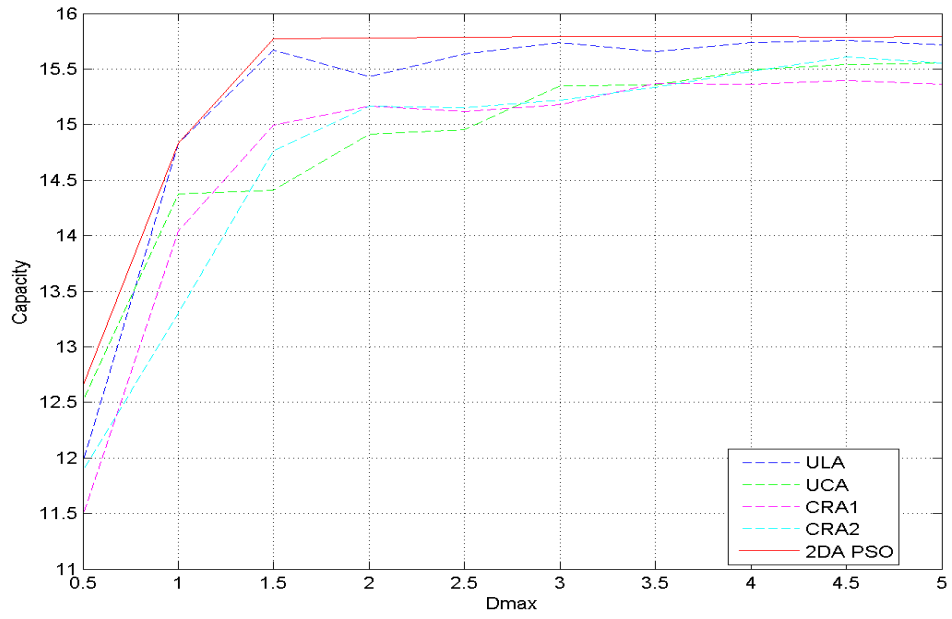


圖 5-12 Ergodic Channel Capacity for varying Dmax with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,
MAOA = 90° and AS = 60°

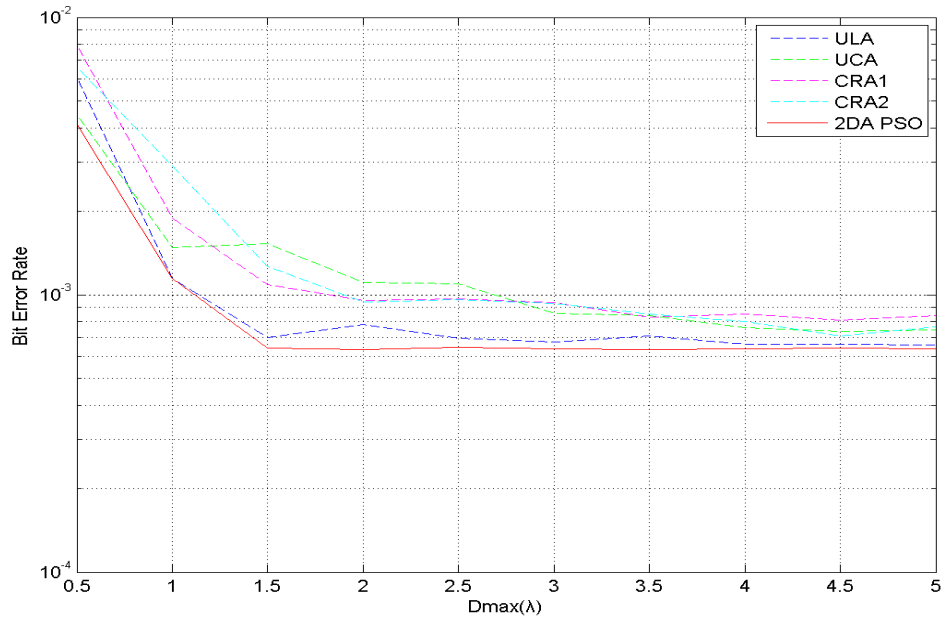


圖 5-13 Bit Error Rate for varying Dmax with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,
MAOA = 90° and AS = 60°

5.3.4 天線數

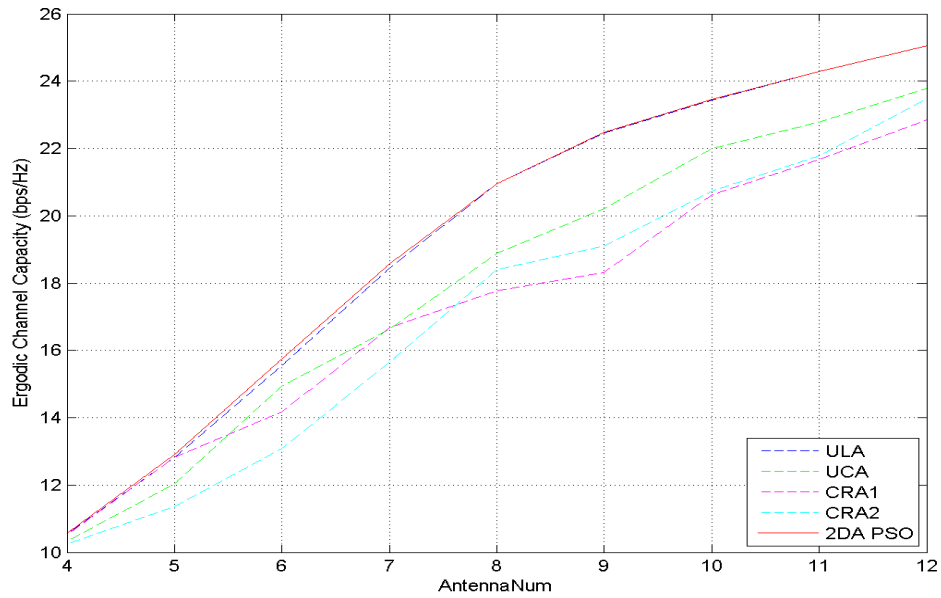


圖 5-14 Ergodic Channel Capacity for varying Antenna Number with

$$MAOA = 90^\circ, AS = 20^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

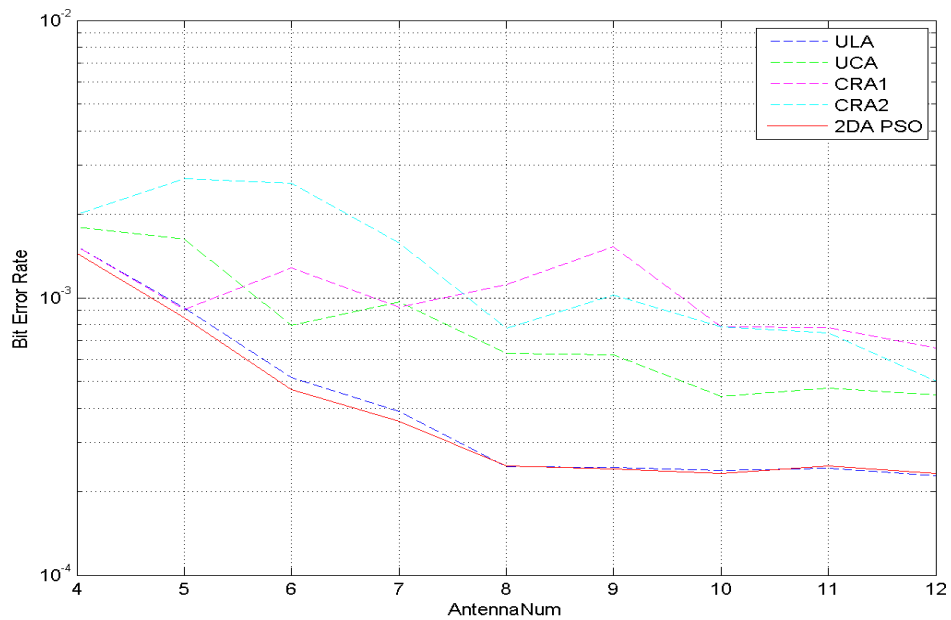


圖 5-15 Bit Error Rate for varying Antenna Number with

$$MAOA = 90^\circ, AS = 20^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

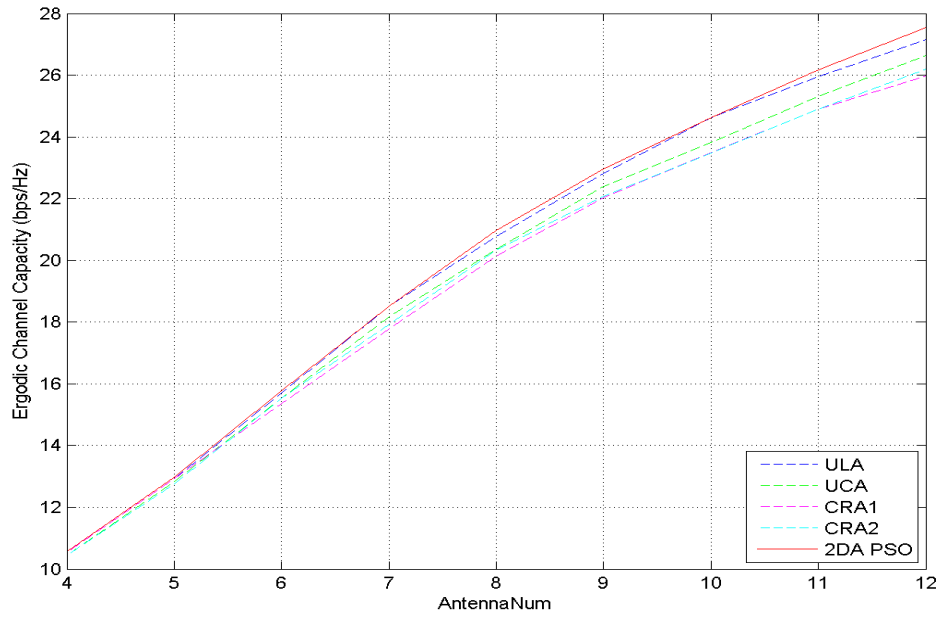


圖 5-16 Ergodic Channel Capacity for varying Antenna Number with
 $MAOA = 90^\circ$, $AS = 60^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

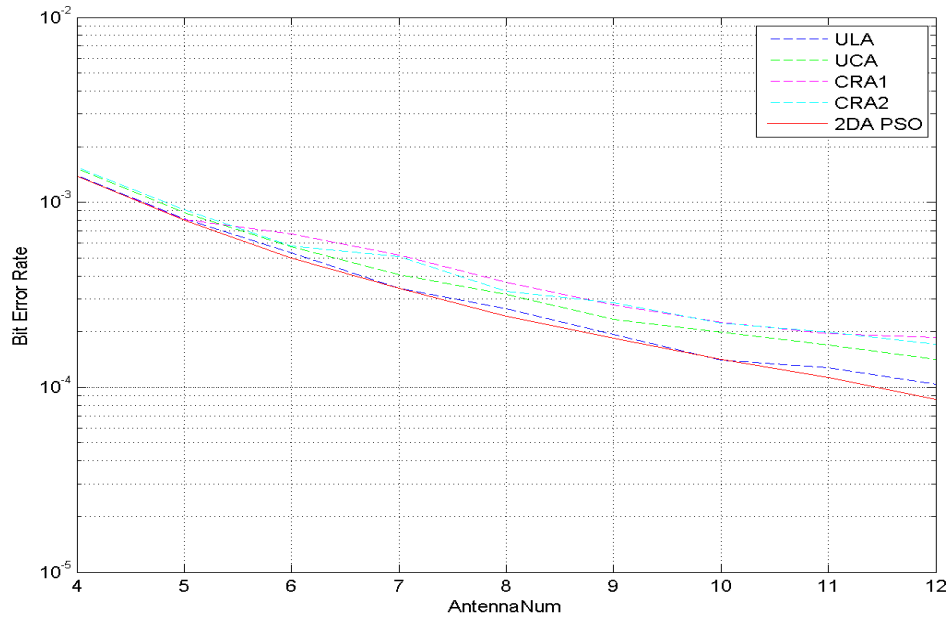


圖 5-17 Bit Error Rate for varying Antenna Number with
 $MAOA = 90^\circ$, $AS = 60^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

對於 MAOA 的影響，在 AS 較小時，圖 5-2 及圖 5-3，MAOA 對天線陣列效能的影響較大，其中 ULA 對 MAOA 的改變最為敏感，主要是因為如同 2.3 節所述，二天線間之空間相關性受到二天線連線與 MAOA 夾角之影響，在此夾角為 90 度時空間相關性會最小，相反在 0 度時空間相關性會最大，而 ULA 任二天線間之方位角皆相同，因此 ULA 對於 MAOA 的改變非常敏感。相對於 ULA，二維陣列對於 MAOA 的改變的影響就較小，主因是因為陣列中天線間之方位角皆不相同，因此受 MAOA 的影響較小。而在 AS 較大時，圖 5-4 及圖 5-5，可以發現 MAOA 對天線陣列效能的影響變得很小，四種固定天線陣列之效能皆距離最佳化結果之效能不遠，當然其中還是以 ULA 對 MAOA 的改變較為敏感，但最高與最低的通道容量差距不到 1bps/Hz。對於最佳化結果之效能而言，其不受 MAOA 的改變而影響，主要是因為在此限制範圍在一圓內，MAOA 的改變僅會造成 PSO 最佳化結果其旋轉，而實際上效能是相同的。

對於 AS 的影響，由圖 5-6 至圖 5-9 可以發現趨勢上陣列效能隨著 AS 上升而上升，並且很快的達到飽和，此時陣列的空間相關性矩陣接近單位矩陣，並且可以發現 ULA 在 MAOA 為 90 度，並且 AS 小於 90 度時，其效能十分接近最佳化後之結果；相對於 ULA，其餘三種二維天線陣列在 AS 小於 90 度時，與最佳化後之結果相比差距較大。在 AS 大於 90 度時，二維陣列的效能皆優於 ULA，其中 UCA 較接近最佳化後之結果，而 CRA2 略優於 CRA1。而由表 5-1 及表 5-2 也可以看出 2DAPSO 之結果在 AS 為 20 度時接近於線性陣列，而在 AS 為 120 度時則接近於圓形陣列。

對於陣列大小的影響，會隨著陣列大小變大而效能上升，這是因為空間相關性會隨著天線間距變大而下降之故，其下降的趨勢可以參考第二章的模擬結果。而對於陣列天線數的影響，可以發現通道容量隨著天線數增加而上升，但對於 UCA、CRA1、CRA2 而言，陣列天線數改變也會改變其對 MAOA 的表現，因此在 AS 較小時，圖 5-14 及圖 5-15，通道容量上升較為崎嶇，而在 AS 較大時的情況，圖 5-16

及圖 5-17，則較為平滑。並且天線數增加使通道容量上升的效果會逐漸趨緩，這是因為天線擺放範圍固定，而天線數增加雖然能帶來多餘的自由度空間分集，但同樣的天線間距變小，造成空間相關性上升，因此通道容量的上升會趨緩，因此對於擴散較小的環境，通道容量上升趨緩的現象更為明顯。然而在 V-BLAST 系統中一次傳送之位元數卻是隨著天線數線性上升，因此隨著通道容量上升的趨緩，位元錯誤率會不降反升。

整體而言，用 PSO 最佳化之天線陣列幾何結構，確實較其他常用之天線陣列在通道容量以及位元錯誤率上皆有較好的效能，並且通道容量與位元錯誤率在相同天線數情況下，呈現對應的情形。在水平擴散角度小的時候，與 MAOA 方向垂直之 ULA 其效能很接近最佳化之結果，而其他三種平面陣列效能則距離最佳化結果效能較大；而在水平擴散角度大的時候四種固定天線陣列效能皆很接近最佳化之結果，其中以 UCA 之效能最接近最佳化結果效能。因此在 AS 小時若能夠適當的旋轉 ULA，則 ULA 在此環境下有接近最佳的效能，而在 AS 大時則是 UCA 有接近最佳的效能。

而相較於第三章之結果，可以發現改變接收端信號擴散情況之影響趨勢上是相同的，只是整體效能因傳送端天線陣列具有空間相關性而略有下降。下降的幅度在接收端天線陣列空間相關性較小時較為明顯，反之若是接收端天線陣列空間相關性很大時，其下降的幅度便很小。

第六章

全相關三維擴散環境下天線陣列效能分析與最佳化

第三章及第四章考慮的皆為半相關通道，但實際上傳送端與接收端皆應具有空間相關性，並且皆會對系統效能造成影響。因此本章與第五章相同考慮全相關通道(fully correlated channel)，意即傳送端與接收端陣列皆具有空間相關性，而信號入射角度擴散在此則假設為 2.4 節敘述之三維擴散情況。在此假設傳送端之天線陣列固定，為半徑 0.5λ 之 UCA，並且擴散情況為水平角度擴散 $AS = 180^\circ$ ，垂直角度擴散 $ES = 90^\circ$ ，並在此環境下比較 ULA、UCA、CRA1 以及 CRA2 之通道容量及位元錯誤率，利用粒子群最佳化(particle swarm optimization, PSO)演算法尋找擁有最大通道容量之二維及三維天線陣列幾何結構，觀察此二種天線陣列的效能及其形狀，並與上述之四種固定天線陣列效能做比較。目的在於除了天線陣列幾何結構最佳化，亦觀察上述之四種天線陣列之效能表現與相同環境下最佳化之二維與三維天線陣列效能之差距，並且觀察在考慮了傳送端之空間相關性後，其對於天線陣列最佳化之影響。

6.1 系統簡介

本節首先介紹本章使用之系統模型，以及判斷天線陣列之效能之重要指標，通道容量及位元錯誤率，並且位元錯誤率與接收端如何偵測有關，因此本節也介紹了本章在模擬位元錯誤率時使用之最大相似性偵測法。

6.1.1 系統模型

本章考慮全相關平坦衰落通道(fully correlated flat-fading channel)，系統參考 [20] 所述之 V-BLAST 系統架構，傳送端之天線數為 N_t ，接收端之天線數為 N_r ，因此信號模型可表示為

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (6.1)$$

使用之通道模型為 Kronecker model，此模型之公式為

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}_{rx}^{1/2} \mathbf{H}_w (\mathbf{R}_{tx}^{1/2})^\dagger \quad (6.2)$$

\mathbf{H}_w 中之元素為獨立且相同分佈之高斯隨機變數，其平均值為 0 而變異數為 1； \mathbf{R}_{tx} 為 $N_t \times N_t$ 之矩陣，其元素為傳送端陣列天線間之空間相關性； \mathbf{R}_{rx} 為 $N_r \times N_r$ 之矩陣，為接收端陣列天線間之空間相關性。關於 Kronecker model 詳細的介紹請參考 3.1 節。在此假設傳送端與接收端皆具空間相關性，並且信號入射角度擴散在此假設為三維擴散，而二天線間之三維空間相關性之公式參考 2.4 節表示為

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_s(m, n) \approx & \frac{1}{N \sin(\theta_\varphi) \sin c(\Delta_\varphi)} [0.5f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{N-1}) + 0.5f(x_N)] \\ & + \frac{2}{N \sin(\theta_\varphi) \sin c(\Delta_\varphi)} \sum_{k=1}^{\infty} \left[i^k \cos(k(\theta_\zeta - \alpha)) \sin c(k\Delta_\zeta) \right. \\ & \left. [0.5g_k(x_0) + g_k(x_1) + \cdots + g_k(x_{N-1}) + 0.5g_k(x_N)] \right] \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\text{其中} \quad \begin{cases} f(x) = e^{i2\pi r_{m,n} \cos(\beta_{m,n}) \cos(x)} \sin(x) J_0(2\pi r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \sin(x)) \\ g_k(x) = e^{i2\pi r_{m,n} \cos(\beta_{m,n}) \cos(x)} \sin(x) J_k(2\pi r_{m,n} \sin(\beta_{m,n}) \sin(x)) \end{cases} \quad (6.4)$$

詳細的三維空間相關性推導請參考 2.4 節。

6.1.2 通道容量

在單一使用者系統的情況下，參考[22]假設接收端之道完整的通道狀態資訊 (perfect channel state information at the receiver, CSIR)，但傳送端沒有通道狀態資訊 (no channel state information at the transmitter, no CSIT)，則傳送的能量平均分配於各天線，此時通道容量(ergodic channel capacity)表示為

$$E[C] = E \left[\log \left(\det(\mathbf{I} + \rho \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H}) \right) \right] \quad (6.5)$$

其中 $\rho = \frac{P}{N_{tx} \sigma_n^2}$ ， P 為傳送之總功率， σ_n^2 為雜訊之功率。而在此使用蒙地卡羅方法 (Monte Carlo method) 來估計通道容量。

6.1.3 最大相似度準則

參考[23]在線性之 MIMO 系統中，接收端必須由 N_{rx} 個接收到之信號偵測出 N_{tx} 個傳送之符號，假設傳送之符號屬於 $\chi = \{x_1, \dots, x_L\}$ 大小為 L 之集合，而 $\chi^{N_{tx}}$ 為長度 N_{tx} 為之符號向量，其元素皆屬於 χ ，則接收端便是必須根據收到之信號由 $\chi^{N_{tx}}$ 中一共 $L^{N_{tx}}$ 個可能傳送之符號向量中選擇其一，因此很直觀的，最理想也就是最小化符元錯誤率(symbol error rate, SER)之準則(criterion)便是選擇給定接收到之信號 \mathbf{y} 後，擁有最大後驗機率(maximum a posterior probability, MAP)之符號向量 $\hat{\mathbf{s}}$ ，表示為

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \max_{\mathbf{s} \in \chi^{N_{tx}}} P(\mathbf{s} \text{ was sent} | \mathbf{y} \text{ is observed}) \quad (6.6)$$

$$= \arg \max_{\mathbf{s} \in \chi^{N_{tx}}} \frac{P(\mathbf{y} \text{ is observed} | \mathbf{s} \text{ was sent}) P(\mathbf{s} \text{ was sent})}{P(\mathbf{y} \text{ is observed})} \quad (6.7)$$

(6.6)即為最大後驗機率準則。而假設可能傳送之符號向量其傳送機率皆相同，換言之 $P(\mathbf{s} \text{ was sent})$ 為常數，則最大後驗機率偵測法可以簡化為

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \max_{\mathbf{s} \in \mathcal{X}^{N_{tx}}} P(\mathbf{y} \text{ is observed} | \mathbf{s} \text{ was sent}) \quad (6.8)$$

(6.8)即為最大相似度(maximum likelihood, ML)準則。並且一般而言雜訊會假設其屬於加性白高斯雜訊(Additive White Gaussian Noise, AWGN)，則可以將最大相似偵測法轉變為尋找可能接收到之未帶雜訊信號與實際接收到之信號 \mathbf{y} 間，歐幾里德距離(squared Euclidean distance)最小之該符號向量，表示為

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{s} \in \mathcal{X}^{N_{tx}}} \|\mathbf{H}\mathbf{s} - \mathbf{y}\|^2 \quad (6.9)$$

同時(6.9)亦可稱為最小距離(minimum distance, MD)準則。

6.1.4 位元錯誤率

位元錯誤率(bit error rate, BER)為一種通訊系統效能之指標，因為在傳輸資料過程中，不可避免地會受到通道雜訊、干擾及信號失真等影響，造成接收到之位元錯誤，因此位元錯誤率代表了該系統在整個傳輸過程中，其接收端收到之所有位元有多少比例之錯誤。而在此使用蒙地卡羅方法(Monte Carlo method)來估計位元錯誤率，在 V-BLAST 系統架構中，假設傳送之符號為 BPSK，則每一次傳送之符號向量帶有 N_{tx} 個位元。因此在此位元錯誤率模擬為根據(6.2)產生一隨機之通道，並產生數組隨機之符號向量 \mathbf{s}_i ，模擬經過該通道並加上雜訊，並在接收端使用(6.9)之準則偵測原來傳送之符號向量 $\hat{\mathbf{s}}_i$ ，最後根據的差別即可計算該通道之位元錯誤率。重複以上程序計算數組隨機之通道之位元錯誤率並平均之，即可得到系統之位元錯誤率。

6.2 天線陣列幾何結構最佳化

本節說明天線陣列幾何結構最佳化詳細的過程。簡述粒子群最佳化演算法，以及在此使用之適應值函數，並且本章環境為三維擴散之環境，如第二節所討論，在三維擴散環境下三維之天線陣列幾何結構有其獨特之空間特性，因此本節包含

了最佳化二維天線陣列以及三維天線陣列。

6.2.1 粒子群最佳化演算法

假設群體中有 M 個粒子，初始時由搜索空間中從隨機的位置開始，對一個 N 維的問題，則其群體之位置以及速度可以分別表示為一個 $N \times M$ 的矩陣如下：

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_M] \quad (6.10)$$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_M] \quad (6.11)$$

位置矩陣 \mathbf{X} 中的 \mathbf{x}_i 代表了第 i 個粒子目前的位置，而速度矩陣 \mathbf{V} 中的 \mathbf{v}_i 則代表了第 i 個粒子目前的速度。第 i 個粒子個別經歷過最佳位置則定義為 \mathbf{p}_i ，而 $Pbest_i$ 則為位於 \mathbf{p}_i 時之適應值，而在此將 \mathbf{p}_i 組合為矩陣 \mathbf{P}

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_M] \quad (6.12)$$

若現在所在位置之適應值 $f(\mathbf{x}_i)$ 較 $Pbest_i$ 好，則將 \mathbf{p}_i 更新為 \mathbf{x}_i ， $Pbest_i$ 更新為 $f(\mathbf{x}_i)$ 。同時 $Pbest_i$ 必須與群體經歷過的最佳適應值 $Gbest$ 比較，若較好則將更新全域最佳位置 \mathbf{g} 更新為 \mathbf{p}_i ，而 $Gbest$ 更新為 $Pbest_i$ 。

$$\mathbf{g} = [g_1 \quad g_2 \quad \cdots \quad g_N]^T \quad (6.13)$$

\mathbf{X} 、 \mathbf{V} 、 \mathbf{P} 和 \mathbf{g} 包含了 PSO 演算法所需的所有資訊，其核心概念便是在每次迭代中更新這些矩陣，各個粒子在空間中移動之軌跡趨勢上向著個別最佳解以及全域最佳解移動，並計算其所經位置之適應值，若較好則更新個別最佳解以及全域最佳解，隨著一次次迭代逐漸搜尋到該搜索空間最佳的位置。而速度矩陣 \mathbf{V} 以及位置矩陣 \mathbf{X} 更新公式參考[12]，如下

$$\mathbf{v}_{n,m}^{t+1} = w^t \mathbf{v}_{n,m}^t + c_1 U_1 \times (\mathbf{p}_{n,m}^t - \mathbf{x}_{n,m}^t) + c_2 U_2 \times (\mathbf{g}_n^t - \mathbf{x}_{n,m}^t) \quad (6.14)$$

$$\mathbf{x}_{n,m}^{t+1} = \mathbf{x}_{n,m}^t + \mathbf{v}_{n,m}^{t+1} \quad (6.15)$$

U_1 以及 U_2 為在 $[0,1]$ 區間中均勻分布之隨機變數，並且速度向量中 n 個成分間彼此不同，此二參數是爲了保持群體在搜索過程中的隨機性。 c_1 和 c_2 為向個別最佳位置與向全域最佳位置移動之加速因子(acceleration)，先前的研究[25]顯示設爲 2.0 是較爲理想的選擇。而參數 w 則稱爲慣性權重(inertial weight)，根據[26]建議使慣性權重隨著迭代由較大之 w_{start} 線性下降至較小之 w_{end} ，其線性下降可由下式表示

$$w^t = w_{start} - \frac{w_{start} - w_{end}}{t_{max}} \times t \quad (6.16)$$

其中 t_{max} 爲最大迭代次數，並且根據其建議，將 w_{start} 設爲 0.9， w_{end} 設爲 0.4。而因爲速度更新公式中並沒有限制速度的參數，因此需要 V_{max} 來限制速度，根據[25, 26]一般設定爲搜索空間之 10~20%，若是速度超過 V_{max} 則令之等於 V_{max} 。

在此僅簡略說明該演算法的運作，因此關於粒子群最佳化演算法的詳細背景及解釋請參考 3.5 節。

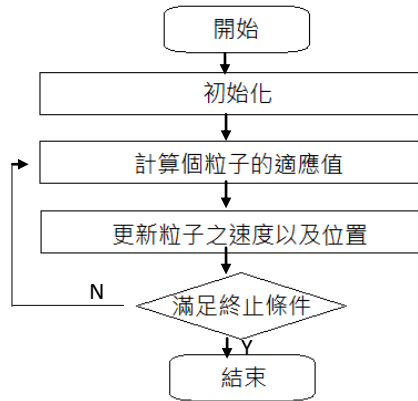


圖 6-1 粒子群最佳化簡易流程圖

6.2.2 適應值函數設計

演算法的目標在於

$$\max E \left[\log \left(\det \left(\mathbf{I} + \rho \mathbf{H}^H \mathbf{H} \right) \right) \right] \quad (6.17)$$

而在此因爲最佳化效率的考量，將最大化通道容量的問題轉變最大化通道容量上

界，詳細的推導過程以及適應值函數效能之比較請參考第三章。通道容量上界表示為

$$E[C] = E\left[\log\left(\det(\mathbf{I} + \rho\mathbf{H}^\dagger\mathbf{H})\right)\right] < \log\left(E\left[\det(\mathbf{I} + \rho\mathbf{H}^\dagger\mathbf{H})\right]\right) \quad (6.18)$$

並且可以逐步化簡為下式：

$$E[C] < \log\left(\sum_{k=0}^N k! \rho^k \sum_{\mathbf{a}, |\mathbf{a}|=k} \lambda_{tx, \alpha_1} \cdots \lambda_{tx, \alpha_k} \sum_{\mathbf{\beta}, |\mathbf{\beta}|=k} \lambda_{rx, \beta_1} \cdots \lambda_{rx, \beta_k}\right) \quad (6.19)$$

