

國立臺灣大學工學院土木工程學系

碩士論文

Department of Civil Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis

SPT 液化機率評估模式與可靠度之研究

The Probability and Reliability Analyses on the
SPT Methods for Soil Liquefaction Assessment



Huang, wei-Li

指導教授：陳正興 博士

Advisor : Chen, Cheng-Hsing, Ph.D.

中華民國 100 年 7 月

July, 2011

國立臺灣大學碩士學位論文 口試委員會審定書

SPT 液化機率評估模式與可靠度之研究

本論文係 黃維力君 (學號：R98521128) 在國立臺灣大學土木工程學系碩士班完成之碩士學位論文，於民國 100 年 6 月 17 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明



口試委員：

陳正興 博士

黃俊鴻 博士

邱俊翔 博士

呂良正

陳正興

黃俊鴻

邱俊翔

呂良正

(簽名)

系主任

摘要

傳統的土壤液化評估法以安全係數的大小為液化潛能的評估標準，當 $FS < 1$ ，則代表土層會液化，反之 $FS > 1$ ，則代表土層不會液化。有鑑於地震所產生的災害風險是一種不確定性之表現，本質是機率的，而非「會」與「不會」二元式簡單判定。因此，若能運用統計技術及機率理論推估液化發生之可能性，這對液化防制工作而言，將有非常大之幫助。

本研究首先蒐集共669筆國內外SPT-N現場液化與非液化案例調查資料，針對目前廣為採用的SPT簡易評估法(包括Seed法、NJRA法、T-Y法及HBF法等四種方法)，分別以邏輯迴歸分析、可靠度理論及貝氏定理等方法建構四種不同機率預測模式。其次藉由可考慮預測模式不確定性折減度之訊息理論，評估不同機率模式之可信度及相對權重，以作為評量各模式之可靠度基礎，同時除了比較各模式間的差異性及相對保守程度外，也探討各模式在不同評估法之適用性。分析結果顯示，四種機率模式之可靠度及適用性皆相當優良，其中各模式在Seed法及HBF法之機率預測表現較佳；模式可靠度部分則以邏輯迴歸模式之可信度最高。

綜整研究成果顯示：本研究建構之四種機率評估模式在推求液化機率方面相當方便實用，值得進一步發展及運用。最後進行各不同簡易評估法推估所得安全係數與液化機率對應關係建立之研究，以提供工程界在從事抗液化工程設計與分析上之參考。

關鍵字：土壤液化、邏輯迴歸、可靠度、貝氏定理、訊息理論

Abstract

In engineering practices, the assessment of liquefaction potential of soils is usually represented by a safety factor, in which $FS < 1$ indicates that soil will liquefy whereas $FS > 1$ indicates that soil will not liquefy. However, the risk of soil liquefaction resulting from earthquakes contains a lot of uncertainties in nature. Therefore, it will be more suitable if statistics and probability theory can be applied to the estimation of liquefaction potential of soils.

For this purpose, 669 domestic and international cases of SPT-N liquefaction and non-liquefaction were collected as the data base in this study. The liquefaction evaluation methods selected for study are the commonly used simplified empirical SPT-N methods, such as the Seed, Japan Road Association, Tokimatsu and Yoshimi, and Hyperbolic Function methods. The probability models applied are based on the logistic regression, the reliability-based theory, and the Bayes' theorem, respectively. In addition, information theory is then employed to evaluate the reliability of each probability model. Meanwhile, the variation and relative conservatism between models were compared, and the applicability of each model in each evaluation method was also investigated. The results showed that the reliability and applicability of the four probability models were excellent, in which the Seed and HBF methods had a better performance. As for the reliability of different probability models, the one based on the logistic regression was the highest.

Key words: soil liquefaction, logistic regression, reliability, the Bayes' theorem, information theory.

目 錄

摘要.....	I
Abstract.....	II
目錄.....	III
圖目錄.....	VI
表目錄.....	IX
符號說明.....	X
第一章 緒論.....	1
1.1 前言.....	1
1.2 研究目的.....	2
1.3 研究內容與流程.....	2
第二章 SPT液化簡易評估法與案例資料庫簡介.....	4
2.1 前言.....	4
2.2 各學者建議之SPT簡易評估法.....	5
2.2.1 Seed簡易評估法(簡稱Seed法, 2001 NCEER workshop).....	5
2.2.2 新日本道路橋協會簡易評估法(簡稱NJRA法, 1996).....	11
2.2.3 Tokimatsu & Yoshimi簡易評估法(簡稱T-Y法, 1983).....	15
2.2.4 本研究建議之SPT雙曲線函數評估法(簡稱HBF法, 2002).....	18

2.3 現場案例資料庫簡介.....	21
2.3.1 國內SPT案例資料.....	21
2.3.2 國外SPT案例資料.....	22

第三章 土壤液化機率評估模式.....25

3.1 前言.....	25
3.2 邏輯式迴歸機率模式.....	25
3.2.1 介紹.....	25
3.2.2 分析原理.....	26
3.2.3 預測準確性評估.....	27
3.2.4 本研究之分析過程.....	28
3.3 可靠度理論模式.....	34
3.3.1 介紹.....	34
3.3.2 分析原理.....	34
3.3.3 本研究之分析過程.....	39
3.4 貝式機率模式.....	44
3.4.1 介紹.....	44
3.4.2 分析原理.....	45
3.4.3 本研究之分析過程.....	47



第四章 模式可靠度與安全係數對應之液化機率.....	57
4.1 前言.....	57
4.2 模式可信度比較.....	57
4.2.1 訊息熵與不確定性.....	57
4.2.2 模式可信度評量方法.....	59
4.2.3 分析結果與比較.....	61
4.3 模式保守度比較.....	67
4.4 安全係數對應液化機率之比較.....	77
4.4.1 液化機率與安全係數之映射關係.....	77
4.4.2 分析結果與比較.....	78
第五章 結論與建議.....	90
5.1 結論.....	90
5.2 建議.....	91
參考文獻.....	92
附錄A.....	97
附錄B.....	108



圖 目 錄

圖1-1 研究分析流程圖.....	3
圖2-1 Mw=7.5時，不同細料含量之液化組抗與 $(N_1)_{60}$ 之關係（摘自Youd et al.,2001）.....	6
圖2-2 應力折減係數 γ_d 對深度修正之關係曲線（摘自Youd et al.,2001）.....	7
圖2-3 Seed簡易評估法分析流程（Youd et al.,2001）.....	10
圖2-4 NJRA(1996)簡易評估法分析流程.....	14
圖2-5 Tokimatsu-Yoshimi(1983)簡易評估法分析流程.....	17
圖2-6 本研究建議之SPT雙曲線函數(2002)評估法分析流程.....	20
圖2-7 國內外案例資料之細粒料含量FC之分布圖.....	23
圖2-8 國內外案例資料之臨界液化深度之分布圖.....	23
圖2-9 國內外案例資料之地下水位深度之分布圖.....	24
圖2-10 國內外案例資料之最大地表加速度值之分布圖.....	24
圖3-1 Microsoft Excel程式視窗畫面.....	30
圖3-2 Seed形式之邏輯迴歸機率液化強度曲線.....	32
圖3-3 NJRA形式之邏輯迴歸機率液化強度曲線.....	32
圖3-4 T-Y形式之邏輯迴歸機率液化強度曲線.....	33
圖3-5 HBF形式之邏輯迴歸機率液化強度曲線.....	33

圖3-6 CRR(R)與CSR (S) 機率密度分佈函數示意圖.....	35
圖3-7 功能函數Z之機率密度分佈函數示意圖.....	36
圖3-8 土壤CRR之累積機率分布示意圖.....	41
圖3-9 土壤CRR之機率密度分布示意圖.....	41
圖3-10 各形式之CRR平均值分佈圖.....	43
圖3-11 液化組Seed法FS之直方圖及擬合之機率密度函數.....	48
圖3-12 非液化組Seed法FS之直方圖及擬合之機率密度函數.....	48
圖3-13 液化組NJRA法FS之直方圖及擬合之機率密度函數.....	49
圖3-14 非液化組NJRA法FS之直方圖及擬合之機率密度函數.....	49
圖3-15 液化組T-Y法FS之直方圖及擬合之機率密度函數.....	50
圖3-16 非液化組T-Y法FS之直方圖及擬合之機率密度函數.....	50
圖3-17 液化組HBF法FS之直方圖及擬合之機率密度函數.....	51
圖3-18 非液化組HBF法FS之直方圖及擬合之機率密度函數.....	51
圖3-19 液化組Seed法 β 之直方圖及擬合之機率密度函數.....	52
圖3-20 非液化組Seed法 β 之直方圖及擬合之機率密度函數.....	53
圖3-21 液化組NJRA法 β 之直方圖及擬合之機率密度函數.....	53
圖3-22 非液化組NJRA法 β 之直方圖及擬合之機率密度函數.....	54
圖3-23 液化組T-Y法 β 之直方圖及擬合之機率密度函數.....	54
圖3-24 非液化組T-Y法 β 之直方圖及擬合之機率密度函數.....	55

圖3-25 液化組HBF法 β 之直方圖及擬合之機率密度函數.....	55
圖3-26 非液化組HBF法 β 之直方圖及擬合之機率密度函數.....	56
圖4-1 訊息含量 $h(P)$ 和事件發生機率 P 之關係.....	58
圖4-2 Seed法推估 $P_{L(Logistic)}$ 與 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 之比較.....	68
圖4-3 Seed法推估 $P_{L(Logistic)}$ 與 $P_{L(Reliability)}$ 之比較.....	69
圖4-4 Seed法推估 $P_{L(Reliability)}$ 與 $P_{L(Bayesian,\beta)}$ 之比較.....	69
圖4-5 NJRA法推估 $P_{L(Logistic)}$ 與 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 之比較.....	70
圖4-6 NJRA法推估 $P_{L(Logistic)}$ 與 $P_{L(Reliability)}$ 之比較.....	71
圖4-7 NJRA推估 $P_{L(Reliability)}$ 與 $P_{L(Bayesian,\beta)}$ 之比較.....	71
圖4-8 T-Y法推估 $P_{L(Logistic)}$ 與 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 之比較.....	72
圖4-9 T-Y法推估 $P_{L(Logistic)}$ 與 $P_{L(Reliability)}$ 之比較.....	73
圖4-10 T-Y法推估 $P_{L(Reliability)}$ 與 $P_{L(Bayesian,\beta)}$ 之比較.....	73
圖4-11 HBF法推估 $P_{L(Logistic)}$ 與 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 之比較.....	74
圖4-12 BHF法推估 $P_{L(Logistic)}$ 與 $P_{L(Reliability)}$ 之比較.....	75
圖4-13 HBF法推估 $P_{L(Reliability)}$ 與 $P_{L(Bayesian,\beta)}$ 之比較.....	75
圖4-14 Seed法FS與 $P_{L(Logistic)}$ 之映射函數關係.....	78
圖4-15 Seed法FS與 $P_{L(Reliability)}$ 之映射函數關係.....	79
圖4-16 Seed法FS與 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 之映射函數關係.....	79
圖4-17 Seed法FS與 $P_{L(Bayesian,\beta)}$ 之映射函數關係.....	80

圖4-18 NJRA法FS與 $P_{L(Logistic)}$ 之映射函數關係.....	81
圖4-19 NJRA法FS與 $P_{L(Reliability)}$ 之映射函數關係.....	81
圖4-20 NJRA法FS與 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 之映射函數關係.....	82
圖4-21 NJRA法FS與 $P_{L(Bayesian,\beta)}$ 之映射函數關係.....	82
圖4-22 T-Y法FS與 $P_{L(Logistic)}$ 之映射函數關係.....	83
圖4-23 T-Y法FS與 $P_{L(Reliability)}$ 之映射函數關係.....	84
圖4-24 T-Y法FS與 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 之映射函數關係.....	84
圖4-25 T-Y法FS與 $P_{L(Bayesian,\beta)}$ 之映射函數關係.....	85
圖4-26 HBF法FS與 $P_{L(Logistic)}$ 之映射函數關係.....	86
圖4-27 HBF法FS與 $P_{L(Reliability)}$ 之映射函數關係.....	86
圖4-28 HBF法FS與 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 之映射函數關係.....	87
圖4-29 HBF法FS與 $P_{L(Bayesian,\beta)}$ 之映射函數關係.....	87



表 目 錄

表2-1 全部SPT案例數量統計表.....	22
表3-1 邏輯迴歸分析結果.....	31
表3-2 CRR及CSR之平均值與變異係數.....	44
表4-1 分類矩陣.....	60
表4-2 頻率矩陣.....	60
表4-3 各機率模式對Seed法可信度比較.....	62
表4-4 各機率模式對NJRA法之可信度比較.....	62
表4-5 各機率模式對T-Y法之可信度比較.....	64
表4-6 各機率模式對HBF法之可信度比較.....	65
表4-7 各機率模式對各評估法之可信度比較.....	66
表4-8 液化可能性分類 (Juang et al,2002)	88
表4-9 不同安全係數對應之期望液化機率.....	89

符 號 說 明

SPT ：標準貫入試驗

N ：現地標準貫入試驗打擊數

N_I ：正規劃標準貫入試驗打擊數

τ_{\max} ：最大剪應力

Z ：深度

g ：重力加速度

γ ：土壤單位重

γ_d ：應力折減係數

σ_v ：垂直總覆土應力

σ'_v ：垂直有效覆土應力

P_a ：為相對大氣壓力

ER_m ：為傳遞之能量百分比

CSR ：地震引致之反復剪應力比

CRR ：土壤抗液化強度比

$FC(\%)$ ：細粒料含量

A_{\max} ：地表最大水平加速度

PGA ：地表最大水平加速度

MSF ：規模修正因子

F_L ：安全係數

FS ：安全係數

M ：地震規模

M_w ：震矩規模

M_L ：芮氏地震規模

k_{hc} ：設計水平地震係數



D_{50} ：平均粒徑

P_L ：液化機率

CRR_{lim} ：土壤抗液化強度之下限值

$\beta_0, \beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m$ ：邏輯迴歸係數

β_0^* ：修正後之 β_0

CSR_{Seed} ：Seed法計算地震引致之反復剪應力比

CSR_{NJRA} ：NJRA法計算地震引致之反復剪應力比

CSR_{T-Y} ：T-Y法計算地震引致之反復剪應力比

CSR_{HBF} ：HBF法計算地震引致之反復剪應力比

$Z = CRR - CSR$ ：功能函數

β ：可靠度指數

P_f ：液化機率

μ ：平均值

σ ：標準差

δ ：變異係數

$\Phi(\)$ ：為標準常態累積機率分布函數

$f(x)$ ：變數 x 之機率密度函數

R ：不確定性折減量

$RMSE$ ：均方根誤差

$P_{L(Logistic)}$ ：邏輯式迴歸液化機率

$P_{L(Reliability)}$ ：可靠度模式液化機率

$P_{L(Bayesian, FS)}$ ：基於FS之貝式液化機率

$P_{L(Bayesian, \beta)}$ ：基於 β 之貝式液化機率



第一章 緒論

1.1 前言

土壤液化現象係指在強烈地震的反覆作用力造成砂土層孔隙水壓上升，引致大規模的砂土呈現如液體（流砂）的行為。當疏鬆砂質地盤發生液化時，地上結構物會因地層承载力不足而產生下陷，地中的維生管線或結構物會因浮力而產生過量的或不均勻的下陷或上浮，極易損害結構物、交通設施及土地利用效能，若土層液化發生在都市、港埠之高密度發展地區，常造成嚴重的都市災害。因此，土壤液化是大地震所造成的地變災害中最常見也最具破壞性的型態。1989年的美國Loma Prieta地震（地震規模 $M_w=6.9$ ）、1990年菲律賓Luzon地震（ $M_w=7.1$ ）、1995年日本Kobe地震（ $M_w=6.9$ ）及墨西哥Manzanillo地震（ $M_w=7.6$ ）、1999年土耳其Kocaeli地震（ $M_w=7.4$ ）及台灣921地震（ $M_w=7.6$ ）與2011年日本311大地震（ $M_w=9.0$ ）等都發生嚴重的土壤液化並造成重大破壞。

台灣因位處環太平洋地震帶西側，在菲律賓海板塊和歐亞大陸板塊擠壓作用下，大小地震頻繁，地震災害時有所聞，又台灣西部平原多屬第四紀沖積層，大多為由砂土、粉土與黏土交錯組成的軟弱土層，故在地震作用下，從1900~1995年間多次發生土壤液化現象。1999年9月21日芮氏規模7.3之921地震更在台灣中部地區產生嚴重土壤液化災害，根據地震後各項調查報告及文獻記載，在苗栗縣、台中縣、彰化縣、南投縣、雲林縣及嘉義縣等台灣中部地區，均有地表噴砂、開裂或結構物下陷、傾斜、位移或涵管阻塞或地下管線設施破壞等災情，其中又以員林、南投及霧峰等處液化範圍較大，損失慘重。

921集集大地震的液化案例分布相當廣泛，由內陸平地到濱海地區均可發現液化現象，水平地表加速度由南投名間的989gal到彰濱工業區的121.3gal均有引致液化發生的案例，單一地震包含如此多的案例資料，在世界上實屬難得一見。這些液化案例正可提供國內探討土壤液化問題一個相當好的機會。921地震之後，政府及各民間單位均投入相當多的人力經費進行震後液化問題的探查與研究，本研究以這些豐富的調查資料為基礎，針對現有液化評估方法之適用性、液化安全係數

的機率含意、土壤液化機率等常見的問題進行研究，期望其結果對工程界抗液化工程之設計上之參考及應用。

1.2 研究目的

雖然台灣位於環太平洋地震帶上，每年都會遭遇相當多大大小小的地震，但是實際所遭遇的災害性大地震卻不多，以往也沒有足夠的案例資料建立本土性的液化評估法。因此，目前國內用來評估土壤液化潛能之方法大都是依循國外案例之分析方法(如美國、日本相關規範之評估方法)，但是這些常用的評估方法均屬於經驗法，且各種評估法分析結果各異，各自有其發展背景，其準確性為何，是否適用於台灣的地震及地質環境，均有待進一步的探討。由於各方法在有些情況之評估結果，差異甚大，影響工程造價甚鉅，因此本研究擬利用集集地震案例與世界地震案例資料來驗證各評估方法之適用性，並釐清相關之問題。

傳統土壤液化分析方法，以定值之安全係數判定土壤液化潛能，但是這些定值評估方法所用的參數，均存在著許多的變異性及不確定性。傳統土壤液化分析方法不但無法解釋這些不確定性，也無法量化不同安全係數所隱含之危害程度。以致工程設計上安全係數的選取，多以工程師本身的經驗來判斷，這樣不但不客觀，也常常造成設計上的不經濟(過保守)或不安全(不保守)。

近年來有相當多的學者引進機率統計的方法來評估土壤之液化潛能，此類方法的優點在於，可以將各參數的不確定性及變異性加以量化評估，以液化機率的方式表示土壤液化潛能，而不再只是以定值的安全係數來判斷液化與否，這是未來工程設計的主流方向。因此本研究首先利用統計技術及機率理論分別建立不同機率評估模式，繼者探討各不同機率模式之可信度及適用性，最後建立安全係數與對應之液化機率之映射關係。

1.3 研究內容與流程

本研究第一章為緒論；第二章回顧各種世界上常見之SPT液化評估法，同時介紹本研究分析所用之集集案例與世界案例資料庫；第三章分別以邏輯迴歸分析、

可靠度理論及貝式定理分別建構各不同評估法之機率預測模式；第四章以訊息理論量化各機率模式之不確定性，進而探討其相對可信度及相對保守程度之比較，同時建立安全係數對應之液化機率關係；第五章結論與建議。

綜合以上所述之內容，可將本研究之內容摘要成如下之流程圖。

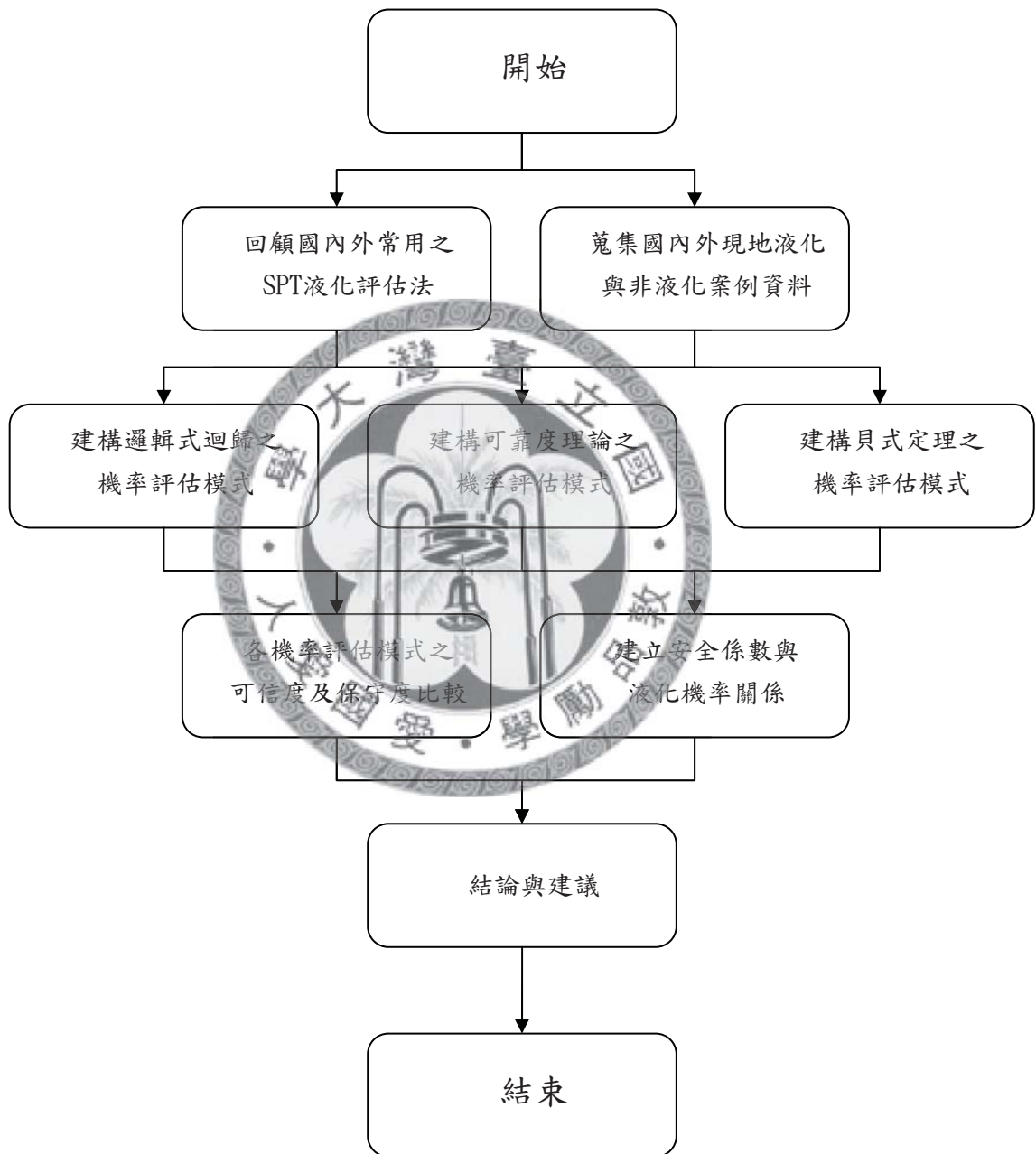


圖1-1 研究分析流程圖

第二章 SPT液化簡易評估法與案例資料庫簡介

2.1 前言

土壤液化係當疏鬆之飽和砂性土壤受到地震力或其他振動力之作用時，土體承受連續性的反覆應力使土體內之顆粒趨向較緊密的排列同時欲將孔隙內之水份排出，有時因無法順利於此瞬間將水份排出，導致顆粒間之應力轉由孔隙水承受，當孔隙水壓消散速率低於孔隙水壓激發之速率時，即造成水壓上升並產生超額孔隙水壓，使土體之有效應力逐漸下降至零或一極小之殘餘值，最後導致土壤顆粒於水中呈懸浮狀如液體一般，此時之土體將失去其原有的抗剪能力而產生連續性的大變形，此即為一般所謂的土壤液化現象。

液化分析根據其機制及模式，主要可分成(1)地盤受震反應數值分析法、(2)室內試驗分析法、(3)現地試驗分析法。地盤受震反應數值分析法可得到較完整的地盤反應結果，但因分析方法較為煩雜，計算工作量較大，參數選取及分析模式亦不容易，所以使用上較不普及。

室內試驗分析法主要以土壤所能承受之應變、應力或孔隙水壓值來定義土壤之抗液化強度。常用之試驗方式包括動態三軸試驗、反覆單剪試驗及反覆扭轉試驗。此方法之優點在於可以得到完整的土壤受力反應，但缺點為試體準備過程複雜、高品質不擾動之土樣不易取得等。

因此，目前工程實務中較常使用的液化評估方法，大多為利用現地試驗資料之簡易經驗法（Simplified Methods，簡稱簡易法），以現地試驗之參數建立土壤抗液化強度，常用的現地試驗參數，包括鑽探標準貫入試驗（Standard Penetration Test,SPT）、圓錐貫入試驗（Cone Penetration Test,CPT）及剪力波速（Shear Velocity, V_s ）。其中SPT標準貫入試驗能直接獲得準確的土壤分類與指數性質資料特性等優點，直到現在以SPT-N值作為評估土壤參數的評估法仍一直被廣泛地使用。由於SPT簡易評估法是台灣工程界最常使用的液化評估法，也是目前世界上發展的最成熟的液化評估法，且現場液化與非液化案例調查資料亦最為詳盡豐富。因此，本研究以SPT簡易評估法為主，因為目前國內工程界及相關規範所採用之液

化評估準則均以SPT-N之評估法為主流，所以SPT評估法之適用性探討對液化工務有非常大的影響性。

2.2 各學者建議之SPT簡易評估法

SPT簡易評估法是累積許多的理論分析、室內及現地試驗與震災案例之綜合研究成果。基本上簡易法包含兩個部份，第一部份就是利用設計基礎時所用之地表最大加速度(Peak Ground Acceleration)，以半經驗之簡易公式估計現地土層在遭遇地震時所承受之反覆剪應力比 (Cyclic Stress Ratio, CSR)；第二部份則是以SPT-N值估計土層之液化阻抗 (Cyclic Resistance Ratio, CRR)，再計算兩者比值 (CRR/CSR)，稱為抗液化安全係數FS，作為土層液化與否的判定標準，當土層的FS < 1，則視為會發生液化；當FS > 1，則視為不會發生液化，這些方法不需要繁雜的理論計算，只要透過簡單公式即可進行土壤液化潛能評估，因此廣為工程界使用。以下將針對目前世界上最具代表性之SPT-N簡易評估法之發展背景與分析流程作介紹。

2.2.1 Seed簡易評估法 (簡稱Seed法，2001 NCEER workshop)

本法首先由Seed與Idriss (1971)提出，Seed et al.(1983)再根據震災案例等經驗提出修正，即考慮平均粒徑(D50)對土層液化潛能之影響；而於1985年Seed等人根據美國西部、阿拉斯加、日本、中國大陸與南美等地區之液化與非液化資料，將D50之影響改以細料含量(Fines Content, FC)作為修正，此法廣泛應用於美國地區，並已納入AASHTO之規範中；之後美國國家地震研究中心(NCEER)於2001年舉辦之研習會，又針對本分析法進行修正，如圖2-1所示，並提出迴歸公式以取代原本查閱圖表之方法，使本法對於工程界之實用性更行提高，並定義現地液化 $(N_1)_{60}$ 上限值為30。

Seed法的優點在於其乃根據震災液化案例之現地土壤行為(液化或未液化)，提出不同地震規模、細粒料含量、現地土層深度土壤修正標準貫入試驗值所訂定的準則，可免除室內試驗時可能因取樣擾動而對土壤抗液化強度造成的影響。

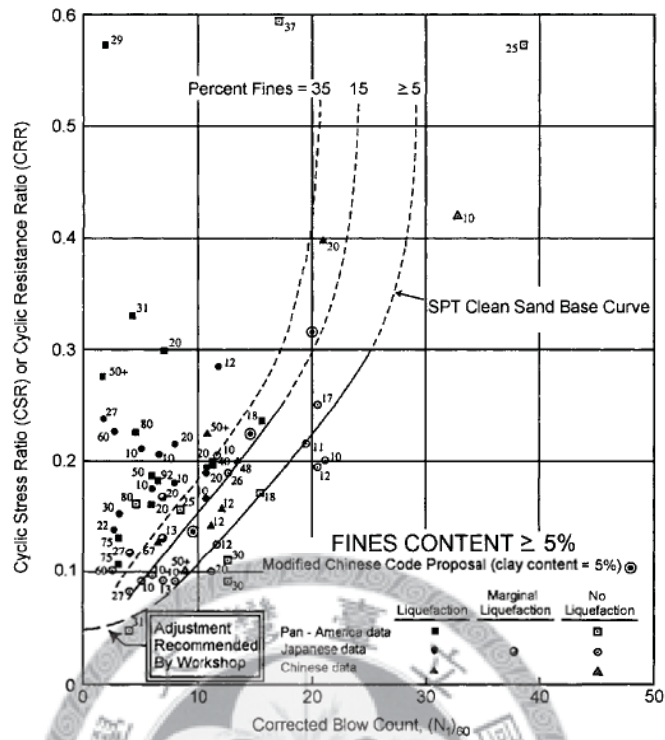


圖2-1 Mw=7.5時，不同細料含量之液化組抗與 $(N_1)_{60}$ 之關係（摘自Youd et al.,2001）

(1) 評估地震引致地層產生之反覆剪應力比

當地震來臨時，土層中之剪應力主要為受到地盤向上傳遞之剪力波影響所致，Seed等人(1971)首先假設在地表水平面深度 h 之土壤為一剛性體(Rigid Body)，即地震作用時地層所承受之最大剪應力將隨深度呈線性增加，但實際上土體受震時，應為可變形之彈性體，故須以一應力折減係數模擬現地受力情形，因此當最大地表加速度為 A_{max} ，作用於深度 h 之實際最大剪應力可由下式(2.1)計算：

$$\tau_{max} = \frac{A_{max}}{g} \times \gamma \times h \times \gamma_d \quad (2-1)$$

τ_{max} ：自地盤反應分析所求得深度 h 處之實際最大剪應力。

g ：重力加速度 (9.81m/sec^2)。

γ :土壤單位重。

γ_d :應力折減係數

Seed等人(1971)經由許多水平地盤反應結果分析，提出應力折減係數 γ_d 應隨深度 z 減小，並隨深度成帶寬之變化，深度愈深帶寬愈寬，並建議分析設計時，可取平均曲線，如圖2-2所示。Blake(1996)根據Seed分析得到之結果提出迴歸建議公式:

$$\gamma_d = \frac{1.000 - 0.4113z^{0.5} + 0.04052z + 0.001753z^{1.5}}{1.000 - 0.4177z^{0.5} + 0.05729z - 0.006205z^{1.5} + 0.001210z^2} \quad (2-2)$$

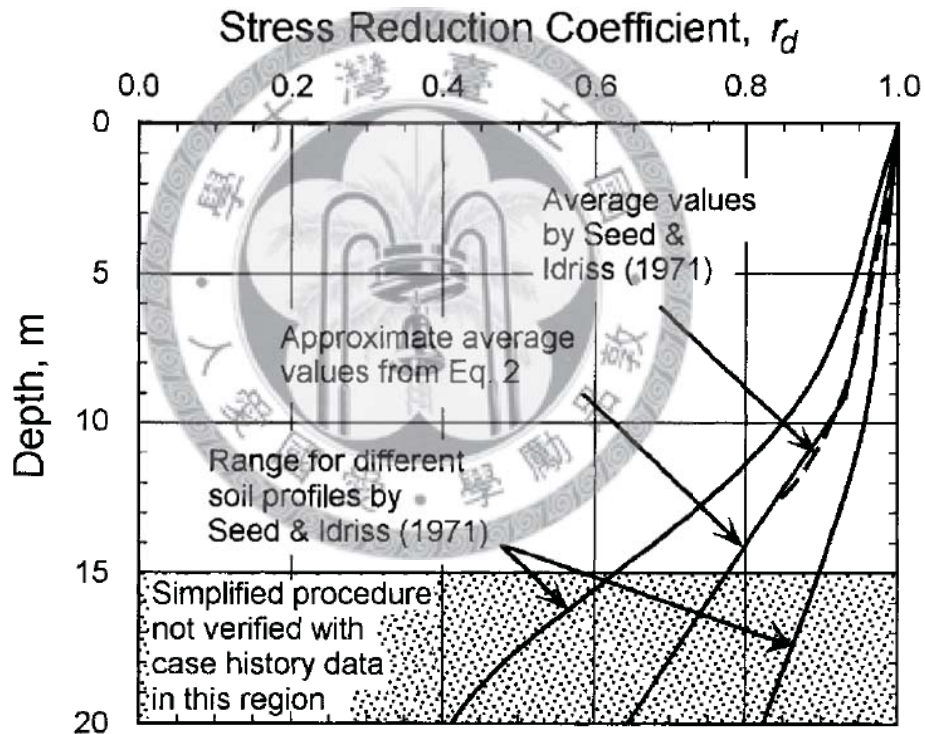


圖2-2 應力折減係數 γ_d 對深度修正之關係曲線 (摘自 Youd et al.,2001)

但實際發生地震時，地盤內所產生之震動波極為複雜，因此Seed等人(1971)建議引致現地土層之平均反覆剪應力比，以最大剪應力之65%求取之。因此，等值平均反覆剪應力比(CSR)為：

$$CSR = \left(\frac{\tau_{ave}}{\sigma'_v} \right) = 0.65 \cdot \frac{A_{max}}{g} \cdot \frac{\sigma_v}{\sigma'_v} \cdot \gamma_d \quad (2-3)$$

σ_v : 垂直總覆土應力

σ'_v : 垂直有效覆土應力

γ_d : 應力折減係數如式 (2-2)

