

國立臺灣大學管理學院財務金融研究所



碩士論文

Department or Graduate Institute of Finance

College of Management

National Taiwan University

Master Thesis

長期低利率造成利率模型評價之偏誤

—以退休基金之利率模型為例

Modeling Error Caused by Low Interest Rate

—Pension Fund's Interest Rate Model

吳宜峯

Yi-Feng Wu

指導教授：李賢源 博士

Advisor: Shyan Yuan Lee, Ph.D.

中華民國 106 年 6 月

June, 2017

中文摘要

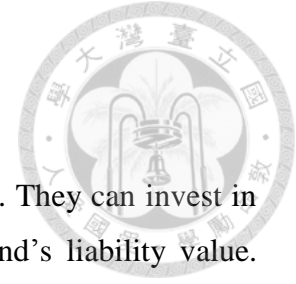


退休基金在配置資產時須遵守投資政策，僅有在基金資產價值大於基金負債價值時才可投資於風險性資產，因此基金負債價值評估的準確性相當重要，若誤差過大將影響基金的投資成效。而基金負債價值估計與退休基金使用的利率模型相關，一般常見的利率模型為 Vasicek 模型，此模型假設利率以長期平均利率為基準，呈現常態分布，但此假設與現實利率情形不符。現實中存在一個利率下界，當利率低於此數值便不會再下降。過去因為長期平均利率距離利率下界相對較遠，因此產生的誤差小，可以忽略不計算。近年各國長期實施低利率政策，使長期平均利率貼近於零，模型估計出現低於利率下界的負利率，造成嚴重之模型誤差。

本文以利率下界的概念修改 Vasicek 模型。並以情境分析的方式，選取特定利率走勢，比較不同投資方案對於退休基金投資成效之影響，尋找退休基金最佳的投資方式。

關鍵字：退休基金、低利率、負利率、Vasicek 模型、利率下界

ABSTRACT



Pension funds have to obey several rules to allocate their fund. They can invest in risky asset only if their portfolio value is larger than pension fund's liability value. Therefore the accuracy of pension fund's liability estimating is very important which is decided by interest rate model. One of common interest rate model of pension fund is Vasicek model, which describes interest rate movements as a normal distribution's randomness jump basing on its long term mean level. However this didn't consist with historical data. In real market, there exists a lower bound which means interest rate cannot lower than it. In the past, the long term mean level of Vasicek model is far away from lower bound thus the modeling error is negligible. But the low interest rate environments caused by governments' monetary policy let the long term mean level of Vasicek model close to zero and negative rate appears which is lower than lower bound, causing undesired modeling error.

In this paper, we modified Vasicek model by the idea of the lower bound and found the best investing method of pension fund by analyzing the performance of pension fund's portfolio under certain rate path situation.

Key words: Pension Fund、Low Interest Rate、Negative Interest Rate、Vasicek Model、Zero Lower Bound

目錄



中文摘要	i
ABSTRACT	ii
目錄	iii
圖目錄	v
表目錄	vii
I. 緒論	1
I.1 研究背景	1
I.2 文獻探討	3
II. 研究方法	4
II.1 研究方法	4
II.2 利率模型	5
II.2.1 Vasicek 模型	5
II.2.2 Vasicek ZLB 模型	6
II.3 股票路徑模擬	7
II.4 借錢策略	7
II.5 投資方法	8
III. 數據結果與分析	11
III.1 情境 A(負 X 軸)負利率路徑下股價為常數	12
III.2 情境 II(第二象限) 負利率路徑下股票上漲	14
III.3 情境 III(第三象限) 負利率路徑下股票下跌	17
IV. 結果與討論	20
V. 參考文獻	21
VI. 附錄	22
VI.1 情境 A(負 X 軸)負利率路徑下股價為常數	22
VI.1.1 允許借錢方案	22
VI.1.2 Vasicek 模型	23
VI.1.3 Vasicek+ZLB 模型	26

VI.2 情境Ⅱ(第二象限) 負利率路徑下股票上漲.....	29
VI.2.1 允許借錢方案.....	29
VI.2.2 Vasicek 模型.....	32
VI.2.3 Vasicek+ZLB 模型.....	35
VI.3 情境Ⅲ(第三象限) 負利率路徑下股票下跌.....	39
VI.3.1 允許借錢方案.....	39
VI.3.2 Vasicek 模型.....	42
VI.3.3 Vasicek+ZLB 模型.....	45

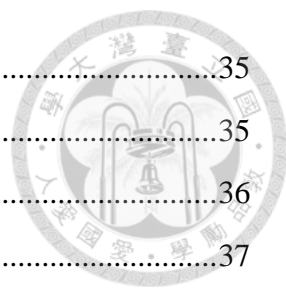


圖目錄



圖 一、美國三個月短期利率	2
圖 二、利率之機率分布	2
圖 三、景氣利率循環圖	7
圖 四、情境分析座標軸	11
圖 五、情境 A 不允許借錢方案	12
圖 六、情境 A 不借錢方案之結果總覽	13
圖 七、情境 II 不允許借錢方案	14
圖 八、情境 II 不借錢方案之結果總覽	15
圖 九、情境 A 與情境 II 比較 不借錢方案 1	15
圖 一〇、情境 A 與情境 II 比較 不借錢方案 2	16
圖 十一、情境 III 不允許借錢方案	17
圖 十二、情境 III 不借錢方案之結果總覽	18
圖 一三、情境 A 與情境 III 比較 不借錢方案 1	18
圖 一四、情境 A 與情境 III 比較 不借錢方案 2	19
圖 十五、情境 A 允許借錢方案	22
圖 十六、情境 A 借錢方案之結果總覽	22
圖 一七、情境 A Vasicek 模型	23
圖 十八、情境 A Vasicek 模型之結果總覽	24
圖 一九、情境 A Vasicek+ZLB 模型	26
圖 二〇、情境 A Vasicek+ZLB 模型之結果總覽	26
圖 二一、情境 II 允許借錢方案	29
圖 二二、情境 II 借錢方案之結果總覽	30
圖 二三、情境 A 與情境 II 比較 借錢方案 1	30
圖 二四、情境 A 與情境 II 比較 借錢方案 2	31
圖 二五、情境 II Vasicek 模型	32
圖 二六、情境 II Vasicek 模型之結果總覽	33
圖 二七、情境 A 與情境 II 比較 Vasicek 模型 1	34

圖 二八、情境 A 與情境 II 比較 Vasicek 模型 2.....	35
圖 二九、情境 II Vasicek+ZLB 模型.....	35
圖 三〇、情境 II Vasicek+ZLB 模型之結果總覽.....	36
圖 三一、情境 A 與情境 II 比較 Vasicek+ZLB 模型 1.....	37
圖 三二、情境 A 與情境 II 比較 Vasicek+ZLB 模型 2.....	38
圖 三三、情境 III 允許借錢方案.....	39
圖 三四、情境 III 借錢方案之結果總覽.....	40
圖 三五、情境 A 與情境 III 比較 借錢方案 1.....	40
圖 三六、情境 A 與情境 III 比較 借錢方案 2.....	41
圖 三七、情境 III Vasicek 模型.....	42
圖 三八、情境 III Vasicek 模型之結果總覽.....	43
圖 三九、情境 A 與情境 III 比較 Vasicek 模型 1.....	44
圖 四〇、情境 A 與情境 III 比較 Vasicek 模型 2.....	45
圖 四一、情境 III Vasicek+ZLB 模型.....	45
圖 四二、情境 III Vasicek+ZLB 模型之結果總覽.....	46
圖 四三、情境 A 與情境 III 比較 Vasicek+ZLB 模型 1.....	46
圖 四四、情境 A 與情境 III 比較 Vasicek+ZLB 模型 2.....	46



表目錄



表 一、退休基金資產負債表	1
表 二、情境分析	4
表 三、Vasicek 模型係數.....	6



I. 緒論

I.1 研究背景

現在各國多存在人口老化等社會問題，為保障國民退休生活，退休基金發展逐漸被重視。退休基金有國家主導的勞工退休基金，或是私人企業主持的員工退休年金等。為使退休人員在工作年限屆滿後可以領取穩定的退休金，基金公司必須謹慎操作此龐大資金的資產配置，維持穩定獲利成長。

退休基金之投資政策與保險有些許相似。本研究中，退休基金投資政策有以下兩個：政策一，當基金資產價值大於等於基金負債時，才可配置資金於風險性資產，如股票，若資產價值小於基金負債，則只能將資金配置於無風險性資產。若基金政策開放借款，則可以借足資金資產與負債間之差值，並自由投資。文中以不借錢方案為主，並將允許借錢之情形於附錄中詳述。政策二，當滿足政策一條件，欲配置資金於風險性資產時，需滿足規避 80% 利率風險，配置基金負債價值的 80% 於無風險性資產，剩餘資金才可投資於風險性資產。因此基金負債價值評估的準確性相當重要。

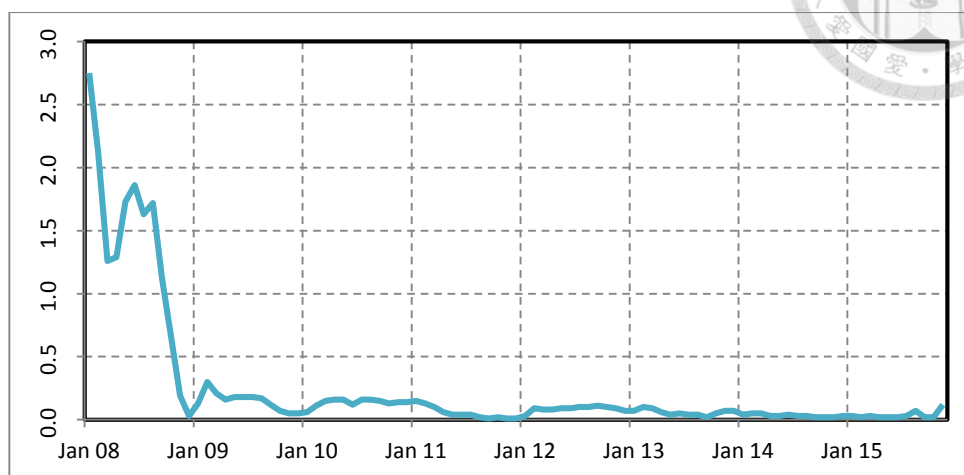
退休基金之資產負債表如表 一所示。對於退休基金負債評價，研究中將其視為 10 年期的 Zero Coupon Bond，其價格用利率估計。模擬利率的模型選用相當重要，若誤差過大，將無法有效配置資產，影響投資成效。

表 一、退休基金資產負債表

Portfolio	Liability
Riskless asset: Bond	Pension
Risky asset: Equity	

一般退休基金常用利率模型為高斯模型，例如 Vasicek 模型。模型中假設利率以長期平均利率為基礎，服從常態分配變化。但當長期平均利率趨近零，高斯模型估計的利率很可能出現負利率，此現象與歷史資料不符。以圖 一美國三個月短期利率為例，發現從 2009 年初至 2015 年底，其利率長期維持在一定水平，並沒

有再往下跳動。此現象並不符合常態分佈，反倒像利率擁有一個下界，在下方支撐。

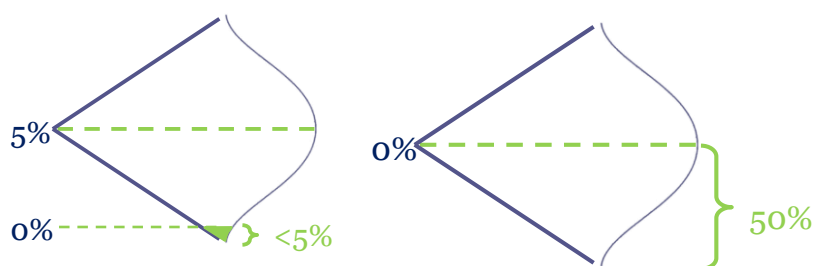


圖一、美國三個月短期利率(區間:2008-2015)

資料來源: Board of Governors of the Federal Reserve System (US)

此現象可用持有現金解釋。當銀行利率為負時，客戶可選擇持有現金，避免被銀行收取費用。但是選擇持有現金時，需處理存放以及安全性的問題，根據 Draghi(2015)此成本為 $[-0.30\%, -0.50\%]$ ¹。當存款利率小於此範圍，客戶便選擇持有現金，因此利率不會無限制的下降。

此利率下界的存在，使利率模型需要修正。過去使用高斯模型預測利率，因長期平均利率與利率下界距離較遠，因此出現負利率機率相當小，可將其產生之誤差乎略不計。但近年長期平均利率貼近零時，模型模擬時負利率出現機率增加。兩者機率分布之概念如圖二所示。因此後者造成之誤差越來越大。



圖二、利率之機率分布

¹ Draghi, M. (2015, 3). The ECB and its watchers XVI conference. Speech by Mario Draghi, President of the ECB, Frankfurt am Main [Accessed: 2015 06 20].

本研究為比較模型修正前後對退休基金資產之影響，因此在分析時，於模擬利率路徑中選取特定利率走勢—原模擬利率出現低於利率下界之情形，作為分析時的利率走勢。



I.2 文獻探討

預測利率的模型中，Vasicek(1977)模型為最常被運用的方法之一，原因包含 Vasicek 模型對於利率有均數復歸的性質，且利率變動為常態分配，同時其可以推導出封閉式解，在計算上相當便利，但是 Vasicek 模型無法處理負利率的情形。Cox, Ingersoll, and Ross (1985)或稱 CIR model，將利率變化的波動度限制為利率水準的開根號，當利率貼近零利率時，利率變動隨之變小，以避免利率低於零的情形產生，但利用模型數學式的限制，以避免利率低於零發生，在經濟意涵上的解釋較為不足。Black(1995)提出將現金視為零利率債券的想法，投資者面對負利率債券時，將會選擇持有現金。Black 並初次提出了 shadow short rate 的名詞，此利率服從一般高斯模型，可以為正或為負，在現實中觀察到之政府公債利率，則為此 shadow short rate 加上一個零利率下界修正而成。Black 提出此理論後卻鮮少被學界提及，原因在於在 20 世紀，各國之利率與零利率下界都非常遠，因此一般高斯模型進入負利率的機率相當小，其造成之計算誤差可被忽略。直至近年，多數國家的利率水準皆大幅降低，使模型負利率造成之誤差逐漸擴大。將選擇現金造成之零利率下界加入模型限制中，又逐漸興盛起來。本研究中採用 Vasicek 模型並加入選擇現金造成之零利率下界作為評估利率的模型。

本研究架構如下：首先，第 II 節將簡述本文之研究方法與使用模型；再於第 III 節則依照前述研究方法，模擬退休基金可能遇到之各種情境，在不允許借貸下分析比較不同條件之投資結果，進而選出基金最佳改善方式，最後一節則為結論，附錄中則詳述開放基金借錢之情況。



II. 研究方法

II.1 研究方法

本研究採用情境分析方式，觀察在不同環境下，基金使用不同條件之投資成效。

表 二、情境分析

Equity with constant value 1		Equity UP/DOWN	
Negative Rate	Positive Rate	Random Rate	
	Vasicek	Vasicek+ZLB	
Borrow			
No Borrow			

環境的選擇分別與利率路徑及股票路徑有關。為觀察利率模型修正之效果，因此利率路徑選取具有代表性意義之三個走勢，負利率走勢、正利率走勢、無明顯方向。同時為觀察股價對基金投資分配之影響，股票路徑亦選擇具有代表性意義的三種情形，分別為維持常數、股票上漲及股票下跌。如表 二所示。

確定環境條件後，進一步比較利率模型選擇及投資規則對投資成效的影響。兩種模型分別為，一般 Vasicek 模型以及加上 Zero Lower Bound 改進的 Vasicek 模型。而投資規則，則是開放基金借錢與否，但大多基金不允許借款，內文以不借錢方案為主，而借錢方案之結果將詳述於附錄。在此架構下，根據 Funding Ratio、資產價值及借錢多寡作為投資成效判斷標準。