其中 $\lambda_{tx,i}$ 與 $\lambda_{rx,i}$ 為傳送端與接收端空間相關性矩陣之特徵值，在此即令此通道容量上界為適應值函數。接著簡化 $\sum_{\mathbf{a}, |\mathbf{a}|=k} \lambda_{\alpha_1} \cdots \lambda_{\alpha_k}$ 之計算，首先令

$$E_k = \sum_{\mathbf{a}, |\mathbf{a}|=k} \lambda_{\alpha_1} \cdots \lambda_{\alpha_k} \quad \text{and} \quad S_k = (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^N \lambda_i^k \quad (6.20)$$

則 E_k 剛好可以滿足

$$E_0 = 1 \quad \text{and} \quad E_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k E_{k-i} S_i \quad (6.21)$$

6.2.3 利用 PSO 最佳化天線陣列幾何結構

本章考慮 fully correlated Kronecker channel model，並且假設傳送端天線陣列固定，為半徑為 0.5λ 之 UCA，且傳送端與接收端信號擴散之情況皆假設為三維擴散，因此 \mathbf{R}_{tx} 及 \mathbf{R}_{rx} 皆使用 2.4 節推導之結果，並且在此假設傳送端固定為水平角度擴散 $AS = 180^\circ$ ，垂直角度擴散 $ES = 90^\circ$ 。而在此通道產生之公式使用(6.2)，並假設 $N_r = N_t = N$ 。在此環境下利用 6.5 節所述之 PSO 演算法，在接收端尋找擁有最佳通道容量之二維及三維天線陣列，而對二維陣列以及三維天線陣列，其搜索空間限制條件分別為設為

$$\left\{x_i, y_i, z_i \mid \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \leq Dmax, z_i = 0\right\} \quad (6.22)$$

以及

$$\left\{x_i, y_i, z_i \mid \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} \leq Dmax\right\} \quad (6.23)$$

亦即分別在半徑為 $Dmax$ 之「圓型」以及「球型」的範圍內尋找最佳之天線陣列幾何結構。 $Dmax$ 為陣列大小限制參數，其單位為波長(λ)。並且在此設 PSO 演算法中的粒子數為 16，迭代次數為 500 次，且令(6.19)為本章之適應值函數。而[10]顯示 UCA 在三維信號入射角度擴散中具有良好的效能，因此為了加速最佳化的進行，將第一個粒子初始位置設為半徑為 $Dmax$ 之 UCA，而其餘初始位置則為隨機。以下步驟一步驟的說明最佳化之過程。

重要參數：

N 天線數、 θ_ξ 平均水平入射角、 Δ_ξ 水平角度擴散、 θ_ϕ 平均垂直入射角、 Δ_ϕ 垂直角度擴散、 $Dmax$ 陣列大小限制、 \mathbf{X} 粒子位置、 V_{max} 速度限制、 \mathbf{V} 粒子速度、 \mathbf{P} 個別最佳位置、 \mathbf{g} 群體最佳位置、 $f(\mathbf{x})$ 適應值函數、 $Pbest_i$ 個別最佳適應值、 $Gbest$ 群體最佳適應值、 t_{max} 最大迭代次數。

step 1: 設定 N 、 θ_ξ 、 Δ_ξ 、 θ_ϕ 、 Δ_ϕ 、 $Dmax$ 、 $f(\mathbf{x})=(6.19)$ 、粒子數=16、 $t_{max}=500$ 、

$w_{start}=0.9$ 、 $w_{end}=0.4$ 、 $V_{max}=Dmax/5$ 。

step 2: 初始化粒子位置 \mathbf{X} 、粒子速度 \mathbf{V} 、個別最佳適應值 $Pbest_i$ 以及群體最佳適應值 $Gbest$ 。初始粒子位置 \mathbf{x}_1 設為半徑為 $Dmax$ 之 UCA 天線陣列架構，其餘 $\mathbf{x}_2 \sim \mathbf{x}_{16}$ 均勻的隨機分布在搜索空間中，初始粒子速度 $\mathbf{V}=\mathbf{0}$ ，而 $Pbest_i=0$ ， $Gbest=0$ ，且迭代次數 $t=1$ 。

step 3: 計算各粒子之適應值 $f(\mathbf{x}_i)$ 。首先由粒子位置轉為天線陣列之元件座標，並由座標使用 2.4 節之三維空間相關性公式計算該天線陣列之空間相關性，最後使

用(6.19)由空間相關性計算通道容量上界作為該粒子之適應值， $i = 1 \sim 16$

step 4: 比較粒子之適應值 $f(\mathbf{x}_i)$ 與個別最佳適應值 $Pbest_i$ 大小。若 $f(\mathbf{x}_i)$ 較 $Pbest_i$ 大，則令 $Pbest_i$ 更新為 $f(\mathbf{x}_i)$ ，並令 \mathbf{p}_i 更新為 \mathbf{x}_i ， $i = 1 \sim 16$ 。

step 5: 比較個別最佳適應值 $Pbest_i$ 與群體最佳適應值 $Gbest$ 。若 $Pbest_i$ 較 $Gbest$ 大，則令 $Gbest$ 更新為 $Pbest_i$ ，而 \mathbf{g} 更新為 \mathbf{p}_i ， $i = 1 \sim 16$ 。

step 6: 更新粒子位置 \mathbf{X} 及粒子速度 \mathbf{V} 。使用(6.14)更新 \mathbf{V} ，其中 w' 符合(6.16)，並且令其中大於 V_{\max} 的等於 V_{\max} 。用(6.15)更新 \mathbf{X} ，並令其中超過搜索範圍限制條件(6.22)或者(6.23)停在搜索範圍之邊界。

step 7: $t = t + 1$ 。若 $t < t_{\max}$ ，則回 *step 3*；若 $t = t_{\max}$ ，則結束，而最後之群體最佳位置 \mathbf{g} 即為最佳化之結果。

6.3 模擬結果

在此會分別模擬如第一章介紹之 ULA、UCA、CRA1 以及 CRA2 四種固定之天線陣列幾何形狀之通道容量以及位元錯誤率，並與我們提出之使用 PSO 最佳化幾何形狀之二維及三維天線陣列作比較，以下簡稱此二天線陣列為 2DA PSO 及 3DA PSO。通道容量的模擬為產生 3000 個隨機之通道，並根據(6.5)之公式計算其通道容量並平均之；位元錯誤率模擬之程序如 6.4 節所述，為產生 5000 個隨機之通道，每一個通道傳送 100 個隨機之 BPSK symbols，並根據 4.3 節所述之最大相似度準則來偵測傳送之信號，最後根據原來之信號與偵測出之信號之差別計算其位元錯誤率。模擬的總 SNR 皆在 10dB，同時在接下來之模擬中，陣列大小限制參數 D_{\max} 同時代表了 ULA 總長之一半、UCA 之半徑以及 CRA1 及 CRA2 之外圈半徑，意即六種天線陣列皆可放置於一半徑為 D_{\max} 之球體內。

6.3.1 平均水平入射角

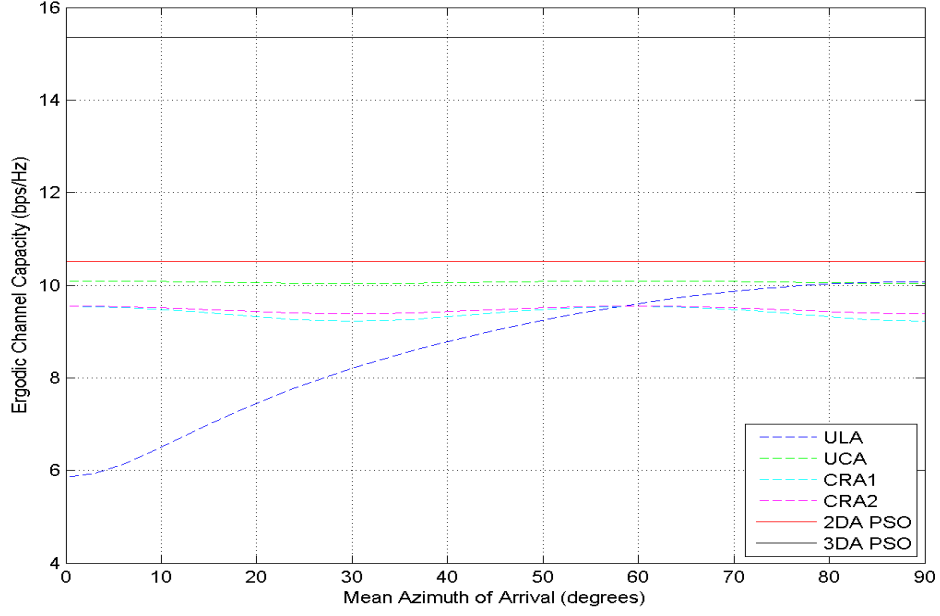


圖 6-2 Ergodic Channel Capacity for varying $MAOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$$AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 5^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

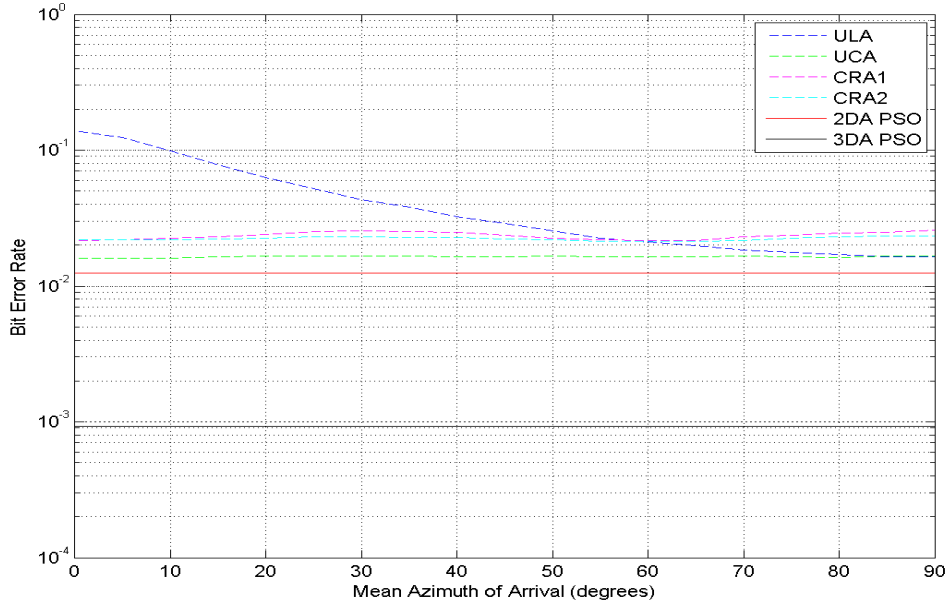


圖 6-3 Bit Error Rate for varying $MAOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$$AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 5^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

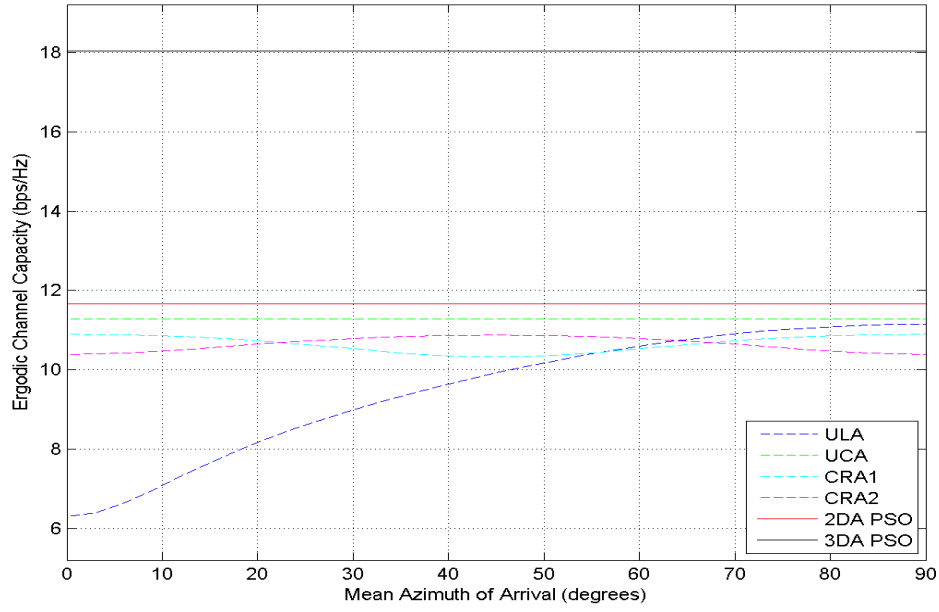


Figure 6-4 Ergodic Channel Capacity for varying $MAOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 8$,

$$AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 5^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

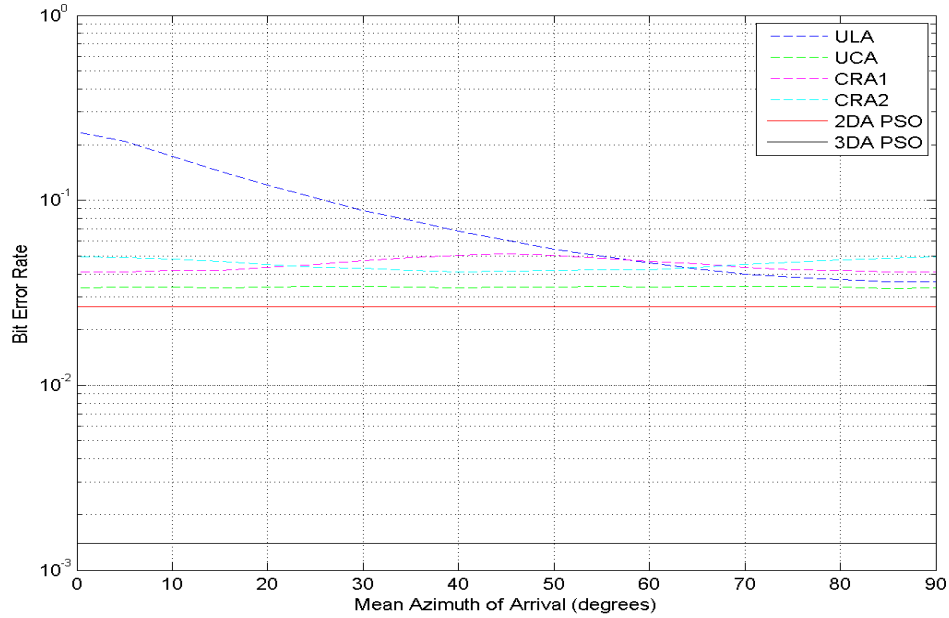


Figure 6-5 Bit Error Rate for varying $MAOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 8$,

$$AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 5^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

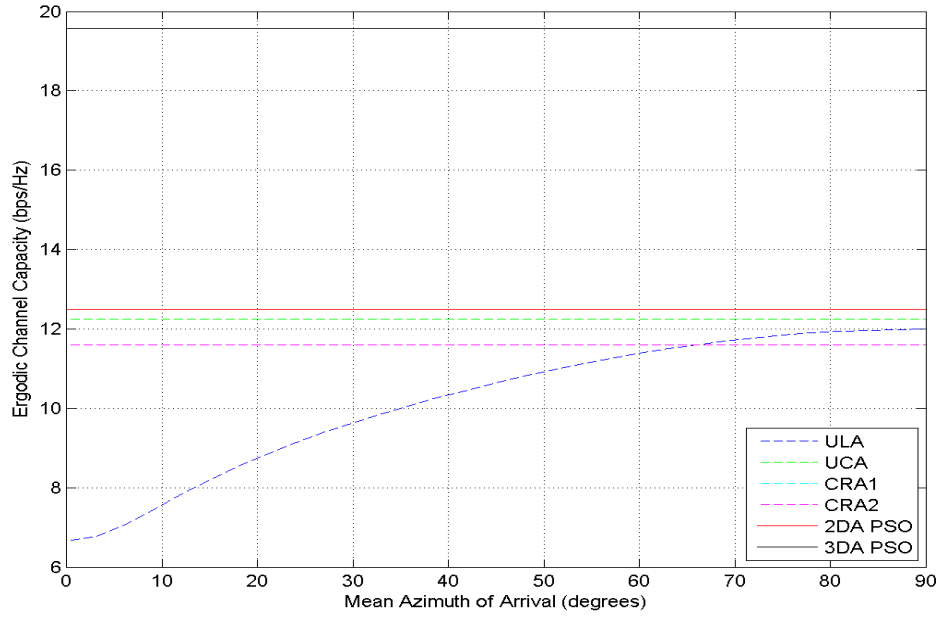


圖 6-6 Ergodic Channel Capacity for varying $MAOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 10$,

$$AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 5^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

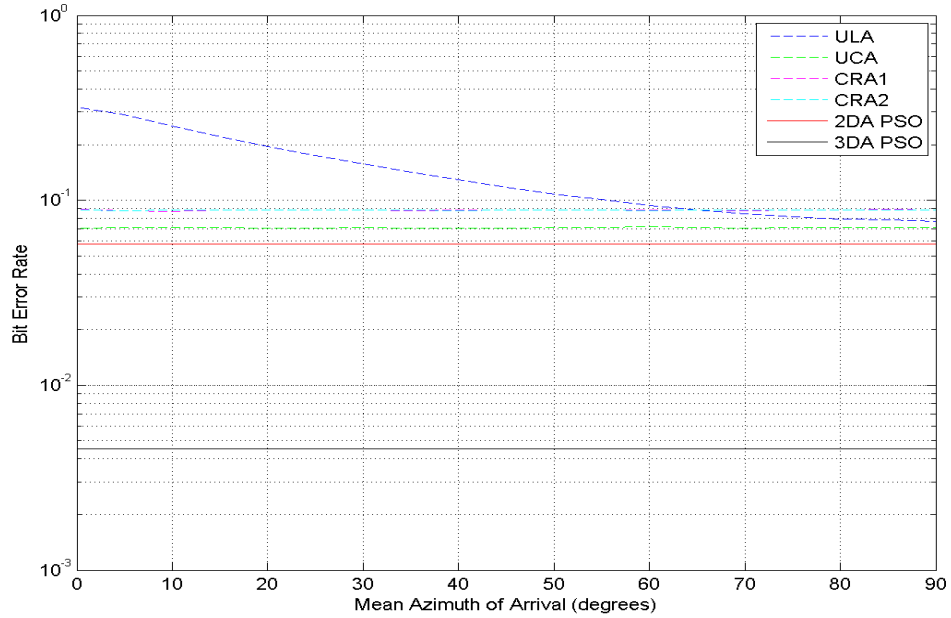


圖 6-7 Bit Error Rate for varying $MAOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 10$,

$$AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 5^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

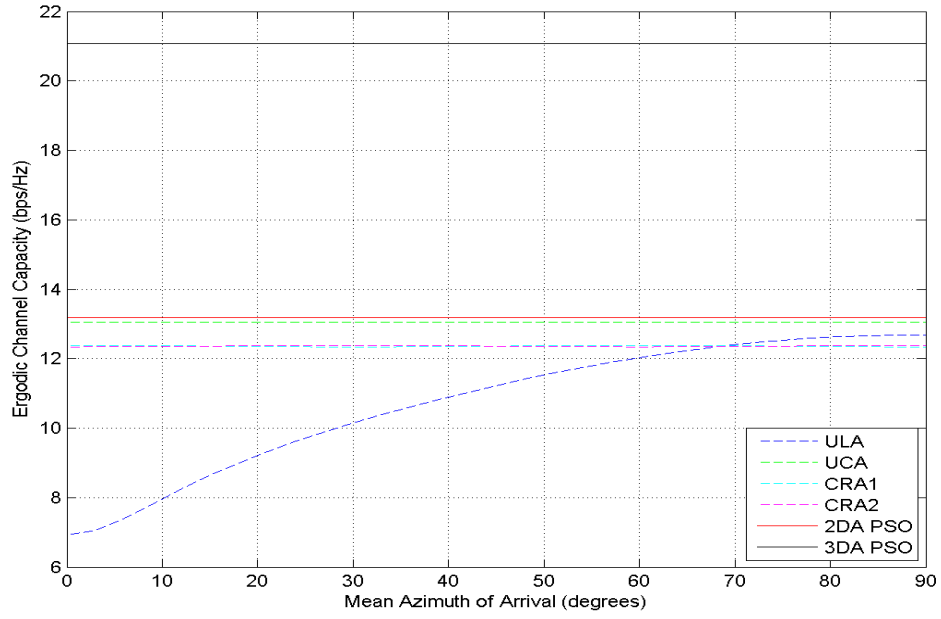


圖 6-8 Ergodic Channel Capacity for varying $MAOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 12$,

$$AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 5^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

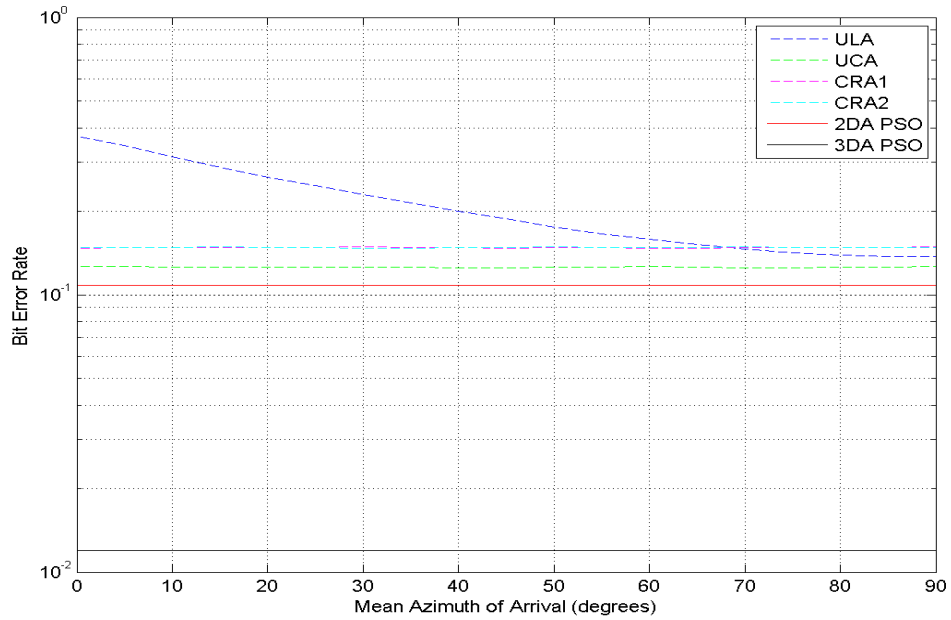


圖 6-9 Bit Error Rate for varying $MAOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 12$,

$$AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 5^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

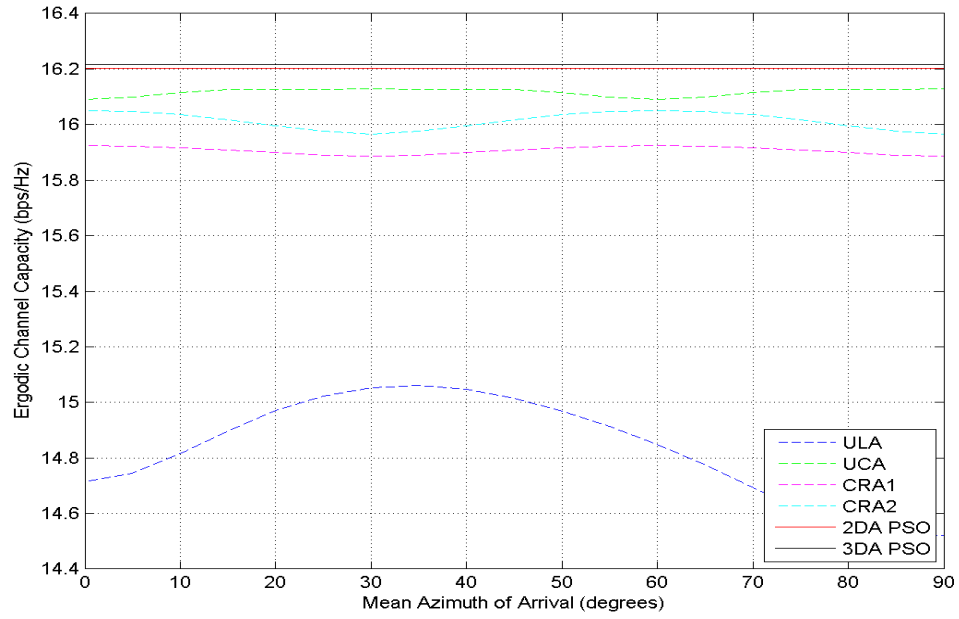


圖 6-10 Ergodic Channel Capacity for varying $MAOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$AS = 10^\circ, MEOA = 60^\circ, ES = 20^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

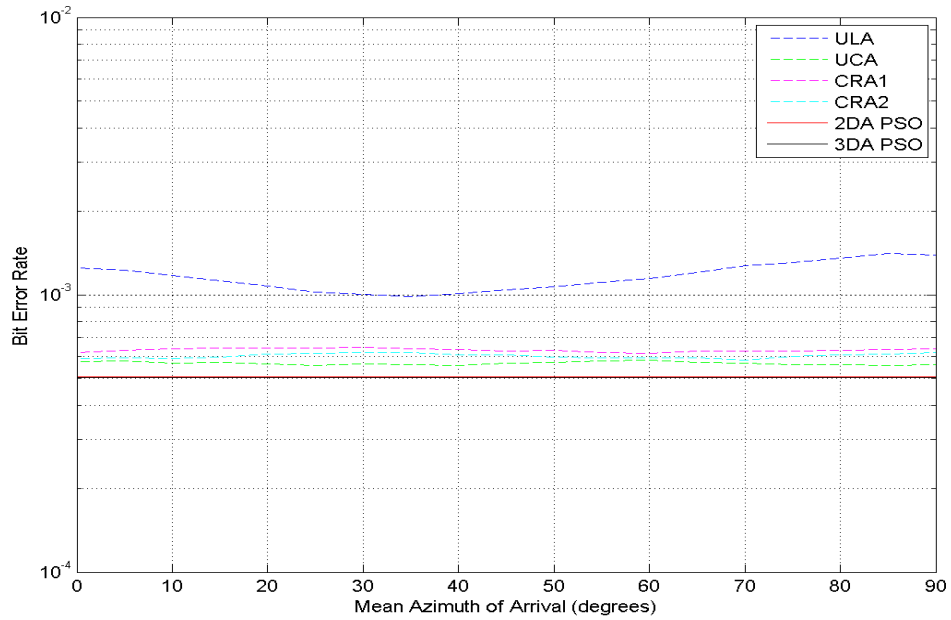


圖 6-11 Bit Error Rate for varying $MAOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$AS = 10^\circ, MEOA = 60^\circ, ES = 20^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

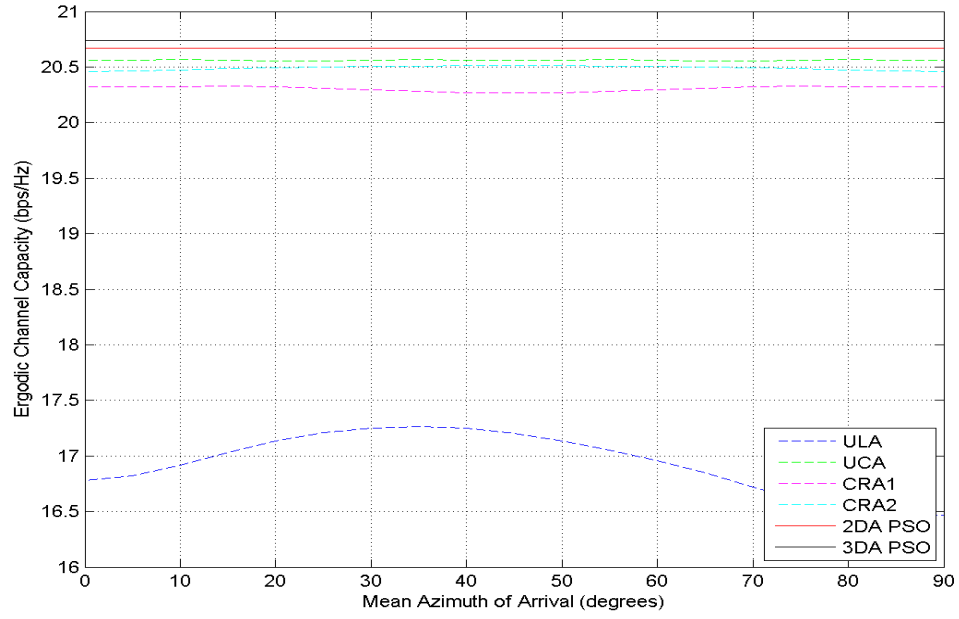


圖 6-12 Ergodic Channel Capacity for varying $MAOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 8$,

$AS = 10^\circ, MEOA = 60^\circ, ES = 20^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