(2) 評估土壤抗液化之反覆阻抗比

當相同土壤承受不同圍壓時，所得之SPT-N值將不同，再加上不同國家於施作標準貫入試驗之鑽桿能量亦不盡相同，因此必須對N值進行覆土壓力修正。並於使用不同分析方法時，亦需考慮其不同之鑽桿能量比，使其符合各模式之基本資料型態，以免導致誤用與分析錯誤。而Seed法之鑽桿能量基準值為60%作修正，經此覆土壓力與鑽桿能量修正後之N值為 $(N_1)_{60}$ ，如式 (2.4) 所示

$$(N_1)_{60} = C_N \cdot N \cdot \left(\frac{ER_m}{60} \right) \quad (2-4)$$

C_N : 覆土壓力修正因子， $C_N = \sqrt{\frac{P_a}{\sigma'_{v0}}} \leq 1.7$ ，其中 P_a 為相對大氣壓力 (1kg/cm^2)

N : 現地標準貫入試驗打擊數

ER_m : 為傳遞之能量百分比 (energy ratio)

2001年美國國家地震工程研究中心(NCEER)研習會中，Youd et al.為改善Seed法查圖之步驟，遂根據圖2.1之趨勢，包含當地震規模 $M_w=7.5$ 時， $(N_1)_{60}$ 與液化的反覆阻抗比($CRR_{7.5}$)之關係，以及不同細粒料含量之修正。最後提出建議修正細粒料含量之迴歸公式，以計算土層之抗液化強度。

$$CRR_{7.5} = \frac{1}{34 - (N_1)_{60CS}} + \frac{(N_1)_{60CS}}{135} + \frac{50}{[10 \cdot (N_1)_{60CS} + 45]^2} - \frac{1}{200} \quad (2-4)$$

式中 $(N_1)_{60CS}$: 為對 $(N_1)_{60}$ 修正細粒料含量為等值淨砂之N值，以下式計算。

$$(N_1)_{60CS} = \alpha + \beta(N_1)_{60} \quad (2-5)$$

$$FC(\%) \leq 5, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1$$

$$5 < FC(\%) \leq 35, \quad \alpha = e^{1.76 - \left(\frac{190}{FC^2}\right)}, \quad \beta = 0.99 + \frac{FC^{1.5}}{1000}$$

$$FC(\%) > 35, \quad \alpha = 5.0, \quad \beta = 1.2$$

若地震規模 M_w 不為 7.5 時，則需以規模修正參數 (Magnitude Scaling Factor, MSF) 如式 (2.6)，將其修正至地震規模 M_w 為 7.5，始能套用於此模式下土層液化阻抗之計算，最後計算該土層之抗液化安全係數如式 (2.7)，其分析流程見圖 2-3。

$$MSF = \left(\frac{M_w}{7.5}\right)^{-2.56} \quad (2-6)$$

$$FS = \frac{CRR_{7.5}}{CSR} \cdot MSF \quad (2-7)$$

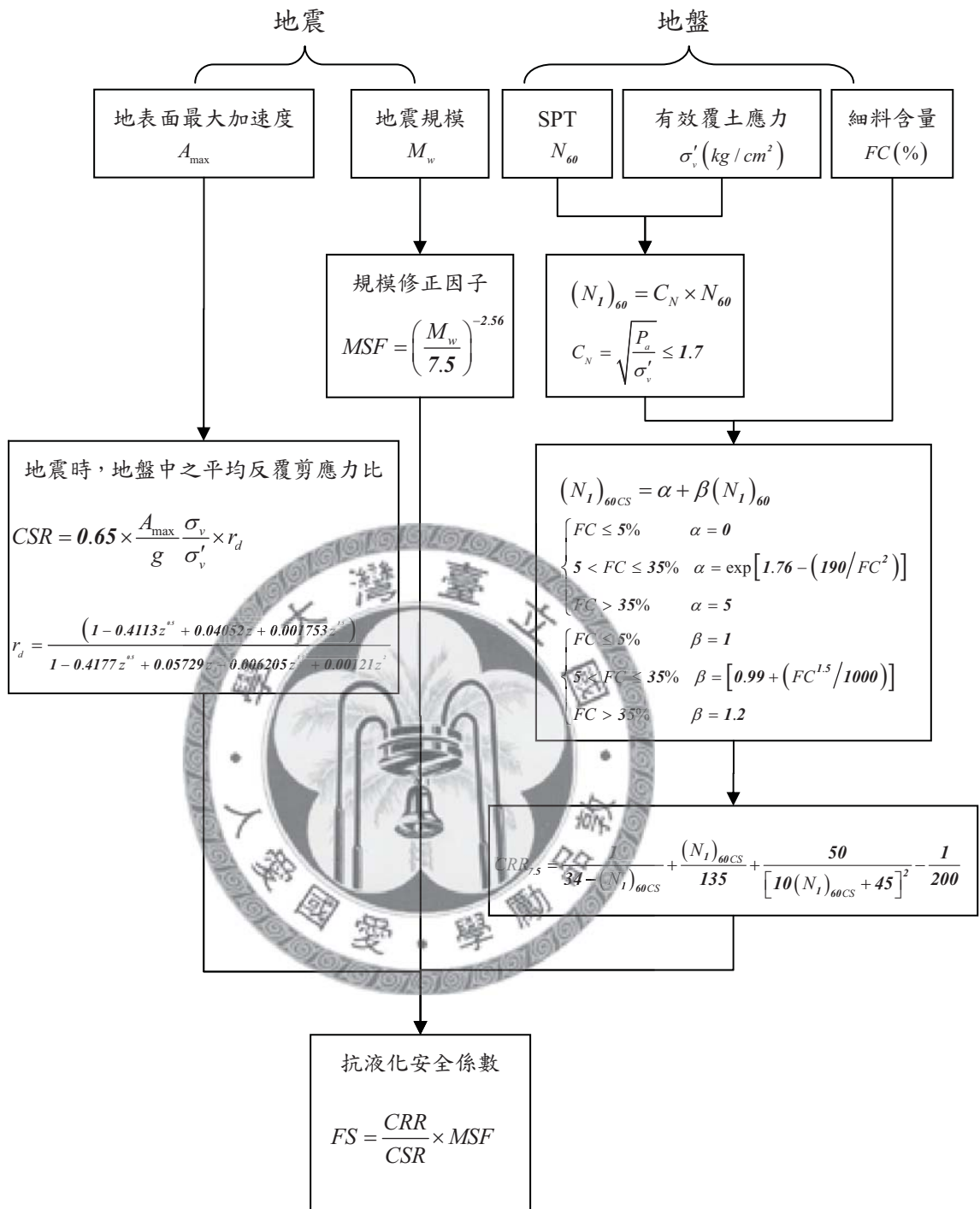


圖2-3 Seed簡易評估法分析流程 (Youd et al.,2001)

2.2.2 新日本道路橋協會簡易評估法（簡稱NJRA法，1996）

本法最早由Iwasaki與Tatsuoka(1978,1980,1982)根據大量高品值的現地取樣試體，於室內進行土壤液化試驗所發展出來的評估方法。1995年日本阪神地震後，日本道路橋協會將該次地震液化經驗與相關研究結果整合後，重新擬定新的土壤液化之分析方法，包括重新探討需要進行液化評估之土壤種類，不同的地震型式，重新訂定不同的抗液化強度的計算式，並加入有關地盤流動之分析設計方法。此法與1990年之版本比較，整個土壤液化評估規範幾乎重新修訂，此法在日本被廣泛應用，主要用於公路及鐵道系統。另外此法之特點，在於以最大反覆剪應力比而非以平均反覆剪應力比作為比較之基準，同時所用之設計地震參數僅需地表最大加速度PGA值，而不需地震規模 M_w ，這些都是與其他方法不同之處，其分析方法概述如下。

(1) 評估地震引致地層產生之反覆剪應力比

首先計算地震力所造成之反覆剪應力比 L 。

$$CSR = L = \frac{\sigma_v}{\sigma'_v} \times k_{hc} \times \gamma_d \quad (2-8)$$

σ_v :垂直總覆土應力

σ'_v :垂直有效覆土應力

k_{hc} :設計水平地震係數，可依「建築耐震設計規範及解說（2005）」所列令

$$k_{hc} = \frac{A_{\max}}{g} \text{ 計算}$$

γ_d :應力折減係數， $\gamma_d = 1 - 0.015z$ ， z 為土層深度

(2) 評估土壤抗液化之反覆阻抗比

現地土層之最大反覆抗液化強度比R之計算式如下：

$$CRR = R = c_w \times R_L \quad (2-9)$$

其中修正係數 c_w ，需考量地震型式之差異。

第一型地震動（遠震） $c_w = 1.0$

$$\text{第二型地震動（近震）} \begin{cases} c_w = 1.0 & (R_L \leq 0.1) \\ c_w = 3.3R_L + 0.67 & (0.1 < R_L \leq 0.4) \\ c_w = 2.0 & (0.4 < R_L) \end{cases}$$

上列 c_w 係數為依據日本定義之地震型式，為運用於台灣地區時，依「建築耐震設計規範及解說（2005）」所列方法，則取 $c_w = 1.0$ 計算。

另外 R_L 依砂質土與礫質土以下式計算：

$$R_L = 0.0882 \sqrt{\frac{N_a}{1.7}} \quad (N_a < 14)$$
$$R_L = 0.0882 \sqrt{\frac{N_a}{1.7}} + 1.6 \times 10^{-6} (N_a - 14)^{4.5} \quad (N_a \geq 14) \quad (2-10)$$

對砂質土：考量細料含量FC（%）

$$N_a = c_1 (N_1)_{72} + c_2 \quad (2-10)$$

N_a ：經細粒料含量修正後之N值

$(N_1)_{72}$ ：經有效覆土壓力與貫入能量至72%等修正後之N值

$$(N_1)_{72} = N_1 \times \left(\frac{ER_m}{72} \right), \quad N_1 = \frac{1.7}{\sigma'_v + 0.7} \times N$$

式中 N ：現地標準貫入試驗打擊數

ER_m ：傳遞之能量百分比。

其中 c_1 、 c_2 修正係數如下：

$$c_1 = \begin{cases} 1 & 0 \leq FC < 10\% \\ \frac{FC + 40}{50} & 10\% \leq FC < 60\% \\ \frac{FC}{20} - 1 & 60\% \leq FC \end{cases}$$

$$c_2 = \begin{cases} 0 & 0 \leq FC < 10\% \\ \frac{FC - 10}{18} & 10\% \leq FC \end{cases}$$



對礫質土：考量平均粒徑 D_{50} (mm)。

$$N_a = \left[1 - 0.361 \times \log \left(\frac{D_{50}}{2} \right) \right] \times N_1 \quad (2-11)$$

評估土層之抗液化安全係數 F_L 如式 (2.12)，其分析流程見圖2-4。

$$F_L = \frac{CRR}{CSR} = \frac{R}{L} \quad (2-12)$$

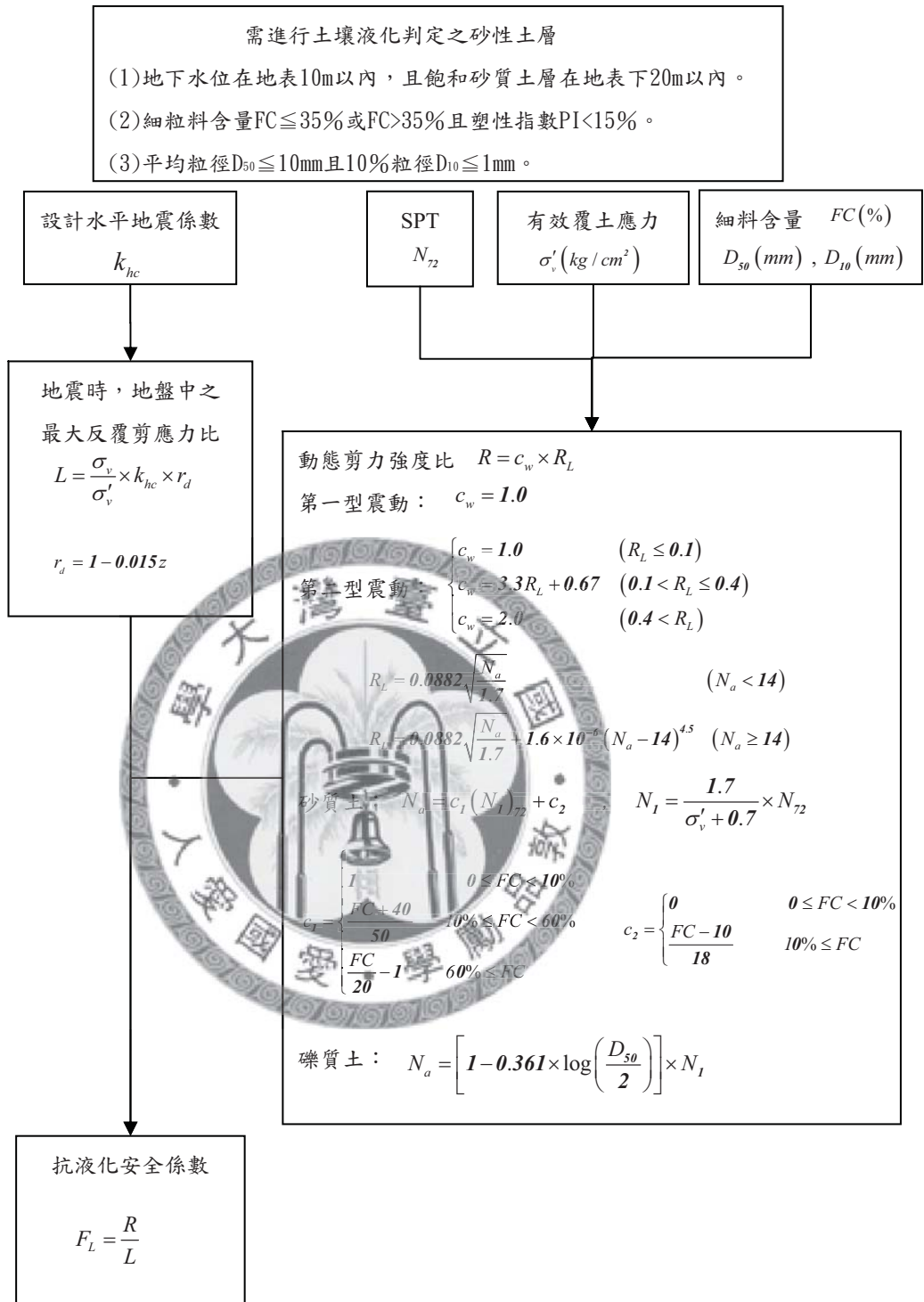


圖2-4 NJRA (1996) 簡易評估法分析流程

2.2.3 Tokimatsu & Yoshimi簡易評估法（簡稱T-Y法，1983）

此法為東京工業大學Tokimatsu與Yoshimi教授於1983年提出，主要是根據日本過去地震液化案例及綜合現地冰凍土樣之液化試驗結果發展而成，有關細料含量對抗液化強度方面之考量最為詳盡。此法略經修改後，近年來已被日本建築學會及原子能委員會接受納為設計規範。此法之特色為在小N值時，所估之抗液化強度與日本道路協會方法相近，在大N值時，則與Seed法相近，其分析步驟概述如下。

(1) 評估地震引致地層產生之反覆剪應力比

設計地震規模M對地面下深度z處之土體，其所造成之平均反覆應力比：

$$CSR = \left(\frac{\tau}{\sigma'_v} \right)_R = 0.1(M-1) \frac{A_{\max}}{g} \times \frac{\sigma_v}{\sigma'_v} \times \gamma_d \quad (2-13)$$

M:地震規模

σ_v :考慮深度土層之總垂直覆土應力

σ'_v :考慮深度土層之垂直有效覆土應力

A_{\max} :水平最大地表加速度

g:重力加速度

γ_d :應力折減係數， $\gamma_d = 1 - 0.015z$ ，z為土層深度

(2) 評估土壤抗液化之反覆阻抗比

$$CRR = \left(\frac{\tau}{\sigma'_v} \right)_L = a \times C_r \times \left[\frac{16\sqrt{N_a}}{100} + \left(\frac{16\sqrt{N_a}}{C_s} \right)^n \right] \quad (2-14)$$

a : 迴歸係數0.45

C_r : 試驗室動力三軸試驗液化強度修正至現地液化強度之修正係數0.57

n : 迴歸係數14

C_s : 剪應變振幅修正係數，一般情況下介於80~90之間，若考慮現場大範圍之液化破壞時，Tokimatsu與Yoshimi建議可取75

其中 $N_a = (N_I)_{80} + \Delta N_f$

$(N_I)_{80}$: 經有效覆土壓力與貫入能量修正為80%之修正N值

$$(N_I)_{80} = \frac{1.7}{\sigma'_v + 0.7} \times N \times \left(\frac{ER_m}{80} \right)$$

N : 現地標準貫入試驗打擊數

ER_m : 傳遞之能量百分比。

ΔN_f : 因細粒料含量而增加之SPT-N修正值

$$\Delta N_f = \begin{cases} 0 & \text{for } FC \leq 5\% \\ FC - 5 & \text{for } 5 < FC \leq 10\% \\ 0.1FC + 4 & \text{for } 10 < FC \end{cases}$$

評估土層之抗液化安全係數 F_L 如式 (2.16)，其分析流程見圖2-5。

$$F_L = \frac{CRR}{CSR} = \frac{\left(\frac{\tau}{\sigma'_v} \right)_R}{\left(\frac{\tau}{\sigma'_v} \right)_L} \quad (2-16)$$

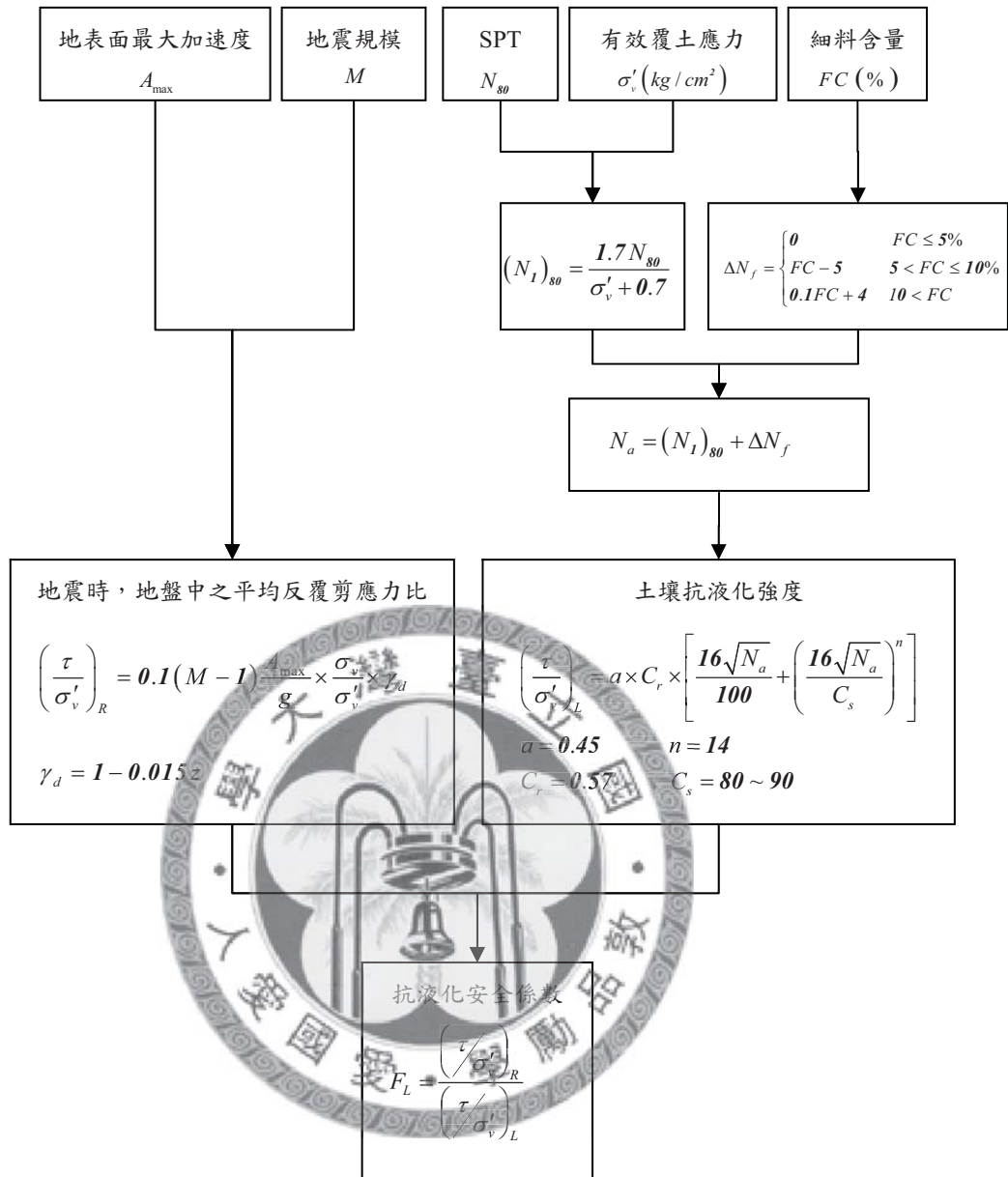


圖2-5 Tokimatsu-Yoshimi (1983) 簡易評估法分析流程

2.2.4 本研究建議之SPT雙曲線函數評估法（簡稱HBF法，2002）

此法為黃俊鴻、陳正興等人在2002年所發表的本土性液化評估法，此法以Seed法的理論為基礎，利用雙曲線函數（Hyperbolic Function）建立一新的臨界液化強度曲線，此法在2003年由楊志文經現地資料驗證後，正確率及誤差值均相當優良，而經本研究驗證後其穩定性及整體表現極佳，且雙曲線函數之參數又可表示出土壤抗液化強度的最低值與可能液化之現地SPT-N參數的上限值，具有相當程度的物理意義，使用上也相當方便。以下為本研究所建議HBF法的五個分析步驟或見圖2-6流程圖所示：

(1) 建立正規化SPT-N值

$$(N_1)_{60} = \frac{1}{\sqrt{\sigma'_v}} \times N \times \frac{ER_m}{60} \quad (2-17)$$

σ'_v : 垂直有效覆土壓力 (kg/cm^2)

N : 現地標準貫入試驗打擊數

ER_m : 為傳遞之能量百分比

(2) 計算細粒料含量FC對SPT-N之影響

$$(N_1)_{60CS} = K_S \times (N_1)_{60} \quad (2-18)$$

$$FC(\%) \leq 10, \quad K_S = 1.0$$

$$FC(\%) > 10, \quad K_S = -0.00009FC^2 + 0.0168FC + 0.841$$

(3) 計算土壤抗液化反覆剪應力CRR

$$CRR = 0.08 + \frac{0.0035 \times (N_I)_{60CS}}{1 - \frac{(N_I)_{60CS}}{39}} \quad (2-18)$$

式中，0.08，為最低之土壤抗液化強度 CRR_{lim}

0.0035，為影響液化強度隨 $(N_I)_{60CS}$ 增加之程度

39，為可能發生液化之 $(N_I)_{60CS}$ 理論上限直

(4) 計算地震引致反覆剪應力CSR

$$CSR = 0.65 \cdot \frac{A_{max}}{g} \cdot \frac{\sigma_v}{\sigma'_v} \cdot \gamma_d \quad (2-19)$$

A_{max} :設計水平最大地表加速度

g :重力加速度

σ_v :垂直總覆土應力

σ'_v :垂直有效覆土應力

γ_d :應力折減係數同式 (2-2)

(5) 計算抗液化安全係數FS

$$FS = \left(\frac{CRR}{CSR} \right) \times MSF$$

$$MSF = \left(\frac{M_w}{7.5} \right)^{-2.56} \quad (2-20)$$

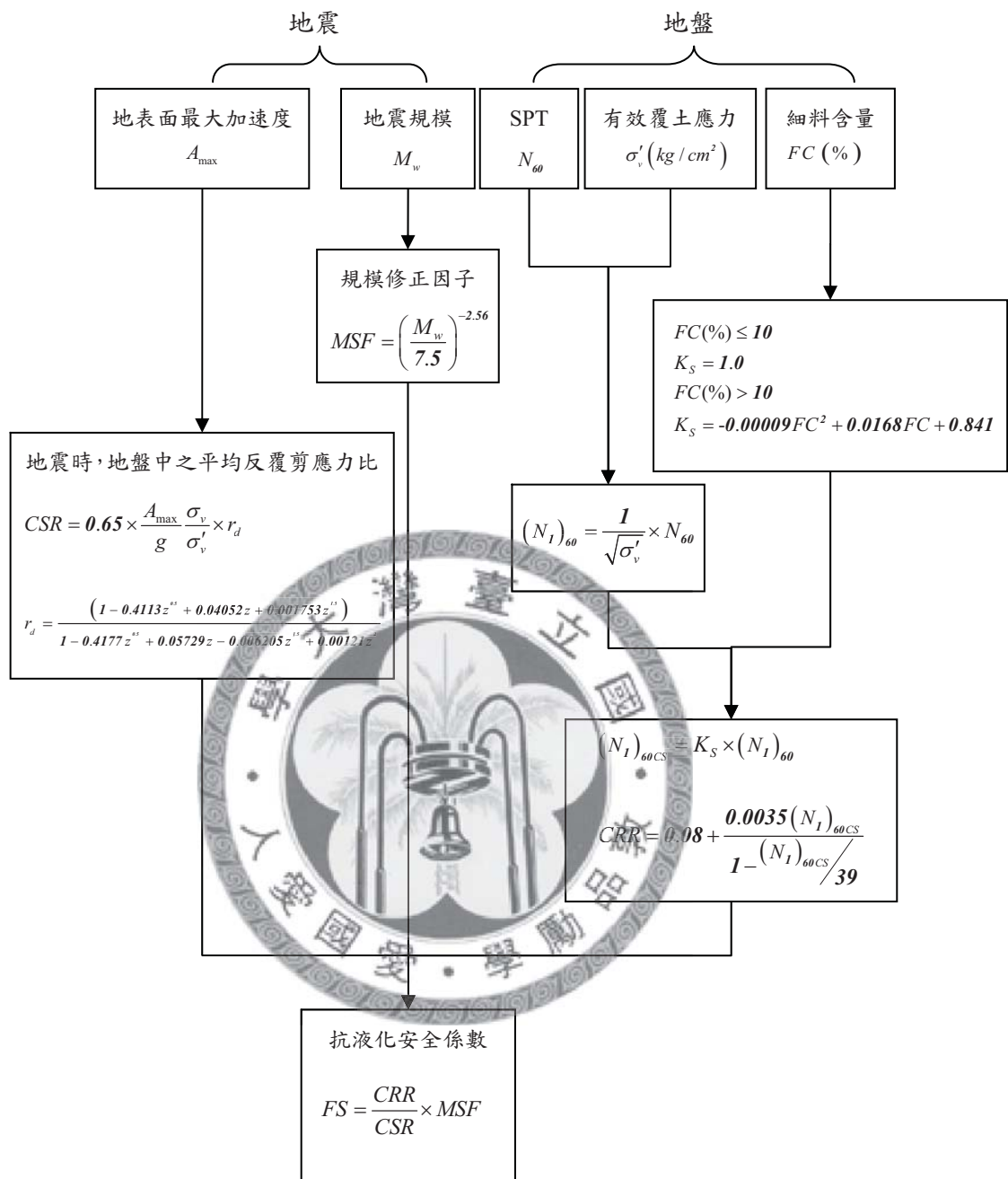


圖2-6 本研究建議之SPT雙曲線函數(2002)評估法分析流程

2.3 現場案例資料庫簡介

2.3.1 國內SPT案例資料

集集地震為台灣百年來難得一見的大地震，在全台各地都引起廣泛的土壤液化現象，其中又以中部地區最多，震後政府與民間研究單位均投入大量資源進行調查研究，尤其著重在液化地點與非液化地點之地質鑽探調查與分析。本研究所蒐集之案例資料，即為集集地震後從各研究單位、工程事業主管機關與工程顧問公司蒐集而來的調查資料，而這些鑽探資料有些是震前鑽孔有些是震後鑽孔。其中液化案例有178組，非液化案例有124組，總計有302組，相關資料可詳見黃俊鴻與楊志文(2001)與黃俊鴻等人(2002)，亦可參考附錄A。集集地震液化與非液化點資料具有下列特色：

- (1) 芮氏地震規模 $M_L=7.3$ ，相當於震矩規模 $M_w=7.6$ ，與各種液化評估方法所採用標準臨界液化強度曲線之地震規模 $M=7.5$ 非常相近，因此可避免因地震規模修正因子(MSF)轉換所造成之誤差。另外台灣中部地區有相當密之強地動觀測站，因此液化與非液化地點之地表加速度值可直接引用鄰近測站收錄到的地震記錄資料，無需以誤差甚大之加速度衰減率來估計，因此正確性可能較高。
- (2) 調查地點之鑽孔資料與土壤粒徑分佈曲線多且詳盡，目前世界上尚無單一地震、單一地區有如此詳盡的資料。另外中部地區的南投、霧峰一帶的強地動測站所量測到之最大地表加速度高達 $0.7g\sim 1.0g$ ，屬於少見的近斷層近震源資料，可有助於瞭解在高地震力作用之下，土壤的抗液化行為。
- (3) 案例資料顯示高細料含量之液化土甚多，為此次地震之一大特色，可充分彌補以往文獻資料較缺乏高細料含量案例之缺點，因為國外案例資料多為乾淨砂之案例，所以這方面的研究也比較缺乏，因此集集案

例資料正好可以補充這方面的不足，進而更加了解細料含量對土壤液化行為之影響。

2.3.2 國外SPT案例資料

另外本研究也蒐集到了許多國外地震的案例，包括Cetin et al.(2000)所蒐集的156組案例資料以及Youd et al.(1997)所蒐集的367組較完整的案例資料。但是由於Youd的資料與Cetin的資料有相當程度之重覆性，所以本研究僅採用Youd之案例資料，其中液化案例有195組，非液化案例有172組，總計有367組。國內外案例合併起來，共有液化案例有373組，非液化案例有296組，總計有669組。整個資料數量之分類統計見表2-1。

表2-1 全部SPT案例數量統計表

案例來源	液化案例數	非液化案例數	案例總數
台灣集集地震 (1999)	178	124	302
Youd et al. (1997)	195	172	367
總計	373	296	669
	669		

全部案例資料之細料含量頻度分佈見圖2-7，國外案例資料以FC=0~10的乾淨砂案例資料最多，而國內案例則以FC=10~50的案例資料較多。可能液化土層之深度分佈見圖2-8，國外案例之可能液化深度多數位於地表下5m以內，而國內案例可能液化深度比國外案例稍深。地下水位深度之分佈見圖2-9，國外案例之地下水位深度多於位地下3m內，與國內液化案例相似。地表最大加速度值分佈見圖2-10，國外案例之地表最大加速度值介於0.1~0.6，其中大部分以0.1~0.2居多，而國內案例則高地震力比例較多。