II.2 利率模型

II.2.1 Vasicek 模型

Vasicek (1977) 模型，為單因子之利率期間結構，假設短期利率為常態分配。其隨機微分方程為：

$$dr_t = \alpha(\mu - r_t)dt + \sigma dw_t$$

α 為回歸均值的速度、 μ 為長期利率平均、 σ 為利率的波動度

Vasicek 模型之零利率債券價格，可用此函數表示

$$P(t, T) = G(t, T)e^{-r(t)F(t, T)}$$
$$G(t, T) = \exp \left\{ \left(\mu + \frac{\sigma q}{\alpha} - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} \right) (F(t, T) - T + t) - \frac{\sigma^2}{4\alpha} F^2(t, T) \right\}$$
$$F(t, T) = \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}$$

模型的參數選用，本研究使用市場債券價格來配置參數。

設定債券現值表達如下：

$$P_i = \sum_{t=t_{i1}}^{t_{in}} CF_{i,t} \times PV_t$$

其中 P 為債券價格，CF 為已知現金流，PV 為各付息日之折現因子， $t = 1, \dots, T$ 折現因子根據 Vasicek 模型表達如下

$$P(t, T) = G(t, T)e^{-r(t)F(t, T)}$$

其中 $\alpha, \sigma, \mu, q, r$ 為估計參數，其中因為 q 前方的正副號取正，使 q 大於 0。

市場債券資訊本研究使用美國主權債券分割債曲線 U.S. strips bond(2009/1) 資訊，到期日分別為 1 至 20 年，共 12 張債券代入。

分別計算每張債券每期之現金流，並用 Vasicek 模型之折現因子計算現值，得到估計價格 Approximated Price (AP)：

$$AP_i = \sum_{t=t_{i1}}^{t_{in}} CF_{i,t} \times PV_t$$
$$PV_t = P(0, t)$$

接續改變模型參數，使估計價格逼近市場實際價格 Market Price (MP)：

$$MP_i = AP_i = \sum_{t=t_{i1}}^{t_{in}} CF_{i,t} \times PV_t$$

$$\min_{\alpha, \sigma, \mu, q, r} \sum_{i=1}^{12} \left(\frac{MP_i - AP_i}{AP_i} \right)^2$$

$$\text{s.t. } \alpha, \sigma, \mu, q, r > 0$$

$\alpha, \sigma, \mu, q, r$ 參數便可用最小平方法 (Ordinary Least Squares, OLS) 估計出，在此使用 Excel 之規劃求解估計。

得到之參數如表 三所示。

表 三、本研究使用之 Vasicek 模型係數

alpha	sigma	mu	q	r ₀
3.42%	3.81%	0.06%	11.2%	0.05%

II.2.2 Vasicek ZLB 模型

模型改進根據原本之 Vasicek 模型為主體，另外加上利率下界 0。

$$r_{ZLB} = \text{Max}(0, r_{Vasicek})$$

此限制之經濟意涵是將實體鈔票視為價格為 1、利率為 0 之債券。因此當市場利率大於 0 時，投資人選擇持有債券，當市場利率小於 0 時，則選擇持有現金，也就是利率為 0 的債券。



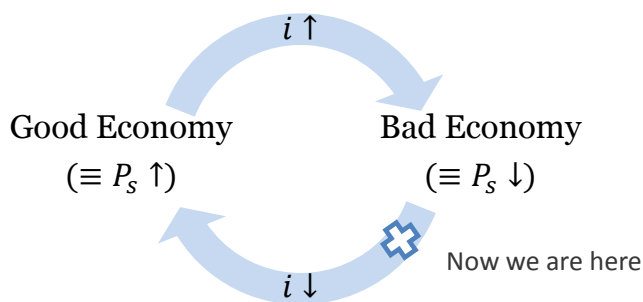
II.3 股票路徑模擬

本研究中假設股價服從 Black-Scholes(1973)分配。

$$dS = \mu Sdt + \sigma Sdw$$

利率為政府用來促進或抑制景氣的方法之一。因此景氣與利率呈現一種循環狀態，如圖三所示。當經濟發展過熱，將升息抑制股價；當經濟發展緩慢時，將降息以促進景氣復興，此時的低利率政策正處於此階段。因此設股價分配之隨機變數(dw_s)與利率的隨機變數(dw_r)相關係數(ρ)為-0.3。其餘變數設定如下： $\sigma = 30\%$ 、 $\mu = 4\%$ 、 $s_0 = 1$ 。以下列算式求得股價走勢。

$$S_{t+1} = S_t \exp((\mu - 0.5\sigma^2)dt + \sigma dw_s)$$



圖三、景氣利率循環圖(P_s 為股價)

II.4 借錢策略

根據投資政策一，當基金資產價值大於等於負債價值時，才可配置資金於風險性資產，如股票，若資產價值小於負債，則只能將資金置於無風險性資產。若開放借錢方案，則可在資產小於負債價值時，借錢投資股票。

借錢規則的細節為下：

- (1) Funding Ratio ≥ 1 ($V_{port} \geq V_{lib}$) \Rightarrow 不需要借錢

此時投資分配：

$$\text{Bond} = V_{lib} * 0.8$$

$$\text{Stock} = V_{port} - \text{Bond}$$

因要滿足政策二：規避 80% 利率風險，配置負債價值的 80% 於無風險性資產，剩餘資金才可投資於風險性資產。



(2) Funding Ratio < 1 ($V_{port} < V_{lib}$) \Rightarrow 需要借錢

借入負債價值與資產價值之間的差值($\Delta = V_{lib} - V_{port}$)，並依據政策二配置資金。借入資金的利息依照此時的無風險利率計算。

此時投資分配：

(a) 允許借錢

$$\text{Bond} = V_{lib} * 0.8$$

$$\text{Stock} = (\Delta + V_{port}) - \text{Bond}$$

(b) 不允許借錢

$$\text{Bond} = V_{lib}$$

$$\text{Stock} = 0$$

II.5 投資方法

本研究中退休基金投資方式採取固定比例投資組合保險策略 CPPI (Constant Proportion Portfolio Insurance)。CPPI 策略將投資組合分為風險性資產與無風險性資產，隨市場漲跌波動，調整投資組合比重，為動態調整策略。

其投資概念為讓投資人先決定風險下限(Floor)，並依據本身對報酬的偏好程度與風險的承擔能力來設定參數(m)，並在每期動態調整風險性資產與無風險性資產部位，使投資組合資產價值始終可以維持在一定水準之上(風險下限)，達到投資組合保險的目的。其資產配置細節如下：

資產價值減去風險下限(Asset - Floor)，得到緩衝金額(Cushion)，依據投資人風險偏好決定風險乘數(m)。求出投資於股票的部位。資產價值減去股票部位即為固定收益部位。

$$C = A_t - F_t$$

$$E_t = \min[m \times C, A_t]$$

$$D_t = A_t - E_t$$

A_t :投資組合總價值

D_t :投資於債券資產價值

E_t :投資於風險性資產價值

m :風險乘數，且 $m > 1$



C :Cushion 緩衝金額， $C = A_t - F_t$

F_t :Floor 風險下限

退休基金的負債為退休人員存入的資金，本研究將其視為 10 年期的 Zero coupon bond，隨著每期利率變動而變動，其中利率由 Vasicek 模型得之。

$$V_{lib} = P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T r_\tau d\tau\right) = P(t, T) = G(t, T)e^{-r(t)F(t, T)}$$

而資產價值起始值等同於負債價值。

$$V_{port_0} = V_{lib_0}$$

根據政策一，基金資產價值大於等於負債價值時，才可配置資金在風險性資產。以此研究中定義Funding Ratio，用以評價資產與負債大小。

$$\text{Funding Ratio(FR)} = \frac{V_{port_t}}{V_{lib_t}}$$

初期 $FR_0 = 1$ 。

根據政策二，規避 80%利率風險，配置負債價值的 80%於無風險性資產。因此風險下限 F_t 為負債價值 V_{lib} 的 80%。設定風險乘數為 1($m=1$)，因此可投資於風險性資產的部位為 $\min[A_t - F_t, 0]$ 。

(1) 不允許借貸：

$$V_{port_t} = D'_t + E'_t = D_{t-1} \times \frac{V_{bond_t}}{V_{bond_{t-1}}} + E_{t-1} \times \frac{V_{stock_t}}{V_{stock_{t-1}}}$$

D'_t :上期投資於債券資產價值之現值

E'_t :上期投資於風險性資產價值之現值

$$(a) \quad FR_t = \frac{V_{port_t}}{V_{lib_t}} \geq 1$$

$$E_t = \min\left[1 \times (V_{port_t} - V_{lib_t} * 0.8), A_t\right]$$

$$D_t = V_{port_t} - E_t$$

$$(b) \quad FR_t = \frac{V_{port_t}}{V_{lib_t}} < 1$$

$$E_t = 0$$

$$D_t = V_{port_t}$$

(2) 允許借貸：

$$V_{port_t} = D'_t + E'_t = D_{t-1} \times \frac{V_{bond_t}}{V_{bond_{t-1}}} + E_{t-1} \times \frac{V_{stock_t}}{V_{stock_{t-1}}} + B_{t-1} \times \left(1 + \frac{r_{t-1}}{12}\right)$$

B_{t-1} : 上期借款金額

(a) $FR_t = \frac{V_{port_t}}{V_{lib_t}} \geq 1$

$$E_t = \min \left[1 \times (V_{port_t} - V_{lib_t} * 0.8), A_t \right]$$

$$D_t = V_{port_t} - E_t$$

(b) $FR_t = \frac{V_{port_t}}{V_{lib_t}} < 1$

$$E_t = \min \left[1 \times (V_{lib_t} - V_{lib_t} * 0.8), A_t \right]$$

$$D_t = V_{lib_t} - E_t$$





III. 數據結果與分析

本研究以情境模擬方式，分析模型選用，在不借錢政策下對於投資成效之影響。情境因子為利率路徑與股票路徑。

利率路徑在 Vasicek 模型模擬中，抽取特定代表性情形，分別為利率走勢為負、利率全為正以及一任意路線。股票路徑亦選取特定情境，一組為常數，另在股票與利率相關係數為-0.3 設定下，選取兩組走勢分別向上、向下。

將情境因子以坐標軸表示。橫軸 X 軸表示利率路徑，負象限表示負利率路徑、正象限表示正利率路徑，Y 軸上則表示隨機路徑。縱軸 Y 軸表示股票走勢，負象限表示股票下跌、正象限表示股票上漲，X 軸上則表示股價為常數 1。如圖 四所示。

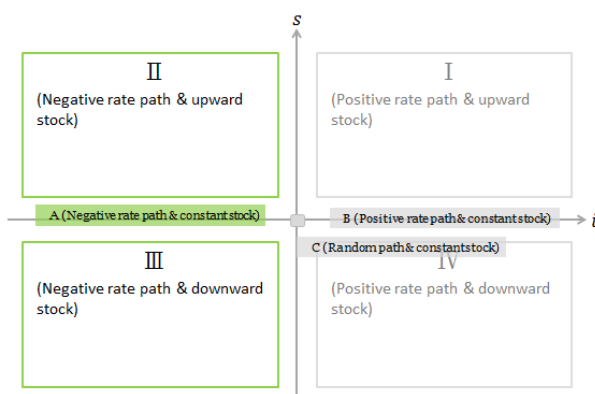


圖 四、情境分析座標軸

一般退休基金擔心之情境為利率走勢出現負利率路徑，因此情況中利率模型產生之誤差較大，使負債價值高估、影響投資成效。因此本研究針對負利率路徑情境下之三種情形詳細分析，分別為情境 A(負 X 軸)負利率路徑下股價為常數、情境 II(第二象限) 負利率路徑下股票上漲以及情境 III(第三象限) 負利率路徑下股票下跌。



III.1 情境 A (負 X 軸)負利率路徑下股價為常數

在負利率路徑、股價為常數時，不借錢方案下，比較兩種模型，對投資的影響，如圖 五所示。

Equity with constant value 1	Equity UP/DOWN	
Negative Rate	Positive Rate	Random Rate
	Vasicek	Vasicek+ZLB
Borrow		
No Borrow	▲	▲

圖 五、情境 A 不允許借錢方案

可觀察到下列二事，

- (1) Funding Ratio 恆大於 0.8

根據政策二，無論允許借錢與否，資金最少都放置 80% 負債價值在於無風險性資產。此例中股票價值不變，股票資產成長為零($X_E = 0$)，因此 FR 恆大於 0.8。

$$Funding\ Ratio(FR)_t = \frac{V_{port_t}}{V_{lib_t}} = \frac{D_t + E_t}{V_{lib_t}} = \frac{0.8V_{lib_t} + E_t}{V_{lib_t}}$$

$$E_t = E_{t-1} \times (1 + X_E)$$

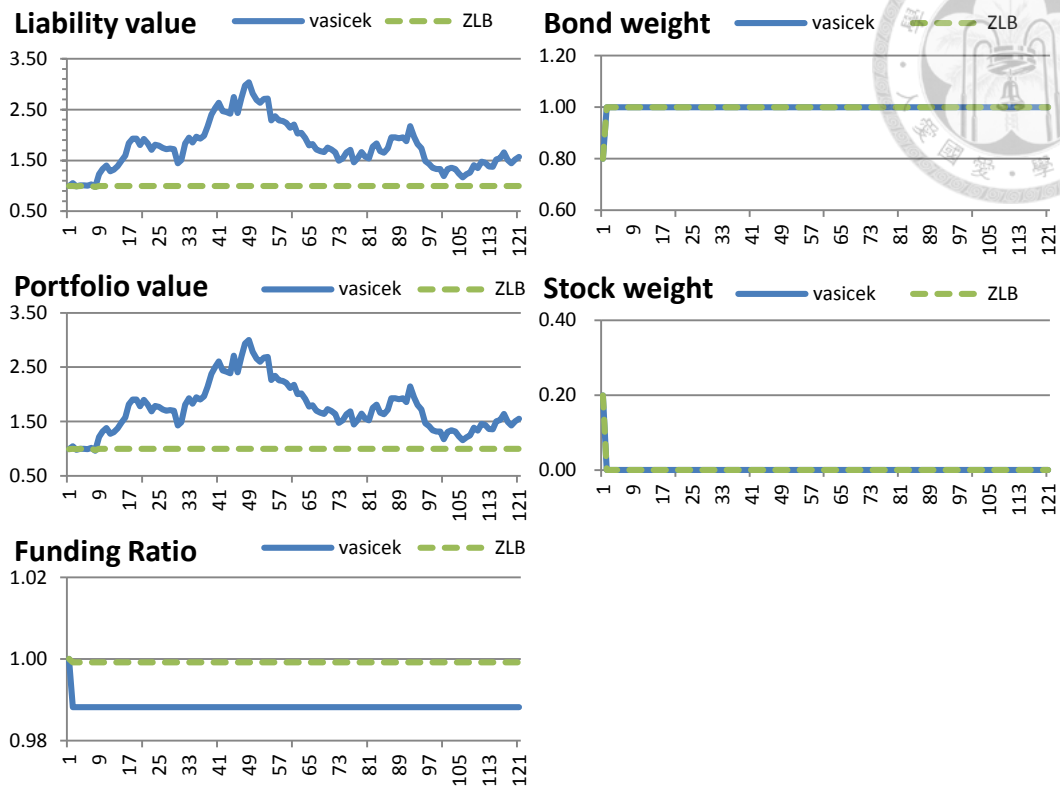
- (2) 當利率波動，負債價值波動幅度將大於資產價值波動幅度

政策二下，配置 80% 負債價值於無風險性資產：

$$FR \geq 1, V_{port_t} = D_t + E_t = 0.8V_{lib_t} + E_t。$$

$$FR < 1, V_{port}^{non-borrow_t} = V_{lib_t}, V_{port}^{borrow_t} = 0.8V_{lib_t} + E_t。$$

觀察到 V_{port} 受到 80% V_{lib} 變動影響，因此當利率波動， V_{lib} 波動幅度 $\geq V_{port}$ 波動幅度。



圖六、情境A 不借錢方案之結果總覽

由圖六可觀察到不同模型之差異

(a) Funding Ratio 下降幅度

Vasicek+ZLB 模型可減少 Funding Ratio 下降幅度，因模型修正後利率下降程度受到限制。



III.2 情境II(第二象限) 負利率路徑下股票上漲

在負利率路徑、股價上漲、不借錢方案下，比較兩種模型，對投資的影響，如圖 七所示。

Equity with constant value 1		Equity UP	
Negative Rate	Positive Rate	Random Rate	
	Vasicek	Vasicek+ZLB	
Borrow			
No Borrow	▲		▲