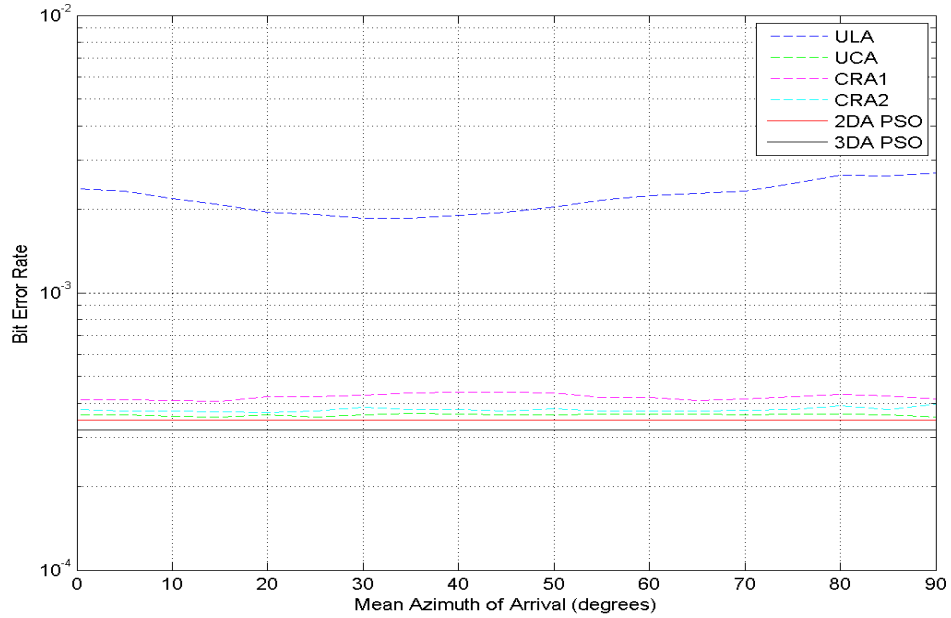


圖 6-13 Bit Error Rate for varying $MAOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 8$,

$AS = 10^\circ, MEOA = 60^\circ, ES = 20^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

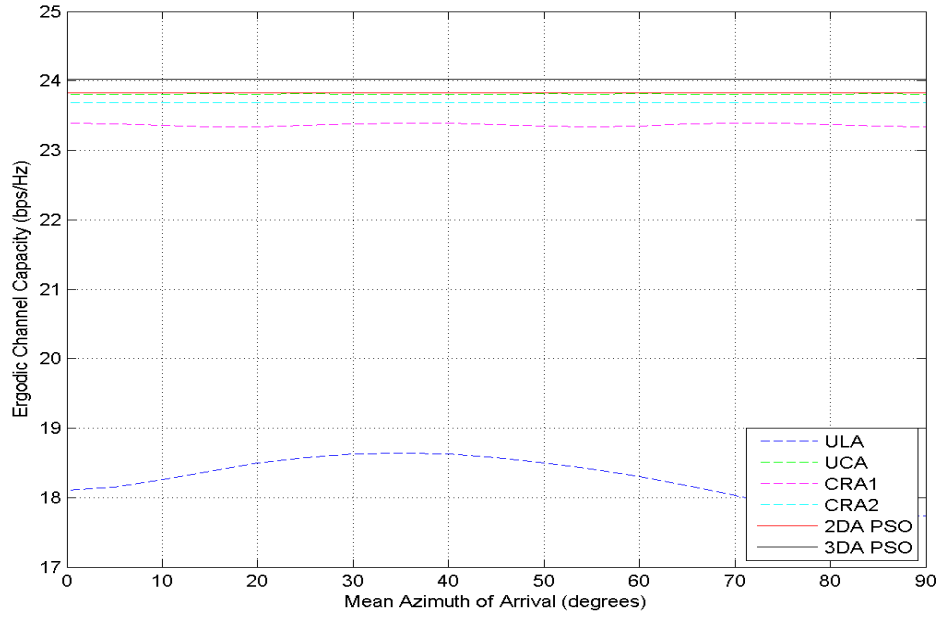


Figure 6-14 Ergodic Channel Capacity for varying $MAOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 10$,

$AS = 10^\circ, MEOA = 60^\circ, ES = 20^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

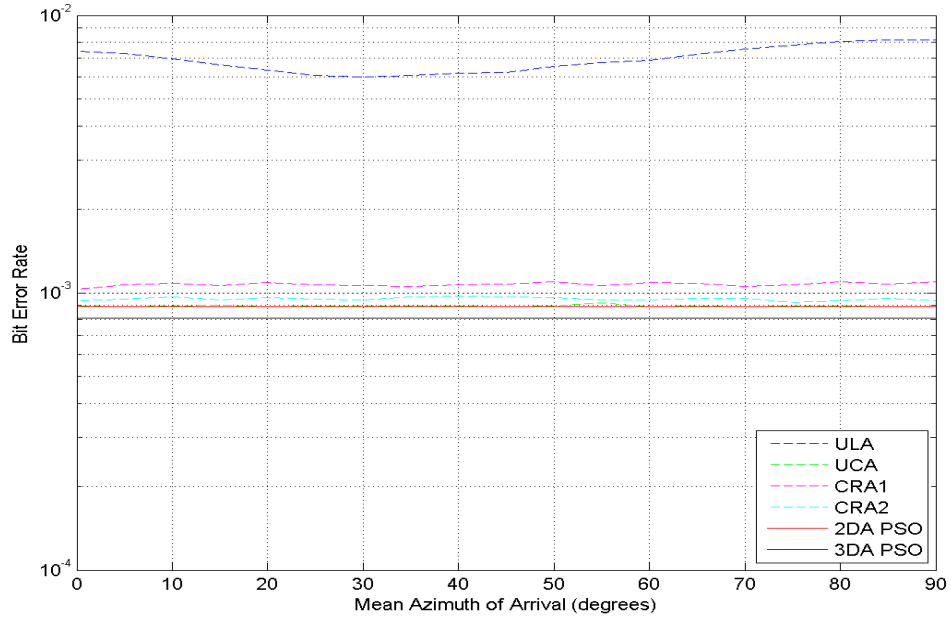


Figure 6-15 Bit Error Rate for varying $MAOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 10$,

$AS = 10^\circ, MEOA = 60^\circ, ES = 20^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

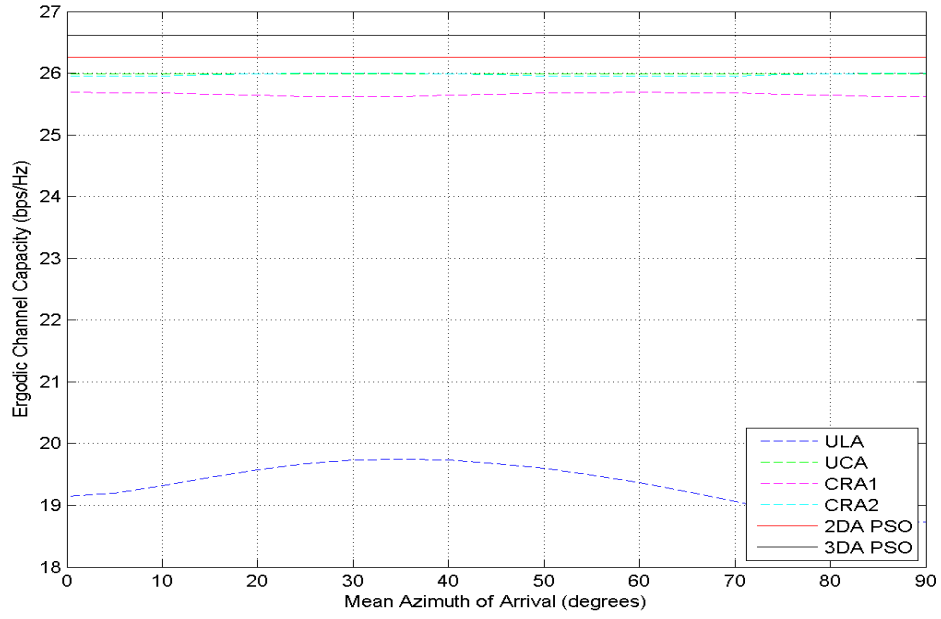


Figure 6-16 Ergodic Channel Capacity for varying $MAOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 12$,

$AS = 10^\circ, MEOA = 60^\circ, ES = 20^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

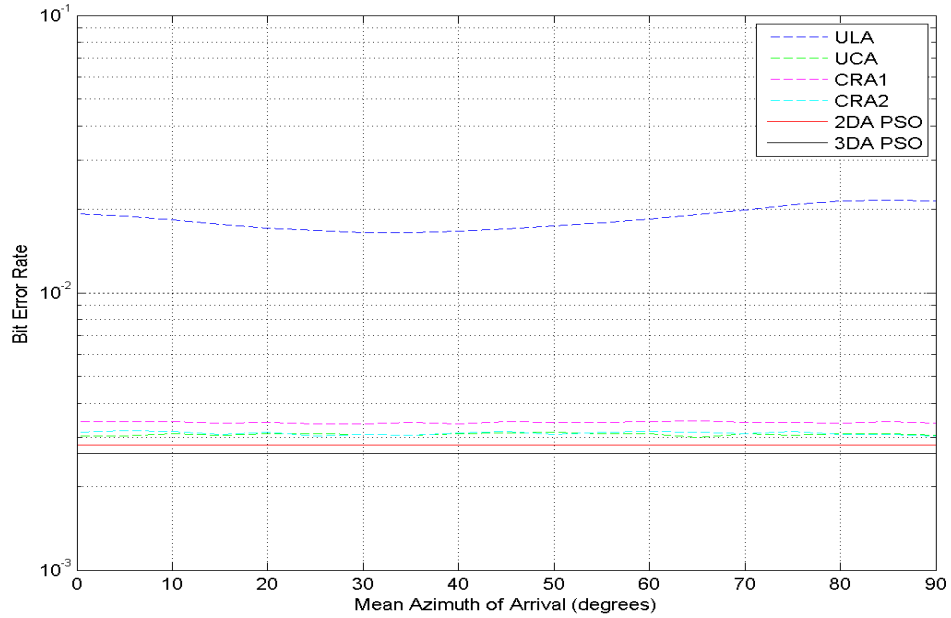


Figure 6-17 Bit Error Rate for varying $MAOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 12$,

$AS = 10^\circ, MEOA = 60^\circ, ES = 20^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

6.3.2 平均垂直入射角

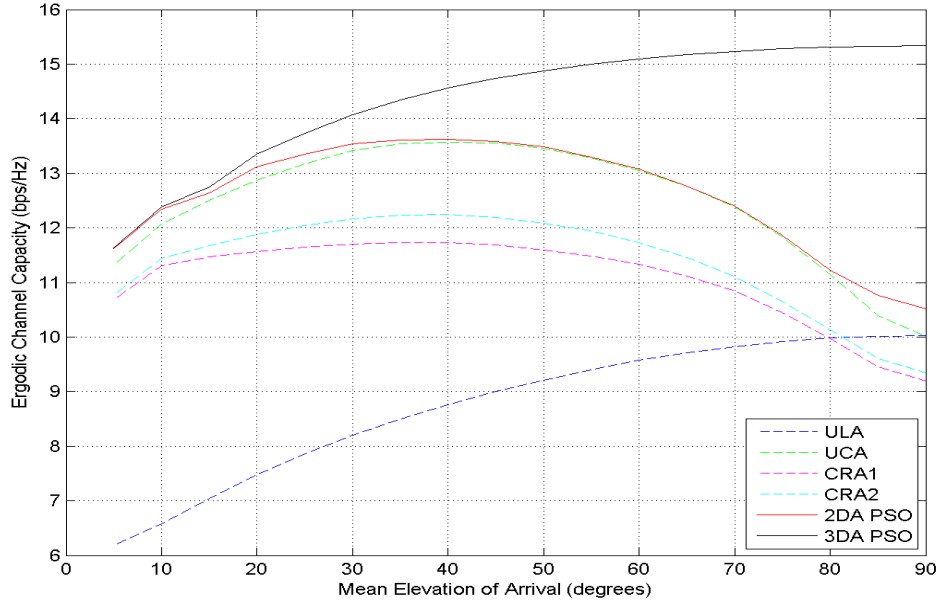


圖 6-18 Ergodic Channel Capacity for varying $MEOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, ES = 5^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

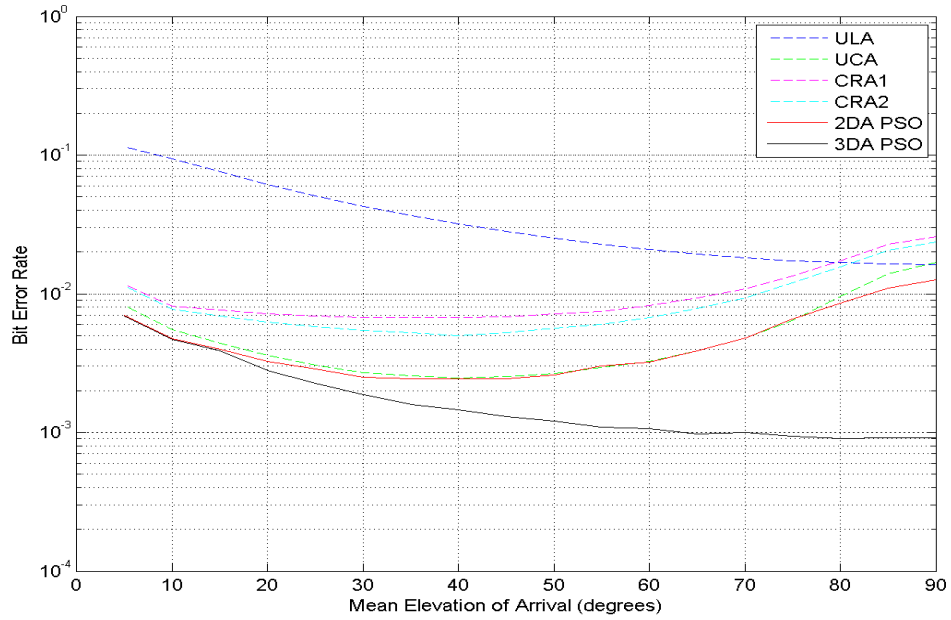


圖 6-19 Bit Error Rate for varying $MEOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, ES = 5^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

2DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.6626	4.6626	0.0000	0.0000	-4.6626	-4.6626
y (λ)	1.8055	-1.8055	-5.0000	5.0000	1.8055	-1.8055
z (λ)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

3DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.6606	4.6603	-0.0002	-0.0002	-4.6601	-4.6608
y (λ)	1.6967	-1.6968	-4.6917	4.6921	1.6980	-1.6950
z (λ)	-0.6322	0.6345	1.7285	-1.7275	-0.6327	0.6354

表 6-1 Optimization Results of 2DA PSO and 3DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, MEOA = 20^\circ, ES = 5^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

2DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.9902	2.8367	2.4536	-2.4525	-2.8368	-4.9898
y (λ)	-0.3135	4.1175	-4.3566	4.3572	-4.1174	0.3186
z (λ)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

3DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.9245	3.8113	1.7937	-1.8039	-3.8176	-4.9227
y (λ)	-0.4735	1.5829	-2.3351	2.3427	-1.5968	0.5093
z (λ)	0.7247	-2.8229	4.0410	-4.0327	2.8065	-0.7127

表 6-2 Optimization Results of 2DA PSO and 3DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, MEOA = 60^\circ, ES = 5^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

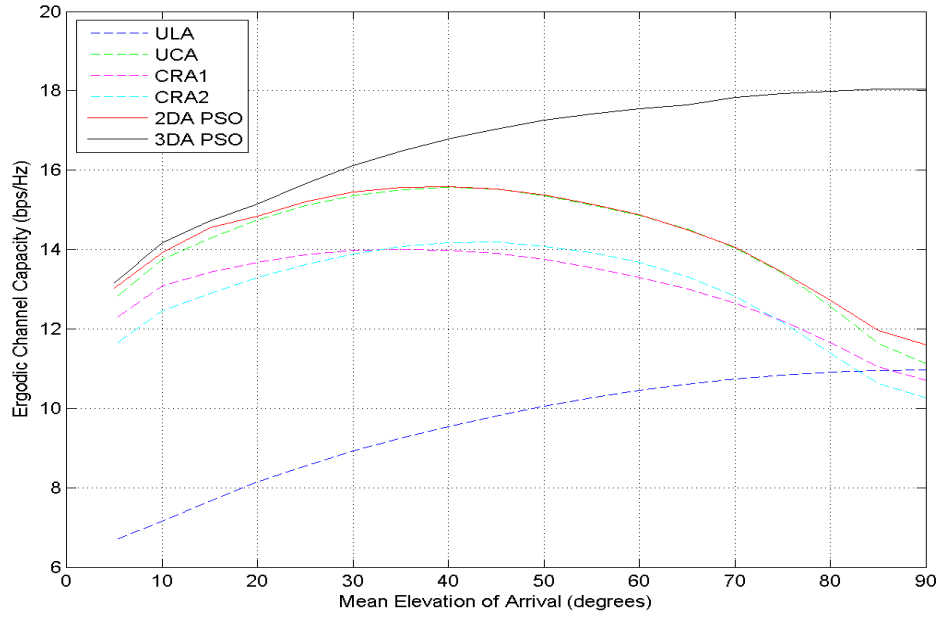


圖 6-20 Ergodic Channel Capacity for varying $MEOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 8$,

$$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, ES = 5^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

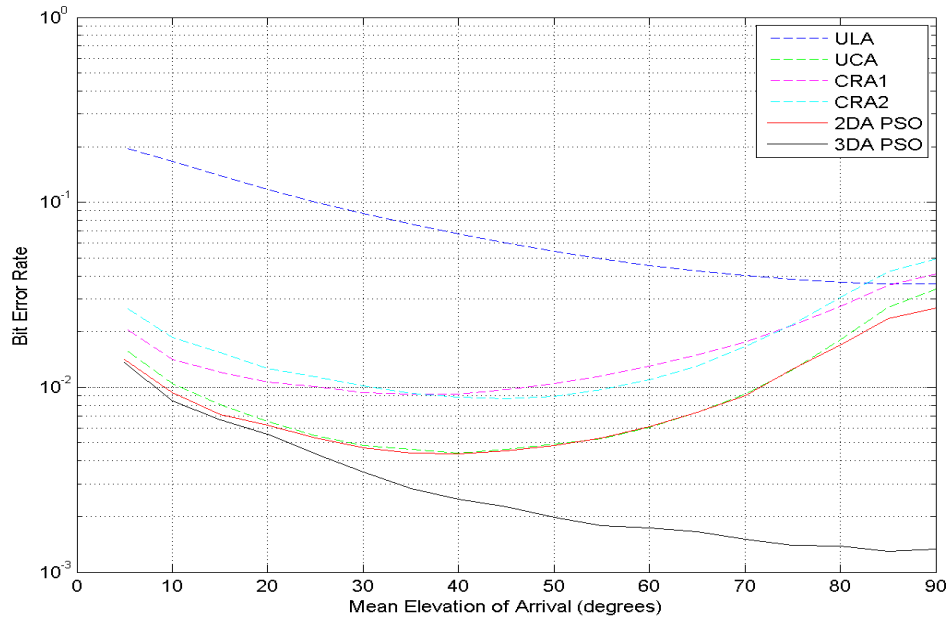


圖 6-21 Bit Error Rate for varying $MEOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 8$,

$$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, ES = 5^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

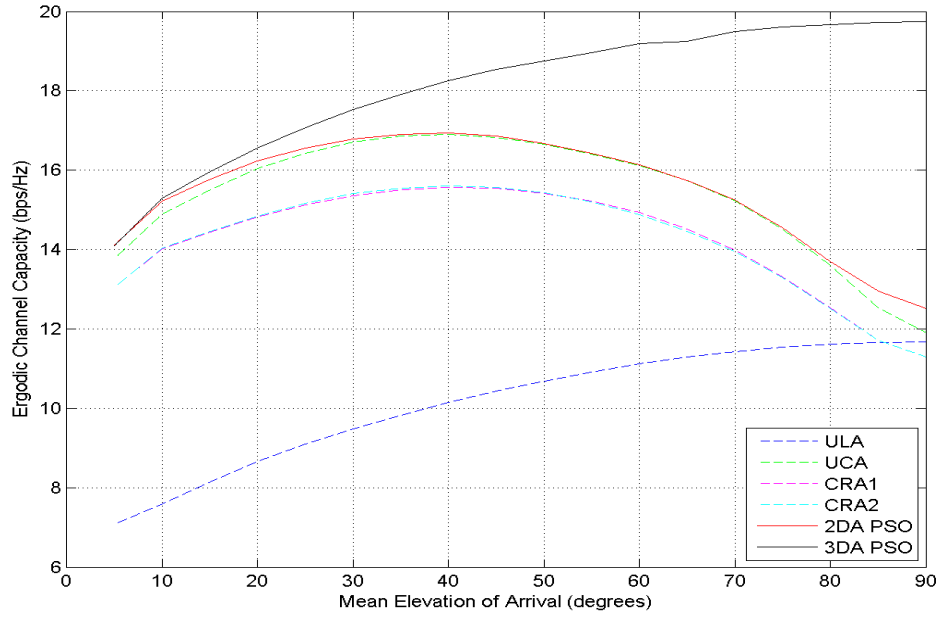


Figure 6-22 Ergodic Channel Capacity for varying $MEOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 10$,

$$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, ES = 5^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

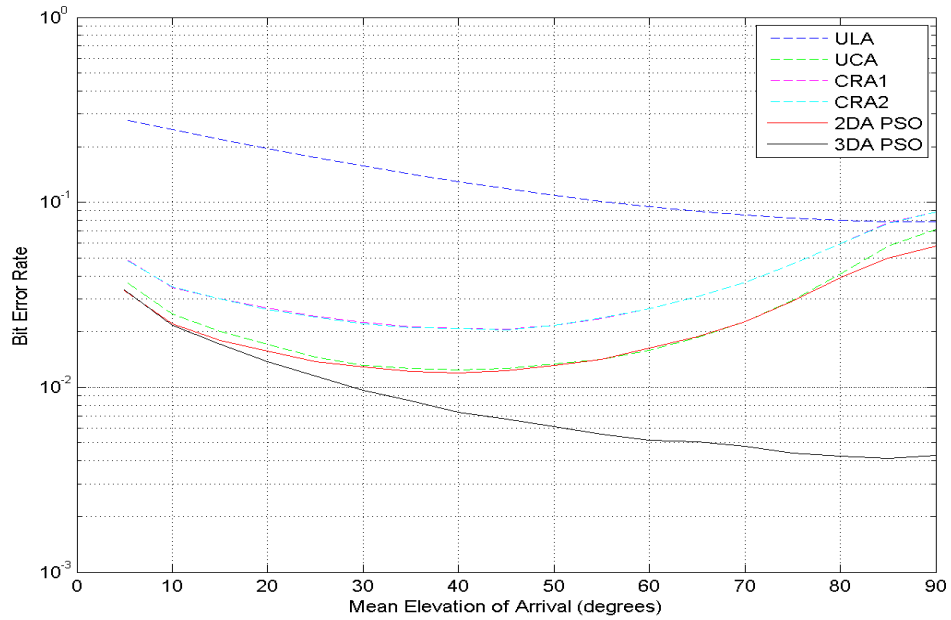


Figure 6-23 Bit Error Rate for varying $MEOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 10$,

$$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, ES = 5^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

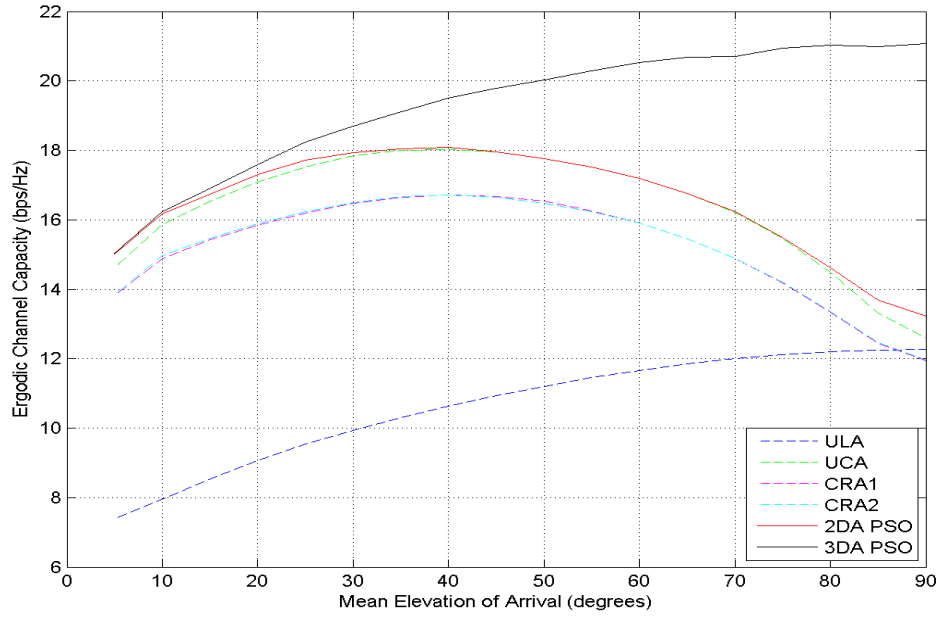


圖 6-24 Ergodic Channel Capacity for varying $MEOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 12$,

$$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, ES = 5^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

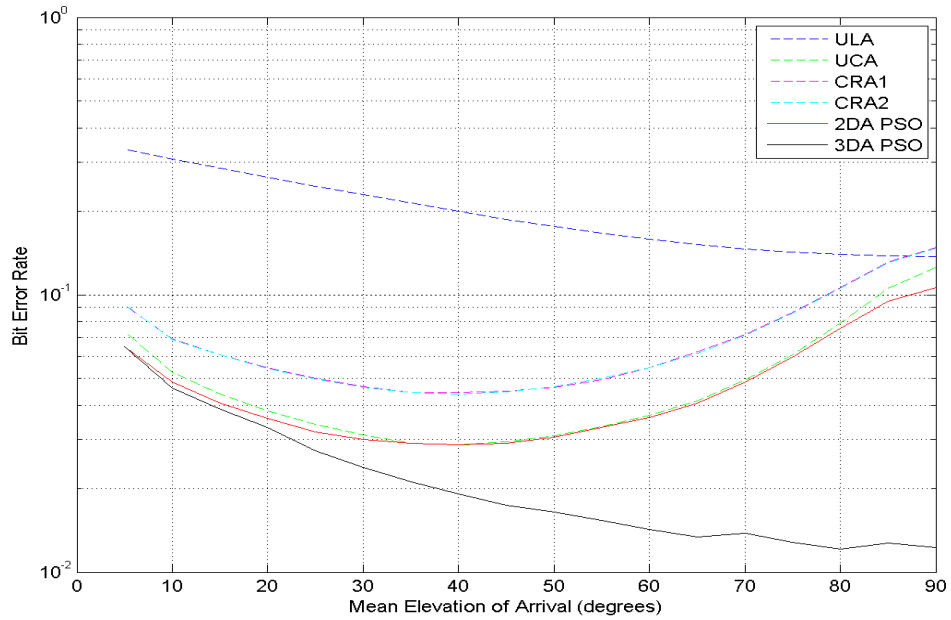


圖 6-25 Bit Error Rate for varying $MEOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 12$,

$$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, ES = 5^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

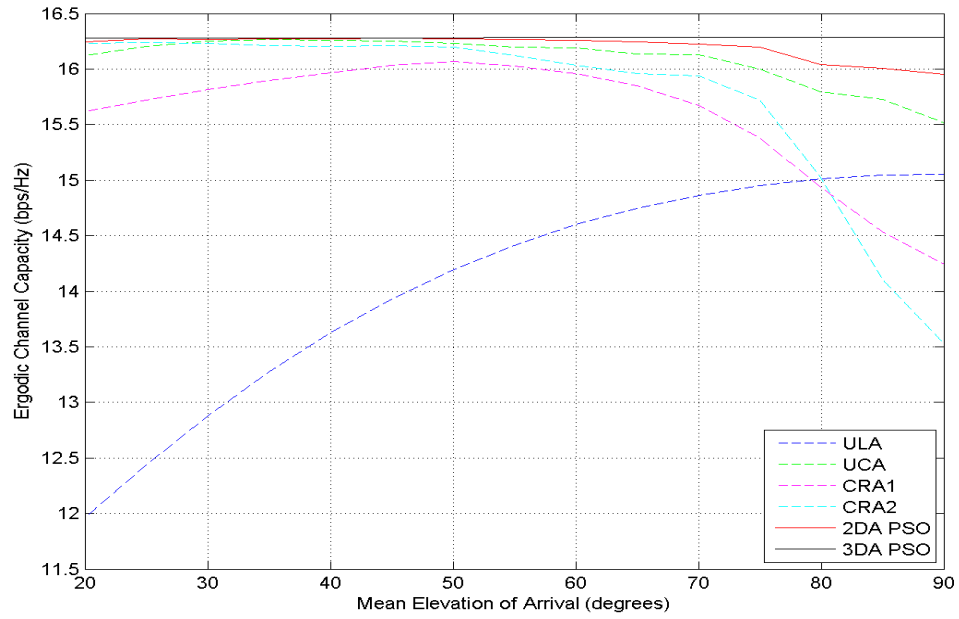


圖 6-26 Ergodic Channel Capacity for varying $MEOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$$MAOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, ES = 20^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

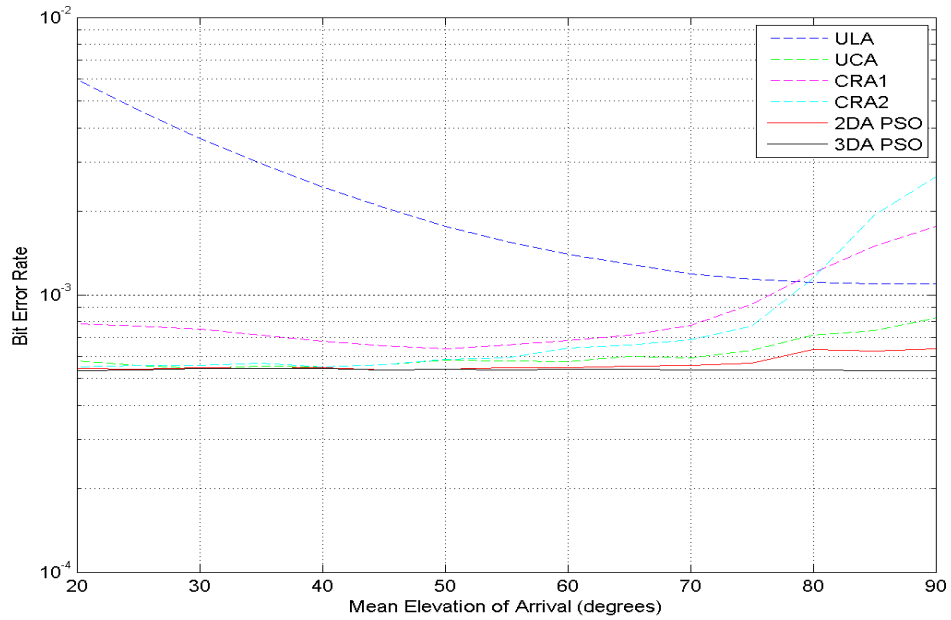


圖 6-27 Bit Error Rate for varying $MEOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$$MAOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, ES = 20^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

2DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.9998	3.4001	2.1889	-1.2036	-3.4224	-4.9942
y (λ)	-0.0497	-3.6659	4.4954	2.5119	-3.6452	0.2402
z (λ)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

3DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.7098	0.5672	0.3408	-0.3813	-3.8783	-4.0324
y (λ)	1.6378	4.2354	4.2009	-3.5192	-2.0182	-1.9654
z (λ)	0.3673	-2.5961	1.5922	3.5312	2.4260	-1.7098

表 6-3 Optimization Results of 2DA PSO and 3DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, MEOA = 20^\circ, ES = 20^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

2DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.9987	2.5341	0.3047	-0.3047	-2.5341	-4.9987
y (λ)	0.1126	4.3102	-4.9907	4.9907	-4.3102	-0.1126
z (λ)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

3DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	3.1699	0.7229	-1.3644	-1.5445	-2.7034	-3.6071
y (λ)	0.4882	0.5086	0.4817	0.4761	0.4864	0.4852
z (λ)	0.3672	-4.0189	1.8050	4.7311	0.3567	-2.5644

表 6-4 Optimization Results of 2DA PSO and 3DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 20^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

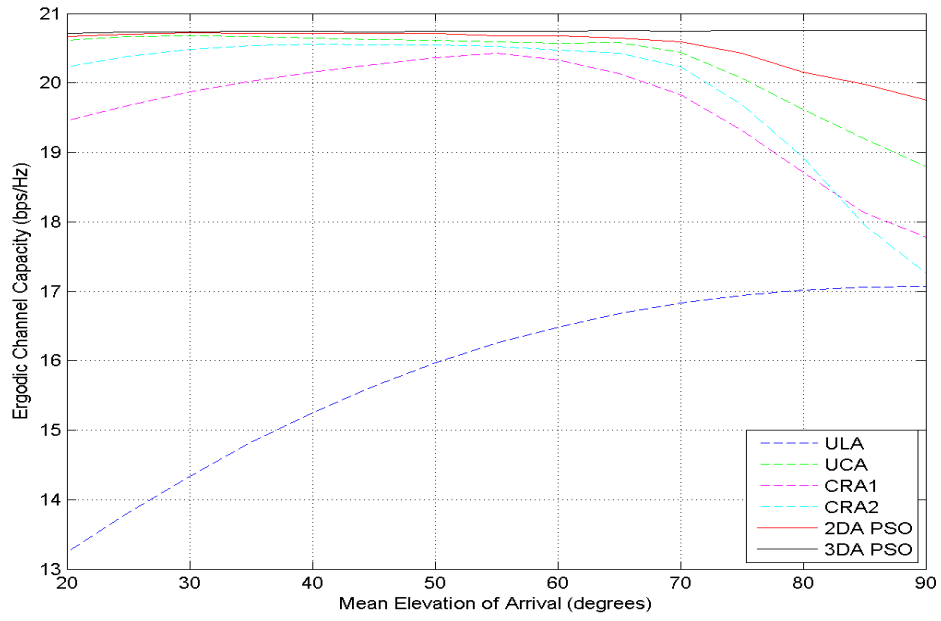


圖 6-28 Ergodic Channel Capacity for varying $MEOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 8$,

$MEOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, ES = 20^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

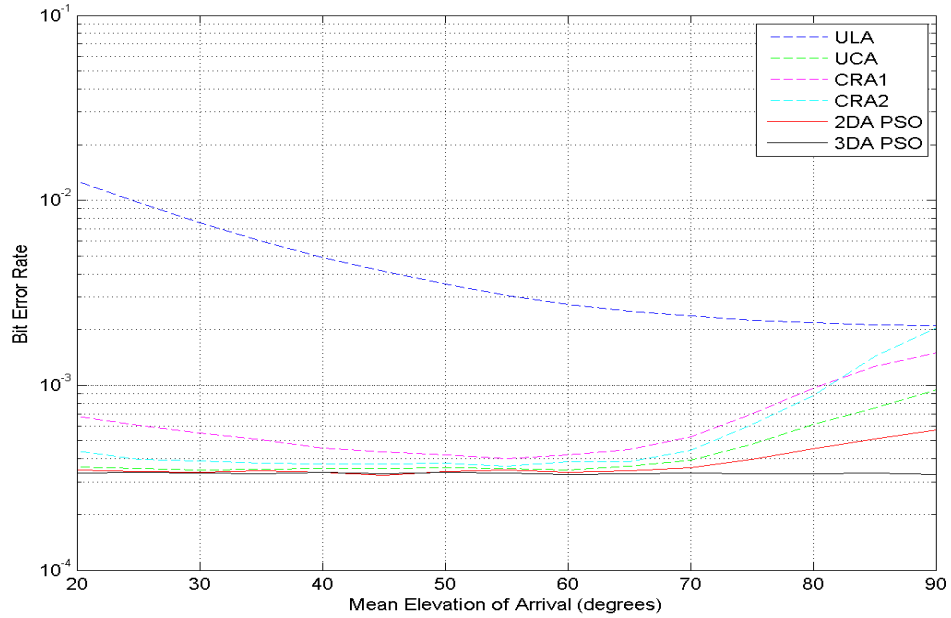


圖 6-29 Bit Error Rate for varying $MEOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 8$,

$MEOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, ES = 20^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

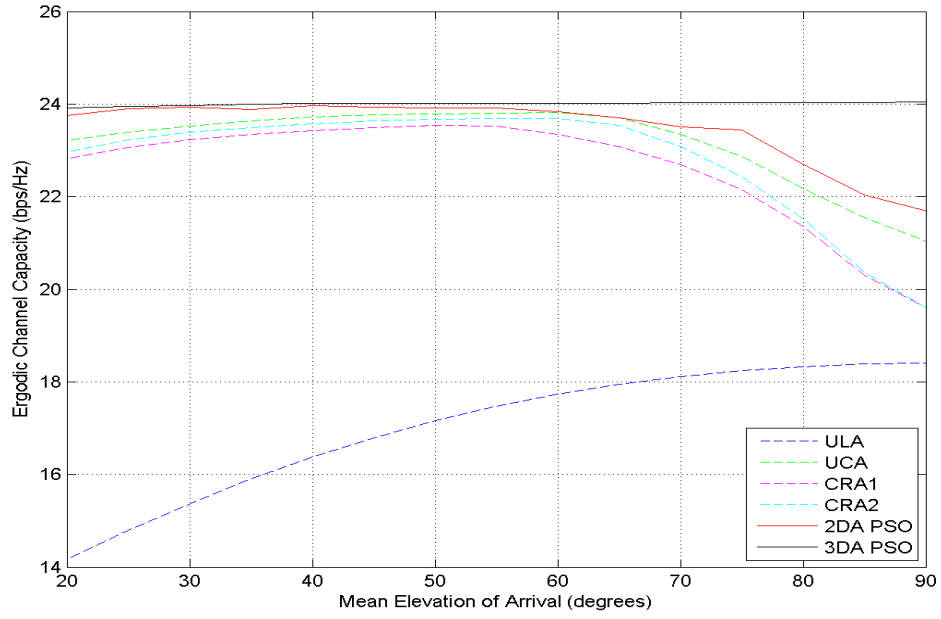


Figure 6-30 Ergodic Channel Capacity for varying $MEOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 10$,

$MEOA = 90^\circ$, $AS = 10^\circ$, $ES = 20^\circ$ and $D_{max} = 5\lambda$

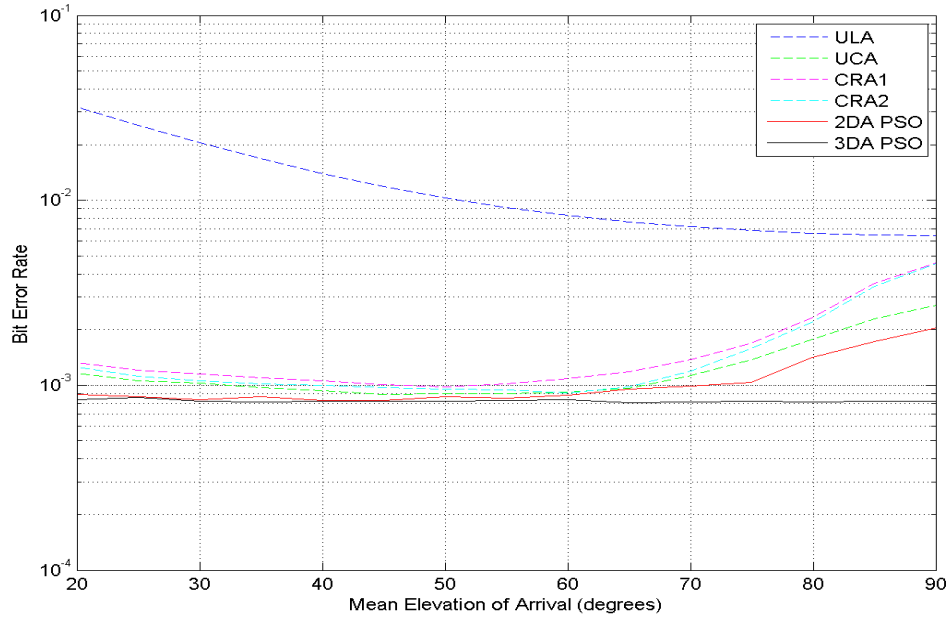


Figure 6-31 Bit Error Rate for varying $MEOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 10$,

$MEOA = 90^\circ$, $AS = 10^\circ$, $ES = 20^\circ$ and $D_{max} = 5\lambda$

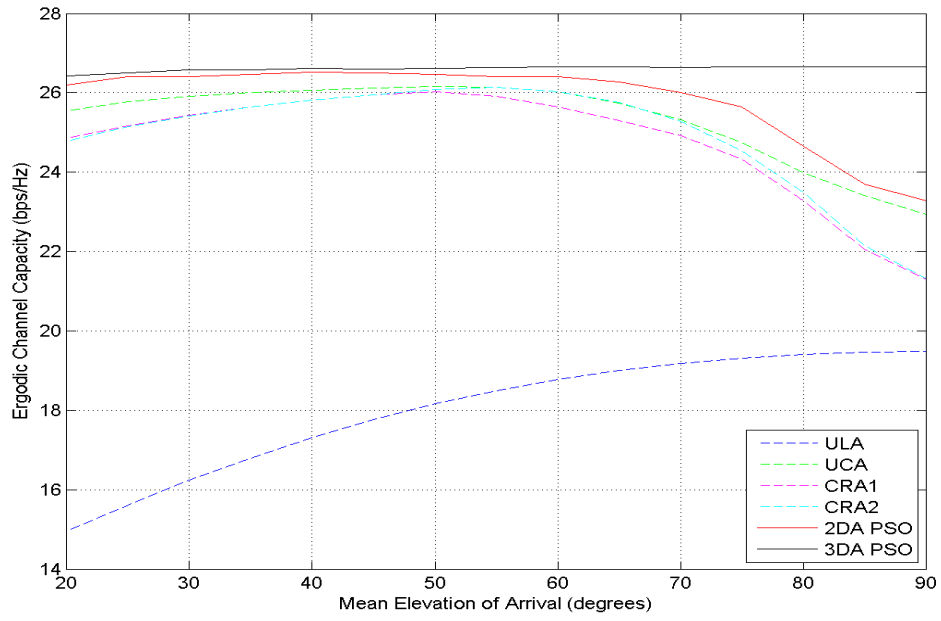


Figure 6-32 Ergodic Channel Capacity for varying $MEOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 12$,

$MEOA = 90^\circ$, $AS = 10^\circ$, $ES = 20^\circ$ and $D_{max} = 5\lambda$

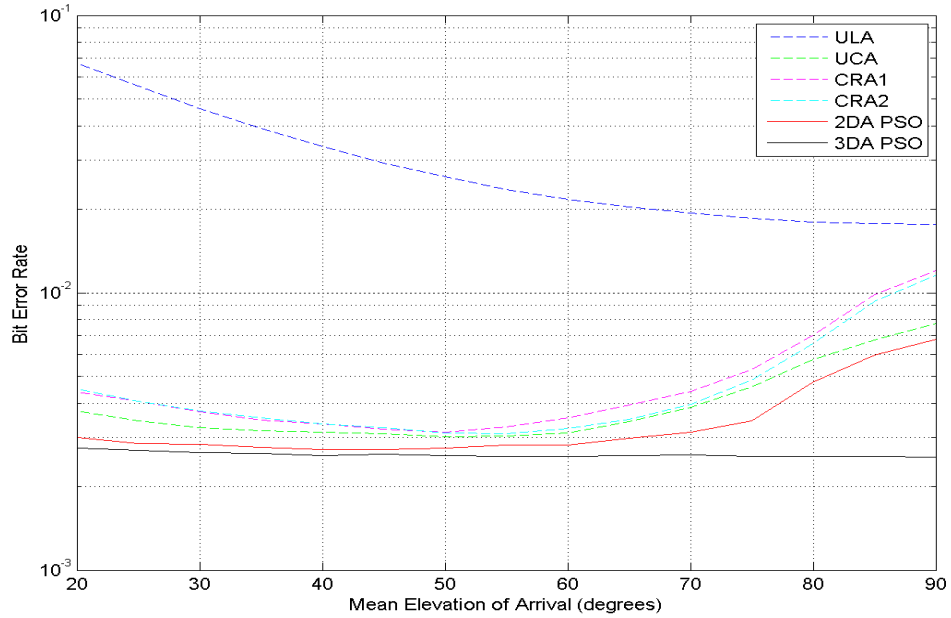


Figure 6-33 Bit Error Rate for varying $MEOA$ with $N_{tx} = N_{rx} = 12$,

$MEOA = 90^\circ$, $AS = 10^\circ$, $ES = 20^\circ$ and $D_{max} = 5\lambda$

6.3.3 水平角度擴散

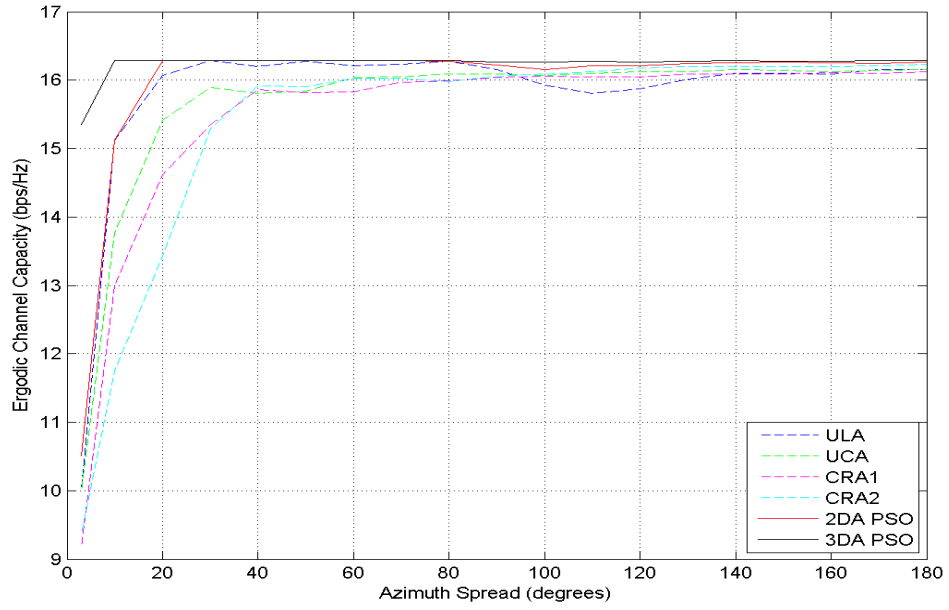


圖 6-34 Ergodic Channel Capacity for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$$MAOA = 90^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 5^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

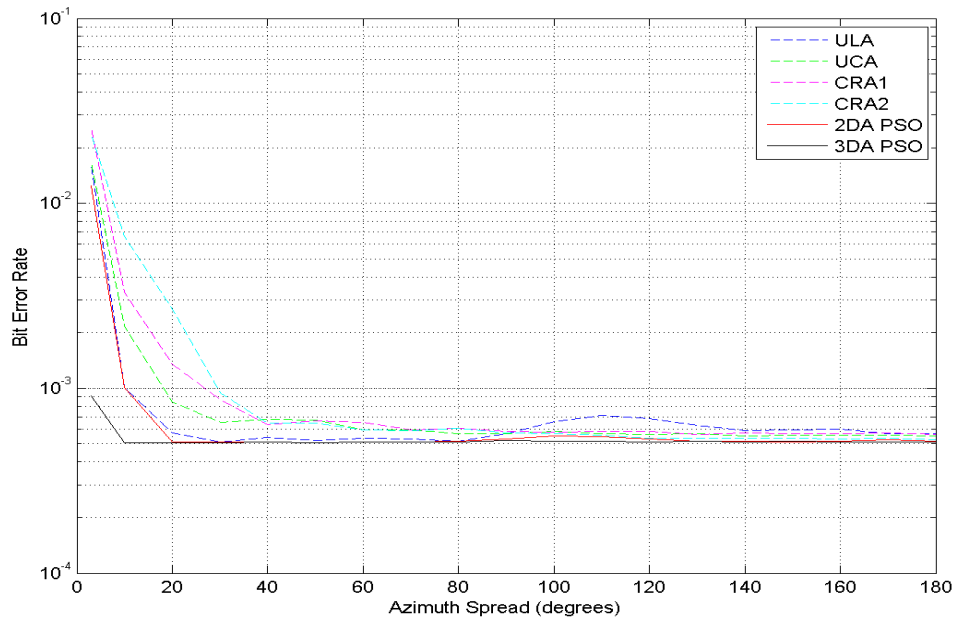


圖 6-35 Bit Error Rate for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$$MAOA = 90^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 5^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

2DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.9758	2.4965	0.8726	-0.8642	-2.4925	-4.7837
y (λ)	0.4915	-4.3322	4.3779	-4.3498	4.3217	1.4546
z (λ)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

3DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	2.0056	0.7177	0.5328	0.7177	-0.7777	-1.6965
y (λ)	3.1898	-0.3516	-0.3344	-0.3516	0.1464	-2.4992
z (λ)	-3.0356	3.3520	1.6702	3.3520	0.2561	3.7661

表 6-5 Optimization Results of 2DA PSO and 3DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 5^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

2DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.9735	3.2674	0.9642	-1.3415	-3.0563	-4.7658
y (λ)	-0.1041	-0.1041	-0.1041	-0.1040	-0.1040	-0.1040
z (λ)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

3DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.9336	2.0656	0.3114	-0.7977	-1.9674	-4.8342
y (λ)	0.0275	0.0227	0.0424	0.0451	0.0275	0.0346
z (λ)	0.8050	0.9610	-4.9901	-2.9372	2.9522	-0.8780

表 6-6 Optimization Results of 2DA PSO and 3DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 60^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 5^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

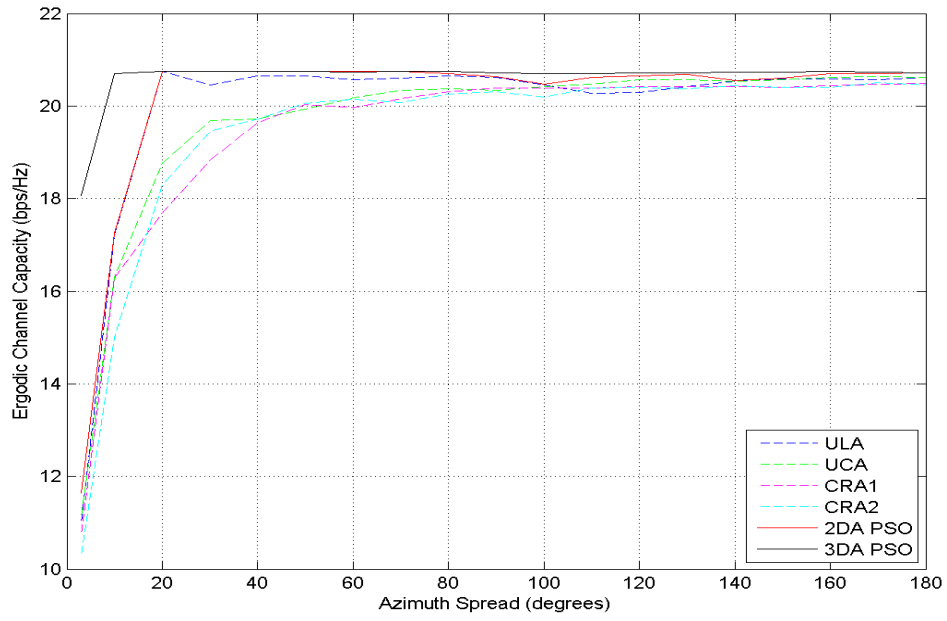


圖 6-36 Ergodic Channel Capacity for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 8$,

$MAOA = 90^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 5^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

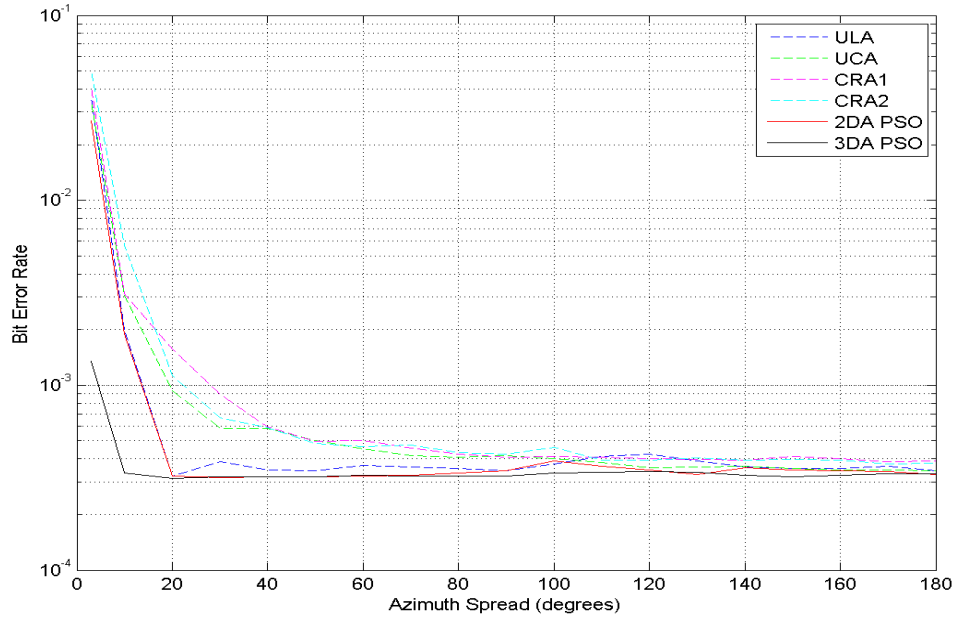


圖 6-37 Bit Error Rate for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 8$,

$MAOA = 90^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 5^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

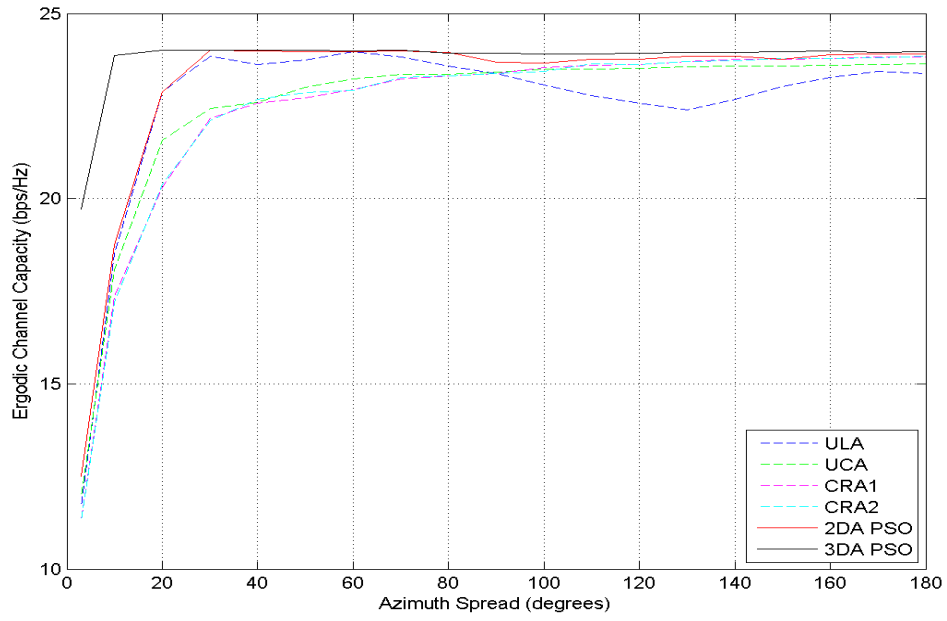


圖 6-38 Ergodic Channel Capacity for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 10$,

$$MAOA = 90^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 5^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

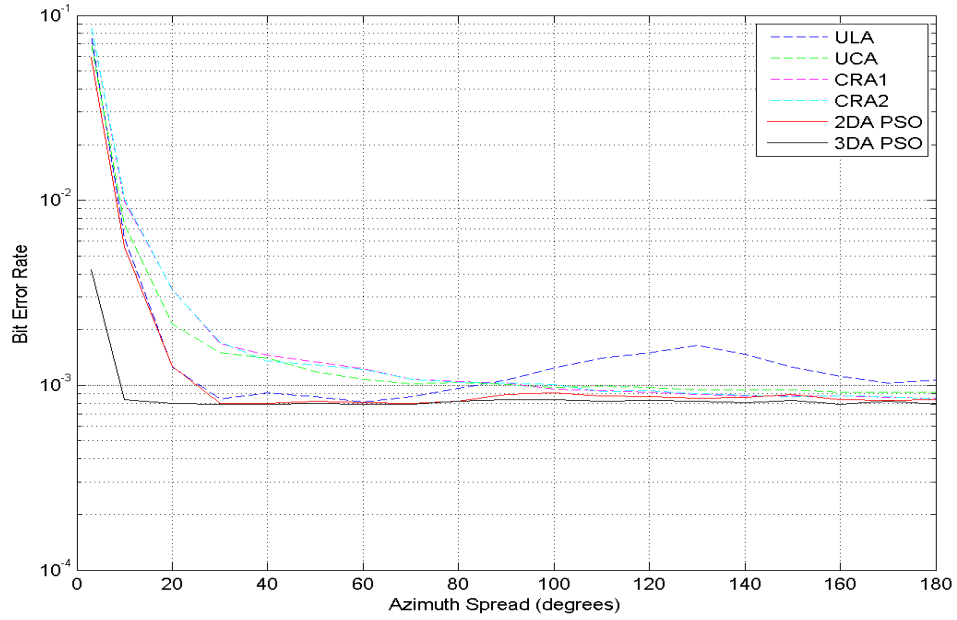


圖 6-39 Bit Error Rate for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 10$,

$$MAOA = 90^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 5^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

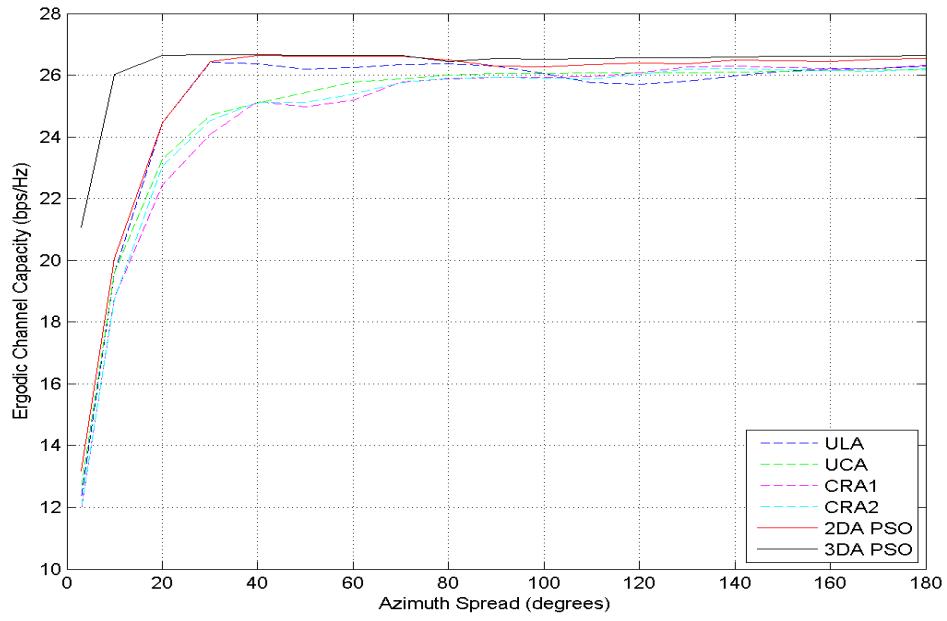


圖 6-40 Ergodic Channel Capacity for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 12$,

$$MAOA = 90^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 5^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