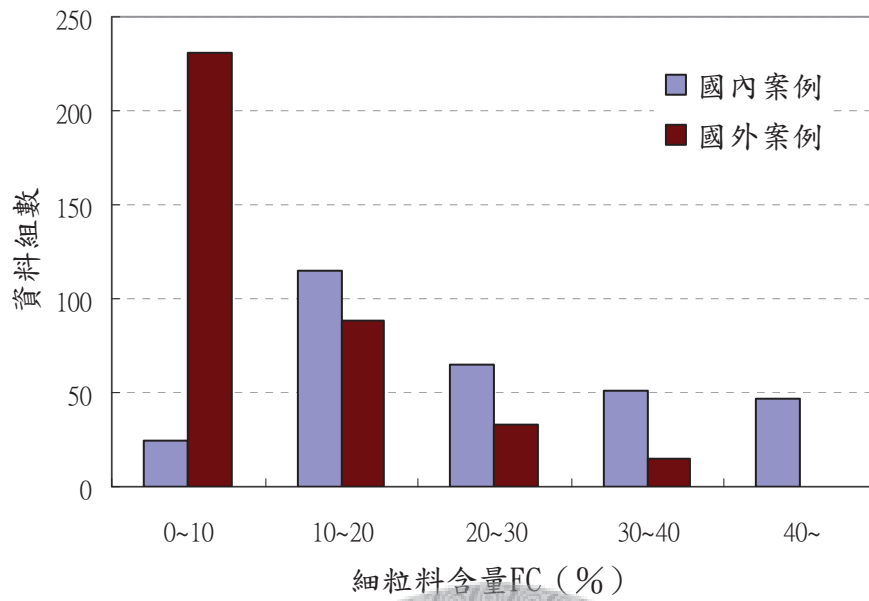


圖2-7 國內外案例資料之細粒料含量FC之分布圖

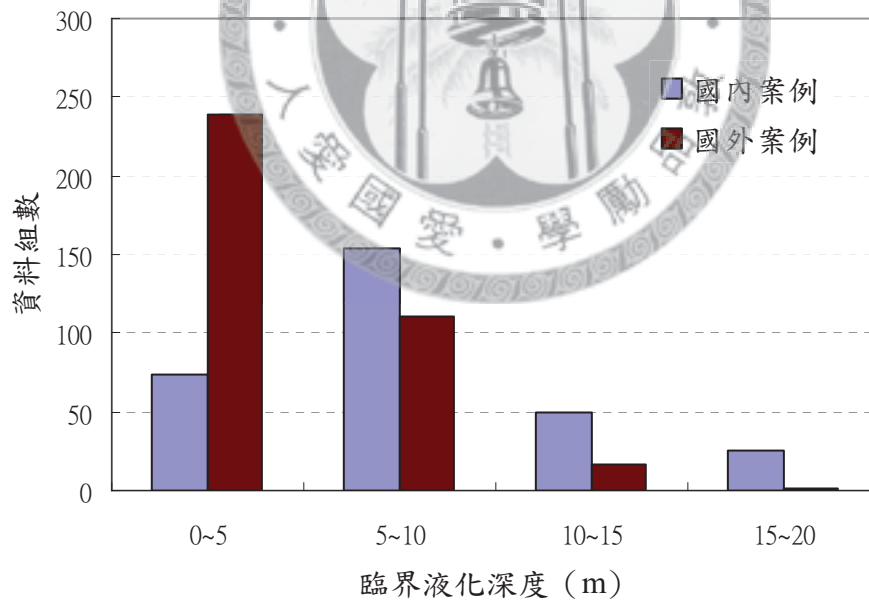


圖2-8 國內外案例資料之臨界液化深度之分布圖

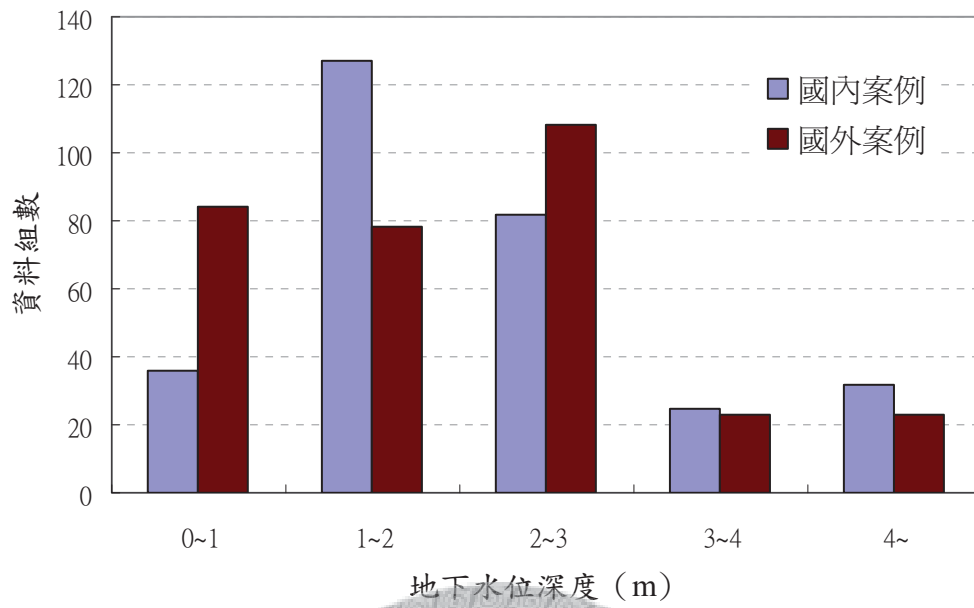


圖2-9 國內外案例資料之地下水位深度之分布圖

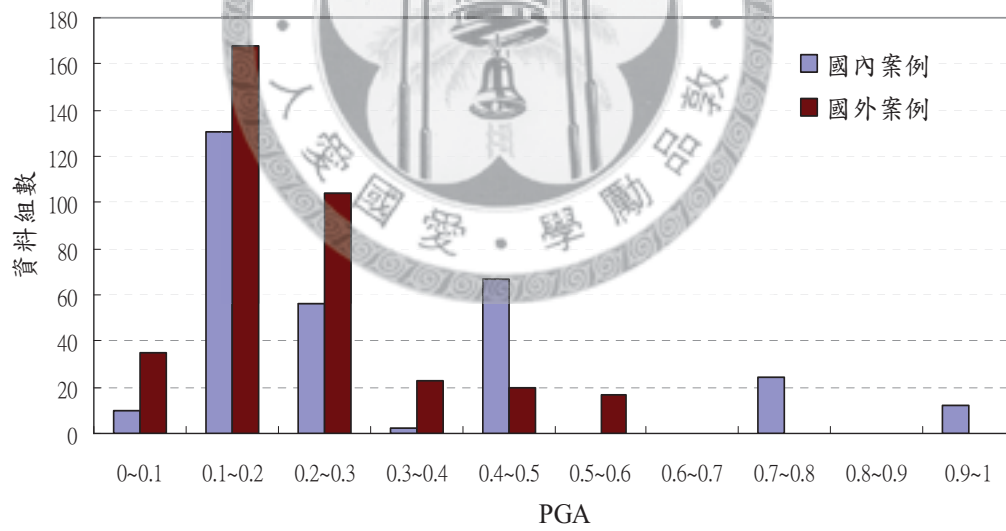


圖2-10 國內外案例資料之最大地表加速度值之分布圖

第三章 土壤液化機率評估模式

3.1 前言

工程上一般習慣以安全係數 (Factor of Safety, FS) 來表示工程的安全性，FS 常為抵抗力與作用力的比值，但抵抗力與作用力的估算方法及其各種相關條件參數，通常多處於不確定的情況。不確定性來源主要可分為兩大類：其一為模式的不確定性，評估模式大多來自於理論或實驗數據推導而來，推導過程中，或多或少會設定某些假設條件，此種假設與現實世界存在差距，故實際應用時會有誤差產生。其二為參數的不確定性，有些評估模式的參數在實際應用時並不易或無法獲得，或者透過實驗或現地試驗可獲得參數，但其參數值並非一固定值，會受到時間與空間變異影響。因此如何適當考量及處理這些不確定卻是有待解決及研究的課題。

目前工程實務上廣為採用之 SPT 液化簡易評估法，其發展背景各異、保守程度不一，常令工程師在液化潛能評估時無所適從。因此，若能運用統計技術及機率理論，建立一合理之液化機率評估模式，不但可據以推估液化發生之可能性，作為液化風險分析之基礎；更可藉以瞭解各液化評估法之適用性及其相對保守程度。

3.2 邏輯式迴歸機率模式

3.2.1 介紹

邏輯式 (Logistic Model) 迴歸係社會科學領域廣為應用之統計技術之一，適用於二元變數資料的重要迴歸方法，一般迴歸模式無法處理此種類別變數資料 (如只有液化與非液化兩種結果)，而邏輯迴歸在處理這類問題上卻相當成功。此方法在 1988 年首先由 Liao 等，利用 logistic regression model 處理現地液化及非液化案例資料，建立不同液化機率之液化強度曲線，該法在學術界及工程界多年來已被廣泛重視及應用，不但可用來瞭解簡化分析法中判別液化與否之臨界曲線所對應之

土壤液化機率高低，並能建立簡易分析法計算所得之安全係數FS與液化機率 P_L 之映射函數關係 (Juang,2002、Huang,2008)。

邏輯迴歸機率是一種統計技術，運用此分析法之前，必須先對世界上發生過的地震液化區內之土層進行液化與否的分析，本研究所蒐集到的國內外液化與非液化案例資料庫，正好可以用來做預測土壤液化機率的相關研究。

3.2.2 分析原理

假設地震區每組液化與非液化資料皆可以X、Y二個變數來表示，X係解釋變數向量 (Vector of Explanatory Variables)，X可以表示為 $X = [X_1, X_2, X_3 \dots X_m]^T$ ，在此為影響土壤液化的因素，包括地震力參數及土壤特性參數；Y則為指示變數，在此則定義發生液化時， $Y=1$ ，液化未發生時， $Y=0$ ，因Y為二分類變數，因此可採用邏輯迴歸模式。液化機率之迴歸分析，乃係以可資利用之液化或未液化案例資料庫，去建立m個解釋變數為函數的液化條件機率，若 $P_L(X)$ 表示在X條件下，土壤會發生液化之機率，即 $Y=1$ 之機率，若m個解釋變數X已給定，則Y之期望值即為條件機率，可以表示為

$$P_L(X) = P[Y = 1|X] = E[Y|X] \quad (3-1)$$

因為液化機率 (P_L) 必須介於0~1之間，所以必須藉由logistic model將 P_L 之值轉換成對應於 $-\infty$ 到 ∞ 之單調變化函數 Q_L ，即

$$Q_L(X) = \text{logit}(P_L) = \ln\left(\frac{P_L}{1-P_L}\right) \quad (3-2)$$

若假設 Q_L 為解釋變數之線性函數 $Q_L = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 \dots \beta_m X_m$ ，將式 (3-2) 轉換後，液化機率可表為

$$P_L = \frac{1}{1 + \exp(-Q_L)} = \frac{1}{1 + \exp[-(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 \cdots \beta_m X_m)]} \quad (3-3)$$

如此即可對X變數進行線性迴歸，式中 $\beta_0, \beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m$ 為迴歸係數，並以統計學中常用之最大概似估計法（Maximum Likelihood Estimation, MLE），將現場液化與非液化案例資料，代入概似函數（Likelihood Function） l 式（3-4），透過模型以最大機率再現樣本找出使 l 為最大時的迴歸係數 $\beta_0, \beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m$ 。

$$l = \prod_{i=1}^n [P_L(X_i)]^{Y_i} [1 - P_L(X_i)]^{1-Y_i} \quad (3-4)$$

有關最大概似估計法之理論可參考相關統計學解說書籍或亦可參見附錄B。

3.2.3 預測準確性評估

為評估邏輯迴歸模式之預測準確性，最直接的方式為可藉由液化案例及非液化案例之判斷成功率或失敗率指標來瞭解各液化評估方法之適用程度。若以邏輯迴歸式的預測機率 $P_L \geq 0.5$ 視為預測液化事件的判別指標，則預測液化（非液化）案例之準確率可定義如下：

$$\text{預測液化準確率} = \frac{\text{判定為液化之案例數}}{\text{總液化案例數}} \quad (3-5)$$

$$\text{預測不液化準確率} = \frac{\text{判定為非液化之案例數}}{\text{總非液化案例數}} \quad (3-6)$$

$$\text{綜合預測準確率} = \frac{\text{判定為液化及非液化之案例數}}{\text{總案例數}} \quad (3-7)$$

3.2.4 本研究之分析過程

(1) 邏輯式迴歸

首先將本研究所蒐集世界及921集集地震之669組現場案例資料庫分為二類，一類為液化組（Y=1），一類為非液化組（Y=0），並依各簡易評估法進行資料庫之整理。國內外有關邏輯迴歸在土壤液化應用方面的相關文獻上，主要係利用正規化標準貫入試驗值為控制CRR之主要土壤特性參數，再搭配適當之地震力參數為解釋變數X，進行邏輯迴歸分析。Juang et al.,2002以Seed法為基礎， $(N_I)_{60CS}$ 及 $\ln CSRN$ 為解釋變數之邏輯迴歸式可以表示如下：

$$P_L = \frac{1}{1 + \exp\left[-\left(\beta_0 + \beta_1 (N_I)_{60CS} + \beta_2 \ln CSRN\right)\right]} \quad (3-8)$$

雖然簡易經驗分析法是累積許多的理論分析發展而來，但由於各個方法發展背景不盡相同，因此所使用參數、分析流程等也互有差異，然而 $(N_I)_{60CS}$ 及 $CSRN$ 參數估計值本質上存在著不同程度的不確定性及保守性。

因此，為了使邏輯迴歸式對資料樣本具更深一層的解釋能力，本研究除了考慮 $(N_I)_{60CS}$ 、 $\ln CSRN$ 兩參數外，經研究加入其他參數進行迴歸分析結果，以 $(N_I)_{60CS}$ 、 $\ln CSRN$ 及細粒料含量（FC）及臨界深度（depth）等4個隨機變數進行迴歸分析有較佳的判別率，因此採用如下之迴歸式進行分析。

$$P_L = \frac{1}{1 + \exp\left[-\left(\beta_0 + \beta_1 (N_I)_{60CS} + \beta_2 \ln CSRN + \beta_3 depth + \beta_4 FC\right)\right]} \quad (3-9)$$

由於邏輯式迴歸有一定的複雜度，一般除了以相關統計軟體或數學軟體來計算外，亦可利用Microsoft Excel中的「規劃求解」功能來進行邏輯迴歸係數之求解。

以下為最大概似估計法求解迴歸係數之相關步驟：

步驟一：依據機率理論，若以液化案例（ $Y=1$ ）之機率反應以 P_L 表示，未液化案例（ $Y=0$ ）之機率反應以 $(1-P_L)$ 表示，則基於每一案例為相互獨立性的假設，上述觀察到的總案例數之聯合機率反應式可以為每一個現場案例機率反應式的連乘積，於是最大概似函數 l 可表如下

$$l = \left[\underbrace{(P_L)_1 \times (P_L)_2 \times \cdots \times (P_L)_n}_{Y=1} \right] \left[\underbrace{(1-P_L)_1 \times (1-P_L)_2 \times \cdots \times (1-P_L)_m}_{Y=0} \right] \quad (3-10)$$

$$= P_L^n (1-P_L)^m$$

n ：液化案例數

m ：非液化案例數

步驟二：取最大概似函數之自然對數，以方便找最大概似之估計值。

$$\begin{aligned} \ln l &= \ln \left[P_L^n (1-P_L)^m \right] \\ &= \left[\ln(P_L)_1 + \ln(P_L)_2 \cdots + \ln(P_L)_n \right] \\ &\quad + \left[\ln(1-P_L)_1 + \ln(1-P_L)_2 \cdots + \ln(1-P_L)_m \right] \end{aligned} \quad (3-11)$$

步驟三：將最大概似函數拆解為式（3-11）之形式後，即可建立Excel試算表相關欄位之設定。利用Microsoft Excel中的「規劃求解」功能計算出使最大概似函數之自然對數函數式（3-11）為最大時的迴歸係數。

圖3-1為本研究所使用之Excel程式的視窗畫面，其中「規劃求解」參數設定部分，將最大概似函數之自然對數設定為目標函數，如此一來即可計算出最大機率樣本的迴歸係數估計值。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Seed method									
	number	depth	FC	(N ₁) _{60CS}	CSR _N	ln(CSR _N)	Y	P _L	Y=1, P _L or Y=0, (1-P _L)	ln(P _L) or ln(1-P _L)
2										
3	1	6	61	13.40	0.484	-0.726	1	0.999	0.999	-0.001
4	2	4.2	62	8.60	0.445	-0.810	1	1.000	1.000	0.000
5	3	4.2	24	7.50	0.404	-0.906	1	0.998	0.998	-0.002
6	4	9	42	13.40	0.784	-0.243	1	1.000	1.000	0.000
670	668	5.6	13	4.04	0.071	-2.639	0	0.213	0.787	-0.239
671	669	3	1	10.80	0.146	-1.921	0	0.340	0.660	-0.415
672									Σ=ln(ε)	-190.819
673									β ₀	10.58359
674									β ₁	-0.26763
675									β ₂	4.31622
676									β ₃	-0.04226
677									β ₄	0.06271

圖3-1 Microsoft Excel程式視窗畫面

(2) 邏輯迴歸機率式之簡化

土壤液化分析而言，一般以地表下20m深度定義為液化可能範圍，以及細粒料含量50%以上則不考慮土壤液化之可能性。而中位數為統計學上可用來表示樣本集中趨勢的指標，因此，為後續分析及應用上之方便，進一步將式(3-9)中的 d 與 FC 對模式的影響，分別以各該參數之中位數（即 $d = 10$ 、 $FC = 25$ ）加以簡化計算。依據特性參數所對應之簡化法，以下將這些邏輯迴歸數學式分別稱為Seed形式（form）、NJRA形式、T-Y形式及HBF形式，即

$$\text{Seed Form } P_L = \frac{1}{1 + \exp\left[-\left(\beta_0^* + \beta_1(N_1)_{60CS} + \beta_2 \ln CSR_{Seed}\right)\right]} \quad (3-12a)$$

$$\text{NJRA Form } P_L = \frac{1}{1 + \exp\left[-\left(\beta_0^* + \beta_1(N_a)_{72} + \beta_2 \ln CSR_{NJRA}\right)\right]} \quad (3-12b)$$

$$\text{T-Y Form } P_L = \frac{1}{1 + \exp\left[-\left(\beta_0^* + \beta_1(N_a)_{80} + \beta_2 \ln CSR_{T-Y}\right)\right]} \quad (3-12c)$$

$$\text{HBF Form } P_L = \frac{1}{1 + \exp\left[-\left(\beta_0^* + \beta_1(N_1)_{60CS} + \beta_2 \ln CSR_{HBF}\right)\right]} \quad (3-12d)$$

其中 $\beta_0^* = \beta_0 + 10\beta_3 + 25\beta_4$ 為各迴歸參數對應各形式之計算值，經簡化後之邏輯式仍然保有極佳之判別率。各形式之邏輯迴歸分析結果與機率液化強度曲線列於表3-1及圖3-2~圖3-5所示。由圖中可知不同簡易評估法之CSR曲線在不同範圍對應不同之液化機率。亦即在不同N值區間，各評估法所得液化風險是不一樣的，但值得注意的是各簡易法之臨界強度曲線大致在 $P_L = 0.5$ 等值線下方，因此各評估法皆有一定程度之保守性。



形式	迴歸係數					預測液化準確率	預測不液化準確率	綜合預測準確率
	β_0 (β_0^*)	β_1	β_2	β_3	β_4			
Seed Form	10.58 (11.73)	-0.268	4.316	-0.042	0.063	0.912 (0.93)	0.831 (0.79)	0.876 (0.87)
NJRA Form	7.871 (8.63)	-0.237	4.221	-0.019	0.038	0.887 (0.92)	0.797 (0.76)	0.848 (0.85)
T-Y Form	11.149 (12.46)	-0.33	4.358	-0.037	0.067	0.898 (0.92)	0.807 (0.76)	0.858 (0.85)
HBF Form	10.53 (11.1)	-0.261	4.402	-0.036	0.037	0.895 (0.93)	0.835 (0.82)	0.869 (0.88)

註：1. 液化機率 $P_L \geq 0.5$ 視為液化事件。

2. 括號內為簡化後之計算值。

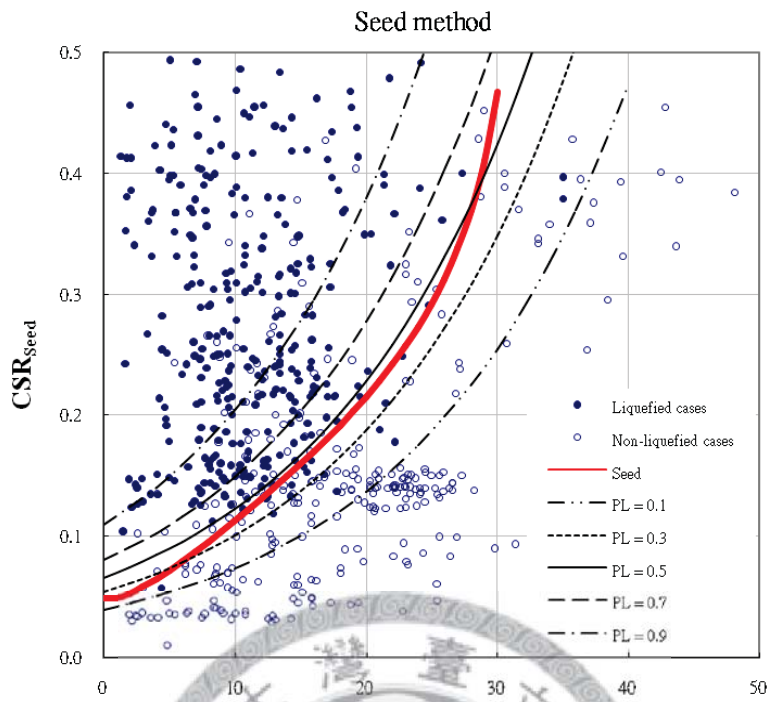


圖3-2 Seed形式之邏輯迴歸機率液化強度曲線

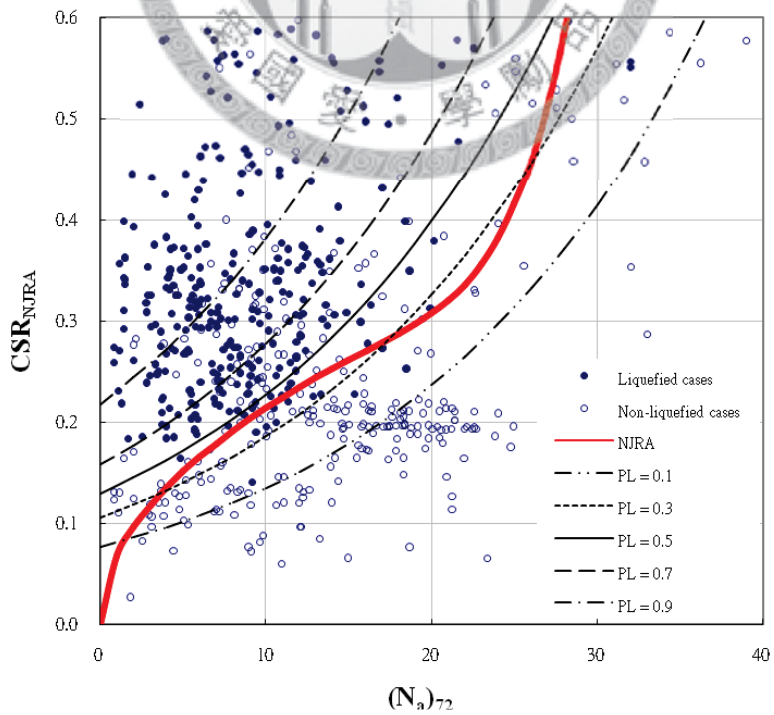


圖3-3 NJRA形式之邏輯迴歸機率液化強度曲線

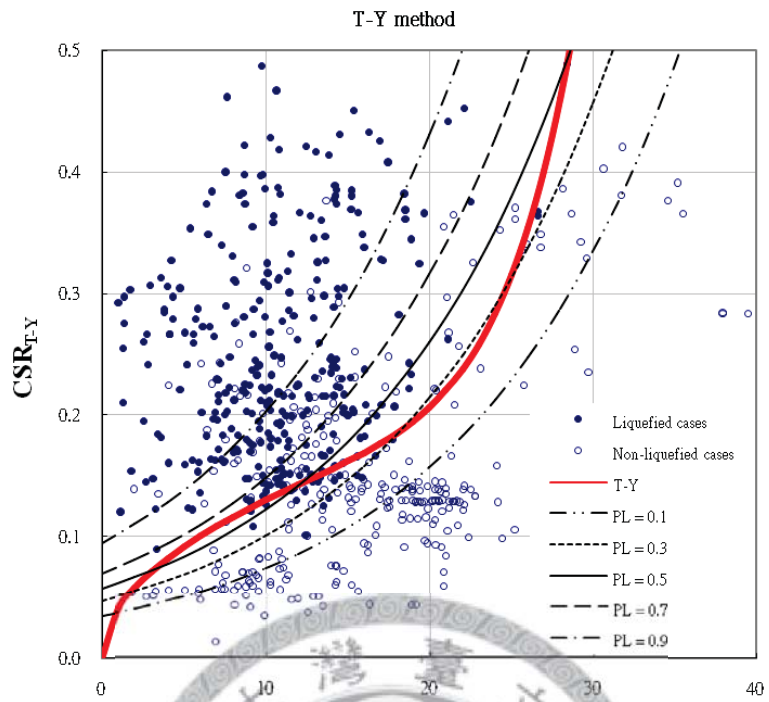


圖3-4 T-Y形式之邏輯迴歸機率液化強度曲線

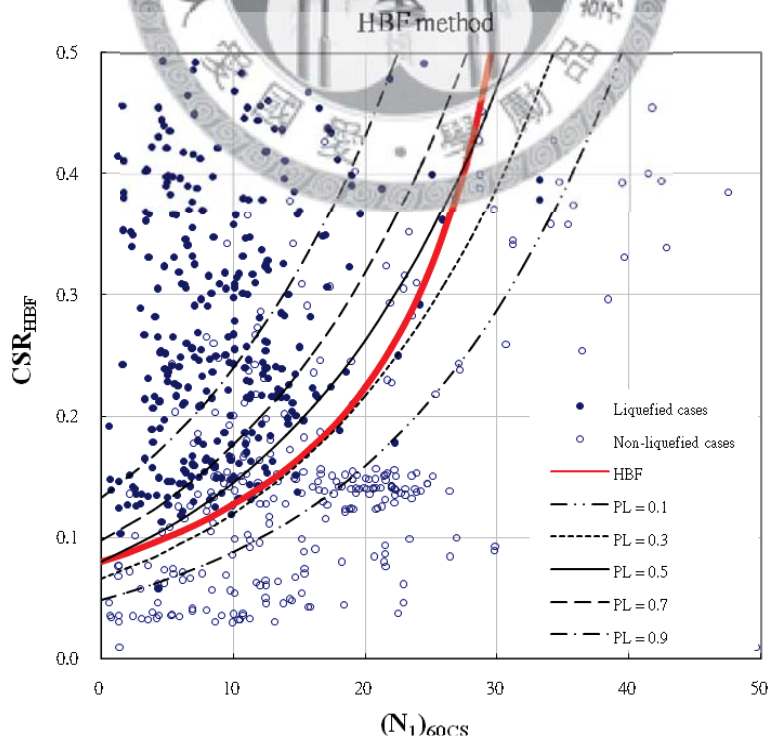


圖3-5 HBF形式之邏輯迴歸機率液化強度曲線

3.3 可靠度理論模式

3.3.1 介紹

由於傳統安全係數設計法並未考慮到構件強度與作用荷載的變異性，因此某一安全係數值到底代表多大的安全性或失敗率，不得而知。可靠度分析(Reliability Analysis)就是在此一背景下所發展出來的設計方法，此方法需有構材強度與作用荷載的詳細調查資料，求出其統計指標，如平均值與標準差，再利用各種機率理論，如：一次二階矩法(First Order and Second Moment, FOSM)，求出系統之可靠度指標、安全係數與失敗機率的關係。

由於早期工程上所得到的數據並不多，故可靠度分析並不可行，但隨著科技的進步，各種材料強度試驗資料的不斷累積與不同作用荷載調查資料的增多，使得可靠度分析方法變得較為可行。這些發展促使許多先進國家之工程設計規範，逐漸從傳統之安全係數設計法演變成以可靠度分析法為基礎。

在土壤液化的相關可靠度分析之研究方面，Haldar and Tang (1979)考慮液化分析中各種主要影響因素的變異性，利用線性一次二階矩的方法，建立土壤液化的機率模式，此類方法引用早期土壤液化的分析模式，但是所用的參數與分析模式，現今很少使用。由於機率分析結果的合理性，與統計指標所採用資料的質與量有關。於是Yang et al.(2004)以邏輯迴歸模式為基礎，再利用一次二階矩法建立土壤液化機率分析模式，求得安全係數與液化機率之關係。

本研究以Yang et al.(2004)所建議之液化可靠度分析架構進行分析，本研究之分析過程茲摘述於后。

3.3.2 分析原理

在土壤液化的分析領域，以CSR表示地震引致的某層土壤之反覆剪應力比(Cyclic Stress Ratio)，以CRR表示該層土壤之抗液化強度(Cyclic Resistance Ratio)，則可以 $Z = CRR - CSR$ 表示土壤液化的功能狀態，稱之為液化功能函數。若 $Z = CRR - CSR < 0$ ，屬於失效狀態，土壤會發生液化，若 $Z = CRR - CSR > 0$ ，則屬於

可靠狀態，土壤不會發生液化。由於CSR、CRR存在著變異性，因此可視為隨機變量，液化功能函數Z自然也是一個隨機變量，所以是否會發生液化並非會與不會簡單判定，而只能以一定的機率發生。

計算液化機率最準確的作法，當然是在CRR、CSR等隨機變量之機率密度分布函數已知的情況下，求得功能函數Z的機率分布，然後再求解液化發生機率。但實際上，需要考慮的因素很多，很難精確地的掌握CRR、CSR等之機率分布，而且求解液化機率時，需進行複雜的多重積分，並不容易，若能找到簡化的方法來分析液化的機率，在工程實務上的應用才能較為方便。

一次二階矩模型就是在此一背景下所發展出來的簡化計算方法，對於一些基本變量(如CRR、CSR)很難找到它們的之機率分布，但它們的統計參數，如平均值和標準差，常常很方便地求得，因此一次二階矩的方法是用隨機變量的平均值和標準差來求得它們的可靠度指標 β ，進而求取土壤液化機率，這樣就可以避免複雜的多重積分過程來進行精確機率計算的困難。

根據統計學原理，假設CRR (R) 和CSR (S) 均為常態分布且相互獨立時，則功能函數 $Z = R - S$ 也是常態分布，其機率密度函數為 $f_z(Z)$ ，累積機率函數為 $F_z(Z)$ 。於是土壤液化(即 $Z < 0$)的機率 P_f 為

$$P_f = P(Z < 0) = \int_{-\infty}^0 f_z(z) dz = F_z(0) \quad (3-13)$$

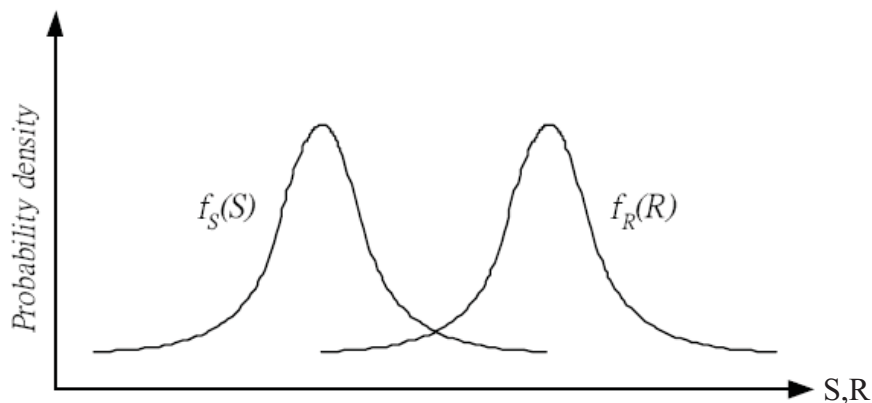


圖3-6 CRR(R)與CSR (S) 機率密度分佈函數示意圖

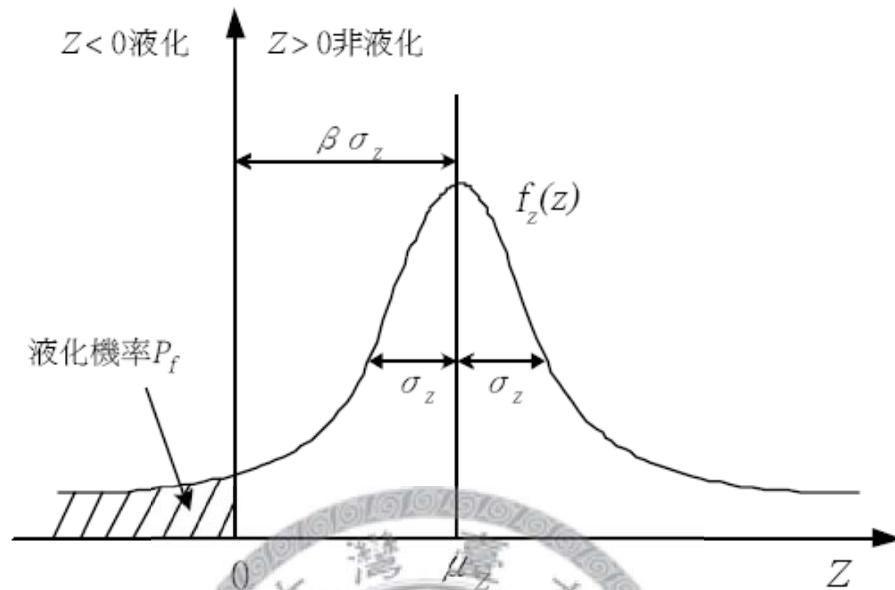


圖3-7 功能函數Z之機率密度分佈函數示意圖

圖3-6中若CRR和CSR的平均值和標準差分別為 μ_{CRR} 、 μ_{CSR} 和 σ_{CRR} 、 σ_{CSR} ，依據一次二階矩之原理，則功能函數Z的平均值 μ_Z 、標準差 σ_Z 和變異係數 δ_Z 分別為

$$\mu_Z = \mu_{CRR} - \mu_{CSR} \quad (3-14)$$

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_{CRR}^2 + \sigma_{CSR}^2} \quad (3-15)$$

$$\delta_Z = \frac{\sigma_Z}{\mu_Z} = \frac{\sqrt{\sigma_{CRR}^2 + \sigma_{CSR}^2}}{\mu_{CRR} - \mu_{CSR}} \quad (3-16)$$

由式(3-14)、(3-15)及(3-16)，可發現Z的各项統計指標，可由CRR與CSR之統計指標簡單計算而得，這就是一次二階矩模式的最大好處。若以變異係數 δ_Z 的倒

數作為度量土壤液化可靠性的尺度，稱之為可靠度指標 β ，即

$$\beta = \frac{1}{\delta_Z} = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{\mu_{CRR} - \mu_{CSR}}{\sqrt{\sigma_{CRR}^2 + \sigma_{CSR}^2}} \quad (3-17)$$

$$\mu_Z = \beta \times \sigma_Z \quad (3-18)$$

由圖3-7可知，土壤液化機率 P_f 是功能函數 Z 之機率密度函數 $f_z(Z)$ 的尾部與 OZ 軸所圍成的面積，而可靠度指標 β 與尾部面積有一定依存關係。 β 值越大，則 P_f 越小， β 越小，則 P_f 越大。因此， β 和 P_f 一樣，可以作為度量土壤液化可靠性的一個指標。

前面已提到若 CRR 和 CSR 為常態分布且相互獨立性的假設，則 Z 也是常態分布，將其機率密度函數代入式(3-13)，即可得土壤液化機率 P_f 為

$$P_f = \int_{-\infty}^0 f_z(Z) dz = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Z} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{Z-\mu_Z}{\sigma_Z}\right)^2} dz \quad (3-19)$$

代入標準化變量 $t = \frac{Z-\mu_Z}{\sigma_Z}$ 、 $dZ = \sigma_Z dt$ ，則式(3-19)可寫成

$$P_f = \int_{-\infty}^{\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(-\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right) \quad (3-20)$$