圖 七、情境II 不允許借錢方案

可觀察到下列二事，

- (1) Funding Ratio 恆大於 0.8

根據政策二，無論允許借錢與否，資金最少都放置 80% 負債價值在於無風險性資產。此例中股票價值不變，股票資產成長為零($X_E = 0$)，因此 FR 恆大於 0.8。

$$Funding\ Ratio(FR)_t = \frac{V_{port_t}}{V_{lib_t}} = \frac{D_t + E_t}{V_{lib_t}} = \frac{0.8V_{lib_t} + E_t}{V_{lib_t}}$$

$$E_t = E_{t-1} \times (1 + X_E)$$

- (2) 當利率波動，負債價值波動幅度將大於資產價值波動幅度

政策二下，配置 80% 負債價值於無風險性資產：

$$FR \geq 1, V_{port_t} = D_t + E_t = 0.8V_{lib_t} + E_t。$$

$$FR < 1, V_{port}^{non-borrow_t} = V_{lib_t}, V_{port}^{borrow_t} = 0.8V_{lib_t} + E_t。$$

觀察到 V_{port} 受到 80% V_{lib} 變動影響，因此當利率波動， V_{lib} 波動幅度 $\geq V_{port}$ 波動幅度。

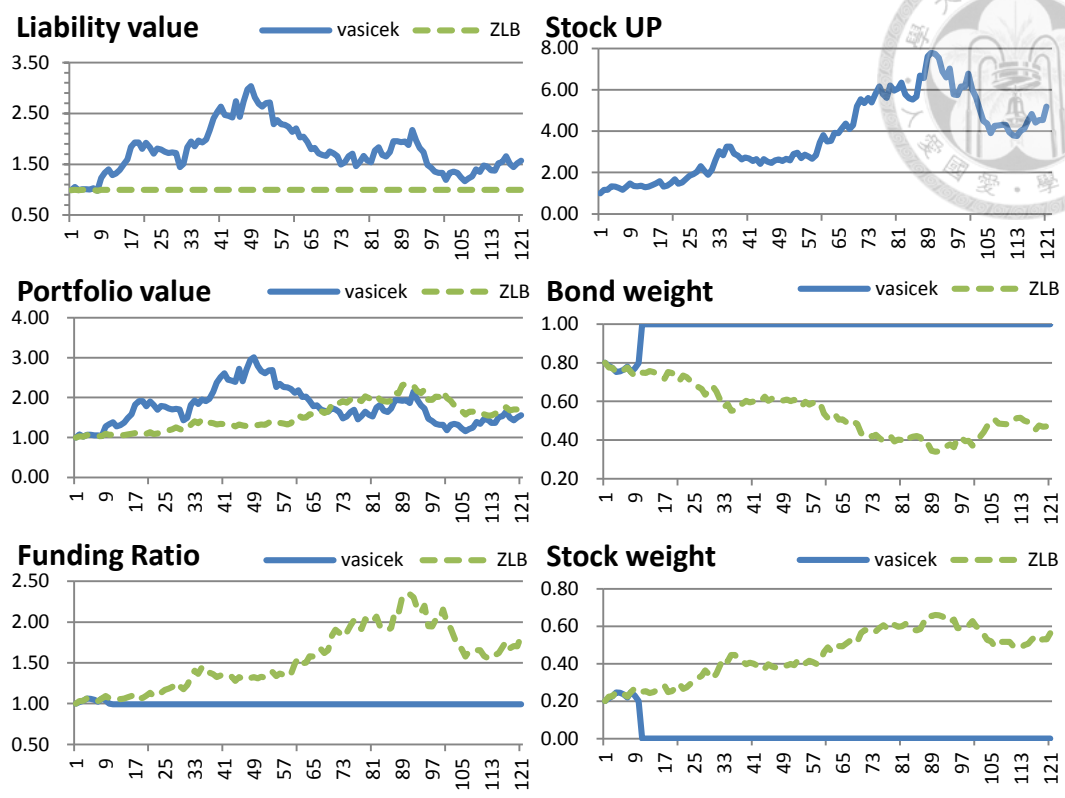
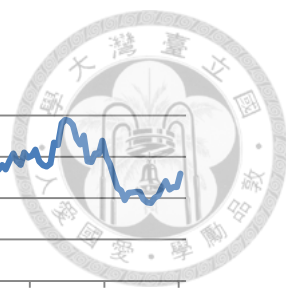


圖 八、情境 II 不借錢方案之結果總覽

由圖 八可觀察到不同模型之差異

(a) Funding Ratio 下降幅度

Vasicek+ZLB 模型可減少 FR 下降幅度，因模型修正後利率下降程度受到限制。

將情境 II 與情境 A 比較，如圖 九所示，觀察負利率路徑、不允許借錢方案下，股票持平與上漲對投資結果影響。

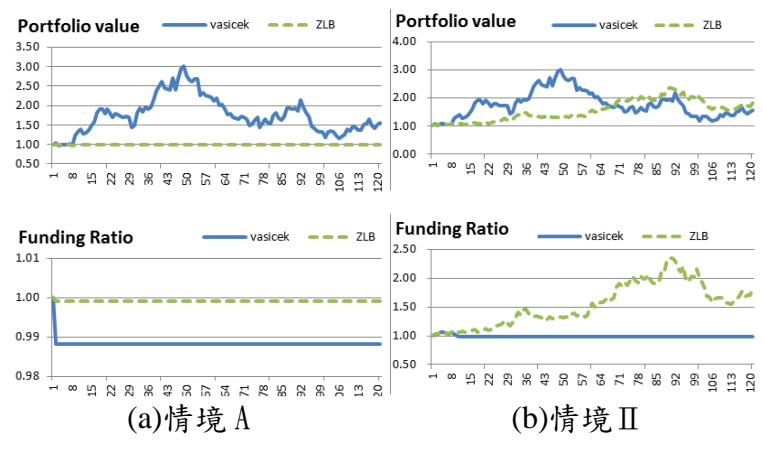


圖 九、情境 A 與情境 II 比較 不借錢方案 1



觀察到情境 A 中，原先因為第一期利率下降，使其 Funding Ratio 小於 1，情境 II 因為股票上漲之故，使其資產價值較高，且全期 Funding Ratio 大於 1。

Vasicek+ZLB 模型優勢也可以在此看到，如圖 一〇所示。因修正模型將利率下限鎖住，使 Funding Ratio 相對於 Vasicek 高。

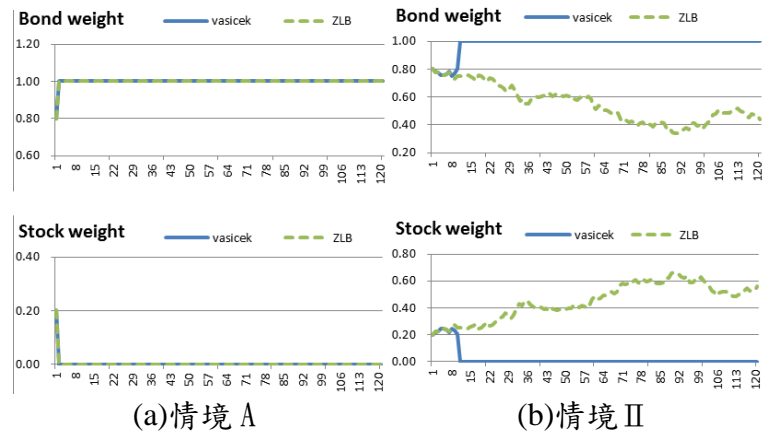


圖 一〇、情境 A 與情境 II 比較 不借錢方案 2

觀察到情境 II 中，股票上漲、資產價值上升，使投資股票的份額持續增加 (V_{port} - 保本的 $80\%V_{lib}$)。



III.3 情境III(第三象限) 負利率路徑下股票下跌

在負利率路徑、股價下跌、不借錢方案下，比較兩種模型，對投資的影響，如圖 十一所示。

Equity with constant value 1		Equity DOWN	
Negative Rate	Positive Rate	Random Rate	
	Vasicek	Vasicek+ZLB	
Borrow			
No Borrow	▲	▲	

圖 十一、情境III 不允許借錢方案

可觀察到下列二事，

- (1) Funding Ratio 不再恆大於 0.8

根據政策二，無論允許借錢與否，資金至少放置 80% 負債價值在於無風險性資產。但此例中情境中股票下跌，股票資產成長為負($X_E < 0$)，因此 FR 不再恆大於 0.8。

$$Funding\ Ratio(FR)_t = \frac{V_{port_t}}{V_{lib_t}} = \frac{D_t + E_t}{V_{lib_t}} = \frac{0.8V_{lib_t} + E_t}{V_{lib_t}}$$

$$E_t = E_{t-1} \times (1 + X_E)$$

- (1) 負債價值與資產價值波動幅度不再有絕對關係

政策二下，配置 80% 負債價值於無風險性資產：

$$FR \geq 1, V_{port_t} = D_t + E_t = 0.8V_{lib_t} + E_t。$$

$$FR < 1, V_{port_t}^{non-borrow} = V_{lib_t}, V_{port_t}^{borrow} = 0.8V_{lib_t} + E_t。$$

$$E_t = E_{t-1} \times (1 + X_E)$$

股價不動時， V_{port} 僅受到 80% 利率變動影響，現在加入股票變動影響($X_E < 0$)，故其變動幅度可能超過 V_{lib} 波動幅度。

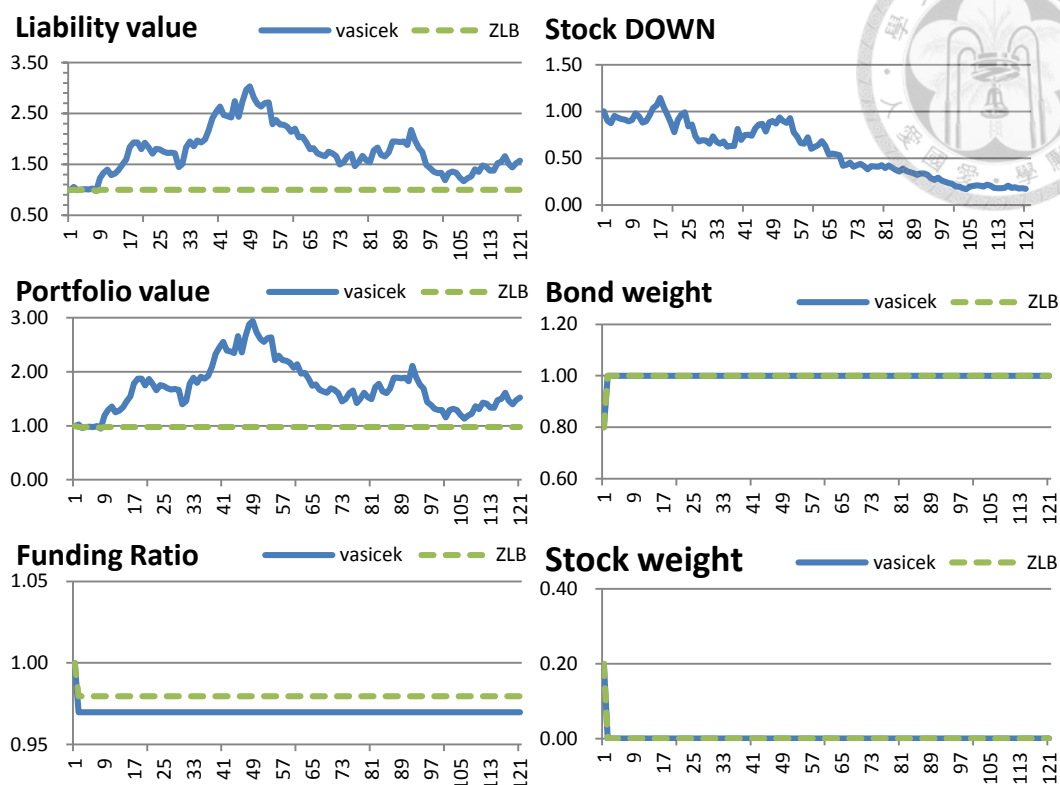
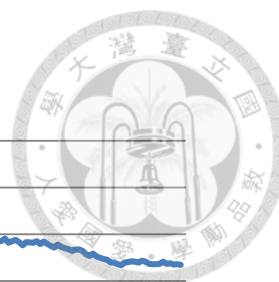


圖 十二、情境 III 不借錢方案之結果總覽

由圖 十二可觀察到不同模型之差異

(a) Funding Ratio 下降幅度

Vasicek+ZLB 模型可減少 FR 下降幅度，因模型修正後利率下降程度受到限制。

將情境 III 與情境 A 比較，如所示，觀察負利率路徑、不允許借錢下，股票持平與下跌對投資結果影響。

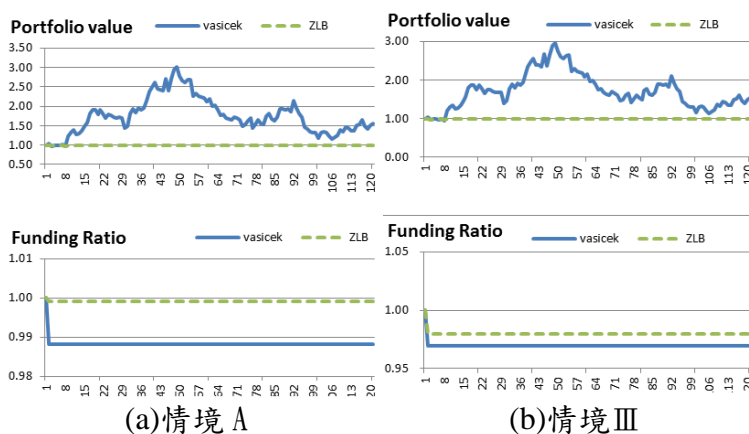


圖 一三、情境 A 與情境 III 比較 不借錢方案 1



情境 A 因為第一期利率下降，使 Funding Ratio 小於 1。情境 III 除了利率下降，還受到股價下跌影響，因此 Funding Ratio 下跌更多。

同時可觀察到 ZLB 模型之好處，如圖 一七所示。因為將利率下限鎖住，使 Funding Ratio 下降幅度相對於 Vasicek 小。

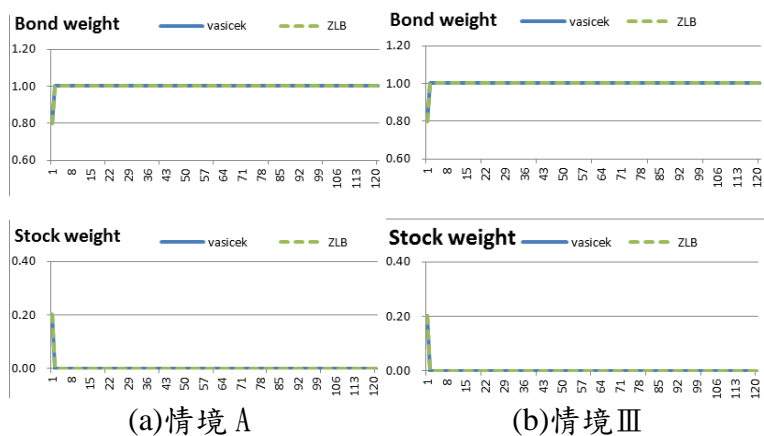


圖 一四、情境 A 與情境 III 比較 不借錢方案 2

兩種情境之 Funding Ratio 皆小於 1，不允許借錢下資金無法自由配置。

IV. 結果與討論



依照上述章節之討論與數據分析結果發現，使用修正過後的 Vasicek+ZLB 模型，基金之投資成效明顯優於原本基礎之 Vasicek 模型。修正模型可避免估計之利率出現實際中不存在的數值，雖然計算上較費時，但其方式不僅在數學運算中排除利率小於零之情形，其模型概念亦合乎經濟意涵與直覺觀點，因此具有代表性。

而附錄中討論之借錢投資政策使資產保有彈性，即使初期曾因利率下降或股票下跌，而使基金資產價值小於負債價值，但當未來環境改善時資產仍可受惠而反彈。較符合實際情形，利率下調刺激景氣，當景氣回溫時，利率便會逐步回調。雖然在股票下跌情境中，借錢政策之負債將不斷增加，但利率與股票為負相關，我們可以預期在低利率環境中，股票較不容易大幅下跌。

最後，研究中修正模型的下界以零計算，考慮到實際持有現金之成本為 $[-0.30\%, -0.50\%]$ ，若欲進一步增加評價精準度，可從此概念深入。另外研究中的投資並未考慮實務上的交易成本、借款限制等問題，僅以情境模擬方式比較相同條件下，一個變化因素的效果，與實際之市場資訊可能有所差異。

V. 參考文獻

1. Ahn, D., R. Dittmar, and A. Gallant (2002). Quadratic term structure models: Theory and evidence. *Review of Financial Studies* 15 (1), 243–288.
2. Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3), 637-654.
3. Christensen, J. H., & Rudebusch, G. D. (2014). Estimating shadow-rate term structure models with near-zero yields. *Journal of Financial Econometrics*, 13(2), 226-259.
4. Cox, J. C., Ingersoll Jr, J. E., & Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 385-407.
5. Dai, Q., & Singleton, K. J. (2000). Specification analysis of affine term structure models. *The Journal of Finance*, 55(5), 1943-1978.
6. Krippner, L. (2012). Modifying Gaussian term structure models when interest rates are near the zero lower bound.
7. Krippner, L. (2013). A tractable framework for zero-lower-bound Gaussian term structure models.
8. Samuel J, S. (2016). Bounded and Unbounded Pension Adventures. Retrieved from SSRN website: <https://ssrn.com/abstract=2720247>
9. Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of financial economics*, 5(2), 177-188.