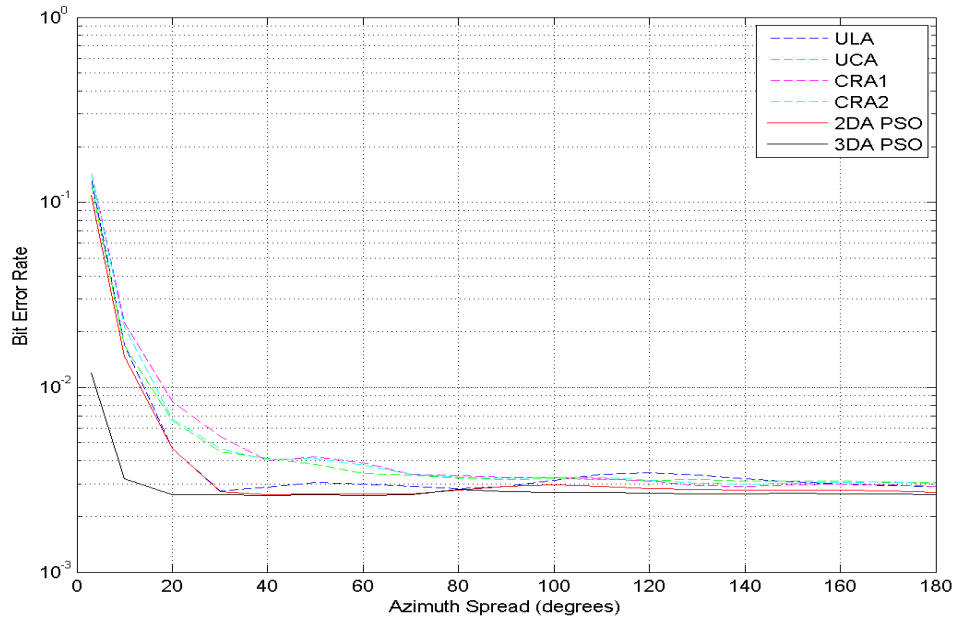


圖 6-41 Bit Error Rate for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 12$,

$$MAOA = 90^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 5^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

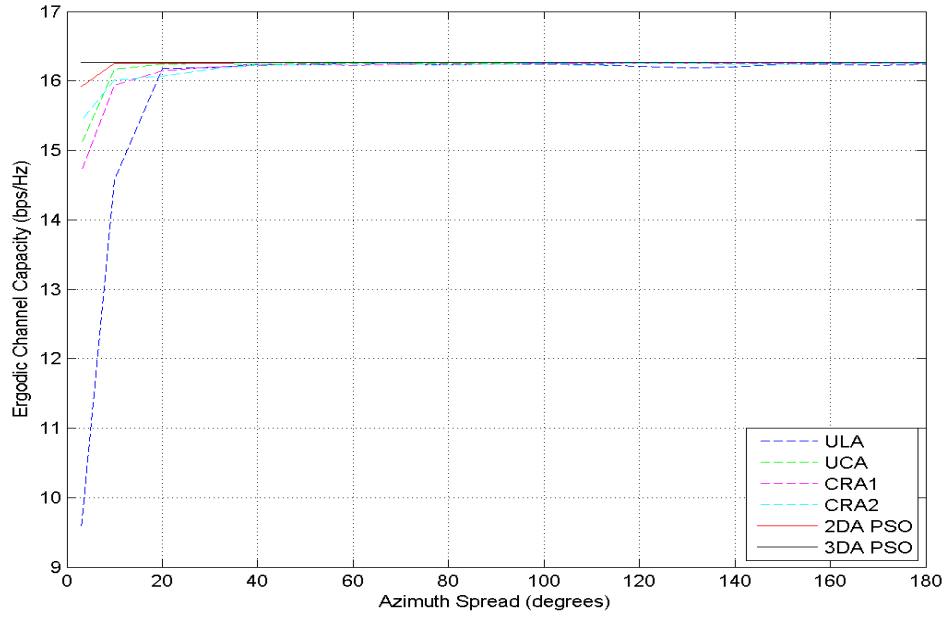


圖 6-42 Ergodic Channel Capacity for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$$MAOA = 90^\circ, MEOA = 60^\circ, ES = 20^\circ \text{ and } D_{max} = 5\lambda$$

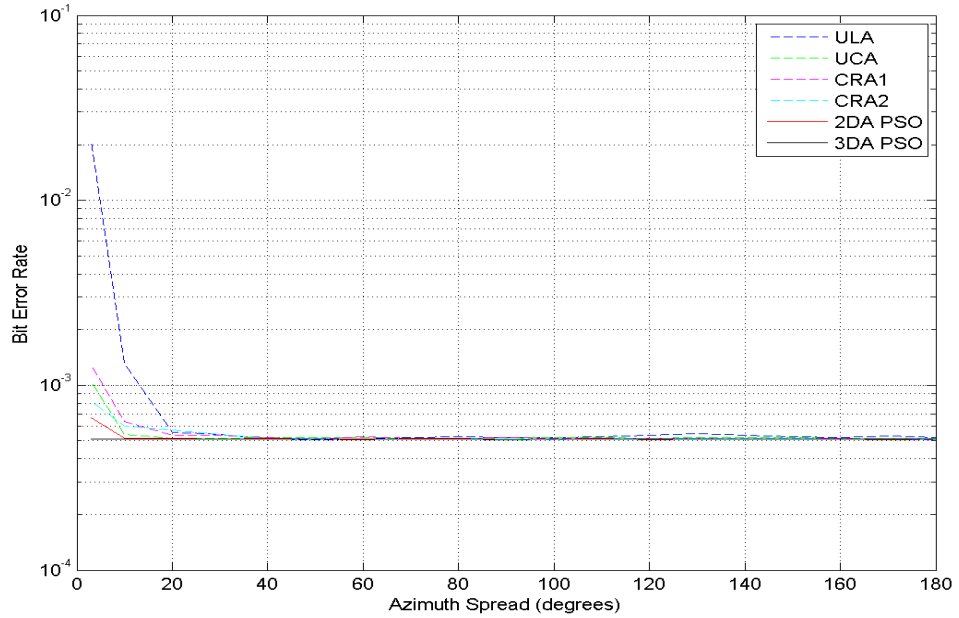


圖 6-43 Bit Error Rate for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$$MAOA = 90^\circ, MEOA = 60^\circ, ES = 20^\circ \text{ and } D_{max} = 5\lambda$$

2DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.9978	4.2874	4.1643	-0.6853	-3.4696	-4.9598
y (λ)	0.1473	-2.5726	2.7674	-4.9528	3.6002	0.6329
z (λ)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

3DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.5267	2.5388	1.6742	-0.8415	-2.6169	-3.3883
y (λ)	-0.3908	0.2494	-0.8049	-2.7119	-0.4511	-2.6632
z (λ)	2.0748	-4.2993	-1.5338	4.1155	-3.0185	2.4626

表 6-7 Optimization Results of 2DA PSO and 3DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, MEOA = 60^\circ, ES = 20^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

2DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.9998	3.0488	1.1026	-0.8522	-3.7058	-4.9998
y (λ)	0.0394	-0.0169	-0.0162	-0.0402	-0.0506	-0.0483
z (λ)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

3DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.9073	2.9412	0.9733	-0.9970	-2.9666	-4.9348
y (λ)	-0.0325	-0.0471	0.0117	0.0043	-0.0025	0.0020
z (λ)	-0.0020	-0.0009	-0.0145	-0.0162	-0.0140	-0.0218

表 6-8 Optimization Results of 2DA PSO and 3DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 60^\circ, MEOA = 60^\circ, ES = 20^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

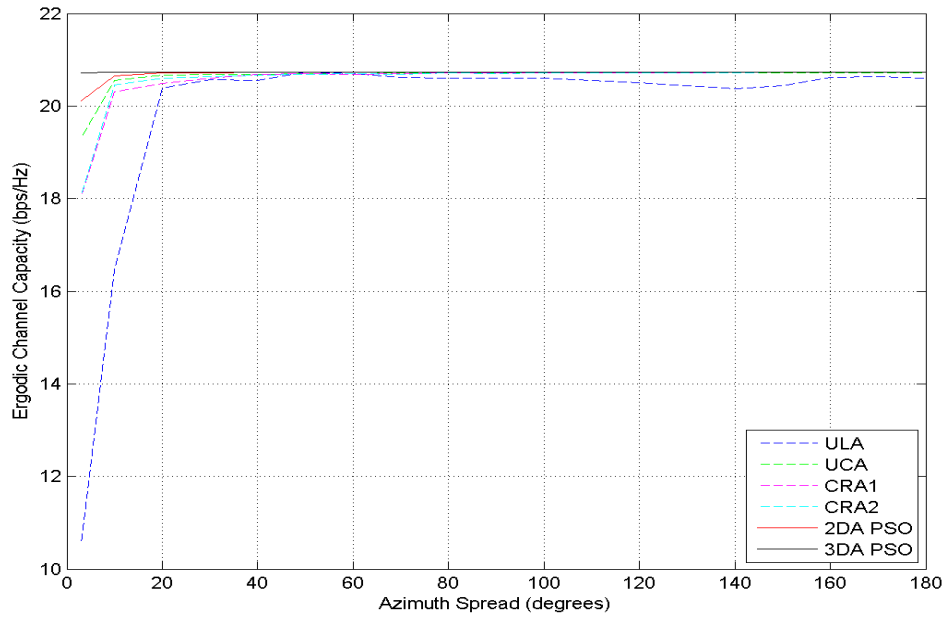


圖 6-44 Ergodic Channel Capacity for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 8$,

$$MAOA = 90^\circ, MEOA = 60^\circ, ES = 20^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

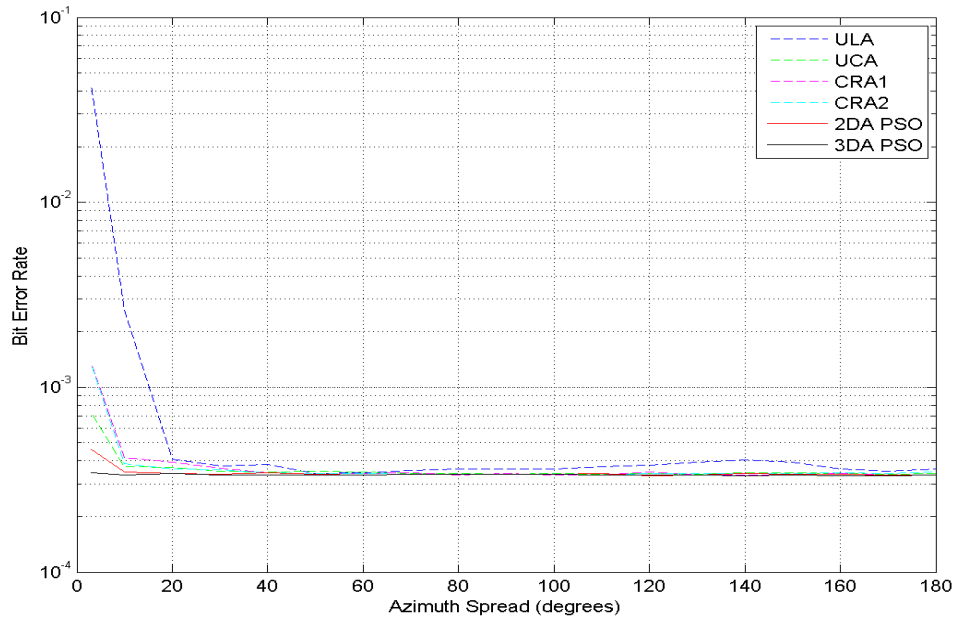


圖 6-45 Bit Error Rate for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 8$,

$$MAOA = 90^\circ, MEOA = 60^\circ, ES = 20^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

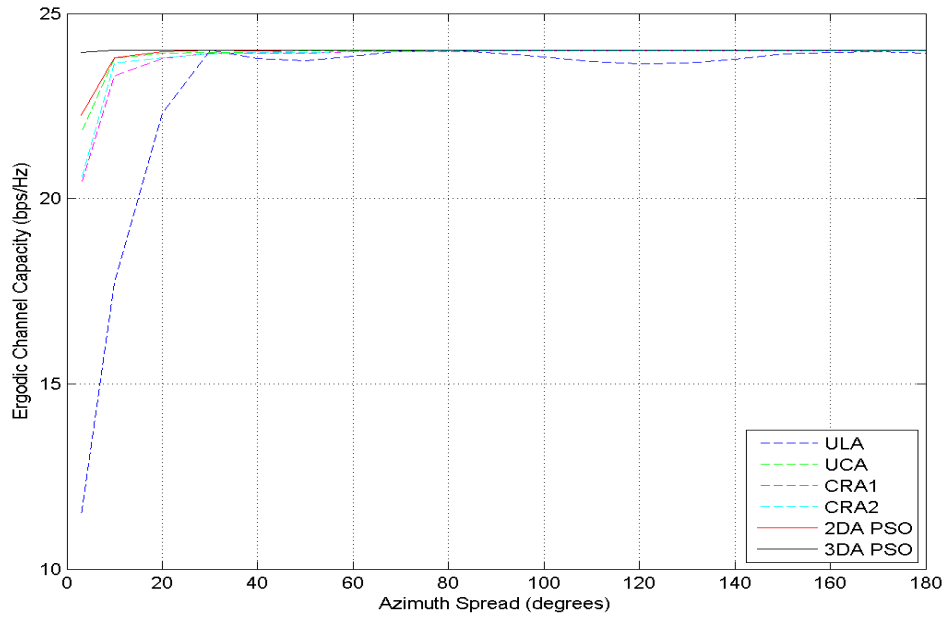


圖 6-46 Ergodic Channel Capacity for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 10$,
 $MAOA = 90^\circ$, $MEOA = 60^\circ$, $ES = 20^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

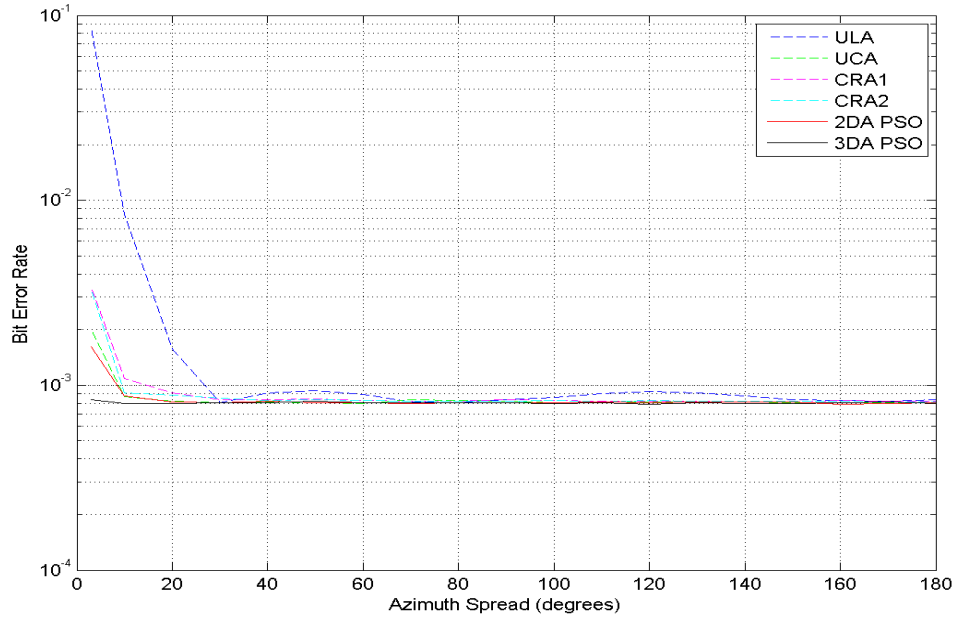


圖 6-47 Bit Error Rate for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 10$,
 $MAOA = 90^\circ$, $MEOA = 60^\circ$, $ES = 20^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

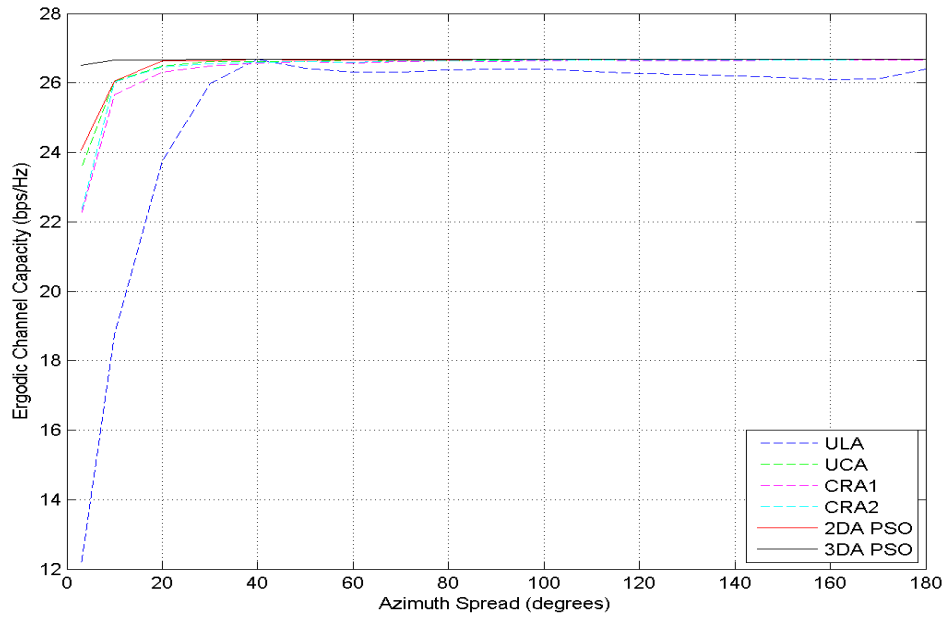


圖 6-48 Ergodic Channel Capacity for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 12$,

$$MAOA = 90^\circ, MEOA = 60^\circ, ES = 20^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

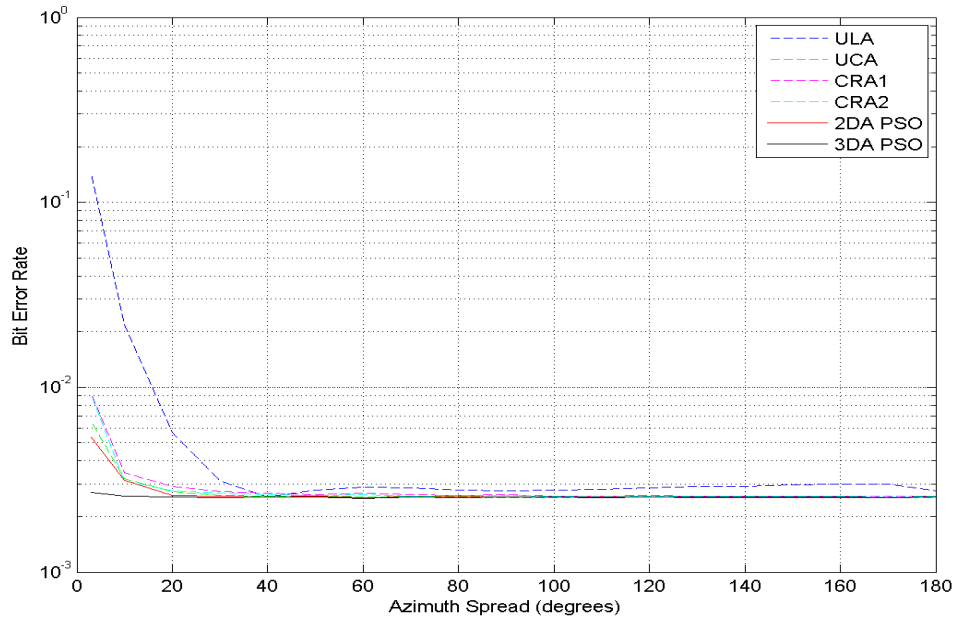


圖 6-49 Bit Error Rate for varying AS with $N_{tx} = N_{rx} = 12$,

$$MAOA = 90^\circ, MEOA = 60^\circ, ES = 20^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

6.3.4 垂直角度擴散

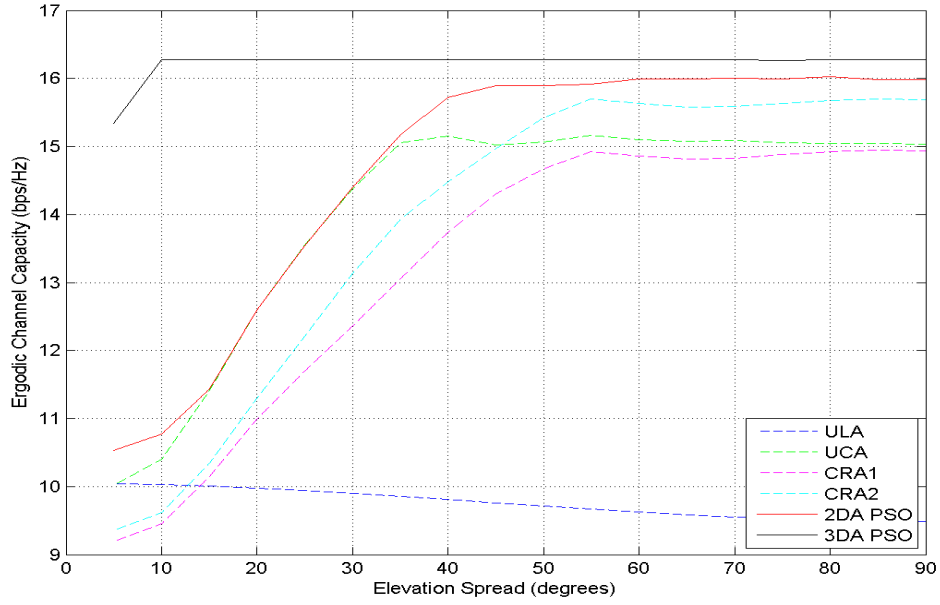


圖 6-50 Ergodic Channel Capacity for varying ES with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

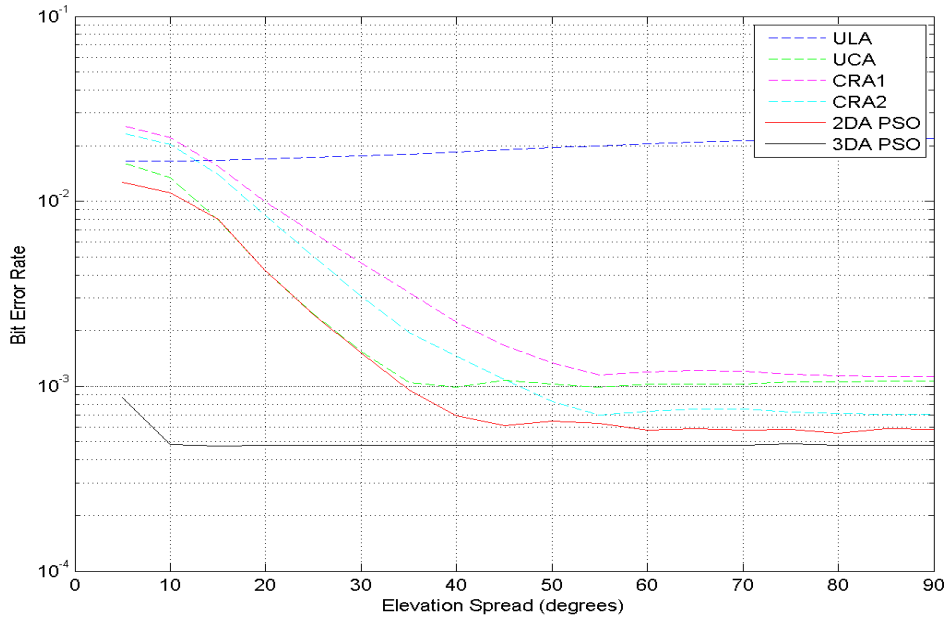


圖 6-51 Bit Error Rate for varying ES with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

2DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.9999	2.8860	2.8409	-2.9796	-2.9921	-4.9943
y (λ)	-0.0293	4.0830	-4.1145	-4.0152	3.9753	0.2383
z (λ)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

3DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	1.7986	1.6856	1.4028	0.8488	0.2499	-1.4711
y (λ)	-0.7780	-0.7860	-0.7864	-0.7731	-0.7891	-0.7702
z (λ)	-1.7957	2.5906	1.1286	-3.2569	4.0515	-4.7156

表 6-9 Optimization Results of 2DA PSO and 3DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 20^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

2DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.9377	4.8637	1.7591	0.1562	-4.0921	-4.8628
y (λ)	0.7870	-1.1594	4.6803	-4.9976	2.8732	-1.1632
z (λ)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

3DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.9055	1.2686	0.4384	-1.0904	-1.6692	-4.5430
y (λ)	0.5336	0.5333	0.5148	0.5428	0.5160	0.5208
z (λ)	-0.8062	-3.1155	4.9529	-4.8444	3.2219	0.9116

表 6-10 Optimization Results of 2DA PSO and 3DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 60^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

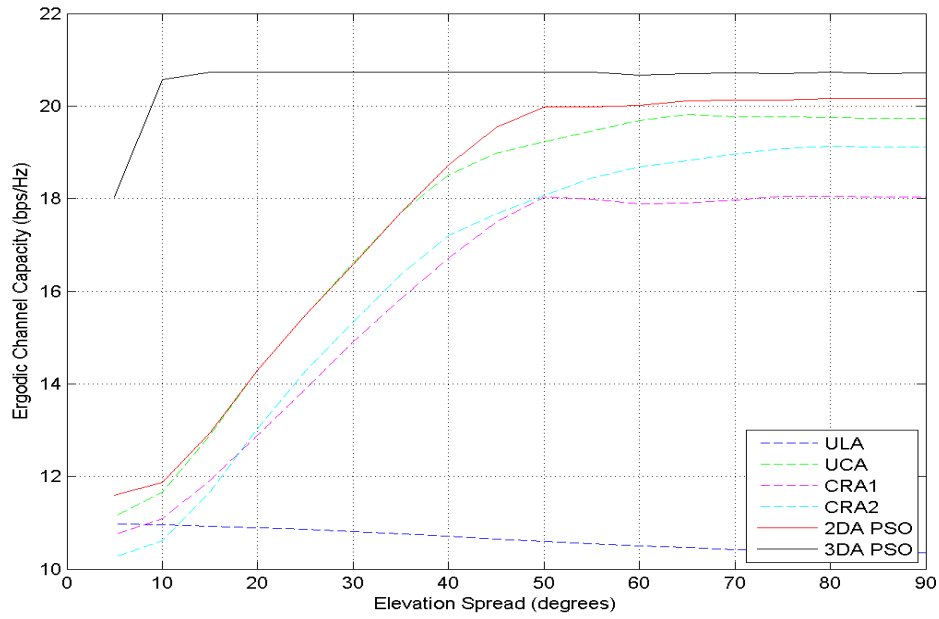


圖 6-52 Ergodic Channel Capacity for varying ES with $N_{tx} = N_{rx} = 8$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

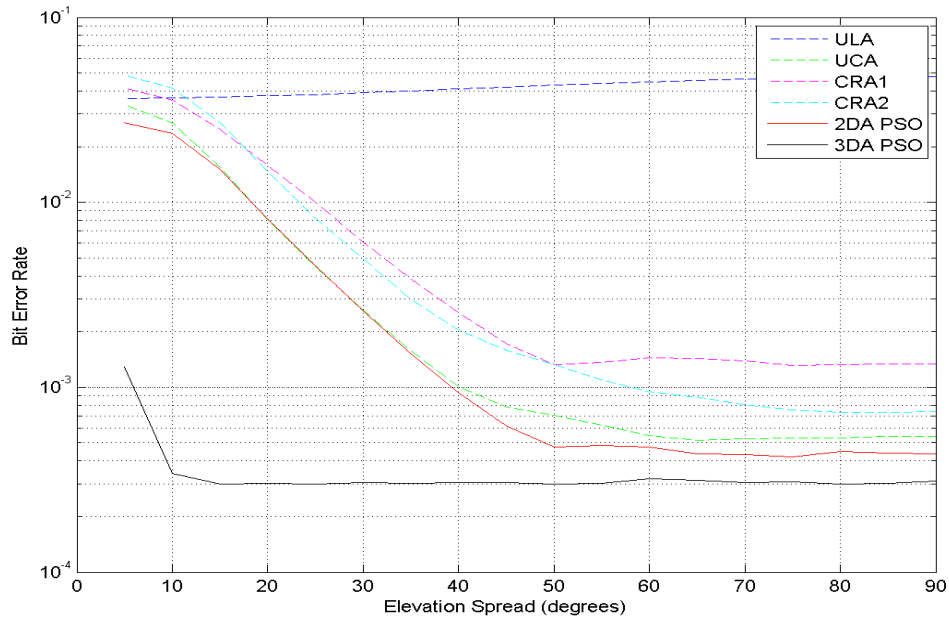


圖 6-53 Bit Error Rate for varying ES with $N_{tx} = N_{rx} = 8$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