其中， $\Phi(\)$ 為標準常態累積機率分布函數，按可靠度指標的定義：

$$\beta = \mu_Z / \sigma_Z，則$$

$$P_f = \Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta) \quad (3-21)$$

一般工程上常用的基本變量具有明顯的偏態分布，按常態分布的假設常會產生較大的誤差。由於對數常態分布適用於隨機變數之範圍限定為正值，而且求取隨機變數X之機率分布時，只要將X作對數變換，即可使用常態分布機率表，求出X之機率分布。因此在工程上常使用對數常態分布之假設。本研究將CSR與CRR均假設為對數常態分布，如此，則需將功能函數改寫成 $Z = (CRR/CSR) - 1$ 的型式，兩邊取對數可得：

$$Z = \ln\left(\frac{CRR}{CSR}\right) = \ln CRR - \ln CSR \quad (3-22)$$

由於 $\ln(CRR)$ 與 $\ln(CSR)$ 均為常態分布，故Z也是常態分布，其平均值、標準差及變異係數分別為：

$$\mu_Z = \mu_{\ln(CRR)} - \mu_{\ln(CSR)} \quad (3-23)$$

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_{\ln(CRR)}^2 + \sigma_{\ln(CSR)}^2} \quad (3-24)$$

$$\delta_Z = \frac{\sqrt{\sigma_{\ln(CRR)}^2 + \sigma_{\ln(CSR)}^2}}{\mu_{\ln(CRR)} - \mu_{\ln(CSR)}} \quad (3-25)$$

其中， $\mu_{\ln(CRR)}$ 、 $\mu_{\ln(CSR)}$ 及 $\sigma_{\ln(CRR)}$ 、 $\sigma_{\ln(CSR)}$ 分別為 $\ln(CRR)$ 和 $\ln(CSR)$ 的平均值與標準差。根據機率理論，對數常態分布隨機變量X之統計參數為：

$$\mu_{\ln X} = \ln \mu_X - \frac{1}{2} \ln(\delta_X^2 + 1) \quad (3-26)$$

$$\sigma_{\ln X} = \sqrt{\ln(\delta_X^2 + 1)} \quad (3-27)$$

其中， μ_X 及 δ_X 分別為變數X之平均值及變異係數，代入式(3-17)(3-21)，則可靠度指標 β 與液化機率 P_f 可以分別表示為：

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{\mu_{\ln CRR} - \mu_{\ln CSR}}{\sqrt{\sigma_{\ln CRR}^2 + \sigma_{\ln CSR}^2}} \frac{\ln \left[\frac{\mu_{CRR} \left(\frac{\delta_{CSR}^2 + 1}{\delta_{CRR}^2 + 1} \right)^{1/2}}{\mu_{CSR}} \right]}{\left[\ln(\delta_{CRR}^2 + 1)(\delta_{CSR}^2 + 1) \right]^{1/2}} \quad (3-28)$$

$$P_f = \Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta)$$

3.3.3 本研究之分析過程

傳統上液化分析，其中土壤抗液化強度CRR部分以正規化標準貫入試驗值，依據經驗之臨界液化強度曲線，求得對應此值之土壤抗液化強度CRR，並未清楚瞭解所求得之CRR變異性到底有多大。另外地震反覆剪應力比CSR之推估公式中其變異性主要係地震力參數控制，而評估地震力的主要參數，包括地震規模及地表加速度。由於地震發生時間、區域及規模的預測，尚無科學的方式，故地震特性參數只能依據地震歷史，概估該區可能發生的地震規模，因此，在推估過程中存在相當的不確定性。

本研究以邏輯迴歸式為基礎，透過現地液化與非液化案例之土層受震資料加以考量土壤抗液化強度比（CRR）與地震反覆剪應力比（CSR）之不確定性，並建構CRR與CSR之統計參數。

(1) CRR之機率密度函數推導

在前節中已利用邏輯式迴歸處理現地液化與非液化案例資料，而式(3-12)之邏輯迴歸機率的意義上， P_L 為某一 $(N_1)_{60CS}$ 值土壤的CRR小於CSR的機率。從機率的意義來看， P_L 為CRR小於某一特定CSR之累積機率，即

$$P_L = F(CRR) = P(CRR < CSR) \quad (3-29)$$

其中， $F(CRR)$ 為CRR之累積機率函數，其函數分佈情況如圖3-8所示。因此，若對式(3-12)進行微分，則可得到CRR之機率密度分佈函數如下。

$$f(CRR) = \frac{dF(CRR)}{dCRR} = \frac{ab(CRR)^{b-1}}{\left[1 + a(CRR)^b\right]^2} \quad (3-30)$$

$$a = \exp\left[-\beta_0^* - \beta_1(N_1)_{60CS}\right]$$

$$b = -\beta_2$$

其中， $f(CRR)$ 為CRR之機率密度分佈函數，其函數分佈情況如圖3-9所示。隨著 $(N_1)_{60CS}$ 增大，CRR之平均值隨之增加，離散程度亦越大，顯示高 $(N_1)_{60CS}$ 土壤之CRR有較大之變異性。

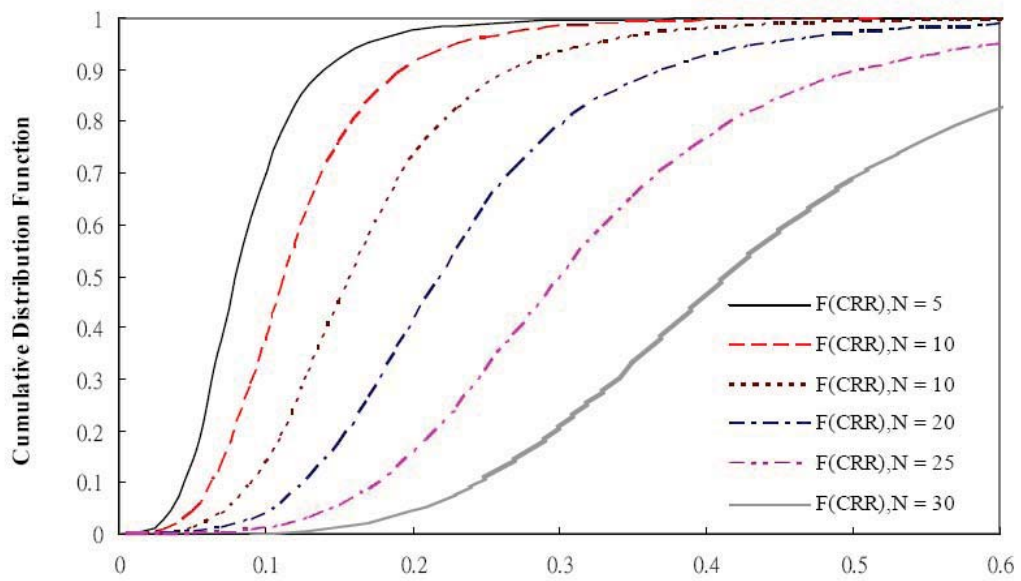


圖3-8 土壤CRR之累積機率分布示意圖

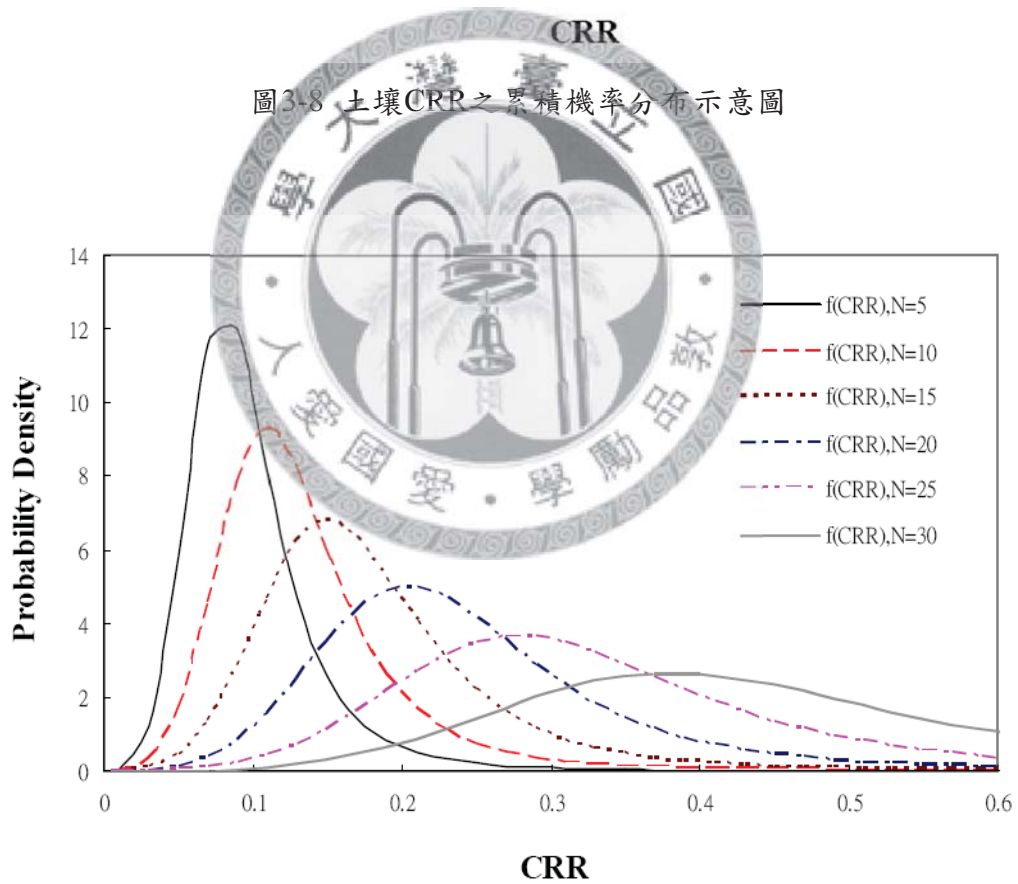


圖3-9 土壤CRR之機率密度分布示意圖

(2) 建構CRR與CSR之統計參數

在一次二階矩法中所需要的統計參數為平均值(μ_x)及變異係數(δ_x)，其中

CRR之平均值與變異係數可由CRR之機率密度函數式(3-30)依下列之計算公式求得。

$$E(CRR) = \int CRR \times f(CRR) dCRR \quad (3-31)$$

$$\sigma^2_{CRR} = \int (CRR - \mu_{CRR})^2 \times f(CRR) dCRR \quad (3-32)$$

$$\delta_{CRR} = \frac{\sigma_{CRR}}{\mu_{CRR}} \quad (3-33)$$

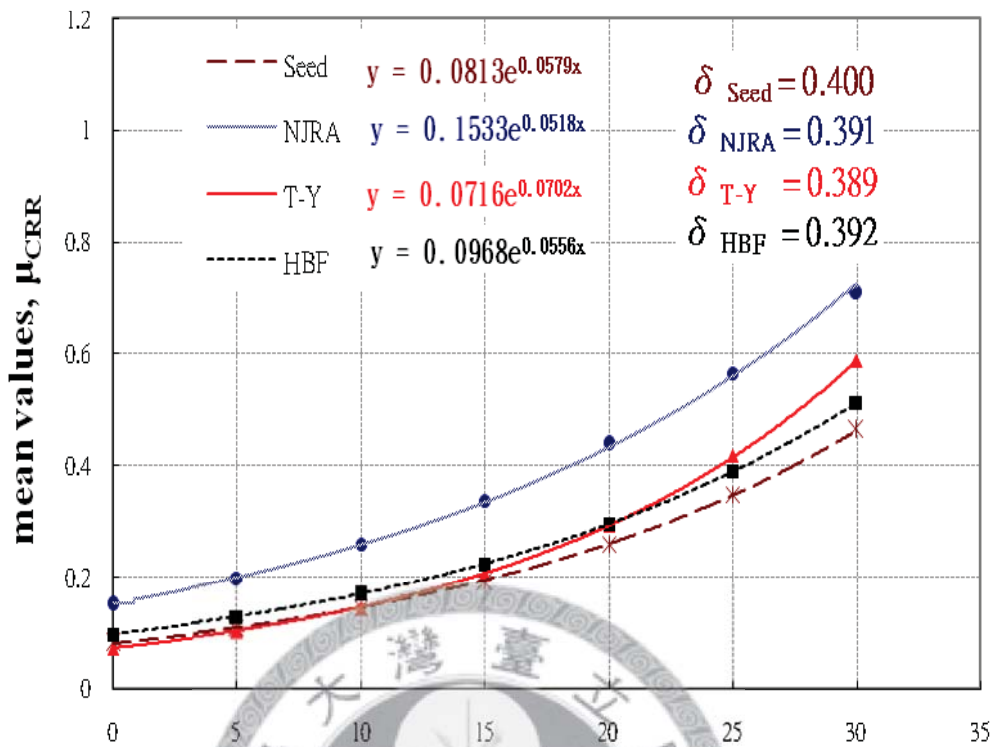
接著進一步將不同 $(N_1)_{60CS}$ 值之SRR平均值 μ_{CRR} 與變異係數 δ_{CRR} 經數學軟體(Mathematica)計算後，以二係數指數函數建立趨勢線迴歸式可得如式(3-34)~(3-37)，各形式之CRR平均值分佈情形如圖3-10所示。

$$(\mu_{CRR})_{Seed} = 0.0813 \exp[0.0579 \times (N_1)_{60CS}] \quad (3-34)$$

$$(\mu_{CRR})_{NJRA} = 0.1533 \exp[0.0518 \times (N_a)_{72}] \quad (3-35)$$

$$(\mu_{CRR})_{T-Y} = 0.0716 \exp[0.0702 \times (N_a)_{80}] \quad (3-36)$$

$$(\mu_{CRR})_{HBF} = 0.0968 \exp[0.0556 \times (N_1)_{60CS}] \quad (3-37)$$



(N₁)_{60CS}, (N_a)_{72CS}, (N_a)_{80CS}
 圖3-10 各形式之CRR平均值分佈圖

由於計算CRR之平均值與變異係數需透過數值積分求解，計算上較為複雜也不方便。反觀式(3-34)~(3-37)之計算公式則相單簡單。由圖3-9可知CRR之標準差雖然隨著平均值而增加，但其變異係數經計算後約為一固定直 ($\delta_{Seed} = 0.4, \delta_{NJRA} = 0.391, \delta_{T-Y} = 0.389, \delta_{HBFd} = 0.392$)，並不隨平均值之變化而改變，屬於定變異係數之分佈。

由於前面推導之CRR機率密度函數係基於邏輯迴歸液化機率 (CRR小於某特定CSR之機率) 而得，故所建構之CRR統計參數 (μ_{CRR} 與 δ_{CRR}) 已經隱含考慮CSR之變異性，因此，CSR之平均值 (μ_{CSR}) 直接採以各簡易法之公式計算，CSR之變異係數則取 $\delta_{CSR} = \delta_{CRR}$ 。有關應用式(3-28)計算土壤液化機率所需之CRR與CSR之平均值與變異係數列於表(3-2)。

表3-2 CRR及CSR之平均值與變異係數

Method		平均值	變異係數
CRR	Seed	$0.0813 \exp\left[0.0579 \times (N_a)_{72}\right]$	0.4
	NJRA	$0.1533 \exp\left[0.0518 \times (N_I)_{60CS}\right]$	0.391
	T-Y	$0.0716 \exp\left[0.0702 \times (N_a)_{80}\right]$	0.389
	HBF	$0.0968 \exp\left[0.0556 \times (N_I)_{60CS}\right]$	0.392
CSR	Seed	CSR_{Seed}	0.4
	NJRA	CSR_{NJRA}	0.391
	T-Y	CSR_{T-Y}	0.389
	HBF	CSR_{HBF}	0.392



3.4 貝氏機率模式

3.4.1 介紹

貝氏定理 (Bayes' theorem)，是機率論中的一個結果，它跟隨機變數的條件機率以及邊緣機率分布有關。在有些關於機率的解說中，貝氏定理能夠告訴我們如何利用新證據修改已有的看法。通常，事件A在事件B (發生) 的條件下的機率，與事件B在事件A的條件下的機率是不一樣的；然而這兩者是有確定的關係，貝氏定理就是這種關係的陳述。

以貝氏定理建立液化機率之評估模式之相關文獻上，Juang等(1999)以可靠度分析與貝氏定理推導液化機率；Juang(2002)及Huang(2008)藉由現場液化與否之資料建立簡易分析法計算所得抗液化安全係數推導貝氏液化機率。以下為本研究之

貝氏機率模式建構過程。

3.4.2 分析原理

從條件機率推導貝氏定理

根據條件機率的定義，在事件B發生的條件下事件A發生的機率是

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (3-38)$$

同樣的，在事件A發生的條件下事件B發生的機率

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (3-39)$$

整理與合併式 (3-38) 與 (3-39) 後可得到

$$P(A|B)P(B) = P(A \cap B) = P(B|A)P(A) \quad (3-40)$$

將式 (3-40) 兩邊同除以 $P(B)$ ，若 $P(B)$ 不為零，即可得到貝氏定理：

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad (3-41)$$

貝氏定理通常可以再寫成下面之形式：

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^C)P(A^C) \quad (3-42)$$

其中 A^C 為 A 的補集，故上式亦可改寫成：

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^C)P(A^C)} \quad (3-43)$$

本研究目的在於計算液化機率，因此將式 (3-43) 中的 A 當成液化 (L) 事件， A^C 當成非液化 (NL) 事件， B 事件則當作當安全係數 FS (或可靠度指數 β) 為某值，則可改寫為式 (3-44) 與式 (3-45)：

$$P(L|FS) = \frac{P(FS|L)P(L)}{P(FS|L)P(L) + P(FS|NL)P(NL)} \quad (3-44)$$

$$P(L|\beta) = \frac{P(\beta|L)P(L)}{P(\beta|L)P(L) + P(\beta|NL)P(NL)} \quad (3-45)$$

$P(L|FS)$ 、 $P(L|\beta)$ 為在某 FS 值、 β 值下的液化機率

$P(FS|L)$ 、 $P(\beta|L)$ 為液化案例中 FS 值、 β 值的分布函數

$P(FS|NL)$ 、 $P(\beta|NL)$ 為非液化案例中 FS 值、 β 值的分布函數

$P(L)$ ：為已知的液化機率

$P(NL)$ ：為已知的非液化機率

Juang et al.(1999)文獻中提到 $P(L)$ 與 $P(NL)$ 為不可得知，但基於熱力學中的最大熵 (entropy) 原理，則可以被假設為 $P(L) = P(NL)$ ，如此一來可將式 (3-44) 與式 (3-45) 改寫成：

$$P_L = \frac{f_L(FS)}{f_L(FS) + f_{NL}(FS)} \quad (3-46)$$

$$P_L = \frac{f_L(\beta)}{f_L(\beta) + f_{NL}(\beta)} \quad (3-47)$$

P_L 為液化機率

$f_L(FS)$ 、 $f_L(\beta)$ 為液化案例中 FS 、 β 的機率密度函數

$f_{NL}(FS)$ 、 $f_{NL}(\beta)$ 為非液化案例中 FS 、 β 的機率密度函數

3.4.3 本研究之分析過程

(1) 建構安全係數 FS 之機率密度函數

首先將資料庫中的669筆液化與非液化案例資料分別以各簡易評估法計算其抗液化安全係數 FS ，並將可疑的資料點剔除後分組展繪其直方圖，再以統計分布函數中的對數常態分布函數 (log-normal distribution) 式 (3-48) 擬合求取 FS 之機率密度函數 $f_L(FS)$ 及 $f_{NL}(FS)$ 。在此定義可疑資料點包括 Seed 法中 $(N_I)_{60CS} > 30$ 者及 HBF 法中 $(N_I)_{60CS} > 39$ 者，另外各簡易法計算之 FS 值大於 8 者 (避免因此類資料過多影響統計擬合之誤差)，因此對於此類等資料將先剔除。

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right]^2} \quad (3-48)$$

$f(x)$ 為對數常態分布的機率密度函數，其中 x 為安全係數 FS ， μ 與 σ 為分布參數。

圖3-11及圖3-12分別為Seed法液化組與非液化組FS之擬合結果，其中使用液化案例有369筆，非液化案例有245筆， $f_L(FS)$ 之 $\mu = -0.875$ ， $\sigma = 0.585$ ； $f_{NL}(FS)$ 之 $\mu = 0.368$ ， $\sigma = 0.607$ 。

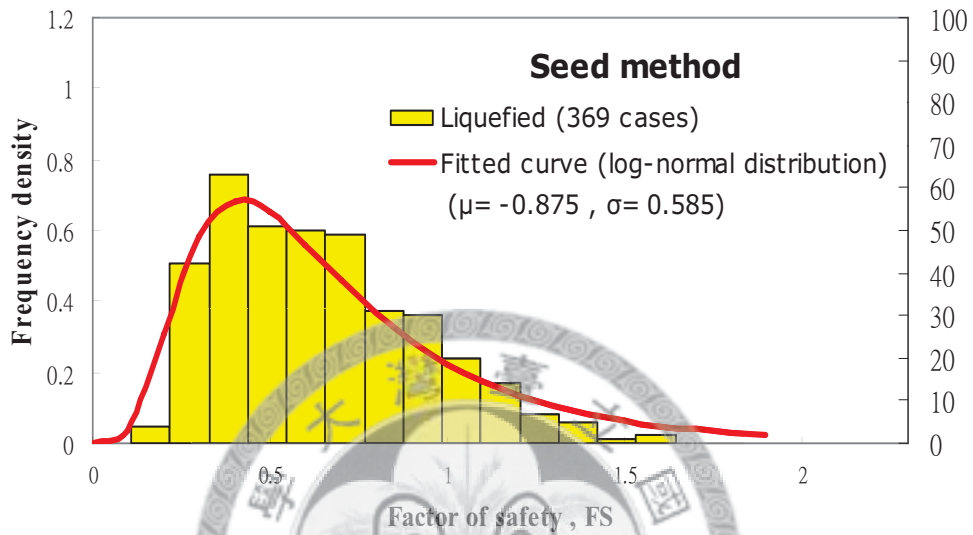


圖3-11 液化組Seed法FS之直方圖及擬合之機率密度函數

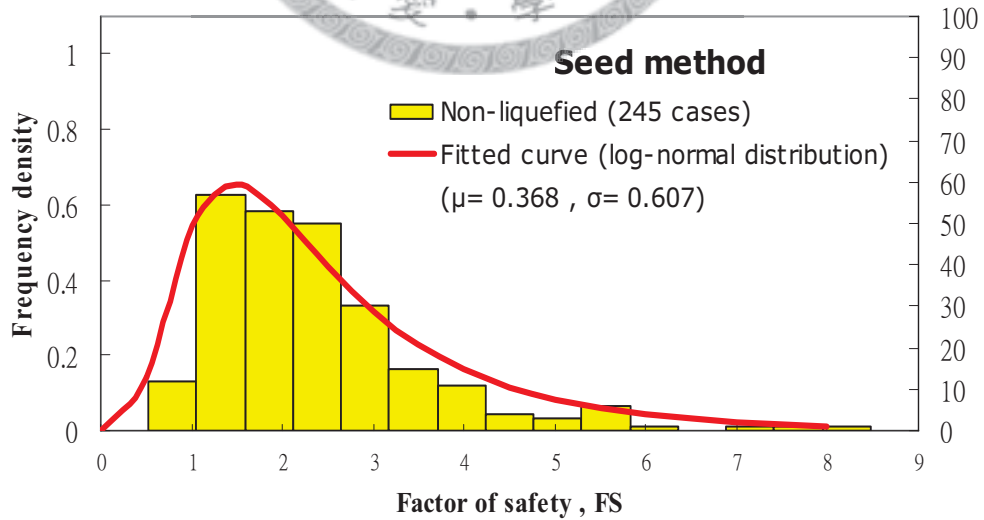


圖3-12 非液化組Seed法FS之直方圖及擬合之機率密度函數

圖3-13及圖3-14分別為NJRA法液化組與非液化組FS之擬合結果，其中使用液化案例有372筆，非液化案例有278筆， $f_L(FS)$ 之 $\mu = -0.703$ ， $\sigma = 0.496$ ； $f_{NL}(FS)$ 之 $\mu = 0.195$ ， $\sigma = 0.523$ 。

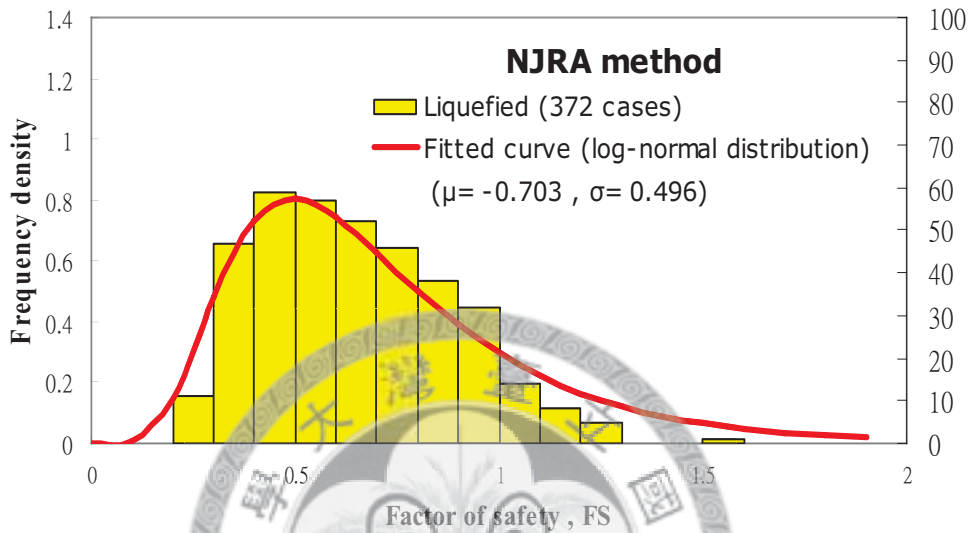


圖3-13 液化組NJRA法FS之直方圖及擬合之機率密度函數

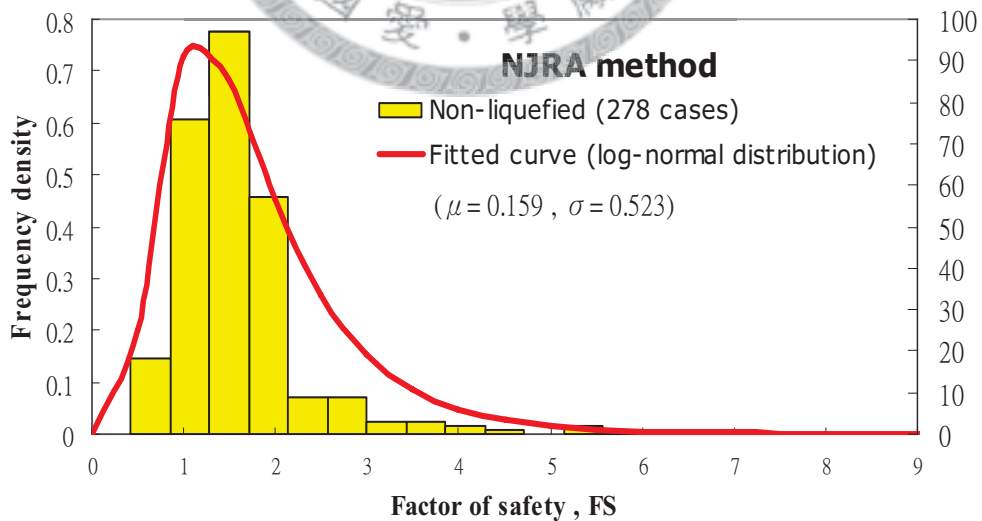


圖3-14 非液化組NJRA法FS之直方圖及擬合之機率密度函數

圖3-15及圖3-16分別為T-Y法液化組與非液化組FS之擬合結果，其中使用液化案例有373筆，非液化案例有263筆， $f_L(FS)$ 之 $\mu = -0.684$ ， $\sigma = 0.486$ ； $f_{NL}(FS)$ 之 $\mu = 0.302$ ， $\sigma = 0.527$ 。

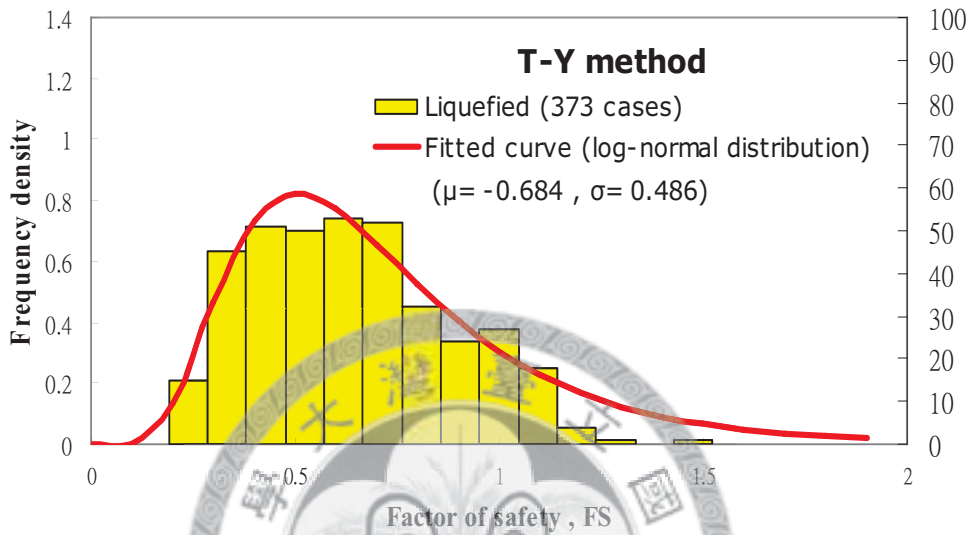


圖3-15 液化組T-Y法FS之直方圖及擬合之機率密度函數

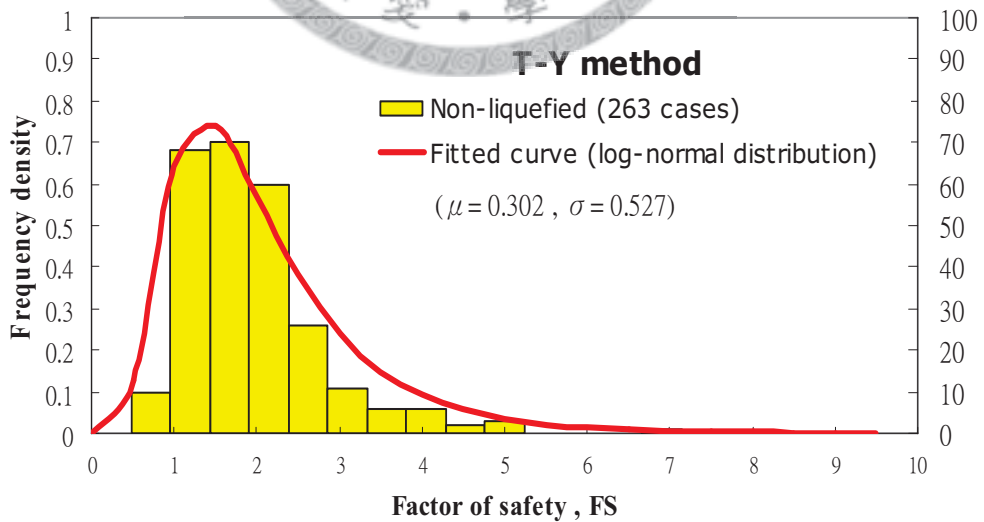


圖3-16 非液化組T-Y法FS之直方圖及擬合之機率密度函數

圖3-17及圖3-18分別為HBF法液化組與非液化組FS之擬合結果，其中使用液化案例有369筆，非液化案例有261筆， $f_L(FS)$ 之 $\mu = -0.827$ ， $\sigma = 0.523$ ； $f_{NL}(FS)$ 之 $\mu = 0.372$ ， $\sigma = 0.598$ 。

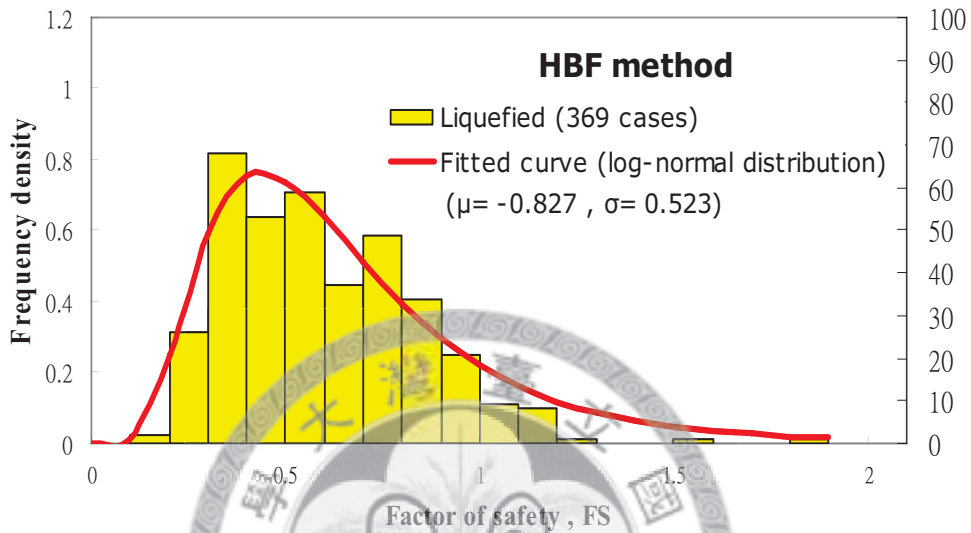


圖3-17 液化組HBF法FS之直方圖及擬合之機率密度函數

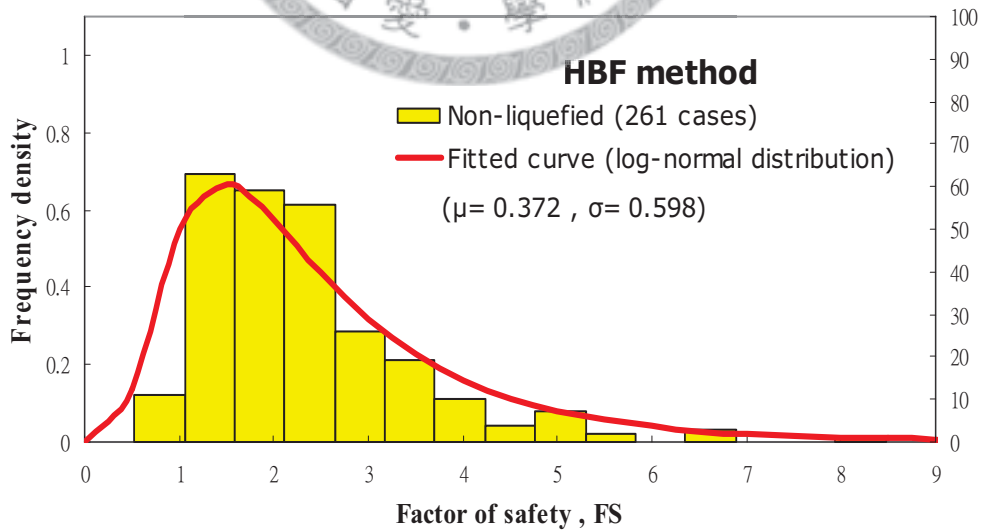


圖3-18 非液化組HBF法FS之直方圖及擬合之機率密度函數

(3) 建構可靠度指數 β 之機率密度函數

運用相同流程將資料庫中的669筆案例資料分成液化組與非液化組，分別依可靠度分析模式計算各簡易評估法之可靠度指數 β ，並分組展繪其直方圖，此處用常態分布函數 (normal distribution) 式 (3-49) 擬合求取 β 之機率密度函數 $f_L(\beta)$ 及 $f_{NL}(\beta)$ 。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2} \quad (3-49)$$