VI. 附錄

VI.1 情境 A (負 X 軸) 負利率路徑下股價為常數

在負利率路徑、股價為常數情境中，分析模型及借款政策對投資成效之影響。

VI.1.1 允許借錢方案

負利率路徑、股價為常數時，選擇借錢方案，比較兩種模型，對投資的影響，如圖 十五所示。

Equity with constant value 1		Equity UP/DOWN	
Negative Rate	Positive Rate	Random Rate	
	Vasicek	Vasicek+ZLB	
Borrow	▲	▲	
No Borrow			

圖 十五、情境 A 允許借錢方案

可觀察到下列二事，

- (1) Funding Ratio 恆大於 0.8
- (2) 當利率波動，負債價值波動幅度將大於資產價值波動幅度

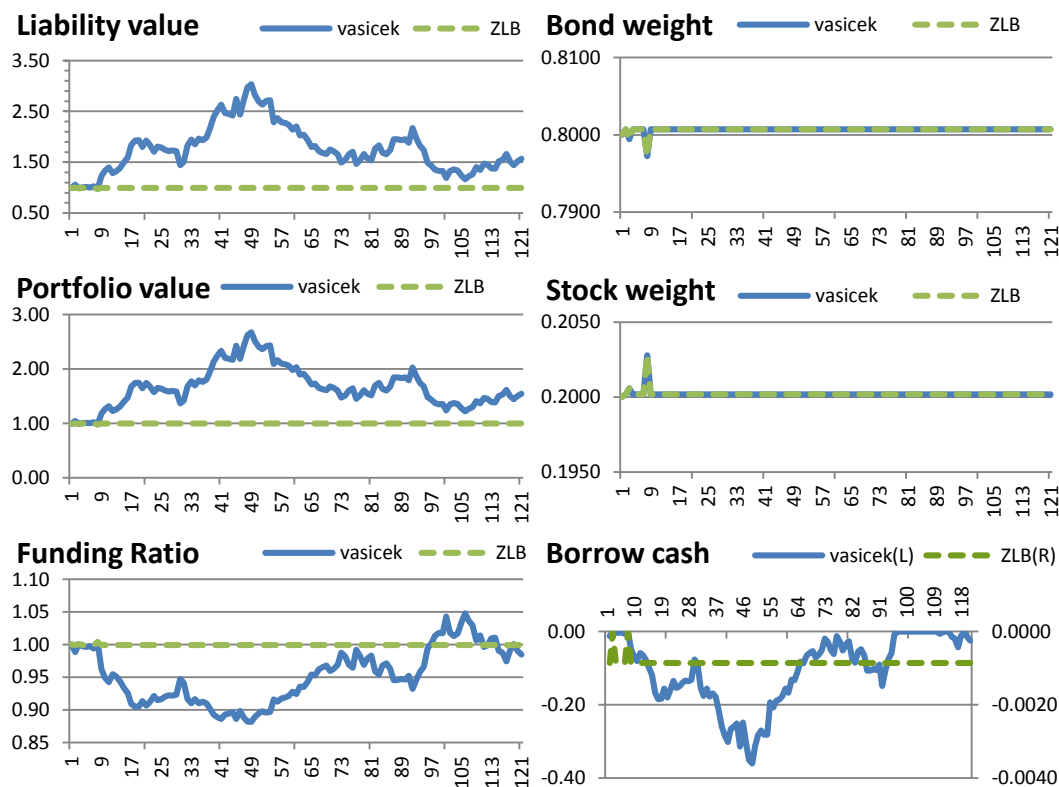


圖 十六、情境 A 借錢方案之結果總覽



由圖 十六可觀察到不同模型之差異

(a) Funding Ratio 下降幅度

Vasicek+ZLB 模型可減少 FR 下降幅度，因模型修正後利率下降程度受到限制。

(b) 借錢金額

Vasicek+ZLB 模型利率下降有限，負債價值較修正前小，借較少錢即可滿足投資需求。

總結此小節之觀察，模型修正前後對投資的影響：

模型修正後 Vasicek+ZLB 模型，將利率下方鎖住，減少 Funding Ratio 下降程度。因負債價值較低，可以借較少錢即達到投資需求。

VI.1.2 Vasicek 模型

負利率路徑、股價為常數時，選擇 Vasicek 模型，比較借錢與否，對投資的影響，如圖 一七所示。

	Equity with constant value 1		Equity UP/DOWN	
	Negative Rate	Positive Rate	Random Rate	
		Vasicek	Vasicek+ZLB	
Borrow		▲		
No Borrow		▲		

圖 一七、情境 A Vasicek 模型

可觀察到下列二事，

- (1) Funding Ratio 恆大於 0.8
- (2) 當利率波動，負債價值波動幅度將大於資產價值波動幅度

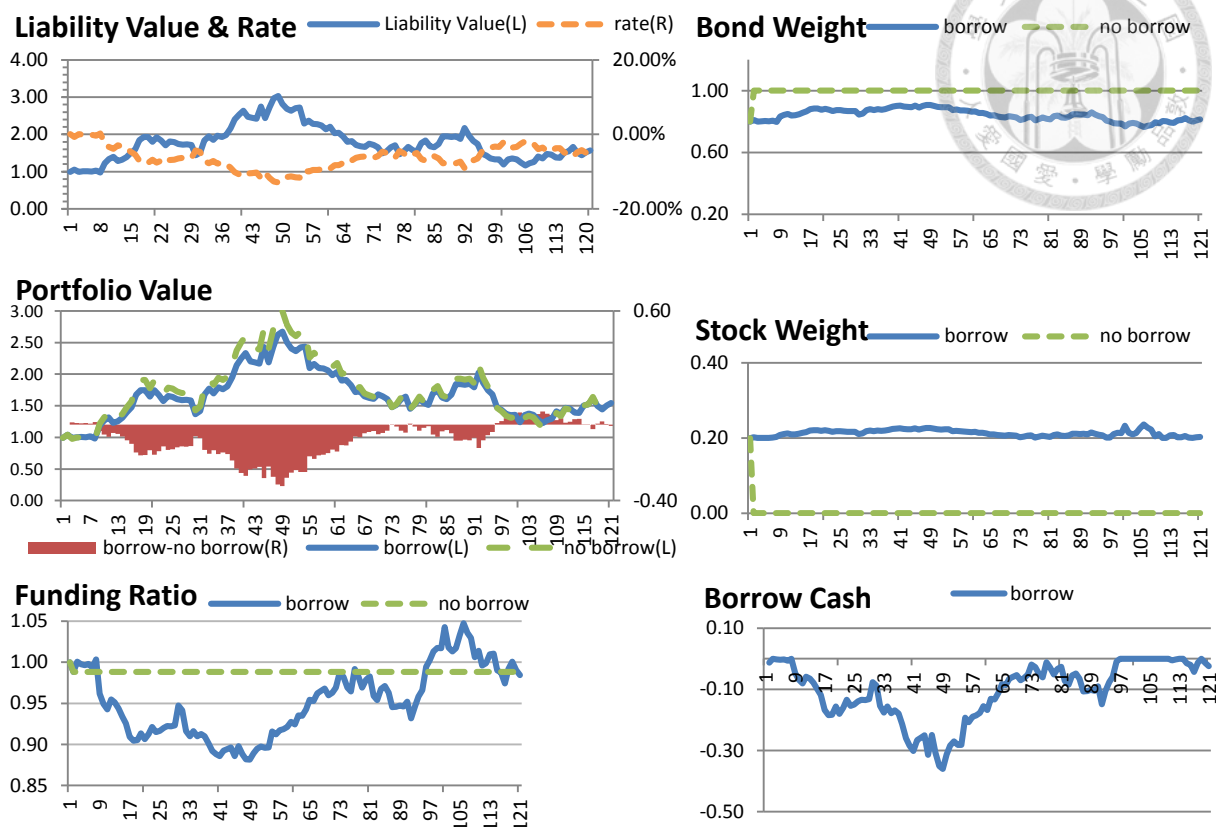


圖 十八、情境 A Vasicek 模型之結果總覽

由圖 十八可觀察到允許借錢與否之差異。

(a) 資產配置權重

一旦 Funding Ratio 小於 1，不借錢方案之股票投資權重將降為 0，無法再回升，投資於債券之權重亦固定於 1。而借錢方案之股債投資權重，仍保持彈性。

(b) Funding Ratio 波動

不借錢方案之 Funding Ratio 一旦小於 1，投資權重固定，其 Funding Ratio 亦固定。而借錢方案 Funding Ratio 則保持波動度，持續隨利率變化而改變。

以資產價格作為投資成效評斷標準，可得三種結果，並與 Funding Ratio 狀態有關：

$$(1) V_{port}^{borrow} = V_{port}^{non-borrow} : FR^{borrow} \& FR^{non-borrow} \geq 1$$

借錢與不借錢方案資產價值相同。發生於兩者之 Funding Ratio 恆大於 1。因



資產價值恆大於負債價值，未出現借錢需求，所以兩方案沒有差異。

此情境中，結果(1)並不存在，利率在第一期成為負值，使 Funding Ratio 小於 1，出現借款需求，兩方案價值出現差異。

(2) $V_{\text{port}}^{\text{borrow}} < V_{\text{port}}^{\text{non-borrow}}$: $FR^{\text{borrow}} \& FR^{\text{non-borrow}} < 1$

借錢方案資產價值小於不借錢方案。發生於兩者之 Funding Ratio 皆小於 1。當 Funding Ratio 小於 1，不借錢方案配置所有資金於無風險性資產。而借錢方案仍投資部份於股票。此時股票價值($V_{\text{Stock}} = 1$)小於債券($r < 0, V_{\text{bond}} > 1$)。因此不允許借錢方案資產價格較高。

此情境中，結果(2)發生於中段利率大幅下降的部分。

(3) $V_{\text{port}}^{\text{borrow}} > V_{\text{port}}^{\text{non-borrow}}$: $FR \text{ already } < 1 \& \text{ then } FR^{\text{borrow}} > 1$

借錢方案資產價值大於不借錢方案。發生於兩者之 Funding Ratio 曾經小於 1，而後借錢方案之 Funding Ratio 反彈，再次大於 1。當 Funding Ratio 小於一，不借錢方案配置所有資金於無風險性資產。而借錢方案仍投資部份於股票，配置保持彈性受將來利率變化影響。當未來利率回升使負債價值降低，允許借前方案將受惠於其好處，不借錢方案則否。

此情境中，結果(3)發生於後期利率反彈的時期。

總結此小節之觀察，借錢與否對投資的影響：

允許借錢方案使資產配置保有彈性，當利率回升，可受惠於負債價值下降之好處。不允許借錢方案，資產僅能配置於無風險性資產，無論未來利率變動，皆無法改變其資產配置。若利率繼續下降或持續低迷，此方式可固定 Funding Ratio，鎖住下方風險。



VI.1.3 Vasicek+ZLB 模型

負利率路徑、股價為常數時，選擇改進後之 Vasicek+ZLB 模型，比較借錢與否，對投資的影響，如圖 一九所示。

Equity with constant value 1		Equity UP/DOWN	
Negative Rate	Positive Rate	Random Rate	
	Vasicek	Vasicek+ZLB	
Borrow		▲	
No Borrow		▲	

圖 一九、情境 A Vasicek+ZLB 模型

可觀察到下列二事，

- (1) Funding Ratio 恆大於 0.8
- (2) 當利率波動，負債價值波動幅度將大於資產價值波動幅度

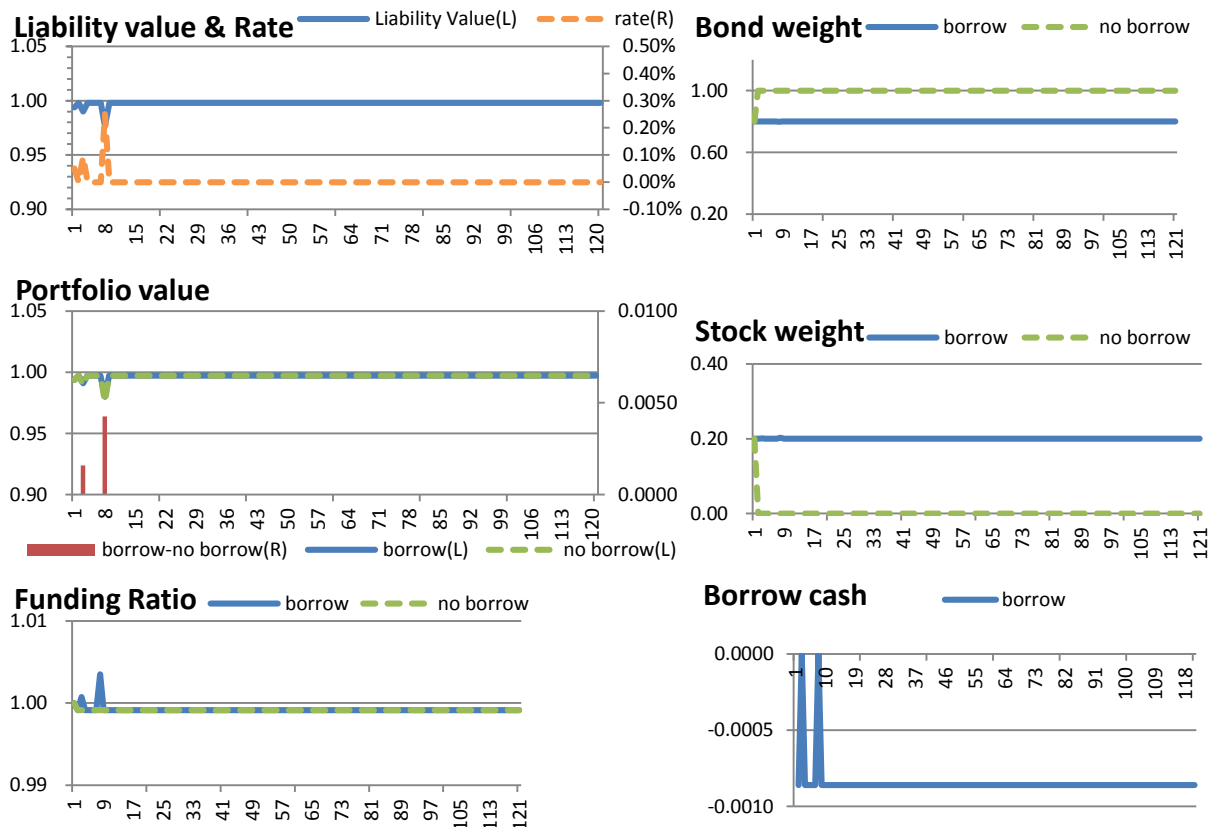


圖 二〇、情境 A Vasicek+ZLB 模型之結果總覽

由圖 二〇可觀察到允許借錢與否之差異。

(a) 資產配置權重

一旦 Funding Ratio 小於 1，不借錢方案之股票投資權重將降為 0，無法再



回升，投資於債券之權重亦固定於 1。而借錢方案之股債投資權重，仍保持彈性，此方案因 ZLB 使利率波動平緩，因此權重變化不明顯。

(b) Funding Ratio 波動

不借錢方案之 Funding Ratio 一旦小於 1，投資權重固定，其 Funding Ratio 亦固定。而借錢方案 Funding Ratio 則保持波動度，隨利率而改變。