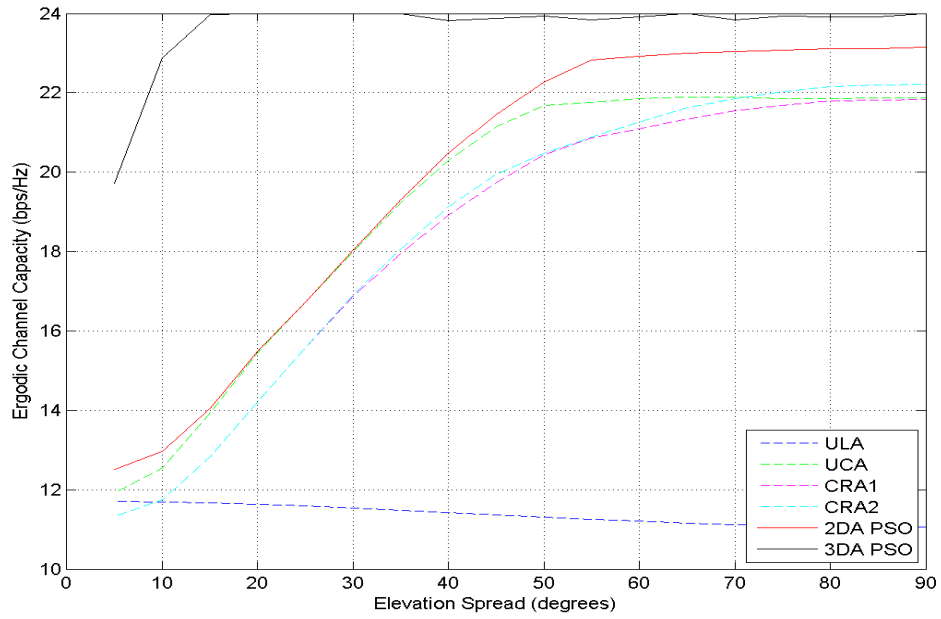


圖 6-54 Ergodic Channel Capacity for varying ES with $N_{tx} = N_{rx} = 10$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

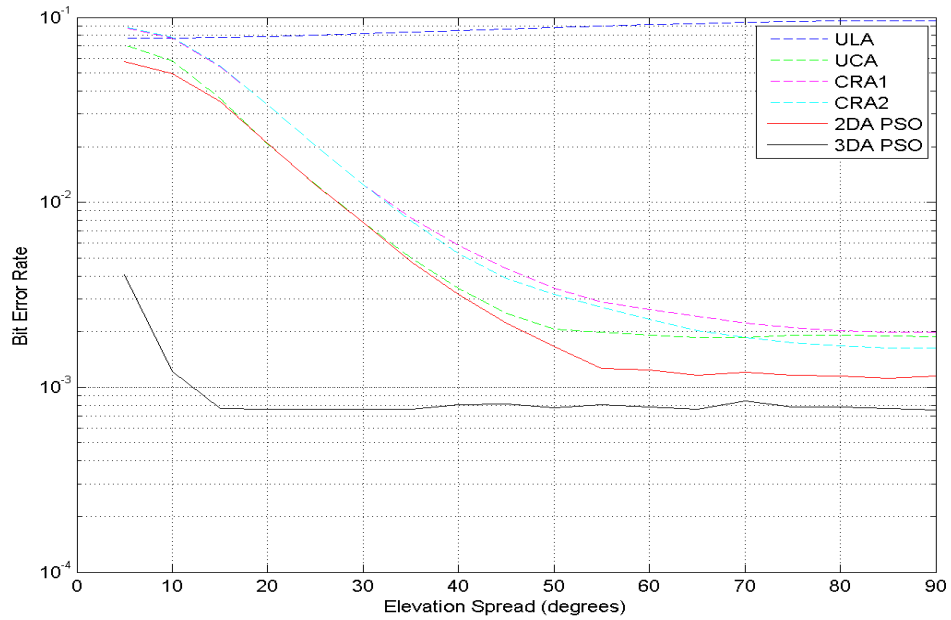


圖 6-55 Bit Error Rate for varying ES with $N_{tx} = N_{rx} = 10$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

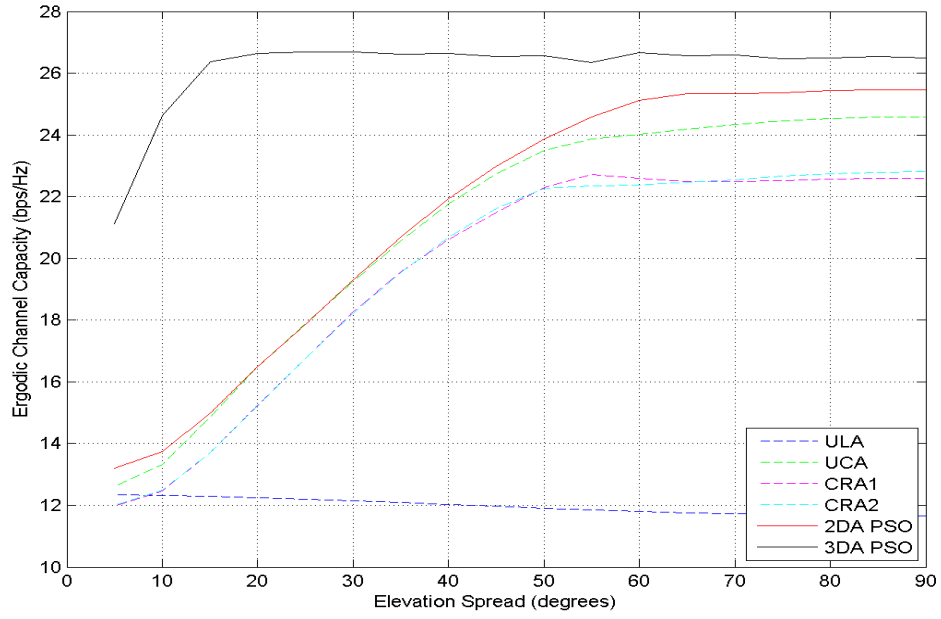


圖 6-56 Ergodic Channel Capacity for varying ES with $N_{tx} = N_{rx} = 12$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

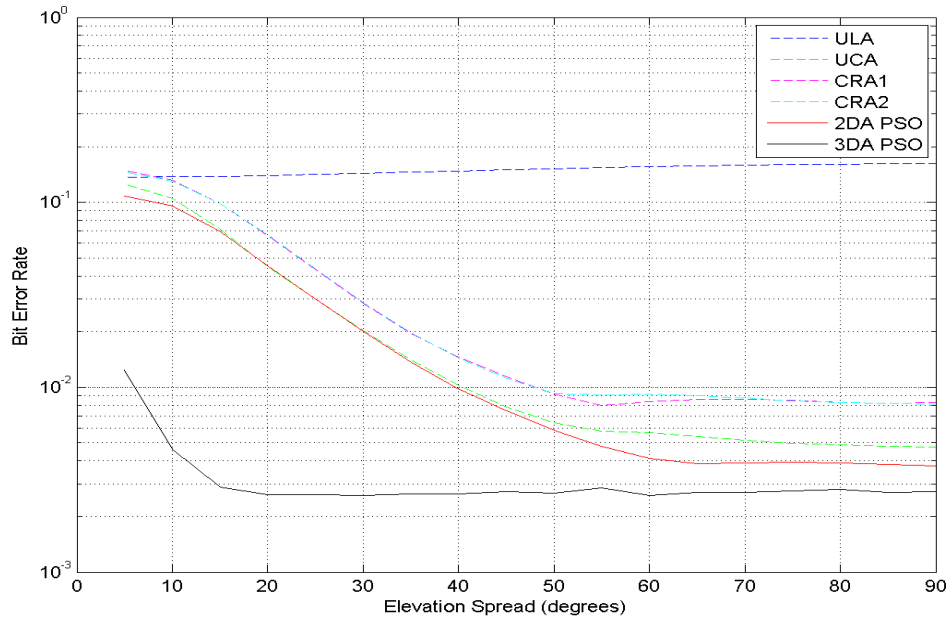


圖 6-57 Bit Error Rate for varying ES with $N_{tx} = N_{rx} = 12$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

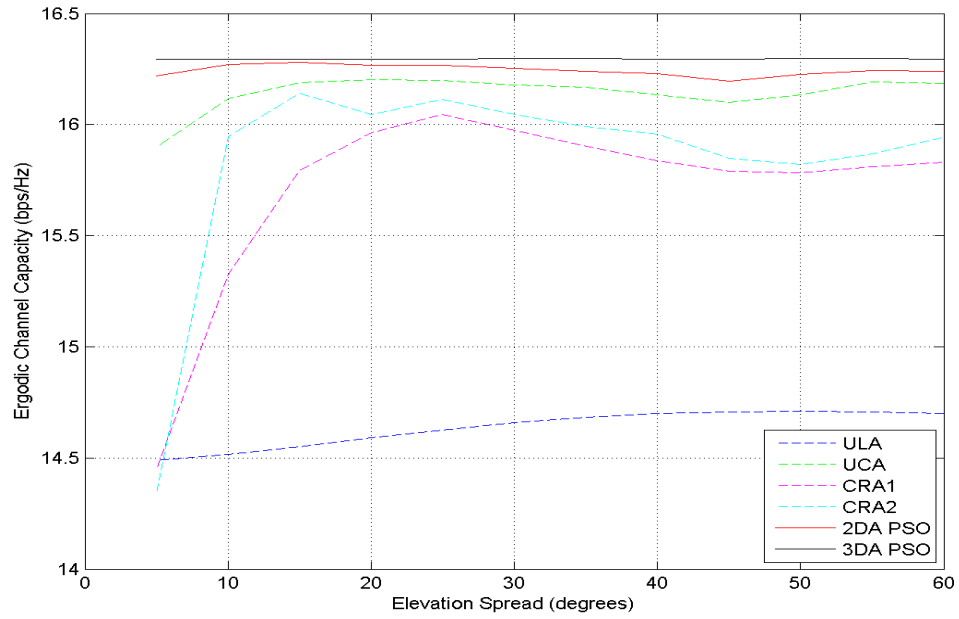


圖 6-58 Ergodic Channel Capacity for varying ES with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$$MAOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, MEOA = 60^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

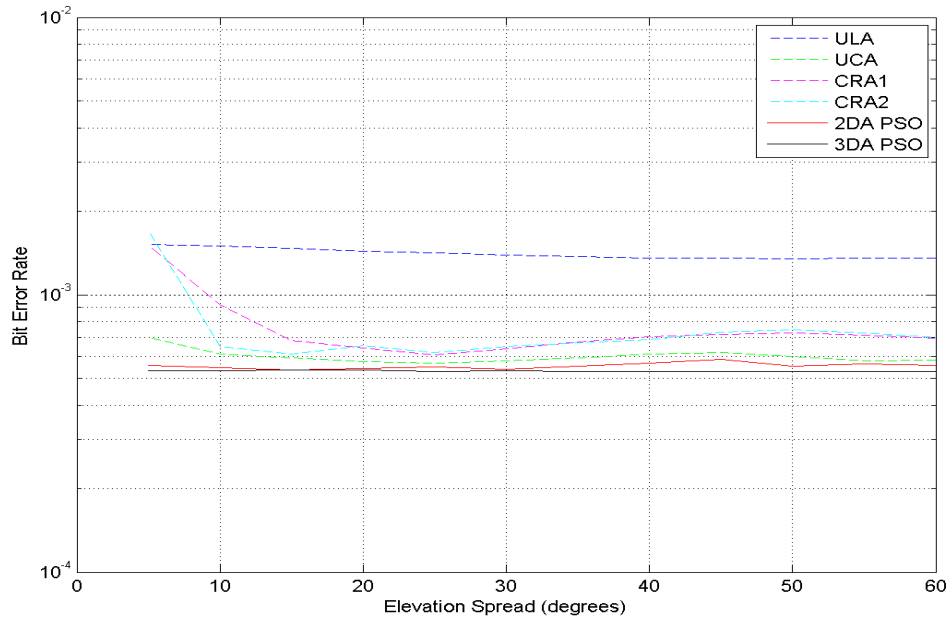


圖 6-59 Bit Error Rate for varying ES with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$$MAOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, MEOA = 60^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

2DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.8918	1.7653	1.4771	-1.4787	-1.7664	-4.8928
y (λ)	-1.0345	4.6780	-4.7768	4.7763	-4.6776	1.0300
z (λ)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

3DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.9768	1.6760	1.6679	-1.6461	-1.6465	-4.9503
y (λ)	-0.0350	4.3454	-0.3556	-0.2039	4.4153	0.1735
z (λ)	0.4803	-1.8021	2.1244	2.3256	-1.6544	0.6786

表 6-11 Optimization Results of 2DA PSO and 3DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, MEOA = 60^\circ, ES = 5^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

2DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.9652	2.4004	0.4804	-0.5209	-2.4768	-4.9965
y (λ)	0.5892	3.7013	-3.0424	4.9728	-4.3434	-0.1859
z (λ)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

3DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.6770	3.7878	1.6671	0.6260	-1.5359	-4.4795
y (λ)	0.9741	0.7647	2.6247	-1.2148	-0.5628	1.3980
z (λ)	-1.4751	2.4374	-3.9156	4.8093	0.5128	-1.7253

表 6-12 Optimization Results of 2DA PSO and 3DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, MEOA = 60^\circ, ES = 60^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

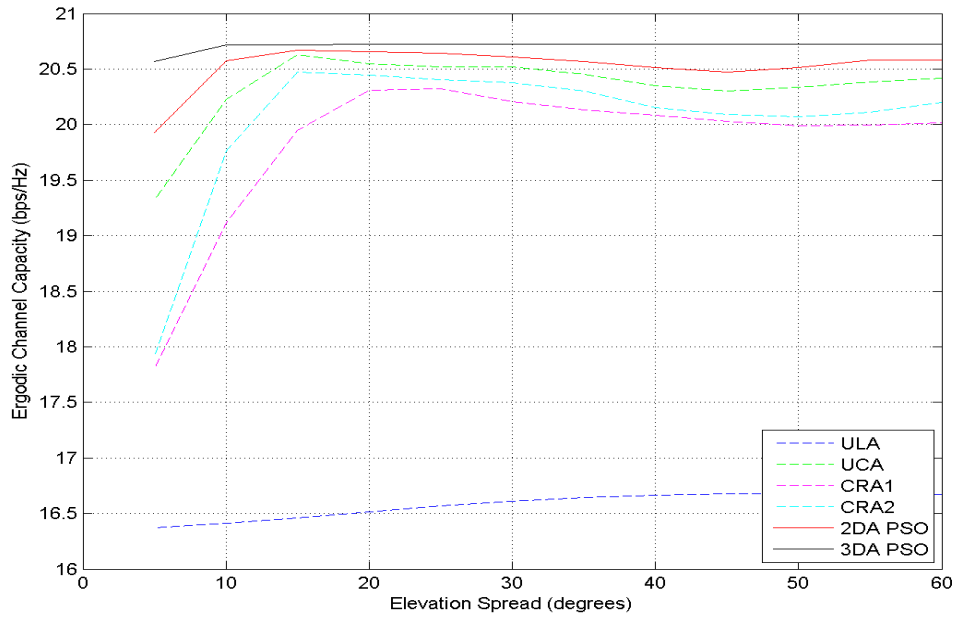


圖 6-60 Ergodic Channel Capacity for varying ES with $N_{tx} = N_{rx} = 8$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, MEOA = 60^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

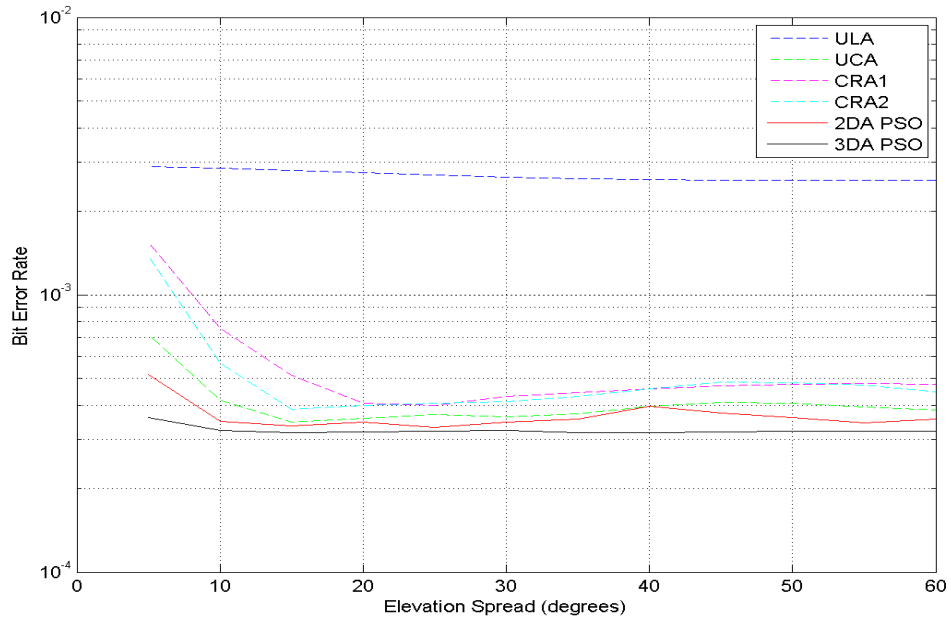


圖 6-61 Bit Error Rate for varying ES with $N_{tx} = N_{rx} = 8$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, MEOA = 60^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

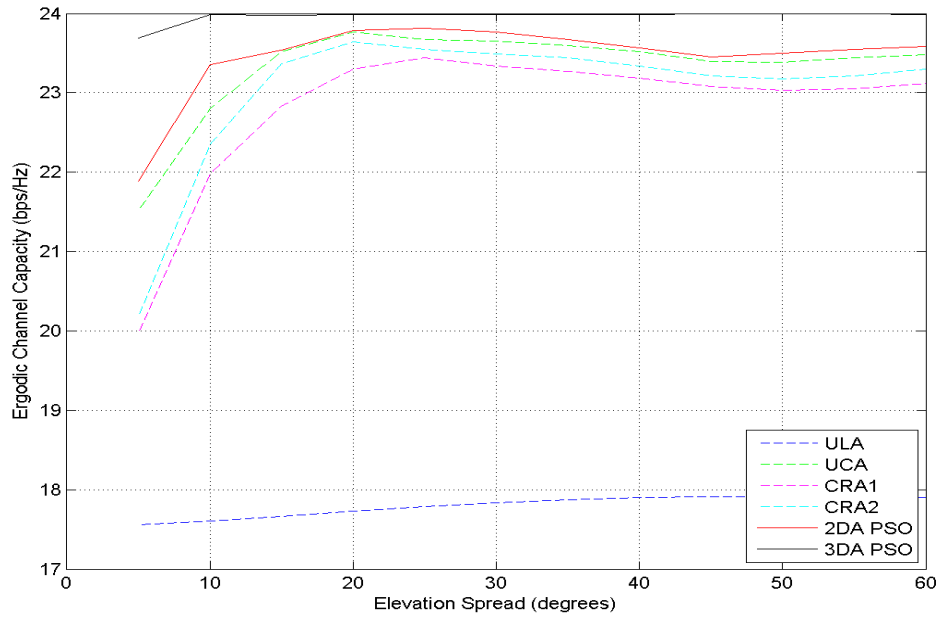


圖 6-62 Ergodic Channel Capacity for varying ES with $N_{tx} = N_{rx} = 10$,
 $MAOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, MEOA = 60^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

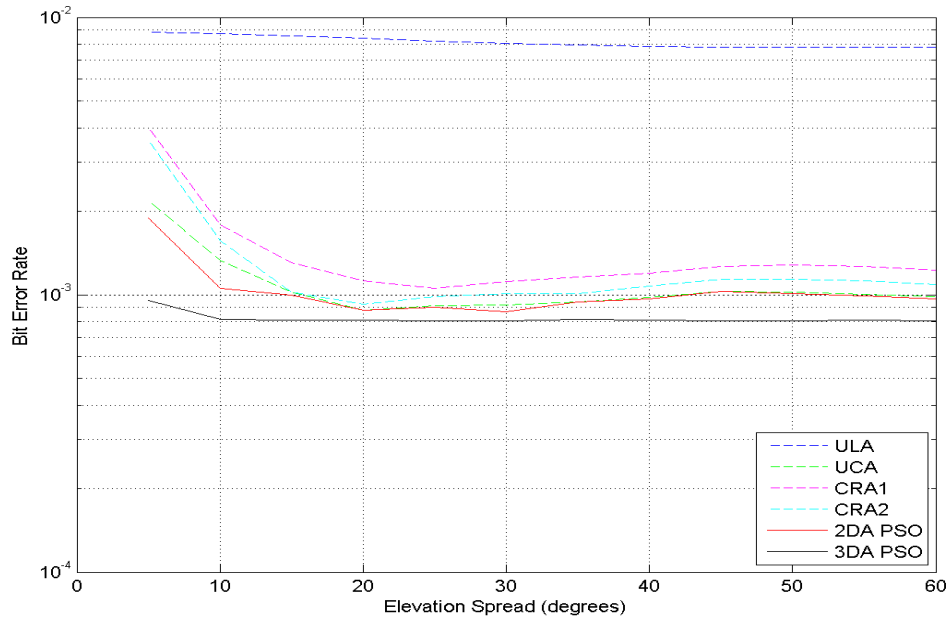


圖 6-63 Bit Error Rate for varying ES with $N_{tx} = N_{rx} = 10$,
 $MAOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, MEOA = 60^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

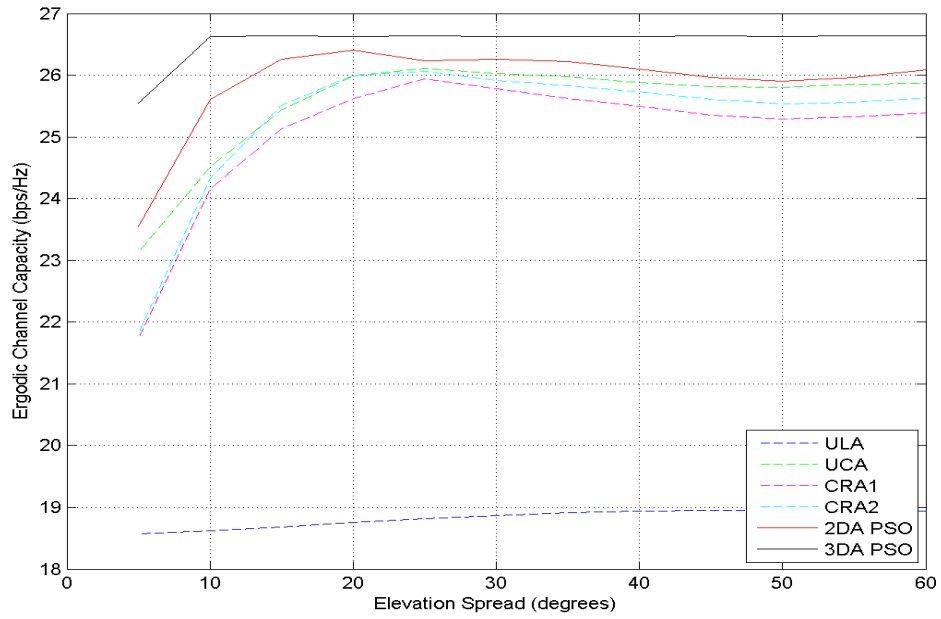


圖 6-64 Ergodic Channel Capacity for varying ES with $N_{tx} = N_{rx} = 12$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, MEOA = 60^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

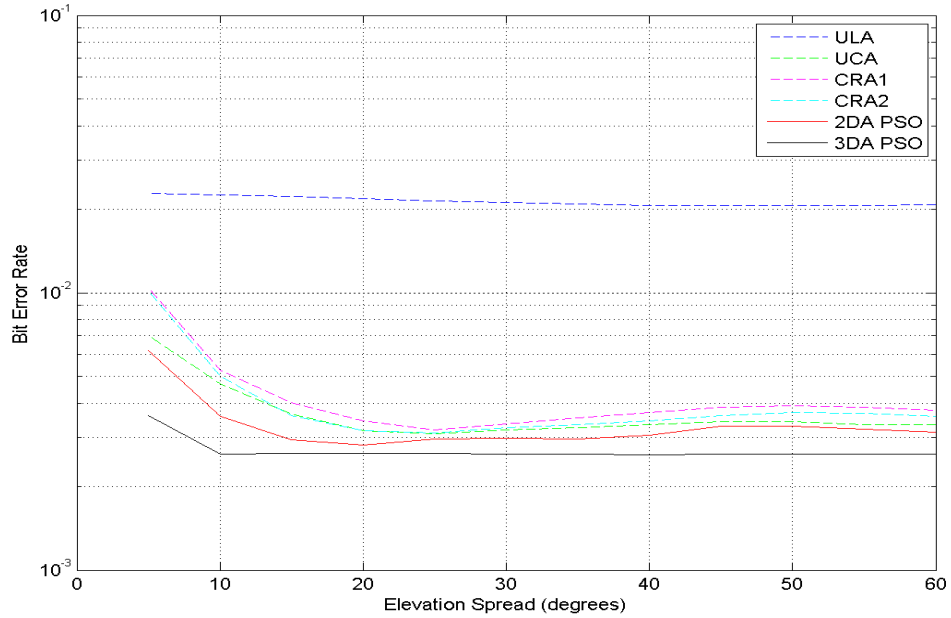


圖 6-65 Bit Error Rate for varying ES with $N_{tx} = N_{rx} = 12$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, MEOA = 60^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

6.3.5 陣列大小

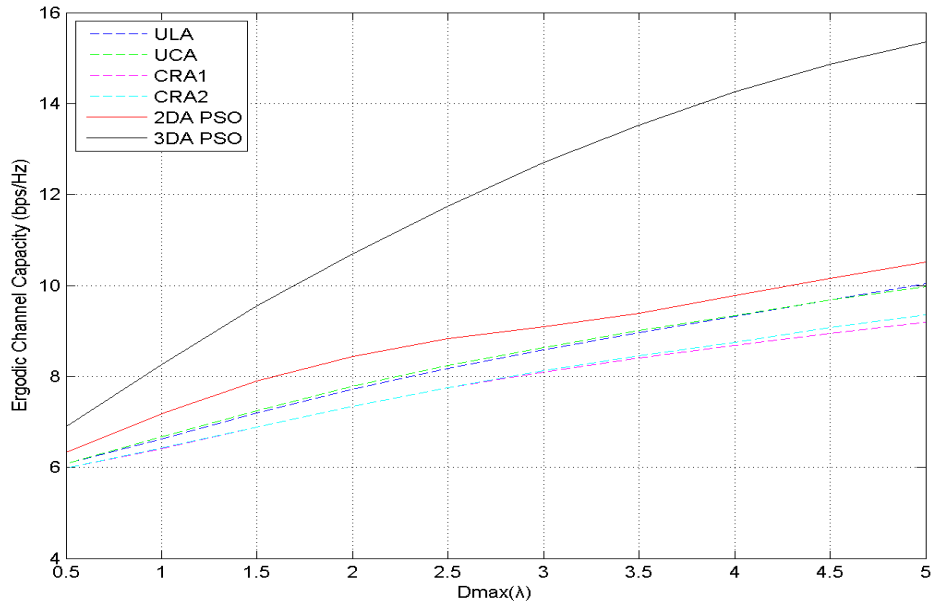


圖 6-66 Ergodic Channel Capacity for varying D_{max} with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ \text{ and } ES = 5^\circ$$

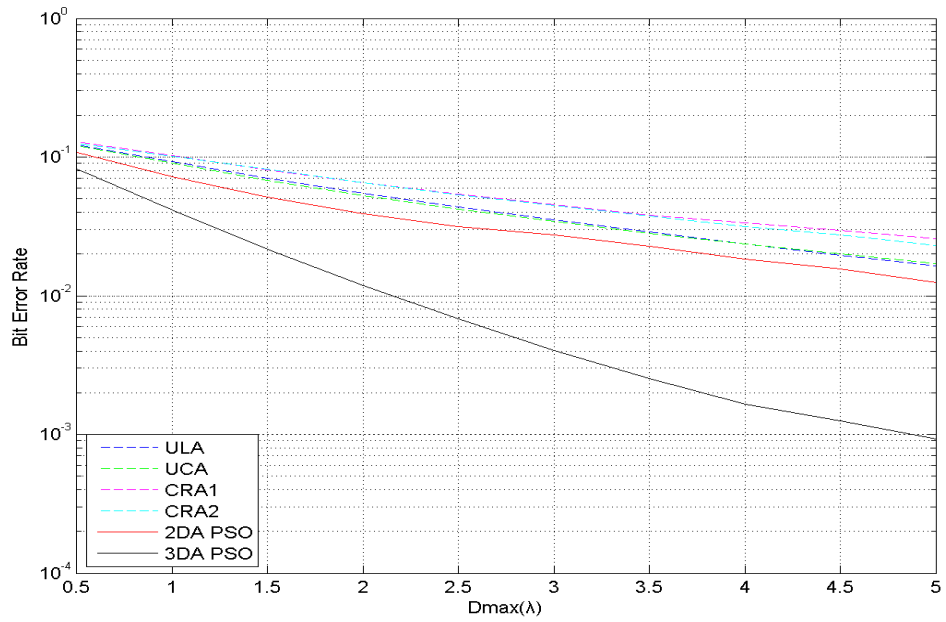


圖 6-67 Bit Error Rate for varying D_{max} with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ \text{ and } ES = 5^\circ$$

2DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	3.0000	3.0000	3.0000	-3.0000	-3.0000	-3.0000
y (λ)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
z (λ)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

3DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	2.6989	2.6403	0.0761	-0.0740	-2.6423	-2.6981
y (λ)	-0.0003	0.0006	0.0022	-0.0005	-0.0030	0.0005
z (λ)	-1.3100	1.4243	-2.9990	2.9991	-1.4206	1.3116

表 6-13 Optimization Results of 2DA PSO and 3DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 5^\circ$ and $Dmax = 3\lambda$

2DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.9853	3.2425	2.6160	-3.0146	-3.2536	-4.9979
y (λ)	0.3831	3.0024	-4.1782	3.7000	-2.4743	0.1418
z (λ)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

3DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.9983	3.0331	2.7312	-2.7019	-3.0249	-4.9980
y (λ)	0.0012	0.0036	0.0045	-0.0073	0.0028	0.0104
z (λ)	-0.1297	3.9749	-4.1882	4.2071	-3.9812	0.1399