$f(x)$ 為常態分布的機率密度函數，其中 x 為可靠度指數 β ， μ 與 σ 為分布參數。

圖3-19及圖3-20分別為Seed法液化組與非液化組 β 之擬合結果，其中使用液化案例有369筆，非液化案例有245筆， $f_L(\beta)$ 之 $\mu = -1.09$ ， $\sigma = 0.998$ ； $f_{NL}(\beta)$ 之 $\mu = 1.273$ ， $\sigma = 1.327$ 。

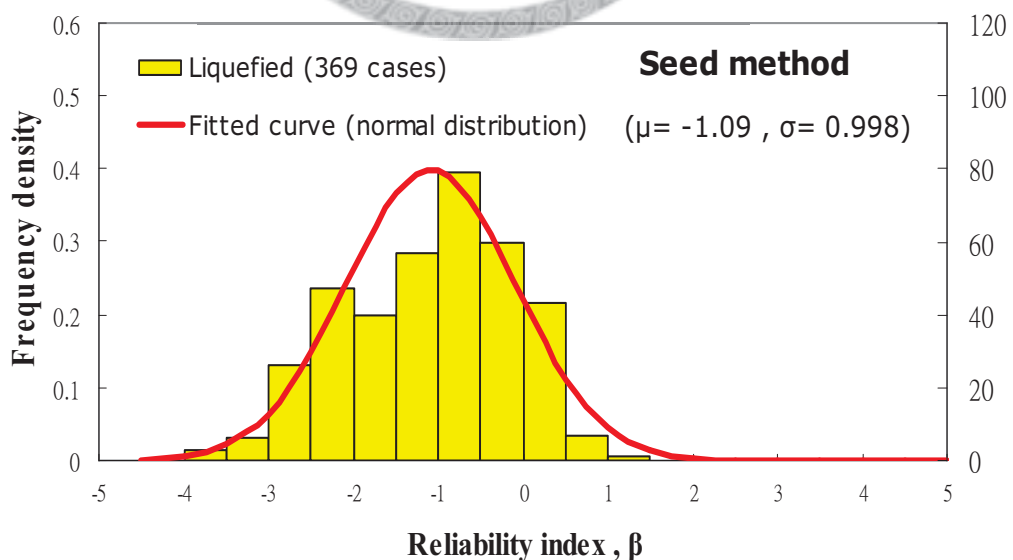


圖3-19 液化組Seed法 β 之直方圖及擬合之機率密度函數

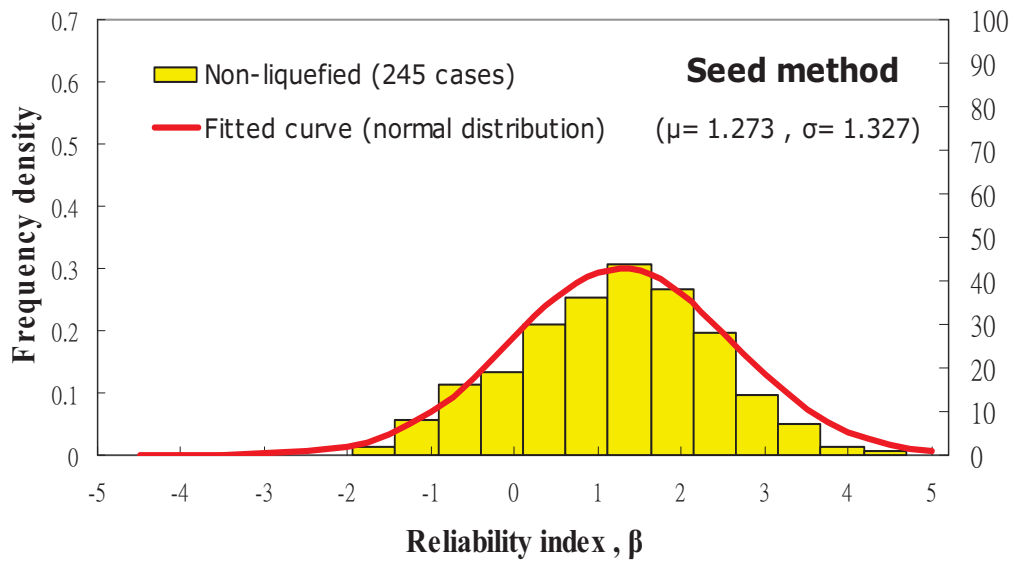


圖3-20 非液化組Seed法 β 之直方圖及擬合之機率密度函數

圖3-21及圖3-22分別為NJRA法液化組與非液化組 β 之擬合結果，其中使用液化案例有372筆，非液化案例有278筆， $f_L(\beta)$ 之 $\mu = -0.817$ ， $\sigma = 0.831$ ； $f_{NL}(\beta)$ 之 $\mu = 0.775$ ， $\sigma = 0.923$ 。

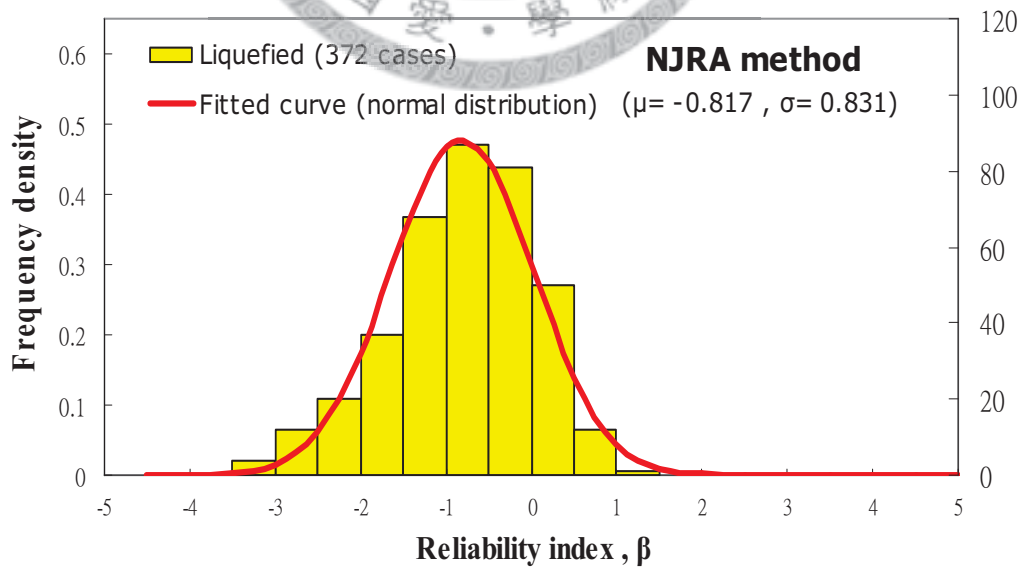


圖3-21 液化組NJRA法 β 之直方圖及擬合之機率密度函數

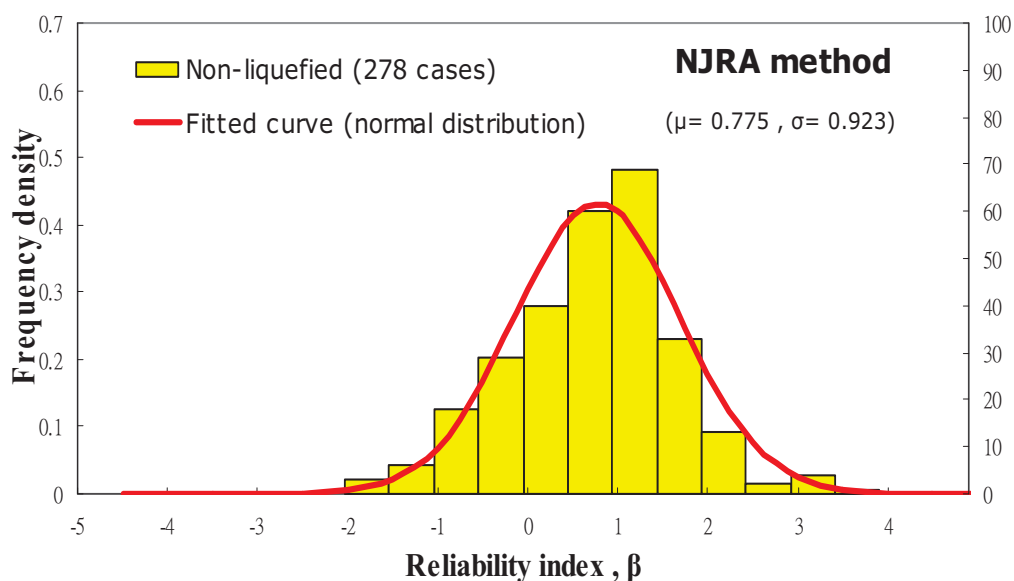


圖3-22 非液化組NJRA法 β 之直方圖及擬合之機率密度函數

圖3-23及圖3-24分別為T-Y法液化組與非液化組 β 之擬合結果，其中使用液化
 案例有373筆，非液化案例有263筆。 $f_L(\beta)$ 之 $\mu = -0.964$ ， $\sigma = 0.914$ ； $f_{NL}(\beta)$ 之
 $\mu = 0.942$ ， $\sigma = 0.979$ 。

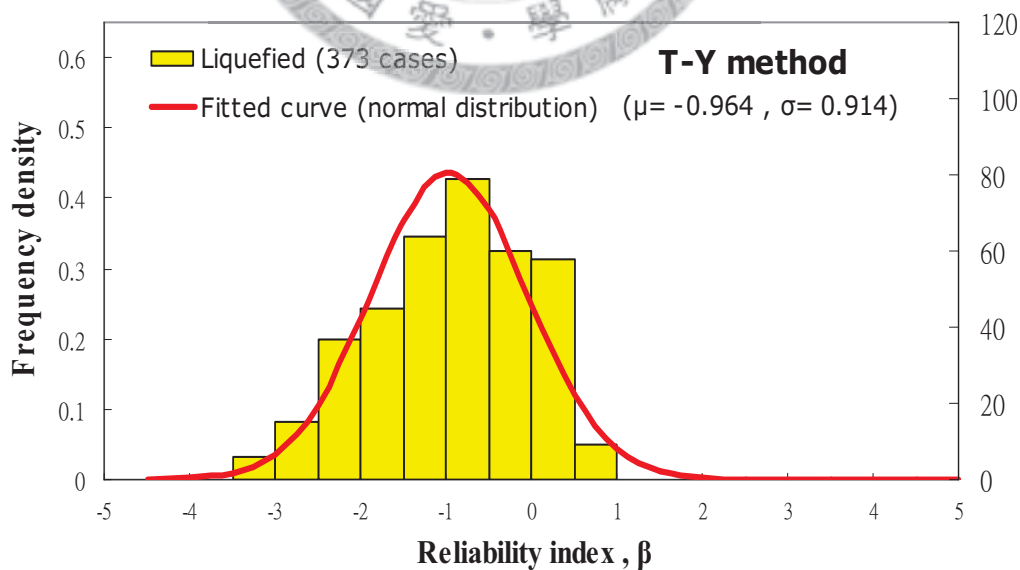


圖3-23 液化組T-Y法 β 之直方圖及擬合之機率密度函數

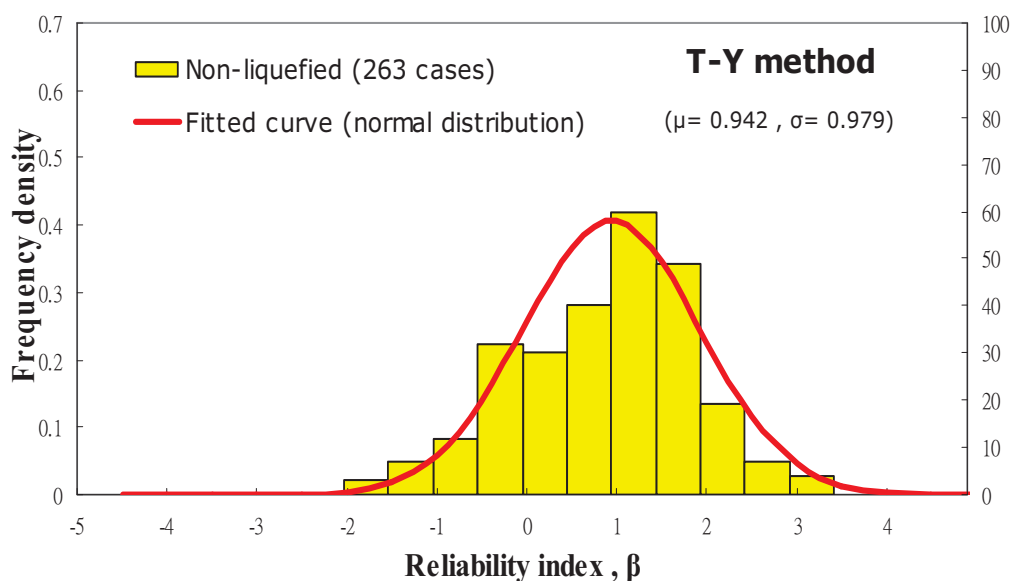


圖3-24 非液化組T-Y法 β 之直方圖及擬合之機率密度函數

圖3-25及圖3-26分別為HBF法液化組與非液化組 β 之擬合結果，其中使用液化案例有365筆，非液化案例有251筆。 $f_L(\beta)$ 之 $\mu = -1.038$, $\sigma = 0.994$; $f_{NL}(\beta)$ 之 $\mu = 1.179$, $\sigma = 1.085$ 。

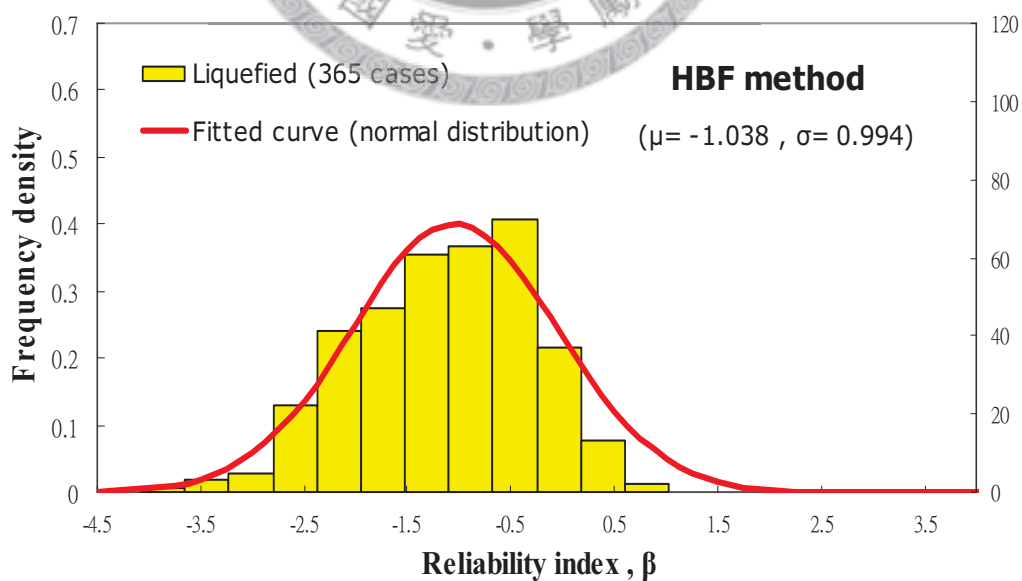


圖3-25 液化組HBF法 β 之直方圖及擬合之機率密度函數

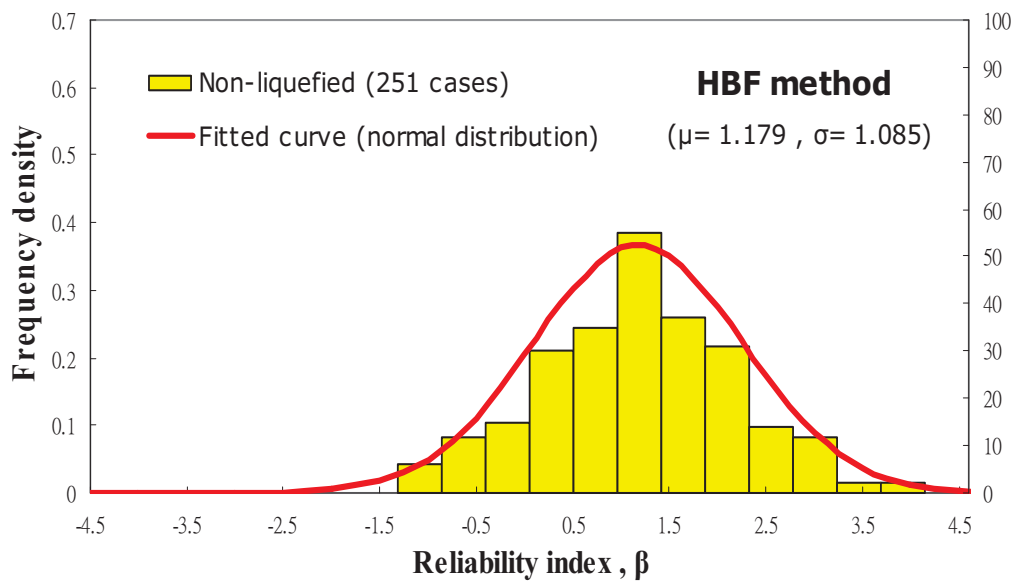


圖3-26 非液化組HBF法 β 之直方圖及擬合之機率密度函數



第四章 模式可靠度與安全係數 對應之液化機率

4.1 前言

工程實務上，安全係數FS與液化機率 P_L 之關係是工程上所關心的，但若求得安全係數FS所對應之液化機率 P_L ，將使得憑藉安全係數所進行之抗液化工程設計更趨合理。Juang et al.(2000)藉由現場液化與否資料，建立簡易分析法計算所得安全係數FS與液化機率 P_L 之映射函數關係；Huang(2008)以訊息理論(information theory)，量化各液化評估法之不確定性，作為各評估法之可信度基礎。

本研究首先以訊息理論探討邏輯迴歸機率 ($P_{L(Logistic)}$)、可靠度機率 ($P_{L(Reliability)}$)、基於FS之貝式機率 ($P_{L(Bayesian,FS)}$) 及基於 β 之貝式機率 ($P_{L(Bayesian,\beta)}$) 等四種機率模式之可信度及差異性比較，其次建立Seed法、NJRA法、T-Y法及HBF法之FS與 P_L 之映射函數關係，最後根據各模式之相對可信度權重值綜合考量後比較各評估法之相對保守程度。

4.2 模式可信度比較

4.2.1 訊息熵與不確定性

若一場址經分析後，事先“預測”會發生液化之機率 $P_L = 0.01$ ，當地震時，若此場址“真正”發生了液化，則此信息(message)令人驚訝(surprisal)的程度將遠大於預測機率 $P_L = 0.99$ 時。亦即，當 $P_L = 0.99$ 時，我們已幾乎確定該場址在設計地震作用下，將發生液化現象，一旦其真正發生，也就較無令人驚訝之處，從而其攜帶的訊息(information)也就很少。若一個液化預測模式之可信度較高，則其將較能減少液化真正發生時令人驚訝之程度。因此，我們可以根據各液化評估模式所能減

少驚訝程度來評量各方法之相對可信度。

由於驚訝的程度（其攜帶的訊息量）和事件發生機率 P 成反比關係，於是 Shannon 定義訊息含量 (information content) 為：

$$h(P) = \ln \frac{1}{P} = -\ln P_i \quad (4-1)$$

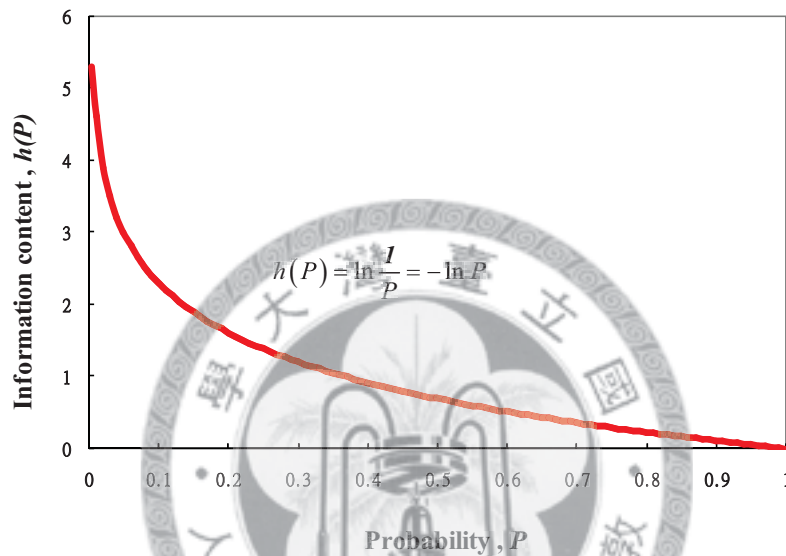


圖4-1 訊息含量 $h(P)$ 和事件發生機率 P 之關係

如圖4-1所示 $h(P)$ 之值從 ∞ (預測事件發生之機率等於0，而此事件發生後有無窮驚訝並攜帶無窮訊息) 降至0 (對應於預測事件發生之機率等於1，因此事件發生後沒有攜帶任何訊息)。現若考慮一集合中共有 n 個事件，每個事件發生之機率為 P_i ，期望訊息量為

$$H = \sum_{i=1}^n P_i h(P_i) = -\sum_{i=1}^n P_i \ln P_i \quad (4-2)$$

因上式與熱力學第二定律中之熵 (Entropy) 具同一形式，因此稱為訊息熵 (Information Entropy)。熵亦稱為亂度 (Disorderliness)，為一衡量資訊的不確定性程

度 (Uncertainty)，因此不確定性和其攜帶的期望訊息量可說是一體之兩面。若從不確定性之角度觀之，式(4-1)之 $-\ln P_i$ 可視為發生第i個事件不確定性之量度，而式(4-2)則可視為整個不確定性量度之期望值。

4.2.2 模式可信度評量方法

假設事件E發生之機率為x，而預測事件E會發生之機率為y，則兩者所攜帶訊息之差為：

$$\Delta I = h(x) - h(y) = -\ln x - (-\ln y) = \ln \left(\frac{y}{x} \right) \quad (4-3)$$

由上式可知 ΔI 愈高，能減少愈多的驚訝，也代表能折減愈多之不確定性。假設現場液化與非液化案例調查資料共有k個樣本。現如果以一個液化機率評估模式對這些樣本作一預測，則可能出現四種情況（如表4-1之分類矩陣）：

- （一）現場液化事件被預測為液化（ $P_L \geq 0.5$ ），設個數為 k_{11} 。
- （二）現場未液化事件被預測為液化，設個數為 k_{12} 。
- （三）現場液化事件被預測為不液化（ $P_L < 0.5$ ），設個數為 k_{21} 。
- （四）現場未液化事件被預測為不液化，設個數為 k_{22} 。

表4-1之分類矩陣中 k_{11+21} 為現場液化事件個數； k_{12+22} 為現場未液化事件個數； k_{11+12} 為預測為液化事件的個數； k_{21+22} 為預測為不液化事件的個數。若將上述符號以 k_{ij} 表示，則 k_{ij} 即為預測事件i而實際發生事件j之個數。所有樣本之相對頻率可表為 $f_{ij} = k_{ij}/k$ ，頻率矩陣如表4-2。

表4-1 分類矩陣

		現地觀察		Σ
		液化 (L)	未液化 (NL)	
模式 預測	液化 (L)	k_{11}	k_{12}	k_{11+12}
	未液化 (NL)	k_{21}	k_{22}	k_{21+22}
Σ		k_{11+21}	k_{12+22}	

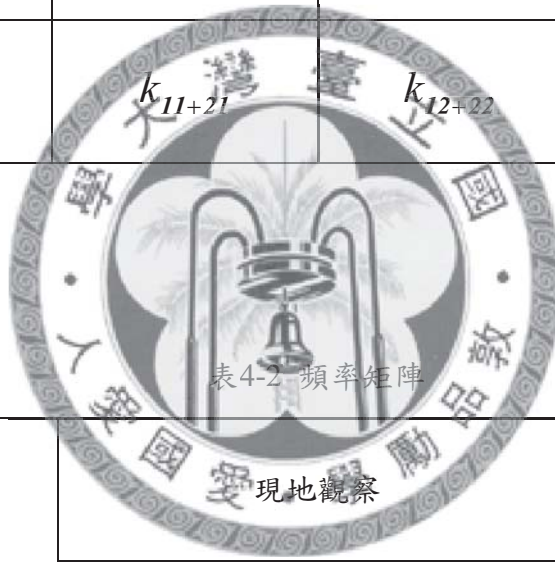


表4-2 頻率矩陣

		現地觀察		Σ
		液化 (L)	未液化 (NL)	
模式 預測	液化 (L)	f_{11}	f_{12}	f_{11+12}
	未液化 (NL)	f_{21}	f_{22}	f_{21+22}
Σ		f_{11+21}	f_{12+22}	

由於 f_{11+21} 為液化與否案例中液化發生之機率，而 f_{11}/f_{11+21} 則為預測為液化且現場實際亦為液化之機率。根據式 (4-3) 可推得預測為液化且實際亦為液化之不確定性折減量為 $-\ln(f_{11+21}) - [-\ln(f_{11}/f_{11+12})] = \ln(f_{11}/f_{11+21}f_{11+12})$ ；同理，預測為液化但實際未液化之不確定性折減量為 $\ln(f_{12}/f_{11+12}f_{12+22})$ 。相同地，預測為不液化但實際為液化之不確定性折減量為 $\ln(f_{21}/f_{21+22}f_{11+21})$ ；而預測為不液化且實際未液化之不確定性折減量為 $\ln(f_{22}/f_{21+22}f_{12+22})$ 。因此，預測為液化及不液化之不確定性折減量期望值 R_L 及 R_{NL} 可分別依下式求得：

$$R_L = \sum_{j=1}^2 \frac{f_{1j}}{f_{11+12}} \ln \left(\frac{f_{1j}}{f_{11+12}f_{1j+2j}} \right) \quad (4-4)$$

$$R_{NL} = \sum_{j=1}^2 \frac{f_{2j}}{f_{21+22}} \ln \left(\frac{f_{2j}}{f_{21+22}f_{1j+2j}} \right) \quad (4-5)$$

R_L 及 R_{NL} 之權重平均則為

$$R = R_L f_{11+12} + R_{NL} f_{21+22} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f_{ij} \ln \left(\frac{f_{ij}}{f_{i1+i2}f_{1j+2j}} \right) \quad (4-6)$$

上式權重 R 值可作為液化預測之不確定性折減量之量度。亦即 R 值愈大，不確定性折減量愈多，預測愈準確，該模式可信度愈高。

4.2.3 分析結果與比較

(1) Seed法

表4-3為各液化機率模式針對Seed法之案例分析結果，其中以邏輯迴歸機率（ $P_{L(Logistic)}$ ）模式之不確定性折減量R值（0.282）最高，其模式可信度最佳，其次為 $P_{L(Bayesian,\beta)}$ ，而 $P_{L(Reliability)}$ 及 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 則相對較差，各模式之R值介於0.253~0.282，而相對可信度權重值介於24.1%~26.8%。

表4-3 各機率模式對Seed法可信度比較

Seed method	Model			
	$P_{L(Logistic)}$	$P_{L(Reliability)}$	$P_{L(Bayesian,FS)}$	$P_{L(Bayesian,\beta)}$
k_{11}	346	318	312	330
k_{12}	62	45	40	52
k_{21}	23	51	57	39
k_{22}	195	212	217	205
k	626	626	626	626
f_{11}	0.553	0.508	0.498	0.527
f_{12}	0.099	0.072	0.064	0.083
f_{21}	0.037	0.081	0.091	0.062
f_{22}	0.312	0.339	0.347	0.327
R_L	0.157	0.199	0.216	0.180
R_{NL}	0.515	0.328	0.304	0.393
R	0.282	0.253	0.254	0.263
權重(%)	26.8	24.1	24.2	25.0
可信度評比	1 (最佳)	4	3	2

(2) NJRA法

表4-4為各液化機率模式針對NJRA法之案例分析結果，其中以 $P_{L(Logistic)}$ 之不確定性折減量R值(0.242)最高，其模式可信度最佳，其次為 $P_{L(Reliability)}$ 及 $P_{L(Bayesian,\beta)}$ ，而 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 則相對較差，各模式之R值介於0.177~0.242，而相對可信度權重值介於21.0%~28.8%。

表4-4 各機率模式對NJRA法之可信度比較

NJRA method	Model			
	$P_{L(Logistic)}$	$P_{L(Reliability)}$	$P_{L(Bayesian,FS)}$	$P_{L(Bayesian,\beta)}$
k_{11}	340	310	296	308
k_{12}	73	56	59	55
k_{21}	30	50	74	62
k_{22}	198	215	212	216
k	641	641	641	641
f_{11}	0.530	0.484	0.462	0.480
f_{12}	0.114	0.087	0.092	0.086
f_{21}	0.047	0.094	0.115	0.097
f_{22}	0.309	0.335	0.331	0.337
R_L	0.138	0.169	0.151	0.171
R_{NL}	0.431	0.268	0.209	0.261
R	0.242	0.212	0.177	0.210
權重(%)	28.8	25.2	21.0	25.0
可信度評比	1 (最佳)	2	4	3

(3) T-Y法

表4-5為各液化機率模式針對T-Y法之案例分析結果，其中以 $P_{L(Logistic)}$ 之不確定性折減量R值（0.258）最高，其模式可信度最佳，另外 $P_{L(Reliability)}$ 、 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 及 $P_{L(Bayesian,\beta)}$ 三模式則相對較差，各模式之R值介於0.211~0.258，而相對可信度權重值介於23.6%~29.0%。

表4-5 各機率模式對T-Y法之可信度比較

T-Y method	Model			
	$P_{L(Logistic)}$	$P_{L(Reliability)}$	$P_{L(Bayesian,FS)}$	$P_{L(Bayesian,\beta)}$
k_{11}	342	306	305	305
k_{12}	70	54	53	53
k_{21}	28	64	65	65
k_{22}	205	221	222	222
k	645	645	645	645
f_{11}	0.530	0.474	0.473	0.473
f_{12}	0.109	0.084	0.082	0.082
f_{21}	0.043	0.099	0.101	0.101
f_{22}	0.318	0.343	0.344	0.344
R_L	0.150	0.178	0.180	0.180
R_{NL}	0.450	0.253	0.250	0.250
R	0.258	0.211	0.211	0.211
權重(%)	29.0	23.6	23.7	23.7
可信度評比	1 (最佳)	3	2	2

(4) HBF法

表4-6為各液化機率模式針對HBF法之案例分析結果，其中以 $P_{L(Logistic)}$ 之不確定性折減量R值(0.306)最高，其模式可信度最佳，其次為 $P_{L(Bayesian,\beta)}$ ，而 $P_{L(Reliability)}$ 及 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 則相對較差，各模式之R值介於0.296~0.306，而相對可信度權重值介於24.6%~25.4%。

表4-6 各機率模式對HBF法之可信度比較

HBF method	Model			
	$P_{L(Logistic)}$	$P_{L(Reliability)}$	$P_{L(Bayesian,FS)}$	$P_{L(Bayesian,\beta)}$
k_{11}	345	319	325	325
k_{12}	54	33	38	36
k_{21}	24	50	44	44
k_{22}	208	229	224	226
k	631	631	631	631
f_{11}	0.547	0.506	0.515	0.515
f_{12}	0.086	0.052	0.060	0.057
f_{21}	0.038	0.079	0.070	0.070
f_{22}	0.330	0.363	0.355	0.358
R_L	0.186	0.257	0.237	0.246
R_{NL}	0.511	0.347	0.376	0.379
R	0.306	0.297	0.296	0.303
權重(%)	25.4	24.7	24.6	25.2
可信度評比	1 (最佳)	3	4	2

(5) 比較討論

綜合以上分析結果，茲將各液化機率模式分別對不同簡易評估法可信度比較如表4-7所示。除 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 模式在NJRA法之綜合預測率為79.3%略低於80%外，各模式之綜合預測率皆為80%以上，其中 $P_{L(Logistic)}$ 模式之預測準確率及不確定值減量R值在各模式之中最高，模式可信度最佳。整體而言，各機率模式在HBF法及Seed法之機率預測表現較好（預測準確率及R值相對較高），而NJRA法與T-Y法則相對較差。其中四種機率模式在HBF法中之模式可信度最高，且預測準確率與不確定性折減量R值皆相當一致，可見HBF法之穩定性及整體表現優於其他三法。