以資產價格作為投資成效評斷標準，可得三種結果，並與 Funding Ratio 狀態有關：

(1) $V_{port}^{borrow} = V_{port}^{non-borrow} : FR^{borrow} \& FR^{non-borrow} \geq 1$

借錢與不借錢方案資產價值相同。發生於兩者之 Funding Ratio 恆大於 1。因資產價值恆大於負債價值，未出現借錢需求，所以兩方案沒有差異。

此情境中，結果(1)並不存在，利率在第一期成為負值，使 Funding Ratio 小於 1，出現借款需求，使兩方案價值出現差異。

(2) $V_{port}^{borrow} < V_{port}^{non-borrow} : FR^{borrow} \& FR^{non-borrow} < 1$

借錢方案資產價值小於不借錢方案。發生於兩者之 Funding Ratio 皆小於 1。當 Funding Ratio 小於 1，不借錢方案配置所有資金於無風險性資產。而借錢方案仍投資部份於股票。此時股票價值($V_{Stock} = 1$)小於債券($r < 0, V_{bond} > 1$)。因此不允許借錢方案資產價格較高。

此情境中，結果(2)發生於中後段。但因 Vasicek+ZLB 模型下，債券價格： $P(t, T) = G(t, T)e^{-r(t)F(t, T)}$ ， $r=0$ ， $P=$ 約為 0.9981，與股票價值 1 太過接近。因此借錢與不借錢方案兩者資產價格差異太小，從圖上無法辨別。

(3) $V_{port}^{borrow} > V_{port}^{non-borrow} : FR \text{ already } < 1 \& \text{ then } FR^{borrow} > 1$

借錢方案資產價值大於不借錢方案。發生於兩者之 Funding Ratio 曾經小於 1，而後借錢方案之 Funding Ratio 反彈，再次大於 1。當 Funding Ratio 小於一，不借錢方案配置所有資金於無風險性資產。而借錢方案仍投資部份於股票，配置保持彈性受將來利率變化影響。當未來利率回升使負債價值降低，允許借前方案將受惠於其好處，不借錢方案則否。

此情境中，結果(3)發生於第 2 及第 7 期利率彈升時。



總結此小節之觀察，借錢與否對投資的影響：

允許借錢方案使資產配置保有彈性，當利率回升，可受惠於負債價值下降之好處。不允許借錢方案，資產僅能配置於無風險性資產，無論未來利率變動，皆無法改變其資產配置。此方式可避免利率繼續下降或持續低迷的風險，但此情境使用 Vasicek+ZLB 模型，已將利率下方鎖住。

總結情境 A (負 X 軸) 負利率路徑下股價為常數下之比較：

允許借錢方案使資產配置保有彈性，可受惠於未來利率回升之好處。不允許借錢方式，僅能配置資產於無風險性資產，無法受惠於利率回升。但若利率繼續下降或持續低迷，則可固定 Funding Ratio，鎖住下方風險。

Vasicek+ZLB 模型，將利率下方鎖住，減少 Funding Ratio 下降程度。因負債價值較低，可以借較少錢即達到投資需求。

若借錢方案搭配 Vasicek+ZLB 模型，保持投資彈性的同時，亦可鎖住利率下方風險。



VI.2 情境II(第二象限) 負利率路徑下股票上漲

在負利率路徑、股票上漲情境中，分析模型及借款政策對投資成效之影響。

VI.2.1 允許借錢方案

負利率路徑、股價上漲時，選擇借錢方案，比較兩種模型，對投資的影響，如圖 二十一所示。

Equity with constant value 1		Equity UP	
	Negative Rate	Positive Rate	Random Rate
		Vasicek	Vasicek+ZLB
Borrow		▲	▲
No Borrow			

圖 二十一、情境II 允許借錢方案

可觀察到下列二事，

- (1) Funding Ratio 恆大於 0.8
- (2) 負債價值與資產價值波動幅度不再有絕對關係

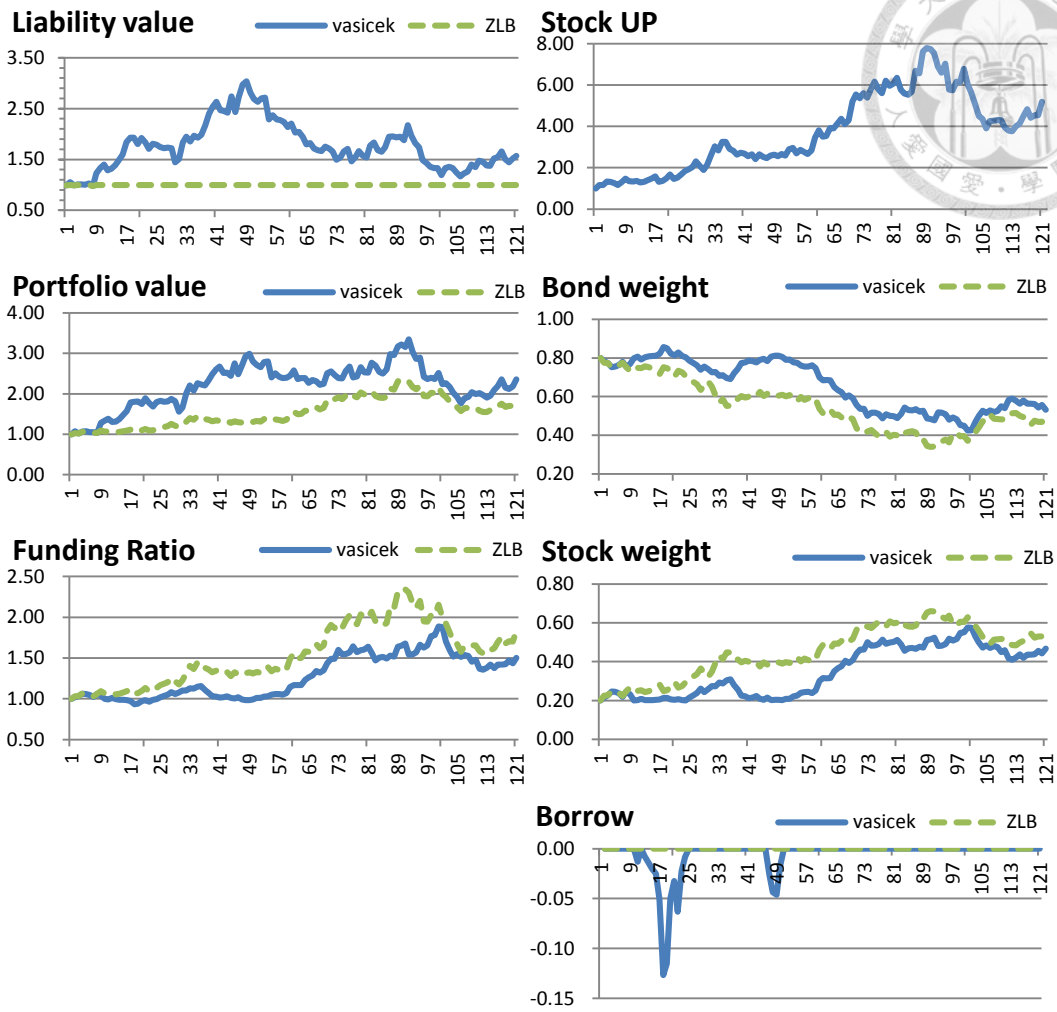
由圖 二十三可觀察到不同模型之差異

- (a) Funding Ratio 下降幅度

Vasicek+ZLB 模型可減少 FR 下降幅度，因模型修正後利率下降程度受到限制。

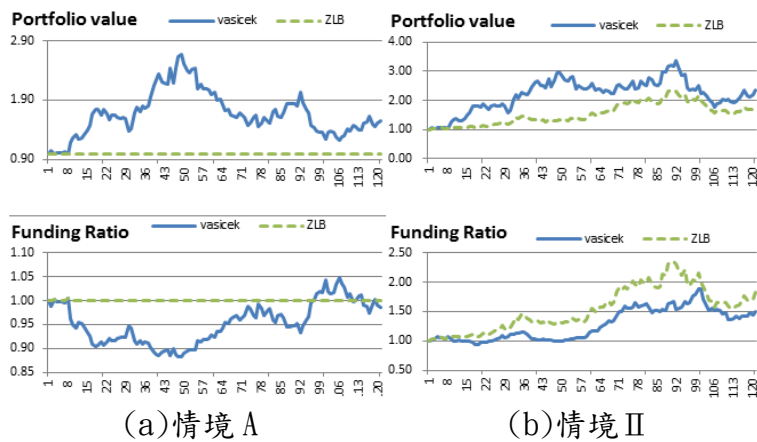
- (b) 借錢金額

Vasicek+ZLB 模型利率下降有限，負債價值較修正前小，此例中使 Funding Ratio 大於 1，無需借錢。



圖二十三、情境II 借錢方案之結果總覽

將情境II與情境A比較，觀察負利率路徑、允許借錢方案下，股票持平與上漲對投資結果影響，如圖二二所示。



(a)情境A

(b)情境II

圖二二、情境A與情境II比較 借錢方案1



觀察到情境 A 中，原先因為第一期利率下降，使其 Funding Ratio 小於 1，情境 II 因為股票上漲之故，使其 Funding Ratio 大於 1，直到第 10 期因利率急遽下降，大於股票效果才使 Funding Ratio 小於 1。

Vasicek+ZLB 模型之優勢也可以在此看到，如圖 二十四所示。因修正模型將利率下限鎖住，使 Funding Ratio 下降幅度相對於 Vasicek 小。

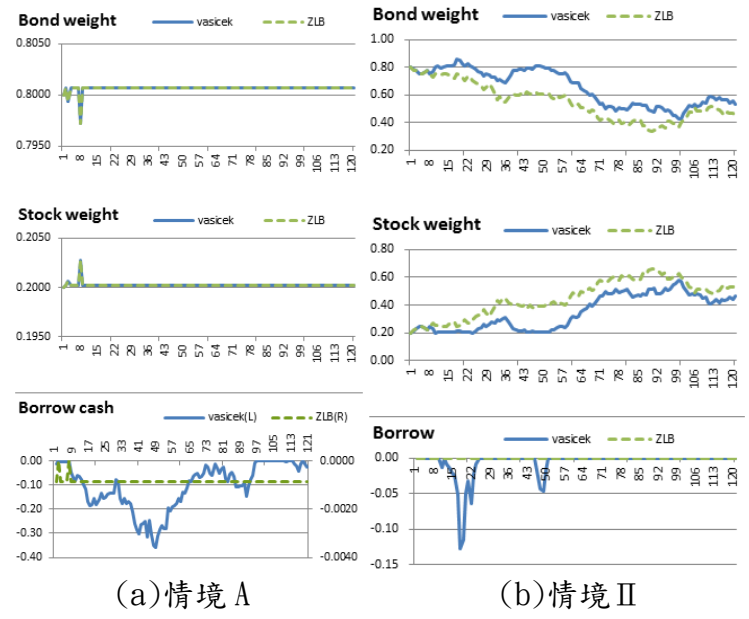


圖 二十四、情境 A 與情境 II 比較 借錢方案 2

觀察到情境 II 中，股票上漲、資產價值上升，使投資股票的份額持續增加 ($V_{port} - \text{保本的 } 80\% V_{lib}$)。借款金額較少原因則有兩個，受到股票上漲資產價值較大的影響。以及 Vasicek+ZLB 模型修正後將利率下限鎖住，使負債價值較低。



VI.2.2 Vasicek 模型

負利率路徑、股價上漲時，選擇 Vasicek 模型，比較借錢與否，對投資的影響，如圖 二五所示。

Equity with constant value 1		Equity UP	
	Negative Rate	Positive Rate	Random Rate
		Vasicek	Vasicek+ZLB
Borrow		▲	
No Borrow		▲	

圖 二五、情境 II Vasicek 模型

可觀察到下列二事，

- (1) Funding Ratio 恆大於 0.8
- (2) 負債價值與資產價值波動幅度不再有絕對關係

由圖 二十六可觀察到允許借錢與否之差異。

(a) 資產配置權重

一旦 Funding Ratio 小於 1，不借錢方案之股票投資權重將降為 0，無法再回升，投資於債券之權重固定於 1。而借錢方案之股債投資權重，仍保持彈性。

(b) Funding Ratio 波動

不借錢方案之 Funding Ratio 一旦小於 1，投資權重固定，其 Funding Ratio 亦固定。而借錢方案 Funding Ratio 則保持波動度，持續隨利率變化而改變。

以資產價格作為投資成效評斷標準，可得三種結果，並與 Funding Ratio 狀態有關：

$$(1) V_{port}^{borrow} = V_{port}^{non-borrow} : FR^{borrow} \& FR^{non-borrow} \geq 1$$

借錢與不借錢方案資產價值相同。發生於兩者之 Funding Ratio 恆大於 1。表示利率與股票對資產價值之影響，使資產價值恆大於負債價值，未出現借錢需求，所以兩方案沒有差異。

此情境中，結果(1)發生於初期，雖利率下降，但此時股票上漲影響較大。使 Funding Ratio 仍大於 1，所以無借錢需求。

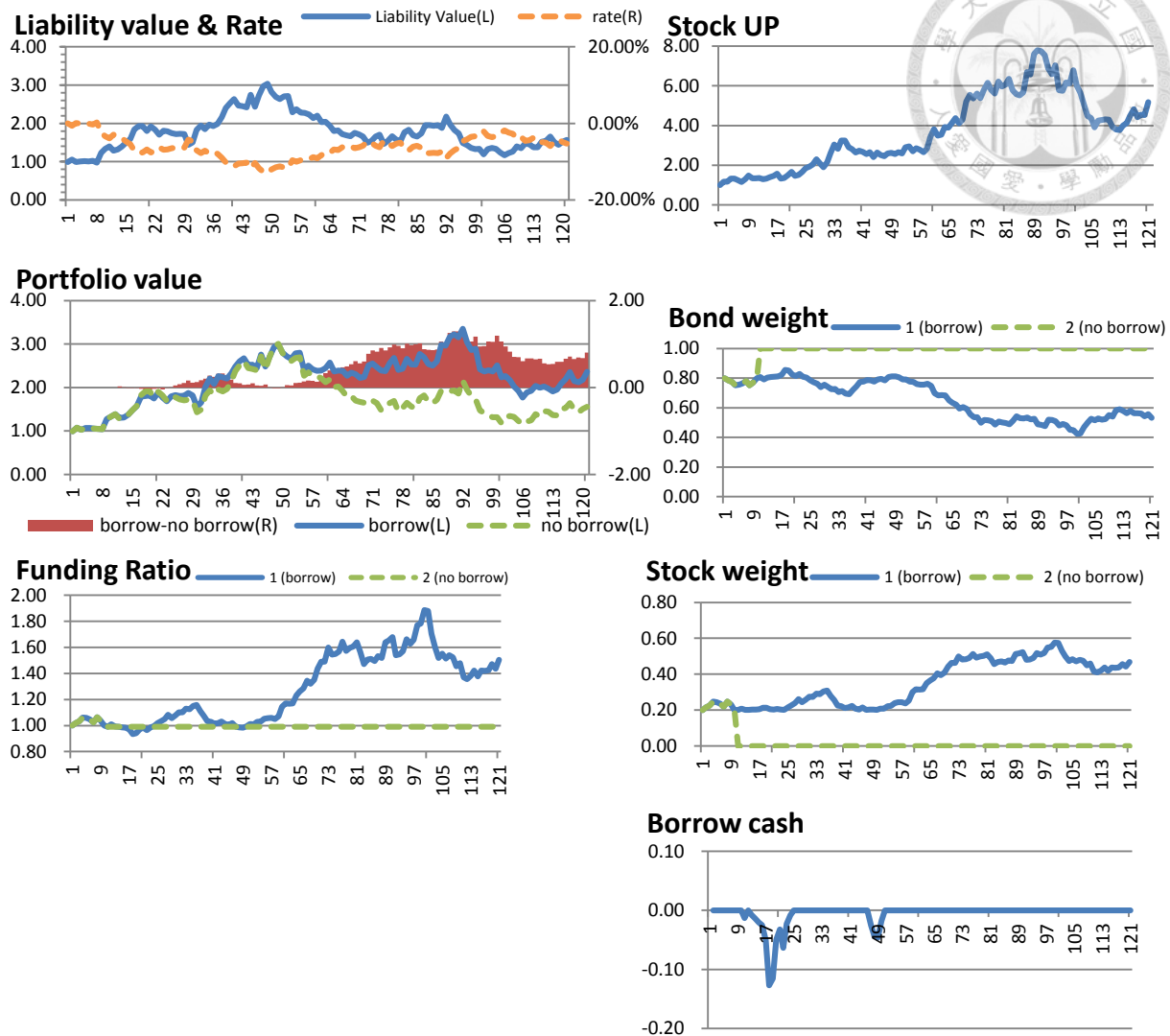


圖 二十六、情境 II Vasicek 模型之結果總覽

$$(2) V_{\text{port}}^{\text{borrow}} < V_{\text{port}}^{\text{non-borrow}} : FR^{\text{borrow}} \& FR^{\text{non-borrow}} < 1$$