表 6-14 Optimization Results of 2DA PSO and 3DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ, ES = 5^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

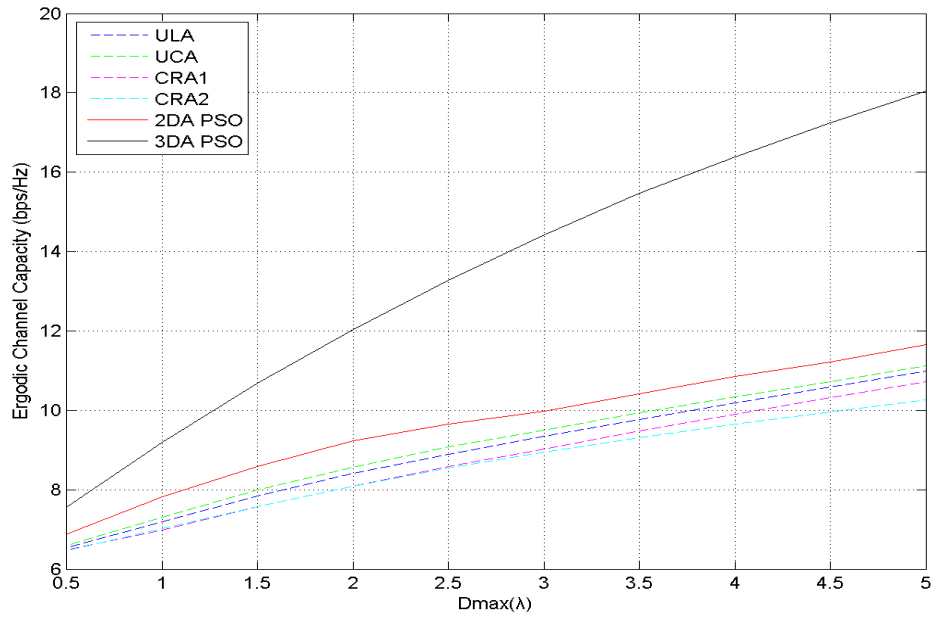


圖 6-68 Ergodic Channel Capacity for varying D_{max} with $N_{tx} = N_{rx} = 8$,
 $MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ$ and $ES = 5^\circ$

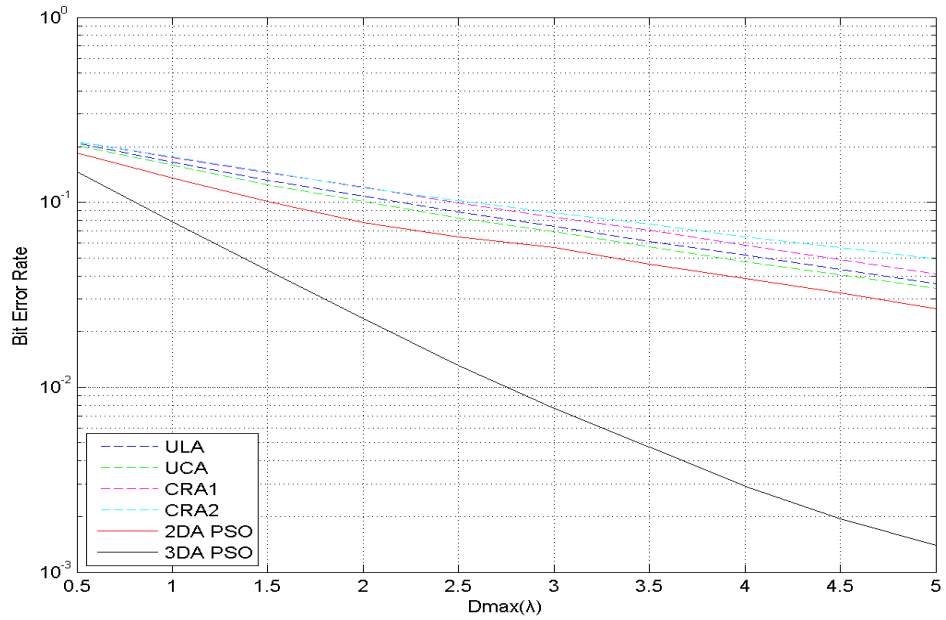


圖 6-69 Bit Error Rate for varying D_{max} with $N_{tx} = N_{rx} = 8$,
 $MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ$ and $ES = 5^\circ$

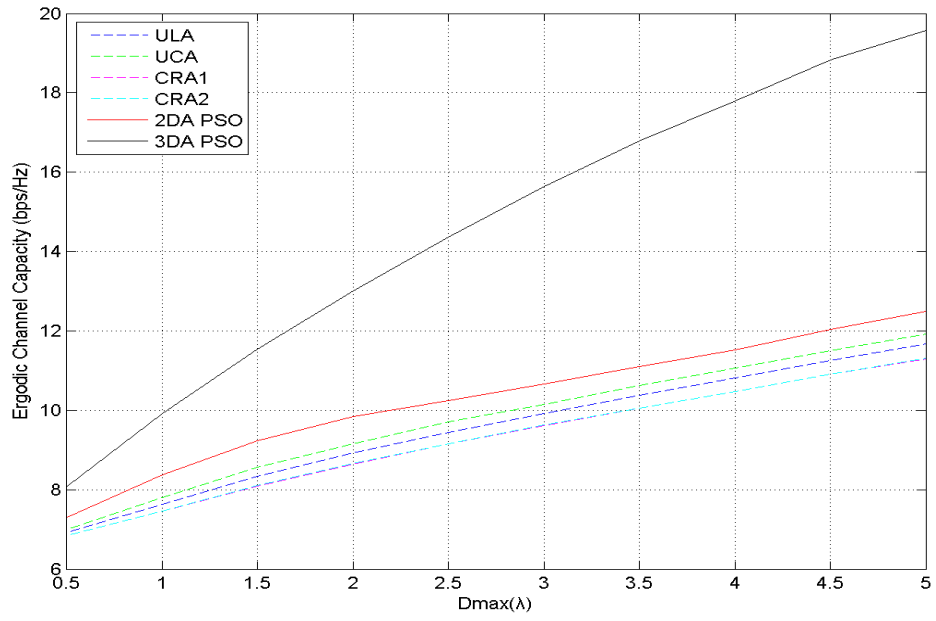


圖 6-70 Ergodic Channel Capacity for varying D_{max} with $N_{tx} = N_{rx} = 10$,

$$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ \text{ and } ES = 5^\circ$$

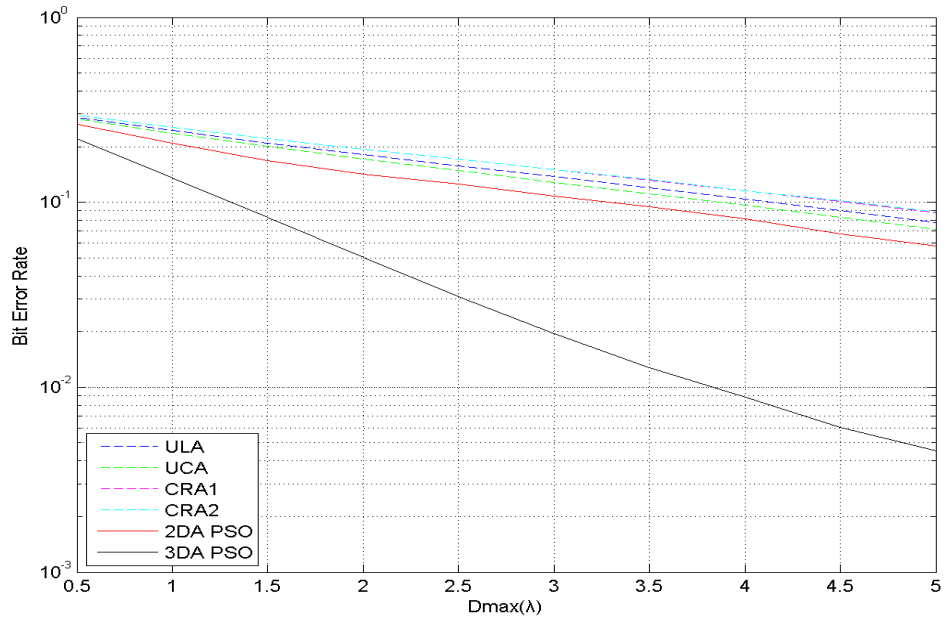


圖 6-71 Bit Error Rate for varying D_{max} with $N_{tx} = N_{rx} = 10$,

$$MAOA = 90^\circ, AS = 3^\circ, MEOA = 90^\circ \text{ and } ES = 5^\circ$$

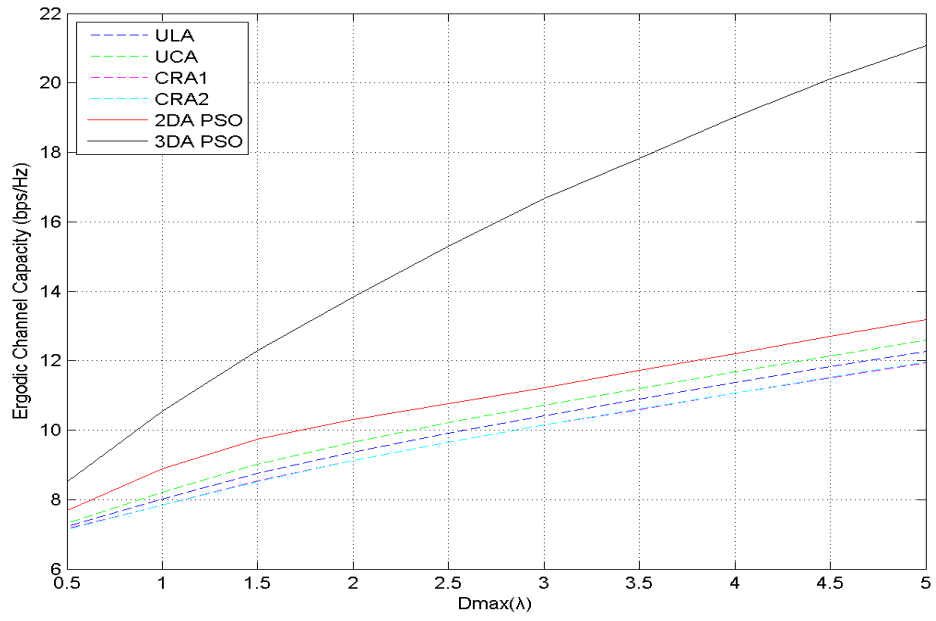


圖 6-72 Ergodic Channel Capacity for varying D_{max} with $N_{tx} = N_{rx} = 12$,
 $MAOA = 90^\circ$, $AS = 3^\circ$, $MEOA = 90^\circ$ and $ES = 5^\circ$

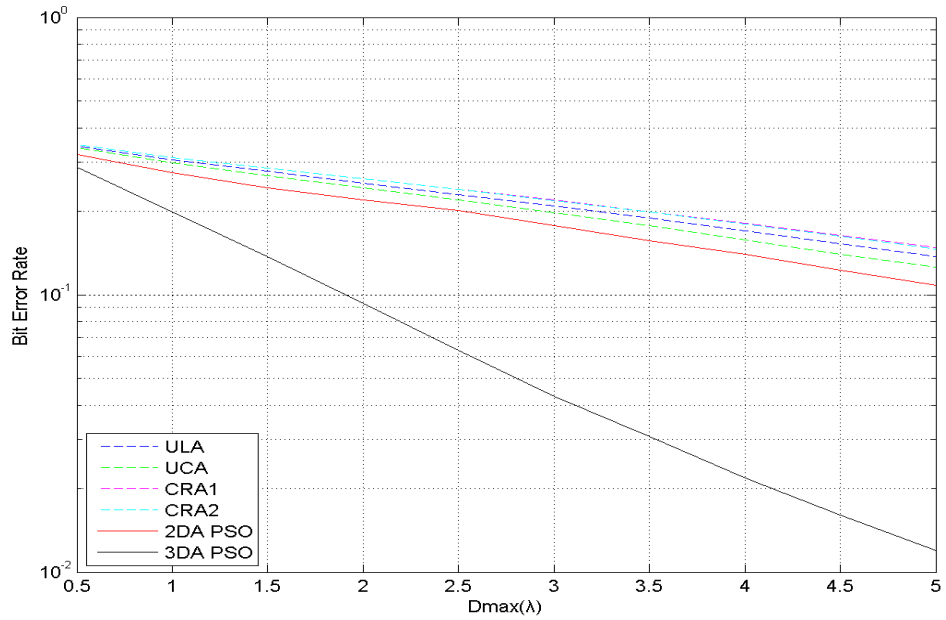


圖 6-73 Bit Error Rate for varying D_{max} with $N_{tx} = N_{rx} = 12$,
 $MAOA = 90^\circ$, $AS = 3^\circ$, $MEOA = 90^\circ$ and $ES = 5^\circ$

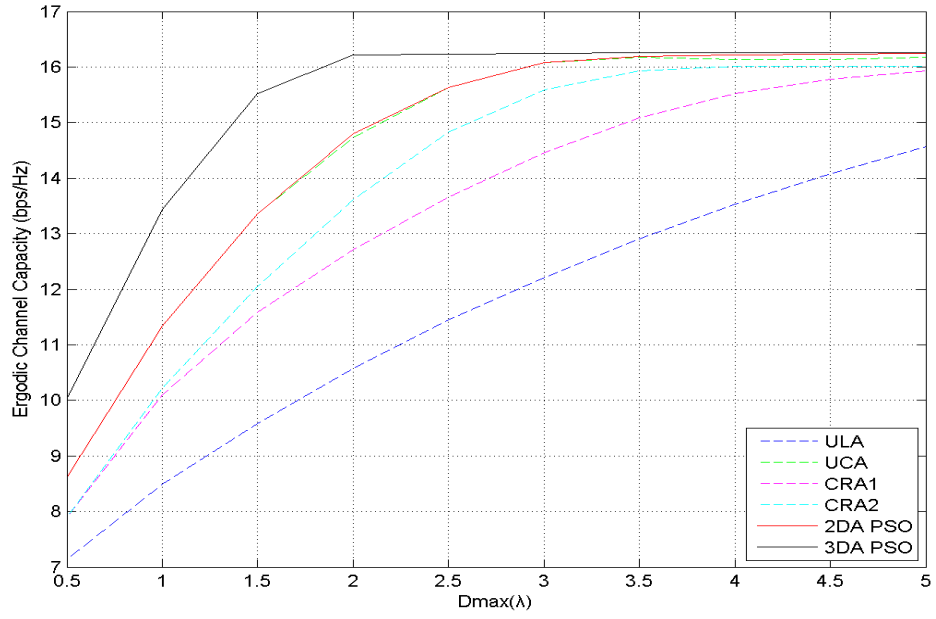


圖 6-74 Ergodic Channel Capacity for varying D_{max} with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, MEOA = 60^\circ$ and $ES = 20^\circ$

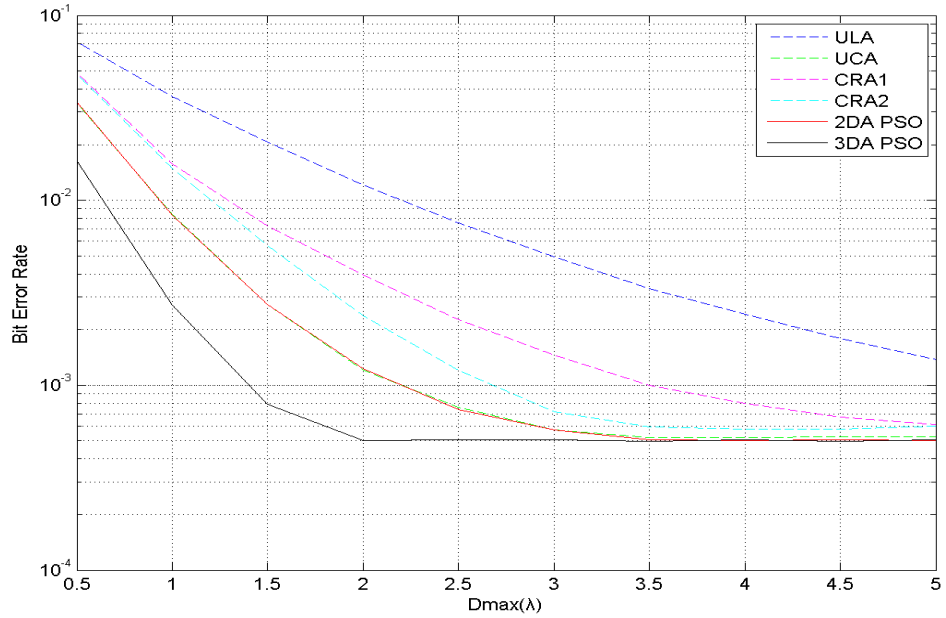


圖 6-75 Bit Error Rate for varying D_{max} with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, MEOA = 60^\circ$ and $ES = 20^\circ$

2DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	3.0000	1.5101	1.5084	-1.5084	-1.5100	-3.0000
y (λ)	-0.0006	2.5922	-2.5932	2.5932	-2.5923	0.0005
z (λ)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

3DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	2.9338	2.1353	1.2326	-0.9227	-1.2638	-2.9562
y (λ)	0.6086	0.8598	-0.2729	-1.5934	0.9408	0.1464
z (λ)	-0.1502	-1.7016	1.0304	1.8816	-1.7261	-0.4893

表 6-15 Optimization Results of 2DA PSO and 3DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, MEOA = 60^\circ, ES = 20^\circ$ and $Dmax = 3\lambda$

2DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.9595	2.5814	0.9554	-0.7772	-2.4116	-4.7535
y (λ)	0.6351	-4.2821	4.4393	-4.2897	4.3800	1.5505
z (λ)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

3DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	4.1462	0.9386	-0.2783	-1.6672	-2.6396	-3.7492
y (λ)	2.6397	-1.2992	3.0564	-4.0941	-1.0475	-1.8976
z (λ)	-0.8722	2.0930	-3.9028	2.0325	-2.9739	-0.0865

表 6-16 Optimization Results of 2DA PSO and 3DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$,

$MAOA = 90^\circ, AS = 10^\circ, MEOA = 60^\circ, ES = 20^\circ$ and $Dmax = 5\lambda$

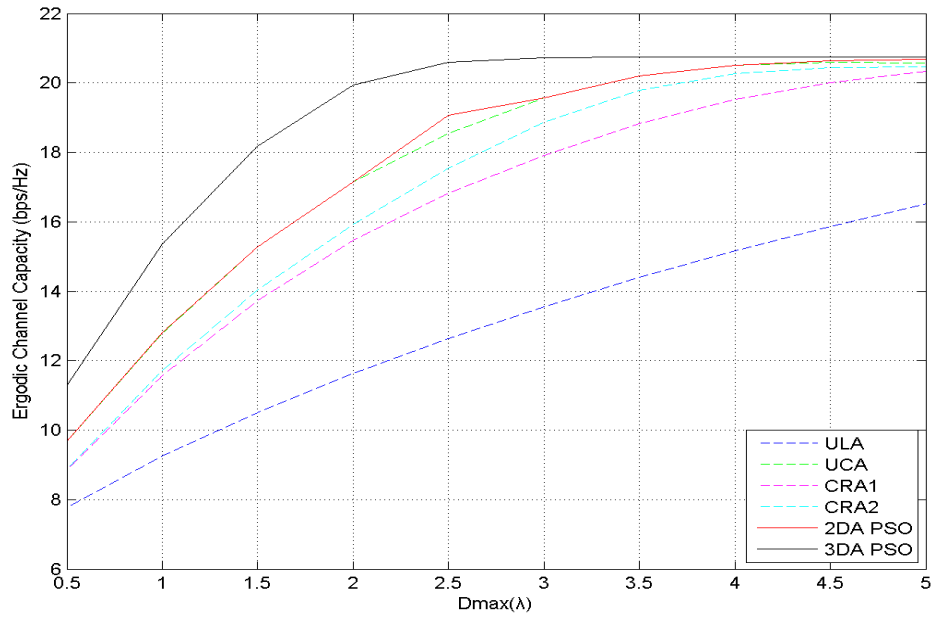


圖 6-76 Ergodic Channel Capacity for varying Dmax with $N_{tx} = N_{rx} = 8$,

MAOA = 90° , AS = 10° , MEOA = 60° and ES = 20°

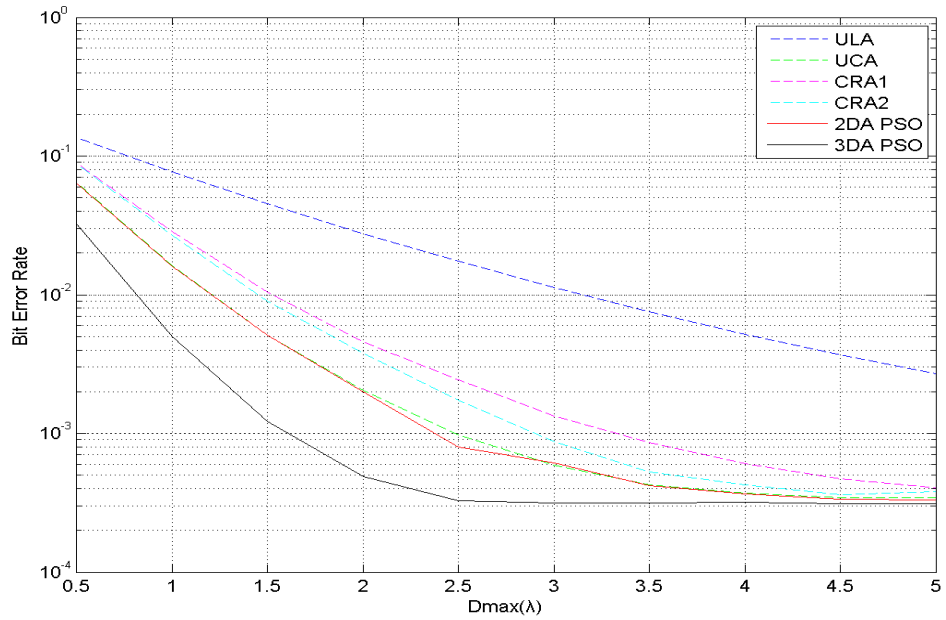


圖 6-77 Bit Error Rate for varying Dmax with $N_{tx} = N_{rx} = 8$,

MAOA = 90° , AS = 10° , MEOA = 60° and ES = 20°

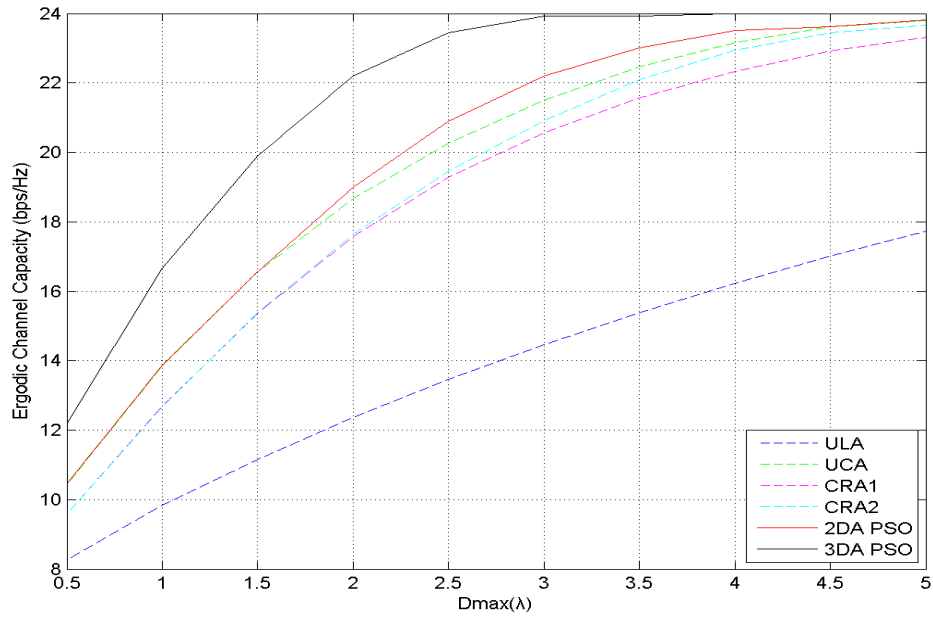


圖 6-78 Ergodic Channel Capacity for varying Dmax with $N_{tx} = N_{rx} = 10$,

MAOA = 90° , AS = 10° , MEOA = 60° and ES = 20°

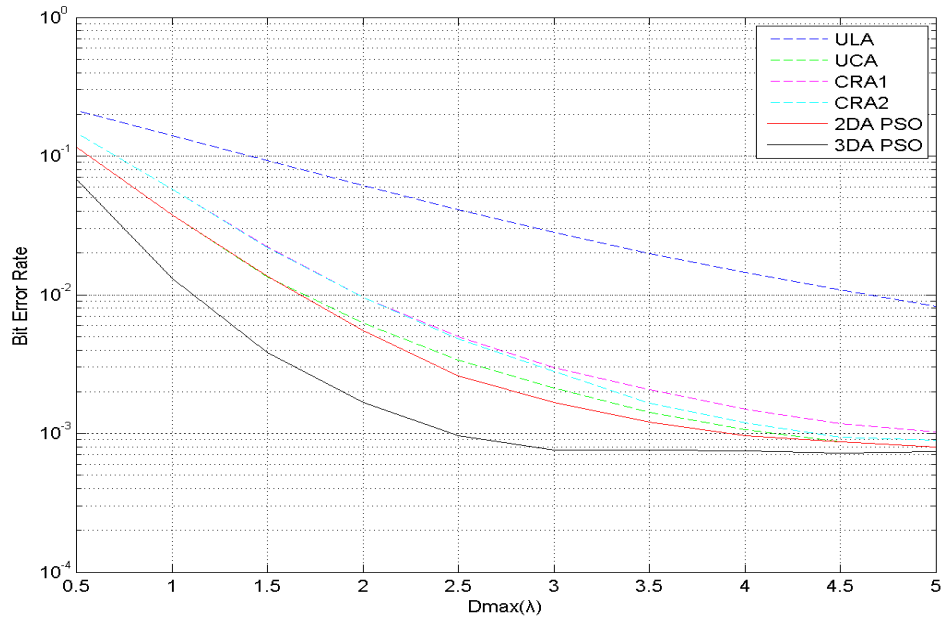


圖 6-79 Bit Error Rate for varying Dmax with $N_{tx} = N_{rx} = 10$,

MAOA = 90° , AS = 10° , MEOA = 60° and ES = 20°

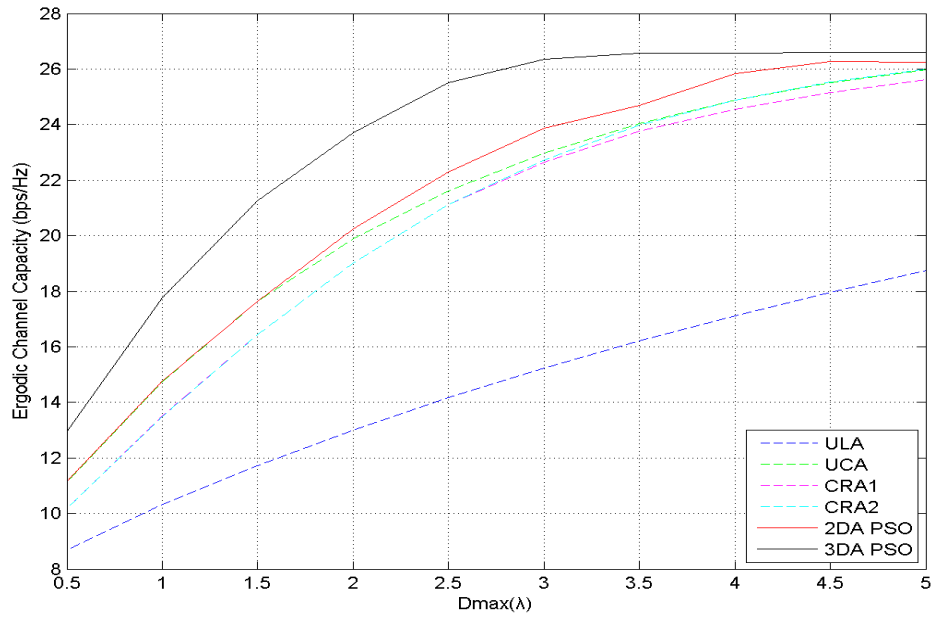


圖 6-80 Ergodic Channel Capacity for varying Dmax with $N_{tx} = N_{rx} = 12$,

MAOA = 90° , AS = 10° , MEOA = 60° and ES = 20°

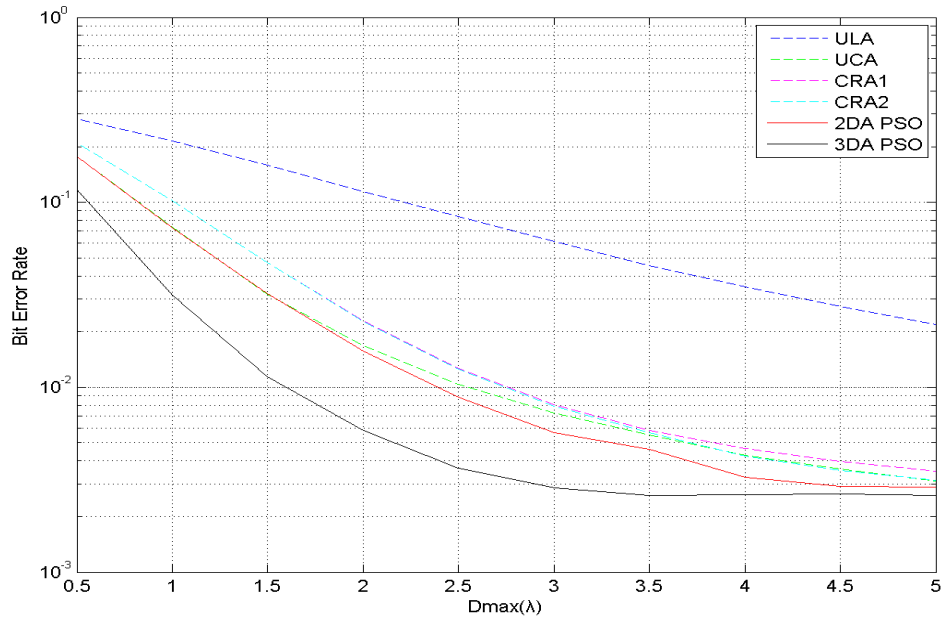


圖 6-81 Bit Error Rate for varying Dmax with $N_{tx} = N_{rx} = 12$,

MAOA = 90° , AS = 10° , MEOA = 60° and ES = 20°

6.3.6 天線數

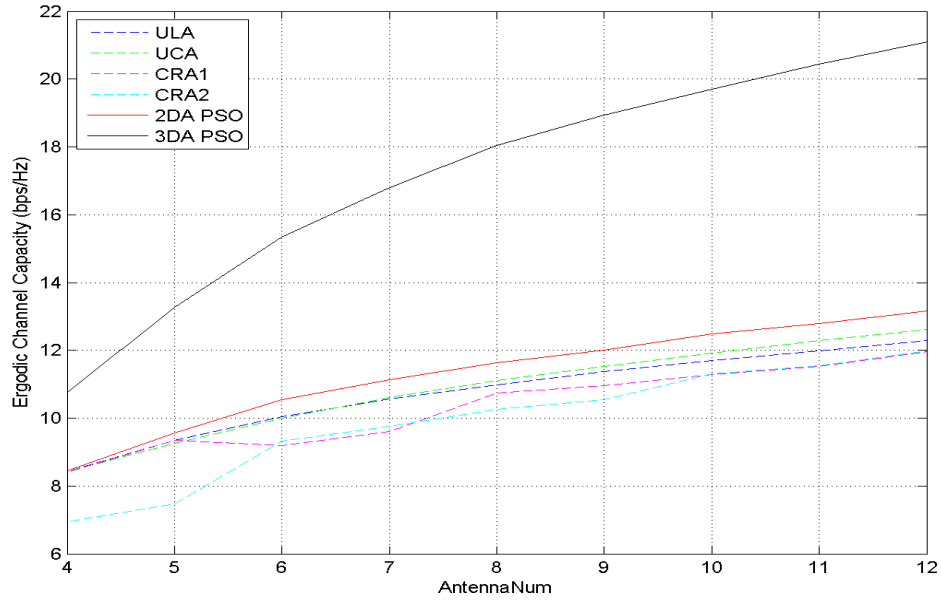


圖 6-82 Ergodic Channel Capacity for varying Antenna Number with $MAOA = 90^\circ$,

$$AS = 3^\circ, ME OA = 90^\circ, ES = 5^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