表4-7 各機率模式對各評估法之可信度比較

Model	Method	預測液化 準確率 (%)	預測不液 化準確率 (%)	綜合預測 準確率 (%)	R	可信度 評比
$P_{L(Logistic)}$	Seed	93.8	75.9	86.4	0.282	2
	NJRA	91.9	73.1	83.9	0.242	4
	T-Y	92.4	74.5	84.8	0.258	3
	HBF	93.5	79.4	<u>87.6</u>	<u>0.306</u>	1 (最佳)
$P_{L(Reliability)}$	Seed	86.2	82.5	84.7	0.253	2
	NJRA	83.8	79.3	81.9	0.212	3
	T-Y	82.7	80.4	81.7	0.211	4
	HBF	86.4	87.4	<u>86.8</u>	<u>0.297</u>	1 (最佳)
$P_{L(Bayesian,FS)}$	Seed	84.6	84.4	84.5	0.254	2
	NJRA	80.0	78.2	79.3	0.177	4
	T-Y	82.4	80.7	81.7	0.211	3
	HBF	88.1	85.5	<u>87.0</u>	<u>0.296</u>	1 (最佳)
$P_{L(Bayesian,\beta)}$	Seed	89.4	79.8	85.5	0.263	2
	NJRA	83.2	79.7	81.7	0.210	4
	T-Y	82.4	80.7	81.7	0.211	3
	HBF	88.1	86.3	<u>87.3</u>	<u>0.303</u>	1 (最佳)

4.3 模式保守度比較

由於各不同機率模式在 P_L 值推估之涵義上，存在明顯之差異。(1) 邏輯迴歸機率 ($P_{L(Logistic)}$) 模式為一單純之統計技術，其利用案例資料之解釋變數，直接求得每一案例之液化機率 P_L ，因此邏輯迴歸結果與所採用之函數形式有關，不同之函數形式可能推得不同之液化機率。(2) 基於FS之貝氏機率 ($P_{L(Bayesian,FS)}$) 模式所求得之液化機率 P_L 由各評估法計算所得FS之機率密度函數直接推求而得，因此不同評估法將對應於不同之 P_L 與FS關係。(3) 可靠度機率 ($P_{L(Reliability)}$) 模式係基於邏輯迴歸式為基礎建立統計指標參數後再根據FOSM理論推估可靠度指數 β 進而求得液化機率 P_L ，因此 P_L 與資料統計參數有關。(4) 基於 β 之貝氏機率 ($P_{L(Bayesian,\beta)}$) 模式所求得之液化機率 P_L 由 β 之機率密度函數直接推求而得，因此承繼了FOSM理論所得可靠度指數 β 值之特性。

基於以上的說明，各模式可說各有其理論基礎與特點。現若以同一安全係數FS所對應之 P_L 為比較基準，分別以Seed法、NJRA法、T-Y法及HBF法利用不同機率模式推估方式，由安全係數推估所得 P_L 進行比較，並以下式之均方根誤差 (Root Mean Squared Error, RMSE) 值來衡量其相對誤差量，同時來觀察不同模式間之相似程度及保守程度。RMSE值越小表示不同機率模式之間的變異性越小，因此RESM值可以用來比較不同模式之間的相對保守程度的指標。

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N}} \quad (4-7)$$

N ：為案例總數

x_i ：為第 i 個案利用二種不同機率模式推估所得 P_L 之差值

(1) 在Seed法之保守度比較

圖4-2～圖4-4以Seed法利用不同機率模式對應於相同案例推估所得 P_L 之比較。圖中實心圓點(表現場液化案例)及空心圓點(表現場未液化案例)之資料點為直接以各機率模式函數式計算所得個別案例之液化機率預測值，而圖中45度對角線為1：1等值線。由圖中可知 $P_{L(Logistic)}$ 較 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 、 $P_{L(Reliability)}$ 有高估(保守)之趨勢(資料點普遍在1:1等值線下方)而RMSE值稍大分別為0.108及0.099；至於 $P_{L(Reliability)}$ 與 $P_{L(Bayesian,\beta)}$ 兩值大多數案例皆在1：1線附近，差異非常小而RMSE為0.026，二模式相似度極高。

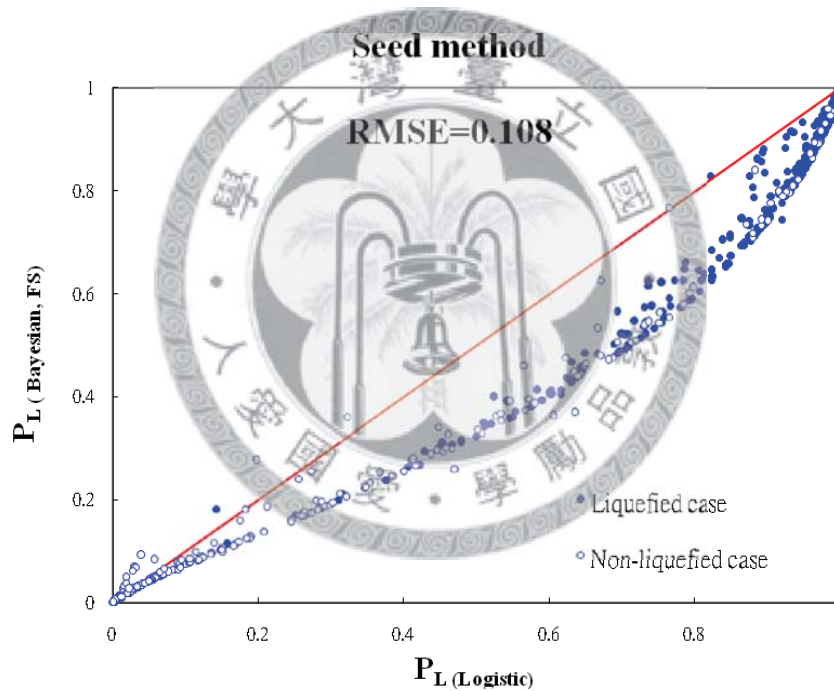


圖4-2 Seed法推估 $P_{L(Logistic)}$ 與 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 之比較

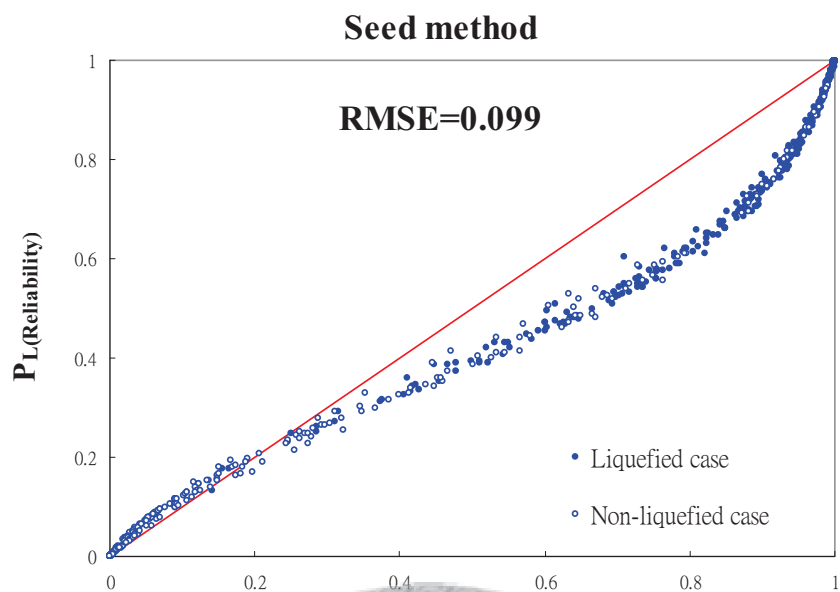


圖4-3 Seed法推估 $P_{L(\text{Logistic})}$ 與 $P_{L(\text{Reability})}$ 之比較

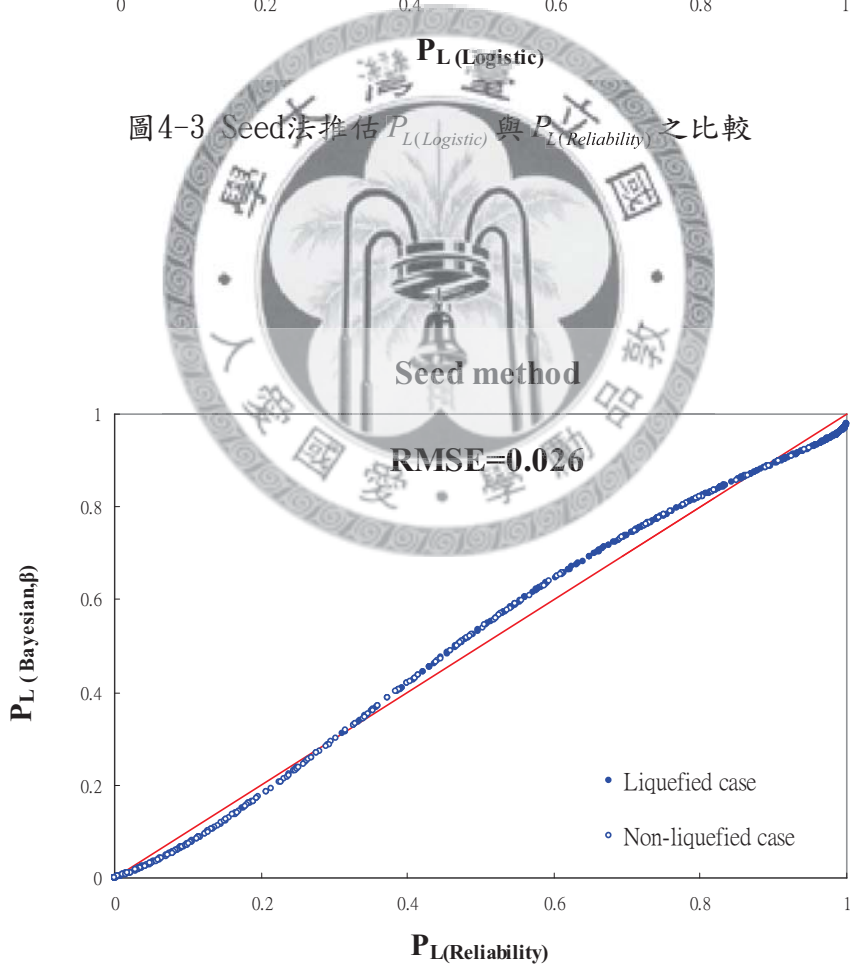


圖4-4 Seed法推估 $P_{L(\text{Reability})}$ 與 $P_{L(\text{Bayesian}, \beta)}$ 之比較

(2) 在NJRA法之保守度比較

圖4-5~圖4-7為NJRA法利用不同機率模式對應於相同案例推估所得 P_L 之比較。由圖中可知 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 在 $P_L > 0.5$ 範圍較 $P_{L(Logistic)}$ 保守，RMSE為0.097，從資料散佈點可知二 P_L 值變異性稍大；而 $P_{L(Logistic)}$ 較 $P_{L(Reliability)}$ 保守，RMSE為0.099；至於 $P_{L(Reliability)}$ 與 $P_{L(Bayesian,\beta)}$ 二值對稱於1:1線，且二值差異不大，RMSE為0.037，其保守度相似。

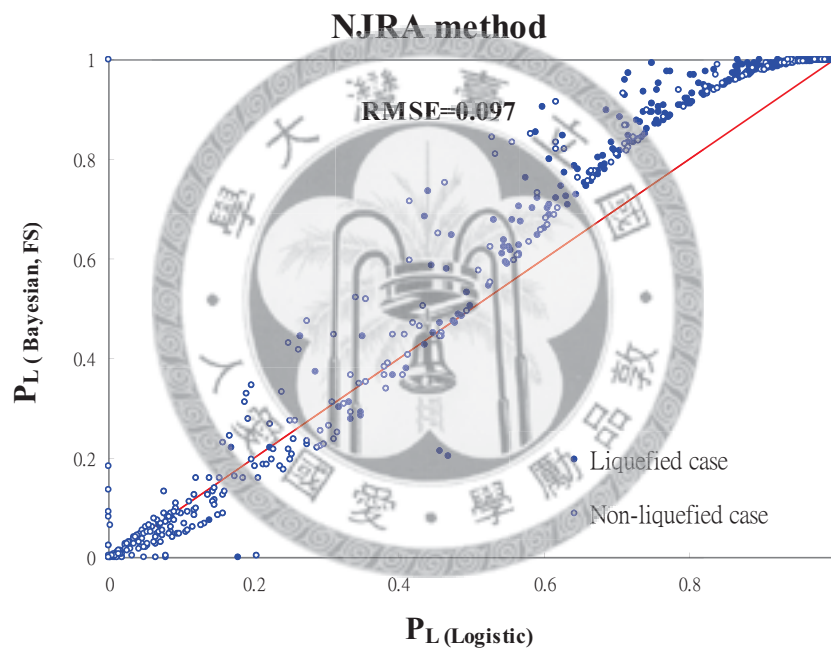


圖4-5 NJRA法推估 $P_{L(Logistic)}$ 與 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 之比較

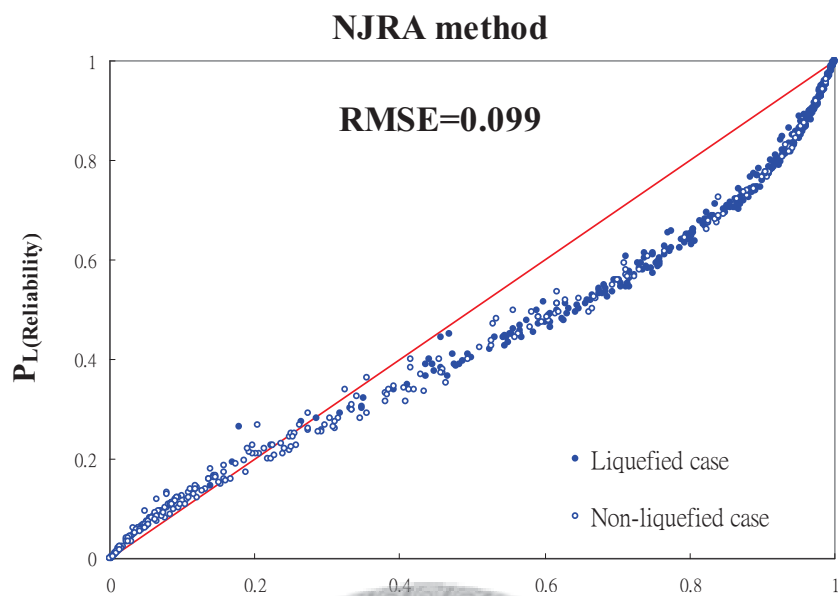


圖4-6 NJRA法推估 $P_{L(\text{Logistic})}$ 與 $P_{L(\text{Reliability})}$ 之比較

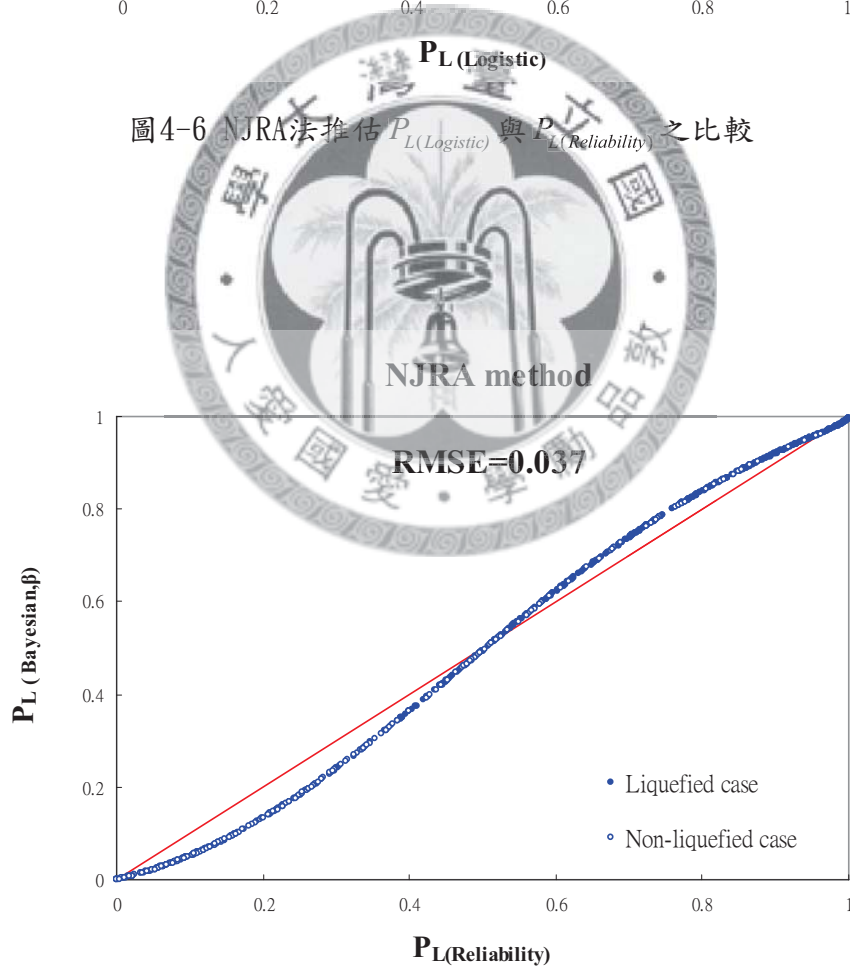


圖4-7 NJRA推估 $P_{L(\text{Reliability})}$ 與 $P_{L(\text{Bayesian}, \beta)}$ 之比較

(3) 在T-Y法之保守度比較

圖4-8~圖4-10為T-Y法利用不同機率模式對應於相同案例推估所得 P_L 之比較。由圖中可知 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 在高 P_L 值範圍較 $P_{L(Logistic)}$ 保守，RMSE為0.091，資料散佈點變異性亦稍大；而 $P_{L(Logistic)}$ 同樣較 $P_{L(Reliability)}$ 保守，RMSE為0.105；至於 $P_{L(Reliability)}$ 與 $P_{L(Bayesian,\beta)}$ 對稱於1:1線，且二值差異不大，RMSE為0.037，其趨勢與NJRA法中大致雷同。

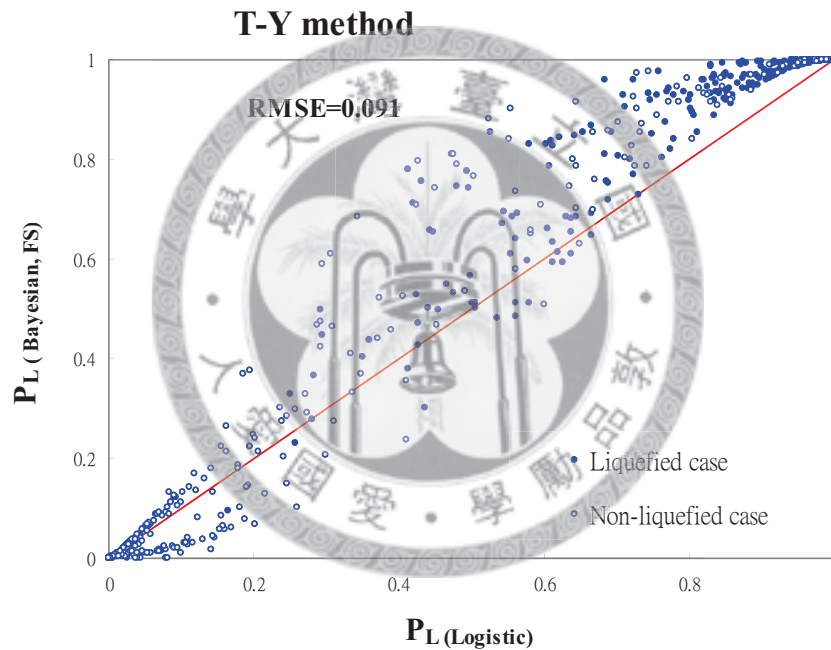


圖4-8 T-Y法推估 $P_{L(Logistic)}$ 與 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 之比較

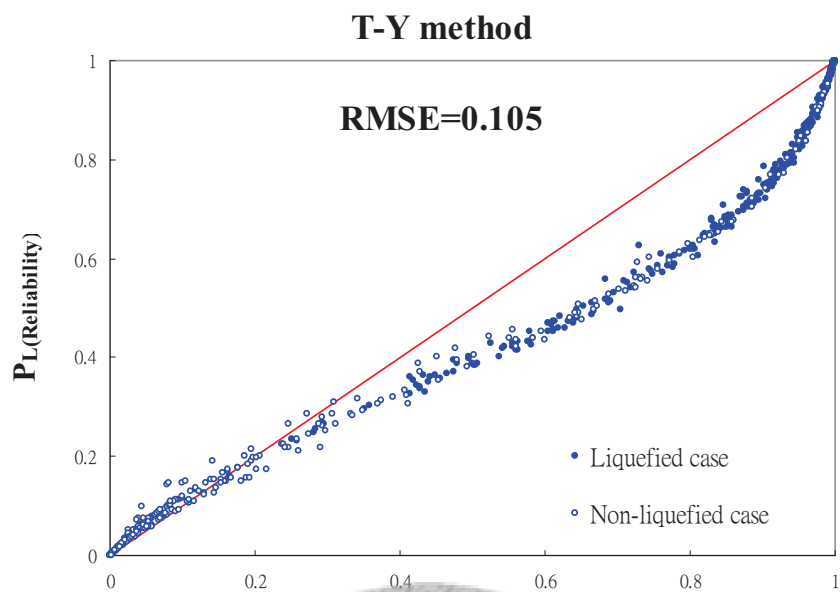


圖4-9 T-Y法推估 $P_{L(\text{Logistic})}$ 與 $P_{L(\text{Reliability})}$ 之比較

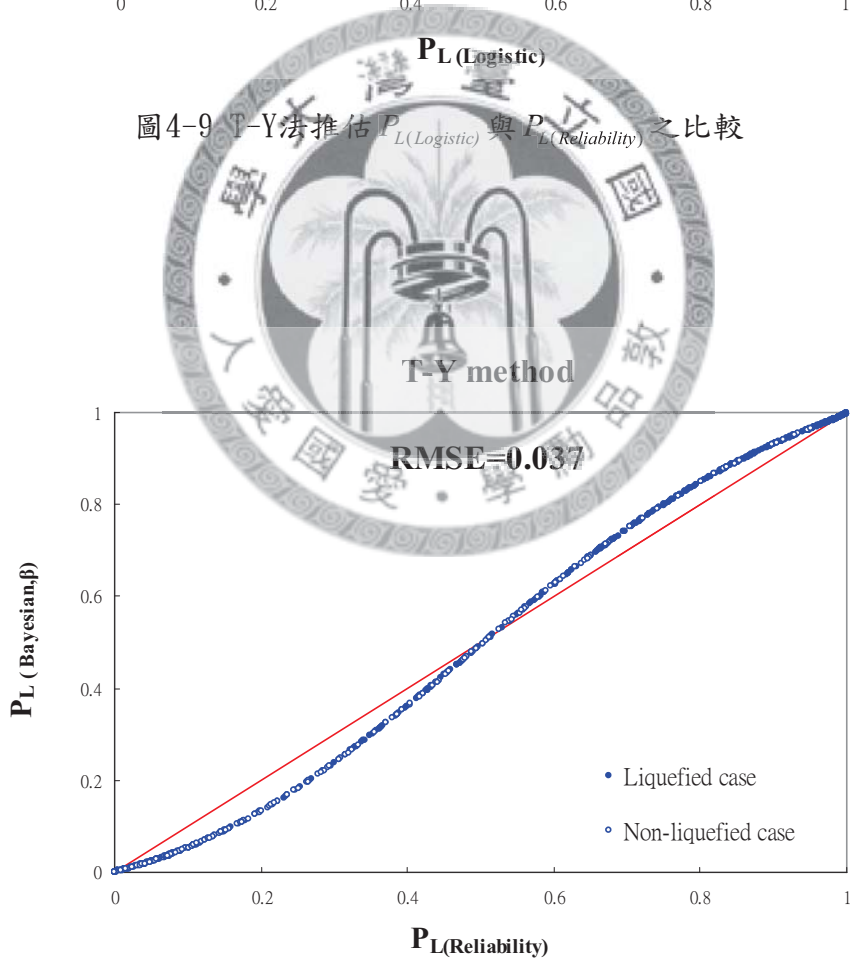


圖4-10 T-Y法推估 $P_{L(\text{Reliability})}$ 與 $P_{L(\text{Bayesian}, \beta)}$ 之比較

(4) 在HBF法之保守度比較

圖4-11~圖4-13為HBF法利用不同機率模式對應於相同案例推估所得 P_L 之比較。由圖中可知 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 普遍較 $P_{L(Logistic)}$ 保守，RMSE為0.099；而 $P_{L(Logistic)}$ 較 $P_{L(Reliability)}$ 保守且趨勢大致與其他三評估法結果一致，RMSE為0.101；至於 $P_{L(Reliability)}$ 與 $P_{L(Bayesian,\beta)}$ 二值RMSE為0.035，模式相似性大致與其他三評估法結果差異不大。

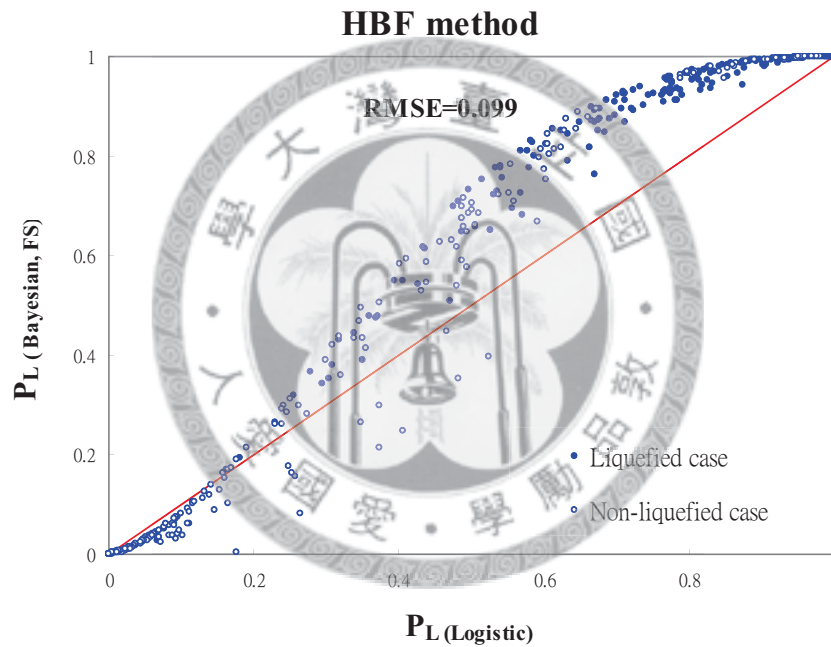


圖4-11 HBF法推估 $P_{L(Logistic)}$ 與 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 之比較

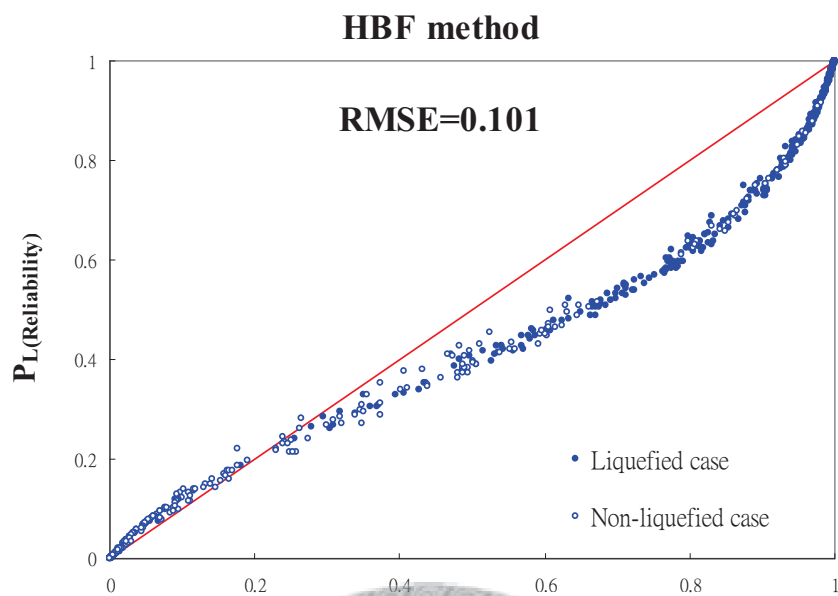


圖4-12 HBF法推估 $P_{L(\text{Logistic})}$ 與 $P_{L(\text{Reliability})}$ 之比較

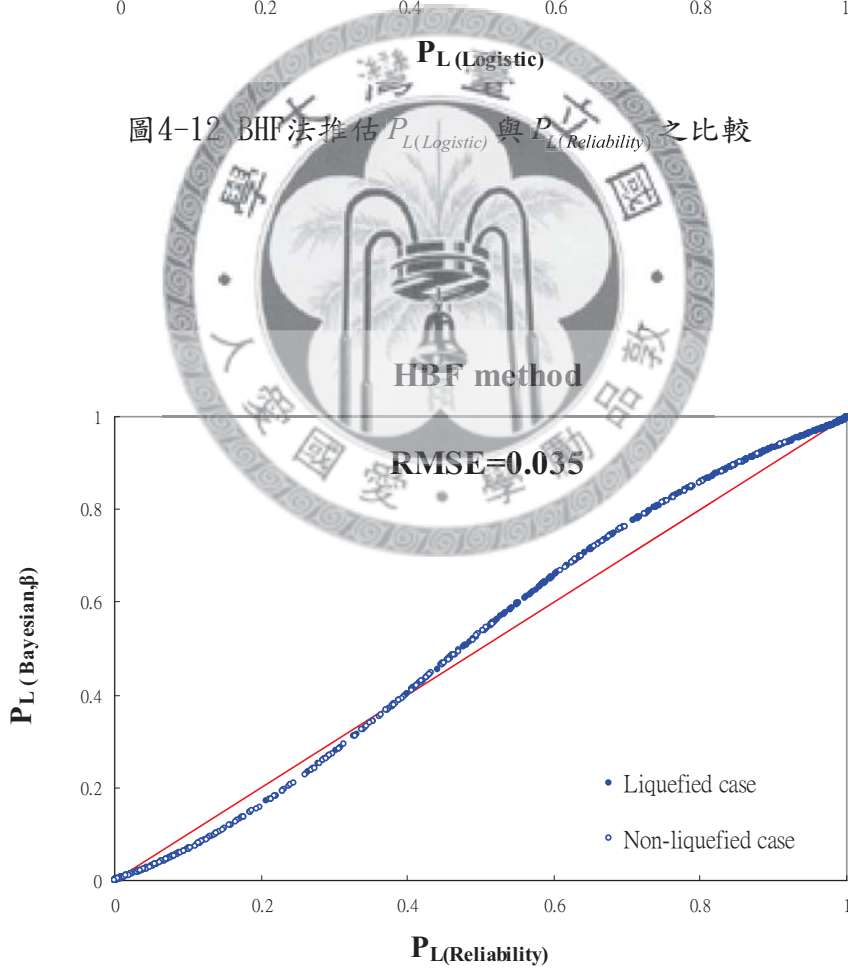


圖4-13 HBF法推估 $P_{L(\text{Reliability})}$ 與 $P_{L(\text{Bayesian}, \beta)}$ 之比較

(5) 比較討論

綜合以上結果，由於不同機率模式所採用之統計方法與機率理論不同而分析結果之適用性與保守性在不同簡易評估法有不同程度之差異，RMSE值介於0.026%~0.108%之間。分析結果顯示 $P_{L(Logistic)}$ 在各評估法中皆普遍較 $P_{L(Reliability)}$ 保守，而 $P_{L(Reliability)}$ 與 $P_{L(Bayesian,\beta)}$ 模式保守度在各評估法中皆相當一致，至於 $P_{L(Logistic)}$ 與 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 二值資料散佈點變異性稍大，在Seed法中 $P_{L(Logistic)}$ 有較保守之趨勢，而在NJRA、T-Y及HBF法則 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 普遍較保守之趨勢。



4.4 安全係數對應液化機率之比較

4.4.1 液化機率與安全係數之映射關係

推估FS與 P_L 關係最直接的方法為採用Juang,2000所建議之映射函數（Mapping Function）關係式：

$$P_L = \frac{1}{1 + \left(\frac{FS}{A}\right)^B} \quad (4-8)$$

其中A、B為擬合係數。上式具有明確之物理意義，當FS趨於0時， P_L 趨於1；FS趨於 ∞ 時， P_L 趨於0。上式亦可改寫如式（4-9），如此函數式更為簡潔且資料迴歸分析應用上更佳方便。


$$P_{L,model} = \frac{1}{1 + A(FS_{method})^B} \quad (4-9)$$

藉由上式，即可很方便地由各簡易評估法所計算之抗液化安全係數 FS_{method} 與各模式預測之發生液化機率 $P_{L,model}$ 之映射關係。也可據以比較在同一液化機率 P_L 時，各不同簡化法所對應之抗液化安全係數FS，以作為不同液化簡易評估法之相對保守程度基準，對於液化風險評估而言，有很大助益。

4.4.2 分析結果與比較

(1) Seed法

圖4-14～圖4-17為Seed法計算每個案例之抗液化安全係數FS與對應之各機率模式機率預測值 P_L 之擬合結果。各模式之擬合係數與當FS = 1.0 時，Seed法對應之液化機率 $P_{L(Logistic)}$ 、 $P_{L(Reliability)}$ 、 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 及 $P_{L(Bayesian,\beta)}$ 分別為42.4% (A=1.356, B=4.06)、34.4% (A=1.904, B=3.11)、27.6% (A=2.618, B=3.483) 及34.2% (A=1.921, B=3.266)。