借錢方案資產價值小於不借錢方案。發生於兩者之 Funding Ratio 皆小於 1。表示利率與股票對資產價值之影響，使資產價值小於負債價值，當 Funding Ratio 小於 1，不借錢方案配置所有資金於無風險性資產。而借錢方案仍投資部份於股票。此時股票價值小於債券價值。因此不允許借錢方案資產價格較高。

此情境中，結果(2)發生第 14 期至第 22 期，利率大幅下降，此時股票漲幅平緩，使兩者 $FR < 1$ 。

(3) $V_{port}^{borrow} > V_{port}^{non-borrow}$: FR already < 1 & then $FR^{borrow} > 1$

借錢方案資產價值大於不借錢方案。發生於兩者之 Funding Ratio 曾經小於 1，而後借錢方案之 Funding Ratio 反彈，再次大於 1。表示利率與股票對資產價值之影響，使借錢方案資產價值大於負債價值，使其 Funding Ratio 反彈後大於 1。當 Funding Ratio 小於一，不借錢方案配置所有資金於無風險性資產。而借錢方案仍投資部份於股票，配置保持彈性受將來利率變化影響。當未來利率回升使負債價值降低，或股票上漲，允許借前方案將受惠於其好處，不借錢方案則否。

此情境中，結果(3)從中期開始出現，於股票上漲明顯時期。

將此情境 II 與情境 A 比較，觀察負利率路徑、使用 Vasicek 模型下，股票持平與上漲對投資結果影響，如圖 二七所示。

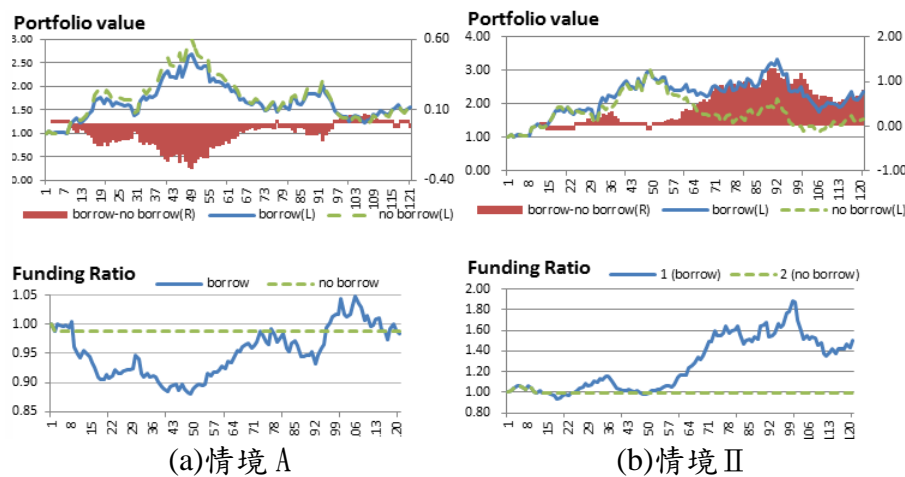


圖 二七、情境 A 與情境 II 比較 Vasicek 模型 1

觀察到情境 A 中，原先因為第一期利率下降，使其 Funding Ratio 小於 1，情境 II 因為股票上漲之故，使其 Funding Ratio 大於 1，直到第 10 期利率急遽下降，大於股票效果才小於 1。

借錢方案優勢也可以在此看到，如圖 二八所示。情境 A 中，Funding Ratio 受惠於利率回升，資產價值提高。情境 II 中更為明顯，除利率回升外更有股票上漲影響，資產價值提升明顯。兩者之不借錢方案則不受影響。

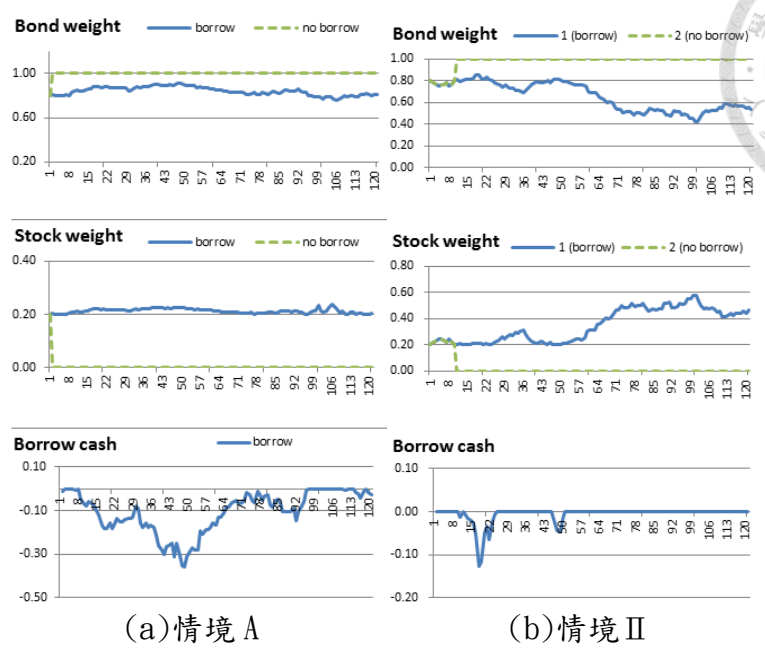
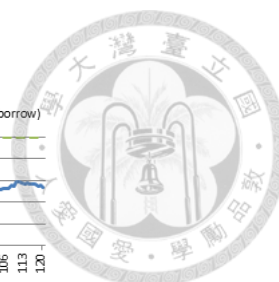


圖 二八、情境 A 與情境 II 比較 Vasicek 模型 2

情境 II 中，受股票價值上漲影響，資產價值上升使可投資於股票的份額持續增加($V_{port} - \text{保本的 } 80\%V_{lib}$)。同時因資產價值較大，若面臨借款需求，可借較少金額即達到需求。

VI.2.3 Vasicek+ZLB 模型

負利率路徑、股價上漲時，選擇改進後之 Vasicek+ZLB 模型，比較借錢與否對投資的影響，如圖 二九錯誤! 找不到參照來源。所示。

Equity with constant value 1		Equity UP	
Negative Rate	Positive Rate	Random Rate	
	Vasicek	Vasicek+ZLB	
Borrow		▲	
No Borrow		▲	

圖 二九、情境 II Vasicek+ZLB 模型

可觀察到下列二事，

- (1) Funding Ratio 恆大於 0.8
- (2) 負債價值與資產價值波動幅度不再有絕對關係

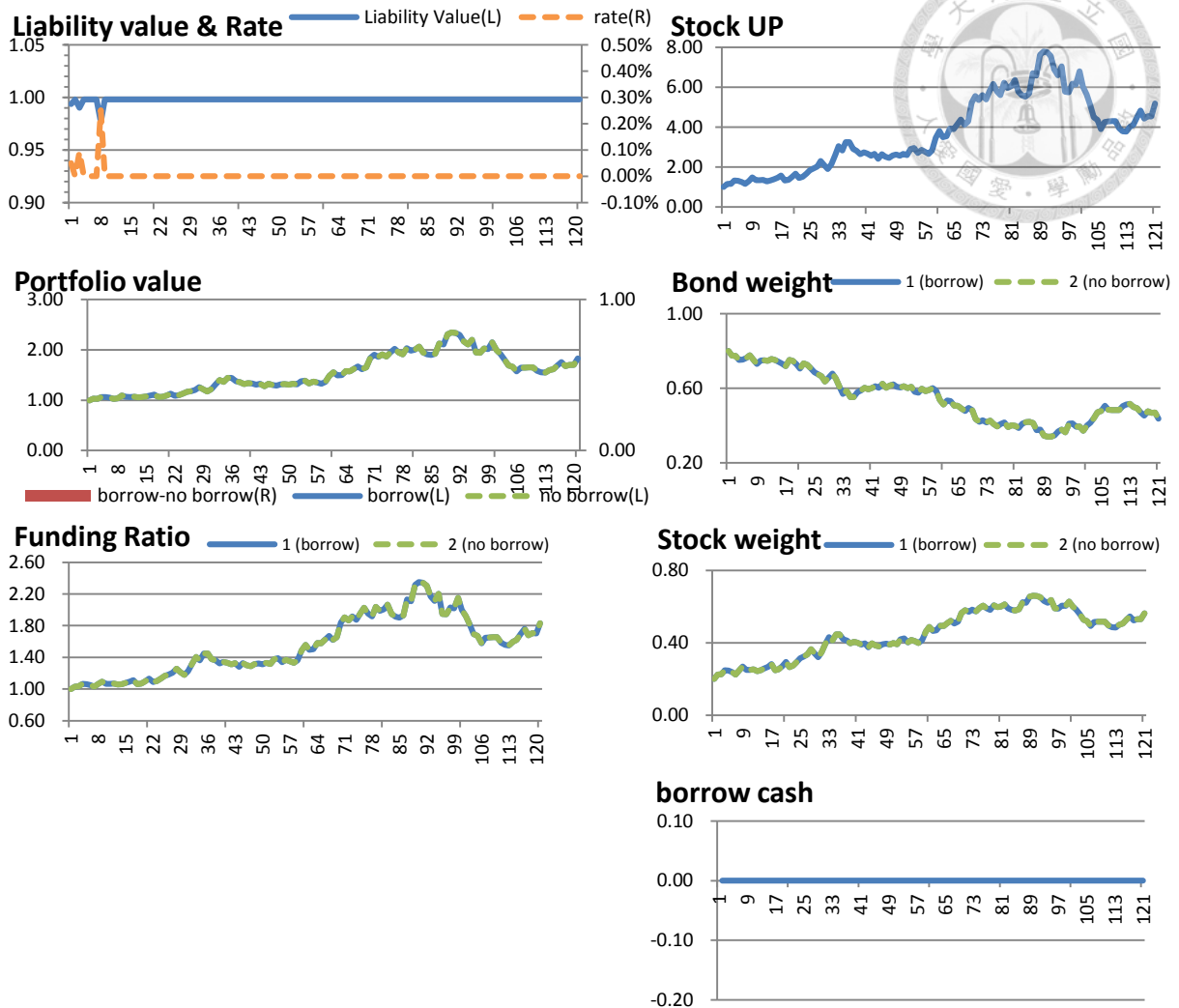


圖 三〇、情境 II Vasicek+ZLB 模型之結果總覽

由圖 三〇可觀察到受惠於股票上漲，且利率下限控制為 0，使投資方案 Funding Ratio 大於 1，無須借錢下兩方案沒有差異。

以資產價格作為投資成效評斷標準，可得三種結果，並與 Funding Ratio 狀態有關：

$$(1) V_{port}^{borrow} = V_{port}^{non-borrow} : FR^{borrow} \& FR^{non-borrow} \geq 1$$

借錢與不借錢方案資產價值相同。發生於兩者之 Funding Ratio 恆大於 1。表示利率與股票對資產價值之影響，使資產價值恆大於負債價值，未出現借錢需求，所以兩方案沒有差異。

此情境中，因利率下降有限，且股票上漲，因此全期 Funding Ratio 大於 1，無借錢需求。



(2) $V_{port}^{borrow} < V_{port}^{non-borrow}$: $FR^{borrow} \& FR^{non-borrow} < 1$

借錢方案資產價值小於不借錢方案。發生於兩者之 Funding Ratio 皆小於 1。表示利率與股票對資產價值之影響，使資產價值小於負債價值，當 Funding Ratio 小於 1，不借錢方案配置所有資金於無風險性資產。而借錢方案仍投資部份於股票。此時股票價值小於債券價值。因此不允許借錢方案資產價格較高。

此情境中，結果(2)沒有發生。

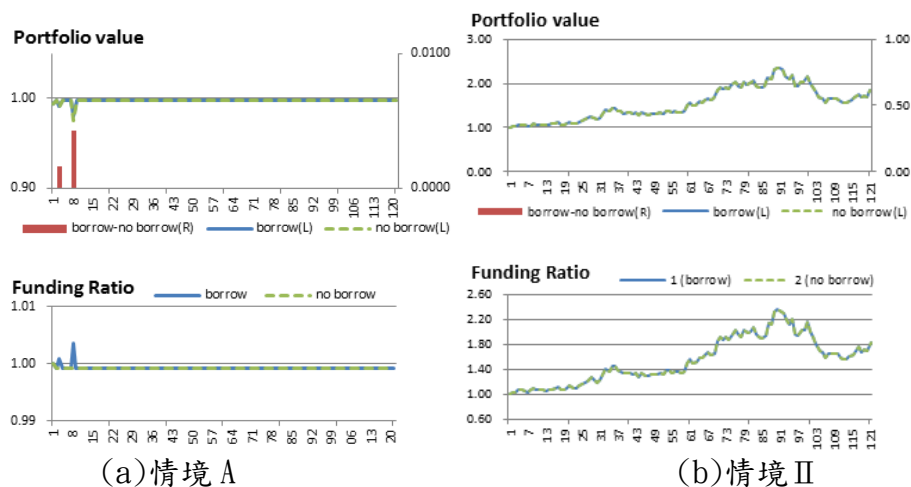
(3) $V_{port}^{borrow} > V_{port}^{non-borrow}$: $FR \text{ already } < 1 \& \text{ then } FR^{borrow} > 1$

借錢方案資產價值大於不借錢方案。發生於兩者之 Funding Ratio 曾經小於 1，而後借錢方案之 Funding Ratio 反彈，再次大於 1。表示利率與股票對資產價值之影響，使借錢方案資產價值大於負債價值，使其 Funding Ratio 反彈後大於 1。當 Funding Ratio 小於一，不借錢方案配置所有資金於無風險性資產。而借錢方案仍投資部份於股票，配置保持彈性受將來利率變化影響。當未來利率回升使負債價值降低，或股票上漲，允許借前方案將受惠於其好處，不借錢方案則否。

此情境中，結果(3) 沒有發生。

將情境 II 與情境 A 比較，觀察負利率路徑、使用 Vasicek+ZLB 模型下，股票持平與上漲對投資結果影響，如圖 三一所示。

情境 A 中，原先因為第一期利率下降，使其 Funding Ratio 小於 1，情境 II 因



(a) 情境 A

(b) 情境 II

圖 三一、情境 A 與情境 II 比較 Vasicek+ZLB 模型 1

為股票上漲之故，使其全期 Funding Ratio 大於 1。且因股票持續上漲，使 V_{port} 上升，Funding Ratio 持續增加。

圖 三二可發現，情境 II 中，受股票價值上漲影響，資產價值上升使可投資於股票的份額持續增加(V_{port} - 保本的 $80\%V_{lib}$)。同時因資產價值較大，甚至無借款需求。