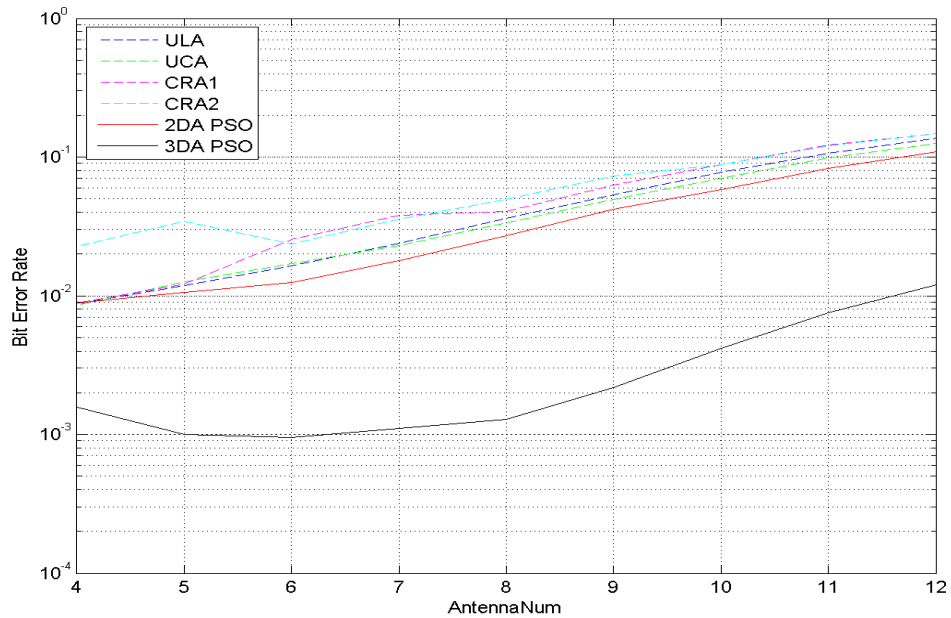


圖 6-83 Bit Error Rate for varying Antenna Number with $MAOA = 90^\circ$,

$$AS = 3^\circ, ME OA = 90^\circ, ES = 5^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

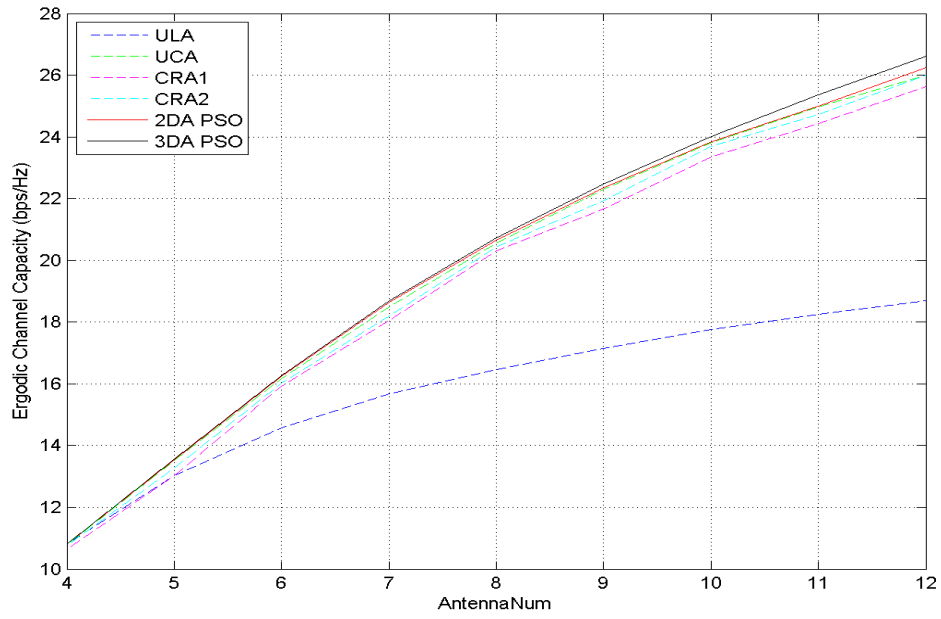


圖 6-84 Ergodic Channel Capacity for varying Antenna Number with $MAOA = 90^\circ$,

$$AS = 10^\circ, ME OA = 60^\circ, ES = 20^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

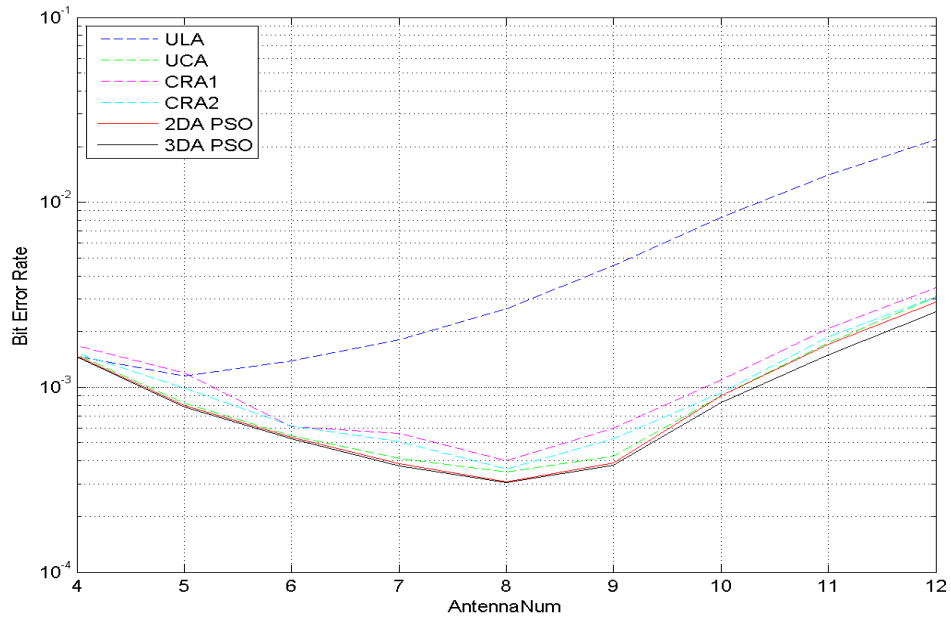


圖 6-85 Bit Error Rate for varying Antenna Number with $MAOA = 90^\circ$,

$$AS = 10^\circ, ME OA = 60^\circ, ES = 20^\circ \text{ and } Dmax = 5\lambda$$

由模擬結果來看，天線陣列效能會受到入射信號角度的擴散狀況以及陣列的大小影響，其影響來自於空間相關性矩陣，雖然沒有很直接的公式能夠說明入射信號角度的擴散狀況及陣列的大小，如何影響天線陣列效能，但基本上隨著空間相關性下降而效能上升。對於 MAOA 的影響，其中 ULA 因為 ULA 天線間之方位角皆相同，因此 ULA 對於 MAOA 的改變非常敏感。而 UCA、CRA1 及 CRA2 因為陣列中天線間之方位角皆不相同，因此對於 MAOA 的改變的影響較小，並且隨著天線數增加所受的影響降低。而 MAOA 並不會改變 PSO 最佳化結果之效能，主要是因為限制範圍在一圓或一球內，MAOA 的改變僅會造成 PSO 最佳化結果其旋轉，而實際上效能是相同的。在 AS 為 3 度、MEOA 為 90 度並且 ES 為 5 度時，圖 6-2 至圖 6-9，ULA 與二維擴散之情況類似，於 MAOA 為 90 度時效能達到最好，並且此時 2DA PSO 之效能遠低於 3DA PSO。而在 AS 為 10 度、MEOA 為 60 度並且 ES 為 20 度時，圖 6-10 至圖 6-17，此時受到垂直擴散的影響，ULA 在 MAOA 為約 35 度時效能達到最好，並且此時 2DA PSO 之效能與 3DA PSO 接近。

對於 MEOA 的影響，由圖 6-18 至圖 6-25 可以發現 ULA 及 3DA PSO 二種陣列之效能隨著 MEOA 接近 90 度而上升，其主要原因在於在 AS 及 ES 不變之下 MEOA 越靠近 90 度實際之擴散越大，因此對此二陣列來說，很直接的反應在效能上升。而二維陣列卻呈現約 45 度時效能最好，其原因在於雖然 MEOA 越靠近 90 度實際上之擴散越大，但另一方面也逐漸與二維陣列所在之平面平行，這會使得垂直方向擴散的影響降低，因而造成空間相關性上升，因此二維陣列在約 40 度時效能最好而在靠近 0 度及 90 度時則較差，並且此差距隨著天線數增加而增加。而在擴散較大之情況下，圖 6-26 至圖 6-33，3DA PSO 在不同之 MEOA 下皆能找到接近無相關之天線陣列幾何結構，因此其效能幾乎不隨著 MEOA 改變，而二維陣列在 MEOA 小於 60 度時其效能改變不大，大於 60 度開始快速下降，並且下降幅度隨著天線數增加而上升。由列舉之最佳化陣列天線座標表 6-1 至表 6-4 可以看出，在擴散情況較小時，如表 6-1 及表 6-2 所示，2DA PSO 的結果其形狀會接近

於 UCA，隨著 MEOA 改變略有旋轉，而 3DA PSO 的結果則會接近於傾斜之 2DA PSO，其所在平面之法向量其方位角等於 MAOA，傾斜角等於 MEOA；在擴散情況較大時，如表 6-3 及表 6-4 所示，2DA PSO 的結果其形狀較不規則，同樣在 3DA PSO 的結果其形狀也會呈現不規則之立體結構。

對於 AS 的影響，趨勢上陣列效能隨著 AS 上升而上升，並且很快的達到飽和，此時天線陣列的空間相關性矩陣接近單位矩陣，並且當 MEOA 為 90 度，ES 為 5 度時，圖 6-34 至圖 6-41，ULA 在 MAOA 為 90 度，並且 AS 小於 90 度之情況下，其效能十分接近 2DA PSO 之結果，相對於 ULA，其餘三種二維天線陣列在 AS 小於 90 度時，與 2DA PSO 之結果相比差距較大，此情況與二維擴散的情形類似，而 3DA PSO 之效能在 AS 較小時比 2DA PSO 之效能好很多。而在 MEOA 為 60 度，ES 為 20 度時，圖 6-42 圖 6-49，因垂直方向的擴散較明顯，因此 UCA 較為接近 2DA PSO 之結果，而 ULA 則差距較大，並且在天線數較多之情況更為明顯，而 3DA PSO 在此環境中不論水平擴散之大小，皆能找到接近無相關之天線陣列幾何結構。由列舉之最佳化陣列天線座標表 6-5 至表 6-8 可以發現在 AS 較小時，2DA PSO 會接近非均勻之圓形，而 3DA PSO 則為傾斜之不規則形狀；而在 AS 較大時，因空間相關性主要受水平方向擴散之影響，並且此時 AS 為 60 度，因此 2DA PSO 及 3DA PSO 皆會接近於線性排列之結構。

相對於 AS，ES 的對效能的影響較小，二維天線陣列會隨著 ES 上升而上升，但無法達到接近無相關時的效能，3DA PSO 則隨著 ES 上升而很快的達到飽和。並且因為 MAOA 為 90 度，所以 ULA 受 ES 的影響較不明顯，並且在 MEOA 為 90 度且 AS 為 3 度時，圖 6-50 至圖 6-57，ES 上升反而造成其效能下降。而表 6-9 至表 6-12 大致可以發現 2DA PSO 的結果皆接近於非均勻之圓形，而 3DA PSO 則呈現不規則之結構，大致上皆位於法向量對準平均入射方向之平面上，但在 AS 較大的情況其結構較為立體。

對於陣列大小的影響，會隨著陣列大小變大而效能上升，這是因為空間相關

性會隨著天線間距變大而下降之故，其下降的趨勢可以參考第二章的模擬結果。整體而言，用 PSO 最佳化之天線陣列幾何結構，確實較其他常用之天線陣列在通道容量以及位元錯誤率上皆有較好的效能，並且 3DA PSO 在擴散角度小並且 MEOA 接近 90 度時，其效能之改善十分明顯，因此在此情況使用三維之天線陣列較有價值。而 UCA 與 2DA PSO 在大部分的情況下，其效能皆十分接近，因此在三維擴散環境下，若只能使用固定之平面陣列，那 UCA 是個不錯的選擇，並且 UCA、2DA PSO 及 3DA PSO 三者效能在 MEOA 較小時非常接近，因此可以推測若適當的傾斜 UCA，使其所在平面之法向量與平均入射方向相同，則可以得到接近 3DA PSO 之效能。

相較於第四章之結果，可以發現改變接收端信號擴散情況之影響趨勢上是相同的，只是整體效能因傳送端天線陣列具有空間相關性而略有下降。下降的幅度在接收端天線陣列空間相關性較小時較為明顯，反之若是接收端天線陣列空間相關性很大時，其下降的幅度便很小。其原因可由通道容量之上限公式解釋，回顧 (6.19)，通道容量上限公式表示為

$$E[C] < \log \left(\sum_{k=0}^N k! \rho^k E_{tx,k} E_{rx,k} \right) \quad (6.24)$$

其中

$$E_{tx,k} = \sum_{\alpha, |\alpha|=k} \lambda_{tx,\alpha_1} \cdots \lambda_{tx,\alpha_k} \quad \text{and} \quad E_{rx,k} = \sum_{\beta, |\beta|=k} \lambda_{rx,\beta_1} \cdots \lambda_{rx,\beta_k} \quad (6.25)$$

而空間相關性上升會造成其空間相關性矩陣之特徵值向較大者集中，此時 $E_{tx,k}$ 與 $E_{rx,k}$ 便會下降，其下降幅度在項次較高時尤為明顯，因此在接收端之天線陣列空間相關性高的情況中，高次項之 $E_{rx,k}$ 很小，受傳送端之空間相關性造成之 $E_{tx,k}$ 下降對通道容量上限的影響便較不明顯；反之在接收端之天線陣列空間相關性較低的情況中，高次項之 $E_{rx,k}$ 較大，而受傳送端之空間相關性造成之 $E_{tx,k}$ 下降也是在高次項較為明顯，因此對通道容量上限的影響便較為顯著。因此反過來可以推測，

在傳送端空間相關性較高的情況下，因為通道容量受到接收端空間相關性的影響較小，因此最佳化接收端天線陣列幾何結構能獲得的改善便有限。同樣的訊雜比 ρ 上升能提高高次項之 $E_{tx,k}$ 與 $E_{rx,k}$ 的影響，因此雖然沒有做此模擬，依然可以推測在 ρ 較大時最佳化接收端天線陣列幾何結構能獲得的改善較為明顯，較有最佳化之價值。並且 $E_{tx,k}$ 與 $E_{rx,k}$ 也同時可表示為

$$E_k = \sum_{\mathbf{a}, |\mathbf{a}|=k} \lambda_{\alpha_1} \cdots \lambda_{\alpha_k} = \sum_{\mathbf{a}, |\mathbf{a}|=k} \det(\mathbf{R}(\mathbf{a}, \mathbf{a})) \quad (6.26)$$

$\mathbf{R}(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ 為空間相關性矩陣 \mathbf{R} 之主子矩陣，代表了由 \mathbf{a} 天線構成之子天線陣列之空間相關性矩陣，因此在高訊雜比之情況下，高次項之 $E_{tx,k}$ 與 $E_{rx,k}$ 影響較大，此時最佳化相當於降低天線陣列整體之空間相關性；相反的在低訊雜比之情況下，低次項之 $E_{tx,k}$ 與 $E_{rx,k}$ 影響較大，因此若擴散角度小並且天線陣列可擺放的範圍也小，使得最佳化無法找到整體之空間相關性較低之天線陣列，此時最佳化會傾向於降低天線陣列局部之空間相關性，由表 6-13 之 2DA PSO 以及表 6-17 之 3DA PSO 可以發現此情況，其最佳化結果將六個陣列元件平分為兩組，每一組內之元件皆十分靠近。而在相同環境下，總訊雜比提高至 50dB 時，其 2DA PSO 之結果如表 6-19 所示而 3DA PSO 之結果如表 6-21 所示，可以發現此時最佳化著重於降低天線陣列整體之空間相關性，因此最佳化結果接近圓形。

而由通道容量的公式來看，傳送端與接收端互換其通道容量不變，因此在此雖然假設為最佳化接收端天線陣列，但實際上等同於最佳化傳送端天線陣列，而由最佳化傳送端天線陣列的角度來看表 6-13 及表 6-18 的情況，可以發現因為兩組內之元件皆十分靠近，其空間相關性趨近於 1，如此相當於在傳送時僅使用二天線。因此可以發現在擴散較小的環境中並且傳送之功率有限時，將功率集中在空間相關性較低之二天線，與將功率分散於空間相關性高之天線陣列相比有較高之通道容量。

2DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	3.0000	1.2100	0.9795	-1.4634	-1.5264	-2.9996
y (λ)	-0.0117	2.7310	-2.8356	2.6188	-2.5826	0.0471
z (λ)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

表 6-19 Optimization Results of 2DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$, $MAOA = 90^\circ$,
 $AS = 3^\circ$, $MEOA = 90^\circ$, $ES = 5^\circ$, $Dmax = 3\lambda$ and total SNR = 50dB

3DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
y (λ)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
z (λ)	0.5000	0.5000	0.5000	-0.5000	-0.5000	-0.5000

表 6-20 Optimization Results of 3DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$, $MAOA = 90^\circ$,
 $AS = 3^\circ$, $MEOA = 90^\circ$, $ES = 5^\circ$, $Dmax = 0.5\lambda$ and total SNR = 10dB

3DA PSO	E1	E2	E3	E4	E5	E6
x (λ)	0.4957	0.3039	0.1871	-0.1894	-0.2972	-0.4950
y (λ)	0.0003	-0.0006	-0.0014	-0.0006	-0.0003	0.0008
z (λ)	-0.0651	0.3970	-0.4637	0.4627	-0.4021	0.0707

表 6-21 Optimization Results of 3DA PSO with $N_{tx} = N_{rx} = 6$, $MAOA = 90^\circ$,
 $AS = 3^\circ$, $MEOA = 90^\circ$, $ES = 5^\circ$, $Dmax = 0.5\lambda$ and total SNR = 50dB

第七章

結論

本篇論文著重於天線陣列幾何結構對空間相關性的影響，並且由空間相關性的角度討論天線陣列幾何結構最佳化問題以及一般常用陣列效能之分析。首先第二章推導一般性之二維及三維空間相關性公式，並且可以發現在三維擴散環境中，三維結構之天線陣列較一般位於水平面之天線陣列，其空間相關性的表現有極大的不同，其受垂直擴散的影響較大，並且在 MEOA 接近 90 度時，三維結構之天線陣列能夠得到較低之空間相關性。

第三章到第六章討論在不同環境假設下的天線陣列幾何結構最佳化問題。本篇論文提出之天線陣列幾何結構最佳化方法確實能夠有效率地設計出效能較好的天線陣列，並且在討論最佳化天線陣列與常用之天線架構效能差異時可以發現，在二維擴散環境中，若 AS 小於 90 度，則最佳化天線陣列的效能與寬邊方向之 ULA 相近，而 AS 大於 90 度時 UCA 較接近最佳化天線陣列的效能，這表示若技術上無法使用任意擺放之天線陣列，則可以在 AS 小於 90 度時替代性的使用寬邊方向之 ULA，在 AS 大於 90 度時則使用 UCA，以接近最佳效能。而在三維擴散環境中，UCA 之效能接近最佳之二維天線陣列效能，同時也可以由最佳化三維天線陣列的研究中發現三維天線陣列的確有其特殊的空間特性，其在 MEOA 接近 90 度時能

夠得到較好的效能。而天線陣列中天線數增加的確能使通道容量提高，但因天線陣列被限制於一定範圍內，因此天線數增加則陣列中天線間距便會降低，導致空間相關性上升而抵銷天線數增加帶來的額外自由度以及空間分集，因此通道容量上升的幅度便會趨緩，並且隨著通道容量上升的趨緩在 V-BLAST 系統中一次傳送的位元數卻是線性上升，因此位元錯誤率反而會上升。

而在第五章及第六章討論全相關通道的環境下的天線陣列幾何結構最佳化研究中，可以發現若一端之天線陣列具有空間相關性，則另一端之天線陣列做幾何結構最佳化所能得到效能的提升，其改善幅度會下降，因此若一端天線陣列具有高空間相關性，或是訊雜比較低，則另一端天線陣列最佳化之價值便會降低，同時高空間相關性及低訊雜比也意味著最佳化時傾向於降低天線陣列局部之空間相關性而非整體。

在本論文中天線陣列幾何結構對系統效能的影響在此僅考慮了空間相關性的效應，並且在最佳化時必須知道正確之信號擴散情況、訊雜比以及另一端之空間相關性等資訊，因此在未來可以更進一步討論天線間互耦合(mutual coupling)的影響，在更複雜的環境下天線陣列幾何結構之最佳化，並且討論在獲得之資訊不足或不正確時的最佳化演算法。

參考文獻

- [1] T. Jiann-An and B. D. Woerner, "The fading correlation function of a circular antenna array in mobile radio environment," in *Global Telecommunications Conference, 2001. GLOBECOM '01. IEEE*, 2001, pp. 3232-3236 vol.5.
- [2] J. Salz and J. H. Winters, "Effect of fading correlation on adaptive arrays in digital mobile radio," *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, vol. 43, pp. 1049-1057, 1994.
- [3] K. Ishizawa, *et al.*, "Spatial correlation of a circular array antenna and BER performance investigation," in *Circuits and Systems, 2004. Proceedings. The 2004 IEEE Asia-Pacific Conference on*, 2004, pp. 385-388 vol.1.
- [4] X. Li and Z.-p. Nie, "Impact of array orientation on performance of MIMO wireless channels," in *Communications, Circuits and Systems, 2004. ICCCAS 2004. 2004 International Conference on*, 2004, pp. 254-257 Vol.1.
- [5] W. Jun, *et al.*, "On the Channel Capacity of MIMO Systems Under Correlated Rayleigh Fading," in *Wireless Communications, Networking and Mobile Computing, 2007. WiCom 2007. International Conference on*, 2007, pp. 134-136.
- [6] L. Xia and M. E. Bialkowski, "Effective Degree of Freedom and Channel Capacity of a MIMO System Employing Circular and Linear Array Antennas," in *Wireless Communications, Networking and Mobile Computing, 2009. WiCom '09. 5th International Conference on*, 2009, pp. 1-4.
- [7] P. Lusina, *et al.*, "Antenna parameter effects on spatial channel models," *Communications, IET*, vol. 3, pp. 1463-1472, 2009.
- [8] 李受益, "Research of Performance of Wireless Communication Systems Using Adaptive Antenna Arrays," 國立台灣大學電信工程研究所碩士論文, 2009.
- [9] J.-H. Lee and C.-C. Cheng, "The spatial correlation characteristics of 3-D antenna array systems," to be presented in *The 54th IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems*, 2011.
- [10] Y. Su Khiong and J. S. Thompson, "Three-dimensional spatial fading correlation models for compact MIMO receivers," *Wireless*

- Communications, IEEE Transactions on*, vol. 4, pp. 2856-2869, 2005.
- [11] V. Murino, *et al.*, "Synthesis of unequally spaced arrays by simulated annealing," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 44, pp. 119-122, 1996.
 - [12] M. M. Khodier and C. G. Christodoulou, "Linear Array Geometry Synthesis With Minimum Sidelobe Level and Null Control Using Particle Swarm Optimization," *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 53, pp. 2674-2679, 2005.
 - [13] P. J. Bevelacqua and C. A. Balanis, "Geometry and Weight Optimization for Minimizing Sidelobes in Wideband Planar Arrays," *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 57, pp. 1285-1289, 2009.
 - [14] U. Olgun, *et al.*, "Optimization of Linear Wire Antenna Arrays to Increase MIMO Capacity using Swarm Intelligence," in *Antennas and Propagation, 2007. EuCAP 2007. The Second European Conference on*, 2007, pp. 1-6.
 - [15] S. Zhi and I. F. Akyildiz, "Optimal MIMO Antenna Geometry Analysis for Wireless Networks in Underground Tunnels," in *Global Telecommunications Conference, 2009. GLOBECOM 2009. IEEE*, 2009, pp. 1-6.
 - [16] M. A.-A. Mangoud, "Optimization of Channel Capacity for Indoor MIMO Systems Using Genetic Algorithm," *Progress In Electromagnetics Research C*, vol. 7, pp. 137-150, 2009.
 - [17] A. Kuchar, *et al.*, "Directional macro-cell channel characterization from urban measurements," *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 48, pp. 137-146, 2000.
 - [18] J. Fuhl, *et al.*, "High-resolution 3-D direction-of-arrival determination for urban mobile radio," *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 45, pp. 672-682, 1997.
 - [19] I. S. Gradshtēin, *et al.*, *Table of integrals, series, and products*. San Diego: Academic Press, 2000.
 - [20] D. Tse and P. Viswanath, *Fundamentals of Wireless Communications*: Cambridge University Press, 2005.
 - [21] W. Weichselberger, *et al.*, "A stochastic MIMO channel model with joint correlation of both link ends," *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, vol. 5, pp. 90-100, 2006.
 - [22] A. Goldsmith, *et al.*, "Capacity limits of MIMO channels," *Selected Areas in Communications, IEEE Journal on*, vol. 21, pp. 684-702, 2003.
 - [23] H. V. Poor, *An introduction to signal detection and estimation*:

Springer-Verlag New York, Inc. , 1994.

- [24] J. Kennedy and R. Eberhart, "Particle swarm optimization," in *Neural Networks, 1995. Proceedings., IEEE International Conference on*, 1995, pp. 1942-1948 vol.4.
- [25] Eberhart and S. Yuhui, "Particle swarm optimization: developments, applications and resources," in *Evolutionary Computation, 2001. Proceedings of the 2001 Congress on*, 2001, pp. 81-86 vol. 1.
- [26] J. Robinson and Y. Rahmat-Samii, "Particle swarm optimization in electromagnetics," *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 52, pp. 397-407, 2004.
- [27] M. Kang and M. S. Alouini, "Capacity of correlated MIMO Rayleigh channels," *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, vol. 5, pp. 143-155, 2006.
- [28] H. Shin, *et al.*, "On the capacity of doubly correlated MIMO channels," *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, vol. 5, pp. 2253-2265, 2006.
- [29] K. Ming and M. S. Alouini, "Impact of correlation on the capacity of MIMO channels," in *Communications, 2003. ICC '03. IEEE International Conference on*, 2003, pp. 2623-2627 vol.4.
- [30] M. Kiessling, *et al.*, "A closed-form bound on correlated MIMO channel capacity," in *Vehicular Technology Conference, 2002. Proceedings. VTC 2002-Fall. 2002 IEEE 56th*, 2002, pp. 859-863 vol.2.
- [31] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix analysis*. New York: Cambridge University Press, 1985.