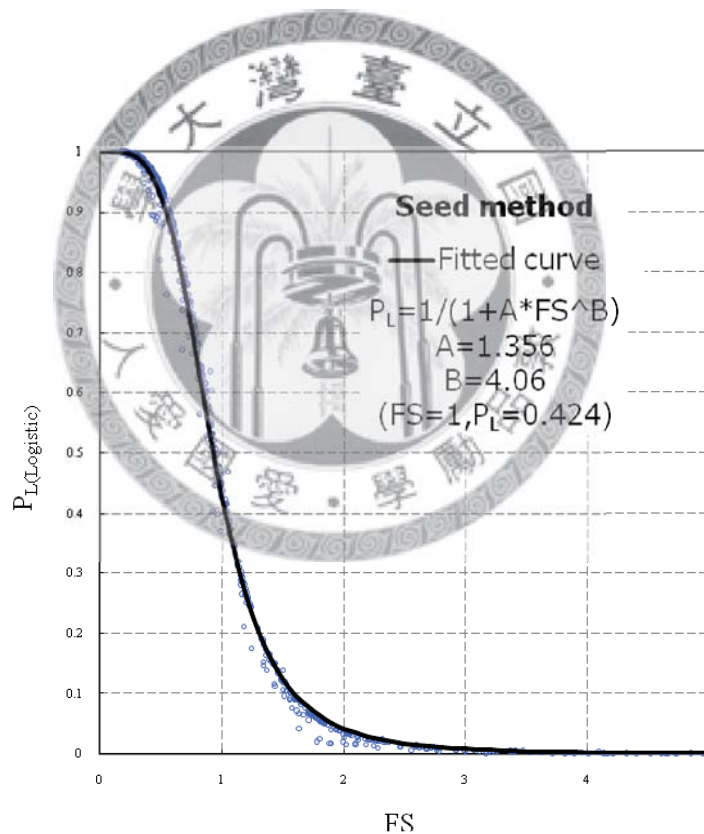


圖4-14 Seed法FS與 $P_{L(Logistic)}$ 之映射函數關係

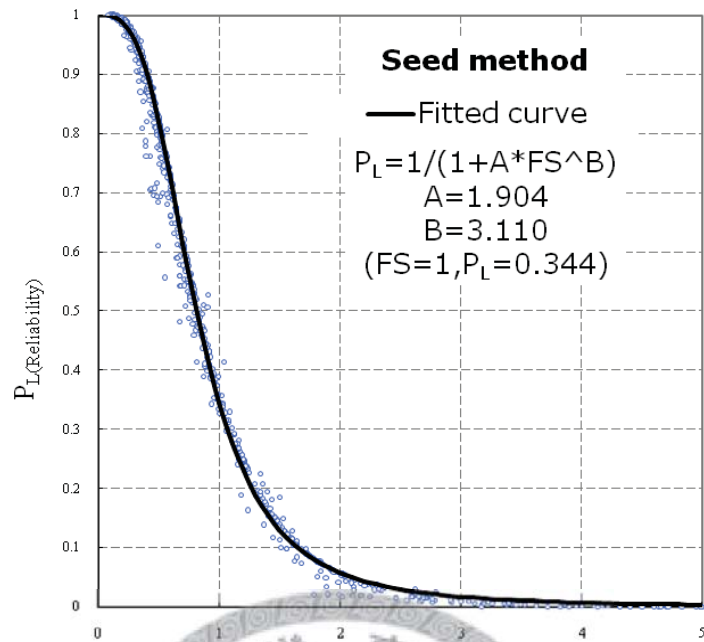


圖4-15 Seed法FS與 $P_{L(Reliability)}$ 之映射函數關係

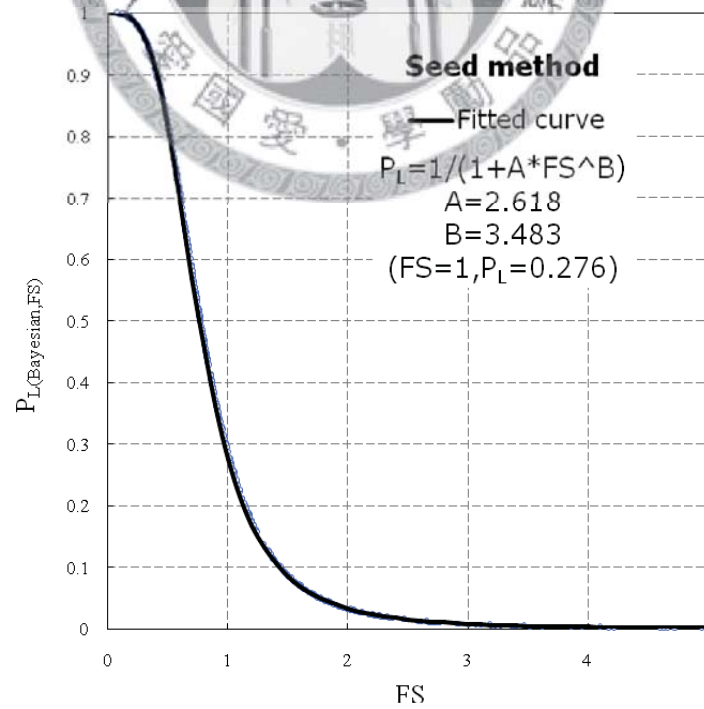


圖4-16 Seed法FS與 $P_{L(Bayesian, FS)}$ 之映射函數關係

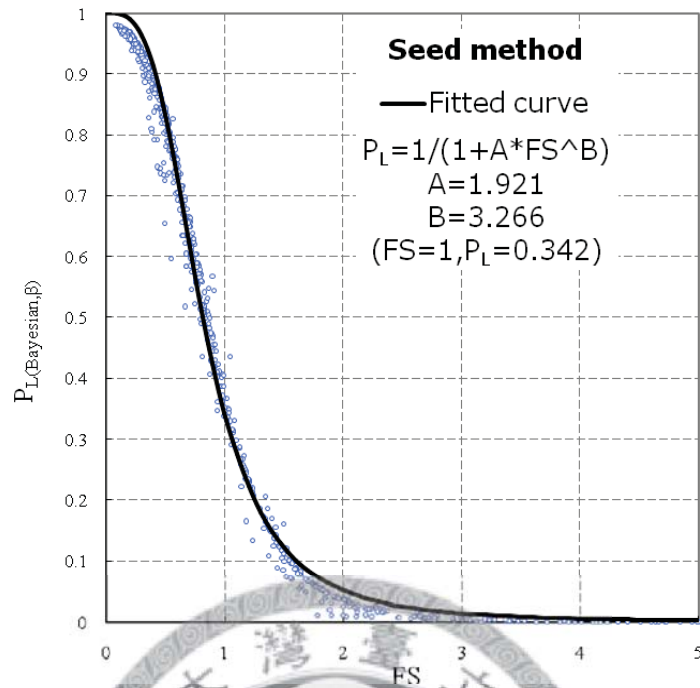


圖4-17 Seed法FS與 $P_{L(Bayesian, \beta)}$ 之映射函數關係

(2) NJRA法

圖4-18~圖4-21為NJRA法計算每個案例之抗液化安全係數FS與對應之各機率模式機率預測值 P_L 之擬合結果。各模式之擬合係數與當FS = 1.0 時，NJRA法對應之液化機率 $P_{L(Logistic)}$ 、 $P_{L(Reliability)}$ 、 $P_{L(Bayesian, FS)}$ 及 $P_{L(Bayesian, \beta)}$ 分別為40.3% (A=1.484, B=4.347)、31.2% (A=2.203, B=3.218)、42.5% (A=1.351, B=6.502) 及 32.3% (A=2.095, B=3.339)。

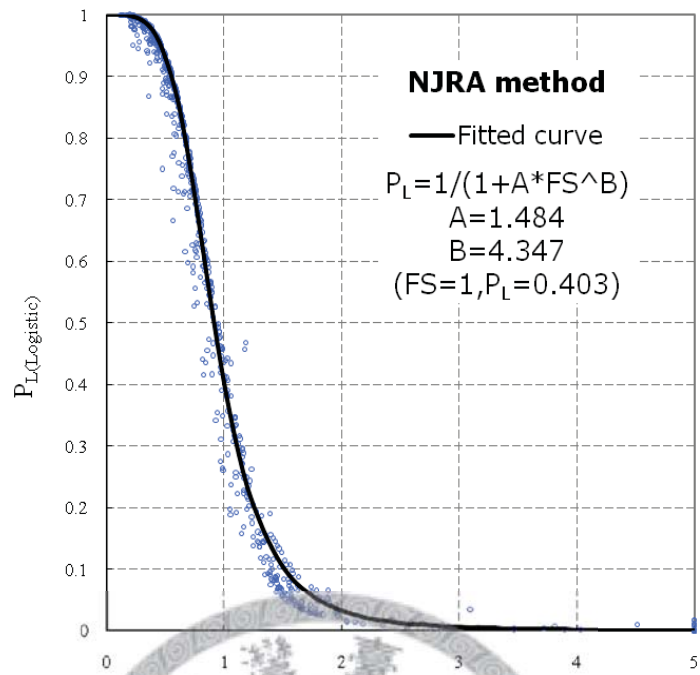


圖4-18 NJRA法FS與 $P_{L(Logistic)}$ 之映射函數關係

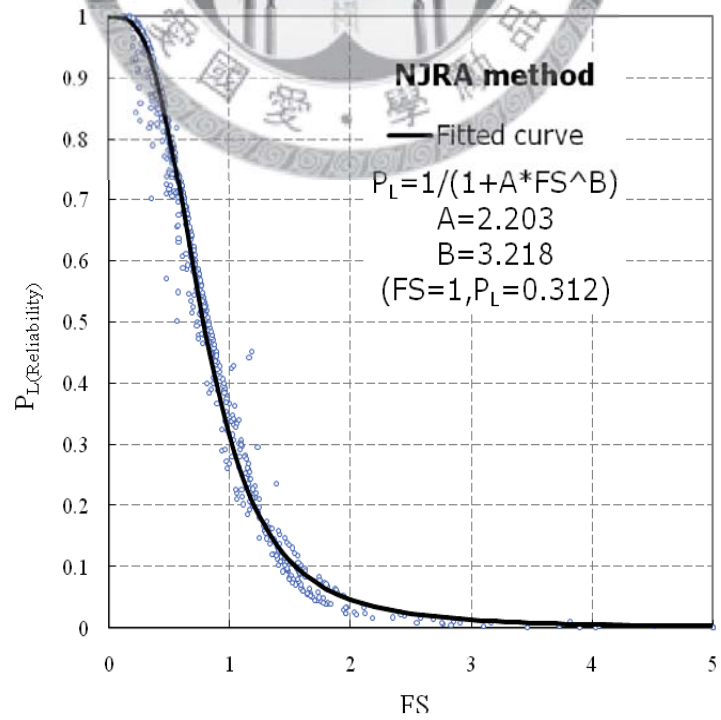


圖4-19 NJRA法FS與 $P_{L(Reliability)}$ 之映射函數關係

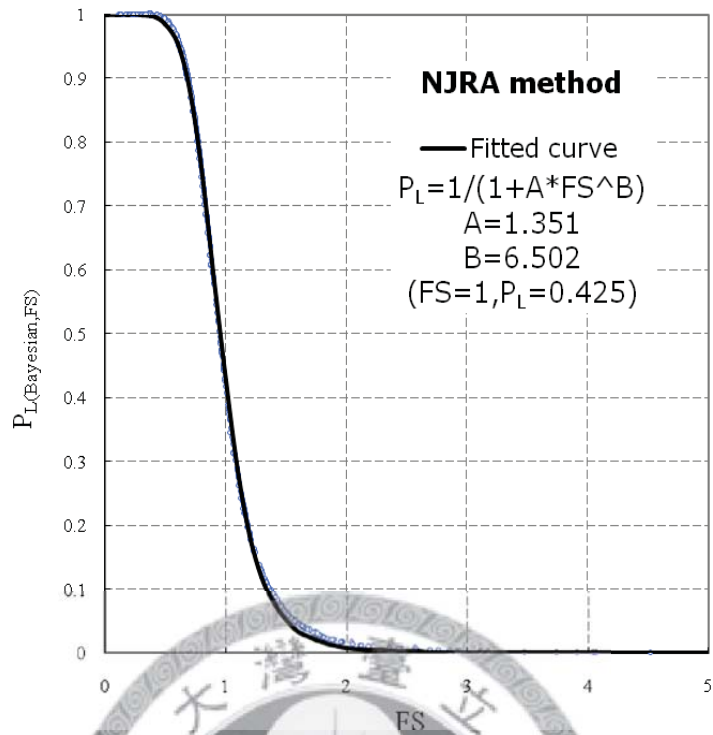


圖4-20 NJRA法FS與 $P_{L(Bayesian, FS)}$ 之映射函數關係

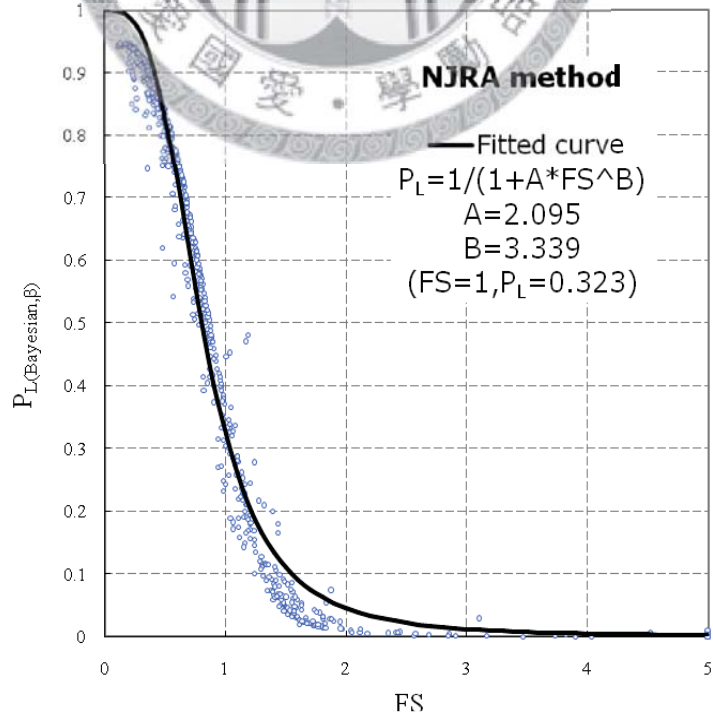


圖4-21 NJRA法FS與 $P_{L(Bayesian, \beta)}$ 之映射函數關係

(3) T-Y法

圖4-22～圖4-25為T-Y法計算每個案例之抗液化安全係數FS與對應之各機率模式機率預測值 P_L 之擬合結果。各模式之擬合係數與當FS = 1.0 時，T-Y法對應之液化機率 $P_{L(Logistic)}$ 、 $P_{L(Reliability)}$ 、 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 及 $P_{L(Bayesian,\beta)}$ 分別為45.6% (A=1.194, B=5.069)、32.5% (A=2.076, B=3.729)、52.4% (A=0.907, B=6.463) 及 32.2% (A=2.105, B=3.544)。

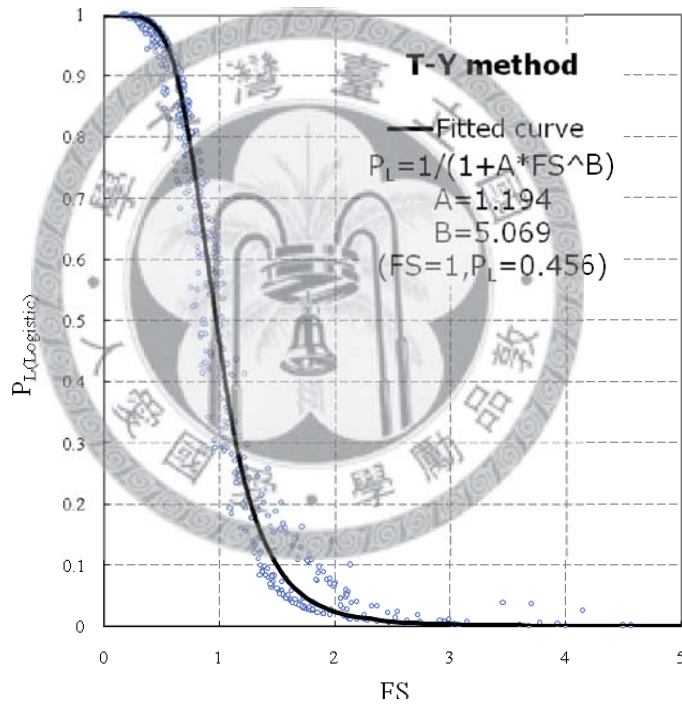


圖4-22 T-Y法FS與 $P_{L(Logistic)}$ 之映射函數關係

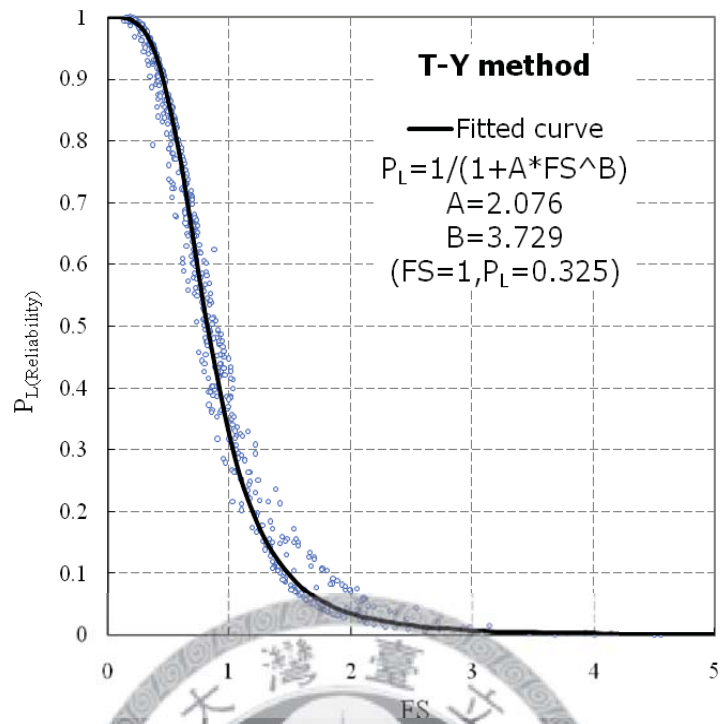


圖4-23 T-Y法FS與 $P_{L(Reliability)}$ 之映射函數關係

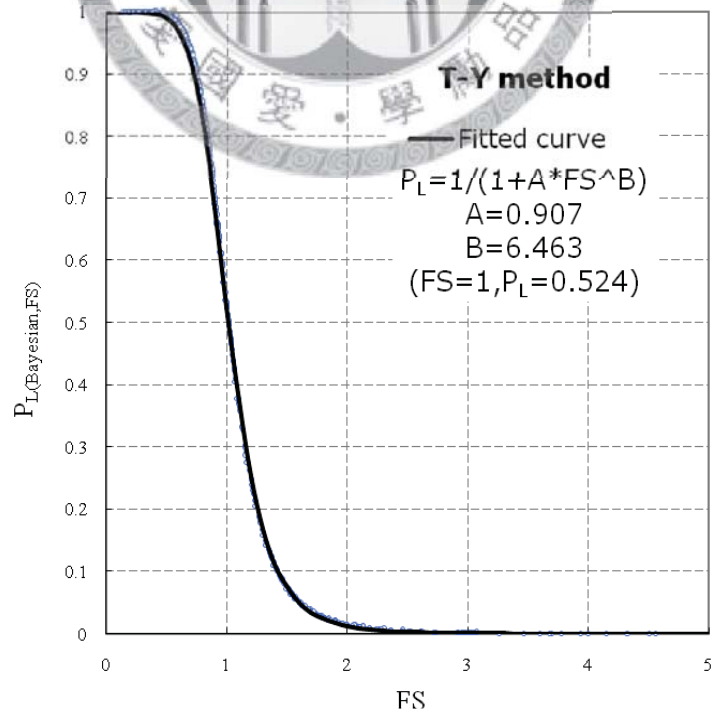


圖4-24 T-Y法FS與 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 之映射函數關係

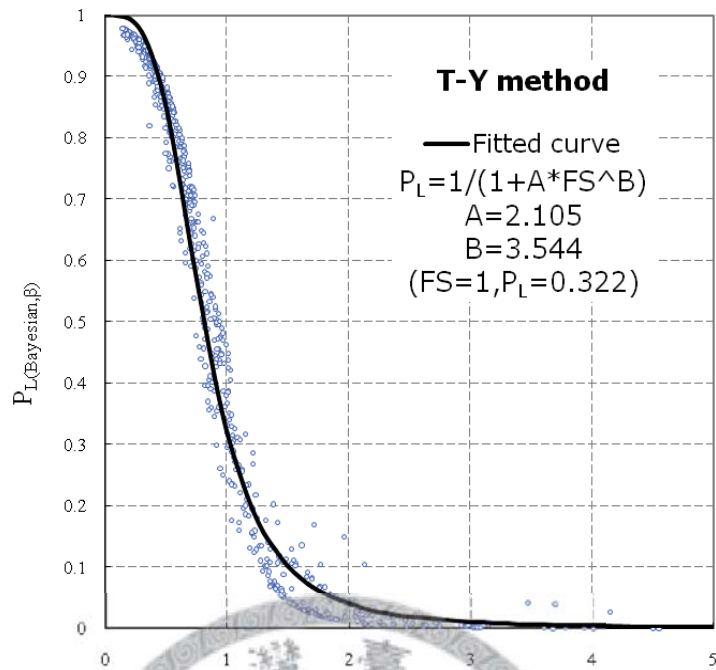


圖 4-25 T-Y 法 FS 與 $P_{L(Bayesian, \beta)}$ 之映射函數關係

(4) HBF 法

圖 4-26~圖 4-29 為 HBF 法計算每個案例之抗液化安全係數 FS 與對應之各機率模式機率預測值 P_L 之擬合結果。各模式之擬合係數與當 $FS = 1.0$ 時，HBF 法對應對應之液化機率 $P_{L(Logistic)}$ 、 $P_{L(Reliability)}$ 、 $P_{L(Bayesian, FS)}$ 及 $P_{L(Bayesian, \beta)}$ 分別為 36.8% ($A=1.714$ ， $B=4.444$)、29.4% ($A=2.402$ ， $B=3.302$)、44.9% ($A=1.229$ ， $B=6.775$) 及 29.9% ($A=2.346$ ， $B=3.614$)。

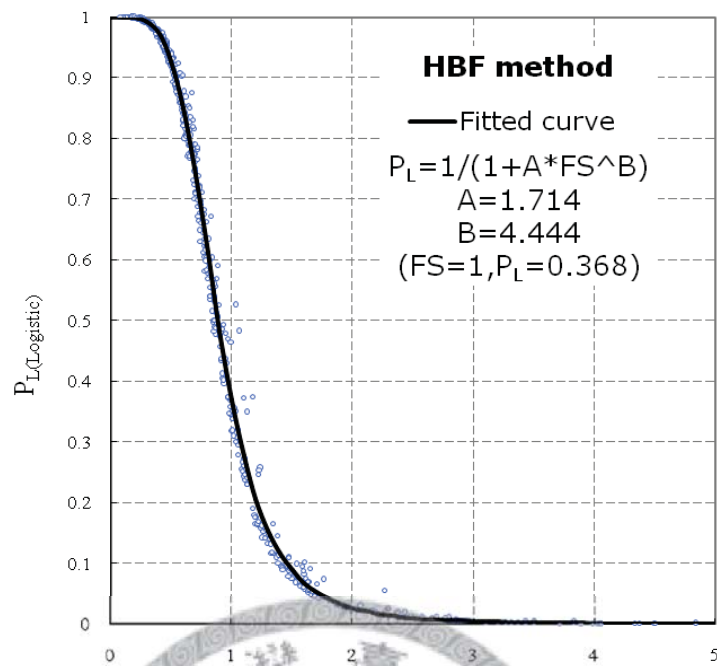


圖4-26 HBF法FS與 $P_{L(Logistic)}$ 之映射函數關係

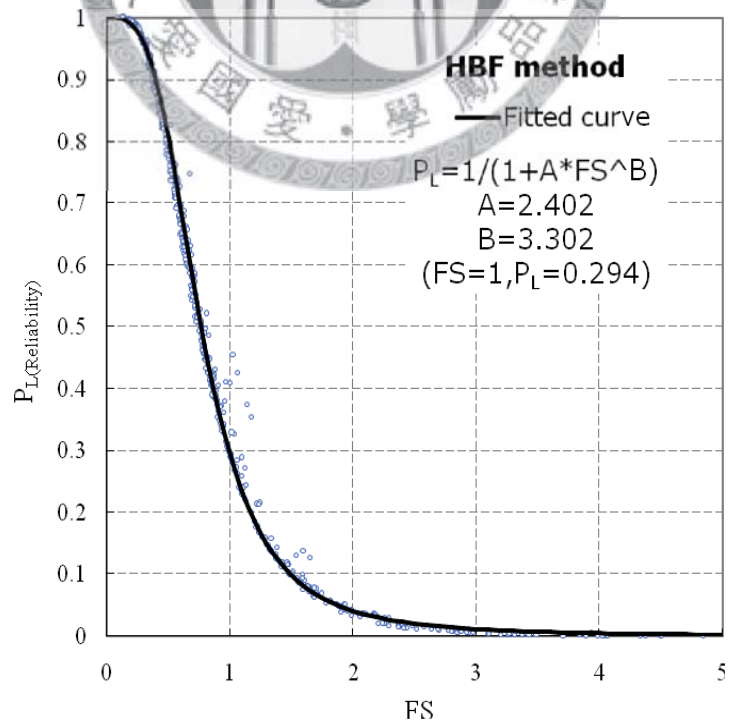


圖4-27 HBF法FS與 $P_{L(Reliability)}$ 之映射函數關係

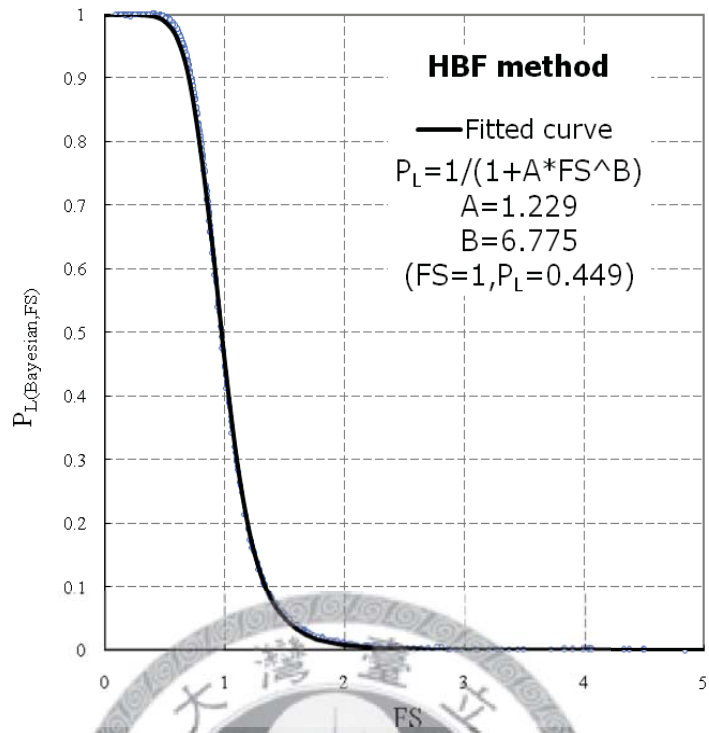


圖4-28 HBF法FS與 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 之映射函數關係

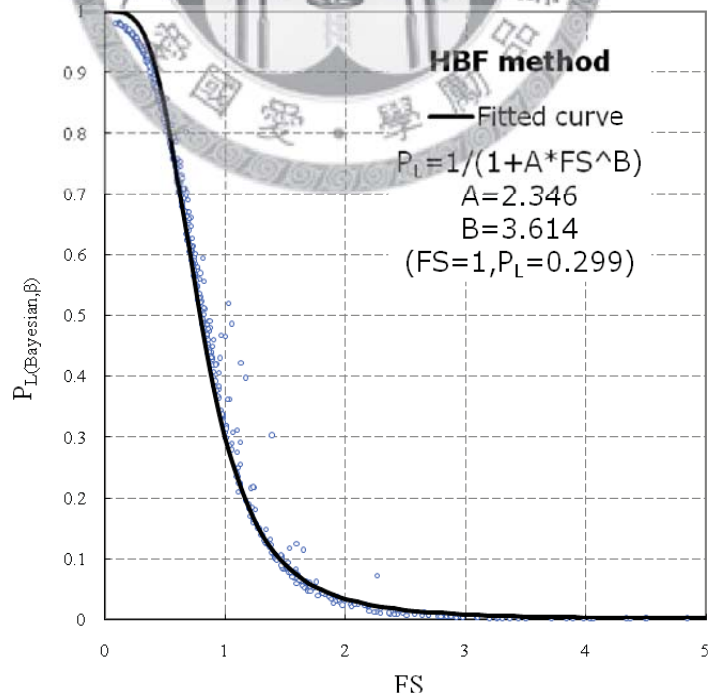


圖4-29 HBF法FS與 $P_{L(Bayesian,\beta)}$ 之映射函數關係

(5) 比較討論

綜合以上分析結果，表4-9為安全係數 $FS=1.0$ 、 1.2 及 1.5 時之各機率評估模式所推估期望液化機率 P_L 之比較。當 $FS=1.0$ 時，Seed法、NJRA 法、T-Y法及HBF法經不同機率評估模式加權計算後之期望液化機率 P_L 分別為 34.9% 、 36.5% 、 40.9% 及 35.2% ，如以Juang et al.2002建議之液化可能性分類表4-8而言，皆對應表4-8之『是否液化的可能性均等』；當 $FS=1.2$ 時，四簡化法之 P_L 值分別為 22.1% 、 21.3% 、 22.6% 及 19.1% ，皆對應表4-9之『液化可能性較小』；當 $FS=1.5$ 時，四簡化法之 P_L 值分別為 11.6% 、 10.1% 、 9.2% 及 8.1% ，則皆對應表4-8之『幾乎不會液化』。

由上述說明可知，各機率預測模式所得 P_L 對應表4-8之液化可能性皆為一致。雖然各評估法在不同安全係數對應之 P_L 值有少許差異而相對保守程度稍有不同，整體而言，各評估法之差異性並不大。

表4-8 液化可能性分類 (Juang et al,2002)

液化分類	液化機率 P_L	可能性描述
5	≥ 0.85	幾乎確定會液化
4	$0.65 \sim 0.85$	液化可能性較大
3	$0.35 \sim 0.65$	是否液化的可能性均等
2	$0.15 \sim 0.35$	液化可能性較少
1	< 0.15	幾乎不會液化

表4-9 不同安全係數對應之期望液化機率

Method	Model	可信度 權重	期望液化機率 $P_L(\%)$					
			FS=1		FS=1.2		FS=1.5	
Seed	$P_L(\text{Logistic})$	0.268	42.4%	34.9%	26.0%	22.1%	12.5%	11.6%
	$P_L(\text{Reliability})$	0.241	34.4%		23.0%		13.0%	
	$P_L(\text{Bayesian,FS})$	0.241	27.6%		16.8%		8.5%	
	$P_L(\text{Bayesian},\beta)$	0.250	34.2%		22.3%		12.2%	
NJRA	$P_L(\text{Logistic})$	0.288	40.3%	36.5%	23.4%	20.9%	10.4%	9.6%
	$P_L(\text{Reliability})$	0.252	31.2%		20.2%		11.0%	
	$P_L(\text{Bayesian,FS})$	0.210	42.5%		18.5%		5.0%	
	$P_L(\text{Bayesian},\beta)$	0.250	32.3%		20.6%		11.0%	
T-Y	$P_L(\text{Logistic})$	0.290	45.6%	40.9%	24.9%	22.6%	9.7%	9.2%
	$P_L(\text{Reliability})$	0.236	32.5%		19.6%		9.6%	
	$P_L(\text{Bayesian,FS})$	0.237	52.4%		25.3%		7.4%	
	$P_L(\text{Bayesian},\beta)$	0.237	32.2%		19.9%		10.2%	
HBF	$P_L(\text{Logistic})$	0.254	36.8%	35.2%	20.6%	19.1%	8.8%	8.1%
	$P_L(\text{Reliability})$	0.247	29.4%		18.6%		9.8%	
	$P_L(\text{Bayesian,FS})$	0.247	44.9%		19.1%		5.0%	
	$P_L(\text{Bayesian},\beta)$	0.252	29.9%		18.1%		9.0%	

第五章 結論與建議

綜合以上的研究方法與分析結果，茲列出下列幾點結論與建議，供工程界參考應用。

5.1 結論

- (1) 本研究利用台灣921地震及世界各地地震之現場液化與不液化案例資料共669筆，依據統計技術與機率理論，並結合前人的分析方法建立出四種液化機率評估模式，其中在邏輯迴歸機率模式部分，本研究建立之邏輯迴歸式有較佳之預測準確率，亦即對統計資料有較佳的解釋能力；在可靠度理論模式部分，除了運用邏輯分析結果推估CRR之統計指標外並以簡單之指數函數建立其趨勢線迴歸式，簡化了須透過數值積分求解之複雜計算過程，因此分析及運用上相當方便；另外以貝氏定理分別建立安全係數FS及可靠度指數 β 為基礎的貝氏機率模式供工程界參考及應用。
- (2) 本研究以訊息理論量化各機率評估模式之不確定性並據以比較其相對可信度。由本研究的分析結果顯示邏輯迴歸機率模式在各簡易評估法中之相對可信度最高，因此，建議在液化機率之預測上應採以較高之相對權重值。另外，各機率評估模式在HBF法及Seed法之機率預測能力較好，而NJRA法與T-Y法則相對較差。其中各模式在HBF法中之可信度最高且模式差異性（不確定性）最小，可見在HBF法中不同機率評估模式在液化機率的詮釋上，不致使各機率評估模式之分析結果有較大差異而導致在機率分析應用及意涵上產生困惑，因此HBF法之穩定性及整體表現優於其他三簡易評估法。
- (3) 本研究之分析結果顯示 $P_{L(Logistic)}$ 普遍較 $P_{L(Reliability)}$ 保守，RMSE約0.1左右且在不同簡易評估法之結果及趨勢均相當一致；而 $P_{L(Reliability)}$ 與 $P_{L(Bayesian,\beta)}$ 在不同

簡易評估法中之分析結果二 P_L 值差異均非常小，其模式相似性極高，至於 $P_{L(Logistic)}$ 與 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 二值資料散佈點變異性稍大，在Seed法中 $P_{L(Logistic)}$ 較保守，反之在NJRA、T-Y及HBF法中則 $P_{L(Bayesian,FS)}$ 普遍較保守，以上趨勢可供液化機率預測應用時的參考。

- (4) 本研究分別以不同機率模式擬合Seed法、NJRA法、T-Y法及HBF法等四簡易評估法之液化機率 P_L 與安全係數FS之映射關係。分析結果顯示當FS為1.0、1.2、1.5之各評估法期望液化機率 P_L 分別為Seed (34.9%，22.1%，11.6%)、NJRA (36.5%，21.3%，10.1%)、T-Y (40.9%，22.6%，9.2%)、HBF (35.2%，19.1%，8.1%)。雖然各評估法在不同安全係數對應之 P_L 值有少許差異而相對保守程度稍有不同，但由於各評估法之差異性並不大，因此各評估法經各機率模式加權分析結果其適用程度相當。

5.2 建議

- (1) 縱然本研究已利用目前國內外最新的669筆液化與非液化案例資料為基礎來進行液化機率預測，但由於國外案例部分係來自世界各地之數個不同地震之案例資料彙集而得，因此地質條件與地震特性的不同可能影響在統計分析及機率預測上的誤差。建議後續的研究可以蒐集國外單一地震的大量資料庫，如四川大地震或日本311東北外海大地震等案例資料進行相關研究。
- (2) 本研究建議的國內本土性雙曲線評估法（BHF法）其物理意義明確且公式簡便，經本研究驗證後，在不同機率模式之預測準確率與可信度皆最佳且各機率模式之間的變異性非常小，因此穩定性及整體表現優於目前世界上常用三評估法（Seed法、NJRA法及T-Y法），建議可研究發展一套結合機率意涵之相關規範供工程界使用。

參考文獻

1. Seed, H.B., and Idriss, I.M., “Simplified procedure for evaluating soil liquefaction potential,” *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 97, No.SM9, pp. 1249-1273 (1971).
2. Haldar, A., and Tang, W.H., “Probabilistic evaluation of liquefaction potential,” *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 105, No. GT2, pp. 145–163(1979).
3. Liao, S.S., Veneziano, D., and Whitman, R.V., “Regression models for evaluating liquefaction probability,” *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 114, No. 4, pp. 389–411 (1988).
4. Juang, C.H., Rosowsky, D.V., and Tang, W.H., “A reliability-based method for assessing liquefaction potential of sandy soils,” *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, ASCE, Vol. 125, No. 8, pp. 684–689 (1999).
5. Juang, C.H., Jiang, T., and Andrus, R.D., “Assessing probability-based methods for liquefaction potential evaluation,” *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, ASCE, Vol. 128, No. 7, pp. 580–589 (2002).
6. Seed, H.B., Tokimatsu, K., Harder, L.F., and Chung, R.M., “Influence of SPT procedures in soil liquefaction resistance evaluations,” *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 111, No. 12, pp. 1425–1445(1985).
7. Youd, T.L., Idriss, I.M., Andrus, R.D., Arango, I., Castro, G., Christian, J.T., Dobry, R., Liam, F.W.D., Harder, L.F., Jr., Hynes, M.E., Ishihara, K., Koester, J.P., Laio, S.S.C., Marcuson, W.F., III, Martin, G.R., Mitchell, J.K., Moriwaki, Y., Power, M.S.,

Robertson, P.K., Seed, R.B., Stokoe, K.H.,II, “Liquefaction resistance of soils: Summary report from the 1996 NCEER and 1998 NCEER/NSF workshops on evaluation of liquefaction resistance of soils,” Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, Vol. 127, No. 10, pp. 817–833 (2001).