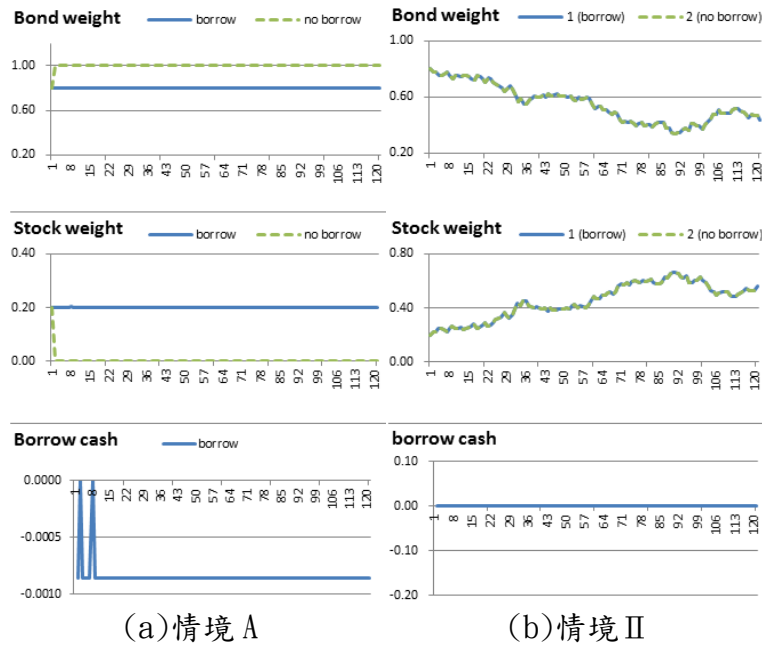


圖 三二、情境 A 與情境 II 比較 Vasicek+ZLB 模型 2

總結情境 II (第二象限) 負利率路徑下股票上漲下之比較：

允許借錢方案使資產配置保有彈性，可受惠於未來利率回升以及股票上漲之好處。不允許借錢方式，僅能配置資產於無風險性資產，無法受惠於利率回升與股票。

股價波動對於資產價格之影響明顯，隨著股價上升，基金資產價格提高，面臨借錢需求時，可以借較少錢。甚至避免借款需求的出現。

若使用 Vasicek+ZLB 模型，利率下方鎖住，減少 Funding Ratio 下降程度。因負債價值較低，可配置更多比重置股票部位。



VI.3 情境III(第三象限) 負利率路徑下股票下跌

在負利率路徑、股票下跌，分析模型及借款政策對投資成效之影響。

VI.3.1 允許借錢方案

負利率路徑、股價下跌時，選擇借錢方案，比較兩種模型，對投資的影響，如圖 三十三所示。

Equity with constant value 1		Equity DOWN	
Negative Rate	Positive Rate	Random Rate	
	Vasicek	Vasicek+ZLB	
Borrow	▲	▲	
No Borrow			

圖 三十三、情境III 允許借錢方案

可觀察到下列二事，

- (1) Funding Ratio 不再恆大於 0.8
- (2) 負債價值與資產價值波動幅度不再有絕對關係

由圖 三十五可觀察到不同模型之差異

(a) Funding Ratio 下降幅度

Vasicek+ZLB 模型可減少 FR 下降幅度，因模型修正後利率下降程度受到限制。

(b) 借錢金額

Vasicek+ZLB 模型利率下降有限，負債價值較修正前小，因此借錢也後少。

此情境中無論模型修正與否，股票下跌影響皆更為明顯。

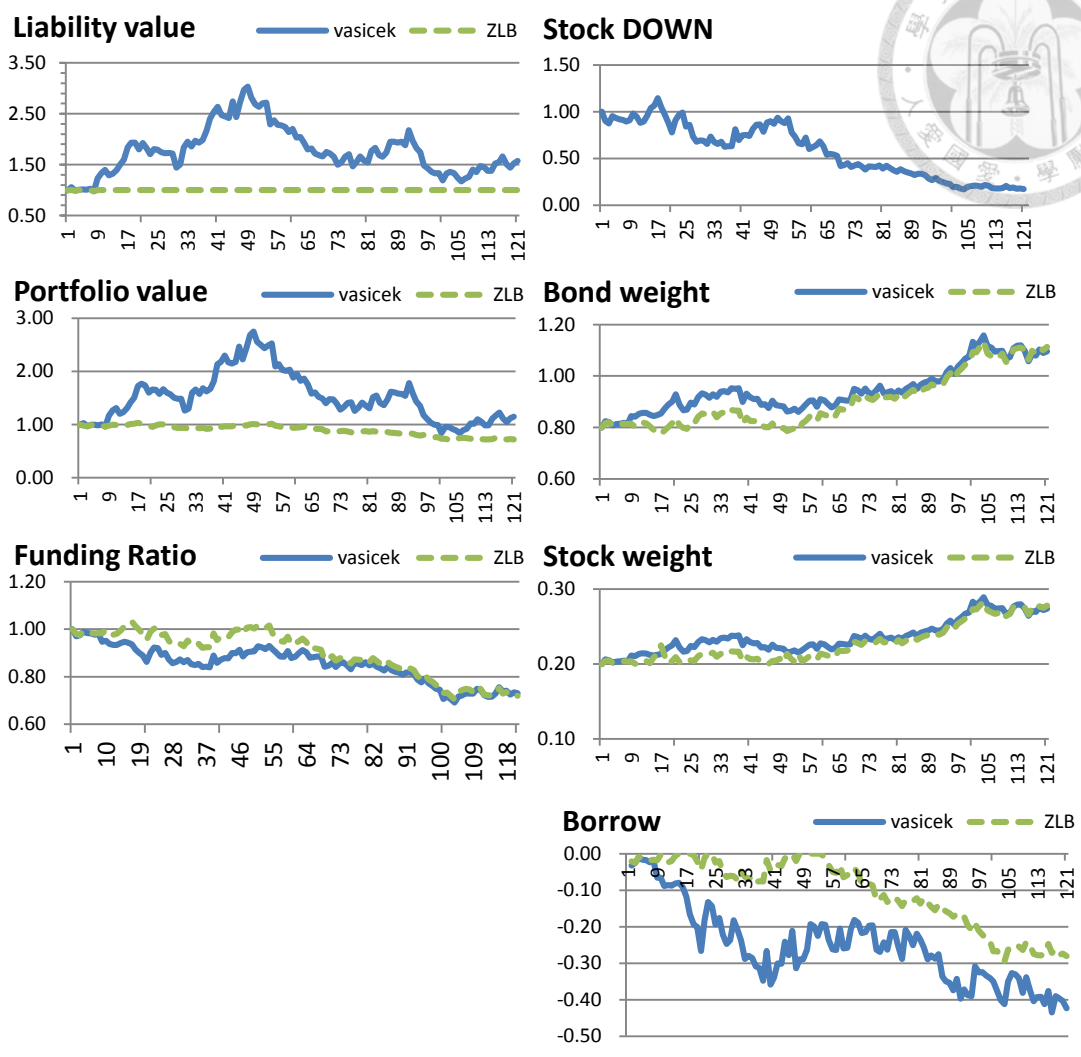
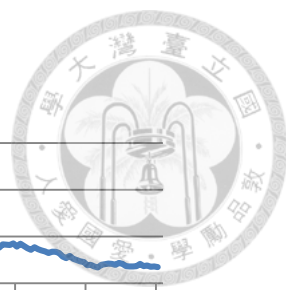
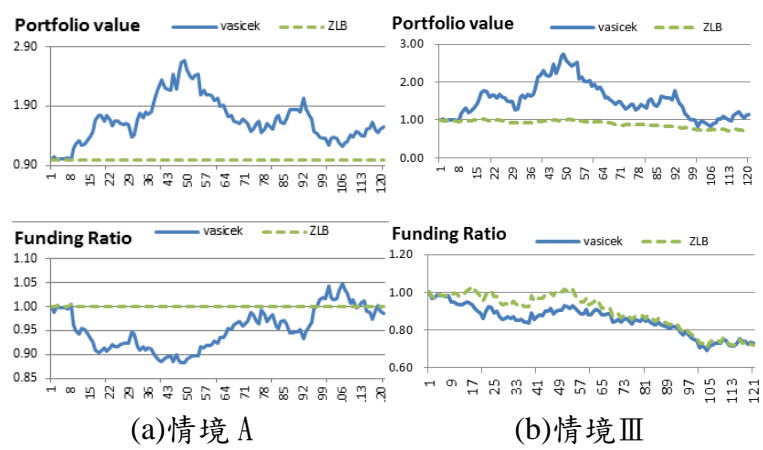


圖 三十五、情境III 借錢方案之結果總覽

將情境III與情境 A 比較，觀察負利率路徑、允許借錢下，股票持平與下跌對投資結果影響，如圖 三十四所示。



(a)情境 A

(b)情境III

圖 三十四、情境 A 與情境III比較 借錢方案 1



觀察到情境Ⅲ，股價下跌影響遠大於利率波動，使其兩種模型之 Funding Ratio 趨勢，皆與股票下跌趨勢相關性較高。Vasicek+ZLB 模型，將利率下限鎖住，減少 Funding Ratio 下降幅度之優勢在情境 A 中較明顯。

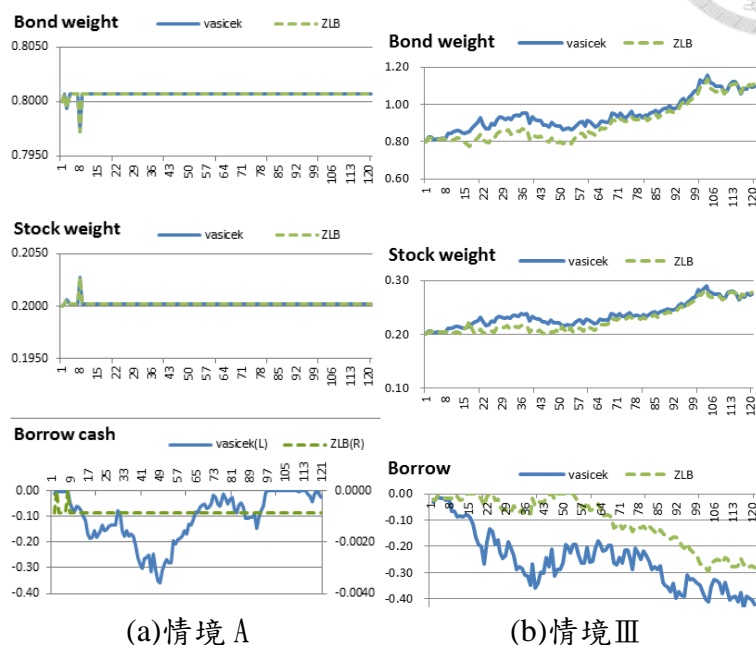


圖 三十六、情境 A 與情境Ⅲ比較 借錢方案 2

由圖 三十六可見，情境Ⅲ中，受股票下跌影響，資產價值下降，借款金額不斷增加，以維持投資比重，使投資於股票的份額持續增加(因借款增加，分母資產價值小)。

兩情形皆可觀察到 Vasicek+ZLB 模型之好處。因為將利率下限鎖住，負債價值提升有限，可借較少錢。但影響不及股價大幅下跌。



VI.3.2 Vasicek 模型

負利率路徑、股價下跌時，選擇 Vasicek 模型，比較借錢與否，對投資的影響，如圖 三七所示。

Equity with constant value 1		Equity DOWN	
Negative Rate		Positive Rate	Random Rate
		Vasicek	Vasicek+ZLB
Borrow		▲	
No Borrow		▲	

圖 三七、情境Ⅲ Vasicek 模型

可觀察到下列二事，

- (1) Funding Ratio 不再恆大於 0.8
- (2) 負債價值與資產價值波動幅度不再有絕對關係

由圖 三十八可觀察到允許借錢與否之差異。

(a) 資產配置權重

一旦 Funding Ratio 小於 1，不借錢方案之股票投資權重將降為 0，無法再回升，投資於債券之權重亦固定於 1。而借錢方案之股債投資權重，仍保持彈性。

(b) Funding Ratio 波動

不借錢方案之 Funding Ratio 一旦小於 1，投資權重固定，其 Funding Ratio 亦固定。而借錢方案 Funding Ratio 則保持波動度，持續隨利率變化而改變。

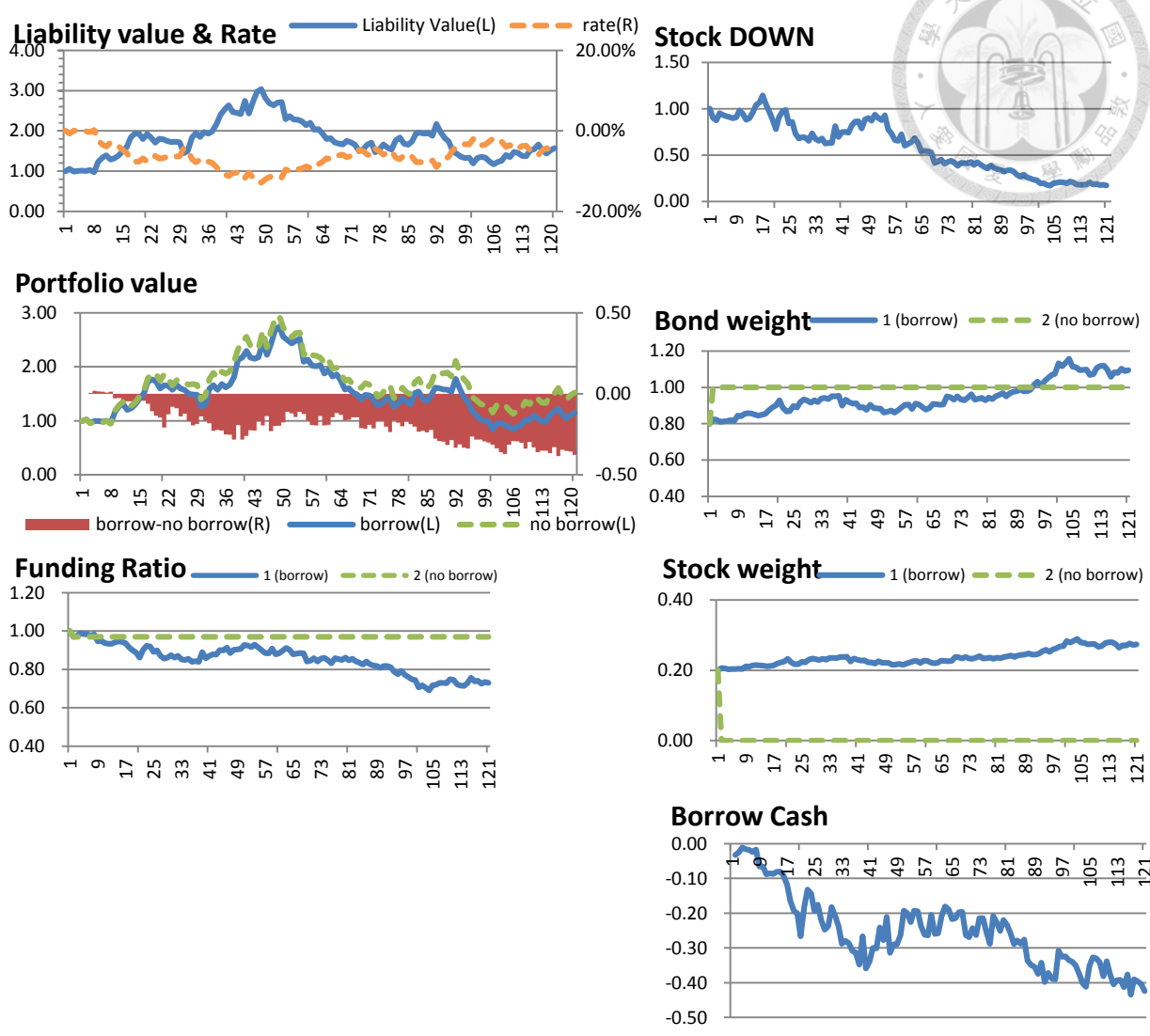
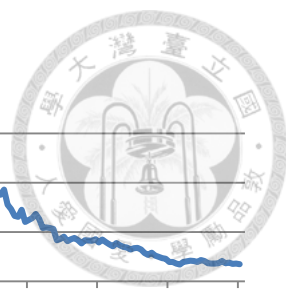


圖 三十八、情境III Vasicek 模型之結果總覽

以資產價格作為投資成效評斷標準，可得三種結果，並與 Funding Ratio 狀態有關：

$$(1) V_{port}^{borrow} = V_{port}^{non-borrow} : FR^{borrow} \& FR^{non-borrow} \geq 1$$

借錢與不借錢方案資產價值相同。發生於兩者之 Funding Ratio 恆大於 1。表示利率與股票對資產價值之影響，使資產價值恆大於負債價值，未出現借錢需求，所以兩方案沒有差異。

此情境中，結果(1)不存在。因利率在第一期即成為負值，同時股票下跌，使 Funding Ratio 小於 1，出現借款需求，使兩策略價值出現差異。



(2) $V_{port}^{borrow} < V_{port}^{non-borrow}$: $FR^{borrow} \& FR^{non-borrow} < 1$

借錢方案資產價值小於不借錢方案。發生於兩者之 Funding Ratio 皆小於 1。表示利率與股票對資產價值之影響，使資產價值小於負債價值，當 Funding Ratio 小於 1，不借錢方案配置所有資金於無風險性資產。而借錢方案仍投資部份於股票。此時股票價值小於債券價值。因此不允許借錢方案資產價格較高。

此情境中，結果(2)發生於中後段，此段利率大幅下降，且股票下跌，使兩者 Funding Ratio 小於 1。

(3) $V_{port}^{borrow} > V_{port}^{non-borrow}$: $FR \text{ already } < 1 \& \text{ then } FR^{borrow} > 1$

借錢方案資產價值大於不借錢方案。發生於兩者之 Funding Ratio 曾經小於 1，而後借錢方案之 Funding Ratio 反彈，再次大於 1。表示利率與股票對資產價值之影響，使借錢方案資產價值大於負債價值，使其 Funding Ratio 反彈後大於 1。當 Funding Ratio 小於一，不借錢方案配置所有資金於無風險性資產。而借錢方案仍投資部份於股票，配置保持彈性受將來利率變化影響。當未來利率回升使負債價值降低，或股票上漲，允許借前方案將受惠於其好處，不借錢方案則否。

此情境中，結果(3)出現於初期，此時利率反彈、且股票波動平緩，使借錢方案之 Funding Ratio 回升， V_{port} 價值提高。

將此情境 III 與情境 A 比較，觀察負利率路徑、使用 Vasicek 模型下，股票持平與下跌對投資結果影響，如圖 三九所示。

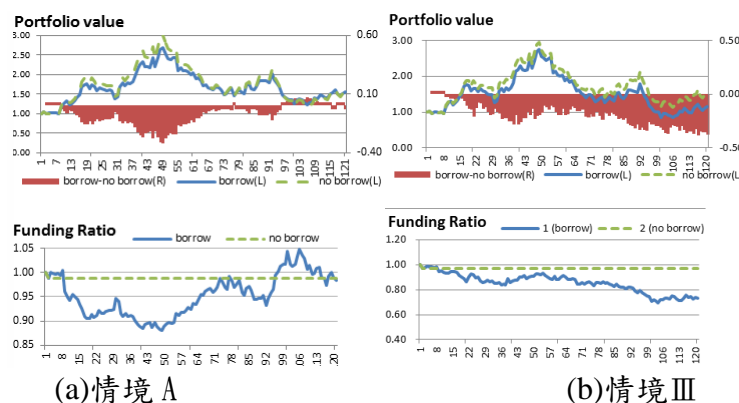


圖 三九、情境 A 與情境 III 比較 Vasicek 模型 1

情境 A 中，因為第一期利率下降，使其 Funding Ratio 小於 1。情境 III 加上股票下跌之故，使其 Funding Ratio 下跌更大。且因股票持續下跌，使 V_{port} 持續減少。

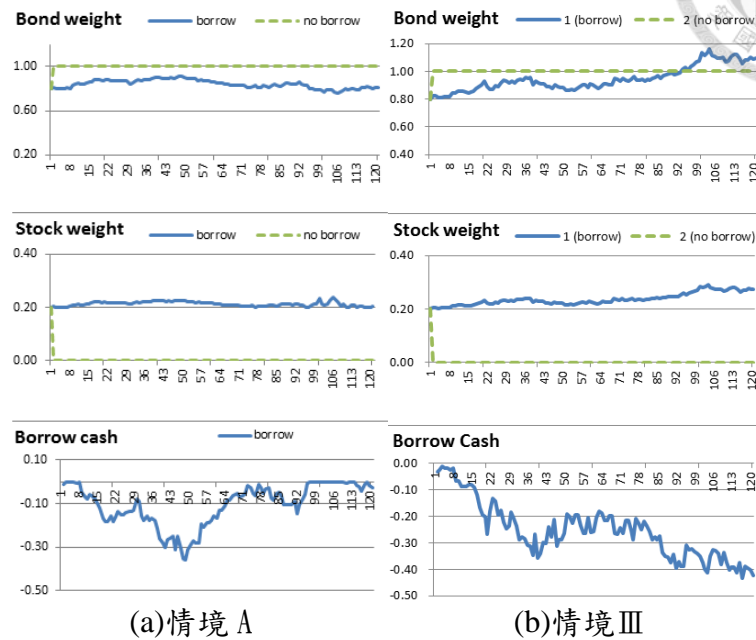


圖 四〇、情境 A 與情境 III 比較 Vasicek 模型 2

圖 四〇可觀察到，情境 III 中，受股票價值下跌影響，資產價值不斷減少，需不斷擴大借錢部位以維持投資於股票之部位。投資於股票之份額持續增加(因借款增加，分母資產價值小)。

VI.3.3 Vasicek+ZLB 模型

負利率路徑、股價上漲時，選擇改進後之 Vasicek+ZLB 模型，比較借錢與否對投資的影響，如圖 四一所示。

Equity with constant value 1		Equity Down
Negative Rate	Positive Rate	Random Rate
	Vasicek	Vasicek+ZLB
Borrow		▲
No Borrow		▲

圖 四一、情境 III Vasicek+ZLB 模型

可觀察到下列二事，

- (1) Funding Ratio 不再恆大於 0.8
- (2) 負債價值與資產價值波動幅度不再有絕對關係

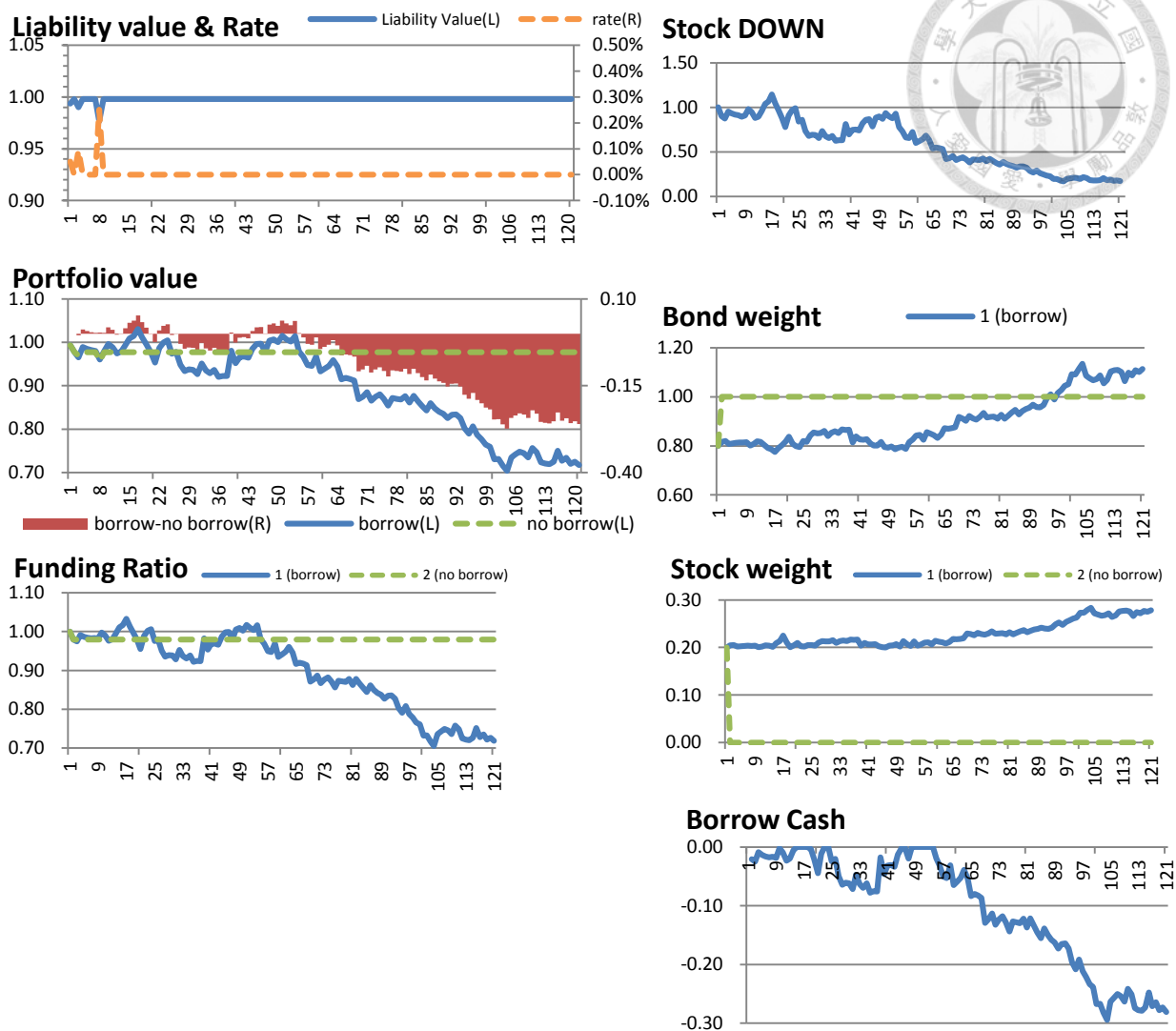


圖 四二、情境III Vasicek+ZLB 模型之結果總覽

由圖 四二可觀察到允許借錢與否之差異。

(a) 資產配置權重

一旦 Funding Ratio 小於 1，不借錢方案之股票投資權重將降為 0，無法再回升，投資於債券之權重亦固定於 1。而借錢方案之股債投資權重，仍保持彈性，此情境因股票下跌，使資產價值不斷減少，需擴大借錢部位以維持投資比例，投資份額也持續增加(因借款增加，分母資產價值小)。

(b) Funding Ratio 波動

不借錢方案之 Funding Ratio 一旦小於 1，投資權重固定，其 Funding Ratio 亦固定。而借錢方案 Funding Ratio 則保持波動度，持續隨利率與股票變化而改變。此例中因股價下跌，使借錢方案 Funding Ratio 下降。



以資產價格作為投資成效評斷標準，可得三種結果，並與 Funding Ratio 狀態有關：

$$(1) V_{port}^{borrow} = V_{port}^{non-borrow} : FR^{borrow} \& FR^{non-borrow} \geq 1$$

借錢與不借錢方案資產價值相同。發生於兩者之 Funding Ratio 恆大於 1。表示利率與股票對資產價值之影響，使資產價值恆大於負債價值，未出現借錢需求，所以兩方案沒有差異。

此情境中，結果(1)不存在。因利率在第一期即成為負值，同時股票下跌，使 Funding Ratio 小於 1，出現借款需求，使兩策略價值出現差異。

$$(2) V_{port}^{borrow} < V_{port}^{non-borrow} : FR^{borrow} \& FR^{non-borrow} < 1$$

借錢方案資產價值小於不借錢方案。發生於兩者之 Funding Ratio 皆小於 1。表示利率與股票對資產價值之影響，使資產價值小於負債價值，當 Funding Ratio 小於 1，不借錢方案配置所有資金於無風險性資產。而借錢方案仍投資部份於股票。此時股票價值小於債券價值。因此不允許借錢方案資產價格較高。

此情境中，結果(2)發生於中後段，此段利率平緩，股票下跌，使兩者 Funding Ratio 小於 1。

$$(3) V_{port}^{borrow} > V_{port}^{non-borrow} : FR \text{ already} < 1 \& \text{ then } FR^{borrow} > 1$$

借錢方案資產價值大於不借錢方案。發生於兩者之 Funding Ratio 曾經小於 1，而後借錢方案之 Funding Ratio 反彈，再次大於 1。表示利率與股票對資產價值之影響，使借錢方案資產價值大於負債價值，使其 Funding Ratio 反彈後大於 1。當 Funding Ratio 小於一，不借錢方案配置所有資金於無風險性資產。而借錢方案仍投資部份於股票，配置保持彈性受將來利率變化影響。當未來利率回升使負債價值降低，或股票上漲，允許借前方案將受惠於其好處，不借錢方案則否。

此情境中，結果(3)出現於中期，此時利率平緩反彈、股票微幅上漲部分，使借錢方案之 Funding Ratio 回升， V_{port} 價值提高。

將情境Ⅲ與情境 A 比較，觀察負利率路徑、使用 Vasicek+ZLB 模型下，股票持平與下跌對投資結果影響，如圖 四三所示。

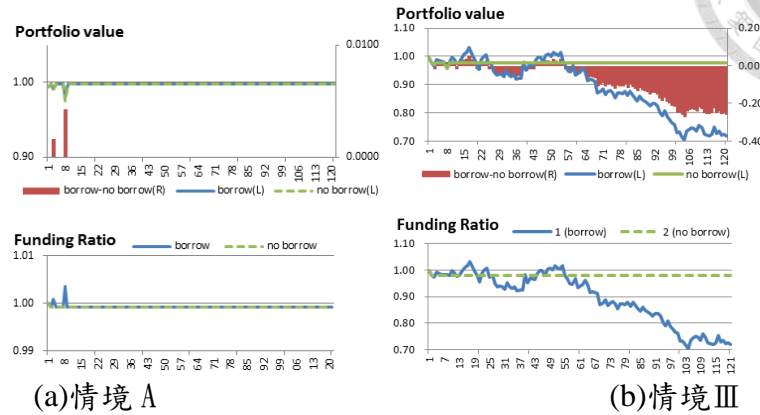


圖 四三、情境 A 與情境Ⅲ比較 Vasicek+ZLB 模型 1

情境 A 中，借錢方案因為利率被限制於 0 且股票不動，因此其效果於不借錢方案相似。而情境Ⅲ因為股票下跌之故，使 V_{port} 下降，為維持之投資比重，持續借錢投資股票，使其 Funding Ratio 持續下降，而不借錢方案反而倖免於此。

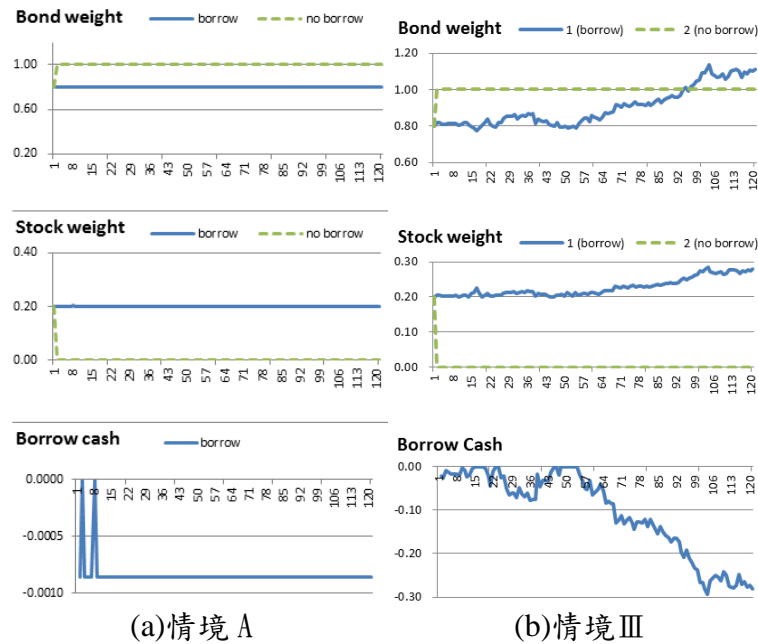


圖 四四、情境 A 與情境Ⅲ比較 Vasicek+ZLB 模型 2

圖 四四中可見，情境Ⅲ中，因股票下跌，使借錢方案資產價值降低，借款金額增加，以維持投資比重，使投資於股票的份額持續增加(因借款增加，分母資產價值小)。

總結情境Ⅲ(第三象限) 負利率路徑下股票下跌：

允許借錢方案使資產配置保有彈性，可受惠於未來利率回升之好處，同時也須承擔股票下跌之風險。不允許借錢方式，僅能配置資產於無風險性資產，無法受惠於利率回升。但也避免利率持續下降或股票下跌的風險。

Vasicek+ZLB 模型，將利率下方鎖住，減少 Funding Ratio 下降程度。但若在借錢方案下，模型改善影響將不明顯，因 Funding Ratio 與借款金額受股價下跌影響更大。