8. Tokimatsu, K., and Yoshimi, Y., “Empirical correlation of soil liquefaction based on SPT-N value and fines content,” Soils and Foundations, Vol. 23, No. 4, pp. 56–74 (1983).

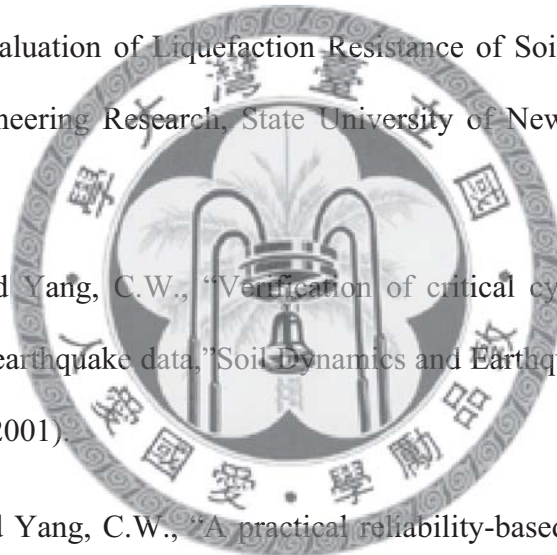
9. Youd, T.L., and Noble, S.K., “Magnitude scaling factors,” Proceedings, NCEER Workshop on Evaluation of Liquefaction Resistance of Soils, National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo, pp. 149–165 (1997).

10. Hwang, J.H., and Yang, C.W., “Verification of critical cyclic strength curve by Taiwan Chi-Chi earthquake data,” Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 21, pp. 237–257 (2001).

11. Hwang, J.H., and Yang, C.W., “A practical reliability-based method for assessing soil liquefaction potential” Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 24, pp. 761–770 (2004).

12. Seed, H.B., “Soil liquefaction and cyclic mobility evaluation for level ground during earthquake,” Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 105, No. GT2, pp. 201–255 (1979).

13. Seed, H.B., Idriss, I.M., and Arango, I., “Evaluation of liquefaction potential using field performance data,” Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 109, No. 3, pp. 458–482 (1983).



14. Seed, H.B., and Idriss, I.M., "Ground motions and soil liquefaction during earthquakes," Monograph published by Earthquake Engineering Research Institute (1982).
15. Shannon, C.E., "A mathematical theory of communication," Bell System Technical Journal 27, pp.379-423 and pp. 23-656 (1948)
16. Theil, H., Statistical Decomposition, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, London (1972).
17. Cetin, K. O. , Seed, R. B. , Moss, R. E. S. , Kiureghian, A. D., Tokimatsu, K., Harder, L. F. and Kayen, R. E.(2000) "Field case histories for SPT-based in situ liquefaction potential evaluation" Geotechnical Engineering Research Report No.UCB/GT-2000/09.
18. 日本道路協會，道路橋示方書・同解説，Ⅴ耐震設計編(1990)。
19. 日本道路協會，道路橋示方書・同解説，Ⅴ耐震設計編(1996)。
20. 林真真、鄒幼涵，迴歸分析，華泰書局(1993)。
21. 王濟川、郭志剛，Logistic迴歸模型-方法及應用，五南圖書出版(2003)。
22. 高橋信等，世界第一簡單統計學迴歸分析篇，世茂出版(2010)。
23. 內政部，建築物耐震設計規範及解說 (2005)。
24. 黃富國，「SPT 液化機率及損害評估模式之建立與應用」，中國土木水利工程學刊，第二十卷，第二期，第155-174 頁 (2008)。
25. 黃富國，「基於訊息理論之液化機率與損害評估模式建立與應用」，中國土木水利工程學刊，第二十卷，第三期 (2008)。

26. 黃富國、陳正興，「土壤液化之機率分析法」，地工技術，第82期，第43-56頁（2000）。
27. 亞新工程顧問公司，土壤液化評估與處理對策研擬第一期計畫（彰化員林鎮、大村鄉及社頭鄉）總報告(2000)。
28. 亞新工程顧問公司，南投、霧峰地區土壤液化調查研究(2000)。
29. 國家地震工程研究中心（2000），921集集大地震大地工程震災調查報告。
30. 黃俊鴻、楊志文、譚志豪、陳正興(2000)，「集集地震土壤液化之調查與分析」，地工技術，第77期，第51-64頁。
31. 黃俊鴻、楊志文(2001)，「以集集地震案例資料建立土壤臨界液化強度曲線」，中國土木水利工程學刊，第13卷，第二期，第339-352頁。
32. 黃一正，「全機率土壤液化評估法之研究」，國立中央大學土木工程研究所碩士論文，中壢（2002）。
33. 李柏毅，「土壤液化評估模式之不確定性」，國立中央大學土木工程研究所碩士論文，中壢（2011）。
34. 陳明澤，「用類神經網路建立以SPT、CPT及 V_s 為主之臨界液化曲線」，朝陽科技大學營建工程系碩士論文，台中（2002）。
35. 黃富國，「土壤液化之危害度分析」，國立台灣大學土木工程研究所博士論文，台北（1996）。
36. 楊志文，「全機率土壤液化評估法之研究」，國立中央大學土木工程研究所碩士論文，中壢（2003）。
37. 李雅芬，「基於可靠度理論之土壤液化機率評估法之研究」，國立成功大學土

木工程研究所博士論文，台南（2007）。

38. 陳正興等，土壤液化對交通結構物之影響及液化潛能評估方法與災害分析模式之研究，國家地震工程研究中心（2005）



附錄A



表A-1 SPT-N集集地震液化案例資料

<i>depth</i> (m)	<i>FC</i> (%)	$(N_1)_{60}$	σ'_v (kg/cm ²)	σ_v (kg/cm ²)	<i>PGA</i> (g)	M_w	D_{GW}
6	61	7	0.67	1.15	0.428	7.3	2.3
4.2	62	3	0.53	0.83	0.428	7.3	1.8
4.2	24	3	0.69	0.84	0.498	7.3	2.7
9	42	7	1.17	1.84	0.789	7.3	2.3
2.4	41	6	0.46	0.48	0.789	7.3	2.3
5	22	3	0.65	0.93	0.428	7.3	2.2
7.7	16	11	1.14	1.53	0.165	7.3	3.8
8.1	16	9	1.10	1.54	0.165	7.3	3.1
5.7	16	8	0.80	1.10	0.165	7.3	2.8
8.1	19	11	1.03	1.53	0.165	7.3	2.8
3.7	11	9	0.59	0.73	0.165	7.3	2.3
10	45	8	1.19	1.89	0.165	7.3	3
7.7	18	7	1.06	1.53	0.165	7.3	3
5.7	15	6	0.80	1.13	0.165	7.3	2.4
7.7	48	9	1.00	1.53	0.165	7.3	2.4
7.7	13	6	1.08	1.47	0.165	7.3	3.8
3.7	17	9	0.50	0.74	0.165	7.3	1.3
3.7	28	7	0.48	0.69	0.165	7.3	1.6
7.7	19	7	0.99	1.52	0.165	7.3	2.4
8.2	17	7	0.96	1.61	0.165	7.3	3.1
2.7	22	4	0.51	0.52	0.165	7.3	2.7
7.2	22	6	0.93	1.38	0.165	7.3	2.7
7.2	13	6	0.96	1.40	0.165	7.3	2.8
10.2	13	6	1.24	1.98	0.165	7.3	2.8
11.7	13	10	1.37	2.26	0.165	7.3	2.8
16	20	11	1.53	2.85	0.165	7.3	2.8
5.7	40	5	0.78	1.08	0.165	7.3	2.8

8.7	42	7	1.01	1.61	0.165	7.3	2.8
5.7	30	4	0.84	1.13	0.165	7.3	2.8
7.2	30	5	0.98	1.42	0.165	7.3	2.8
11.7	48	6	1.43	2.32	0.165	7.3	2.8
8.7	44	6	1.09	1.68	0.165	7.3	2.8
3.8	24	3	0.35	0.73	0.165	7.3	1.4
4.8	29	9	0.44	0.92	0.165	7.3	1.4
12.8	25	15	1.28	2.56	0.165	7.3	1.3
8.8	31	5	0.86	1.74	0.165	7.3	1.3
7.8	46	10	0.69	1.47	0.165	7.3	1.3
15.4	33	20	3.54	4.70	1	7.3	4.8
8.8	39	17	2.78	3.18	1	7.3	4.8
6.8	59	8	2.57	2.77	1	7.3	4.8
17.6	26	19	3.40	4.98	1	7.3	1.9
3.3	34	6	1.89	2.03	1	7.3	1.9
16.9	49	28	3.52	4.86	1	7.3	3.5
3	6	3	0.35	0.54	0.124	7.3	1.1
3	12	5	0.36	0.55	0.124	7.3	1.1
9	4	12	1.00	1.79	0.124	7.3	1.1
3	36	2	0.37	0.56	0.124	7.3	1.1
4	36	2	0.45	0.74	0.124	7.3	1.1
4	21	5	0.46	0.75	0.124	7.3	1.1
4	30	4	0.47	0.76	0.124	7.3	1.1
3	9	2	0.36	0.55	0.124	7.3	1.1
6	33	2	0.68	1.17	0.124	7.3	1.1
3	5	7	0.34	0.53	0.124	7.3	1.1
5	20	9	0.89	0.99	0.428	7.3	4
5.8	25	7	1.11	1.19	0.428	7.3	5
8.3	13	12	1.04	1.59	0.428	7.3	2.8
6.3	15	16	0.91	1.42	0.428	7.3	1.2
2.8	22	6	0.31	0.53	0.428	7.3	0.7
7.3	21	11	1.24	1.47	0.428	7.3	5
3	24	5	0.54	0.60	0.428	7.3	2.4

7.5	55	12	0.95	1.42	0.428	7.3	2.8
5.8	35	4	0.82	1.12	0.428	7.3	2.8
5.8	30	10	0.67	1.10	0.428	7.3	1.5
4	26	12	0.56	0.76	0.428	7.3	2
4	11	11	0.57	0.76	0.428	7.3	2.1
2.8	55	2	0.43	0.56	0.33	7.3	1.5
5.8	47	6	0.71	1.14	0.33	7.3	1.5
7.5	47	7	0.72	1.41	0.211	7.3	0.6
7.5	13	7	0.72	1.42	0.211	7.3	0.5
3	26	4	0.32	0.57	0.211	7.3	0.5
3	30	6	0.38	0.56	0.211	7.3	1.2
4.5	26	7	0.49	0.83	0.211	7.3	1.1
12	39	9	1.14	2.25	0.211	7.3	0.9
12	28	10	1.02	2.16	0.211	7.3	0.6
13.5	47	7	1.21	2.50	0.211	7.3	0.6
12	48	7	1.07	2.21	0.211	7.3	0.6
12	41	8	1.06	2.20	0.211	7.3	0.6
13.5	42	7	1.19	2.48	0.211	7.3	0.6
19.5	46	9	1.81	3.67	0.211	7.3	1
12	13	12	1.08	2.22	0.211	7.3	0.6
13.5	14	13	1.24	2.53	0.211	7.3	0.6
4.5	32	4	0.50	0.84	0.211	7.3	1.1
3	38	3	0.36	0.55	0.211	7.3	1.1
6	11	7	0.61	1.10	0.211	7.3	1.1
6	14	7	0.79	1.18	0.211	7.3	2.1
5.8	10	5	0.67	1.13	0.211	7.3	1.5
4.3	9	4	0.57	0.84	0.211	7.3	1.6
5.8	10	6	0.63	1.13	0.211	7.3	0.8
8.8	37	7	0.92	1.72	0.211	7.3	0.8
8.2	10	8	0.98	1.60	0.211	7.3	2
8.8	30	4	1.00	1.72	0.211	7.3	1.7
5.8	34	3	0.82	1.12	0.211	7.3	2.5
10.3	28	11	1.21	2.01	0.211	7.3	2.3

10.3	45	10	1.32	2.01	0.211	7.3	3.4
9.2	49	12	1.06	1.79	0.211	7.3	1.9
11.8	24	10	1.57	2.30	0.211	7.3	4.5
13.3	30	10	1.32	2.59	0.211	7.3	0.6
8.8	46	4	1.06	1.72	0.211	7.3	2.1
13.3	11	16	1.41	2.59	0.211	7.3	1.5
14.8	12	11	1.48	2.89	0.211	7.3	0.7
4.3	10	4	0.66	0.84	0.211	7.3	2.5
7.3	23	5	0.86	1.42	0.211	7.3	2.5
14.8	17	14	1.64	2.89	0.211	7.3	1.7
11.8	13	12	1.20	2.30	0.211	7.3	0.8
2.8	18	4	0.37	0.55	0.211	7.3	1
5.8	47	3	0.59	1.13	0.211	7.3	0.4
10.3	31	6	1.12	2.01	0.211	7.3	1.4
7.3	9	11	0.92	1.45	0.211	7.3	2
3.8	17	6	0.47	0.74	0.211	7.3	1.1
7.3	16	5	0.73	1.42	0.211	7.3	0.4
7.3	18	12	0.89	1.42	0.211	7.3	2
5.8	19	5	0.69	1.13	0.211	7.3	1.4
12.8	26	10	1.54	2.48	0.211	7.3	3.4
4.3	26	9	0.70	0.88	0.211	7.3	2.5
11.8	12	18	1.21	2.30	0.211	7.3	0.9
8.8	25	8	1.04	1.72	0.211	7.3	2
10.3	15	14	1.02	2.01	0.211	7.3	0.4
8.8	24	5	0.93	1.67	0.211	7.3	1.4
11.8	17	12	1.33	2.30	0.211	7.3	2.1
11.8	31	11	1.33	2.30	0.211	7.3	2.1
14.3	14	14	2.09	2.79	0.211	7.3	7.3
4.3	18	4	0.62	0.84	0.211	7.3	2.1
5.3	21	10	0.85	0.97	0.42	7.3	4.1
8.8	38	11	1.24	1.71	0.42	7.3	4.1
5.3	21	17	0.76	1.00	0.42	7.3	2.9
3.6	11	6	0.64	0.70	0.42	7.3	2.9

5	25	14	0.82	1.03	0.42	7.3	2.9
2.3	29	8	0.32	0.40	0.42	7.3	1.4
3.8	13	6	0.47	0.70	0.42	7.3	1.4
7.4	25	13	0.82	1.42	0.42	7.3	1.5
5.7	34	13	0.82	1.03	0.42	7.3	3.5
2.2	23	6	0.36	0.41	0.42	7.3	1.7
6.4	16	11	0.76	1.23	0.42	7.3	1.7
2.1	18	2	0.31	0.39	0.42	7.3	1.3
5.5	17	15	0.65	1.06	0.42	7.3	1.3
4.7	29	12	0.66	0.88	0.42	7.3	2.5
7.8	16	7	1.00	1.53	0.42	7.3	2.5
6.2	23	6	0.71	1.16	0.42	7.3	1.7
6.3	30	11	0.82	1.19	0.42	7.3	2.6
10.8	20	11	1.27	2.08	0.42	7.3	2.6
6.5	17	4	0.76	1.26	0.42	7.3	1.5
4.9	29	9	0.71	0.89	0.42	7.3	3.1
10.9	31	26	1.41	2.20	0.42	7.3	3.1
13.2	31	26	1.67	2.68	0.42	7.3	3.1
7.2	18	17	0.96	1.37	0.42	7.3	3
8.1	18	17	1.04	1.55	0.42	7.3	3
2.3	22	2	0.35	0.45	0.789	7.3	1.3
3	45	13	0.45	0.63	0.789	7.3	1.2
7.3	40	13	1.14	1.55	0.789	7.3	3.2
1.3	65	1.5	0.17	0.25	0.789	7.3	0.5
6.8	15	10	0.84	1.39	0.789	7.3	2
5.8	22	11	0.72	1.16	0.789	7.3	1.4
5.8	48	10	0.70	1.19	0.789	7.3	0.9
8.8	40	13	1.36	1.82	0.789	7.3	4.2
2.8	38	3	0.36	0.55	0.789	7.3	0.9
5.8	49	12	0.91	1.22	0.789	7.3	2.7
4.2	27	7	0.66	0.85	0.789	7.3	2.3
5.8	27	6	0.85	1.15	0.789	7.3	2.8
7.2	29	9	0.99	1.44	0.789	7.3	2.8

4.2	34	8	0.69	0.86	0.789	7.3	2.6
2.8	33	4	0.54	0.55	0.789	7.3	2.7
4.2	43	5	0.71	0.86	0.789	7.3	2.7
4.2	40	7	0.63	0.86	0.789	7.3	1.9
5.8	40	9	0.81	1.20	0.789	7.3	1.9
7.5	17	4	0.92	1.43	0.428	7.3	2.3
6	22	12	0.78	1.14	0.428	7.3	2.3
2.5	42	8	0.46	0.48	0.428	7.3	2.3
4.8	29	17	0.67	0.91	0.428	7.3	2.3
2.8	55	7	0.48	0.53	0.428	7.3	2.3
7.8	40	8	1.40	1.48	1	7.3	7
12.3	17	26	1.99	2.34	1	7.3	8.8
2.8	46	6	0.40	0.53	1	7.3	1.5
7.3	66	14	0.94	1.39	0.498	7.3	2.7
8.8	61	16	1.07	1.67	0.498	7.3	2.7
3.3	14	13	0.53	0.63	0.789	7.3	2.3
2.6	6	15	0.46	0.49	0.789	7.3	2.3
3.4	20	16	0.54	0.65	0.789	7.3	2.3
2.6	18	20	0.46	0.49	0.789	7.3	2.3

表A-2 SPT-N集集地震非液化案例資料

<i>depth</i> (m)	<i>FC</i> (%)	$(N_1)_{60}$	σ'_v (kg/cm ²)	σ_v (kg/cm ²)	<i>PGA</i> (g)	M_w	D_{GW}
9	14	19	1.01	1.80	0.124	7.3	1.1
8	24	20	0.91	1.60	0.124	7.3	1.1
4	15	8	0.48	0.77	0.124	7.3	1.1
9	10	22	0.99	1.78	0.124	7.3	1.1
10	16	18	1.09	1.98	0.124	7.3	1.1
9	12	20	0.98	1.77	0.124	7.3	1.1
10	10	19	1.09	1.98	0.124	7.3	1.1
5	31	16	0.59	0.98	0.124	7.3	1.1

10	14	25	1.10	1.99	0.124	7.3	1.1
9	6	22	0.98	1.77	0.124	7.3	1.1
7	8	16	0.77	1.36	0.124	7.3	1.1
9	7	22	0.98	1.77	0.124	7.3	1.1
10	11	19	1.08	1.97	0.124	7.3	1.1
5	17	15	0.56	0.95	0.124	7.3	1.1
10	7	18	1.06	1.95	0.124	7.3	1.1
9	9	22	0.99	1.78	0.124	7.3	1.1
10	12	20	1.09	1.98	0.124	7.3	1.1
9	15	17	0.98	1.77	0.124	7.3	1.1
10	17	21	1.09	1.98	0.124	7.3	1.1
10	11	22	1.09	1.98	0.124	7.3	1.1
10	14	20	1.08	1.97	0.124	7.3	1.1
9	9	20	0.99	1.78	0.124	7.3	1.1
10	18	20	1.08	1.97	0.124	7.3	1.1
8	13	20	0.90	1.59	0.124	7.3	1.1
9	14	21	1.00	1.79	0.124	7.3	1.1
10	14	16	1.11	1.99	0.124	7.3	1.1
10	21	21	1.12	2.01	0.124	7.3	1.1
5	46	16	0.59	0.98	0.124	7.3	1.1
6	9	17	0.83	1.18	0.124	7.3	1.1
9	16	17	1.14	1.79	0.124	7.3	1.1
10	13	18	1.24	1.99	0.124	7.3	1.1
5	14	8	0.72	0.98	0.124	7.3	1.1
8	13	20	1.02	1.58	0.124	7.3	1.1
9	10	19	1.12	1.78	0.124	7.3	1.1
10	23	18	1.22	1.98	0.124	7.3	1.1
7	20	17	0.76	1.42	0.124	7.3	1.1
9	13	14	0.96	1.82	0.124	7.3	1.1
10	40	12	1.05	2.01	0.124	7.3	1.1
8	13	20	0.83	1.63	0.124	7.3	1.1
10	28	18	1.04	2.04	0.124	7.3	1.1
10	20	22	1.05	2.05	0.124	7.3	1.1

8	16	17	0.86	1.63	0.124	7.3	1.1
9	29	16	0.96	1.83	0.124	7.3	1.1
9	14	18	0.94	1.84	0.124	7.3	1.1
10	15	20	1.04	2.04	0.124	7.3	1.1
10	12	21	1.03	2.03	0.124	7.3	1.1
9	31	17	0.95	1.85	0.124	7.3	1.1
8	15	22	0.86	1.63	0.124	7.3	1.1
9	16	22	0.94	1.84	0.124	7.3	1.1
10	12	17	1.04	2.04	0.124	7.3	1.1
9	17	14	0.94	1.84	0.124	7.3	1.1
8	18	20	0.84	1.64	0.124	7.3	1.1
3	33	12	0.40	0.80	0.124	7.3	1.1
9	18	15	1.02	2.02	0.124	7.3	1.1
10	13	16	1.12	2.22	0.124	7.3	1.1
9	14	21	1.05	1.80	0.124	7.3	1.5
5	18	20	0.63	0.99	0.124	7.3	1.5
10	15	22	1.19	2.05	0.124	7.3	1.4
5	14	18	0.56	1.00	0.124	7.3	1.3
10	15	23	1.07	2.01	0.124	7.3	1.3
5	14	18	0.56	1.00	0.124	7.3	0.6
10	15	23	1.07	2.01	0.124	7.3	0.6
9	12	21	0.97	1.81	0.124	7.3	0.6
5	14	14	0.55	0.99	0.124	7.3	0.6
6	19	18	0.65	1.19	0.124	7.3	0.6
10	16	22	1.13	2.02	0.124	7.3	1.3
18	22	13	1.89	3.42	0.165	7.3	2.7
6	8	11	0.81	1.14	0.165	7.3	2.7
16	18	16	1.71	3.04	0.165	7.3	2.7
18	32	15	1.89	3.42	0.165	7.3	2.7
16	18	12	1.71	3.04	0.165	7.3	2.7
4	43	6	0.63	0.76	0.165	7.3	2.7
12	8	12	1.35	2.28	0.165	7.3	2.7
13.2	61	12	1.75	2.54	0.055	7.3	5.3

14.7	25	13	1.95	2.89	0.055	7.3	5.3
6.9	44	46	2.27	2.77	1	7.3	1.9
9.1	32	44	2.78	3.29	1	7.3	4
10.8	32	44	2.96	3.64	1	7.3	4
2.8	33	11	0.46	0.56	0.211	7.3	1.8
7.7	24	4	1.02	1.39	0.084	7.3	4
6.2	42	1	0.90	1.12	0.084	7.3	4
8.7	23	3	1.07	1.54	0.084	7.3	4
14.7	39	4	1.60	2.67	0.084	7.3	4
4.2	6	3	0.66	0.68	0.084	7.3	4
9.2	39	1	1.13	1.65	0.084	7.3	4
8.2	42	1	1.03	1.45	0.084	7.3	4
6.2	18	5	0.82	1.04	0.084	7.3	4
16.2	43	15	1.57	3.09	0.128	7.3	1
7.2	36	10	0.75	1.37	0.128	7.3	1
9.8	36	8	0.99	1.87	0.128	7.3	1
11.8	36	9	1.18	2.26	0.128	7.3	1
7.8	31	7	0.82	1.50	0.128	7.3	1
11.3	47	15	1.82	2.20	0.181	7.3	7.5
12.8	44	12	1.99	2.50	0.181	7.3	7.6
17.3	39	22	3.14	3.43	0.181	7.3	14.3
18.8	15	13	2.40	3.83	0.181	7.3	4.4
14.3	33	16	1.88	2.85	0.181	7.3	4.6
20.3	30	17	3.50	3.99	0.181	7.3	15.3
15.8	39	17	2.14	3.16	0.181	7.3	5.3
14.3	46	13	2.29	2.83	0.181	7.3	8.8
18.8	45	9	2.61	3.82	0.181	7.3	14.6
9.8	23	15	1.56	1.88	0.181	7.3	14.6
18.8	45	9	2.77	3.83	0.181	7.3	8.2
17.3	23	13	3.26	3.39	0.181	7.3	14.6
6.5	17	26	0.88	1.24	0.42	7.3	2.9
7.5	17	26	0.98	1.44	0.42	7.3	2.9
7.1	15	25	1.06	1.47	0.42	7.3	2.9

10.6	14	40	1.43	2.20	0.42	7.3	2.9
15.7	29	46	1.69	3.12	0.42	7.3	1.4
18.1	18	48	1.97	3.64	0.42	7.3	1.4
10.9	21	30	1.34	2.08	0.42	7.3	3.5
17.1	20	50	2.03	3.39	0.42	7.3	3.5
14.3	39	43	2.16	2.74	0.42	7.3	8.5
15.6	39	40	2.28	2.99	0.42	7.3	8.5
16.8	39	40	2.40	3.24	0.42	7.3	8.5
18.1	39	42	2.53	3.49	0.42	7.3	8.5
12.6	29	33	1.53	2.54	0.42	7.3	2.5
14.1	35	36	1.66	2.81	0.42	7.3	2.6
16.2	31	28	1.81	3.27	0.42	7.3	1.5
10.4	30	33	1.17	2.06	0.42	7.3	1.5
14.5	18	28	1.23	1.87	0.42	7.3	3
15.4	18	28	2.04	3.28	0.42	7.3	3
9.5	17	27	1.31	1.84	0.42	7.3	4.2
13	20	31	1.74	2.63	0.42	7.3	4.2



附錄B



(摘錄自王濟川、郭志剛著

「Logistic 迴歸模型-方法及應用」解說書PP16~P19)

最大概似估計

(Maximum Likelihood Estimation, MLE)

在線性迴歸中估計未知總體參數時主要採用最小平方法。這一方法的原理是根據線性迴歸模型選擇參數估計值，使因變數的測量值與模型估計值之間的離差平方值為最小。而最大概似估計法則是統計分析中另一常用模型參數估計方法。在線性迴歸分析中，最大概似估計法可以得到與最小平方法相同的結果。與最小平方法相比，最大概似估計法既可以用於線性模型，也可以用於更為複雜的非線性估計。由於logistic迴歸是非線性模型，因此最大概似估計法是最常用的模型估計法。

在應用最大概似估計法之前，我們先要建立一個函數，稱為概似函數 (likelihood function)。這一函數將觀測資料的機率表述為未知模型參數的函數。模型參數的最大概似估計是選擇能夠使這一函數值達到最大的參數估計值。換句話說，這套參數估計能透過模型以最大機率再現樣本觀測資料。下面，就來介紹如何透過最大概似估計法來估計logistic迴歸模型參數的參數。

假設有由 N 個案例構成的總體， Y_1, \dots, Y_N 。從中隨機抽取 n 個案例作為樣本，分別為 y_1, \dots, y_n 。設 $p_i = P(y_i = 1 | x_i)$ 為給定 x_i 的條件下得到結果 $y_i = 1$ 的條件機率；而在同樣條件下得到結果 $y_i = 0$ 的條件機率為 $1 - p_i$ 。於是，得到一個測量值得機率為：

$$P(y_i) = p_i^{y_i} (1 - p_i)^{1 - y_i} \quad 2.1.1$$

其中， $y_i = 1$ 或 $y_i = 0$ 。式中 y_i 或 $(1 - y_i)$ 只是表示對於一個特定觀測。當 $y_i = 1$ 時， $P(y_i) = p_i = P(y_i = 1 | x_i)$ ，否則 $P(y_i) = (1 - p_i) = P(y_i = 0 | x_i)$ 。因為各項觀測相互獨立，所以它們的聯合分佈可以表示為各邊際分佈的乘積：

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n p_i^{y_i} (1 - p_i)^{1 - y_i} \quad 2.1.2$$

式2.1.2也稱為 n 個觀測的概似函數。假設 $p_i = e^{\alpha + \beta x_i} / (1 + e^{\alpha + \beta x_i})$ 。我們的目的是求出能夠使這一概似函數的值最大的參數估計。也就是說，最大概似估計就是求解出具有最大可能取得所給定的樣本觀測資料的參數估計。於是，最大概似估計的關鍵是估計出參數 α 和 β 的值，並透過它們使式2.1.2取得最大值。然而，使概似函數 $L(\theta)$ 最大化的實際過程是分常困難的。一般方法是間接利用概似函數的自然對數即（即 $\ln[L(\theta)]$ ）最大值，而不是直接對概似函數本身求最大。因為 $\ln[L(\theta)]$ 是 $L(\theta)$ 的單調函數，使 $\ln[L(\theta)]$ 取得最大值的 θ 值同樣使 $L(\theta)$ 取得最大值。透過分析 $\ln[L(\theta)]$ ，式2.1.2中相乘各項轉換為對數項的相加，於是使得數學運算變得較為容易。以式 $\ln[p_i / (1 - p_i)] = \alpha + \beta x_i$ 作為示範，其logistic迴歸模型的對數概似值為：

$$\begin{aligned} \ln[L(\theta)] &= \ln \left[\prod_{i=1}^n p_i^{y_i} (1 - p_i)^{1 - y_i} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n [y_i \ln(p_i) - (1 - y_i) \ln(1 - p_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[y_i \ln \left(\frac{p_i}{1 - p_i} \right) + \ln(1 - p_i) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[y_i (\alpha + \beta x_i) + \ln \left(1 - \frac{e^{\alpha + \beta x_i}}{1 + e^{\alpha + \beta x_i}} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n [y_i (\alpha + \beta x_i) - \ln(1 + e^{\alpha + \beta x_i})] \end{aligned} \quad 2.1.3$$

式2.1.3稱為對數概似函數 (log likelihood function)。為了估計能使 $\ln[L(\theta)]$ 為最大的總體參數 α 和 β 值，先分別對 α 和 β 求偏導數，然後令它等於0：

$$\frac{\partial \ln[L(\theta)]}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \left[y_i - \frac{e^{\alpha + \beta x_i}}{1 + e^{\alpha + \beta x_i}} \right]$$

$$\frac{\partial \ln[L(\theta)]}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n \left[y_i - \frac{e^{\alpha + \beta x_i}}{1 + e^{\alpha + \beta x_i}} \right] x_i \quad 2.1.4$$

式2.1.4和2.1.5稱為概似方程（likelihood equations）。如果模型中 k 個自變數，那麼就有 $k+1$ 個聯立方程來估計 α 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 的值。在線性迴歸中，概似方程是透過把離差平方和分別對 α 和 β 求偏導數後得到的，它對於未知參數都是線性的，因此很容易求解。但是對於logistic迴歸，如式2.1.4和2.1.5是 α 和 β 的非線性函數，所以求解十分困難。事實上，不求助現代計算機技術，幾乎是無法求解的。有關最大概似估計法是利用疊代（iteration）計算完成的。對logistic迴歸模型中最大概似估計方法欲做深入探討，可參閱McCullagh and Nelder（1983）與Eliason（1993）。

